

Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Engenharia Automotiva

# **Análise de Suspensão Automotiva utilizando Dispositivo *Inerter***

Autor: Marcos Paulo Miranda Costa  
Orientador: Prof(a). Dr(a). Suzana Moreira Ávila  
Coorientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes

Brasília, DF  
2022



Marcos Paulo Miranda Costa

**Análise de Suspensão Automotiva utilizando Dispositivo  
*Inerter***

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Automotiva) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Automotiva).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof(a). Dr(a). Suzana Moreira Ávila

Coorientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes

Brasília, DF

2022

Marcos Paulo Miranda Costa

## **Análise de Suspensão Automotiva utilizando Dispositivo *Inerter***

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Automotiva) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Automotiva).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 23 de Setembro de 2022:

---

**Prof(a). Dr(a). Suzana Moreira Ávila**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de  
Morais**  
Coorientador

---

**Professor Dr. André Murilo de  
Almeida Pinto**  
Convidado 1

---

**Prof. Me. Rafael Rodrigues da Silva**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2022

*Dedico este trabalho a Deus e a minha família, por todo o apoio, carinho e amparo em tantos momentos difíceis. Em especial, aos meus pais Valdemir Costa e Ernilde Miranda, cujo exemplo sempre me motivou a melhorar como pessoa e a vencer os desafios que a vida propõe.*



# Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus, por guardar e conceder saúde, paz e felicidade a mim e a minha família.

Aos meus pais, Valdemir Costa e Ernilde Miranda, por todo o suporte que me deram em prol da realização dos meus sonhos. Sem eles, jamais teria a oportunidade de estar na UnB.

A todos os meus familiares e amigos próximos, que sempre se dispuseram a me ajudar nos momentos de necessidade.

A todos os colegas, professores e funcionários da Universidade de Brasília, pelos ensinamentos, conversas e experiências que compartilharam durante essa caminhada.

A professora Suzana Moreira Ávila, que desde o início do curso me abriu as portas para a pesquisa acadêmica, atuando com extremo profissionalismo, dedicação e comprometimento.

# Resumo

O desenvolvimento de inovações no projeto de suspensões veiculares tornou possível a construção de veículos altamente seguros, confortáveis e dinamicamente eficientes. Destacam-se, na indústria automotiva atual, a evolução dos sistemas passivos de suspensão e os avanços tecnológicos adquiridos com a introdução de sistemas ativos e semiativos. O *inertter*, nesse contexto, surge como um componente mecânico inovador que corrobora com o propósito destes sistemas em promover redução dos níveis de vibrações, bem como a manutenção da estabilidade e aderência do veículo diante de uma série de perfis de pista. Este funciona como um elemento de inércia de dois terminais, estabelecendo uma força de resistência proporcional à aceleração relativa entre ambos. A constante de proporcionalidade é denominada inertância e é medida em quilogramas (kg). O presente trabalho busca efetuar um estudo paramétrico dos modelos de suspensão de 1/4 e 1/2 veículo contendo um dispositivo *inertter*, molas e amortecedor, avaliando os impactos dos parâmetros de rigidez, amortecimento e inertância nos níveis de vibração quando os modelos são excitados por um perfil de pista randômico. São derivados os mapas de resposta dos modelos no tempo e na frequência diante de variações destes parâmetros, comparando-se o desempenho de um sistema de suspensão passiva com *inertter* e um sistema convencional (passivo sem *inertter*). As análises foram efetuadas a partir do software *MATLAB*, no qual foram conduzidas as simulações numéricas. Os resultados obtidos demonstram que a aplicação do *inertter* pode promover melhorias em termos de reduções da aceleração da massa suspensa, deflexão da suspensão, carga dinâmica nos pneus e aceleração angular de arfagem, comumente atribuídos como indicativos de performance de um sistema de suspensão.

**Palavras-chaves:** *Inertter*. Suspensão. Estudo Paramétrico.

# Abstract

*The development of innovations in vehicle suspension design has made it possible to build highly safe, comfortable and dynamically efficient vehicles. Nowadays automotive industry, the evolution of passive suspension systems and the technological advances acquired with the introduction of active and semi-active systems stand out. The inerter, in this context, appears as an innovative mechanical component that corroborates with the purpose of these systems to promote a reduction in vibration levels, as well as the maintenance of vehicle stability and grip on a series of road profiles. It works as a two-terminal inertia element, establishing a drag force proportional to the relative acceleration between the terminals. The proportionality constant is called inertance and is measured in kilograms (kg). This work aims to carry out a parametric study of the quarter and half vehicle suspension models containing an inerter device, springs and damper, evaluating the impacts of stiffness, damping and inertance parameters on vibration levels when the models are excited by a random track profile. The model's response maps in time and frequency domains are derived in face of variations in these parameters, comparing the performance of a passive suspension system with an inerter and a conventional system (passive without inerter). Analysis were performed using MATLAB software, in which numerical simulations were carried out. The results obtained demonstrate that the application of the inerter can promote improvements in reducing the sprung mass acceleration, suspension deflection, dynamic tire load and pitch angular acceleration, commonly attributed as indicative of the performance of a suspension system.*

**Key-words:** *Inerter. Suspension. Parametric Study.*

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Protótipo de <i>inerters</i> do tipo fuso de esferas . . . . .	19
Figura 2 – Suspensão <i>McPherson</i> convencional e seus componentes . . . . .	24
Figura 3 – Principais componentes estruturais de um pneu . . . . .	24
Figura 4 – Sistema de eixos de um veículo . . . . .	27
Figura 5 – Principais fontes de ruído e vibração em um veículo e a classificação em bandas de frequência . . . . .	30
Figura 6 – Fluxograma do processo clássico de otimização . . . . .	32
Figura 7 – Fluxograma das etapas de um algoritmo genético padrão . . . . .	34
Figura 8 – Diagrama de corpo livre de um <i>inerters</i> . . . . .	35
Figura 9 – Diagrama Esquemático contendo as principais variantes do dispositivo <i>inerters</i> baseadas em volante de inércia . . . . .	38
Figura 10 – <i>Inerters</i> reais de pinhão e cremalheira (à esquerda) e fuso de esferas (à direita) . . . . .	38
Figura 11 – <i>Inerters</i> hidráulico . . . . .	39
Figura 12 – Diagrama Esquemático de um <i>inerters</i> do tipo fluido helicoidal . . . . .	40
Figura 13 – Protótipo de um <i>inerters</i> do tipo fluido helicoidal . . . . .	40
Figura 14 – Diagrama Esquemático de um <i>inerters</i> de fluido com canal helicoidal interno . . . . .	40
Figura 15 – Diagrama Esquemático (à esquerda) e Protótipo (à direita) de um <i>inerters</i> eletromagnético . . . . .	41
Figura 16 – Kimi Raikkonen no Grande Prêmio da Espanha de 2005, pilotando o <i>McLaren</i> MP4-20 rumo à vitória na primeira corrida após a implementação do <i>inerters</i> (ou “ <i>J-Damper</i> ”) . . . . .	42
Figura 17 – Estrutura básica de um <i>TMD</i> . . . . .	45
Figura 18 – Modelo de suspensão de 1/4 de veículo . . . . .	48
Figura 19 – Diagrama de suspensão convencional para estudo do sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	48
Figura 20 – Modelo de 1/4 de veículo para uma suspensão <i>ISD</i> . . . . .	50
Figura 21 – Modelo de suspensão de 1/2 veículo . . . . .	52
Figura 22 – Modelo de 1/2 veículo para uma suspensão <i>ISD</i> . . . . .	55
Figura 23 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de 1/4 de veículo para as variações da inertância $b$ e da rigidez $k_1$ . . . . .	62
Figura 24 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de 1/4 de veículo para as variações da inertância $b$ e do coeficiente de amortecimento $c$ . . . . .	63

Figura 25 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de $\frac{1}{4}$ de veículo para as variações da rigidez $K_s$ e do coeficiente de amortecimento $c$ . . . . .	64
Figura 26 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações das inertâncias e rigidez das molas principais (dianteira e traseira) . . . . .	66
Figura 27 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações das inertâncias e dos coeficientes de amortecimento (dianteiro e traseiro) . . . . .	66
Figura 28 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações de rigidez $K_{sf}$ e $K_{sr}$ e dos coeficientes de amortecimento $C_{sf}$ e $C_{sr}$ . . . . .	68
Figura 29 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações das inertâncias e rigidez das molas principais (dianteira e traseira) . . . . .	69
Figura 30 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações das inertâncias e dos coeficientes de amortecimento (dianteiro e traseiro) . . . . .	69
Figura 31 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de $\frac{1}{2}$ veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações de rigidez $K_{sf}$ e $K_{sr}$ e dos coeficientes de amortecimento $C_{sf}$ e $C_{sr}$ . . . . .	70
Figura 32 – Aplicação do AG de otimização combinando os parâmetros de inertância e rigidez . . . . .	71
Figura 33 – Aplicação do AG de otimização combinando os parâmetros de inertância e amortecimento . . . . .	72
Figura 34 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{4}$ de veículo diante de variações da rigidez $k_1$ e inertância $b$ , com destaque para o ponto ótimo encontrado pelo AG . . . . .	72
Figura 35 – Mapa de resposta em frequência do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{4}$ de veículo diante de variações da inertância $b$ e do amortecimento $c$ , com destaque para o ponto ótimo encontrado pelo AG . . . . .	73
Figura 36 – Gráficos comparativos no domínio do tempo entre os parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva <i>ISD</i> e passiva convencional de $\frac{1}{4}$ de veículo . . . . .	74
Figura 37 – Gráficos comparativos no domínio do tempo contendo os parâmetros de aceleração da massa suspensa, aceleração angular de arfagem e deflexão das suspensões dianteira e traseira nos modelos de $1/2$ veículo . . . . .	76

Figura 38 – Gráficos comparativos no domínio do tempo contendo os parâmetros de carga dinâmica dos pneus dianteiro e traseiro nos modelos de 1/2 veículo . . . . .	77
Figura 39 – <i>Inerter</i> vendido comercialmente . . . . .	78
Figura 40 – Veículo de <i>drag racing</i> . . . . .	79

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre níveis de conforto e valores de aceleração <i>RMS</i> ponderada	29
Tabela 2 – Propriedades do modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo da suspensão <i>ISD</i> . . . . .	61
Tabela 3 – Propriedades do modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo da suspensão convencional . .	63
Tabela 4 – Propriedades do modelo <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo utilizadas no estudo paramétrico . . . . .	65
Tabela 5 – Propriedades do modelo convencional de $\frac{1}{2}$ veículo utilizadas no estudo paramétrico . . . . .	67
Tabela 6 – Propriedades da suspensão passiva convencional utilizada no comparativo (modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo) . . . . .	74

# Lista de quadros

Quadro 1 – Valores <i>RMS</i> (ou eficazes) dos parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva <i>ISD</i> e passiva convencional de $\frac{1}{4}$ de veículo . . . .	75
Quadro 2 – Valores <i>RMS</i> (ou eficazes) dos parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva <i>ISD</i> e passiva convencional de $\frac{1}{2}$ veículo . . . . .	77



# Lista de abreviaturas e siglas

AG	Algoritmo Genético
NVH	<i>Noise, Vibration and Harshness</i>
ISD	<i>Inerter-Spring-Damper</i>
TMD	<i>Tuned-Mass-Damper</i>
TID	<i>Tuned-Inerter-Damper</i>
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
BS	<i>British Standards</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
MTBF	<i>Mean Time Before Failure</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
$M_s$	Massa Suspensa
$M_u$	Massa Não-Suspensa
$m_{uf}$	Massa Não-Suspensa Dianteira
$m_{ur}$	Massa Não-Suspensa Traseira
$C$	Coefficiente de Amortecimento Viscoso
$c$	Coefficiente de Amortecimento Viscoso (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/4 de veículo)
$c_{sf}$	Coefficiente de Amortecimento Dianteiro
$c_{sr}$	Coefficiente de Amortecimento Traseiro
$K_t$	Rigidez do Pneu
$k_{tf}$	Rigidez do Pneu Dianteiro
$k_{tr}$	Rigidez do Pneu Traseiro
$K_s$	Rigidez do Mola da Suspensão
$K_{sf}$	Rigidez do Mola da Suspensão Dianteira

$K_{sr}$	Rigidez do Mola da Suspensão Traseira
$k_{sf1}$	Rigidez da Mola Principal da Suspensão Dianteira (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)
$k_{sr1}$	Rigidez da Mola Principal da Suspensão Traseira (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)
$k_{sf2}$	Rigidez da Mola Secundária da Suspensão Dianteira (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)
$k_{sr2}$	Rigidez da Mola Secundária da Suspensão Traseira (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)
$z_s$	Deslocamento da Massa Suspensa
$\theta$	Ângulo de arfagem (Modelos de 1/2 veículo)
$z_1$	Deslocamento da Massa Suspensa Dianteira
$z_2$	Deslocamento da Massa Suspensa Traseira
$z_u$	Deslocamento da Massa Não-Suspensa
$z_{uf}$	Deslocamento da Massa Não-Suspensa Dianteira
$z_{ur}$	Deslocamento da Massa Não-Suspensa Traseira
$z_r$	Função de entrada (excitação) do perfil de pista
$z_{rf}$	Função de entrada (excitação) do perfil de pista no eixo dianteiro
$z_{rr}$	Função de entrada (excitação) do perfil de pista no eixo traseiro
$m_s$	Massa Suspensa
$m_u$	Massa Não-Suspensa
$k_t$	Rigidez do Pneu
$k_1$	Rigidez do Mola Principal (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/4 de veículo)
$k_2$	Rigidez do Mola Auxiliar (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/4 de veículo)
$b$	Inertância (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/4 de veículo)
$b_f$	Inertância do inerter dianteiro (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)
$b_r$	Inertância do inerter traseiro (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de 1/2 veículo)

$z_b$	Deslocamento do Inerter (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de $\frac{1}{4}$ de veículo)
$z_{bf}$	Deslocamento do Inerter Dianteiro (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo)
$z_{br}$	Deslocamento do Inerter Traseiro (Modelo de Suspensão <i>ISD</i> de $\frac{1}{2}$ veículo)

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	Contextualização	18
1.2	Justificativa	20
1.3	Objetivos Geral e Específicos	20
1.4	Metodologia	21
1.5	Organização do Trabalho	21
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>22</b>
2.1	<b>Sistema de Suspensão Veicular</b>	<b>22</b>
2.1.1	Principais Componentes do Sistema de Suspensão	23
2.1.2	Tipos de Suspensão	25
2.1.3	Principais Parâmetros de Desempenho	26
2.2	<b>Resposta Humana à Vibração</b>	<b>28</b>
2.2.1	Normativas	28
2.2.2	Classificação de Vibrações Veiculares	29
2.3	<b>Otimização</b>	<b>31</b>
2.3.1	Principais Conceitos de Otimização	31
2.3.2	Algoritmo Genético	33
2.4	<b>Inerter</b>	<b>34</b>
2.4.1	Tipos de <i>Inerter</i>	36
2.5	<b>Estado da Arte</b>	<b>41</b>
2.5.1	Contribuição do Trabalho para o Estado da Arte	46
<b>3</b>	<b>MODELOS TEÓRICOS DE DINÂMICA VEICULAR COM INERTER</b>	<b>47</b>
3.1	<b>Modelo de 1/4 de Veículo</b>	<b>47</b>
3.1.1	Modelo de 1/4 de Veículo com <i>Inerter</i>	49
3.2	<b>Modelo de 1/2 Veículo</b>	<b>52</b>
3.2.1	Modelo de 1/2 Veículo com <i>Inerter</i>	55
3.3	<b>Obtenção da Resposta em Frequência de um Sistema Dinâmico Submetido à Excitação Harmônica</b>	<b>58</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>61</b>
4.1	Mapas de Resposta em Frequência - Modelo de 1/4 de veículo	61
4.2	Mapas de Resposta em Frequência – Modelo de 1/2 veículo	64
4.3	Uso do Algoritmo Genético de Otimização nos Mapas de Resposta	70

4.4	<b>Comparativo de Performance entre Suspensão Passiva <i>ISD</i> e Suspensão Passiva convencional – Modelo de ¼ de Veículo</b> . . . . .	<b>73</b>
4.4.1	Comparativo de Performance entre Suspensão Passiva <i>ISD</i> e Suspensão Passiva Convencional – Modelo de ½ Veículo . . . . .	75
5	<b>CONCLUSÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>80</b>
5.1	<b>Trabalhos futuros</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>83</b>
	 <b>APÊNDICES</b>	 <b>87</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/4 DE VEÍCULO - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIAÇÕES DE INERTÂNCIA E RIGIDEZ</b> . . . . .	<b>88</b>
	<b>APÊNDICE B – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/4 DE VEÍCULO - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIAÇÕES DE INERTÂNCIA E AMORTECIMENTO</b> . . . . .	<b>90</b>
	<b>APÊNDICE C – CÓDIGO EM MATLAB: OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE PERFORMANCE DO MODELO DE 1/4 DE VEÍCULO DA SUSPENSÃO <i>ISD</i></b> . . . . .	<b>92</b>
	<b>APÊNDICE D – CÓDIGO EM MATLAB: OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE PERFORMANCE DO MODELO DE 1/4 DE VEÍCULO DA SUSPENSÃO CONVENCIONAL</b> . . . . .	<b>94</b>
	<b>APÊNDICE E – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO CONVENCIONAL DE 1/4 DE VEÍCULO - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA</b> . . . . .	<b>96</b>
	<b>APÊNDICE F – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/2 VEÍCULO (<i>BOUNCE</i>) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIAÇÕES DE INERTÂNCIA E RIGIDEZ</b> . . . . .	<b>98</b>

APÊNDICE G – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/2 VEÍCULO ( <i>BOUNCE</i> ) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIÇÕES DE INERTÂNCIA E AMORTECIMENTO	100
APÊNDICE H – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/2 VEÍCULO ( <i>PITCH</i> ) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIÇÕES DE INERTÂNCIA E RIGIDEZ . . . . .	102
APÊNDICE I – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO <i>ISD</i> DE 1/2 VEÍCULO ( <i>PITCH</i> ) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA PARA VARIÇÕES DE INERTÂNCIA E AMORTECIMENTO	104
APÊNDICE J – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO CONVENCIONAL DE 1/2 VEÍCULO ( <i>BOUNCE</i> ) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA . . . . .	106
APÊNDICE K – CÓDIGO EM MATLAB: MODELO CONVENCIONAL DE 1/2 VEÍCULO ( <i>PITCH</i> ) - OBTENÇÃO DO MAPA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA . . . . .	108
APÊNDICE L – CÓDIGO EM MATLAB: OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE PERFORMANCE DO MODELO DE 1/2 VEÍCULO DA SUSPENSÃO <i>ISD</i> . . . . .	110
APÊNDICE M – CÓDIGO EM MATLAB: OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS DE PERFORMANCE DO MODELO DE 1/2 VEÍCULO DA SUSPENSÃO CONVENCIONAL . . . . .	112

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização

As inovações e a evolução tecnológica da indústria automotiva trouxeram consigo o desenvolvimento de veículos altamente seguros, confortáveis e dinamicamente eficientes. Desde o advento de carroças com tração animal até a fabricação dos automóveis modernos, os projetos de sistemas de suspensão têm experimentado melhorias contínuas no intuito de estabelecer uma relação satisfatória entre conforto, aderência e estabilidade. Nesse contexto, ainda perdura o desafio para os engenheiros em alcançar o projeto de sistemas cada vez mais eficientes e que atendam a requisitos de performance por vezes conflitantes, sem que haja qualquer perda de competitividade ou elevação de custos.

Uma suspensão automotiva possui o compromisso em desempenhar uma série de funções essenciais à dinâmica veicular (ZHANG; AHMADIAN; GUO, 2012). Estas incluem a filtragem mecânica de irregularidades provenientes da pista de modo a garantir o isolamento dos ocupantes em relação a choques e vibrações, além do controle de cargas verticais para otimizar a frenagem, aceleração e dirigibilidade. O interesse crescente no aprimoramento de sistemas passivos, semiativos e ativos de suspensão, conseqüentemente, não se limita somente à pesquisa acadêmica, mas também às grandes montadoras de automóveis.

Sabe-se que um sistema de suspensão passiva é constituído apenas por elementos puramente mecânicos, sendo em geral representados por uma mola rígida (elemento elástico) paralela a um amortecedor (elemento dissipador de energia). Esse perfil de estrutura simples permite que estes sistemas sejam amplamente difundidos no mercado, pois combinam um baixo custo de produção e manutenção com confiabilidade, eficiência e fácil manuseio (HU; CHEN; SHU, 2014). Nos últimos anos, no entanto, um grande número de estudos tem se voltado à teoria de controle eletrônico em sistemas de suspensão ativa e semiativa, os quais admitem ajustes instantâneos dos parâmetros de rigidez e amortecimento de acordo com padrões de pista distintos. Tal característica tem como princípio o aumento da performance de conforto da suspensão em uma faixa maior de frequências, quando comparada a um sistema passivo. Todavia, segundo Shen et al. (2016), a inserção de ferramentas de controle e o acréscimo de complexidade inerente a estes sistemas os torna consideravelmente onerosos, sobretudo diante de requisitos elevados em termos de tempo de resposta. Por esse motivo, ao contrário dos sistemas de suspensão passiva, os sistemas semiativos e ativos ainda estão restritos a uma pequena parcela de automóveis de luxo.

Diante de tais circunstâncias, a concepção do *inertor* por [Smith \(2002\)](#) trouxe consigo uma alternativa inovadora à supressão de vibrações em suspensões veiculares. Trata-se de um dispositivo mecânico de dois terminais, capaz de gerar uma força de resistência proporcional à aceleração relativa entre ambos. A constante de proporcionalidade é denominada inertância e é medida em quilogramas (kg). Esta propriedade específica não advém de sua massa, mas sim de uma série de mecanismos que podem constituir-lo, como por exemplo: pinhão e cremalheira, fuso de esferas (ver [Figura 1](#)), hidráulicos e eletromagnéticos ([MA; BI; HAO, 2021](#)).

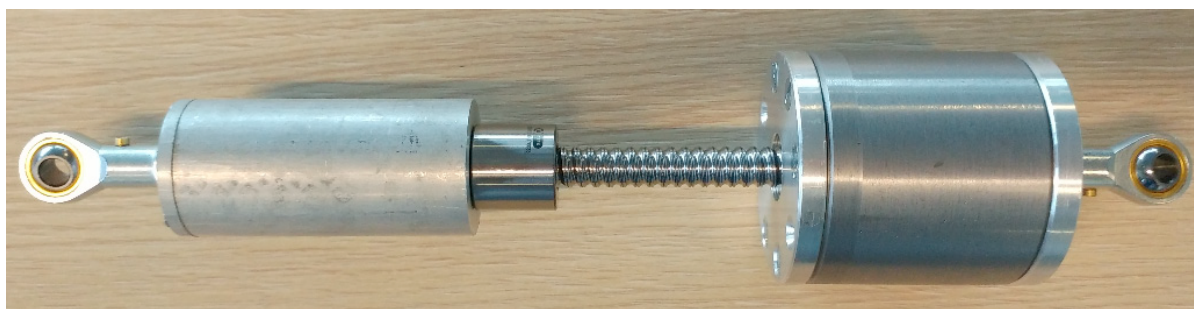


Figura 1 – Protótipo de *inertor* do tipo fuso de esferas  
Fonte: [Siami e Karimi \(2020\)](#)

Segundo [Lewis \(2019\)](#), o maior benefício que a introdução do *inertor* trouxe para os campos de vibrações e dinâmica veicular está no aumento do leque de alternativas para a construção de impedâncias mecânicas complexas, anteriormente limitadas apenas ao uso de molas e amortecedores. Assim sendo, ocorre uma ampliação das possibilidades de controle de vibrações.

A aplicabilidade do dispositivo na área de *NVH* (*Vehicle Noise, Vibration and Harshness*) ganhou maior relevância em 2008, a partir da descoberta de sua utilização pela equipe da *McLaren* de Fórmula 1 sob o pseudônimo “*J-Damper*” ([CHEN et al., 2009](#)). Esse episódio, somado aos ótimos resultados obtidos pela equipe na competição, motivou a abertura de diversos estudos posteriores com foco nos benefícios da integração do *inertor* em sistemas de suspensão veicular. Nesse cenário, destacam-se as simulações numéricas envolvendo a incorporação do dispositivo e seu princípio de funcionamento ideal aos modelos de suspensão de  $\frac{1}{4}$  de veículo,  $\frac{1}{2}$  veículo e de veículo inteiro para a avaliação dos parâmetros de conforto, aderência e estabilidade. Surge então o conceito de sistemas de suspensão *ISD*, isto é, *Inertor-Spring-Damper* ou *Inertor-Mola-Amortecedor*, em português.

A introdução e o aumento da relevância do *inertor* na Engenharia, contudo, não se limita somente ao setor de automóveis. As capacidades de resistir à aceleração relativa e de adicionar inércia a um sistema dinâmico sem que haja um incremento substancial de massa o tornam especialmente interessante para a indústria civil na criação de estruturas como o *TID* (*Tuned-Inertor-Damper* ou Amortecedor de *inertor* Sintonizado, em português),



projetado para a redução de vibrações de base em edifícios sujeitos a abalos sísmicos (LAZAR; NEILD; WAGG, 2014). Da mesma forma, o uso do dispositivo em suspensões de trens e veículos de carga pesados também vem sendo objeto de análise em muitas das pesquisas direcionadas ao ganho de desempenho destes sistemas.

## 1.2 Justificativa

Este estudo fundamenta-se na crescente necessidade por inovações pertinentes às áreas de dinâmica veicular e vibrações mecânicas, sobretudo no que tange ao desenvolvimento de sistemas de suspensão automotiva. A partir da integração do dispositivo *inertter* a estes sistemas, abre-se um grande número de alternativas de otimização e melhorias de desempenho em termos de conforto, aderência e estabilidade de um veículo, uma vez que as análises até então voltadas a esse propósito estavam limitadas a alterações nos elementos de rigidez e amortecimento. O fato deste constituir um componente mecânico passivo também corrobora com o surgimento de soluções simples e de baixo custo, tornando economicamente vantajosa sua implementação pela indústria automobilística.

## 1.3 Objetivos Geral e Específicos

O presente trabalho tem como objetivo geral avaliar a integração de um dispositivo *inertter* a um modelo simplificado de suspensão veicular passiva em termos de conforto, estabilidade e aderência.

Dentro desse escopo, são apresentados os seguintes objetivos específicos:

- Diferentemente dos estudos já realizados acerca do uso do *inertter* em automóveis, busca-se efetuar um estudo paramétrico dos modelos de suspensão de  $\frac{1}{4}$  e de  $\frac{1}{2}$  veículo integrados a um dispositivo *inertter*, avaliando os impactos dos parâmetros de rigidez, amortecimento e inertância nos níveis de vibração através da técnica dos mapas de resposta.
- Comparar o desempenho de um sistema de suspensão passiva *ISD* com uma suspensão passiva convencional (sem *inertter*) a partir da resposta dinâmica no domínio do tempo dos modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo submetidos a uma excitação de perfil de pista.
- Discutir os resultados com base nos valores indicativos de performance em conforto, estabilidade e aderência de sistemas de suspensão.

## 1.4 Metodologia

As análises conduzidas neste trabalho foram organizadas como se segue: A primeira parte consiste na revisão dos fundamentos teóricos essenciais e do estado da arte relativo ao uso de *inerters* em suspensões automotivas. A formulação matemática do modelo clássico de  $\frac{1}{4}$  de veículo é apresentada, bem como sua representação no espaço de estados. Em seguida, é definido o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo da suspensão *ISD* a ser estudada segundo a bibliografia proposta, de modo que também são apresentadas suas equações de movimento, forma matricial e representação no espaço de estados. É feita a descrição de como são obtidos os mapas de resposta em frequência de ambos os modelos, além dos gráficos de resposta dinâmica no domínio do tempo quando excitados por um perfil de pista. Os resultados referentes à comparação de desempenho dos dois tipos de suspensão são discutidos à luz dos valores de aceleração da massa suspensa (carroceria e chassis), deflexão da suspensão e carga dinâmica do pneu, comumente atribuídos como indicadores de performance de um sistema de suspensão. Por último, são feitas as conclusões finais em torno dos resultados obtidos. Todas as simulações numéricas foram conduzidas utilizando-se o *software MATLAB*.

## 1.5 Organização do Trabalho

O restante do trabalho é organizado em uma divisão de quatro capítulos. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão da bibliografia sobre suspensões veiculares, resposta humana à vibração, algoritmos de otimização e o dispositivo *inertor*, além do estado da arte no tocante ao uso deste último em sistemas de suspensão. No Capítulo 3 é apresentada toda a formulação matemática dos modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo utilizada como referência para as análises e simulações numéricas, seguida das características da obtenção da resposta em frequência de um sistema dinâmico quando submetido à excitação harmônica. No Capítulo 4 exibem-se os resultados obtidos para os mapas de resposta e a discussão acerca das melhorias impostas pela adição do *inertor* a um sistema de suspensão passiva. Por último, no Capítulo 5 são expressas as conclusões finais, com recomendações de trabalhos futuros.

## 2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão da bibliografia sobre os principais conceitos discutidos no presente trabalho. São apresentadas, de forma sucinta, as principais características de um sistema de suspensão veicular, bem como de seus componentes e princípios de funcionamento. Em seguida, são definidos os parâmetros fundamentais de performance deste sistema, os aspectos da resposta humana a vibrações mecânicas e a importância do uso de técnicas de otimização em Engenharia, com enfoque em algoritmos genéticos. Por último, faz-se uma descrição completa do dispositivo *inertor*, com dados sobre sua origem, formulação matemática, aplicações na indústria e tipos de *inerters* reais, além do estado da arte atual.

### 2.1 Sistema de Suspensão Veicular

O sistema de suspensão veicular compreende o conjunto de peças responsáveis por conectar o chassi às rodas, sendo responsável pela sustentação do peso do veículo, absorção de vibrações oriundas de irregularidades do terreno, bem como da manutenção de sua aderência e estabilidade. Stone e Ball (2004) definem em três funções primárias o propósito de um sistema de suspensão:

**1<sup>a</sup>) Isolar os passageiros de quaisquer impactos ou vibrações provenientes do solo (conforto):** Normalmente, em projetos de sistemas de suspensão, deseja-se promover o conforto dos ocupantes de um veículo o máximo possível. Portanto, o sistema deve ser capaz de absorver eventuais choques e amortecer as vibrações que advêm de perfis de pista irregulares, com variações mínimas do seu espaço de trabalho.

**2<sup>a</sup>) Aprimorar a mobilidade:** A suspensão estabelece o espaço entre a pista e o assoalho de um veículo. Também fornece estabilidade lateral e longitudinal, além de resistir à rolagem do chassi.

**3<sup>a</sup>) Promover controle do veículo:** Um sistema de suspensão tem como uma de suas atribuições reagir às forças associadas ao pneu, sejam elas longitudinais (aceleração e frenagem) ou laterais (esterçamento). Estão ainda incluídos, nesse contexto, os torques de aceleração e frenagem. Ademais, o sistema também é incumbido de manter as quatro rodas do veículo em contato com a pista (aderência), conforme os ângulos de direção e camber adequados para a superfície do terreno.

### 2.1.1 Principais Componentes do Sistema de Suspensão

A configuração clássica e convencional de um sistema de suspensão admite três tipos principais de componentes que, segundo Savaresi et al. (2010), compreendem os seguintes elementos:

**1º) Um elemento elástico:** Este elemento é comumente representado por uma mola helicoidal, de maneira que seu comportamento é regido pela Lei de Hooke. Isso significa que o mesmo gera uma força elástica restauradora na mesma direção e sentido oposto à força externa, isto é, opondo-se ao deslocamento vertical da suspensão. Dentre suas funções, estão incluídos o suporte à massa do veículo e o armazenamento da energia mecânica proveniente das excitações induzidas por irregularidades do terreno.

**2º) Um elemento dissipador de energia (amortecedor):** Este elemento, quando se trata de suspensões automotivas, é tipicamente associado a um amortecedor de fluido viscoso. Sua força dissipadora (ou de amortecimento) é proporcional à velocidade do corpo vibratório, ou seja, à velocidade de deslocamento da suspensão. Desse modo, o fluido oferece resistência à vibração do sistema, fazendo com que sua energia seja dissipada. O papel do amortecedor, portanto, torna-se fundamental na estabilidade e no comportamento dinâmico da suspensão.

**3º) Elementos de conexão:** Estão incluídos neste grupo de elementos todos os componentes atrelados à conexão da massa suspensa (carroceria e chassis) com a massa não suspensa (conjunto roda-pneu). Como exemplos, podem ser citados as buchas de borracha, coxins, barra estabilizadora, pivô e braço oscilante (ou bandeja de suspensão).

Na Figura 2 é exibido um exemplo de suspensão *McPherson*, cuja estrutura simples, eficiência e fácil manutenção a tornou extremamente popular na indústria automobilística. Nela é possível identificar com clareza cada um dos três tipos principais de componentes supramencionados.

O pneu constitui outro componente indispensável na análise de suspensões veiculares. É por meio da interação pneu-solo que surgem a maioria das forças de excitação responsáveis por vibrações mecânicas em um veículo. As funções mais importantes de um pneu, segundo Svendenius (2007), consistem em reduzir as vibrações advindas de irregularidades na pista, suportar cargas verticais, laterais e longitudinais do veículo e garantir um alto coeficiente de atrito no contato com a superfície, permitindo a transferência das forças de tração e frenagem e a alteração/manutenção de sua direção diante da presença de forças laterais. A estrutura do pneu tem como componente principal a carcaça, a qual compreende múltiplas camadas de cintas rígidas (lonas) que mantêm o seu formato e

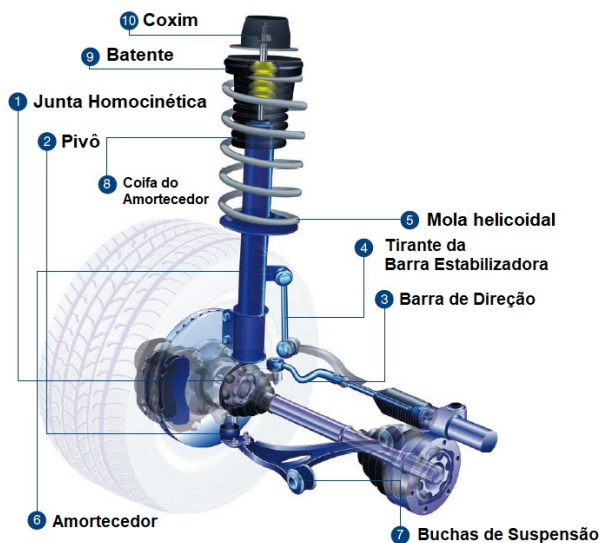


Figura 2 – Suspensão *McPherson* convencional e seus componentes  
Adaptado de: [Pinheiro \(2020\)](#)

resistem à tensão oriunda do ar comprimido, choques e ao peso do veículo. Fios de aço de alta resistência (talões) fixam o pneu na roda e evitam o vazamento de ar, além de resistir, em conjunto com as cintas, às cargas aplicadas. Toda essa estrutura é envolvida pela banda de rodagem, sendo esta a parte do pneu que fica em contato direto com o chão. Nela está presente um composto de borracha resistente ao desgaste, cuja função é proteger a carcaça de cortes e perfurações e desenvolver o atrito com a pista. Na banda de rodagem também estão contidos os sulcos, os quais detêm as funções de drenagem de água, refrigeração do pneu e manutenção da aderência do veículo em pisos secos e molhados. Na Figura 3 é apresentado um esquemático da estrutura em questão.

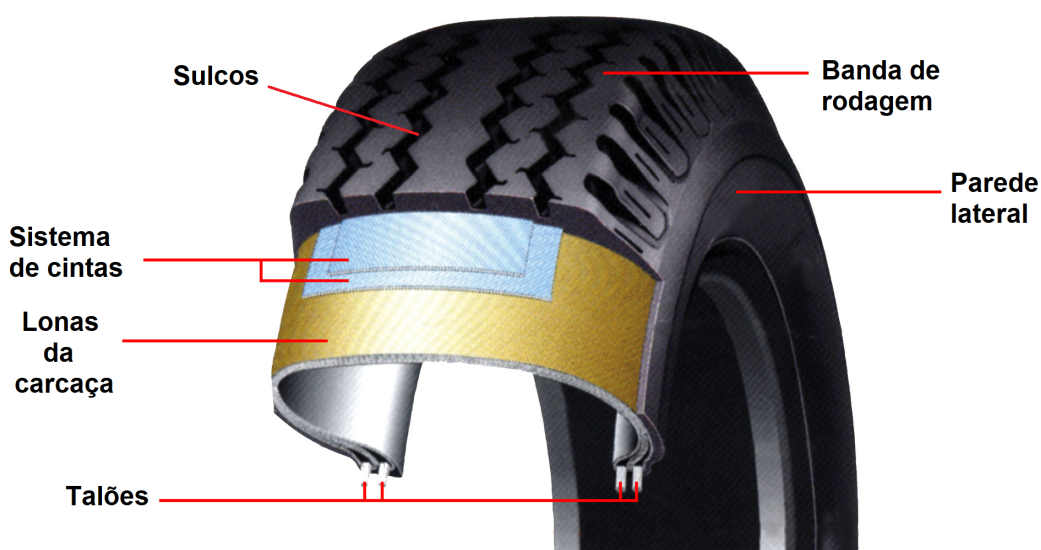


Figura 3 – Principais componentes estruturais de um pneu  
Adaptado de: [XDRTruck \(2020\)](#)

Os pneus são classificados conforme a disposição de suas lonas em radiais e diagonais. Como o nome sugere, os pneus radiais possuem lonas dispostas radialmente ao longo da carcaça, de modo que os cordonéis das lonas fazem um ângulo de  $90^\circ$  com uma linha imaginária no centro da banda de rodagem. Já os pneus diagonais possuem lonas posicionadas de talão a talão, com cordonéis diagonalmente dispostos da esquerda para a direita e vice-versa. A construção radial é hoje a mais utilizada em automóveis e caminhões, pois permite que haja uma maior flexão das laterais do pneu em relação à construção diagonal. Com isso, há um menor índice de atrito interno, menor geração de calor e retardo da deterioração dos componentes do pneu, além de oferecer maior conforto e dirigibilidade (SVENDENIUS, 2007).

### 2.1.2 Tipos de Suspensão

A classificação dos sistemas de suspensão é feita de acordo com o princípio de funcionamento ao qual estão submetidos. Gillespie (1992) os categoriza em três tipos, divididos a partir da presença ou não de componentes ativos (i.e. atuadores):

**1º) Suspensões passivas:** Esses sistemas possuem apenas os componentes convencionais de um sistema de suspensão – molas, amortecedores e elementos de conexão – citados anteriormente. No contexto de simulações numéricas, os parâmetros de rigidez e amortecimento permanecem sempre constantes, isto é, invariáveis no tempo. Já em uma condição real de rodagem, essas propriedades podem ser afetadas pelo desgaste e/ou possíveis avarias de peças com o decorrer do tempo de uso. Não há, portanto, qualquer fornecimento direto de energia externa a este tipo de suspensão.

**2º) Suspensões semiativas:** Essas suspensões, além de conterem os componentes convencionais, permitem que sejam alterados os parâmetros de rigidez e amortecimento do sistema por meio de ferramentas de controle eletrônico. Sem empregar atuadores, isso ocorre com o recebimento de sinais e/ou energia externos cujo intuito está na mudança dessas propriedades, podendo a suspensão ajustar-se melhor a condições distintas de perfis de pista.

**3º) Suspensões ativas:** Esse tipo de suspensão faz uso de atuadores para gerar as forças de controle necessárias à estabilidade do sistema. Normalmente, os atuadores utilizados para tal constituem-se em cilindros hidráulicos, posicionados entre a massa suspensa e a massa não suspensa. Estes podem atuar em conjunto com as molas e amortecedores, ou mesmo substituí-los. Estes sistemas, apesar disso, demandam uma grande quantidade de energia externa para funcionarem de forma satisfatória.

É necessário ainda ressaltar que cada um dos três tipos de suspensão listados acima contém uma série de subcategorias, segmentadas conforme seus mecanismos de

funcionamento e/ou geometrias de construção específicas.

Shen, Golnaraghi e Heppler (2006) salientam que o projeto de um sistema de suspensão passiva envolve um compromisso inerente entre o isolamento de vibrações de baixa e de alta frequências. Nestes sistemas, uma vez que os parâmetros de rigidez e amortecimento permanecem constantes, é realizado um *trade-off* em relação à performance quando estão submetidos à uma larga banda de frequências. O método de controle ativo, nesse caso, permite que o desempenho da suspensão seja aprimorado em uma gama de frequências maior. Isso, no entanto, ocorre ao custo de inúmeras desvantagens em sua implementação, tais como a complexidade de produção e manutenção, aliada a um alto consumo de energia dos atuadores. Já os sistemas de suspensão semiativos têm se mostrado promissores devido ao baixo consumo de energia e a níveis de desempenho similares em comparação aos sistemas ativos, pois combina a confiabilidade de suspensões passivas com a possibilidade de alterações dos valores de rigidez e amortecimento.

Atualmente, do ponto de vista comercial, dentre estes três tipos de suspensões veiculares os sistemas passivos são aqueles que combinam a maior simplicidade, confiabilidade, baixo custo e zero consumo de energia (HU; CHEN; SHU, 2014). Essas vantagens elevam o interesse da indústria no desenvolvimento de melhorias nesses sistemas, os quais ainda se mantêm predominantes no mercado.

### 2.1.3 Principais Parâmetros de Desempenho

O projeto de um sistema de suspensão veicular envolve um conflito constante entre os parâmetros de conforto, dirigibilidade e aderência. Ao passo que valores mais altos de rigidez e amortecimento favorecem à dirigibilidade e à aderência dos pneus em curvas, frenagens e pistas irregulares, estes o fazem em detrimento do conforto. Já uma suspensão com baixa rigidez e amortecimento beneficia o conforto, mas piora o desempenho do veículo em termos de estabilidade (SHEN; GOLNARAGHI; HEPPLER, 2006). Faz-se então necessária a definição de um equilíbrio ótimo entre essas características para satisfazer a maior variedade possível de condições de pista, velocidades e cargas.

Hrovat, Margolis e Hubbard (1988) afirmam que um bom sistema de suspensão deve estar apto a promover um bom isolamento das vibrações causadas pelo terreno, isto é, propiciando uma baixa aceleração da massa suspensa. Simultaneamente, deve também reduzir ao máximo o deslocamento relativo entre ela e os demais componentes da suspensão, minimizando um possível desgaste de partes móveis e assegurando o contato contínuo dos pneus com o solo (aderência).

Cada um dos três parâmetros citados (conforto, dirigibilidade e aderência) referem-se a valores específicos comumente abordados em estudos, modelagens e simulações numéricas envolvendo sistemas de suspensão (HU; CHEN; SHU, 2014). Estes, por sua vez,



são descritos a seguir:

- **Aceleração da massa suspensa:** Trata-se da aceleração vertical do conjunto carroceria/chassis. Como será explicado em detalhes na Seção 2.2, este valor está intimamente ligado à percepção de conforto dos ocupantes de um veículo. No projeto de suspensões, portanto, busca-se sempre reduzir ao máximo este valor.
- **Curso da suspensão (ou deflexão da suspensão):** É o valor do deslocamento relativo entre a massa suspensa e a massa não suspensa, ou seja, a diferença entre os deslocamentos da carroceria/chassis e do conjunto roda/pneu. Por consequência, também é interessante para o projeto sua redução, pois quanto menor este valor menores serão os deslocamentos das partes móveis da suspensão, resultando em aumento da estabilidade do sistema. Além disso, minimizam-se os desgastes e gastos futuros com manutenção.
- **Carga dinâmica nos pneus:** Este valor está intimamente ligado à aderência de um veículo, pois quantifica o produto da rigidez do pneu pelo deslocamento relativo entre este e a pista. Sendo assim, valores reduzidos de carga dinâmica nos pneus são benéficos para um projeto de suspensão, significando que há maior contato entre o pneu e o respectivo perfil de pista.
- **Aceleração angular de arfagem:** Tal como a aceleração vertical da massa suspensa, este valor também está relacionado ao conforto dos ocupantes de um veículo. Corresponde à variação no tempo da velocidade angular do conjunto carroceria/chassis atrelada ao movimento rotacional de arfagem, o qual pode ser observado pela letra  $q$  no eixo  $y$  da Figura 4, que apresenta a composição do sistema de eixos de um veículo.

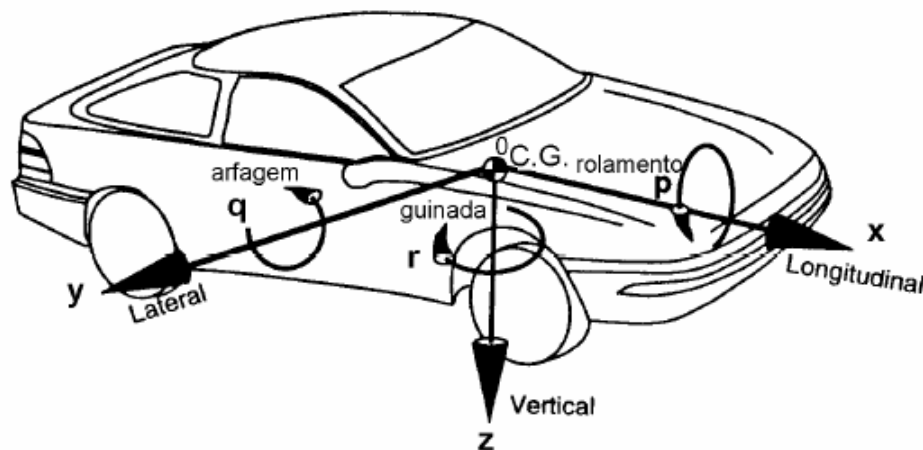


Figura 4 – Sistema de eixos de um veículo  
Adaptado de: Gillespie (1992)



Onde as letras  $p$ ,  $q$  e  $r$  representam, respectivamente, os movimentos rotacionais de rolamento, arfagem e guinada em torno dos eixos longitudinal  $x$ , lateral  $y$  e vertical  $z$ . Ao centro da Figura 4 está a origem do sistema de coordenadas, posicionada no centro de gravidade (C.G.) do veículo.

## 2.2 Resposta Humana à Vibração

A definição do parâmetro de conforto, no que tange ao projeto de suspensões veiculares, passa por um alto nível de subjetividade. Verifica-se que isso decorre das inúmeras variações da percepção de conforto por diferentes pessoas, além da influência da interação das mesmas com diversos componentes do veículo. Stone e Ball (2004) chamam a atenção, por exemplo, ao fato de que uma pessoa acostumada com veículos de luxo, associados à abundância de espaço e sofisticação, pode achar extremamente desconfortável um veículo esportivo, assim como uma pessoa acostumada à esportividade pode achar desagradável dirigir um veículo de luxo. Fatores acústicos, a qualidade dos bancos, bem como a climatização no interior do habitáculo, apesar de não estarem diretamente relacionados à suspensão em si, podem influenciar o ser humano na avaliação do que é confortável ou não. O desafio do engenheiro, nessas circunstâncias, é converter uma série de avaliações subjetivas em padrões numéricos que orientarão as escolhas de projeto.

São então determinadas normas e medições distintas que suportam análises de conforto em termos de vibrações mecânicas. Quando se trata do estudo de dinâmica, a avaliação de vibrações se dá mediante a retirada de medidas quantitativas de movimento, como valores de deslocamento, velocidade, aceleração e *jerk* (a derivada da aceleração). Usualmente, a maior parte das normas utilizam valores de aceleração como referência, pois estes são mais fáceis de serem aferidos (MOURA, 2003).

### 2.2.1 Normativas

As normas ISO 2631 (1997), BS 6841 (1987), BS 7085 (1989) e a Diretiva Européia 2002/44/CE estão entre as principais medidas de regulamentação relativas a Vibrações de Corpo Inteiro (VCI). Estas compreendem toda e qualquer vibração que atinge por completo o corpo de um indivíduo, estando o mesmo em pé ou sentado em uma superfície vibrante. Em território brasileiro, a Norma Regulatória nº15 (NR15) faz referência a Norma de Higiene Ocupacional 09 (NHO 09), a qual estabelece as diretivas de avaliações técnicas da VCI em âmbito nacional (MOORE, 2017).

Dentre este conjunto de normativas, A ISO 2631, sob o título “*Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole-body vibration*”, é a mais utilizada como referência na definição de VCI e suas implicações, tendo inclusive servido como base para o surgimento de outras normas subsequentes atreladas ao assunto. A norma, que é

dividida em cinco partes, estabelece uma série de métodos de medição e avaliação de vibrações periódicas, aleatórias e transientes, com indicações acerca dos limites e padrões aceitáveis de exposição do corpo humano à vibração. São discutidas as influências das VCI na saúde, conforto e na ocorrência de doenças do movimento. O nível de conforto, segundo a norma, pode ser definido como o limite de tempo para o qual uma exposição prolongada a um certo nível de vibração pode ser permitida sem que haja riscos para a saúde, incômodos ou doenças correlatas (MOURA, 2003).

No que se refere às vibrações observadas em veículos, Drehmer (2012) atesta que as medidas de aceleração e deslocamento verticais da massa suspensa são indicativos fundamentais na percepção do conforto e da qualidade de passeio pelos ocupantes do habitáculo. Dessa forma, em conformidade com as normas ISO 2631 e BS 6841, o autor apresenta na Tabela 1 uma relação direta entre valores de aceleração RMS e uma escala subjetiva de conforto com seis níveis de sensibilidade.

Tabela 1 – Relação entre níveis de conforto e valores de aceleração *RMS* ponderada  
Adaptado de: Drehmer (2012)

Aceleração <i>RMS</i> ( $m/s^2$ )	Classificação (Índice de desconforto)
Menor do que 0,315	Confortável
De 0,315 a 0,63	Levemente Confortável
De 0,63 a 0,8	Pouco Confortável
De 0,8 a 1,6	Desconfortável
Entre 1,6 e 2,5	Muito Desconfortável
Maior do que 2,5	Extremamente desconfortável

## 2.2.2 Classificação de Vibrações Veiculares

Quanto ao surgimento e tipificação de vibrações veiculares, Gillespie (1992) classifica em internas e externas as vibrações que podem afetar os ocupantes de um veículo. As vibrações externas são originárias de quaisquer irregularidades na pista, a exemplo de rugosidades do pavimento, desníveis, lombadas, buracos e obstáculos diversos. Já as vibrações internas são aquelas causadas pelo próprio veículo, a partir de componentes como o motor, transmissão, chassi, coluna de direção, suspensão, conjunto roda-pneu, entre outros.

Melo (2013) afirma que, em um veículo, as vibrações estão distribuídas em um amplo intervalo de frequências, podendo variar desde valores inferiores a 1 Hz até aproximadamente 10 kHz. O autor ainda destaca que os efeitos dessas vibrações não dependem somente da natureza e da intensidade das excitações, mas também do comportamento dinâmico das estruturas veiculares e suas cavidades acústicas, os quais podem amplificá-los em decorrência de possíveis ressonâncias.

Morello et al. (2011) classificam os fenômenos vibro-acústicos de veículos em quatro bandas de frequências, de tal forma que cada uma delas refere-se a um conjunto específico de fontes excitadoras e reações humanas. Melo (2013), fundamentado por essa divisão do autor, descreve os quatro intervalos de frequência da seguinte maneira:

- **Ride (de 0 a 5 Hz):** Corresponde a acelerações de baixas frequências, advindas de manobras do veículo e oscilações da carroceria sobre a suspensão. É a faixa de frequências comumente associada ao conforto vibracional.
- **Shake (de 5 a 25 Hz):** Nesta faixa estão contidas as primeiras frequências de ressonância dos principais subsistemas conectados ao chassi do veículo, a exemplo do motor e da suspensão.
- **Harshness (de 25 a 100 Hz):** Contém as frequências de ressonância atreladas à carroceria. É nessa banda que ocorre uma sobreposição parcial das frequências percebidas como vibrações e/ou ruídos. Quando vibrações acústicas de alta intensidade se encontram neste intervalo de frequências, o ouvido humano as percebe como variações de pressão, fenômeno conhecido como “boom”.
- **Noise (maior que 100 Hz):** Para valores de frequência maiores que 100 Hz o ouvido humano capta as vibrações de subsistemas e painéis apenas como ruídos diversos. É por esse motivo que esta banda é geralmente tratada como aquela que contém somente ruído acústico, uma vez que a sensação de vibração é significativamente atenuada e pouco perceptível pelo tato.

Na Figura 5 são ilustradas as principais fontes de excitação vibratória em veículos, bem como a divisão supracitada em bandas de frequências.

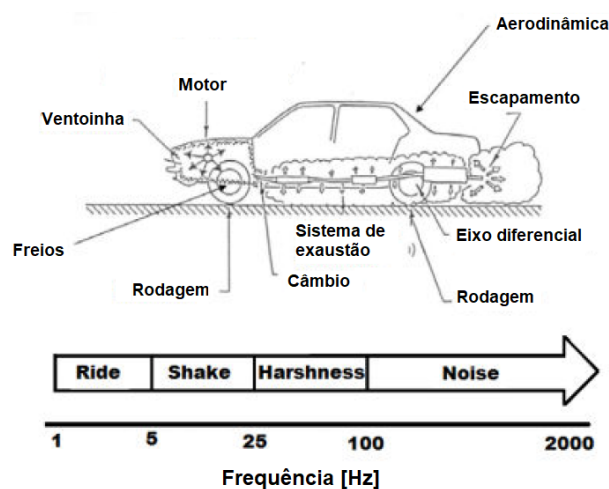


Figura 5 – Principais fontes de ruído e vibração em um veículo e a classificação em bandas de frequência

Adaptado de: Morello et al. (2011)

## 2.3 Otimização

Nesta seção são brevemente descritos os conceitos e propriedades vinculadas à otimização e ao uso dos algoritmos genéticos em problemas de Engenharia. As noções a serem discutidas nesta parte do trabalho fundamentam os resultados obtidos na seção 4.3, relativos ao uso do algoritmo genético de otimização nos mapas de resposta.

### 2.3.1 Principais Conceitos de Otimização

O conceito de otimização está diretamente atrelado à busca pelo melhor resultado possível diante de um conjunto de circunstâncias e restrições. Trata-se de um tema amplo e multidisciplinar, aplicado em inúmeros segmentos da indústria e da economia. Em Engenharia Automotiva, por exemplo, o uso de algoritmos de otimização se estende por diversas áreas do setor, desde a escolha dos mais básicos componentes estruturais de um veículo até a montagem de uma linha de produção, passando ainda por análises de custos, controle de sistemas eletrônicos, simulações e, neste trabalho, pela definição dos parâmetros atribuídos ao desempenho de um sistema de suspensão.

Segundo [Castro \(2001\)](#), o processo clássico de otimização consiste na maximização ou minimização de uma função objetivo, sujeita ou não a restrições de projeto. De acordo com os requisitos e peculiaridades do problema matemático a ser trabalhado, é necessário efetuar a escolha do algoritmo adequado que irá definir uma solução ótima, isto é, uma combinação viável das variáveis de projeto que permitirá a obtenção do resultado mais eficiente.

As variáveis de projeto consistem em fatores que se alteram durante o processo, sendo classificadas em contínuas (reais), inteiras e discretas (quando envolve valores em um intervalo limitado). Como exemplos de variáveis, podem ser citadas as formas geométricas de uma estrutura, as dimensões externas e internas um componente, os custos de produção e de distribuição de um produto, o tempo gasto em uma determinada etapa de fabricação, as propriedades mecânicas de um material, dentre outros. Já as restrições de projeto estabelecem o “espaço de busca” ou região factível da aplicação dos algoritmos de otimização. A partir delas busca-se restringir o número de soluções prováveis do problema, impedindo assim qualquer aleatoriedade no algoritmo e promovendo sua adequação aos requisitos de realização do projeto ([CASTRO, 2001](#)). O autor classifica estas restrições em dois tipos:

- **Restrições de comportamento:** São as condições desejáveis, as metas a serem atingidas no escopo do projeto. No contexto de Engenharia, podem ser limites de tensão e deformação, vibrações, temperatura, etc.
- **Restrições laterais:** São limites impostos diretamente sobre as variáveis de projeto,

ao passo que definem as faixas de operação (limites) executáveis das mesmas. A título de exemplo, na modelagem de suspensões veiculares as restrições laterais podem compreender os valores mínimos e máximos de rigidez, massa, amortecimento e, no âmbito deste estudo, os valores de inércia dos *inerters*.

Quanto às etapas do processo de otimização, [Arora \(2004\)](#) afirma que este constitui-se essencialmente por três fases principais. A primeira reduz-se à identificar as variáveis de projeto, a função objetivo a ser maximizada/minimizada e as restrições de comportamento/laterais a serem atendidas. A segunda corresponde à definição de estimativas iniciais de projeto que possam satisfazer as restrições, seguida da criação de critérios de convergência. A terceira fase estaria então em avaliar se o critério de convergência foi ou não atingido, de modo que, em caso negativo, devem ser aplicadas técnicas de otimização até que isso aconteça. Nessa conjuntura, a [Figura 6](#) apresenta um fluxograma ilustrando cada uma das etapas descritas anteriormente.

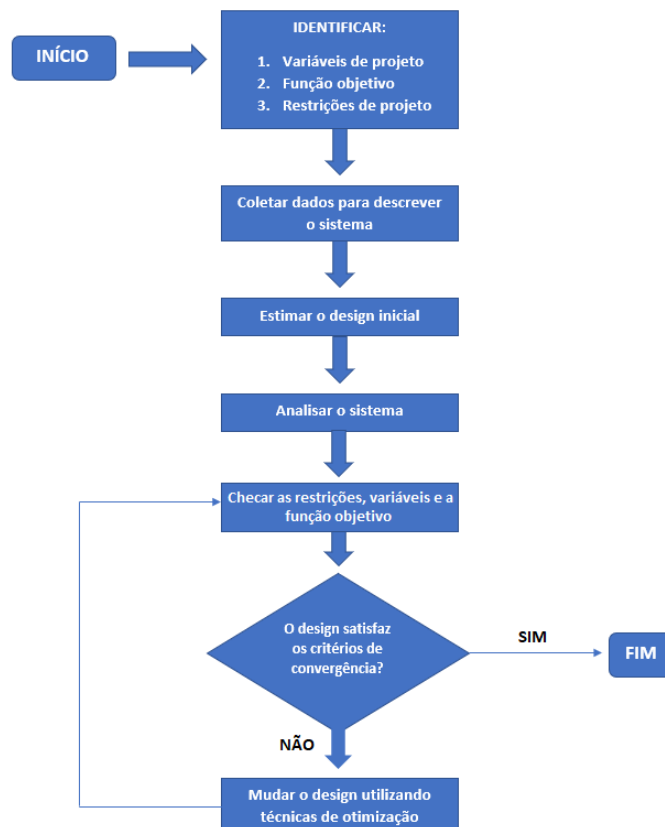


Figura 6 – Fluxograma do processo clássico de otimização  
Adaptado de: [Arora \(2004\)](#)

O ponto ótimo encontrado por um algoritmo de otimização é expresso por um vetor que leva à função objetivo ao seu limite (superior ou inferior) e que satisfaz as restrições de projeto inicialmente determinadas. Assim sendo, o valor ótimo é dado pelo valor da função no ponto ótimo, e a combinação de ambos (ponto e valor ótimos) compõe

a chamada solução ótima. Estas são agrupadas em duas categorias (CASTRO, 2001) (ARORA, 2004):

- **Solução global:** Caracteriza-se quando o valor obtido é o mínimo/máximo de toda a função objetivo.
- **Solução local:** Quando o valor obtido é o mínimo/máximo de apenas uma faixa da função objetivo, não abrangendo-a por completo.

Geralmente deseja-se obter a solução global de um problema de otimização, contudo, quando há descontinuidades na função objetivo, a procura por soluções ótimas locais pode ser útil para a resolução do mesmo.

Outro tópico a ser considerado é a natureza das expressões matemáticas de uma função objetivo. Sob esta perspectiva, Rao (2009) classifica os problemas de otimização em lineares, não lineares, geométricos ou quadráticos. Cada um destes contém uma vasta gama de métodos específicos voltados ao encontro de uma solução ótima, e a escolha do método mais adequado deve ser feita visando eficiência e redução de custos computacionais.

### 2.3.2 Algoritmo Genético

Os algoritmos genéticos de otimização são batizados desta forma pois surgiram como um produto da teoria da seleção natural de Charles Darwin, cujo principal fundamento está na sobrevivência e perpetuação dos indivíduos mais adaptados ao ambiente. Originalmente propostos por J.H Holland em 1992, estes algoritmos baseiam-se em procedimentos iterativos que permitem evoluir uma população de indivíduos, na qual cada indivíduo representa uma solução candidata para o problema em questão (KATO; PAIVA; IZIDORO, 2021). Na Figura 7 é reproduzido um fluxograma com as etapas (ou procedimentos) de um algoritmo genético padrão.

O algoritmo se inicia após a escolha de uma população inicial, isto é, um conjunto de indivíduos (soluções prováveis) a serem avaliados perante as características do ambiente (função-objetivo). A cada iteração, também chamada de geração, os melhores indivíduos (ou os mais adaptados) são selecionados a partir de uma função de aptidão (*fitness*), que estabelece o quão próximos estes estão das condições ideais de sobrevivência e adaptação ao meio. Na natureza, essas condições podem representar a posição do indivíduo na cadeia alimentar, a camuflagem/mimetismo em relação às cores do ambiente, a necessidade de alimento, dentre outras características evolutivas. Já no âmbito de Engenharia, podem significar propriedades mecânicas vantajosas de um material em uma aplicação específica, custo de fabricação, capacidade térmica, tempo de execução de uma tarefa, e assim por

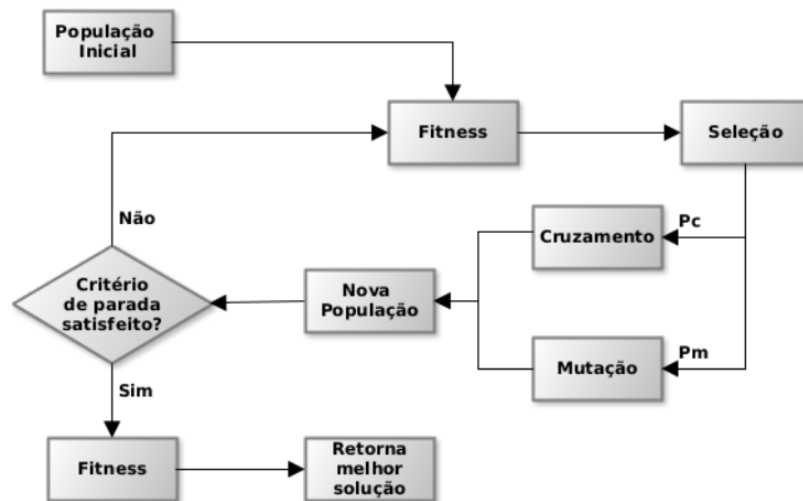


Figura 7 – Fluxograma das etapas de um algoritmo genético padrão  
 Fonte: Kato, Paiva e Izidoro (2021)

diante. Após a etapa de seleção, aplicam-se os operadores genéticos (cruzamento e mutação) visando um aumento da variabilidade dos indivíduos selecionados, os quais produzem novos indivíduos com base no material genético de seus pais e em um conjunto de duas probabilidades ( $Pm$  – probabilidade de mutação e  $Pc$  – probabilidade de cruzamento). Este processo é então repetido até que uma condição de parada seja satisfeita, podendo ser um limite pré-estabelecido de gerações, o tempo de execução do algoritmo ou um critério de convergência específico (IZIDORO; MELO-MINARDI; PAPPA, 2014).

No tocante ao trabalho em questão, o emprego do algoritmo genético se deu com o propósito de encontrar os parâmetros ótimos de um modelo simplificado de suspensão veicular que pudessem fornecer o melhor desempenho possível do mesmo sob uma excitação de perfil de pista, além de possibilitar a validação dos mapas de resposta extraídos com o estudo paramétrico (Capítulo 4).

## 2.4 Inerter

A definição de um dispositivo *inertter* foi concebida em 2002 por Malcom C. Smith, a qual o estabelece como sendo um elemento mecânico passivo de dois terminais (ou nós) capaz de gerar uma força de resistência proporcional à aceleração relativa entre ambos. A constante de proporcionalidade, nesse contexto, é denominada inertância e é medida em quilogramas (kg), de modo que a equação segundo Smith (2002) para o comportamento dinâmico de um *inertter* ideal é dada por:

$$F_b = b(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \quad (2.1)$$

Onde  $F_b$  é a força de resistência gerada pelo dispositivo,  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$  são as acelerações em cada terminal, e  $b$  corresponde à inertância. A energia cinética atribuída a um *inertter* é

então igual a:

$$\frac{1}{2}b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \quad (2.2)$$

Em que  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  são as velocidades nos dois terminais. Na Figura 8 é apresentado o diagrama de corpo livre de um *inertor* conforme a percepção do autor, acompanhado dos referidos valores.

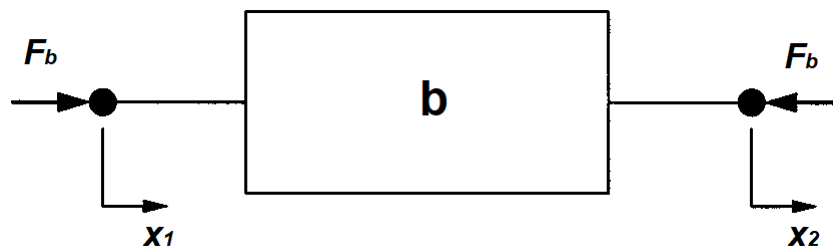


Figura 8 – Diagrama de corpo livre de um *inertor*  
Adaptado de: [Smith \(2002\)](#)

Uma das formas de se descrever o funcionamento de um *inertor* está na analogia entre sistemas elétricos e mecânicos proposta por [Firestone \(1933\)](#), na qual o conceito de corrente elétrica é comparado à força mecânica estabelecida pela Segunda Lei de Newton. Na analogia, estabelecem-se paralelos entre as definições de nós (ou terminais), malhas e componentes elétricos aos seus semelhantes em sistemas do tipo massa-mola-amortecedor. A título de exemplo, a velocidade relativa é comparada a uma diferença de potencial (voltagem elétrica), o indutor é associado ao comportamento de uma mola (elemento de rigidez), o resistor é mapeado como similar ao amortecedor mecânico, tal como as energias elétrica e magnética são relacionadas às energias cinética e potencial, respectivamente ([FIRESTONE, 1933](#)).

Contudo, até o surgimento do *inertor* a analogia proposta pelo autor estava incompleta, pois não havia equivalente mecânico capaz de representar completamente o funcionamento de um capacitor. Isso se deve ao fato de que a corrente (ou “força”, pela analogia) que flui por um capacitor é dada pelo produto da capacitância pela derivada da tensão entre seus dois terminais. A princípio, buscou-se definir uma semelhança entre este e um elemento de massa, uma vez que a força relativa a uma massa é definida por Newton como o produto desta pela aceleração (ou derivada da velocidade). Entretanto, a aceleração de um elemento de massa é quantificada com base em apenas um único referencial inercial, e não dois como seria necessário para se determinar uma equivalência integral entre força mecânica e a corrente de um capacitor. O *inertor*, por outro lado, permite completar a analogia à medida que a força de resistência gerada pelo mesmo é resultado do produto de sua inertância pela aceleração relativa entre seus dois terminais, tornando assim satisfatória a associação entre estes componentes. Em suma, a alusão ao paralelismo entre redes elétricas e mecânicas configura-se por meio das seguintes correspondências ([SMITH, 2002](#)):



<b>Força</b>	↔	<b>Corrente</b>
<b>Velocidade</b>	↔	<b>Tensão (diferença de potencial)</b>
<b>Referencial mecânico</b>	↔	<b>Aterramento elétrico (“Terra”)</b>
<b>Mola</b>	↔	<b>Indutor</b>
<b>Amortecedor</b>	↔	<b>Resistor</b>
<b><i>Inerter</i></b>	↔	<b>Capacitor</b>
<b>Energia cinética</b>	↔	<b>Energia elétrica</b>
<b>Energia potencial</b>	↔	<b>Energia magnética</b>

Nesse cenário, esta propriedade do *inerters* em resistir à aceleração relativa permite que o dispositivo seja amplamente utilizado no campo de *NVH* com o propósito de redução e isolamento de vibrações. No que diz respeito ao projeto de suspensões veiculares, até a introdução do *inerters* as configurações e otimizações propostas para sistemas passivos e semi-ativos eram limitadas apenas a variações dos parâmetros de rigidez e amortecimento, isto é, a alterações em molas e amortecedores (SMITH; WANG, 2004). Assim, a implementação do *inerters* tornou então possível um aumento do leque de alternativas para melhora do comportamento dinâmico de suspensões, ao custo de uma maior complexidade dessas estruturas em virtude da adição de um novo elemento de inércia (HU; CHEN; SHU, 2014).

Outra característica do dispositivo a ser destacada, de acordo com Lewis (2019), é a capacidade que este possui de adicionar uma inércia considerável a um sistema dinâmico sem a necessidade de uma grande adição física de massa, de forma que a inércia atribuída a um *inerters* não contém nenhuma relação com sua massa. Isso significa que valores extremamente altos da razão entre inércia e massa (física) de um *inerters* podem ser obtidos, facilitando o seu uso em sistemas de grande escala, tais como trens, automóveis e edifícios. Um *inerters* de apenas 2 kg de massa, por exemplo, pode atingir um valor de inércia de 75 kg (GONZALEZ-BUELGA et al., 2017). Esta propriedade, no entanto, advém do engrenamento de mecanismos do tipo pinhão e cremalheira, fuso de esferas ou ainda da diferença entre dimensões de orifícios em *inerters* de fluido, os quais serão descritos em detalhes na Seção 2.4.1.

### 2.4.1 Tipos de *Inerters*

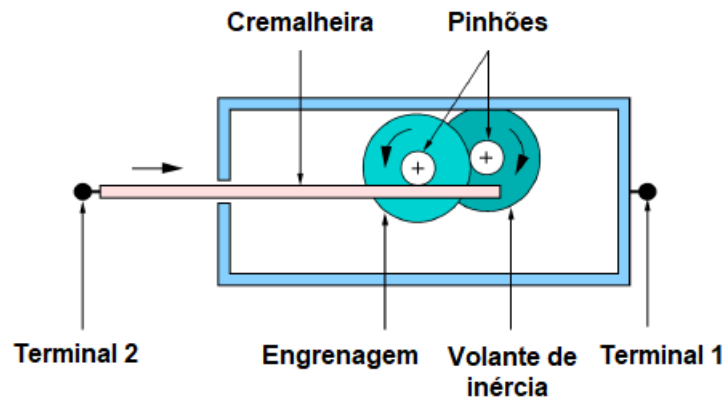
Não há, na literatura até o momento, uma classificação formal quanto aos tipos de *inerters*. No entanto, são comumente divididos de acordo com o mecanismo de funcionamento que contém. Os primeiros *inerters* a serem construídos baseavam-se em volantes de inércia, cuja massa elevada e, como o nome sugere, alta inércia inerente promovem o efeito de resistência à aceleração. Estes, por sua vez, podem estar inseridos em sistemas do tipo pinhão e cremalheira e/ou fuso de esferas (PAPAGEORGIOU; HOUGHTON; SMITH, 2008).

Sabe-se que o sistema pinhão-cremalheira consiste essencialmente em duas peças, sendo uma delas uma barra ou trilho dentado (cremalheira) no qual se movimenta uma engrenagem (pinhão) com o mesmo passo (ou módulo), permitindo a conversão de um movimento retilíneo em circular (rotação) e vice-versa. Os *inerters* baseados nesse sistema são mais suscetíveis à ocorrência de desgaste devido à fricção e ao surgimento de folgas entre as engrenagens, causando uma série de potenciais não linearidades que afastam o comportamento do sistema do ideal proposto pela Equação (2.1) (PAPAGEORGIOU; SMITH, 2005). Esses efeitos prejudiciais, quando em excesso, reduzem consideravelmente o tempo médio antes da falha (do inglês *Mean Time Before Failure*– *MTBF*) e induzem a um atraso de fase no mecanismo de acionamento das engrenagens como consequência de um grande número de folgas.

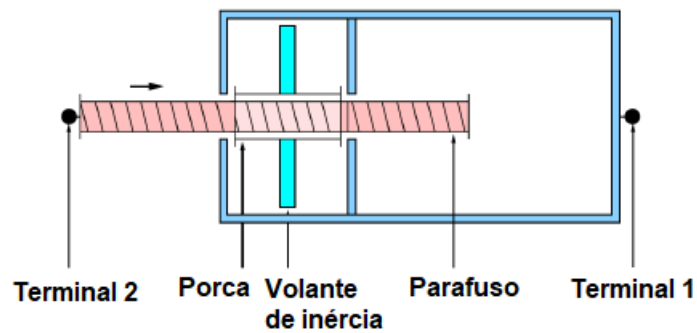
Já os *inerters* que consistem em fuso de esferas, nos quais a inertância é determinada pelo passo da rosca do parafuso e pela inércia do volante, são menos propensos a esses efeitos negativos (LEWIS, 2019). O fuso de esferas, no caso, corresponde a um dispositivo mecânico capaz de converter o movimento helicoidal de um conjunto de esferas entre seu eixo e a porca em um deslocamento linear, sendo também considerado um parafuso de alta eficiência. Ainda assim, segundo Wang e Su (2008), as potenciais não linearidades provocadas por folgas, fricção, efeitos elásticos e desgaste das peças ainda podem ocorrer com *inerters* de fuso de esferas, podendo estas serem reduzidas a partir de aprimoramentos durante a etapa de fabricação. A Figura 9 mostra, de forma simplificada, os mecanismos de funcionamento dos *inerters* de pinhão e cremalheira e fuso de esferas, respectivamente. Na Figura 10 estão representados *inerters* reais, construídos para fins de teste experimental em laboratório. Em ambos, como fora mencionado, o volante de inércia auxilia a cumprir o papel de estabelecer resistência à aceleração relativa entre o primeiro e segundo terminais.

Lewis (2019) chama a atenção ao fato de que os *inerters* que funcionam com base em volantes de inércia, seja por meio do mecanismo de pinhão e cremalheira ou fuso de esferas, têm dificuldades inerentes em funcionar conforme o comportamento ideal prescrito por Smith (2002), sobretudo após sofrerem desgaste diante de um grande número de ciclos de uso. A presença de quantidades elevadas de partes móveis também aumenta os custos de manutenção desses dispositivos, de modo que a aplicabilidade industrial e comercial dos mesmos se torna limitada. Com isso, têm se tornado cada vez mais populares e atrativos os *inerters* baseados em fluido, pois detêm a vantagem de possuírem um número reduzido de partes móveis e por conseguinte uma menor propensão ao desgaste de peças, levando assim a um maior *MTBF*.

Wang, Hong e Lin (2011) desenvolveram o que seria um protótipo inicial de *inerters* hidráulico. Este utiliza um motor hidráulico, um cilindro, um pistão, um volante de inércia e tubos de conexão, funcionando de tal forma que o pistão gera uma diferença de



(a) *inverter* de pinhão e cremalheira



(b) *inverter* de fuso de esferas

Figura 9 – Diagrama Esquemático contendo as principais variantes do dispositivo *inverter* baseadas em volante de inércia

Adaptado de: Lewis (2019)

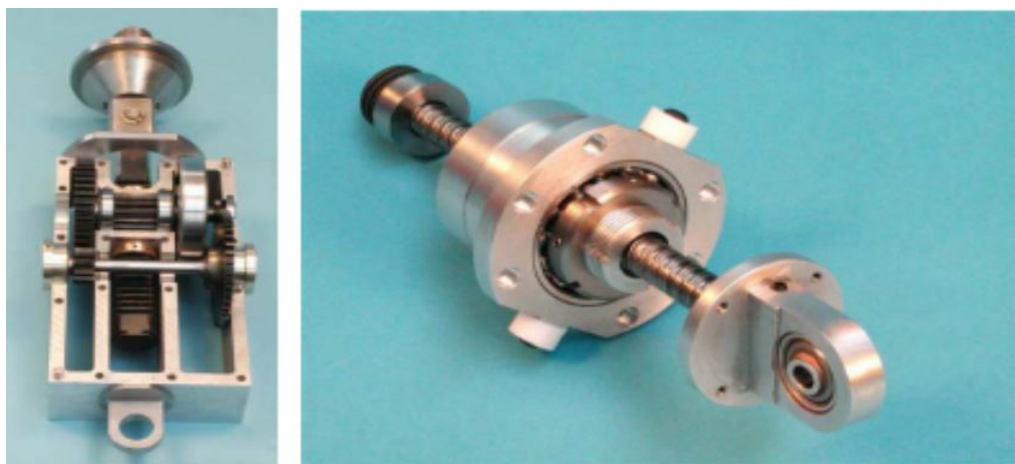
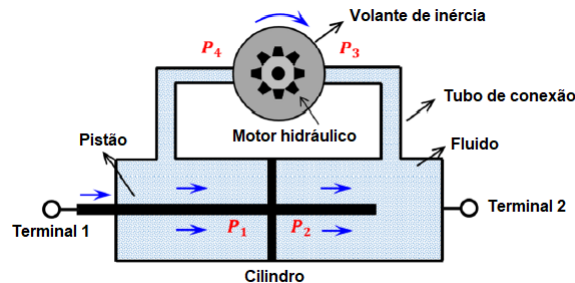


Figura 10 – *Inverters* reais de pinhão e cremalheira (à esquerda) e fuso de esferas (à direita)

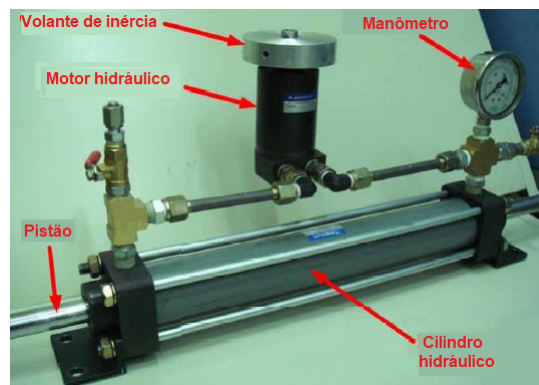
Adaptado de: Papageorgiou e Smith (2005)

pressão nos dois lados do motor hidráulico e promove movimento do fluido pelos tubos. O fluido (em movimento) então leva à rotação do motor hidráulico e conseqüentemente

do volante de inércia, promovendo a inertância do dispositivo. Os testes conduzidos na pesquisa mostraram que houve uma boa semelhança entre o comportamento do dispositivo construído e o modelo teórico. Na Figura 11 são apresentados um esquemático e uma foto contendo o protótipo de inerter hidráulico em questão.



(a) Diagrama Esquemático de *inerter* hidráulico



(b) Protótipo de *inerter* hidráulico

Figura 11 – *Inerter* hidráulico  
Adaptado de: Wang, Hong e Lin (2011)

Outro inerter baseado em fluido que recebe destaque é o *inerter* do tipo fluido helicoidal, a princípio proposto por Swift et al. (2013) e que faz uso do escoamento de um fluido por um canal helicoidal externo para gerar inertância. A Figura 12 exibe um diagrama esquemático do inerter desenvolvido pelos autores. A Figura 13 mostra um protótipo deste inerter confeccionado por Domenico et al. (2019). Basicamente, o protótipo é constituído de um pistão, um cilindro e um canal helicoidal. Quando há movimento relativo entre o pistão e o cilindro, o fluido que se encontra no canal helicoidal começa a escoar devido à diferença de pressão entre as câmaras da esquerda e da direita. O valor da velocidade do fluido no canal pode então ser dimensionado a partir da razão entre a área da seção transversal do cilindro pela área da seção do canal helicoidal. A inertância que é produzida, contudo, independe deste valor de velocidade e é resultado do produto entre a massa do fluido contido no canal helicoidal pelo quadrado da razão entre ambas as áreas de seção transversal. Há também um projeto de inerter com canal helicoidal interno (ou de “hélice interna”), que funciona da mesma forma que o anterior. A diferença está somente na posição do canal, que se encontra entre o pistão e o cilindro quando o pistão entra

em movimento. O princípio de funcionamento é o mesmo para ambos, tal como o cálculo da inércia ideal (MA; BI; HAO, 2021). A Figura 14 exhibe um diagrama esquemático de um inerter de fluido com canal helicoidal interno, desenvolvido por Zhang, Gao e Nie (2018).

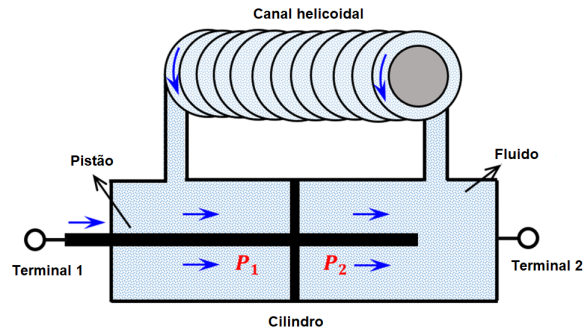


Figura 12 – Diagrama Esquemático de um *inerter* do tipo fluido helicoidal  
Adaptado de: Liu et al. (2018)



Figura 13 – Protótipo de um *inerter* do tipo fluido helicoidal  
Adaptado de: Domenico et al. (2019)

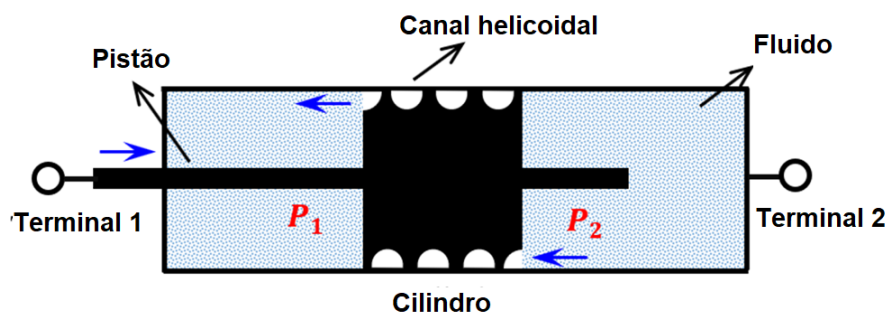


Figura 14 – Diagrama Esquemático de um *inerter* de fluido com canal helicoidal interno  
Adaptado de: Zhang, Gao e Nie (2018)



Um último tipo de *inerters* recentemente desenvolvido é o *inerters* eletromagnético, descrito em detalhes no trabalho de [Gonzalez-Buelga et al. \(2015\)](#). Este é constituído por três peças principais, as quais consistem em um capacitor, uma haste magnética e uma bobina. O dispositivo produz inércia a partir do movimento de sua haste magnética, que gera uma voltagem (diferença de potencial elétrico) através da bobina ao provocar variação de fluxo magnético. Dessa forma, surge então uma corrente elétrica na bobina que produz um campo magnético na direção oposta, e este efeito é o responsável por criar uma força de resistência. Na Figura 15 é apresentado o diagrama esquemático ao lado do protótipo do *inerters* proposto pelo autor.

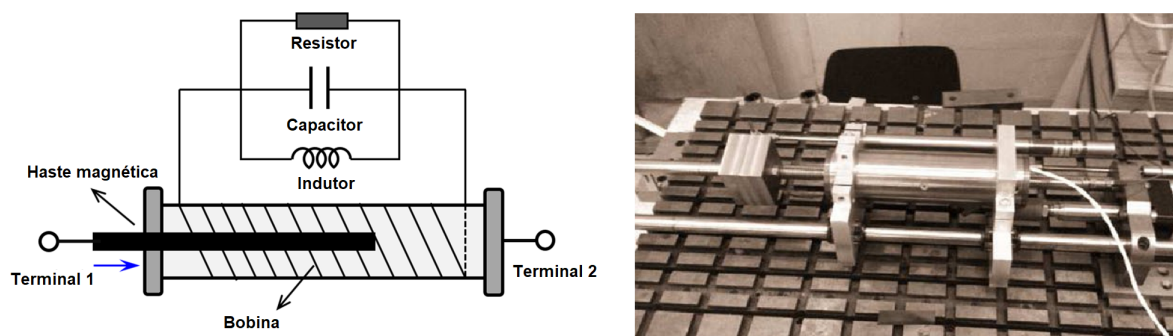


Figura 15 – Diagrama Esquemático (à esquerda) e Protótipo (à direita) de um *inerters* eletromagnético

Adaptado de: [Gonzalez-Buelga et al. \(2015\)](#)

## 2.5 Estado da Arte

A introdução do conceito e das funcionalidades do dispositivo *inerters* por [Smith \(2002\)](#) trouxe à tona um elevado interesse da comunidade acadêmica em potenciais aplicações do dispositivo no contexto de *NVH*, sobretudo no que diz respeito à redução e isolamento de vibrações. Contudo, não se imaginava que a inserção do *inerters* na indústria ocorreria tão rapidamente logo após a concepção do mesmo, mas sim depois de um período extenso de análises voltadas à modelagem e experimentação. Em vez disso, já pouco antes do ano de 2005, segundo [Chen et al. \(2009\)](#), foi efetuado um acordo de confidencialidade entre a Universidade de Cambridge, Smith e a equipe da *McLaren* de Fórmula 1 para que esta obtivesse exclusividade do uso do dispositivo na competição por um período limitado. O acordo então permitiu que fosse desenvolvido o que ficou conhecido por “*J-Damper*”, que nada mais era do que um pseudônimo para um dispositivo *inerters* integrado à suspensão dos carros da marca no torneio de 2005. Tratava-se, à época, de uma configuração em paralelo do tipo *inerters*-mola-amortecedor implementada ao sistema de suspensão destes carros, e com a qual notavam-se ganhos consideráveis em dirigibilidade e aderência. A primeira vez em que se utilizou o “*J-Damper*” foi no Grande Prêmio da Espanha de 2005 (ver Figura 16), resultando na vitória de Kimi Raikkonen (piloto da

*McLaren* naquele ano) com tempos de volta que chamaram bastante atenção das equipes rivais e da imprensa como um todo. Mais tarde, após uma sequência de escândalos de espionagem entre *Renault* e *McLaren* e inúmeras especulações acerca do funcionamento do “*J-Damper*”, a revista *Autosport Magazine* revelou em 2008 que se tratava na verdade de um dispositivo *inertor*.



Figura 16 – Kimi Raikkonen no Grande Prêmio da Espanha de 2005, pilotando o *McLaren* MP4-20 rumo à vitória na primeira corrida após a implementação do *inertor* (ou “*J-Damper*”)

Fonte: [Chen et al. \(2009\)](#)

Esse episódio na Fórmula 1, somado ao interesse crescente nas potencialidades do *inertor* no campo de *NVH*, como fora mencionado, desencadeou o surgimento de uma série de estudos direcionados à modelagem, simulação e experimentação do dispositivo nas mais variadas áreas da indústria. Diante do exposto, nesta seção serão descritos alguns destes estudos, com foco naqueles orientados às aplicações do *inertor* em suspensões automotivas. Também são citados artigos que trabalham com as melhorias impostas pelo dispositivo em obras civis e em sistemas de suspensão de trens.

[Hu, Chen e Shu \(2014\)](#) investigam os efeitos da integração de um *inertor* a um sistema de suspensão veicular passivo, a partir da comparação entre seis configurações distintas de posicionamento das molas, amortecedor e *inertor* e suas implicações em conforto, aderência dos pneus e dirigibilidade. Foram avaliados estes requisitos de performance em simulações numéricas conduzidas com base no modelo de suspensão de  $\frac{1}{4}$  de veículo, do qual foram extraídas as soluções analíticas inerentes à cada configuração. Nesse contexto, foram avaliados o deslocamento relativo (deflexão da suspensão) e a aceleração *RMS* vertical da massa suspensa, bem como a carga dinâmica nos pneus. Estes parâmetros foram obtidos a partir da excitação do modelo e suas seis configurações a um perfil de pista. Concluiu-se, com os resultados, que apesar de terem sido aprimorados os parâmetros de conforto e aderência após a inclusão do *inertor*, a performance de deflexão da suspensão

foi reduzida consideravelmente, tornando-a um fator limitante em relação aos ganhos de desempenho. Isso se deve ao fato de que grandes deslocamentos da massa suspensa foram detectados (deflexão alta), o que poderia vir a causar danos nos componentes do veículo e eventuais desconfortos aos ocupantes do habitáculo.

Kuznetsov et al. (2010) utilizaram um algoritmo de otimização de parâmetros para um sistema de suspensão *ISD* (*Inerter-Spring-Damper*, em inglês), no qual os componentes mola, amortecedor e *inerter* são posicionados em paralelo entre a massa suspensa (carroceria e chassis) e a massa não-suspensa (conjunto roda-pneu). As análises fundamentaram-se em simulações numéricas, nas quais foi utilizado como referência o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo. Para a construção do algoritmo de otimização, os autores fizeram uso da solução analítica das equações diferenciais ordinárias características do modelo, bem como dos padrões estabelecidos pela norma ISO 2631-1 para os níveis máximos permitidos de vibração de corpo inteiro. Foram também utilizados perfis de pista reais como fontes de excitação externa. Avaliaram-se as influências da otimização dos parâmetros de rigidez, coeficiente de amortecimento e inertância do *inerter* na aceleração *RMS* da massa suspensa, sendo esta diretamente relacionada aos níveis de conforto dos ocupantes. Os resultados das simulações mostraram que em pistas urbanas (sem grandes oscilações) os níveis de vibração no habitáculo se tornaram menores com uma configuração de suspensão equilibrada, sendo obtidos valores moderados de rigidez, amortecimento e inertância. Entretanto, diante de um perfil de pista rural, uma maior redução da aceleração *RMS* foi alcançada a partir de uma configuração mais “macia” de suspensão, isto é, reduzindo-se a rigidez das molas e mantendo-se a inertância e o coeficiente de amortecimento do amortecedor relativamente baixos.

Shen et al. (2016) buscaram avaliar os benefícios de um sistema de suspensão veicular *ISD* (*Inerter-Spring-Damper*, em inglês, ou *Inerter-Mola-Amortecedor*, em português) em termos de conforto, aderência, estabilidade e dirigibilidade. As análises foram estabelecidas por meio de simulações numéricas contendo o modelo de suspensão de  $\frac{1}{4}$  de veículo, do qual foram retirados a solução analítica do sistema de EDO's e o respectivo modelo no espaço de estados. Um algoritmo de otimização foi definido com o objetivo de promover reduções no valor *RMS* de aceleração vertical da massa suspensa, deflexão da suspensão e carga dinâmica nos pneus (massa não-suspensa). Um perfil de pista randômico (ruído branco) foi utilizado como excitador externo do sistema, ao passo que foram obtidas as respostas do mesmo no domínio do tempo e da frequência. Ao final do estudo, uma bancada de testes experimentais foi construída para validação dos resultados numéricos, contendo um *inerter* de fuso de esferas. Os resultados do estudo mostraram que a suspensão *ISD*, quando comparada à suspensão passiva convencional (contendo apenas mola e amortecedor), foi mais eficiente em reduzir as vibrações advindas do perfil de pista, de modo que a redução do valor *RMS* de aceleração vertical foi de 4%, da deflexão da suspensão foi de 16%, e da carga dinâmica nos pneus foi de 6%.



Yang et al. (2021) teve como objetivo promover uma otimização dos parâmetros de rigidez, amortecimento e inertância de uma suspensão ISD desenvolvida para veículos pesados, com a finalidade de obter aprimoramentos em conforto e redução de danos à pista causados por estes veículos. As análises foram executadas de acordo com os resultados de simulações numéricas contendo o modelo reduzido de  $\frac{1}{2}$  veículo, a partir do qual foi estabelecido o algoritmo de otimização. A modelagem da suspensão ISD se deu conforme a configuração proposta por Shen et al. (2018), em que o *inertor* é posicionado em série com o amortecedor, e ambos em paralelo com a mola da suspensão. Esses três componentes, por sua vez, são inseridos entre a massa suspensa (carroceria e chassis) e a massa não suspensa (conjunto roda-pneu). O sistema foi então excitado por um perfil de pista randômico (ruído branco), de modo que foram avaliados o valor RMS de aceleração vertical da massa suspensa, a aceleração no centroide, a aceleração angular de arfagem, bem como a deflexão das suspensões dianteira e traseira e a carga dinâmica nos pneus. Os resultados mostraram que, quando comparada à suspensão passiva convencional, a suspensão ISD promoveu maiores reduções na aceleração RMS do centroide, aceleração angular RMS de arfagem, deflexão da suspensão dianteira e deflexão do conjunto de suspensão (dianteira e traseira). Ademais, foi notada uma redução substancial no coeficiente abrangente de danos à pista, mostrando que também fora reduzida a carga dinâmica nos pneus. A influência da perturbação dos parâmetros da suspensão ISD também foi analisada com o intuito de gerar dados relativos à resposta do sistema a variações de rigidez, amortecimento e inertância.

Smith e Wang (2004) estabelecem um estudo comparativo entre oito configurações de suspensão passiva contendo um amortecedor e um *inertor*, de modo que são avaliados os possíveis benefícios em termos de performance relativos à aplicação deste dispositivo. Os modelos de  $\frac{1}{4}$  de veículo e de veículo inteiro foram utilizados como referência para a execução das simulações numéricas, nas quais foram examinados os parâmetros de desempenho de cada configuração e os possíveis aprimoramentos em relação às suspensões passivas convencionais. Ademais, foi construído um protótipo de *inertor* para a realização de testes experimentais. As simulações mostraram que, em relação às suspensões passivas convencionais, a inclusão do *inertor* nas oito configurações tornou possível obter melhorias de cerca de 10% para os parâmetros de conforto e aderência à pista, quando avaliado o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo. As análises conduzidas com o modelo de veículo inteiro e os testes experimentais efetuados com o protótipo também corroboraram com estes resultados.

Shen et al. (2018) buscaram avaliar os efeitos da inclusão de um *inertor* em um sistema de suspensão veicular em termos de estabilidade lateral e resistência ao capotamento. Diferentemente da maioria dos artigos relacionados à aplicação de *inerters* em suspensões, que buscam estabelecer análises quanto à redução de vibrações verticais provocadas por perfis de pista, os autores buscaram efetuar simulações com o modelo de veículo inteiro diante de excitações senoidais e *fishhook* (anzol) de esterçamento para avaliar os efeitos

do dispositivo na estabilidade lateral. As simulações basearam-se em três configurações de suspensão, cada uma incorporando apenas um dispositivo *inertor*. Os parâmetros de rigidez, amortecimento e inertância foram otimizados a partir da aplicação de um algoritmo de otimização genético, o qual priorizou a redução da aceleração *RMS* vertical da massa suspensa e do ângulo máximo de rolagem, relativos ao conforto e resistência ao capotamento, respectivamente. Os resultados adquiridos com as simulações revelaram melhorias de performance em ambos os parâmetros, isto é, conforto e estabilidade lateral. Para as três configurações de suspensão consideradas no estudo, houveram reduções significativas da aceleração *RMS* vertical da massa suspensa e do ângulo máximo de rolagem quando comparadas a uma suspensão passiva convencional (sem *inertor*).

Lazar, Neild e Wagg (2014) buscam introduzir o uso do *inertor* como alternativa ao emprego de *TMD's* (*Tuned Mass Dampers* ou Amortecedores de Massa Sintonizados) para a redução de vibrações de base em edifícios sujeitos a abalos sísmicos. Destaca-se a possibilidade de se adicionar, com o *inertor*, uma grande quantidade de inércia a um edifício sem que haja adição considerável de massa, diferentemente dos dispositivos *TMD* cuja estrutura básica é mostrada na Figura 17. Estes últimos, por sua vez, têm sua performance de isolamento vibratório limitada pela quantidade de massa que carregam em si. Foram conduzidas simulações numéricas comparando o desempenho do sistema com *inertor* (chamado pelos autores de *TID* – *Tuned Inertor Damper* ou Amortecedor de *Inertor* Sintonizado) com o sistema de *TMD* quando inseridos em edifícios de múltiplos andares e posicionados nos suportes entre andares adjacentes. Os resultados das análises mostraram que o desempenho de um *TID* é quase idêntico ao de um *TMD* quando ambos compreendem a mesma razão de massa. Contudo, à medida que se eleva a inertância do *TID*, a performance de redução de vibrações se sobrepõe a de um *TMD*, sobretudo quando instalados no andar mais inferior de um edifício, conectados ao solo. Essa configuração ainda permite que o sistema de controle vibratório (*TID* ou *TMD*) não precise ser suportado por todo o edifício, evitando possíveis limitações de projeto ou gastos adicionais com a estrutura.

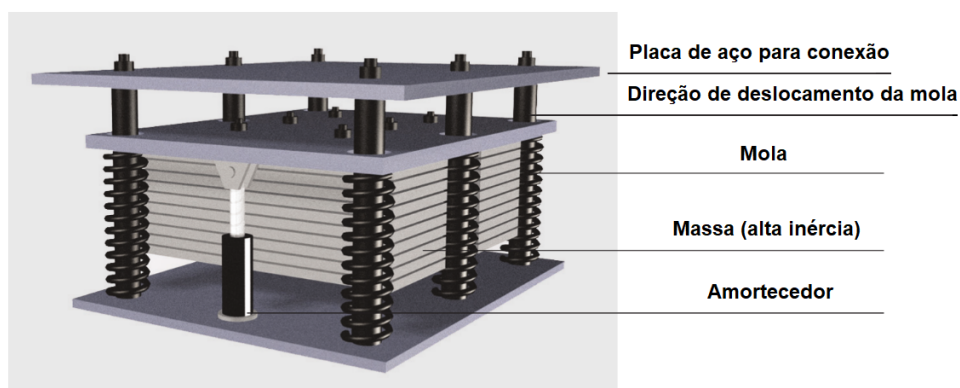


Figura 17 – Estrutura básica de um *TMD*  
Adaptado de: ROAD (2017)

Lewis (2019) apresenta um estudo acerca do uso do dispositivo *inserter* em sistemas de suspensão de trens. O autor destaca as potencialidades do dispositivo em promover aumento dos níveis de conforto dos ocupantes, ao mesmo tempo em que reduz os efeitos de desgaste da pista causados pelo contato roda-trilho. No estudo, são conduzidas simulações numéricas e algoritmos de otimização em *MATLAB*, seguidos de análises não lineares usando a técnica multicorpos para veículos ferroviários no *software VAMPIRE*. É mostrado, através dos resultados, que a relação entre conforto e desgaste dos trilhos pode ser consideravelmente aprimorada pelo uso de sistemas de suspensão lateral otimizados e integrados a *inerters*.

### 2.5.1 Contribuição do Trabalho para o Estado da Arte

Quando comparado às linhas de pesquisa apresentadas na seção 2.5, o presente trabalho buscou ater-se à condução de um estudo paramétrico envolvendo os modelos de  $\frac{1}{4}$  e de  $\frac{1}{2}$  veículo de uma suspensão *ISD*, fundamentado na técnica dos mapas de resposta. Esta abordagem, pouco explorada até então, permite que sejam avaliados não somente os impactos da integração de um *inserter* a um sistema de suspensão, mas também a forma como as variações de inertância afetam os níveis de vibração em contraste com as mudanças de rigidez e amortecimento. Consequentemente, torna-se possível o desenvolvimento de comparações de desempenho entre um sistema convencional de suspensão e um sistema *ISD*, sobretudo a partir das propriedades que constituem a modelagem dinâmica de ambos. O uso de um algoritmo de otimização e a discussão da resposta dos modelos frente a uma excitação de perfil de pista complementam o estudo, permitindo que sejam ponderados os benefícios de desempenho do dispositivo *inserter* em relação ao custo e viabilidade de sua implementação.

## 3 Modelos Teóricos de Dinâmica Veicular com *Inerter*

Este capítulo apresenta a descrição da formulação matemática utilizada para as modelagens e simulações numéricas contidas neste trabalho. São apresentadas as características e peculiaridades dos modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo, bem como a aplicabilidade dos mesmos na representação de um sistema de suspensão real. Por conseguinte, são especificadas a modelagem no espaço de estados e a integração do dispositivo *inertter* a ambos os modelos nos subitens do capítulo, além da obtenção de suas respostas em frequência.

### 3.1 Modelo de 1/4 de Veículo

O modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo é consagrado na literatura sobre dinâmica veicular por representar, de forma simplificada, algumas das principais propriedades do comportamento dinâmico de um sistema de suspensão. Trata-se de um sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade (GDL), em que são consideradas a quarta parte da massa suspensa (carroceria e chassis) e da massa não suspensa (conjunto roda-pneu) de um veículo. A suspensão é modelada a partir de dois elementos conectados entre essas duas massas, sendo um de rigidez (mola) e um de amortecimento (amortecedor de fluido viscoso). O pneu é retratado como uma mola única posicionada entre a massa não-suspensa e a pista, de modo que é desprezado o pequeno amortecimento inerente à sua natureza viscoelástica (GILLESPIE, 1992). Na Figura 18 é apresentado o modelo e cada um dos seus componentes, dos quais  $m_s$  corresponde à massa suspensa,  $m_u$  é a massa não-suspensa,  $C$  é coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão e  $K_t$  e  $K_s$  são os valores de rigidez das molas relativas ao pneu e à suspensão, respectivamente. Já as variáveis  $z_s$ ,  $z_u$  e  $u$ , nessa ordem, representam as funções temporais de deslocamento das massas suspensa e não-suspensa, seguidas da excitação de entrada do perfil de pista. A Figura 19, sob outra perspectiva, elucida a maneira como o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo se insere na reprodução de um automóvel real. As letras  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ , assim como na Figura 4, referem-se aos movimentos rotacionais de rolagem, arfagem e guinada sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , na devida ordem.

Esta modelagem em  $\frac{1}{4}$  de veículo permite seja observada a resposta vertical (salto) de um sistema de suspensão às excitações de um perfil de terreno. São desprezados os movimentos rotacionais de arfagem e rolagem oriundos da interação das demais rodas com a pista, tal como seus efeitos de carregamento. A análise da dinâmica vertical do sistema é feita com base nas equações de movimento características do modelo, sendo estas obtidas com a aplicação da Segunda Lei de Newton às massas suspensa e não-suspensa. As forças-

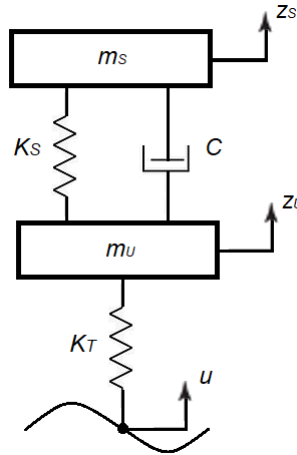


Figura 18 – Modelo de suspensão de 1/4 de veículo

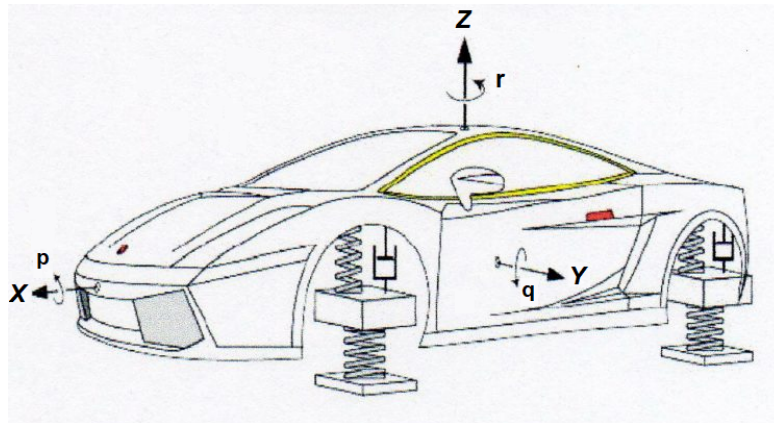


Figura 19 – Diagrama de suspensão convencional para estudo do sistema massa-mola-amortecedor

Adaptado de: [Pinheiro \(2020\)](#)

peso inerentes às duas massas também são desconsideradas, pois admite-se estas foram anuladas com as deflexões estáticas das molas (elementos de rigidez) que compõem o sistema ([GILLESPIE, 1992](#)). Isto posto, nas Equações (3.1) e (3.2) é possível verificar a relação existente entre os parâmetros da Figura 18, enquanto que em (3.3) é exibida sua forma matricial.

$$m_s \ddot{z}_s + C \dot{z}_s + K_s z_s - C \dot{z}_u - K_s z_u = 0 \quad (3.1)$$

$$m_u \ddot{z}_u + C \dot{z}_u + (K_s + K_t) z_u - C \dot{z}_s - K_s z_s = K_t u \quad (3.2)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_s \\ \ddot{z}_u \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{z}_u \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_s & -K_s \\ -K_s & (K_s + K_t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} z_s \\ z_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ K_t \end{Bmatrix} u \quad (3.3)$$

Onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez.

A partir do equacionamento do sistema e de sua forma matricial, o processamento computacional das variáveis que o constituem é feito conforme a representação deste no

espaço de estados, que estabelece um modelo matemático do sistema físico em função de um conjunto de variáveis de entrada, saída e de estado (NISE, 2004). As variáveis de estado, por sua vez, compreendem a menor quantidade possível de variáveis capazes de representar por completo o estado de um sistema dinâmico (OGATA, 1998). Essas variáveis relacionam-se entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem, as quais são expressas pelas Equações (3.4) e (3.5).

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3.4)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (3.5)$$

Em que  $\mathbf{A}$  é matriz de estado,  $\mathbf{B}$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{C}$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D}$  é a matriz de transmissão direta. Quanto aos vetores,  $x(t)$  é o vetor das variáveis de estado,  $u(t)$  é o vetor de entradas e  $y(t)$  é o vetor de saídas. No decorrer deste trabalho, o termo indicador de função temporal “(t)” será omitido para facilitar o desenvolvimento das equações.

Esta representação viabiliza, no domínio do tempo, uma abordagem prática e compacta da análise de sistemas com múltiplas entradas e saídas. Para o modelo de 1/4 de veículo em questão, o espaço de estados é definido como se segue nas equações (3.6) e (3.7), nas quais  $x_1 = z_U$ ,  $x_2 = \dot{z}_U$ ,  $x_3 = z_S$ ,  $x_4 = \dot{z}_S$ ,  $y_1 = \ddot{z}_S$ ,  $y_2 = z_S - z_U$  e  $y_3 = K_T(z_U - u)$ .

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_S+K_T)}{m_U} & -\frac{C}{m_U} & \frac{K_S}{m_U} & \frac{C}{m_U} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_S}{m_S} & \frac{C}{m_S} & -\frac{K_S}{m_S} & -\frac{C}{m_S} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{m_U} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_S}{m_S} & \frac{C}{m_S} & -\frac{K_S}{m_S} & -\frac{C}{m_S} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ K_T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} u \quad (3.7)$$

A forma como foi determinada a Equação (3.7) de saída possibilita obter no *software MATLAB* os valores de aceleração da massa suspensa, deflexão da suspensão e carga dinâmica do pneu a partir dos termos  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ , respectivamente. Estes valores compreendem três dos quatro principais parâmetros de performance de um sistema de suspensão citados na Seção 2.1.3, relativos ao desempenho do veículo em termos de conforto, estabilidade e aderência a um perfil de pista  $u$  arbitrário.

### 3.1.1 Modelo de 1/4 de Veículo com *Inerter*

A modelagem de um sistema de suspensão veicular integrado a um *inerter* passa pelo princípio de funcionamento ideal do dispositivo descrito na Seção 2.4, em que este

configura um elemento mecânico passivo capaz de resistir à aceleração relativa entre seus dois terminais. A Equação (2.1), proposta por Smith (2002), é então considerada na construção do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo e de suas equações de movimento. Uma vez que se trata de um equipamento atrelado à suspensão, no modelo o *inertor* é posicionado entre a massa suspensa e a massa não-suspensa. Sua configuração, contudo, pode variar entre série e paralelo a depender de seu arranjo em relação à mola da suspensão e o amortecedor. Smith e Wang (2004) propõem a introdução de oito *layouts* possíveis de suspensão contendo apenas um amortecedor e um *inertor*, ressaltando o fato de que estes são apenas uma parte de um grande número de configurações viáveis em um modelo.

Neste trabalho, para o estudo paramétrico em questão, optou-se pela abordagem de Shen et al. (2016) no que diz respeito à inclusão do *inertor* no modelo, que estabelece uma configuração otimizada para um sistema de suspensão ISD a partir da estrutura de um *Tuned Inerter Damper* (*TID* ou Amortecedor de *Inerter* Sintonizado, em português), proposto por Lazar, Neild e Wagg (2014) para a redução de vibrações de base em edifícios sujeitos a abalos sísmicos. Isto posto, na Figura 20 é exibida a configuração supracitada, seguida de suas respectivas equações de movimento.

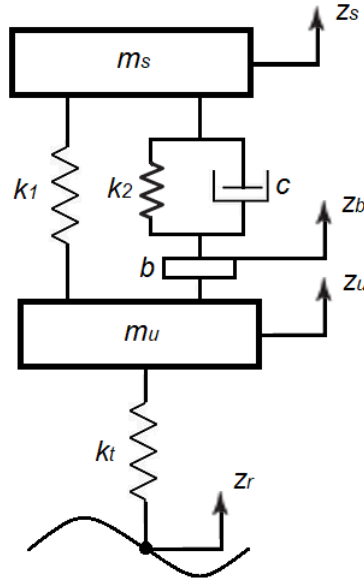


Figura 20 – Modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo para uma suspensão *ISD*

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + k_1 (z_s - z_u) + F_b = 0 \\ m_u \ddot{z}_u + k_t (z_u - z_r) + k_1 (z_u - z_s) - F_b = 0 \\ F_b = b (\ddot{z}_b - \ddot{z}_u) = k_2 (z_s - z_b) + c (\dot{z}_s - \dot{z}_b) \end{cases} \quad (3.8)$$

Onde  $m_s$  é a massa suspensa,  $m_u$  é a massa não suspensa,  $F_b$  é a força de resistência produzida pelo *inertor*,  $b$  é a inércia do *inertor*,  $c$  é o coeficiente de amortecimento viscoso do amortecedor,  $k_t$  é a rigidez equivalente do pneu,  $k_1$  é a rigidez da mola principal da suspensão,  $k_2$  é a rigidez da mola auxiliar,  $z_s$  é o deslocamento da carroceria e chassis,  $z_b$  é o deslocamento do *inertor*,  $z_u$  é o deslocamento do conjunto roda-pneu e  $z_r$

é o deslocamento relativo ao perfil de pista. A forma matricial das equações diferenciais apresentadas na Equação (3.8) pode ser verificada a seguir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_s & b & -b \\ 0 & -b & m_u+b \\ 0 & -b & b \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_s \\ \ddot{z}_b \\ \ddot{z}_u \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & -c & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{z}_b \\ \dot{z}_u \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ -k_1 & 0 & k_t+k_1 \\ k_2 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} z_s \\ z_b \\ z_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_t \\ 0 \end{Bmatrix} z_r \quad (3.9)$$

Onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema. Ao transferir as equações de movimento do sistema definidas pela Equação (3.8) para o espaço de estados, obtemos:

- O vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{z}_s & \dot{z}_u & \dot{z}_b & z_s & z_u & z_b \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

- A matriz de estado  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{m_s} & -\frac{c}{m_s} & -\frac{k_1}{m_s} & \frac{k_1+k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} \\ 0 & -\frac{c}{m_u} & \frac{c}{m_u} & \frac{k_1}{m_u} & -\frac{k_1+k_2+k_t}{m_u} & \frac{k_2}{m_u} \\ 0 & \frac{c}{m_s} + \frac{c}{b} & -\left(\frac{c}{m_s} + \frac{c}{b}\right) & -\frac{k_1}{m_s} & \left(\frac{k_1+k_2}{m_s} + \frac{k_2}{b}\right) & -\left(\frac{k_2}{m_s} + \frac{k_2}{b}\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

- A matriz de entrada  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_t}{m_u} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

- O vetor de entradas  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = z_r \quad (3.13)$$

- O vetor de saídas  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_s & z_s - z_u & k_t(z_u - z_r) \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

- A matriz de saída  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c}{m_s} & -\frac{c}{m_s} & -\frac{k_1}{m_s} & \frac{k_1+k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_t & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

- A matriz de transmissão direta  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_t \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$



Assim como no modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo (sem *inertor*) da seção 3.1, a equação de saída foi construída a fim de que fosse possível extrair via *MATLAB* os parâmetros de aceleração da massa suspensa  $\ddot{z}_s$ , deflexão da suspensão  $z_s - z_u$  e carga dinâmica do pneu  $k_t(z_u - z_r)$ . Desse modo, podem ser produzidos com o *software* os gráficos comparativos da performance de um sistema de suspensão *ISD* (Figura 20) em relação a um sistema convencional (passivo sem *inertor* – Figura 18).

### 3.2 Modelo de $\frac{1}{2}$ Veículo

O modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo caracteriza uma sofisticação do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo, simplificando desta forma a modelagem da dinâmica vertical de um sistema de suspensão. Trata-se de um modelo bidimensional de quatro graus de liberdade em que, como o nome sugere, é considerada a metade da massa total de um automóvel. Por meio dele é possível verificar o comportamento de um veículo quanto aos movimentos de translação (salto) e rotação (arfagem) do conjunto carroceria/chassis (massa suspensa) e quanto à translação do conjunto roda-pneu (massa não suspensa) nos eixos dianteiro e traseiro quando estes estão sujeitos à uma excitação de perfil de pista. As premissas conforme Gillespie (1992) relativas à modelagem do pneu e dos elementos de rigidez e amortecimento permanecem as mesmas em relação ao modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo. Na Figura 21 e na Equação (3.17) de movimento são expostas as particularidades do modelo, seus componentes e a relação físico-matemática existente entre eles de acordo com a definição de sua estrutura.

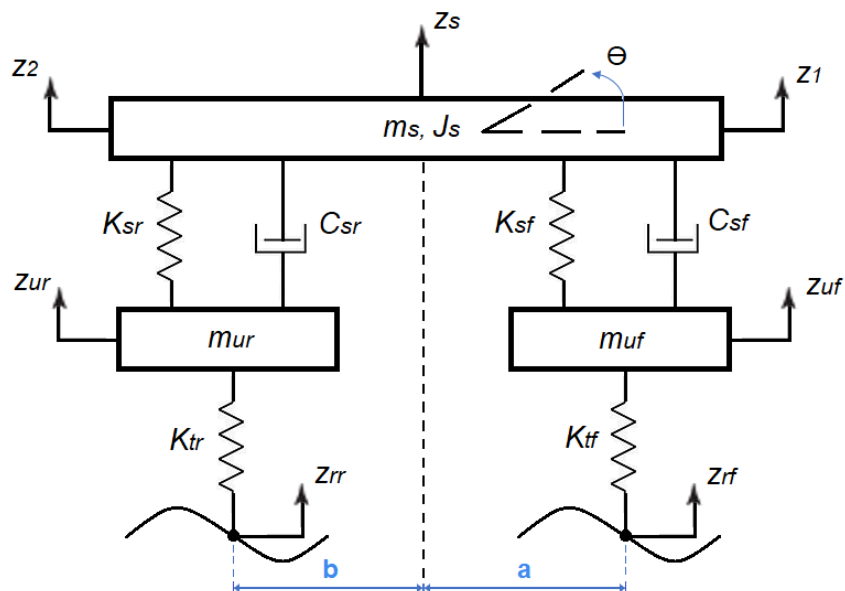


Figura 21 – Modelo de suspensão de  $\frac{1}{2}$  veículo

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = F(t) \tag{3.17}$$

Onde  $m_s$  é a massa suspensa,  $J_s$  é seu momento de inércia, e os subscritos  $f$  e  $r$  nos demais termos referem-se aos eixos dianteiro e traseiro, respectivamente. Dessa forma,  $m_{uf}$  e  $m_{ur}$  compõem a massa não-suspensa,  $k_{sf}$  e  $k_{sr}$  são as molas da suspensão (dianteira e traseira),  $C_{sf}$  e  $C_{sr}$  são os coeficientes de amortecimento dos amortecedores,  $K_{tf}$  e  $K_{tr}$  são os valores de rigidez equivalente dos pneus e os termos  $z_s$  e  $z_u$  (com subscritos  $f$  e  $r$ ), nessa ordem, são funções no domínio do tempo que caracterizam o deslocamento vertical das massas suspensa e não suspensa.  $\theta$  define no tempo o ângulo de arfagem do conjunto carroceria/chassis, enquanto os termos  $z_{rf}$  e  $z_{rr}$  correspondem ao perfil de pista a partir do qual o modelo é excitado. Com isso,  $z_{rr}$  será igual a  $z_{rf}$  somado a um atraso igual à distância entre eixos  $(a + b)$  dividida pela velocidade horizontal do veículo. Por último,  $z_1$  e  $z_2$  também são funções temporais que representam o movimento de translação dos eixos dianteiro e traseiro, das quais  $z_1$  é igual à soma  $z_s + a\theta$  e  $z_2$  é dada por  $z_s - b\theta$ . Quanto aos termos da Equação (3.17), temos:

- Os vetores posição  $z(t)$ , velocidade  $\dot{z}(t)$  e aceleração  $\ddot{z}(t)$  com os quatro graus de liberdade do sistema:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left\{ z_s \quad \theta \quad z_{uf} \quad z_{ur} \right\}^T \\ \dot{z}(t) &= \left\{ \dot{z}_s \quad \dot{\theta} \quad \dot{z}_{uf} \quad \dot{z}_{ur} \right\}^T \\ \ddot{z}(t) &= \left\{ \ddot{z}_s \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{z}_{uf} \quad \ddot{z}_{ur} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

- A matriz de massa  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{uf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ur} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

- A matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{sf} + c_{sr} & c_{sf}a - c_{sr}b & -c_{sf} & -c_{sr} \\ c_{sf}a - c_{sr}b & c_{sf}a^2 + c_{sr}b^2 & -c_{sf}a & c_{sr}b \\ -c_{sf} & -c_{sf}a & c_{sf} & 0 \\ -c_{sr} & c_{sr}b & 0 & c_{sr} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

- A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{sf} + k_{sr} & k_{sf}a - k_{sr}b & -k_{sf} & -k_{sr} \\ k_{sf}a - k_{sr}b & k_{sf}a^2 + k_{sr}b^2 & -k_{sf}a & k_{sr}b \\ -k_{sf} & -k_{sf}a & k_{sf} + k_{tf} & 0 \\ -k_{sr} & k_{sr}b & 0 & k_{sr} + k_{tr} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

- O vetor de excitação externa  $F(t)$  (excitação do perfil de pista):

$$F(t) = \left\{ 0 \quad 0 \quad k_{tf}Z_{rf} \quad k_{tr}Z_{rr} \right\}^T \quad (3.22)$$

Logo, a modelagem do sistema no espaço de estados se dá com base nos elementos das Equações (3.4) e (3.5) dispostos a seguir:

- O vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \left[ z_s \quad \dot{z}_s \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad z_{uf} \quad \dot{z}_{uf} \quad z_{ur} \quad \dot{z}_{ur} \right]^T \quad (3.23)$$

- A matriz de estado  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_{sf}+k_{sr})}{m_s} & \frac{-(c_{sf}+c_{sr})}{m_s} & \frac{-(k_{sfa}-k_{srb})}{m_s} & \frac{-(c_{sfa}-c_{srb})}{m_s} & \frac{k_{sf}}{m_s} & \frac{c_{sf}}{m_s} & \frac{k_{sr}}{m_s} & \frac{c_{sr}}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_{sfa}-k_{srb})}{j_s} & \frac{-(c_{sfa}-c_{srb})}{j_s} & \frac{-(k_{sfa}^2+k_{srb}^2)}{j_s} & \frac{-(c_{sfa}^2+c_{srb}^2)}{j_s} & \frac{k_{sfa}}{j_s} & \frac{c_{sfa}}{j_s} & \frac{-k_{srb}}{j_s} & \frac{-c_{srb}}{j_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{sf}}{m_{uf}} & \frac{c_{sf}}{m_{uf}} & \frac{k_{sfa}}{m_{uf}} & \frac{c_{sfa}}{m_{uf}} & \frac{-(k_{sf}+k_{tf})}{m_{uf}} & \frac{-c_{sf}}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{sr}}{m_{ur}} & \frac{c_{sr}}{m_{ur}} & \frac{-k_{srb}}{m_{ur}} & \frac{-c_{srb}}{m_{ur}} & 0 & 0 & \frac{-(k_{sr}+k_{tr})}{m_{ur}} & \frac{-c_{sr}}{m_{ur}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

- A matriz de entrada  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

- O vetor de entradas  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} Z_{rf} \\ Z_{rr} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

- O vetor de saídas  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \left[ \ddot{z}_s \quad \ddot{\theta} \quad z_1 - z_{uf} \quad z_2 - z_{ur} \quad k_{tf}(z_{uf} - z_{rf}) \quad k_{tr}(z_{ur} - z_{rr}) \right]^T \quad (3.27)$$

- A matriz de saída  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{-(k_{sf}+k_{sr})}{m_s} & \frac{-(c_{sf}+c_{sr})}{m_s} & \frac{-(k_{sfa}-k_{srb})}{m_s} & \frac{-(c_{sfa}-c_{srb})}{m_s} & \frac{k_{sf}}{m_s} & \frac{c_{sf}}{m_s} & \frac{k_{sr}}{m_s} & \frac{c_{sr}}{m_s} \\ \frac{-(k_{sfa}-k_{srb})}{j_s} & \frac{-(c_{sfa}-c_{srb})}{j_s} & \frac{-(k_{sfa}^2+k_{srb}^2)}{j_s} & \frac{-(c_{sfa}^2+c_{srb}^2)}{j_s} & \frac{k_{sfa}}{j_s} & \frac{c_{sfa}}{j_s} & \frac{-k_{srb}}{j_s} & \frac{-c_{srb}}{j_s} \\ 1 & 0 & a & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tr} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

- A matriz de transmissão direta  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{tf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{tr} \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

O vetor de saídas  $\mathbf{y}$  segue o mesmo padrão estabelecido ao final das seções anteriores. Portanto, a Equação (3.5) é montada a fim de que sejam obtidos os parâmetros de performance essenciais à análise do sistema de suspensão (Seção 2.1.3). Para o modelo de ½ veículo, estes compreendem a aceleração da massa suspensa  $\ddot{z}_s$ , a aceleração angular de arfagem  $\ddot{\theta}$ , deflexão da suspensão dianteira  $z_1 - z_{uf}$  e traseira  $z_2 - z_{ur}$ , além da carga dinâmica do pneu dianteiro  $k_{tf}(z_{uf} - z_{rf})$  e traseiro  $k_{tr}(z_{ur} - z_{rr})$ .

### 3.2.1 Modelo de 1/2 Veículo com *Inerter*

Os procedimentos de análise relativos ao modelo de suspensão *ISD* de 1/2 veículo são reproduzidos de forma similar àqueles descritos pela Seção 3.1.1 para o modelo de 1/4 de veículo. As equações de movimento que o constituem também são deduzidas segundo a construção do Diagrama de Corpo Livre do sistema e pela observância da 2ª Lei de Newton, ao passo que a Equação (2.1) traduz o comportamento ideal do dispositivo *inertter* quando integrado ao modelo. Nesse contexto, no tocante à estrutura do sistema *ISD*, a configuração proposta por Shen et al. (2016) dá origem a um modelo de 1/2 veículo de seis graus de liberdade, dos quais dois pertencem à massa suspensa e os demais distribuem-se entre os eixos dianteiro e traseiro. A Figura 22 expõe cada uma dessas características e o *layout* a ser discutido como objeto de estudo deste trabalho.

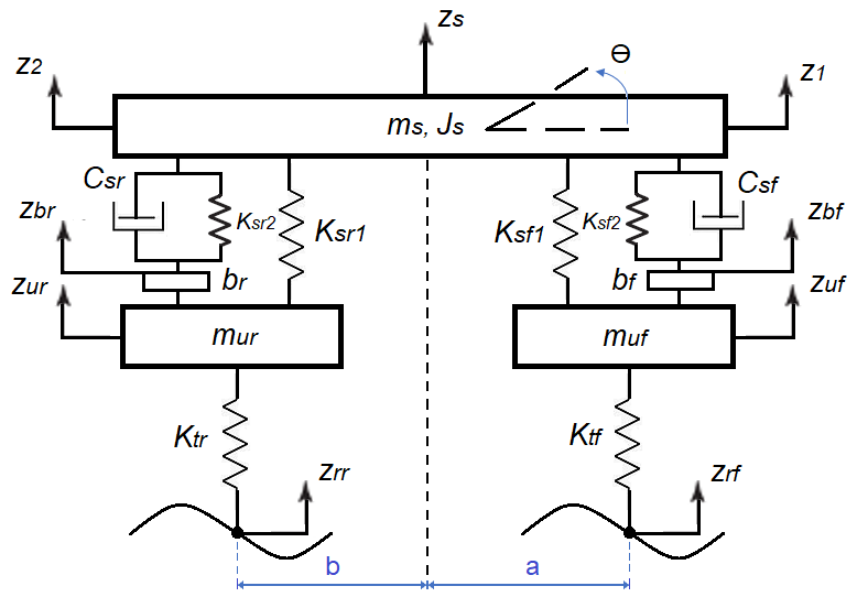


Figura 22 – Modelo de 1/2 veículo para uma suspensão *ISD*

Quando comparado ao modelo convencional exibido pela Figura 21, no modelo *ISD* os subscritos *f* e *r* e os termos  $m_s$ ,  $J_s$ ,  $m_{uf}$ ,  $m_{ur}$ ,  $C_{sf}$ ,  $C_{sr}$ ,  $K_{tf}$  e  $K_{tr}$  mantêm o mesmo significado. Já os termos  $K_{sf1}$  e  $K_{sr1}$  remetem aos valores de rigidez das molas principais dianteira e traseira da suspensão,  $K_{sf2}$  e  $K_{sr2}$  dizem respeito às molas secundárias, e então  $b_f$  e  $b_r$  equivalem às inertâncias dos inerters contidos nos dois eixos. A adição desses dispositivos ao sistema modifica a forma como a Equação (3.17) de movimento é formada, uma vez que são considerados ainda os deslocamentos  $z_{bf}$  e  $z_{br}$  dos mesmos. Diante de tais condições, os vetores de posição  $z(t)$ , velocidade  $\dot{z}(t)$ , aceleração  $\ddot{z}(t)$  e as matrizes  $\mathbf{M}$  de massa,  $\mathbf{C}$  de amortecimento e  $\mathbf{K}$  de rigidez são apresentados em sequência a seguir, seguidos do vetor de excitação externa  $F(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}(\mathbf{t}) &= \left\{ z_s \quad \theta \quad z_{uf} \quad z_{ur} \quad z_{bf} \quad z_{br} \right\}^T \\
 \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \left\{ \dot{z}_s \quad \dot{\theta} \quad \dot{z}_{uf} \quad \dot{z}_{ur} \quad \dot{z}_{bf} \quad \dot{z}_{br} \right\}^T \\
 \ddot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) &= \left\{ \ddot{z}_s \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{z}_{uf} \quad \ddot{z}_{ur} \quad \ddot{z}_{bf} \quad \ddot{z}_{br} \right\}^T
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{uf} + b_f & 0 & -b_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ur} + b_r & 0 & -b_r \\ 0 & 0 & -b_f & 0 & b_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_r & 0 & b_r \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{sf} + c_{sr} & c_{sf}a - c_{sr}b & 0 & 0 & -c_{sf} & -c_{sr} \\ c_{sf}a - c_{sr}b & c_{sf}a^2 + c_{sr}b^2 & 0 & 0 & -c_{sf}a & c_{sr}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{sf} & -c_{sf}a & 0 & 0 & c_{sf} & 0 \\ -c_{sr} & c_{sr}b & 0 & 0 & 0 & c_{sr} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{sf1} + k_{sf2} + k_{sr1} + k_{sr2} & k_{sf1}a + k_{sf2}a - k_{sr1}b - k_{sr2}b & -k_{sf1} & -k_{sr1} & -k_{sf2} & -k_{sr2} \\ (k_{sf1}a + k_{sf2}a - k_{sr1}b - k_{sr2}b)(k_{sf1}a^2 + k_{sf2}a^2 + k_{sr1}b^2 + k_{sr2}b^2) & -k_{sf1}a & k_{sr1}b & -k_{sf2}a & k_{sr2}b \\ -k_{sf1} & -k_{sf1}a & k_{sf1} + k_{tf} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{sr1} & k_{sr1}b & 0 & k_{sr1} + k_{tr} & 0 & 0 \\ -k_{sf2} & -k_{sf2}a & 0 & 0 & k_{sf2} & 0 \\ -k_{sr2} & k_{sr2}b & 0 & 0 & 0 & k_{sr2} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \left\{ 0 \quad 0 \quad k_{tf}z_{rf} \quad k_{tr}z_{rr} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \tag{3.34}$$

Posteriormente, com base na modelagem no espaço de estados, podem ser comparados os modelos *ISD* e convencional (sem *inerters*) de suspensão de ½ veículo quando submetidos a uma excitação de perfil de pista, quantificando-se as melhorias de desempenho promovidas pela inclusão do dispositivo. Sendo assim, o vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}$ , a matriz de estado  $\mathbf{A}$ , a matriz de entrada  $\mathbf{B}$ , o vetor de entradas  $\mathbf{u}$  e o vetor de saídas  $\mathbf{y}$  do modelo *ISD* também são respectivamente apresentados a seguir, de tal forma que a matriz  $\mathbf{A}$  foi dividida em duas partes (superior e inferior) com seis linhas e doze colunas cada, em virtude de seu tamanho. A matriz  $\mathbf{C}$  de saída e a matriz  $\mathbf{D}$  de transmissão direta não foram exibidas pois seguem o mesmo princípio de montagem das matrizes indicadas pelas Equações (3.28) e (3.29), isto é, acompanhando os parâmetros de performance definidos pelo vetor  $\mathbf{y}$ .

$$\mathbf{x} = \left\{ \dot{z}_s \quad \dot{\theta} \quad \dot{z}_{uf} \quad \dot{z}_{ur} \quad \dot{z}_{bf} \quad \dot{z}_{br} \quad z_s \quad \theta \quad z_{uf} \quad z_{ur} \quad z_{bf} \quad z_{br} \right\}^T \tag{3.35}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{sup} \\ \mathbf{A}_{inf} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{A}_{sup} = \begin{bmatrix} \frac{-(c_{sf}+c_{sr})}{m_s} & \frac{-(c_{sf}a-c_{sr}b)}{m_s} & 0 & 0 & \frac{c_{sf}}{m_s} & \frac{c_{sr}}{m_s} \\ \frac{-(c_{sf}a-c_{sr}b)}{J_s} & \frac{-(c_{sf}a^2+c_{sr}b^2)}{J_s} & 0 & 0 & \frac{c_{sf}a}{J_s} & \frac{-c_{sr}b}{J_s} \\ \frac{c_{sf}}{m_{uf}} & \frac{c_{sf}a}{m_{uf}} & 0 & 0 & \frac{-c_{sf}}{m_{uf}} & 0 \\ \frac{c_{sr}}{m_{ur}} & \frac{-c_{sr}b}{m_{ur}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_{sr}}{m_{ur}} \\ \frac{c_{sf}}{m_{uf}} + \frac{c_{sf}}{b_f} & \frac{c_{sf}a}{m_{uf}} + \frac{c_{sf}a}{b_f} & 0 & 0 & -\left(\frac{c_{sf}}{m_{uf}} + \frac{c_{sf}}{b_f}\right) & 0 \\ \frac{c_{sr}}{m_{ur}} + \frac{c_{sr}}{b_r} & -\left(\frac{c_{sr}b}{m_{ur}} + \frac{c_{sr}b}{b_r}\right) & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{c_{sr}}{m_{ur}} + \frac{c_{sr}}{b_r}\right) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(k_{sf1}+k_{sf2}+k_{sr1}+k_{sr2})}{m_s} & \frac{-(k_{sf1}a+k_{sf2}a-k_{sr1}b-k_{sr2}b)}{m_s} & \frac{k_{sf1}}{m_s} & \frac{k_{sr1}}{m_s} & \frac{k_{sf2}}{m_s} & \frac{k_{sr2}}{m_s} \\ \frac{-(k_{sf1}a+k_{sf2}a-k_{sr1}b-k_{sr2}b)}{J_s} & \frac{-(k_{sf1}a^2+k_{sf2}a^2+k_{sr1}b^2+k_{sr2}b^2)}{J_s} & \frac{k_{sf1}a}{J_s} & \frac{-k_{sr1}b}{J_s} & \frac{k_{sf2}a}{J_s} & \frac{-k_{sr2}b}{J_s} \\ \frac{k_{sf1}+k_{sf2}}{m_{uf}} & \frac{(k_{sf1}+k_{sf2})a}{m_{uf}} & \frac{-(k_{sf1}+k_{tf})}{m_{uf}} & 0 & \frac{-k_{sf2}}{m_{uf}} & 0 \\ \frac{k_{sr1}+k_{sr2}}{m_{ur}} & \frac{-(k_{sr1}+k_{sr2})b}{m_{ur}} & 0 & \frac{-(k_{sr1}+k_{tr})}{m_{ur}} & 0 & \frac{-k_{sr2}}{m_{ur}} \\ \frac{k_{sf1}+k_{sf2}}{m_{uf}} + \frac{k_{sf2}}{b_f} & \frac{(k_{sf1}+k_{sf2})a}{m_{uf}} + \frac{k_{sf2}a}{b_f} & \frac{-(k_{sf1}+k_{tf})}{m_{uf}} & 0 & \left(\frac{k_{sf2}}{m_{uf}} + \frac{k_{sf2}}{b_f}\right) & 0 \\ \frac{k_{sr1}+k_{sr2}}{m_{ur}} + \frac{k_{sr2}}{b_r} & -\left[\frac{(k_{sr1}+k_{sr2})b}{m_{ur}} + \frac{k_{sr2}b}{b_r}\right] & 0 & \frac{-(k_{sr1}+k_{tr})}{m_{ur}} & 0 & -\left(\frac{k_{sr2}}{m_{ur}} + \frac{k_{sr2}}{b_r}\right) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{A}_{inf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.40)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} Z_{rf} \\ Z_{rr} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{y} = \left[ \ddot{z}_s \quad \ddot{\theta} \quad z_1 - z_{uf} \quad z_2 - z_{ur} \quad k_{tf}(z_{uf} - z_{rf}) \quad k_{tr}(z_{ur} - z_{rr}) \right]^T \quad (3.42)$$

onde, nas Equações (3.36), (3.37) e (3.39),  $\mathbf{A}_{sup}$  e  $\mathbf{A}_{inf}$  consistem nas porções superior e inferior da matriz de estado  $\mathbf{A}$ .

### 3.3 Obtenção da Resposta em Frequência de um Sistema Dinâmico Submetido à Excitação Harmônica

A obtenção da resposta em frequência de um sistema dinâmico consiste em uma etapa fundamental da análise de seu comportamento mediante a aplicação de uma força harmônica externa. Com ela é possível identificar as amplitudes de deslocamento das massas que compõem o sistema e como estas se relacionam com a frequência da fonte excitadora, viabilizando a definição de parâmetros ótimos de operação conforme as vibrações às quais ele (o sistema) será submetido. No contexto de suspensões veiculares, Gillespie (1992) afirma que os parâmetros de projeto são usualmente estabelecidos de modo a acomodar a frequência natural de oscilação destes sistemas na faixa de 1 a 1,5 Hz, a qual se aproxima da frequência natural do caminhar humano e da percepção de conforto para os ocupantes. Em veículos de competição e/ou esportivos, mais voltados à performance de aderência e estabilidade, o conforto é desfavorecido a partir de uma suspensão mais rígida com frequências naturais no intervalo de 2 a 2,5 Hz.

Em vista disso, a aquisição da resposta dos modelos de suspensão apresentados nas seções anteriores ocorre com a sujeição dos mesmos à uma força harmônica dada por  $f_j(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t}$ , para a qual  $F_0$  é a amplitude,  $\omega$  é a frequência de oscilação forçante e  $j$  varia de 1 a  $n$  graus de liberdade. Uma vez que os modelos constituem sistemas do tipo massa-mola-amortecedor, a resposta esperada terá a mesma natureza da força excitadora, isto é, também será harmônica (RAO, 2009). Consequentemente, admite-se como resposta (ou solução) a expressão  $x_j(t) = X_j \cdot e^{i\omega t}$ , em que  $X$  é a amplitude de deslocamento e  $j$  também varia de 1 a  $n$  de acordo com o número “ $n$ ” de graus de liberdade do sistema. Tomando como exemplo um sistema genérico de dois GDL, o método para se obter os valores  $X_j$  que completam a solução prevista é descrito de maneira sequencial como se segue:

- **1º) Obtenção das equações de movimento do sistema:** Inicialmente são extraídas as equações de movimento do sistema com a aplicação da 2ª Lei de Newton e construção do DCL. Haja vista que o exemplo trata de um sistema geral de dois graus de liberdade, as equações assumem o seguinte formato matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Novamente, os termos em ordem  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  referem-se às matrizes de massa, rigidez e amortecimento. O 1º e o 2º subscrito numérico (como em  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$  e  $m_{22}$ ) indicam a posição do termo quanto à linha e à coluna da matriz, respectivamente.

- **2º) Aplicação da força externa:** Considerando então que as forças externas são harmônicas, no sistema 2GDL em questão temos:

$$F_j(t) = F_{0j}e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (3.44)$$

Onde, pela identidade de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t) \quad (3.45)$$

Como mencionado, a solução em regime permanente pode ser escrita como:

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (3.46)$$

Onde  $X_1$  e  $X_2$  são, em geral, quantidades complexas que dependem de  $\omega$  e dos parâmetros do sistema (RAO, 2009). Ao derivar esta expressão para  $\ddot{x}_j(t)$  e  $\dot{x}_j(t)$ , obtemos:

$$\ddot{x}_j(t) = -\omega^2 X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (3.47)$$

$$\dot{x}_j(t) = i\omega X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (3.48)$$

A substituição das Equações (3.44), (3.46), (3.47) e (3.48) na Equação (3.43) resulta em:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11} & -\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + i\omega c_{21} + k_{21} & -\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}(\omega)} \underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} \quad (3.49)$$

De forma sintética, tem-se:

$$[\mathbf{Z}(\omega)]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{F}_0\} \quad (3.50)$$

Em que  $\{\mathbf{X}\}$  é o vetor de amplitudes de deslocamento,  $\{\mathbf{F}_0\}$  é o vetor com as amplitudes da força de excitação e  $[\mathbf{Z}(\omega)]$  corresponde à chamada matriz de impedância do sistema. Esta matriz estabelece uma medida da capacidade do sistema em impedir uma resposta mediante a ação de uma força (SMITH, 2002). Em outras palavras, ela estabelece a razão entre a força externa e o deslocamento resultante. Isso significa que em um sistema dinâmico com alta impedância são necessárias forças de grande magnitude para promover deslocamentos, enquanto que em um sistema com pouca impedância uma força de baixa magnitude já é capaz de causar um deslocamento elevado. Visto que é uma matriz dependente de  $\omega$ , vão existir frequências de excitação nas quais o sistema pode apresentar maior ou menor impedância. A expressão geral para  $\mathbf{Z}(\omega)$  é dada por:

$$[\mathbf{Z}(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] \quad (3.51)$$

Logo, para o sistema 2GDL também é possível escrever:

$$[\mathbf{Z}(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$



- **3º) Obtenção da resposta em frequência a partir de  $[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}$ :** A Equação (3.50) pode ser resolvida para obter:

$$\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{Z}(\omega)]^{-1} \{\mathbf{F}_0\} \quad (3.53)$$

A matriz  $[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}$ , portanto, equivale à matriz de admitância do sistema, a qual possibilita obter a relação numérica (ganho) existente entre o deslocamento e a frequência da força excitadora. Para o sistema 2GDL, temos:

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Assim:

$$X_1 = \frac{Z_{22}F_{01} - Z_{12}F_{02}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \quad (3.55)$$

$$X_2 = \frac{-Z_{12}F_{01} + Z_{11}F_{02}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \quad (3.56)$$

Substituindo as Equações (3.55) e (3.56) na Equação (3.46), podemos finalmente determinar a solução:

$$x_1(t) = \frac{Z_{22}F_{01} - Z_{12}F_{02}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \frac{-Z_{12}F_{01} + Z_{11}F_{02}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} e^{i\omega t} \quad (3.57)$$

Este procedimento pode ser replicado para quaisquer sistemas massa-mola-amortecedor de três ou mais graus de liberdade, servindo de base para que fossem obtidos os mapas de resposta em frequência do Capítulo 4.

## 4 Resultados e Discussão

Os resultados do presente trabalho incluem os mapas de resposta dos modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  de veículo obtidos a partir das variações dos parâmetros de rigidez, amortecimento e inércia. Através da modelagem no espaço de estados, obtém-se ainda a comparação do desempenho de uma suspensão *ISD* com uma suspensão passiva convencional. Desse modo, a escolha dos valores discutidos no estudo paramétrico é feita de acordo com [Smith e Wang \(2004\)](#) e [Gillespie \(1992\)](#) quanto aos parâmetros geralmente utilizados em veículos de passeio, mantendo assim uma boa concordância entre os dados dos modelos e aqueles empregados em veículos reais.

A Tabela 2 apresenta as propriedades relativas ao modelo de suspensão passiva *ISD* exibido na Figura 20. Nela estão os valores dos parâmetros de massa suspensa e não-suspensa, rigidez do pneu e mola auxiliar da suspensão, além das faixas de valores utilizadas nos mapas de resposta para a rigidez da mola principal, coeficiente de amortecimento e inércia.

Tabela 2 – Propriedades do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo da suspensão *ISD*

Propriedades	Valores
Massa suspensa $m_s$ (kg)	350
Massa não-suspensa $m_u$ (kg)	50
Rigidez do pneu $k_t$ (kN/m)	200
Rigidez da mola auxiliar $k_2$ (kN/m)	10
Rigidez da mola principal $k_1$ (kN/m)	De 20 a 100
Coefficiente de amortecimento $c$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	De 50 a 2000
Inércia $b$ (kg)	De 20 a 200

### 4.1 Mapas de Resposta em Frequência - Modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo

Os mapas de resposta são obtidos com base na matriz de admitância  $[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}$  (Equação (3.53)), que estabelece a relação entre a amplitude de deslocamento (sinal de saída) das massas e a frequência da força excitadora (sinal de entrada). Com isso, conforme o equacionamento do modelo, a construção do gráfico de resposta em frequência se dá a partir do módulo do primeiro termo da diagonal principal da matriz, isto é, o termo referente ao deslocamento da massa suspensa. No software *MATLAB*, este termo é colocado em função de valores de frequência  $\omega$  que vão de 0 a 50 rad/s, para assim ser obtida a Função de Resposta em Frequência (FRF) correspondente para cada conjunto de parâmetros. O mapa em 3D é então obtido a partir do valor de pico de cada FRF relacionada a cada conjunto de parâmetros (no caso, rigidez  $k_1$  e inércia  $b$  ou amortecimento  $c$  e

inertância), de modo que estes valores de pico são posicionados no eixo  $Z$  em função desse par de valores nos outros dois eixos ( $X$  e  $Y$ ). O benefício de se obter um mapa de resposta do modelo consiste na possibilidade de análise e identificação de parâmetros ótimos de dimensionamento de suspensão para veículos reais, seguindo padrões e/ou requisitos de projeto pré-determinados.

A Figura 23 apresenta o mapa de resposta em frequência do modelo de suspensão *ISD* considerando-se as variações da inertância  $b$  de 0 a 220 kg e da rigidez da mola principal  $k_1$  de 20 a 100 kN/m. O valor do coeficiente de amortecimento  $c$ , por sua vez, foi fixado em 1100 N.s/m. Em contrapartida, a Figura 24 exhibe o mapa de resposta em frequência do modelo sujeito às variações da inertância (de 0 a 220 kg) e do coeficiente de amortecimento  $c$  de 50 a 2000  $Ns \cdot m^{-1}$ , ao passo que a rigidez  $k_1$  foi fixada em 22 kN/m.

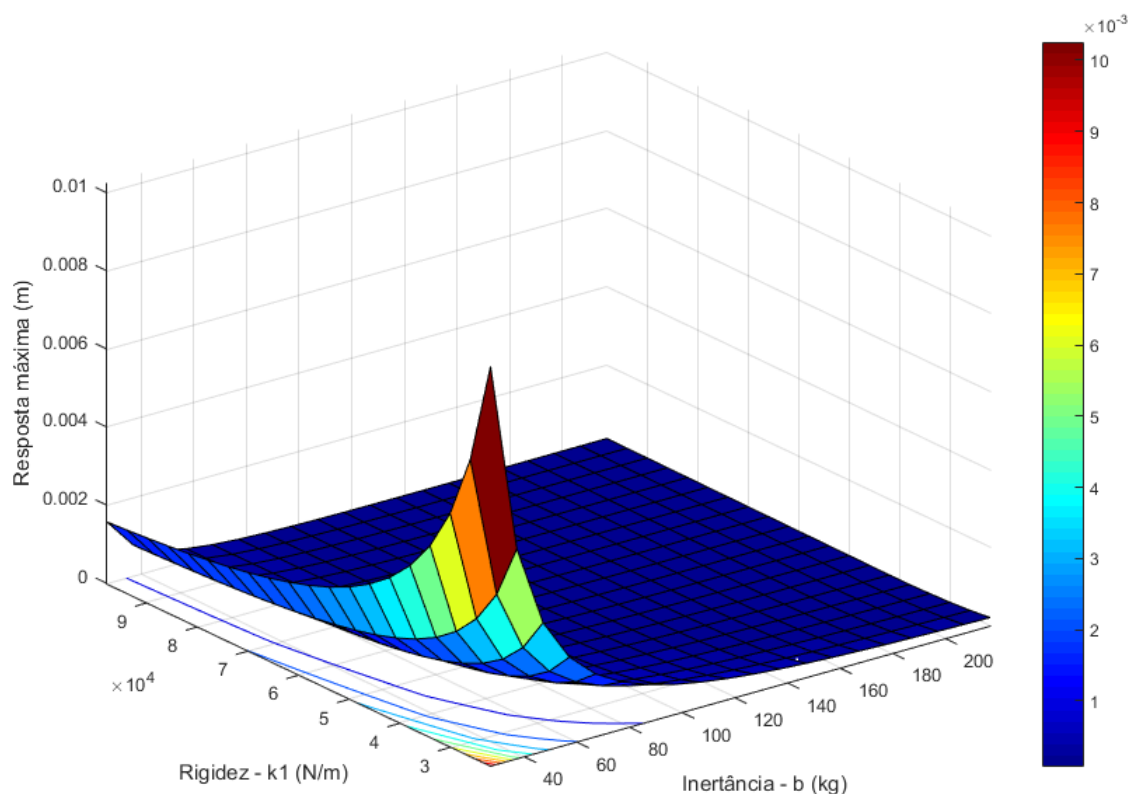


Figura 23 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo para as variações da inertância  $b$  e da rigidez  $k_1$

Os mapas apresentados demonstram que a elevação dos valores de inertância promove reduções consideráveis da magnitude dos picos de resposta. Todavia, com as linhas de projeção dos gráficos (superfícies) sob o plano  $XY$ , pode-se verificar que acima de 50 kg de inertância já não há mais reduções significativas na amplitude de deslocamento da massa suspensa (mantendo-se em azul na escala dos mapas), e que o impacto das variações deste parâmetro é similar, em escala, àqueles observados com o coeficiente de amortecimento dos amortecedores (Figura 24). Nesse cenário, na Figura 23 nota-se que é possível reduzir substancialmente os valores de pico mantendo-se a rigidez constante, ao

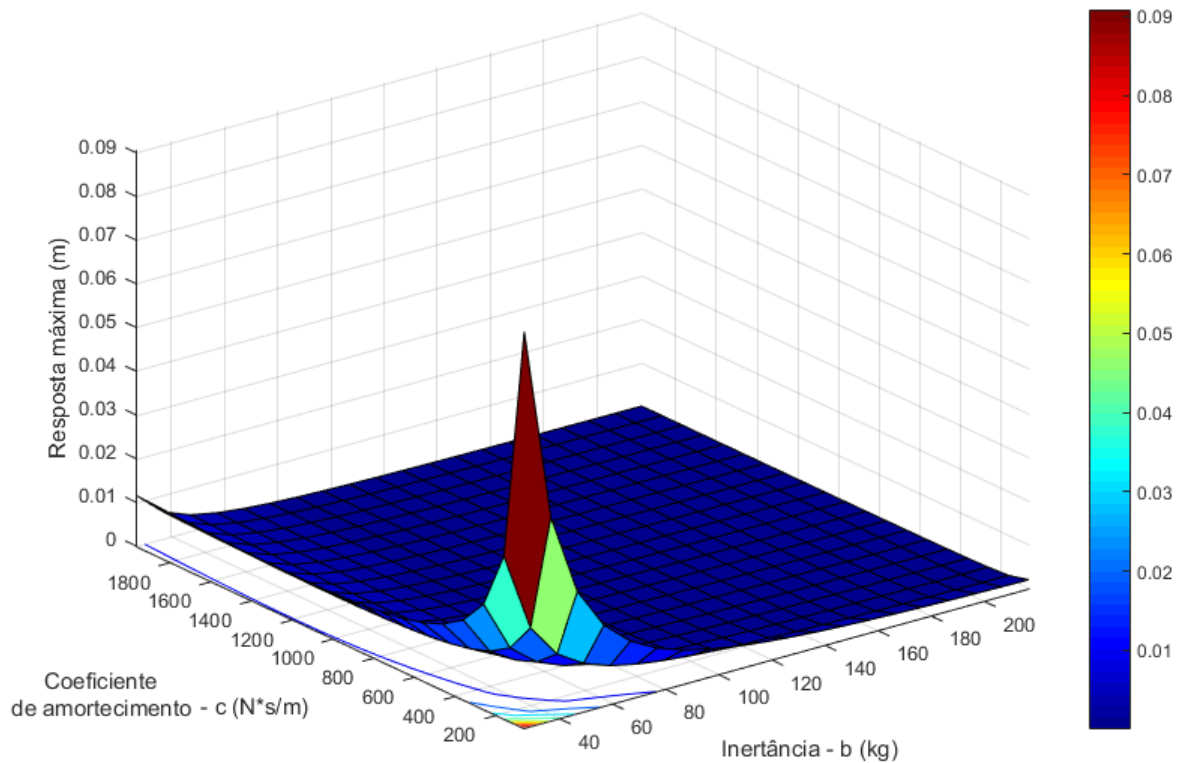


Figura 24 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo para as variações da inertância  $b$  e do coeficiente de amortecimento  $c$

passo que enrijecer o sistema sob uma inertância constante não produz o mesmo efeito redutivo.

É igualmente importante destacar o mapa de resposta em frequência relativo ao modelo convencional de suspensão (sem *inerters*), representado pela Figura 25. Nele são observadas as mudanças de amplitude de oscilação da massa suspensa quando o sistema é submetido a variações de rigidez e amortecimento, sem a presença de inertância. Na Tabela 3 estão contidos os valores dos parâmetros utilizados na confecção do mapa, os quais levam em consideração o modelo da Figura 18 e suas equações de movimento. Para fins de comparação com o modelo *ISD*, os valores de massa suspensa, massa não suspensa e rigidez do pneu foram mantidos iguais aos da Tabela 2, bem como as faixas de valores referentes a rigidez da mola da suspensão e ao coeficiente de amortecimento do amortecedor.

Tabela 3 – Propriedades do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo da suspensão convencional

Propriedades	Valores
Massa suspensa $m_s$ (kg)	350
Massa não-suspensa $m_u$ (kg)	50
Rigidez do pneu $k_t$ (kN/m)	200
Rigidez da mola da suspensão $K_s$ (kN/m)	De 20 a 100
Coeficiente de amortecimento $C$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	De 50 a 2000

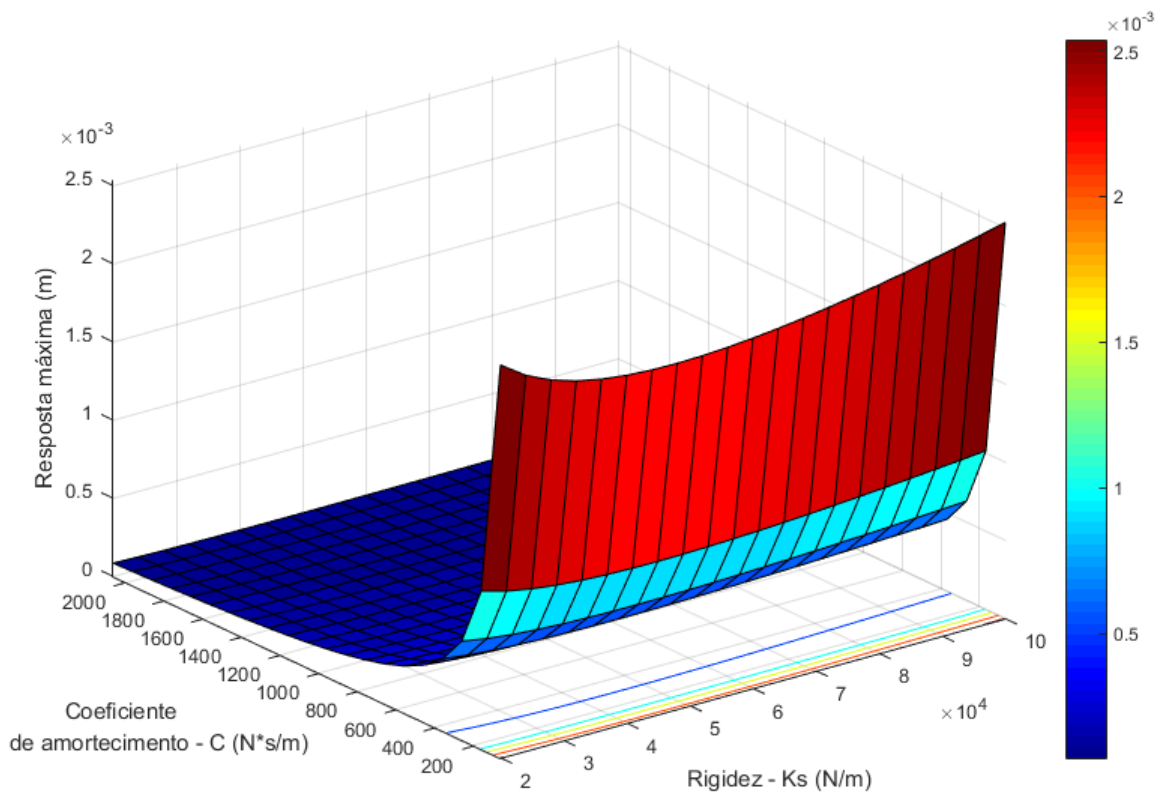


Figura 25 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de  $\frac{1}{4}$  de veículo para as variações da rigidez  $K_s$  e do coeficiente de amortecimento  $c$

A superfície e as linhas de projeção que compõem o mapa da Figura 25 evidenciam um comportamento inerente aos sistemas massa-mola-amortecedor tradicionais, isto é, com amortecimento viscoso (proporcional à velocidade). Trata-se do fato de que a dissipação da energia do movimento vibratório, em condições ideais, depende exclusivamente da presença de amortecimento no sistema. Por consequência, quando se impõe um aumento de rigidez (da esquerda para a direita na Figura 25) diante de um amortecimento constante não há reduções perceptíveis dos picos de amplitude (eixo  $Z$ ), diferentemente da situação oposta (aumento do coeficiente de amortecimento  $C$  sob rigidez  $K_s$  constante).

## 4.2 Mapas de Resposta em Frequência – Modelo de $\frac{1}{2}$ veículo

A construção dos mapas de resposta em frequência a partir dos modelos de  $\frac{1}{2}$  veículo ocorre com base no mesmo procedimento descrito no início da seção 4.1. A matriz de admitância  $[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}$  é então constituída pelas matrizes de massa, amortecimento e rigidez que compõem os modelos *ISD* e convencional e permite obter não somente as amplitudes de deslocamento da massa suspensa, mas também do ângulo de arfagem de ambos os modelos quando submetidos à excitação harmônica. Em função do equacionamento estabelecido nas seções 3.2 e 3.2.1, esses valores de amplitude são obtidos com os módulos do primeiro e segundo termos da diagonal principal de  $[\mathbf{Z}(\omega)]^{-1}$ , respectiva-

mente. Em *MATLAB*, repete-se o processo de submeter estes módulos a uma faixa de frequência excitante  $\omega$  de 0 a 50 rad/s para extrair a FRF correspondente a cada par de parâmetros (inertância e rigidez ou inertância e amortecimento).

A fim de verificar a correlação entre os modelos *ISD* estabelecidos pelas Figuras 20 e 22, os parâmetros de massa, amortecimento e rigidez foram mantidos iguais àqueles estabelecidos pela Tabela 2 para os eixos dianteiro e traseiro, permitindo também a validação das equações de movimento obtidas analiticamente para o modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo. Pelo mesmo motivo, as distâncias  $a$  e  $b$  até o CG do modelo (em azul na Figura 22) consideram um corpo homogêneo em termos de distribuição de massa e, portanto, foram mantidas iguais uma à outra. No estudo paramétrico, as faixas de variação de rigidez, amortecimento e inertância nos dois eixos mantiveram-se idênticas em relação ao modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo. Nessas circunstâncias, na Tabela 4 estão dispostos os valores utilizados nas análises em questão, enquanto as Figuras 26 e 27 exibem os mapas de resposta para a amplitude de deslocamento da massa suspensa (i.e. salto ou *bounce*, em inglês).

Tabela 4 – Propriedades do modelo *ISD* de  $\frac{1}{2}$  veículo utilizadas no estudo paramétrico

Propriedades	Valores
Massa suspensa $m_s$ (kg)	700
Momento de inércia $J_s$ ( $kg \cdot m^2$ )	1093,75
Massa não suspensa frontal $m_{uf}$ (kg)	50
Massa não suspensa traseira $m_{ur}$ (kg)	50
Rigidez da mola principal dianteira $k_{sf1}$ (kN/m)	De 20 a 100
Rigidez da mola principal traseira $k_{sr1}$ (kN/m)	De 20 a 100
Rigidez da mola auxiliar dianteira $k_{sf2}$ (kN/m)	10
Rigidez da mola auxiliar traseira $k_{sr2}$ (kN/m)	10
Inertância do inerter dianteiro $b_f$ (kg)	De 20 a 220
Inertância do inerter traseiro $b_r$ (kg)	De 20 a 220
Coefficiente de amortecimento dianteiro $C_{sf}$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	De 50 a 2000
Coefficiente de amortecimento traseiro $C_{sr}$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	De 50 a 2000
Rigidez do pneu dianteiro $k_{tf}$ (kN/m)	200
Rigidez do pneu traseiro $k_{tr}$ (kN/m)	200
Distância do eixo dianteiro ao centro de massa "a" (m)	1,25
Distância do eixo traseiro ao centro de massa "b" (m)	1,25
Distância entre eixos ( $a + b$ ) (m)	2,50

Da mesma maneira que o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo, no mapa da Figura 26 os valores de amortecimento dianteiro e traseiro ( $C_{sf}$  e  $C_{sr}$ ) foram fixados em 1100 N.s/m e na Figura 27 os valores de rigidez  $K_{sf1}$  e  $K_{sr1}$  foram fixados em 22 kN/m.

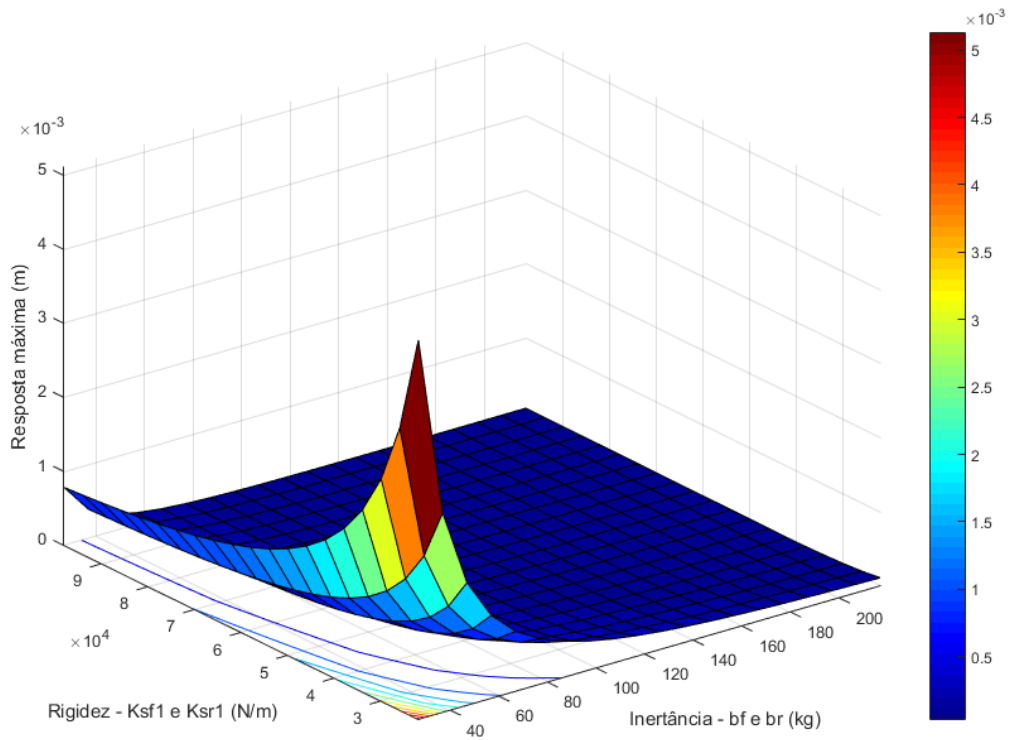


Figura 26 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações das inertâncias e rigidez das molas principais (dianteira e traseira)

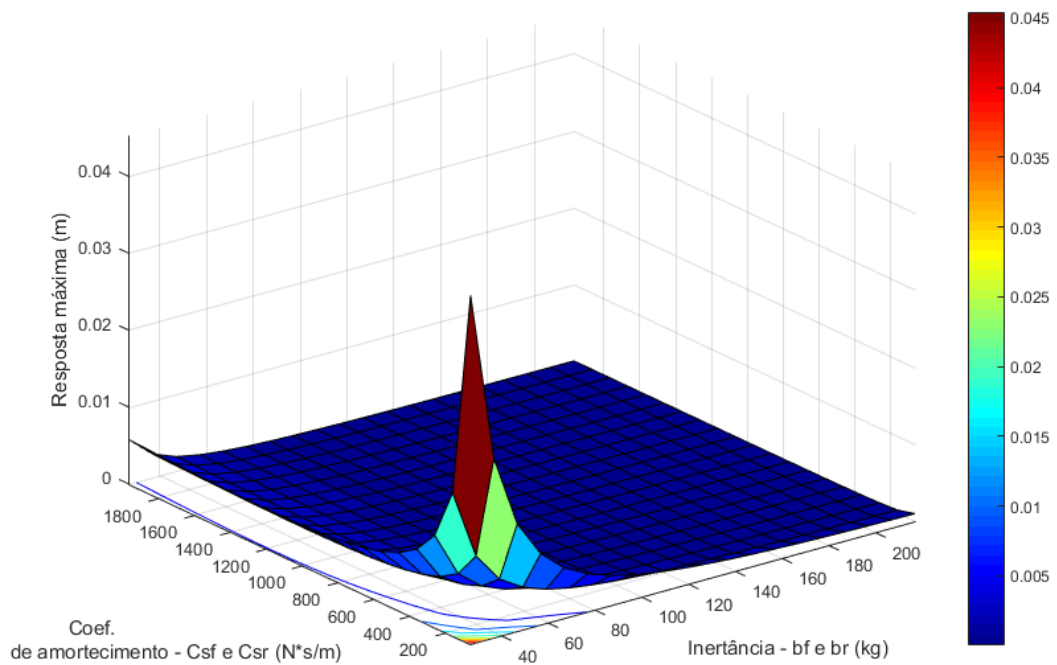


Figura 27 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações das inertâncias e dos coeficientes de amortecimento (dianteiro e traseiro)



O comportamento e a magnitude das respostas máximas retratadas nas Figuras 26 e 27 revelam que há uma relação de proporcionalidade entre os mapas de resposta dos modelos *ISD* de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo. As amplitudes de pico para o movimento de salto ( $Z_s$ ) não apenas forneceram as mesmas superfícies, mas também foram exatamente iguais à metade dos valores estabelecidos nas Figuras 23 e 24. Isso se deve a uma série de fatores, os quais vão desde a construção das equações de movimento de ambos os modelos até a parametrização do problema. Uma vez que ambos os modelos são governados por EDO's lineares e com coeficientes constantes, as vibrações a serem detectadas terão natureza linear e, conseqüentemente, obedecerão ao Princípio da Superposição (RAO, 2009). Este princípio se justifica pelo fato de que todos os componentes dos modelos *ISD* e convencional se comportam de forma linear, possibilitando a determinação de uma solução analítica (SMITH, 2002).

Outro fator a se considerar para a redução pela metade dos valores de amplitude é a existência de “*wheelbase filtering*”, isto é, a “filtragem do entre eixos” inerente aos modelos de  $\frac{1}{2}$  veículo. Trata-se da filtragem que o eixo traseiro exerce na amplitude de excitação de arfagem/salto a partir da defasagem do input (sinal de entrada). Esta defasagem de tempo se dá pela distância entre eixos dividida pela velocidade do veículo, estabelecendo o atraso com o qual as rodas traseiras recebem a mesma excitação das rodas dianteiras (GILLESPIE, 1992). Quando combinam-se estes fatores à parametrização do problema, onde foram mantidas iguais as propriedades de massa, amortecimento, rigidez e inertância nos dois eixos e suas faixas de variação, pode ser facilmente deduzido um aumento proporcional da impedância mecânica em relação ao modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo. Esta, como descrita no capítulo 3, é dada pela Equação (3.51).

Tendo em vista as características dos mapas apresentados anteriormente, na Figura 28 é apresentado o mapa de resposta em frequência para as amplitudes de salto do modelo convencional de  $\frac{1}{2}$  veículo (Figura 21). Seguindo o procedimento de parametrização do modelo *ISD*, na Tabela 5 estão dispostos os valores das propriedades consideradas no estudo, mantidos iguais ao modelo convencional de  $\frac{1}{4}$  de veículo nos eixos dianteiro e traseiro. A relação de proporcionalidade com o mapa da Figura 25 é igualmente percebida.

Tabela 5 – Propriedades do modelo convencional de  $\frac{1}{2}$  veículo utilizadas no estudo paramétrico

Propriedades	Valores
Massa suspensa $m_s$ (kg)	700
Momento de inércia $J_s$ ( $kg \cdot m^2$ )	1093,75
Massas não suspensas frontal $m_{uf}$ e traseira $m_{ur}$ (kg)	50 (cada)
Rigidez das molas da suspensão dianteira $k_{sf}$ e traseira $k_{sr}$ (kN/m)	De 20 a 100 (cada)
Coef. de amortecimento dianteiro $C_{sf}$ e traseiro $C_{sr}$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	De 50 a 2000 (cada)
Rigidez dos pneus dianteiro $k_{tf}$ e traseiro $k_{tr}$ (kN/m)	200 (cada)
Distância do eixo dianteiro ao centro de massa "a" (m)	1,25
Distância do eixo traseiro ao centro de massa "b" (m)	1,25
Distância entre eixos ( $a + b$ ) (m)	2,50



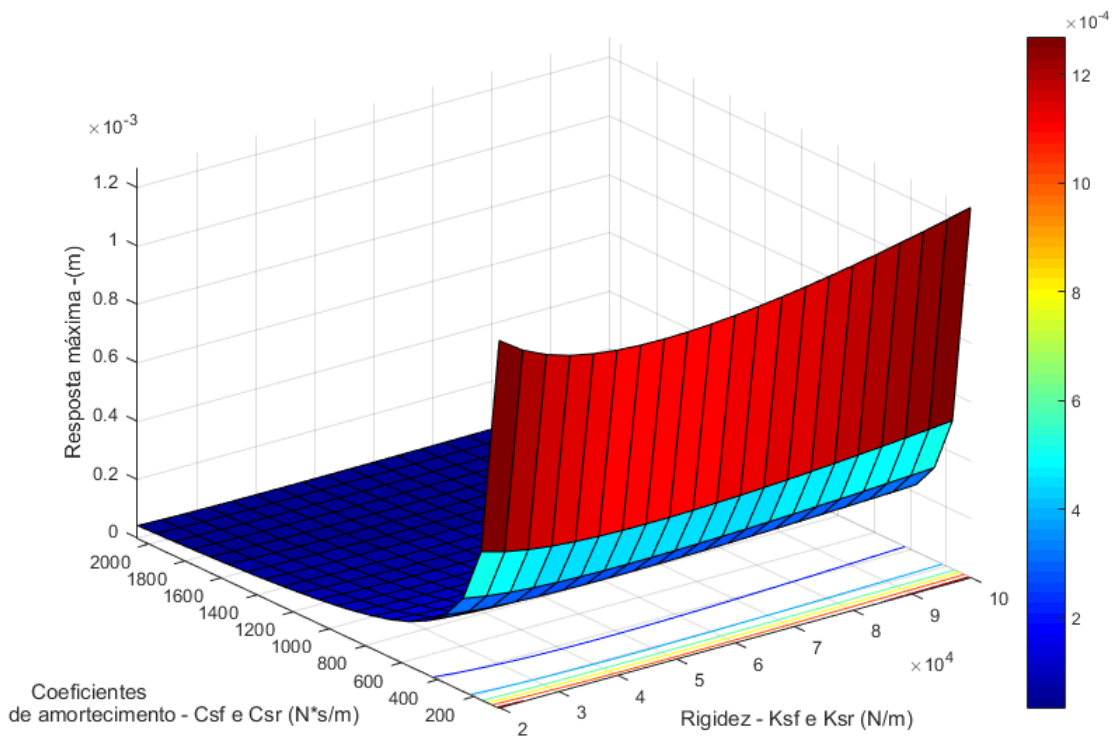


Figura 28 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de salto ( $Z_s$ ), sob variações de rigidez  $K_{sf}$  e  $K_{sr}$  e dos coeficientes de amortecimento  $C_{sf}$  e  $C_{sr}$

A seguir estão os mapas de resposta relativos às amplitudes máximas do ângulo de arfagem (ou *pitch*, em inglês), extraídos dos modelos *ISD* e convencional. Na Figura 29 é exibida a resposta do modelo *ISD* quando submetido às variações de rigidez e inertância, e na Figura 30 são impostas as variações de inertância e amortecimento. Ressalta-se novamente que as propriedades do modelo *ISD* seguem o que fora definido na Tabela 4, bem como os valores fixados de amortecimento (1100 N.s/m) e rigidez (22 kN/m) nos mapas referentes ao salto (Figuras 26 e 27, respectivamente).

É interessante notar que o comportamento de ambos os gráficos foi igual ao observado para as amplitudes de salto, tal como as reduções promovidas pelo aumento de inertância. As magnitudes dos picos de arfagem, no entanto, são dadas em unidade de radianos e mantiveram-se abaixo  $3,5 \cdot 10^{-3}$  rad nos dois mapas. Em vista disso, percebe-se ainda que os aumentos/reduções de inertância, amortecimento e rigidez agem de forma similar nas amplitudes de salto  $Z_s$  e arfagem  $\theta$ , desde que sejam considerados o *layout* do modelo *ISD* exposto na Figura 22 e suas equações de movimento.

Por último, na Figura 31 apresenta-se o mapa de resposta em frequência para o modelo convencional de  $\frac{1}{2}$  veículo em termos das amplitudes máximas do ângulo de arfagem, posto diante de variações de rigidez  $K_{sf}$  e  $K_{sr}$  e amortecimento  $C_{sf}$  e  $C_{sr}$ . Assim como na Figura 28, são considerados os valores da Tabela 5.

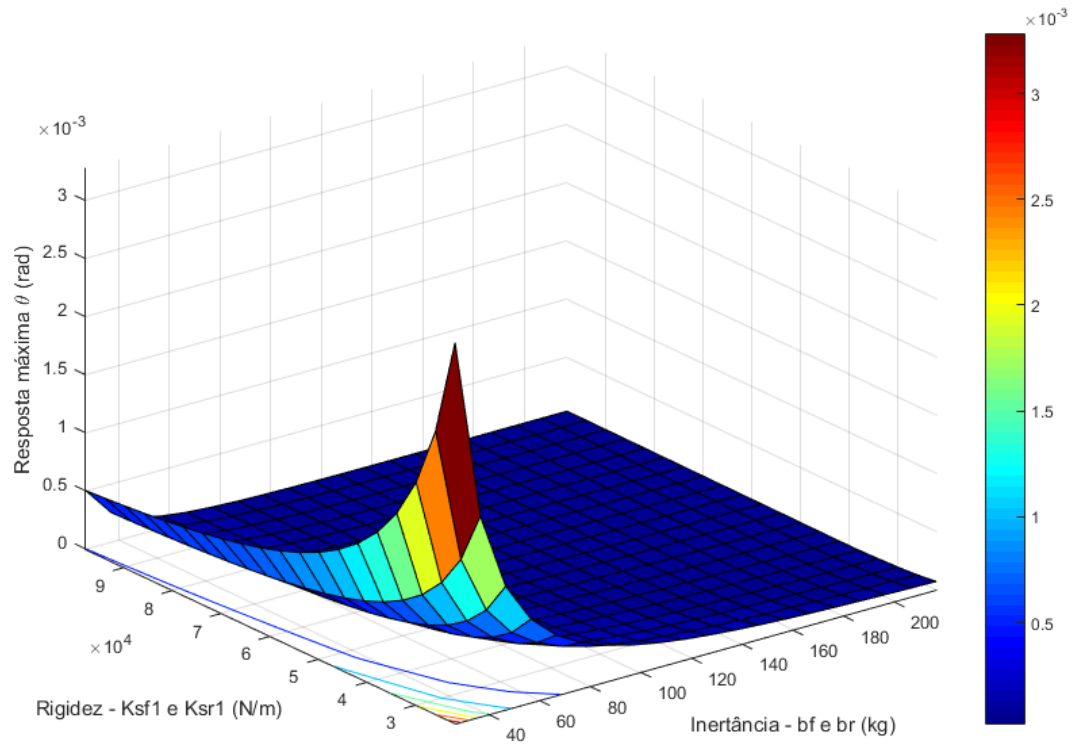


Figura 29 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações das inertâncias e rigidez das molas principais (dianteira e traseira)

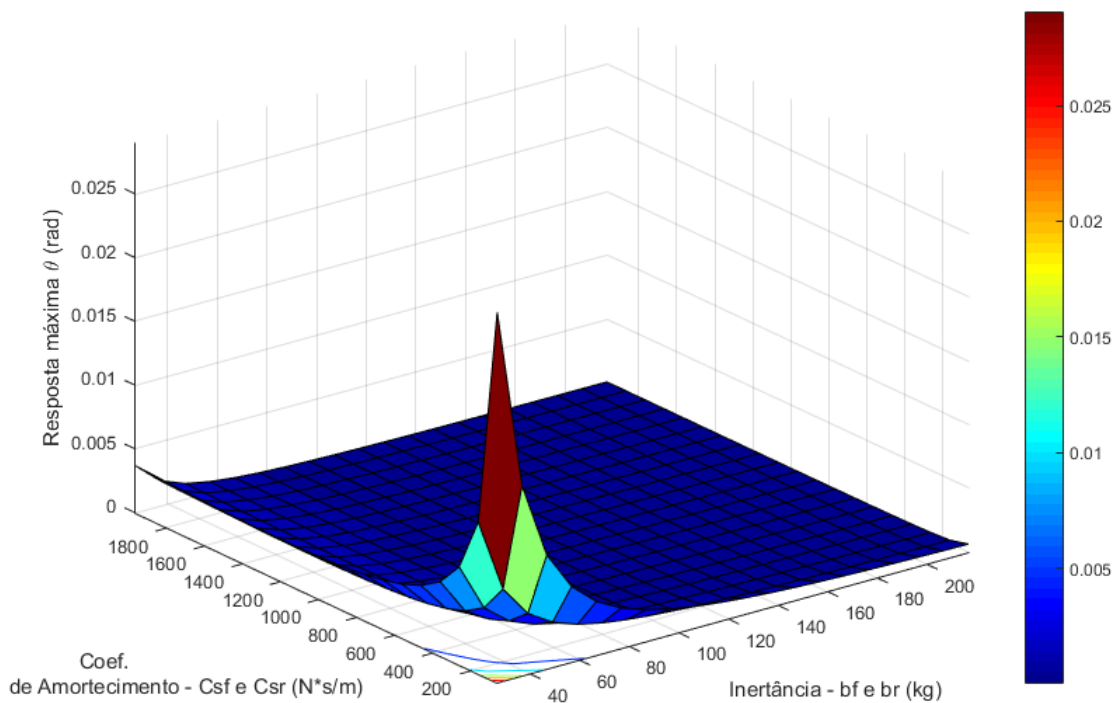


Figura 30 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações das inertâncias e dos coeficientes de amortecimento (dianteiro e traseiro)

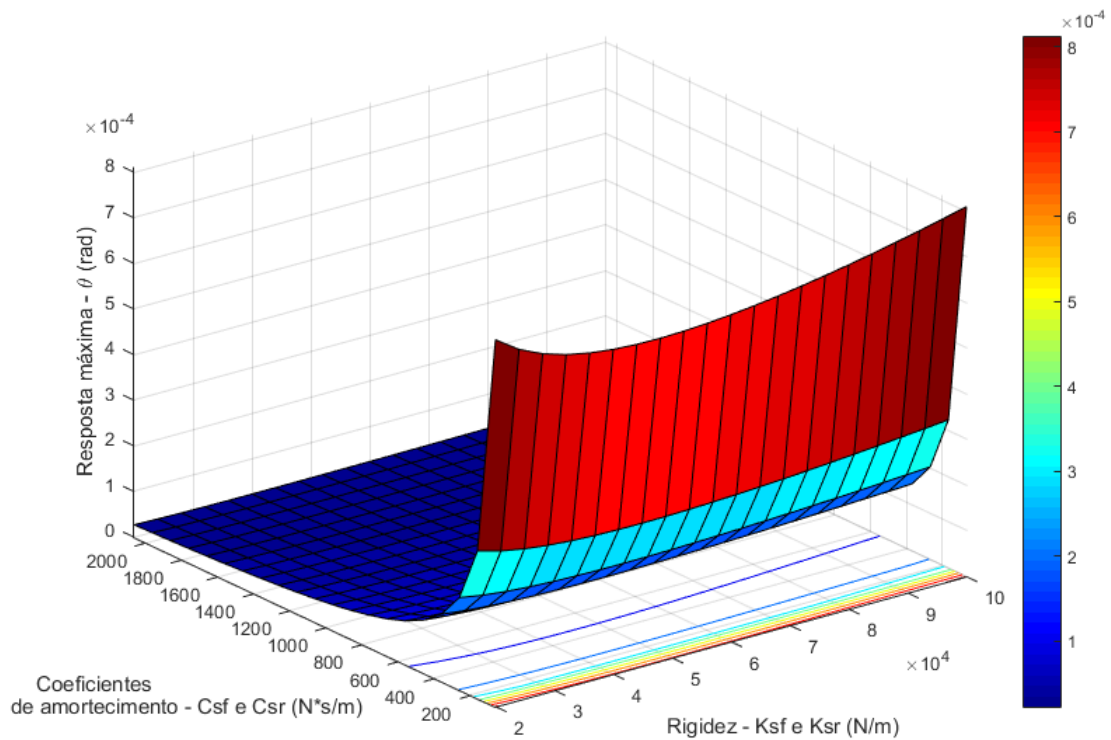


Figura 31 – Mapa de resposta em frequência do modelo convencional de  $\frac{1}{2}$  veículo para as amplitudes máximas de arfagem ( $\theta$ ), sob variações de rigidez  $K_{sf}$  e  $K_{sr}$  e dos coeficientes de amortecimento  $C_{sf}$  e  $C_{sr}$

Mais uma vez nota-se que a influência das variações de rigidez e amortecimento se manifesta de modo equivalente entre as amplitudes de salto e arfagem, suportando as considerações apontadas nos mapas anteriores. Os resultados expressos nesta seção apontam para melhorias com a adição do *inertor*, contudo, estas serão avaliadas à luz dos parâmetros de performance dos sistemas de suspensão na seção 4.4. As relações de proporcionalidade observadas entre os modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo, nesse contexto, foram essenciais para a validação das equações de movimento obtidas analiticamente, sobretudo no que diz respeito ao modelo *ISD* da Figura 22.

### 4.3 Uso do Algoritmo Genético de Otimização nos Mapas de Resposta

O uso do algoritmo genético (AG) de otimização descrito na seção 2.3.2 ocorreu com o propósito de validar os resultados obtidos nos mapas de resposta em frequência. Apesar do AG constituir uma técnica de otimização estocástica, o fato de ter uma fácil implementação computacional o torna vantajoso em aplicações nas quais deseja-se simplificar a formulação e a solução de problemas de otimização. Segundo Miranda (2000), mesmo que sejam pautados por um processo não-determinístico, os AG simples operam com descrições de entrada formadas por cadeias de bits de tamanho fixo, sendo indicados

para o tratamento de problemas complexos que envolvem um grande número de variáveis e, conseqüentemente, espaços de soluções de dimensões elevadas. Além disso, estes algoritmos podem convergir em muitos casos nos quais outros métodos de otimização falham em encontrar uma solução.

Em face do exposto, conforme o procedimento descrito na Figura 7 e utilizando-se a abordagem de AG desenvolvida por Colherinhas et al. (2019) no software *MATLAB*, foi definida a população (conjunto de parâmetros) a partir dos limites estabelecidos nas Tabelas 2 a 5 para os valores de rigidez, amortecimento e inércia, ou seja, os parâmetros submetidos à variação nas seções anteriores. A função *fitness* (ou de aptidão) foi então configurada com base na Equação (3.53), que estabelece a FRF entre as amplitudes de deslocamento do sistema (saída) e a força externa (entrada) em termos da frequência de excitação  $\omega$ . Nessas condições, o algoritmo foi ajustado para escolher a combinação de dois parâmetros que pudesse fornecer a menor amplitude possível, limitado a uma condição de parada de 200 gerações. Os resultados de sua implementação são apresentados nas Figuras 32 e 33.

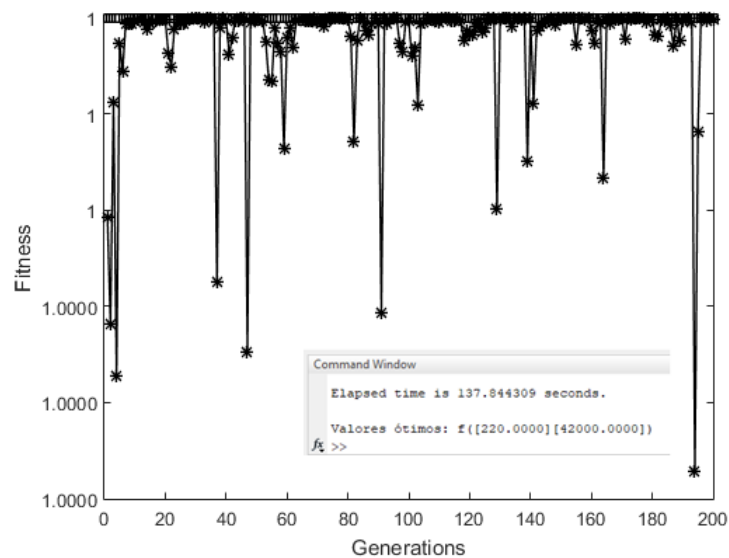


Figura 32 – Aplicação do AG de otimização combinando os parâmetros de inércia e rigidez

Os gráficos exibidos nas Figuras 32 e 33 mostram que os pontos de convergência foram gerados pelo AG logo nas primeiras gerações, ao passo que a função de aptidão (*fitness*) assume o valor 1 (ou 100% de ajuste) imediatamente após o início dos cruzamentos e mutações. As “quedas” observadas em ambos os gráficos compreendem períodos de “extinção” da população, isto é, quando a função *fitness* realiza uma nova seleção de indivíduos a partir da população inicial. Para a combinação dos parâmetros de rigidez e inércia, respectivamente, o algoritmo convergiu para os valores de 42 kN/m e 220 kg. Já para a combinação entre inércia e amortecimento, os valores obtidos foram de 220 kg e 944 N.s/m.

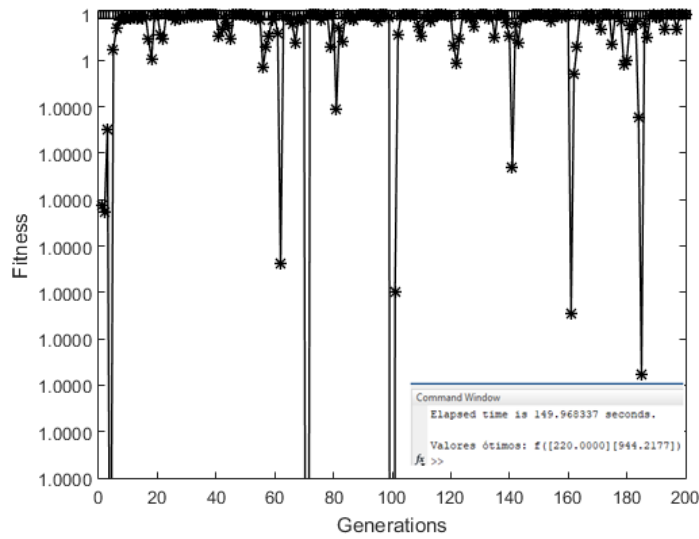


Figura 33 – Aplicação do AG de otimização combinando os parâmetros de inércia e amortecimento

Este resultado é especialmente interessante pois permite a validação dos resultados obtidos com os mapas de resposta do modelo *ISD*, haja vista que os pontos de convergência coincidem com as regiões de mínimo ilustradas nas superfícies do estudo paramétrico. As soluções encontradas pelo AG para ambas as combinações de parâmetros são destacadas pelos pontos em vermelho nas Figuras 34 e 35. Nelas estão os mapas de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo, cujos valores de amplitude máxima (eixo *Z*) foram colocados em escala logarítmica.

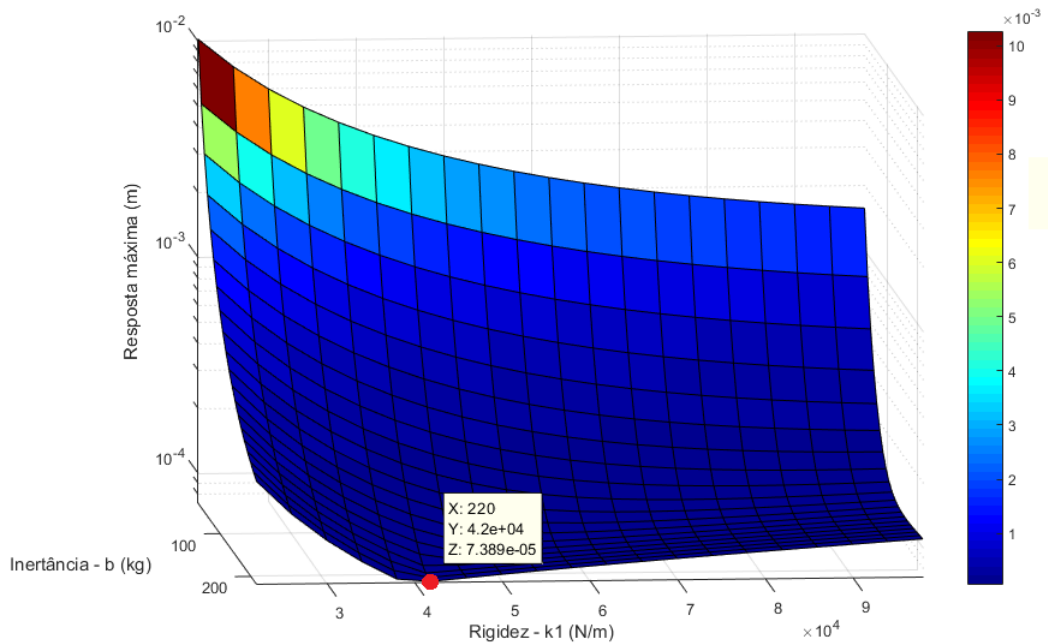


Figura 34 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo diante de variações da rigidez  $k_1$  e inércia  $b$ , com destaque para o ponto ótimo encontrado pelo AG

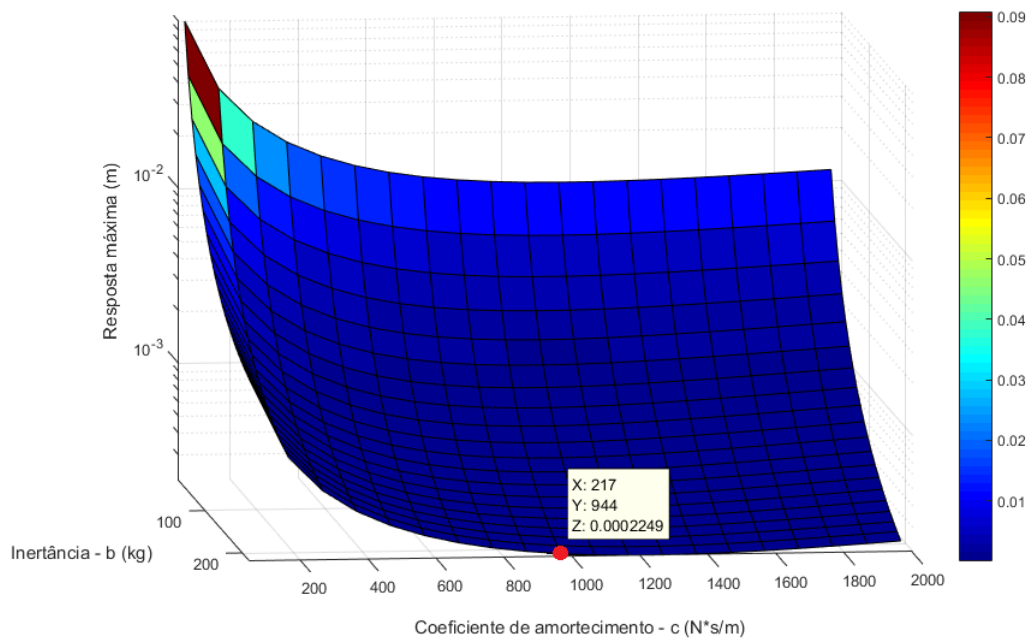


Figura 35 – Mapa de resposta em frequência do modelo *ISD* de  $\frac{1}{4}$  de veículo diante de variações da inércia  $b$  e do amortecimento  $c$ , com destaque para o ponto ótimo encontrado pelo AG

Os pontos ótimos encontrados pelo AG mostram que o comportamento dos mapas de resposta analisado nas seções 4.1 e 4.2 está de acordo com o esperado diante das variações de rigidez, amortecimento e inércia. Verifica-se que a elevação dos valores de inércia se mostra benéfica para mitigar vibrações de um sistema dinâmico, reduzindo as amplitudes de oscilação concomitantemente ao aumento de sua magnitude. Entretanto, é preciso considerar a factibilidade de valores elevados deste parâmetro, uma vez que a construção de protótipos funcionais e estáveis de dispositivos *inerters* ainda é limitada (PAPAGEORGIOU; SMITH, 2005).

#### 4.4 Comparativo de Performance entre Suspensão Passiva *ISD* e Suspensão Passiva convencional – Modelo de $\frac{1}{4}$ de Veículo

Para a análise comparativa de performance entre suspensão passiva *ISD* e suspensão passiva convencional, foram inicialmente considerados os modelos de  $\frac{1}{4}$  de veículo dos dois sistemas, propostos nas seções 3.1 e 3.1.1. Para investigar os efeitos da adição do dispositivo *inerters*, em ambos os modelos se mantiveram iguais os valores das massas suspensa e não suspensa, rigidez e amortecimento. A escolha do valor de rigidez da mola da suspensão de 42 kN/m e 944 N.s/m para o coeficiente de amortecimento se deu após a aplicação do AG de otimização nos mapas de resposta apresentados nas seções 4.1 e 4.2, tal como o valor de inércia de 220 kg do modelo *ISD*. Sendo assim, na Tabela 6 são

mostradas as propriedades do modelo convencional utilizadas na análise.

Tabela 6 – Propriedades da suspensão passiva convencional utilizada no comparativo (modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo)

Propriedades	Valores
Massa suspensa $m_s$ (kg)	350
Massa não-suspensa $m_u$ (kg)	50
Rigidez do pneu $K_t$ (kN/m)	200
Rigidez da mola da suspensão $K_s$ (kN/m)	42
Coefficiente de amortecimento $C$ ( $Ns \cdot m^{-1}$ )	944

A Figura 36 mostra os gráficos comparativos no domínio do tempo referentes aos valores de aceleração da massa suspensa, deflexão da suspensão e carga dinâmica no pneu, respectivamente. Estes valores, como fora mencionado nas Seções 3.1 e 3.1.1, são indicativos da performance de um sistema de suspensão e são extraídos com a análise do modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo no espaço de estados. O Quadro 1 contém os resultados do gráfico comparativo em termos dos valores *RMS* (ou eficazes) de cada uma das curvas obtidas. Para que sejam extraídos estes resultados, submete-se o sistema com *inert* à uma excitação  $z_r$  do tipo ruído branco Gaussiano, frequentemente utilizada com o intuito de simular um perfil de pista randômico. Da mesma forma, o modelo clássico é excitado por uma entrada  $u$  igual à  $z_r$ . Os parâmetros do modelo *ISD* de suspensão seguem o que fora definido pela Tabela 2, com exceção dos valores fixos e já mencionados de 42 kN/m da rigidez  $K_1$ , 944 N.s/m do coeficiente de amortecimento  $C$  e 220 kg da inércia  $b$ . Todos os três gráficos estão no Sistema Internacional de Unidades (SI).

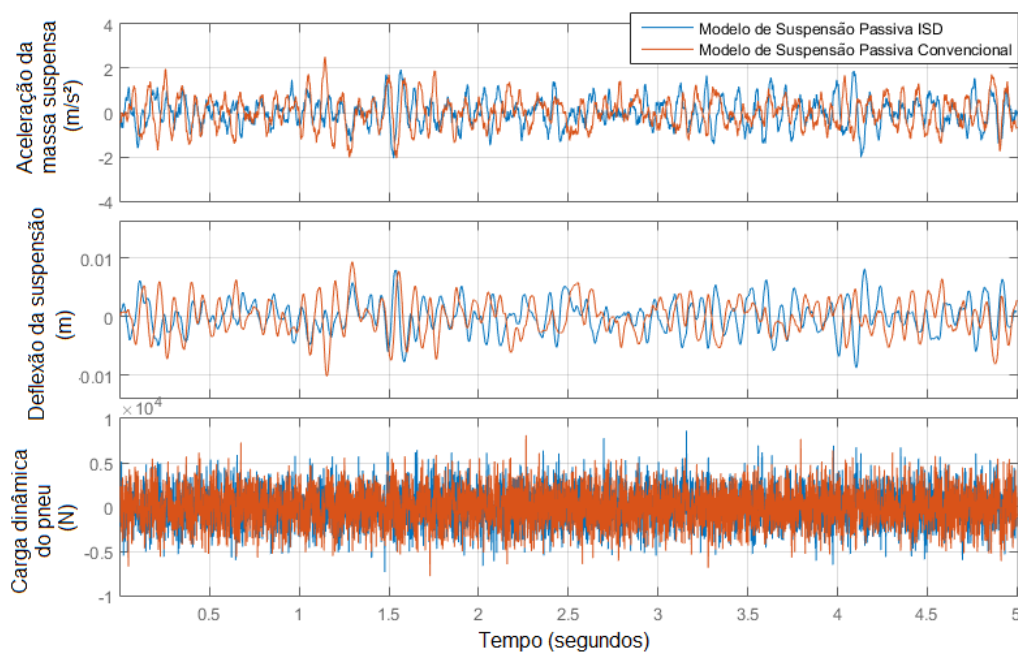


Figura 36 – Gráficos comparativos no domínio do tempo entre os parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva *ISD* e passiva convencional de  $\frac{1}{4}$  de veículo



	Modelo de Suspensão Passiva ISD	Modelo de Suspensão Passiva Convencional	Aumento de desempenho com a adição do <i>inertor</i>
<b>Aceleração da massa suspensa (m/s<sup>2</sup>)</b>	0,6274	0,6950	9,73%
<b>Deflexão da suspensão (m)</b>	0,0027	0,0030	10,0%
<b>Carga dinâmica do pneu (kN)</b>	2,0523	2,1018	2,35%

Quadro 1 – Valores *RMS* (ou eficazes) dos parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva *ISD* e passiva convencional de  $\frac{1}{4}$  de veículo

Através da Figura 36 e dos valores *RMS* retratados no Quadro 1, observa-se que a suspensão *ISD* foi superior a convencional (passiva sem *inertor*) nos três parâmetros de resposta em questão. Apesar de nos gráficos de evolução no tempo as performances parecerem equivalentes, verifica-se que foram obtidas reduções da ordem de 9,73% para o valor *RMS* de aceleração da massa suspensa, 10,0% para a deflexão *RMS* da suspensão e 2,35% para a carga dinâmica *RMS* no pneu. Esses resultados demonstram que os maiores ganhos de performance com a integração do *inertor* ocorrem no conforto e na estabilidade de um veículo, enquanto o ganho em aderência ao perfil de pista foi mais discreto.

#### 4.4.1 Comparativo de Performance entre Suspensão Passiva *ISD* e Suspensão Passiva Convencional – Modelo de $\frac{1}{2}$ Veículo

A comparação de desempenho a partir dos modelos de  $\frac{1}{2}$  veículo permite observar, além dos parâmetros da seção 4.4, o movimento rotacional de arfagem da massa suspensa e a resposta da suspensão ao perfil de pista nos eixos dianteiro e traseiro. Ainda é possível efetuar uma variação de velocidade horizontal modificando-se o intervalo de atraso entre os inputs  $z_{rf}$  e  $z_{rr}$  (Figuras 21 e 22), dado pela distância entre eixos dividida pela velocidade dos modelos.

Mantendo fixos novamente os valores fornecidos pelo AG para a rigidez da mola da suspensão, coeficiente de amortecimento e inertância, os gráficos obtidos para os modelos *ISD* e convencional basearam-se nos valores estabelecidos pelas Tabelas 4 e 5 para os dois modelos, respectivamente. Foi considerada nas simulações a velocidade horizontal de 40 km/h, haja vista que, segundo Gillespie (1992), em altas velocidades o carro tende a experimentar vibrações verticais próximas àquelas obtidas pelo modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo, de modo que somente em baixas velocidades o modo de arfagem é excitado pelos perfis do percurso. Assim sendo, nas Figuras 37 e 38 são exibidos os gráficos no domínio do tempo com as respostas da aceleração da massa suspensa  $\ddot{z}_s$ , aceleração angular de arfagem  $\ddot{\theta}$ , deflexões da suspensão dianteira  $z_1 - z_{uf}$  e traseira  $z_2 - z_{ur}$  e carga dinâmica nos pneus



dianteiro  $k_{tf}(z_{uf} - z_{ur})$  e traseiro  $k_{tr}(z_{ur} - z_{rr})$  à velocidade de 40 km/h, seguida do Quadro 2 contendo os valores *RMS*.

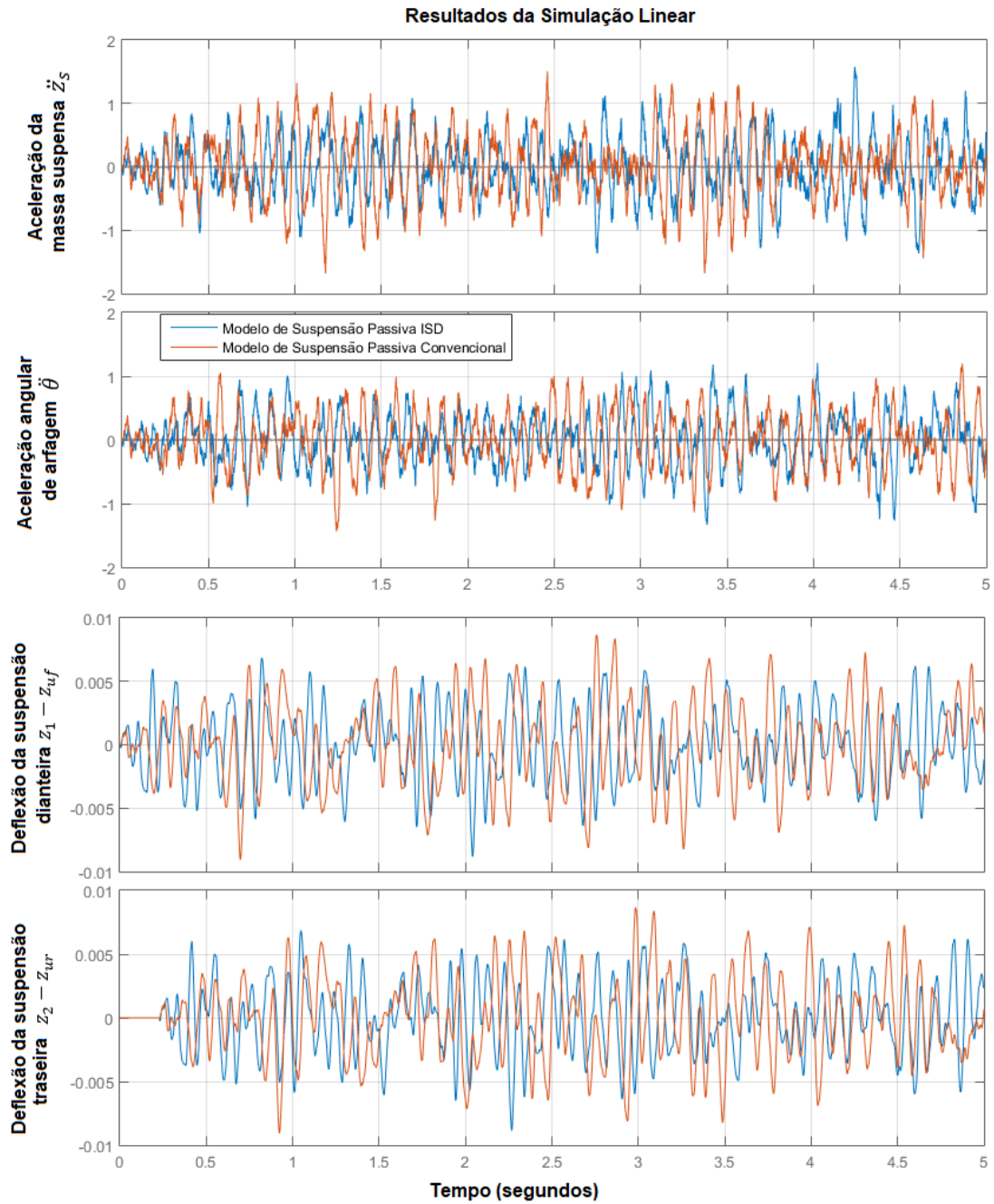


Figura 37 – Gráficos comparativos no domínio do tempo contendo os parâmetros de aceleração da massa suspensa, aceleração angular de arfagem e deflexão das suspensões dianteira e traseira nos modelos de 1/2 veículo

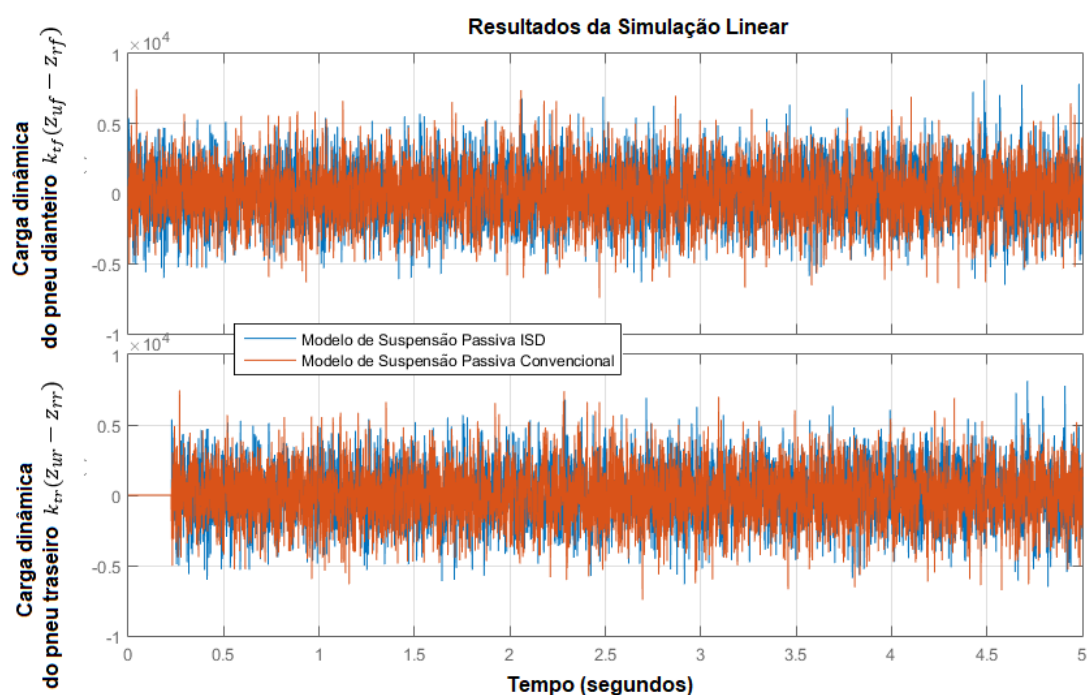


Figura 38 – Gráficos comparativos no domínio do tempo contendo os parâmetros de carga dinâmica dos pneus dianteiro e traseiro nos modelos de 1/2 veículo

	Modelo de Suspensão Passiva ISD	Modelo de Suspensão Passiva Convencional	Aumento de desempenho com a adição do <i>inertor</i>
Aceleração da massa suspensa (m/s <sup>2</sup> )	0,4568	0,5040	9,36%
Aceleração angular de arfagem (rad/s <sup>2</sup> )	0,4103	0,4384	6,41%
Deflexão da suspensão dianteira (m)	0,0028	0,0032	12,5%
Deflexão da suspensão traseira (m)	0,0028	0,0031	9,68%
Carga dinâmica do pneu dianteiro (kN)	2,0062	2,0294	1,14%
Carga dinâmica do pneu traseiro (kN)	2,0061	2,0287	1,11%

Quadro 2 – Valores *RMS* (ou eficazes) dos parâmetros de performance dos modelos de suspensão passiva *ISD* e passiva convencional de 1/2 veículo

As curvas de evolução no tempo e os valores *RMS* apresentados demonstram que o comportamento dos modelos de 1/2 veículo é similar ao observado nos modelos de 1/4 de veículo. Isso se deve ao fato de que os maiores ganhos de performance ocorreram novamente nos parâmetros de conforto e estabilidade, em contraste a um ganho menos expressivo de aderência. A adição do *inertor*, nesse cenário, prova-se benéfica quanto à promoção de melhorias de desempenho em um sistema de suspensão.

É também válido ressaltar, contudo, que apesar de terem sido demonstrados ganhos de performance com as simulações, nos dias de hoje (2022) a implementação de *inerters* reais em veículos de produção em massa ainda é consideravelmente onerosa, posto que os custos de sua construção e ajuste fino dos valores de inertância conforme o mecanismo de funcionamento (mecânico, hidráulico, eletromagnético, etc) ainda exigem um alto investimento em pesquisa e otimização. Como evidência de tais ponderações, na Figura 39 é exibido o único exemplar atualmente disponível de *inertor* vendido comercialmente, cuja patente foi vendida pelo próprio Malcom C. Smith (inventor do dispositivo) à *Penske Corporation* dos Estados Unidos (QUARTER-MAX, 2022).

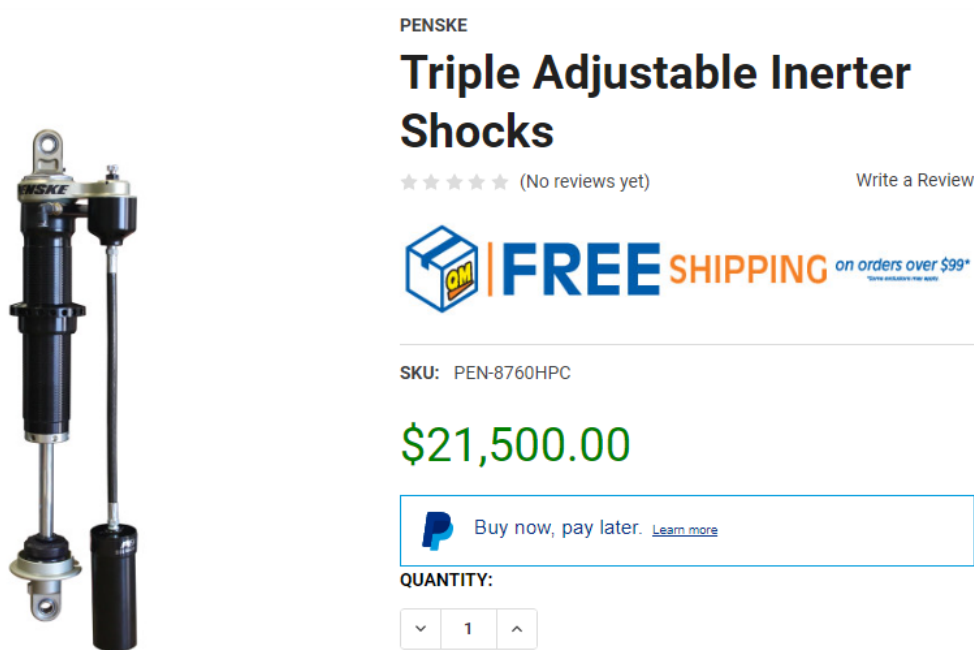


Figura 39 – *Inertor* vendido comercialmente  
Fonte: Quarter-Max (2022)

Em virtude do alto custo, a instalação de dispositivos *inertor* fica então limitada aos veículos esportivos e de competição, nos quais a busca pelo máximo desempenho supera a necessidade de corte de custos. Uma das principais aplicações do *inertor* mostrado na Figura 39, nesse contexto, está na suspensão de veículos de *drag racing* (ou corrida de arrancada, em português), nos quais motores de potência e torque elevados expõem os pneus e a suspensão a vibrações de grande magnitude. Nestes veículos, como a capacidade de esterçamento é limitada, há a necessidade de conter essas vibrações pois podem gerar desvios de trajetória, provocando acidentes ou mesmo o ferimento do piloto. A Figura 40 mostra um exemplo de veículo clássico de *drag racing*, projetado para alcançar grandes velocidades em linha reta.

Figura 40 – Veículo de *drag racing*Fonte: [Autosport \(2018\)](#)

Um dos desafios de pesquisa em suspensões veiculares então consiste no projeto de novos *inerters* com redução de custo, visando a popularização da tecnologia para além dos veículos de competição. A bibliografia acerca de testes em laboratório com protótipos do dispositivo também é primitiva, de tal forma que a construção de bancadas voltadas à testagem do dispositivo também seria de grande valia. As simulações comparativas e os mapas de resposta apresentados neste trabalho permitiram não só demonstrar a efetividade do *inerters* em promover melhorias, mas também verificar a forma como o aumento/redução de inércia afeta as amplitudes de oscilação de um sistema dinâmico.

## 5 Conclusões Finais

Este trabalho se propôs a avaliar a integração de um dispositivo *inert* a um sistema de suspensão automotiva em termos dos parâmetros de conforto, estabilidade e aderência. Partindo dos modelos de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo, foi apresentado um estudo paramétrico pela técnica de mapa de resposta, com percepções acerca da sensibilidade de uma suspensão *ISD* às variações de inertância, rigidez e amortecimento. Foi possível verificar que o sistema é altamente sensível à inertância a ponto de reduzir de forma considerável seus picos de resposta, contudo, incrementos nos valores acima de 50 kg não produziram mudanças significativas na resposta máxima. Por outro lado, o modelo mostrou-se menos sensível às variações de rigidez e amortecimento.

A introdução do modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo permitiu que fossem observadas relações de proporcionalidade entre os valores de amplitude encontrados nos mapas de  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{2}$  veículo, validando as equações de movimento obtidas analiticamente a partir do modelo da Figura 22. Verificou-se que o comportamento das amplitudes máximas do ângulo de arfagem é equivalente ao constatado para as amplitudes de salto, tal como as reduções promovidas pelo aumento de inertância. O algoritmo genético de otimização foi então utilizado para encontrar pontos ótimos dos parâmetros de rigidez, inertância e amortecimento nos mapas obtidos, os quais coincidiram com as regiões de mínimo ilustradas nas superfícies do estudo paramétrico.

A comparação do desempenho de uma Suspensão Passiva *ISD* com uma Suspensão Passiva Convencional mostrou que para os três parâmetros de performance analisados a suspensão *ISD* mostrou-se superior. Foram obtidas reduções de 9,73% no valor *RMS* de aceleração da massa suspensa, 10,0% na deflexão *RMS* da suspensão e 2,35% para a carga dinâmica *RMS* no pneu quando analisado o modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo dos dois sistemas. Quanto ao modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo, estes ganhos mantiveram-se consistentes, ao passo que foram obtidas reduções de 9,36% e 6,41% para as acelerações *RMS* da massa suspensa e angular de arfagem, respectivamente. A deflexão *RMS* da suspensão no eixo dianteiro teve uma redução de 12,5%, enquanto no eixo traseiro foi de 9,68%. Os ganhos menos expressivos, assim como no modelo de  $\frac{1}{4}$  de veículo, ocorreram no parâmetro de aderência (carga dinâmica *RMS* dos pneus), com apenas 1,14% de redução no eixo dianteiro e 1,11% no eixo traseiro. Esses resultados mostram que, para o modelo *ISD* proposto na Figura 22, os ganhos mais perceptíveis em desempenho ocorrerão nos parâmetros de conforto e estabilidade de um sistema de suspensão.

Foram ainda feitas ponderações acerca do custo-benefício da implementação de *inerters* em veículos de produção em massa. Foram considerados os custos elevados de

construção e ajuste fino destes dispositivos para funcionar de forma estável, o que restringe sua aplicação e conseqüentemente a expansão da tecnologia. É por esse motivo que, nos dias atuais (2022), o uso do dispositivo encontra-se limitado a veículos esportivos e de competição, nos quais busca-se obter o mais alto desempenho sem necessariamente considerar restrições de orçamento. O único exemplar disponível de *inerters* vendido comercialmente é de propriedade industrial da *Penske Corporation* dos EUA e possui um valor de U\$ 21.500,00 (vinte um mil e quinhentos dólares), cuja patente foi vendida pelo próprio Malcom C. Smith à empresa americana. Este fato corrobora com a necessidade de projetos voltados à construção de *inerters* mais acessíveis, constituídos por materiais e mecanismos mais econômicos.

Por último, destacou-se a importância deste trabalho quanto à obtenção dos mapas de resposta, contribuindo com o Estado da Arte (seção 2.5) ao mostrar de forma clara como os aumentos/reduções de inércia afetam a dinâmica vertical de um sistema do tipo massa-mola-amortecedor.

## 5.1 Trabalhos futuros

Com base na proposta de análise desenvolvida neste trabalho, surgem outros tópicos de interesse que podem vir a gerar trabalhos futuros de extrema relevância. Serão listadas nesta seção algumas sugestões de temas para serem abordados em estudos posteriores. Estes, por sua vez, são apresentados a seguir:

- **Expandir as análises para o modelo de veículo inteiro:** A evolução natural do estudo paramétrico apresentado neste trabalho seria dada pela modelagem de veículo inteiro de uma suspensão *ISD*. Com ela podem ser extraídos dados mais contundentes acerca da dinâmica vertical e lateral de um veículo, tais como a resistência ao capotamento, por exemplo. Poderia ser testado o comportamento dinâmico do modelo não apenas quanto a excitações verticais, mas também diante de manobras reais como *J-Turn*, *Fishhook*, *DLC*, *Swipe Sine*, entre outras.
- **Construir uma bancada de testes experimental de um *inerters*:** Sabe-se que a bibliografia contendo dados de teste em laboratório com *inerters* ainda é bastante escassa. Portanto, a construção de uma bancada que pudesse simular seu comportamento seria de grande contribuição para o estado da arte atual.
- **Simular parâmetros e/ou *layouts* distintos nos dois eixos do modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo:** As análises conduzidas neste trabalho consideraram uma distribuição de massa homogênea nos dois eixos do modelo de  $\frac{1}{2}$  veículo, mantendo o mesmo *layout* da suspensão *ISD* para ambos. Nesse caso, poderiam ser testados parâmetros

e configurações distintas das que foram aqui analisadas, verificando-se se há ganho (ou não) de desempenho em relação à configuração convencional equivalente.

- **Ampliar o estudo incluindo suspensões ativas e/ou semi-ativas:** Este trabalho restringiu-se à análise de configurações passivas de suspensão convencional e *ISD*. Uma das formas de expandir o estudo seria incluir suspensões semi-ativas e/ou ativas e verificar se o ganho de desempenho com a inclusão do inerter se mantém consistente.



# Referências

ARORA, J. *Introduction to Optimum Design*. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2004. ISBN 9780080470252. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

AUTOSPORT. *Promoted: How you can own your own drag racing track*. [S.l.], 2018. Disponível em: <<https://www.autosport.com/general/news/promoted-how-you-can-own-your-own-drag-racing-track-5296041/5296041/>>. Citado na página 79.

CASTRO, R. *Otimização de estruturas com multi-objetivos via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

CHEN, M. Z. Q. et al. The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, v. 9, n. 1, p. 10–26, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 19, 41 e 42.

COLHERINHAS, G. B. et al. Optimal pendulum tuned mass damper design applied to high towers using genetic algorithms: Two-dof modeling. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 19, n. 10, p. 1950125, 10 2019. Citado na página 71.

DOMENICO, D. D. et al. Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings. *Journal of the Franklin Institute*, v. 356, n. 14, p. 7626–7649, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

DREHMER, L. R. C. *Otimização de Parâmetros Concentrados de Suspensão para Conforto e Segurança Veicular*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, RS, 2012. Citado na página 29.

FIRESTONE, F. A. A new analogy between mechanical and electrical systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 4, n. 3, p. 249–267, 1933. Citado na página 35.

GILLESPIE, T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale, PA: SAE International, 1992. Citado 10 vezes nas páginas 25, 27, 29, 47, 48, 52, 58, 61, 67 e 75.

GONZALEZ-BUELGA, A. et al. An electromagnetic vibration absorber with harvesting and tuning capabilities: Optimization of an adaptive electromagnetic vibration absorber capabilities. *Structural Control and Health Monitoring*, v. 22, 04 2015. Citado na página 41.

GONZALEZ-BUELGA, A. et al. Assessing the effect of nonlinearities on the performance of a tuned inerter damper. *Structural Control and Health Monitoring*, v. 24, p. e1879, 2017. Citado na página 36.

HROVAT, D.; MARGOLIS, D. L.; HUBBARD, M. An approach toward the optimal semi-active suspension. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 110, n. 3, p. 288–296, 09 1988. Citado na página 26.



- HU, Y.; CHEN, M. Z.; SHU, Z. Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 8, p. 2212–2225, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 18, 26, 36 e 42.
- IZIDORO, S. C.; MELO-MINARDI, R. C. de; PAPPÀ, G. L. GASS: identifying enzyme active sites with genetic algorithms. *Bioinformatics*, v. 31, n. 6, p. 864–870, 11 2014. ISSN 1367-4803. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btu746>>. Citado na página 34.
- KATO; PAIVA; IZIDORO. Algoritmos genéticos. *BIOINFO - Revista Brasileira de Bioinformática e Biologia Computacional*, v. 1, n. 1, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- KUZNETSOV, A. et al. Optimization of improved suspension system with inerter device of the quarter-car model in vibration analysis. *Archive of Applied Mechanics*, v. 81, p. 1427–1437, 10 2010. Citado na página 43.
- LAZAR, I. F.; NEILD, S. A.; WAGG, D. J. Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 43, n. 8, p. 1129–1147, 07 2014. Citado 3 vezes nas páginas 20, 45 e 50.
- LEWIS, T. D. *Development of inerter-based suspension systems for railway vehicles*. Tese (Doutorado) — University of Bristol, Bristol, Inglaterra, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 19, 36, 37, 38 e 46.
- LIU, X. et al. Model identification methodology for fluid-based inerters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 106, p. 479–494, 2018. Citado na página 40.
- MA, R.; BI, K.; HAO, H. Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review. *Engineering Structures*, v. 243, p. 112655, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 40.
- MELO, F. X. de. *Análise de Caminhos de Transferência de Energia no Projeto de Sistemas de Controle*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Dinâmica de Máquinas e Sistemas - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- MIRANDA, M. N. de. *Algoritmos Genéticos: Fundamentos e Aplicações*. [S.l.], 2000. Disponível em: <<http://www.nce.ufrj.br/GINAPE/VIDA/algenet.htm>>. Citado na página 70.
- MOORE, H. F. *Desenvolvimento de uma Bancada de Testes Experimentais para Estudos sobre Vibrações de Corpo Inteiro em Assento Veicular*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília. Faculdade UnB Gama. Programa de Pós-Graduação em Integridade de Materiais da Engenharia, Brasília, DF, 2017. Citado na página 28.
- MORELLO, L. et al. *The Automotive Body: Volume II: System Design*. Berlim, Alemanha: Springer, 2011. Citado na página 30.
- MOURA, E. D. A. *Estudo de Suspensões Passiva, Semiativa MR e Ativa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Itajubá, MG, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

- NISE, N. *Control Systems Engineering*. [S.l.]: Wiley, 2004. Citado na página 49.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1998. Citado na página 49.
- PAPAGEORGIU, C.; HOUGHTON, N. E.; SMITH, M. C. Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 131, n. 1, 12 2008. Citado na página 36.
- PAPAGEORGIU, C.; SMITH, M. C. Laboratory experimental testing of inerters. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3351–3356, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 73.
- PINHEIRO, M. J. S. *Suspensões Inteligentes*. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://autoentusiastas.com.br/2020/04/suspensoes-inteligentes/>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 48.
- QUARTER-MAX. *PENSKE Triple Adjustable Inerter Shocks*. [S.l.], 2022. Disponível em: <<https://quartermax.com/triple-adjustable-inerter-shocks/>>. Citado na página 78.
- RAO, S. *Vibrações mecânicas*. Pearson Prentice Hall, 2009. ISBN 9788576052005. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3DSNPgAACAAJ>>. Citado 4 vezes nas páginas 33, 58, 59 e 67.
- ROAD, J. R. D. T. C. L. *Tuned Mass Damper*. [S.l.], 2017. Disponível em: <<http://en.roadjz.com/show.asp?id=18>>. Citado na página 45.
- SAVARESI, S. M. et al. *Semi-active suspension control design for vehicles*. Kidlington, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2010. Citado na página 23.
- SHEN, Y. et al. Improvement of the lateral stability of vehicle suspension incorporating inerter. *Science China Technological Sciences*, v. 61, 05 2018. Citado na página 44.
- SHEN, Y. et al. Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension. *Journal of Sound and Vibration*, v. 361, p. 148–158, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 18, 43, 50 e 55.
- SHEN, Y.; GOLNARAGHI, M. F.; HEPPLER, G. R. Semi-active vibration control schemes for suspension systems using magnetorheological dampers. *Journal of Vibration and Control*, SAGE Publications, v. 12, n. 1, p. 3–24, 01 2006. Citado na página 26.
- SIAMI, A.; KARIMI, H. R. Modelling and identification of the hysteretic dynamics of inerters. *Designs*, v. 4, n. 3, 2020. ISSN 2411-9660. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2411-9660/4/3/27>>. Citado na página 19.
- SMITH, M. C. Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 10, p. 1648–1662, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 19, 34, 35, 37, 41, 50, 59 e 67.
- SMITH, M. C.; WANG, F.-C. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle System Dynamics - VEH SYST DYN*, v. 42, p. 2258 – 2263 Vol.3, 01 2004. Citado 4 vezes nas páginas 36, 44, 50 e 61.

- STONE, R.; BALL, J. K. *Automotive Engineering Fundamentals*. Warrendale, PA: SAE International, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.
- SVENDENIUS, J. *Tire Modeling and Friction Estimation*. Tese (Doutorado) — Lund University. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- SWIFT, S. J. et al. Design and modelling of a fluid inerter. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 86, n. 11, p. 2035–2051, 2013. Citado na página 39.
- WANG, F.-C.; HONG, M.-F.; LIN, T.-C. Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 225, n. 1, p. 66–72, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- WANG, F.-C.; SU, W.-J. Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control. *Vehicle System Dynamics - VEH SYST DYN*, Taylor & Francis, v. 46, n. 7, p. 575–595, 2008. Citado na página 37.
- XDRTRUCK, H. X. S. P. V. *Tire construction*. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://www.xdrtruck.com/new/new-98-836.html>>. Citado na página 24.
- YANG, X. et al. Dynamic performance analysis and parameters perturbation study of inerter–spring–damper suspension for heavy vehicle. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, v. 40, n. 3, p. 1335–1350, 2021. Citado na página 44.
- ZHANG, X.-J.; AHMADIAN, M.; GUO, K.-H. On the benefits of semi-active suspensions with inerters. *Shock and Vibration*, v. 19, p. 257–272, 01 2012. Citado na página 18.
- ZHANG, X.-L.; GAO, Q.; NIE, J. The mem-inerter: A new mechanical element with memory. *Advances in Mechanical Engineering*, v. 10, n. 6, p. 1687814018778428, 2018. Citado na página 40.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/4 de veículo - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Rigidez

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m x +
3      %% Universidade de Brasilia - UnB
4      %% Faculdade UnB Gama
5      %% TCC 01 - Análise de Suspensao Automotiva
6      %% utilizando Dispositivo Inerter
7      %% Orientacao: Prof. Dr(a). Suzana Moreira Avila
8      %% Aluno: Marcos Paulo Miranda Costa
9      %% Matricula: 15/0139225
10     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11     %*****
12     %% Codigo - Fonte: Obtencao do Mapa de Resposta
13     %% em Frequencia do Modelo 1/4 de Veiculo da
14     %% Suspensao Passiva ISD
15     %*****
16
17     %% Parametros do sistema:
18
19     ms = 350; %% Valor da Massa Suspensa "m_s" em kg
20     mu = 50; %% Valor da Massa Nao-Suspensa "m_u" em kg
21     b = 17; %% Valor Inicial de Inertancia "b" em kg
22     k1 = 22000; %% Rigidez da mola principal "k_1" em N/m
23     k2 = 10000; %% Rigidez da mola auxiliar "k_2" em N/m
24     c = 1100; %% Coeficiente de amortecimento "c" em N.s/m
25     kt = 200000; %% Rigidez do pneu "k_t" em N/m
26     x2(1) = k1; %% Vetor que armazena o valor inicial de rigidez "k_1"
27

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m x +
28     %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
29
30     M = [ms b -b; 0 -b (mu+b); 0 -b b];
31     C = [0 0 0; 0 0 0; c -c 0];
32     K = [k1 0 -k1; -k1 0 (kt+k1); k2 -k2 0];
33
34     %% Aplicacao da FRF - Funcao de Resposta em Frequencia:
35
36     syms w %% Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
37     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K; %% Montagem da matriz de impedancia
38     H = inv(matriz_soma); %% Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
39     H_1_1 = abs(H(1,1)); %% Modulo do primeiro valor da diagonal principal
40     w = [0:0.001:50]; %% Atribui valores a "w"
41     H_1_1_1 = eval(H_1_1); %% Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
42     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg', ' e k1=',num2str(k1),' N/m'))
43     %% Plota o grafico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
44     %% H(1,1) (ganho)
45     xlabel('Frequency (rad/sec)') %% Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
46     ylabel('Response (m)') %% Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
47     grid on
48     hold on
49

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m x +
50     %% Variação de Parâmetros de Inertância b e Rigidez k_1:
51
52     % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
53     % Eixo Z em função dos valores de Inertância b e Rigidez k_1:
54
55     for y = 1:20
56         b = b + 10;
57         x1(y) = b;
58         M = [ms b -b; 0 -b (mu+b); 0 -b b];
59         syms w
60         matriz_soma = -w*w*M + 1/w*C + K;
61         H = inv(matriz_soma);
62         H_1_1 = abs(H(1,1));
63         w = [0:0.001:50];
64         H_1_1_1 = eval(H_1_1);
65         plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg',' e k1=',num2str(k1),' N/m'))
66         Z(1,y) = max (H_1_1_1);
67         for u = 1:19
68             k1 = k1 + 4000;
69             x2(u+1) = k1;
70             K = [k1 0 -k1;-k1 0 (kt+k1);k2 -k2 0];
71             syms w
72             matriz_soma = -w*w*M + 1/w*C + K;
73             H = inv(matriz_soma);
74             H_1_1 = abs(H(1,1));

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m x +
75         w = [0:0.001:50];
76         H_1_1_1 = eval(H_1_1);
77         plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg',' e k1=',num2str(k1),' N/m'))
78         Z(u+1,y)= max (H_1_1_1);
79     end
80     k1 = k1 - 76000;
81     K = [k1 0 -k1;-k1 0 (kt+k1);k2 -k2 0];
82 end
83
84 legend('show')
85 hold off
86
87 %% Montagem da gráfico (superfície) em 3D - Mapa de resposta em frequência:
88
89 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
90
91 figure
92 surf(X1,X2,Z)
93 xlabel('Inertância - b (kg)') % Eixo X - Valores de Inertância "b"
94 ylabel('Rigidez - k1 (N/m)') % Eixo Y - Valores de Rigidez "k_1"
95 zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
96 grid on
97 title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "b" e "k1"')
98 colorbar
99 colormap jet

```

# APÊNDICE B – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/4 de veículo - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Amortecimento

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Damping.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m  Response_map_FREQ_3D_Damping.m  +
3      % Universidade de Brasilia - UnB
4      % Faculdade UnB Gama
5      %% TCC 01 - Análise de Suspensao Automotiva
6      % utilizando Dispositivo Inerter
7      % Orientacao: Prof. Dr(a). Suzana Moreira Avila
8      % Aluno: Marcos Paulo Miranda Costa
9      % Matrícula: 15/0139225
10     %*****
11     %*****
12     % Codigo - Fonte: Obtencao do Mapa de Resposta
13     % em Frequencia do Modelo 1/4 de Veiculo da
14     % Suspensao Passiva ISD
15     %*****
16
17     %% Parâmetros do sistema:
18
19     ms = 350; % Valor da Massa Suspensa "m_s" em kg
20     mu = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa "m_u" em kg
21     b = 17; % Valor Inicial de Inertancia "b" em kg
22     k1 = 22000; % Rigidez da mola principal "k_1" em N/m
23     k2 = 10000; % Rigidez da mola auxiliar "k_2" em N/m
24     c = 67; % Coeficiente de amortecimento "c" em N.s/m
25     kt = 200000; % Rigidez do pneu "k_t" em N/m
26     x2(1) = c; % Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "c"
27

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Damping.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m  Response_map_FREQ_3D_Damping.m  +
27
28     %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
29
30     M = [ms b -b; 0 -b (mu+b); 0 -b b];
31     C = [0 0 0; 0 0 0; c -c 0];
32     K = [k1 0 -k1; -k1 0 (kt+k1); k2 -k2 0]
33
34     % Aplicação da função de transferência:
35
36     syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
37     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
38     H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
39     H_1_1 = abs(H(1,1)); % Modulo do primeiro valor da diagonal principal
40     w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
41     H_1_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
42     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg', ' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
43     % Plota o grafico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
44     % H(1,1) (ganho)
45     xlabel ('Frequency (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
46     ylabel ('Response (m)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
47     grid on
48     hold on
49

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Damping.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m  Response_map_FREQ_3D_Damping.m  +
50     %% Variação de Parâmetros de Inertancia b e Amortecimento c:
51
52     % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
53     % Eixo Z em funcao dos valores de Inertancia b e Amortecimento c:
54
55     for y = 1:20
56         b = b + 10;
57         x1(y) = b;
58         M = [ms b -b;0 -b (mu+b);0 -b b];
59         syms w
60         matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
61         H = inv(matriz_soma);
62         H_1_1 = abs(H(1,1));
63         w = [0:0.001:50];
64         H_1_1_1 = eval(H_1_1);
65         plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg',' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
66         Z(1,y) = max (H_1_1_1);
67         for u = 1:19
68             c = c + 100;
69             x2(u+1) = c;
70             C = [0 0 0;0 0 0;c -c 0];
71             syms w
72             matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
73             H = inv(matriz_soma);
74             H_1_1 = abs(H(1,1));

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Damping.m
Response_map_FREQ_3D_Stiffness.m  Response_map_FREQ_3D_Damping.m  +
75         w = [0:0.001:50];
76         H_1_1_1 = eval(H_1_1);
77         plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(b),' kg',' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
78         Z(u+1,y)= max (H_1_1_1);
79     end
80     c = c - 1900;
81     C = [0 0 0;0 0 0;c -c 0];
82 end
83
84 legend('show')
85 hold off
86
87 %% Montagem da grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
88
89 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
90
91 figure
92 surf(X1,X2,Z)
93 xlabel('Inertância - b (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
94 ylabel('Coeficiente de amortecimento - c (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "c"
95 zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
96 grid on
97 title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "b" e "c"')
98 colorbar
99 colormap jet

```



# APÊNDICE C – Código em MATLAB: Obtenção dos Parâmetros de Performance do Modelo de 1/4 de Veículo da Suspensão ISD

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m
Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m x +
3      % Universidade de Brasilia - UnB
4      % Faculdade UnB Gama
5      %% TCC 01 - Análise de Suspensao Automotiva utilizando Dispositivo Inerter
6      % Orientacao: Prof. Dr(a). Suzana Moreira Avila
7      % Aluno: Marcos Paulo Miranda Costa
8      % Matricula: 15/0139225
9      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10     %*****
11     %Codigo - Fonte: Obtenção dos Parâmetros de Performance
12     %do Modelo de 1/4 de Veiculo da Suspensao Passiva ISD
13     %*****
14
15     clear all; clc
16
17     %% Parâmetros do sistema de suspensão ISD:
18
19     ms = 350; % Valor da Massa Suspensa "m_s" em kg
20     mu = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa "m_u" em kg
21     b = 220; % Valor de Inertancia "b" em kg
22     k1 = 42000; % Rigidez da mola principal "k_1" em N/m
23     k2 = 10000; % Rigidez da mola auxiliar "k_2" em N/m
24     c = 944; % Coeficiente de amortecimento "c" em N.s/m
25     kt = 200000; % Rigidez do pneu "k_t" em N/m
26

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m
Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m x +
27     %% Representação do modelo no espaço de estados:
28
29     A1 = [0 c/ms -c/ms -k1/ms (k1+k2)/ms -k2/ms;
30          0 -c/mu c/mu k1/mu -(k1+k2+kt)/mu k2/mu;
31          0 (c/ms+c/b) -(c/ms+c/b) -k1/ms ((k1+k2)/ms+k2/b) -(k2/ms+k2/b);
32          1 0 0 0 0 0;
33          0 1 0 0 0 0;
34          0 0 1 0 0 0];
35     B1 = [0; kt/mu; 0; 0; 0; 0];
36     C1 = [0 c/ms -c/ms -k1/ms (k1+k2)/ms -k2/ms;
37          0 0 0 1 -1 0;
38          0 0 0 0 kt 0];
39     D1 = [0; 0; -kt];
40
41     itiSys = ss(A1,B1,C1,D1)
42
43     %% Excitação harmônica (motor) - Teste com 2.9Hz, 1 kg e 600 CST:
44
45     % t = 0:0.001:10;
46     % amp = 1;
47     % w = 18.2212;
48     % fase = 0;
49     % u = amp*cos(w*t-fase);
50     % lsim (sys,u,t)
51

```

```
Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m
Quarter_Vehicle_Inerter_TIME_2.m x +
44
45 % t = 0:0.001:10;
46 % amp = 1;
47 % w = 18.2212;
48 % fase = 0;
49 % u = amp*cos(w*t-fase);
50 % lsim (sys,u,t)
51
52 %% Excitação degrau:
53
54 % opt = stepDataOptions('InputOffset',0.5508,'StepAmplitude',-0.1834); % Pa
55 % step(ltiSys,opt)
56
57 %% Excitação com ruído branco Gaussiano - Função "wgn":
58
59 t = 0:0.001:5;
60 noise = wgn (1,5001,-40);
61 lsim (itiSys,noise,t)
62 legend('show')
63 grid on
64
65 y1 = lsim (itiSys,noise,t); % Submete o modelo à excitação
66 ValEficazes1 = rms(y1) % Extrai os valores RMS das respostas no tempo
67
68 hold on
```

# APÊNDICE D – Código em MATLAB: Obtenção dos Parâmetros de Performance do Modelo de 1/4 de Veículo da Suspensão Convencional

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m
Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m x +
1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %*****
3  % Universidade de Brasilia - UnB
4  % Faculdade UnB Gama
5  %% TCC 01 - Análise de Suspensao Automotiva
6  % utilizando Dispositivo Inerter
7  % Orientacao: Prof. Dr(a). Suzana Moreira Avila
8  % Aluno: Marcos Paulo Miranda Costa
9  % Matrícula: 15/0139225
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 %*****
12 % Codigo - Fonte: Obtencao dos Parâmetros de Performance
13 % do Modelo de 1/4 de Veiculo da Suspensao Passiva Convencional
14 %*****
15
16 %% Parâmetros do sistema:
17
18 Ms = 350; % Valor da Massa Suspensa "m_S" em kg
19 Mu = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa "m_U" em kg
20 bs = 944; % Coeficiente de amortecimento "c" em N.s/m
21 Ks = 42000; % Rigidez da mola da suspensao "k_S" em N/m
22 Kt = 200000; % Rigidez do pneu "k_T" em N/m
23

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m
Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m x +
24 %% Representação do modelo no espaço de estados:
25
26 A2 = [0 1 0 0; -(Ks+Kt)/Mu -bs/Mu Ks/Mu bs/Mu; 0 0 0 1;
27       Ks/Ms bs/Ms -Ks/Ms -bs/Ms];
28 B2 = [0; Kt/Mu; 0; 0];
29 C2 = [Ks/Ms bs/Ms -Ks/Ms -bs/Ms; -1 0 1 0; Kt 0 0 0];
30 D2 = [0; 0; -Kt];
31
32 sys = ss(A2,B2,C2,D2)
33
34 %% Excitação harmônica:
35
36 % t = 0:0.001:10;
37 % amp = 1;
38 % w = 18.2212;
39 % fase = 0;
40 % u = amp*cos(w*t-fase);
41 % lsim(sys,u,t)
42

```

```
Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m
Quarter_Vehicle_Conventional_TIME.m x +
34 %% Excitação harmônica:
35
36 % t = 0:0.001:10;
37 % amp = 1;
38 % w = 18.2212;
39 % fase = 0;
40 % u = amp*cos(w*t-fase);
41 % lsim (sys,u,t)
42
43 %% Excitação degrau:
44 % opt = stepDataOptions('InputOffset',0.5508,'StepAmplitude',-0.1834); % Pa
45 % step(sys,opt)
46 % grid on
47
48 %% Excitação com ruído branco Gaussiano - Função "wgn":
49
50 - t = 0:0.001:5;
51 - noise = wgn (1,5001,-40);
52 - lsim (sys,noise,t)
53 - legend('show')
54 - grid on
55
56 - y2 = lsim (sys,noise,t); % Submete o modelo à excitação
57 - ValEficazes2 = rms(y2) % Extrai os valores RMS das respostas no tempo
```

# APÊNDICE E – Código em MATLAB: Modelo Convencional de 1/4 de Veículo - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m
Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m  x +
3      %% Universidade de Brasilia - UnB
4      %% Faculdade UnB Gama
5      %% TCC 01 - Análise de Suspensao Automotiva utilizando Dispositivo Inerter
6      %% Orientacao: Prof. Dr(a). Suzana Moreira Avila
7      %% Aluno: Marcos Paulo Miranda Costa
8      %% Matrícula: 15/0139225
9      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10     %*****
11     %% Codigo - Fonte: Obtencao do Mapa de Resposta
12     %% em Frequência do Modelo de 1/4 de Veiculo da
13     %% Suspensao Passiva Convencional (Sem Inerter)
14     %*****
15
16     %% Parâmetros do sistema:
17
18 - Ms = 350; %% Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg
19 - Mu = 50; %% Valor da Massa Nao-Suspensa "M_u" em kg
20 - Ks = 16000; %% Rigidez da mola sa suspensão "K_s" em N/m
21 - c = 67; %% Coeficiente de amortecimento "C" em N.s/m
22 - Kt = 200000; %% Rigidez do pneu "K_t" em N/m
23 - x2(1) = c; %% Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "C"
24

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m
Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m  x +
25     %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
26
27 - M = [Ms 0; 0 Mu];
28 - C = [c -c; -c c];
29 - K = [Ks -Ks; -Ks (Ks+Kt)];
30
31     %% Aplicação da função de transferência:
32
33 - syms w %% Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
34 - matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K; %% Montagem da matriz de impedancia
35 - H = inv(matriz_soma); %% Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
36 - H_1_1 = abs(H(1,1)); %% Modulo do primeiro valor da diagonal principal
37 - w = [0:0.001:50]; %% Atribui valores a "w"
38 - H_1_1_1 = eval(H_1_1); %% Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
39 - plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ks),' N/m',' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
40 %% Plota o grafico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
41 %% H(1,1) (ganho)
42 - xlabel ('Frequência (rad/sec)') %% Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
43 - ylabel ('Resposta (m)') %% Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
44 - grid on
45 - hold on
46

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m
Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m  x +
47  %% Variação de Parâmetros de Inertância b e Amortecimento c:
48
49  % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
50  % Eixo Z em função dos valores de rigidez K_s e Amortecimento C:
51
52  for y = 1:21
53      Ks = Ks + 4000;
54      x1(y) = Ks;
55      K = [Ks -Ks;-Ks (Ks+Kt)];
56      syms w
57      matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
58      H = inv(matriz_soma);
59      H_1_1 = abs(H(1,1));
60      w = [0:0.001:50];
61      H_1_1_1 = eval(H_1_1);
62      plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ks),' N/m',' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
63      Z(1,y) = max (H_1_1_1);
64      for u = 1:20
65          c = c + 100;
66          x2(u+1) = c;
67          C = [c -c;-c c];
68          syms w

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m
Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m  x +
69      matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
70      H = inv(matriz_soma);
71      H_1_1 = abs(H(1,1));
72      w = [0:0.001:50];
73      H_1_1_1 = eval(H_1_1);
74      plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ks),' N/m',' e c=',num2str(c),' N*s/m'))
75      Z(u+1,y) = max (H_1_1_1);
76      end
77      c = c - 2000;
78      C = [c -c;-c c];
79  end
80
81  legend('show')
82  hold off
83

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m
Response_map_FREQ_3D_Conventional_Susp.m  x +
84  %% Montagem do gráfico (superfície) em 3D - Mapa de resposta em frequência:
85
86  [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
87
88  figure
89  surf(X1,X2,Z)
90  xlabel('Rigidez - Ks (N/m)') % Eixo X - Valores de Rigidez "Ks"
91  ylabel('Coeficiente de amortecimento - C (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "C"
92  zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
93  grid on
94  title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "Ks" e "C" para o Modelo de Suspensão Passiva Convencional')
95  colorbar
96  colormap jet

```

# APÊNDICE F – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/2 veículo (*bounce*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Rigidez

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC - Marcos_Paulo\TCC - Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
14 % - Variação de Rigidez e Inertância
15 %*****
16
17 %% Parâmetros do sistema:
18
19 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
20 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
21 L = a+b; % Distância entre-eixos;
22 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veículo);
23 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
24 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
25 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m²;
26 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
27 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
28 Ksf1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão dianteira "K_sf1" em N/m;
29 Ksf2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão dianteira "K_sf2" em N/m;
30 Ksr1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão traseira "K_sr1" em N/m;
31 Ksr2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão traseira "K_sr2" em N/m;
32 Csf = 1100; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
33 Csr = 1100; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
34 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
35 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
36 bf = 17; % Inertância do inerter dianteiro "b_f" em kg;
37 br = 17; % Inertância do inerter traseiro "b_r" em kg;
38 x2(1) = Ksf1; % Vetor que armazena o valor inicial de rigidez "Ksf_1"
39

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC - Marcos_Paulo\TCC - Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
40 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
41
42 M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
43       0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
44 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
45       0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0;
46       -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
47 K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
48       (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
49       -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
50       -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
51       -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
52
53 %% Aplicação da função de transferência:
54
55 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
56 matriz_soma = -w*w*M + 1*w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
57 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
58 H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2)); % Modulo do primeiro valor da diagonal principal
59 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
60 H_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
61 plot(w,H_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf1),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
62 % Plota o grafico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
63 % H(1,1) (ganho)
64 xlabel ('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
65 ylabel ('Resposta (m)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
66 - grid on
67 - hold on
68
69 %% Variação de Parametros de Inertancia bf e br e Rigidez Ksf1 e Ksr1:
70
71 % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
72 % Eixo Z em funcao dos valores de Inertancia b e Rigidez K_1:
73
74 for y = 1:20
75     bf = bf + 10;
76     br = br + 10;
77     xl(y) = bf;
78     M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
79          0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
80     syms w
81     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
82     H = inv(matriz_soma);
83     H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
84     w = [0:0.001:50];
85     H_1_1 = eval(H_1_1);
86     plot(w,H_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg',' e Ks1=',num2str(Ksf1),' N/m'))
87     Z(1,y) = max(H_1_1);
88     for u = 1:19
89         Ksf1 = Ksf1 + 4000;
90         Ksr1 = Ksr1 + 4000;
91         x2(u+1) = Ksf1;

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
92 - K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
93       (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
94       -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
95       -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
96       -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
97 - syms w
98 - matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
99 - H = inv(matriz_soma);
100 - H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
101 - w = [0:0.001:50];
102 - H_1_1 = eval(H_1_1);
103 - plot(w,H_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg',' e Ks1=',num2str(Ksf1),' N/m'))
104 - Z(u+1,y) = max(H_1_1);
105 - end
106 - Ksf1 = Ksf1 - 76000;
107 - Ksr1 = Ksr1 - 76000;
108 - K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
109       (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
110       -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
111       -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
112       -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
113 - end
114
115 legend('show')
116 hold off

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Stiffness.m
110 -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
111 -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
112 -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
113 -end
114
115 legend('show')
116 hold off
117
118 %% Montagem da grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
119
120 [X1,X2] = meshgrid(xl,x2)
121
122 figure
123 surf(X1,X2,Z)
124 xlabel('Inertância - b (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
125 ylabel('Rigidez - Ks1 (N/m)') % Eixo Y - Valores de Rigidez "k_1"
126 zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
127 xlabel('Inertância - bf e br (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
128 ylabel('Rigidez - Ksf1 e Ksr1 (N/m)') % Eixo Y - Valores de Rigidez "k_1"
129 zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
130 grid on
131 %title ('Mapa de resposta em frequencia - Variação de "b" e "Ks1"')
132 title ('Mapa de resposta em frequencia - Variação de "b", "Ksf1" e "Ksr1"')
133 colorbar
134 colormap jet

```



# APÊNDICE G – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/2 veículo (*bounce*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Amortecimento

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
14 % - Variação de Amortecimento e Inertância
15 %*****
16
17 %% Parâmetros do sistema:
18
19 a = 1.25; % Distância do eixo dianteiro ao CG;
20 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
21 L = a+b; % Distância entre-eixos;
22 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veículo);
23 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
24 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
25 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m²;
26 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
27 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
28 Ksf1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão dianteira "K_sf1" em N/m;
29 Ksf2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão dianteira "K_sf2" em N/m;
30 Ksr1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão traseira "K_sr1" em N/m;
31 Ksr2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão traseira "K_sr2" em N/m;
32 Csf = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
33 Csr = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
34 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
35 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
36 bf = 17; % Inertância do inerter dianteiro "b_f" em kg;
37 br = 17; % Inertância do inerter traseiro "b_r" em kg;
38 x2(1) = Csf; % Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "Csf"
39

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
40 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
41
42 M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
43 0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
44 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
45 0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0;
46 -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
47 K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
48 (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
49 -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
50 -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
51 -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
52
53 %% Aplicação da função de transferência:
54
55 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
56 matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
57 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
58 H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2)); % Modulo do primeiro valor da diagonal principal
59 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
60 H_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
61 plot(w,H_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf1),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
62 % Plota o grafico de resposta em frequencia relativo a "w" e ao modulo de
63 % H(1,1) (ganho)
64 xlabel ('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m x +
65 - ylabel ('Resposta (m)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
66 - grid on
67 - hold on
68
69 %% Variação de Parametros de Inertancia bf e br e Rigidez Ksf1 e Ksr1:
70
71 % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
72 % Eixo Z em funcao dos valores de Inertancia b e Amortecimento Cs:
73
74 for y = 1:20
75     bf = bf + 10;
76     br = br + 10;
77     xl(y) = bf;
78     M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
79          0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 0 -br 0 br];
80     syms w
81     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
82     H = inv(matriz_soma);
83     H_l_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
84     w = [0:0.001:50];
85     H_l_1_l = eval(H_l_1);
86     plot(w,H_l_1_l,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg', ' e Cs=',num2str(Cs), ' N*s/m'))
87     Z(1,y) = max (H_l_1_l);
88     for u = 1:19
89         Csf = Csf + 100;
90         Csr = Csr + 100;

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m x +
91     x2(u+1) = Csf;
92     C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
93          0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;
94          -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
95     syms w
96     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
97     H = inv(matriz_soma);
98     H_l_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
99     w = [0:0.001:50];
100    H_l_1_l = eval(H_l_1);
101    plot(w,H_l_1_l,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg', ' e Cs=',num2str(Cs), ' N*s/m'))
102    Z(u+1,y) = max (H_l_1_l);
103
104    end
105    Csf = Csf - 1900;
106    Csr = Csr - 1900;
107    C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
108         0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;
109         -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
110
111    legend('show')
112    hold off
113

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_BOUNCE_Damping.m x +
114 %% Montagem da grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
115
116 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
117
118 figure
119 surf(X1,X2,Z)
120 % xlabel('Inertância - b (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
121 % ylabel('Coef. de Amortecimento - Cs (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "Cs"
122 % zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
123 xlabel('Inertância - bf e br (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
124 ylabel('Coef. de amortecimento - Csf e Csr (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "Cs"
125 zlabel('Resposta máxima (m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
126 grid on
127 % title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "b" e "Cs"')
128 title ('Mapa de Resposta em Frequência - Variação de "bf", "br" e "Cs"')
129 colorbar
130 colormap jet
131

```

# APÊNDICE H – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/2 veículo (*pitch*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Rigidez

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
13 % Suspensão Massiva 1SD (Inerter-Spring-Damper) - Angulo de Arragem (PITCH)
14 % - Variação de Rigidez e Inertância
15 %*****
16
17 %% Parâmetros do sistema:
18
19 a = 1.25; % Distância do eixo dianteiro ao CG;
20 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
21 L = a+b; % Distância entre-eixos;
22 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veiculo);
23 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
24 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
25 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m^2;
26 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
27 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
28 Ksf1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão dianteira "K_sf1" em N/m;
29 Ksf2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão dianteira "K_sf2" em N/m;
30 Ksr1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão traseira "K_sr1" em N/m;
31 Ksr2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão traseira "K_sr2" em N/m;
32 Csf = 1100; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
33 Csr = 1100; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
34 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
35 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
36 bf = 17; % Inertância do inerter dianteiro "b_f" em kg;
37 br = 17; % Inertância do inerter traseiro "b_r" em kg;
38 x2(1) = Ksf1; % Vetor que armazena o valor inicial de rigidez "Ksf_1"

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
39
40 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
41
42 M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
43       0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
44 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
45       0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;
46       -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
47 K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
48       (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
49       -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
50       -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
51       -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
52
53 %% Aplicação da função de transferência:
54
55 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
56 matriz_soma = -w*w*M + 1*w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
57 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admittancia (inversa da Matriz de Imp.)
58 H_1_1 = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2)); % Modulo do segundo valor da diagonal principal
59 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
60 H_1_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
61 plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf1),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
62 % Plota o gráfico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
63 % H(1,1) (ganho)
64 xlabel ('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
65 - ylabel ('Resposta \theta (rad)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
66 - grid on
67 - hold on
68
69 - %% Variação de Parametros de Inertancia bf e br e Rigidez Ksf1 e Ksr1:
70
71 - % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
72 - % Eixo Z em funcao dos valores de Inertancia b e Rigidez k_1:
73
74 - for y = 1:20
75 -     bf = bf + 10;
76 -     br = br + 10;
77 -     xi(y) = bf;
78 -     M = [Ms 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
79 -         0 0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
80 -     syms w
81 -     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
82 -     H = inv(matriz_soma);
83 -     H_1_1 = abs(H(2,1))+ abs(H(2,2));
84 -     w = [0:0.001:50];
85 -     H_1_1_1 = eval(H_1_1);
86 -     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg',' e Ksr1=',num2str(Ksf1),' N/m'))
87 -     Z(1,y) = max (H_1_1_1);
88 -     for u = 1:19
89 -         Ksf1 = Ksf1 + 4000;
90 -         Ksr1 = Ksr1 + 4000;

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
91 -     x2(u+1) = Ksf1;
92 -     K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
93 -         (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
94 -         -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ksf2) 0 0 0;
95 -         -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ksr2) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
96 -         -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
97 -     syms w
98 -     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
99 -     H = inv(matriz_soma);
100 -     H_1_1 = abs(H(2,1))+ abs(H(2,2));
101 -     w = [0:0.001:50];
102 -     H_1_1_1 = eval(H_1_1);
103 -     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg',' e Ksr1=',num2str(Ksf1),' N/m'))
104 -     Z(u+1,y) = max (H_1_1_1);
105 - end
106 - Ksf1 = Ksf1 - 76000;
107 - Ksr1 = Ksr1 - 76000;
108 - K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
109 -     (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
110 -     -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ksf2) 0 0 0;
111 -     -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ksr2) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
112 -     -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
113 - end
114
115 - legend('show')
116 - hold off

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Stiffness.m
117
118 - %% Montagem da grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
119
120 - [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
121
122 - figure
123 - surf(X1,X2,Z)
124 - xlabel('Inertância - bf e br (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
125 - ylabel('Rigidez - Ksf1 e Ksr1 (N/m)') % Eixo Y - Valores de Rigidez "k_1"
126 - zlabel('Resposta máxima \theta (rad)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
127 - %xlabel('Inertancia - b (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
128 - %ylabel('Stiffness - Ksf1 and Ksr1 (N/m)') % Eixo Y - Valores de Rigidez "k_1"
129 - %zlabel('Peak response \theta (rad)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
130 - grid on
131 - % title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "b" e "Ksr1"')
132 - title ('Frequency Response Map - Variation of "b" and "Ksr1"')
133 - colorbar
134 - colormap jet

```

# APÊNDICE I – Código em MATLAB: Modelo *ISD* de 1/2 veículo (*pitch*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência para Variações de Inertância e Amortecimento

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
13 % Suspensao Passiva ISD (Inerter-Spring-Damper) - Angulo de arfagem (PITCH)
14 % - Variação de Amortecimento e Inertância
15 %*****
16
17 %% Parâmetros do sistema:
18
19 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
20 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
21 L = a+b; % Distância entre-eixos;
22 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veículo);
23 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
24 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
25 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m²;
26 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
27 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
28 Ksf1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão dianteira "K_sf1" em N/m;
29 Ksf2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão dianteira "K_sf2" em N/m;
30 Ksr1 = 22000; % Rigidez da mola principal da suspensão traseira "K_sr1" em N/m;
31 Ksr2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão traseira "K_sr2" em N/m;
32 Csf = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
33 Csr = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
34 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
35 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
36 bf = 17; % Inertância do inerter dianteiro "b_f" em kg;
37 br = 17; % Inertância do inerter traseiro "b_r" em kg;
38 x2(1) = Csf; % Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "Csf"

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
39
40 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
41
42 M = [Ms 0 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
43       0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
44 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
45       0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0;
46       -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
47 K = [(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2) (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) -Ksf1 -Ksr1 -Ksf2 -Ksr2;
48       (Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b) (Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2) ...
49       -Ksf1*a Ksr1*b -Ksf2*a Ksr2*b; -Ksf1 -Ksf1*a (Ksf1+Ktf) 0 0 0;
50       -Ksr1 Ksr1*b 0 (Ksr1+Ktr) 0 0; -Ksf2 -Ksf2*a 0 0 Ksf2 0;
51       -Ksr2 Ksr2*b 0 0 0 Ksr2];
52
53 %% Aplicação da função de transferência:
54
55 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
56 matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
57 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
58 H_1_1 = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2)); % Modulo do segundo valor da diagonal principal
59 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
60 H_1_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
61 plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf1),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
62 % Plota o grafico de resposta em frequencia relativo à "w" e ao modulo de
63 % H(1,1) (ganho)
64 xlabel('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
65 - ylabel ('Resposta \theta (rad)') % Titulo (Label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
66 - grid on
67 - hold on
68
69 %% Variação de Parametros de Inertancia bf e br e Rigidez Ksf1 e Ksr1:
70
71 % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
72 % Eixo Z em funcao dos valores de Inertancia b e Amortecimento CS:
73
74 for y = 1:20
75     bf = bf + 10;
76     br = br + 10;
77     xl(y) = bf;
78     M = [Ms 0 0 0 0; 0 Js 0 0 0; 0 0 (Muf+bf) 0 -bf 0;
79          0 0 (Mur+br) 0 -br; 0 0 -bf 0 bf 0; 0 0 0 -br 0 br];
80     syms w
81     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
82     H = inv(matriz_soma);
83     H_l_l = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2));
84     w = [0:0.001:50];
85     H_l_l_l = eval(H_l_l);
86     plot(w,H_l_l_l,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg', ' e Cs=',num2str(Cs), ' N*s/m'))
87     Z(1,y) = max (H_l_l_l);
88     for u = 1:19
89         Csf = Csf + 100;
90         Csr = Csr + 100;

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
91 - x2(u+1) = Csf;
92 - C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
93        0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0;
94        -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
95 - syms w
96 - matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
97 - H = inv(matriz_soma);
98 - H_l_l = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2));
99 - w = [0:0.001:50];
100 - H_l_l_l = eval(H_l_l);
101 - plot(w,H_l_l_l,'DisplayName',strcat('b=',num2str(bf),' kg', ' e Cs=',num2str(Cs), ' N*s/m'))
102 - Z(u+1,y) = max (H_l_l_l);
103 - end
104 - Csf = Csf - 1900;
105 - Csr = Csr - 1900;
106 - C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) 0 0 -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
107        0 0 -Csf*a Csr*b; 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0;
108        -Csf -Csf*a 0 0 Csf 0; -Csr Csr*b 0 0 0 Csr];
109 - end
110
111 legend('show')
112 hold off

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_ISD_PITCH_Damping.m
113
114 %% Montagem da grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
115
116 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
117
118 figure
119 surf(X1,X2,Z)
120 xlabel('Inertância - bf e br (kg)') % Eixo X - Valores de Inertancia "b"
121 ylabel('Coef. de Amortecimento - Csf e Csr (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "Cs"
122 zlabel('Resposta máxima \theta (rad)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
123 grid on
124 title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "bf", "br" e "Cs"')
125 colorbar
126 colormap jet

```

# APÊNDICE J – Código em MATLAB: Modelo Convencional de 1/2 veículo (*bounce*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
13 % Suspensao Passiva Convencional (Sem Inerter) - Salto(BOUNCE)
14 %*****
15
16 %% Parâmetros do sistema:
17
18 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
19 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
20 L = a+b; % Distância entre-eixos;
21 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veiculo);
22 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
23 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
24 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m²;
25 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
26 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
27 Ksf = 16000; % Rigidez da mola sa suspensão dianteira "K_sf" em N/m;
28 Ksr = 16000; % Rigidez da mola sa suspensão traseira "K_sr" em N/m;
29 Csf = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
30 Csr = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
31 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
32 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
33 x2(1) = Csf; % Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "C";
34

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
35 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
36
37 M = [Ms 0 0 0; 0 Js 0 0; 0 0 Muf 0; 0 0 0 Mur];
38 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
39 -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0; -Csr Csr*b 0 Csr];
40 K = [(Ksf+Ksr) (Ksf*a-Ksr*b) -Ksf -Ksr; (Ksf*a-Ksr*b) (Ksf*a^2+Ksr*b^2) ...
41 -Ksf*a Ksr*b; -Ksf -Ksf*a (Ksf+Ktf) 0; -Ksr Ksr*b 0 (Ksr+Ktr)
42
43 % Aplicação da função de transferência:
44
45 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
46 matriz_soma = -w*w*M + C*w + K; % Montagem da matriz de impedancia
47 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
48 H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2)); % Modulo do primeiro valor da diagonal principal
49 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
50 H_1_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
51 plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
52 % Plota o grafico de resposta em frequencia relaiivo à "w" e ao modulo de
53 % H(1,1) (ganho)
54 xlabel ('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
55 ylabel ('Resposta (m)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
56 grid on
57 hold on

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
%% Variação de Parâmetros de Inertancia b e Amortecimento c:
% Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
% Eixo Z em função dos valores de rigidez K_s e Amortecimento C:
64 for y = 1:21
65     Ksf = Ksf + 4000;
66     Ksr = Ksr + 4000;
67     x1(y) = Ksf;
68     K = [(Ksf+Ksr) (Ksf*a-Ksr*b) -Ksf -Ksr; (Ksf*a-Ksr*b) (Ksf*a^2+Ksr*b^2) -Ksf*a Ksr*b; -Ksf -Ksf*a (Ksf+Ksr) 0;
69           -Ksr Ksr*b 0 (Ksr+Ktr)];
70     syms w
71     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
72     H = inv(matriz_soma);
73     H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
74     w = [0:0.001:50];
75     H_1_1_1 = eval(H_1_1);
76     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
77     Z(1,y) = max(H_1_1_1);
78     for u = 1:20
79         Csf = Csf + 100;
80         Csr = Csr + 100;
81         x2(u+1) = Csf;
82         C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0;
83               -Csr Csr*b 0 Csr];

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
84     syms w
85     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
86     H = inv(matriz_soma);
87     H_1_1 = abs(H(1,1)) + abs(H(1,2));
88     w = [0:0.001:50];
89     H_1_1_1 = eval(H_1_1);
90     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
91     Z(u+1,y) = max(H_1_1_1);
92 end
93 Csf = Csf - 2000;
94 Csr = Csr - 2000;
95 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
96       -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0; -Csr Csr*b 0 Csr];
97 end
98
99 legend('show')
100 hold off

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_BOUNCE.m
101
102 %% Montagem do grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
103
104 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
105
106 figure
107 surf(X1,X2,Z)
108 xlabel('Rigidez - Ksf e Ksr (N/m)') % Eixo X - Valores de Rigidez "Ks"
109 ylabel('Coeficientes de amortecimento - Csf e Csr (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "C"
110 zlabel('Resposta máxima -(m)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
111 grid on
112 title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "Ks" e "C" para o Modelo de Suspensão Passiva C
113 colorbar
114 colormap jet
115

```



# APÊNDICE K – Código em MATLAB: Modelo Convencional de 1/2 veículo (*pitch*) - Obtenção do Mapa de Resposta em Frequência

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_PITCH.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_PITCH.m
13 % Suspensao Passiva Convencional (Sem Inerter) - Arfagem(PITCH)
14 %*****
15
16 %% Parâmetros do sistema:
17
18 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
19 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
20 L = a+b; % Distância entre-eixos;
21 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veiculo);
22 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
23 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
24 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m^2;
25 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
26 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
27 Ksf = 16000; % Rigidez da mola sa suspensão dianteira "K_sf" em N/m;
28 Ksr = 16000; % Rigidez da mola sa suspensão traseira "K_sr" em N/m;
29 Csf = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
30 Csr = 67; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
31 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
32 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
33 x2(1) = Csf; % Vetor que armazena o valor inicial de amortecimento "C";
34

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_PITCH.m
HC_3D_FREQ_Response_Map_Conventional_PITCH.m
34
35 %% Matrizes de massa (M), amortecimento (C) e rigidez (K):
36
37 M = [Ms 0 0 0; 0 Js 0 0; 0 0 Muf 0; 0 0 0 Mur];
38 C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) ...
39 -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0; -Csr Csr*b 0 Csr];
40 K = [(Ksf+Ksr) (Ksf*a-Ksr*b) -Ksf -Ksr; (Ksf*a-Ksr*b) (Ksf*a^2+Ksr*b^2) ...
41 -Ksf*a Ksr*b; -Ksf -Ksf*a (Ksf+Ktf) 0; -Ksr Ksr*b 0 (Ksr+Ktr)
42
43 % Aplicação da função de transferência:
44
45 syms w % Variavel simbolica para a frequencia "w" (omega)
46 matriz_soma = -w*w*M + w*C + K; % Montagem da matriz de impedancia
47 H = inv(matriz_soma); % Matriz de admitancia (inversa da Matriz de Imp.)
48 H_1_1 = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2)); % Modulo do segundo valor da diagonal principal
49 w = [0:0.001:50]; % Atribui valores a "w"
50 H_1_1_1 = eval(H_1_1); % Permite atribuir valor ao modulo de H(1,1)
51 plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
52 % Plota o grafico de resposta em frequencia relativo a "w" e ao modulo de
53 % H(1,1) (ganho)
54 xlabel ('Frequência (rad/sec)') % Titulo (label) do Eixo X - Frequencia "w"
55 ylabel ('Resposta (rad)') % Titulo (label) do Eixo Y - Ganho em deslocamento
56 grid on
57 hold on
58

```

```

58
59
60
61 %% Variação de Parametros de Inertancia b e Amortecimento c:
62 % Laços de repetição concatenados que permitem obter o pico de resposta no
63 % Eixo Z em funcao dos valores de rigidez K_s e Amortecimento C:
64
65 for y = 1:21
66     Ksf = Ksf + 4000;
67     Ksr = Ksr + 4000;
68     x1(y) = Ksf;
69     K = [(Ksf+Ksr) (Ksf*a-Ksr*b) -Ksf -Ksr; (Ksf*a-Ksr*b) (Ksf*a^2+Ksr*b^2) -Ksf*a Ksr*b; -Ksf -Ksf*a (Ksf+Ksr) 0;
70         -Ksr Ksr*b 0 (Ksr+Ktr)];
71     syms w
72     matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
73     H = inv(matriz_soma);
74     H_1_1 = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2));
75     w = [0:0.001:50];
76     H_1_1_1 = eval(H_1_1);
77     plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
78     Z(1,y) = max(H_1_1_1);
79     for u = 1:20
80         Csf = Csf + 100;
81         Csr = Csr + 100;
82         x2(u+1) = Csf;
83         C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0;

```

```

82 -         C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0;
83 -             -Csr Csr*b 0 Csr];
84 -         syms w
85 -         matriz_soma = -w*w*M + i*w*C + K;
86 -         H = inv(matriz_soma);
87 -         H_1_1 = abs(H(2,1)) + abs(H(2,2));
88 -         w = [0:0.001:50];
89 -         H_1_1_1 = eval(H_1_1);
90 -         plot(w,H_1_1_1,'DisplayName',strcat('Ks=',num2str(Ksf),' N/m',' e c=',num2str(Csf),' N*s/m'))
91 -         Z(u+1,y) = max(H_1_1_1);
92 -     end
93 -     Csf = Csf - 2000;
94 -     Csr = Csr - 2000;
95 -     C = [(Csf+Csr) (Csf*a-Csr*b) -Csf -Csr; (Csf*a-Csr*b) (Csf*a^2+Csr*b^2) -Csf*a Csr*b; -Csf -Csf*a Csf 0;...
96 -         -Csr Csr*b 0 Csr];
97 - end
98
99 legend('show')
100 hold off

```

```

101
102 %% Montagem do grafico (superficie) em 3D - Mapa de resposta em frequencia:
103
104 [X1,X2] = meshgrid(x1,x2)
105
106 figure
107 surf(X1,X2,Z)
108 xlabel('Rigidez - Ksf e Ksr (N/m)') % Eixo X - Valores de Rigidez "Ks"
109 ylabel('Coeficientes de amortecimento - Csf e Csr (N*s/m)') % Eixo Y - Valores de Amortecimento "C"
110 zlabel('Resposta máxima - \theta (rad)') % Eixo Z - Valores dos picos de resposta
111 grid on
112 title ('Mapa de resposta em frequência - Variação de "Ks" e "C" para o Modelo de Suspensão Passiva Conve
113 colorbar
114 colormap jet
115

```

# APÊNDICE L – Código em MATLAB: Obtenção dos Parâmetros de Performance do Modelo de 1/2 Veículo da Suspensão ISD

```

14
15 %% Parâmetros do sistema:
16
17 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
18 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
19 L = a+b; % Distância entre-eixos;
20 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veículo);
21 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
22 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
23 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m^2;
24 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
25 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
26 Ksf1 = 42000; % Rigidez da mola principal da suspensão dianteira "K_sf1" em N/m;
27 Ksf2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão dianteira "K_sf2" em N/m;
28 Ksr1 = 42000; % Rigidez da mola principal da suspensão traseira "K_sr1" em N/m;
29 Ksr2 = 10000; % Rigidez da mola secundária da suspensão traseira "K_sr2" em N/m;
30 Csf = 944; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
31 Csr = 944; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
32 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
33 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
34 bf = 220; % Inertância do inerter dianteiro "b_f" em kg;
35 br = 220; % Inertância do inerter traseiro "b_r" em kg;
36

```

```

37 %% Representação do modelo no espaço de estados:
38
39 A1 = [-(Csf+Csr)/Ms -(Csf*a-Csr*b)/Ms 0 0 Csf/Ms Csr/Ms ... & Eq. (I)-----
40 -(Ksf1+Ksf2+Ksr1+Ksr2)/Ms -(Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b)/Ms Ksf1/Ms Ksr1/Ms Ksf2/Ms Ksr2/Ms;
41 -(Csf*a-Csr*b)/Js -(Csf*a^2+Csr*b^2)/Js 0 0 (Csf*a)/Js -(Csr*b)/Js ... % Eq. (II)-----
42 -(Ksf1*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b)/Js -(Ksf1*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2)/Js (Ksf1*a)/Js -(Ksr1*b)/Js (Ksf2*a)/Js -(
43 Csf/Muf (Csf*a)/Muf 0 0 -Csf/Muf 0 ... % Eq. (III)-----
44 (Ksf1+Ksf2)/Muf (Ksf1+Ksf2)*a/Muf -(Ksf1+Ktf)/Muf 0 -Ksf2/Muf 0;
45 Csr/Mur -(Csr*b)/Mur 0 0 0 -Csr/Mur ... % Eq. (IV)-----
46 (Ksr1+Ksr2)/Mur -(Ksr1+Ksr2)*b/Mur 0 -(Ksr1+Ktr)/Mur 0 -Ksr2/Mur;
47 (Csf/Muf+Csf/bf) (Csf*a/Muf+Csf*a/bf) 0 0 -(Csf/Muf+Csf/bf) 0 ... % Eq. (V)-----
48 ((Ksf1+Ksf2)/Muf+Ksf2/bf) ((Ksf1+Ksf2)*a/Muf+Ksf2*a/bf) -(Ksf1+Ktf)/Muf 0 -(Ksf2/Muf+Ksf2/bf) 0;
49 (Csr/Mur+Csr/br) -(Csr*b/Mur+Csr*b/br) 0 0 0 -(Csr/Mur+Csr/br) ... % Eq. (VI)-----
50 ((Ksr1+Ksr2)/Mur+Ksr2/br) -(Ksr1+Ksr2)*b/Mur+Ksr2*b/br) 0 -(Ksr1+Ktr)/Mur 0 -(Ksr2/Mur+Ksr2/br);
51 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
52 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
53 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
54 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
55 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
56 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0];
57
58 B1 = [0 0; 0 0; Ktf/Muf 0;
59 0 Ktr/Mur; Ktf/Muf 0; 0 Ktr/Mur;
60 0 0; 0 0; 0 0;
61 0 0; 0 0; 0 0];

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_ISD_TIME.m
HC_ISD_TIME.m x +
62
63 %Cl = [-(CsF+CsR)/Ms -(CsF*a-CsR*b)/Ms 0 0 CsF/Ms CsR/Ms ...
64 -(Ksfl+Ksf2+Ksr1+Ksr2)/Ms -(Ksfl*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b)/Ms Ksfl/Ms Ksr1/Ms Ksf2/Ms Ksr2/Ms;
65 % -(CsF*a-CsR*b)/Js -(CsF*a^2+CsR*b^2)/Js 0 0 (CsF*a)/Js -(CsR*b)/Js ...
66 %-(Ksfl*a+Ksf2*a-Ksr1*b-Ksr2*b)/Js -(Ksfl*a^2+Ksf2*a^2+Ksr1*b^2+Ksr2*b^2)/Js (Ksfl*a)/Js -(Ksr1*b)/Js (Ksf2*
67 %Cl = [0 0 0 0 0 0 1 a -1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 -b 0 -1 0 0];
68 Cl = [0 0 0 0 0 0 0 0 Ktf 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 Ktr 0 0];
69 %Dl = [0 0; 0 0];
70 Dl = [-Ktf 0; 0 -Ktr];
71
72 sys = ss(A1,B1,C1,D1)
73
74 %% Excitação com ruído branco Gaussiano - Função "wgn":
75
76 t = 0:0.001:5.226;
77 noise = wgn(1,5001,-40); % entrada (perfil de pista)
78 delay = zeros(1,226); % vetor "delay" com 0,225s
79 noise_front = [noise, delay];
80 noise_rear = [delay, noise];
81
82 input = [noise_front; noise_rear];
83 lsim(sys,input,t) % Submete o modelo à excitação
84 legend('show')
85 hold on
86 grid on

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_ISD_TIME.m
HC_ISD_TIME.m x +
69 %Dl = [0 0; 0 0];
70 Dl = [-Ktf 0; 0 -Ktr];
71
72 sys = ss(A1,B1,C1,D1)
73
74 %% Excitação com ruído branco Gaussiano - Função "wgn":
75
76 t = 0:0.001:5.226;
77 noise = wgn(1,5001,-40); % entrada (perfil de pista)
78 delay = zeros(1,226); % vetor "delay" com 0,225s
79 noise_front = [noise, delay];
80 noise_rear = [delay, noise];
81
82 input = [noise_front; noise_rear];
83 lsim(sys,input,t) % Submete o modelo à excitação
84 legend('show')
85 hold on
86 grid on
87
88 y1 = lsim(sys,input,t); % Guarda os resultados em um array (y2)
89 ValEficazes1 = rms(y1) % Extrai os valores RMS das respostas no tempo
90

```

# APÊNDICE M – Código em MATLAB: Obtenção dos Parâmetros de Performance do Modelo de 1/2 Veículo da Suspensão Convencional

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_Convensional_TIME.m
HC_Convensional_TIME.m x +
14
15 %% Parâmetros do sistema:
16
17 a = 1.25; % Distância do rixo dianteiro ao CG;
18 b = 1.25; % Distância do eixo traseiro ao CG;
19 L = a+b; % Distância entre-eixos;
20 Ms = 700; % Valor da Massa Suspensa "M_s" em kg (1/2 Veículo);
21 Msf = (b/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo dianteiro "M_sf" em kg;
22 Msr = (a/L)*Ms; % Fração da Ms relativa ao eixo traseiro "M_sr" em kg;
23 Js = Msf*a^2 + Msr*b^2; % Momento de Inércia em rel. ao eixo de rotação "J_s" em kg.m^2;
24 Muf = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Dianteiro "M_uf" em kg;
25 Mur = 50; % Valor da Massa Nao-Suspensa no Eixo Traseiro "M_ur" em kg;
26 Ksf = 42000; % Rigidez da mola sa suspensão dianteira "K_sf" em N/m;
27 Ksr = 42000; % Rigidez da mola sa suspensão traseira "K_sr" em N/m;
28 Csf = 944; % Coef. de Amortecimento da susp. dianteira "C_sf" em N.s/m;
29 Csr = 944; % Coef. de Amortecimento da susp. traseira "C_sr" em N.s/m;
30 Ktf = 200000; % Rigidez do pneu dianteiro "K_tf" em N/m;
31 Ktr = 200000; % Rigidez do pneu traseiro "K_tr" em N/m;
32

```

```

Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_Convensional_TIME.m
HC_Convensional_TIME.m x +
33 %% Representação do modelo no espaço de estados:
34
35 A2 = [0 1 0 0 0 0 0;
36 -(Ksf+Ksr)/Ms -(Csf+Csr)/Ms -(Ksf*a-Ksr*b)/Ms -(Csf*a-Csr*b)/Ms Ksf/Ms Csf/Ms Ksr/Ms Csr/Ms;
37 0 0 1 0 0 0 0;
38 -(Ksf*a-Ksr*b)/Js -(Csf*a-Csr*b)/Js -(Ksf*a+Ksr*b)/Js -(Csf*a+Csr*b)/Js Ksf*a/Js Csf*a/Js -Ksr*b/Js -Cs
39 0 0 0 0 1 0 0;
40 Ksf/Muf Csf/Muf Ksf*a/Muf Csf*a/Muf -(Ksf+Ktf)/Muf -Csf/Muf 0 0;
41 0 0 0 0 0 0 1;
42 Ksr/Mur Csr/Mur -Ksr*b/Mur -Csr*b/Mur 0 0 -(Ksr+Ktr)/Mur -Csr/Mur];
43 B2 = [0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; Ktf/Muf 0; 0 0; 0 Ktr/Mur];
44 %C2 = [-(Ksf+Ksr)/Ms -(Csf+Csr)/Ms -(Ksf*a-Ksr*b)/Ms -(Csf*a-Csr*b)/Ms Ksf/Ms Csf/Ms Ksr/Ms Csr/Ms;
45 % -(Ksf*a-Ksr*b)/Js -(Csf*a-Csr*b)/Js -(Ksf*a+Ksr*b)/Js -(Csf*a+Csr*b)/Js Ksf*a/Js Csf*a/Js -Ksr*b/Js -Cs
46 %C2 = [1 0 a 0 -1 0 0 0; 1 0 -b 0 0 0 -1 0];
47 C2 = [0 0 0 0 Ktf 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 Ktr 0];
48 %D2 = [0 0; 0 0];
49 D2 = [-Ktf 0; 0 -Ktr];
50
51 sys = ss(A2,B2,C2,D2)
52

```

```
Editor - D:\Arquivos_UnB\TCC_-_Marcos_Paulo\TCC_-_Codigos_em_MATLAB\HC_Conventional_TIME.m
HC_Conventional_TIME.m x +
43 - B2 = [0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; Ktf/Muf 0; 0 0; 0 Ktr/Mur];
44 - %C2 = [-(Ksf+Ksr)/Ms -(Csf+Csr)/Ms -(Ksf*a-Ksr*b)/Ms -(Csf*a-Csr*b)/Ms Ksf/Ms Csf/Ms Ksr/Ms Csr/
45 - % -(Ksf*a-Ksr*b)/Js -(Csf*a-Csr*b)/Js -(Ksf*a*a+Ksr*b*b)/Js -(Csf*a*a+Csr*b*b)/Js Ksf*a/Js
46 - %C2 = [1 0 a 0 -1 0 0 0; 1 0 -b 0 0 0 -1 0];
47 - C2 = [0 0 0 0 Ktf 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 Ktr 0];
48 - %D2 = [0 0; 0 0];
49 - D2 = [-Ktf 0; 0 -Ktr];
50
51 - sys = ss(A2,B2,C2,D2)
52
53 %% Excitação com ruído branco Gaussiano - Função "wgn":
54
55 - t = 0:0.001:5.226;
56 - noise = wgn(1,5001,-40); % entrada (perfil de pista)
57 - delay = zeros(1,226); % vetor "delay" com 0,225s
58 - noise_front = [noise, delay];
59 - noise_rear = [delay, noise];
60
61 - input = [noise_front; noise_rear];
62 - lsim(sys,input,t) % Submete o modelo à excitação
63 - legend('show')
64 - grid on
65
66 - y2 = lsim(sys,input,t); % Guarda os resultados em um array (y2)
67 - ValEficazes2 = rms(y2) % Extrai os valores RMS das respostas no tempo
```