



**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE
LOCKING EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A
DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS**

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

**PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE
LOCKING EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A
DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS**

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. EDGAR NOBUO MAMIYA, ENM/UNB

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO ENM.PG - XXX/AAAA
BRASÍLIA-DF, 11 DE MAIO DE 2022.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE
LOCKING EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A
DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS**

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

APROVADA POR:

Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, ENM/UnB
Examinador interno

BRASÍLIA, 11 DE MAIO DE 2022.

FICHA CATALOGRÁFICA

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE *LOCKING* EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS

2022xv, 30p., 201x297 mm

(ENM/FT/UnB, Engenheiro Mecânico, Engenharia Mecânica, 2022)

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA (2022) ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE *LOCKING* EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS . Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 30p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

TÍTULO: ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE DE *LOCKING* EM ELEMENTOS FINITOS SUBMETIDOS A DEFORMAÇÕES QUASE INCOMPRESSÍVEIS .

GRAU: Engenheiro Mecânico ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

BRENDA KENNEDY DE OLIVEIRA

brendakdoliveira@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar todas as ferramentas que me fizeram chegar até este momento. Sem Ele, realmente eu não teria êxito.

Agradeço profundamente aos meus pais por todo o amor, suporte, amparo e incentivo para que eu pudesse concluir todas as etapas até aqui. Nada disso seria possível, sem o apoio deles.

Agradeço à minha irmã, minha grande inspiração, por sempre estar ao meu lado, me aconselhando e me fazendo rir. A Isadora é o meu maior exemplo.

Agradeço a todos os meus familiares que sempre acreditaram em mim e me encorajaram durante todo esse período.

Agradeço ao meu namorado, Arthur, por ser leveza na minha vida e meu grande referencial de bondade. A ele toda a minha admiração. Que possamos conquistar o mundo juntos!

Agradeço aos meus amigos, especialmente à Sophia, que sempre acreditou em mim e não me deixou fazer menos do que eu sou capaz e ao Bessa e ao Danilo, que foram muito presentes nos melhores momentos dessa jornada acadêmica, mas também nos de desânimo e desespero. São amigos de uma vida toda.

Agradeço aos Professores da Universidade de Brasília, por me ensinarem com tanta maestria. Sou principalmente grata aos Professores Edgar Mamiya Nobuo (o orientador mais atencioso que eu poderia ter), José Alexander Araújo, Lucival Malcher e Taygoara Felamingo de Oliveira, por terem sido os grandes responsáveis pela minha empolgação em aprender e em me esforçar.

Agradeço à Apuama e à FGR, as duas equipes de competição que me proporcionaram um aprendizado que não é mensurado por menção. Eu devo a elas, e aos amigos que fiz por meio delas, uma parte significativa da bagagem que vou levar da minha graduação.

Por fim, agradeço a mim, por não ter perdido a criança sonhadora que mora aqui. Que as minhas conquistas possam sempre se multiplicar e que eu possa ir muito mais longe nesta nova e promissora jornada!

Resumo

A ciência e a engenharia são áreas do conhecimento que buscam descrever diversos fenômenos físicos. Essa descrição é feita, em muitos casos, por meio de modelos matemáticos, dentre eles o Método dos Elementos Finitos, um dos métodos numéricos que buscam aproximações para solução de problemas de campo. Este projeto apresenta um estudo acerca da capacidade de elementos finitos representarem deformações quase incompressíveis, relevantes em abordagens associadas a deformações elásticas planas e principalmente a deformação plástica de metais dúcteis. Nesse sentido, é realizada uma análise comparativa do desempenho de cinco tipos de elementos na simulação de um problema de benchmarking, Membrana de Cook, comumente utilizado para a validação de elementos finitos em condições de quase incompressibilidade. Os elementos avaliados foram os elementos quadrilaterais de 4 e 8 nós com integração plena e reduzida e o elemento quadrilateral de 4 nós com formulação B-bar, desenvolvido especificamente para representação de deformações a volume constante. A partir das simulações observou-se que nem todos os elementos são apropriados para descrever deformações isocóricas, acarretando o surgimento de efeitos espúrios como travamento e mecanismo, frequentemente denominados *locking* e *hourglass*.

Palavras Chave: Travamento; *Locking*; Mecanismos; *Hourglass*; Modos espúrios de deformação; Deformações isocóricas.

Abstract

Science and engineering are areas of knowledge that aim to describe many physical phenomena. This description is made, in many cases, by using mathematical models, among them, the Finite Element Method, one of the numerical methods that seek approximate solutions to field problems. This project presents a study about the ability of finite elements to represent almost incompressible deformations, relevant in approaches associated with elastic plane-strain and especially with plastic strain in ductile metals. In this sense, a comparative performance's analysis of five types of elements in the simulation of a benchmarking problem, Cook's Membrane, commonly used for the validation of finite elements in conditions of almost incompressibility is carried out. From the simulations, it was observed that not all elements are suitable to describe isochoric deformations, leading to the appearance of spurious effects such as locking and hourglass.

Keywords: Locking; Hourglass; Spurious modes of deformation; Isochoric deformations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	MOTIVAÇÃO	1
1.3	OBJETIVO	3
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
2	REVISÃO TEÓRICA.....	5
2.1	DEFORMAÇÃO.....	5
2.2	TENSÃO	6
2.3	RELAÇÃO TENSÃO–DEFORMAÇÃO.....	6
2.4	DEFORMAÇÕES ISOCÓRICAS	8
2.5	PROBLEMA DE EQUILÍBRIO.....	9
2.5.1	FORMA FORTE.....	10
2.5.2	FORMA FRACA	10
2.6	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	16
3	ELEMENTOS QUADRILATERAIS COM FUNÇÕES DE BASE LINEARES E QUADRÁTICAS.....	20
3.1	MATRIZ DE RIGIDEZ.....	20
3.1.1	ELEMENTO QUADRILATERAL COM 4 NÓS	20
3.1.2	ELEMENTO QUADRILATERAL COM 8 NÓS	23
3.1.3	SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS INTEGRAIS	26
3.1.4	INTEGRAÇÃO PLENA E REDUZIDA PARA O ELEMENTO QUADRILATERAL COM 4 NÓS	27
3.1.5	INTEGRAÇÃO PLENA E REDUZIDA PARA O ELEMENTO QUADRILATERAL COM 8 NÓS	29
3.2	VETOR DAS FORÇAS DE CONTATO	30
3.2.1	VETOR DAS FORÇAS DE CONTATO NO ELEMENTO QUADRILATERAL COM 4 NÓS.....	30
3.2.2	VETOR DAS FORÇAS DE CONTATO NO ELEMENTO QUADRILATERAL COM 8 NÓS.....	32
4	<i>Locking e Hourglass</i>.....	34

4.1	<i>Locking</i>	34
4.2	<i>Hourglass</i>	35
4.3	RELAÇÃO ENTRE A RAZÃO DE RESTRIÇÃO E O <i>locking</i>	36
4.4	SIMULAÇÕES PARA ILUSTRAÇÃO DOS EFEITOS ESPÚRIOS DE DEFOR- MAÇÃO	39
4.4.1	EFEITO DO <i>locking</i>	39
4.4.2	EFEITO DO <i>hourglass</i>	42
5	ELEMENTO COM FORMULAÇÃO B-BAR.....	44
5.1	TENSOR DE DEFORMAÇÕES – DEDUÇÃO DAS PARCELAS VOLUMÉ- TRICA E DESVIADORA	44
5.2	FORMULAÇÃO B-BAR	46
5.3	ELEMENTO Q4 \bar{B}	46
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
6.1	MEMBRANA DE COOK	49
7	CONCLUSÃO	55
8	PROPOSTA DE ESTUDOS FUTUROS.....	56
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	57

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação esquemática da deformação plástica a nível do plano cristalino. Fonte: Mamiya (2021).....	2
2.1	Deformação do sólido nas direções x , y e z . Fonte: Mamiya (2021).	8
2.2	Representação esquemática do problema de equilíbrio. Fonte: Mamiya (2021).	9
2.3	Partição de domínios bi e tridimensionais. Fonte: Mamiya (2021).	16
2.4	Representação esquemática dos nós e elementos do domínio repartido. Fonte: Mamiya (2021).	17
2.5	Representação esquemática da função de base $N_i(x, y)$. Fonte: Mamiya (2021).....	17
2.6	Elemento finito para a construção das funções de base. Fonte: Mamiya (2021).	18
3.1	Elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).	21
3.2	Região de integração do elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).....	21
3.3	Representação do elemento quadrilateral com 4 nós nas coordenadas dos sistemas local (ξ, η) e global (x, y) . Fonte: Mamiya (2021).....	22
3.4	Representação do elemento quadrilateral com 8 nós nas coordenadas dos sistemas local (ξ, η) e global (x, y) . Fonte: Mamiya (2021).....	24
3.5	Funções de base do elemento, associados aos nós de vértices e de arestas. Fonte: Mamiya (2021).	24
3.6	Pontos de Gauss para integração plena em elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).	27
3.7	Pontos de Gauss para integração reduzida em elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).	28
3.8	Pontos de Gauss para integração plena em elemento quadrilateral com 8 nós. Fonte: Mamiya (2021).	29
3.9	Pontos de Gauss para integração reduzida em elemento quadrilateral com 8 nós. Fonte: Mamiya (2021).	29
3.10	Força de contato constante no contorno do elemento quadrilateral com 4 nós nos sistemas de coordenadas local ξ e globais (x, y) com 1 ponto de Gauss. Fonte: Mamiya (2021).	31
3.11	Funções de base no contorno com 2 nós. Fonte: Mamiya (2021).	31

3.12	Força de contato constante no contorno do elemento quadrilateral com 8 nós nos sistemas de coordenadas local ξ e global (x, y) com 2 pontos de Gauss. Fonte: Mamiya (2021).	32
3.13	Funções de base no contorno com 3 nós. Fonte: Mamiya (2021).	33
4.1	Representação da rigidez excessiva de um sistema com dois elementos triangulares com deformação a volume constante. Fonte: Mamiya (2021).	35
4.2	Modo espúrio de deformação cisalhante no elemento Q4: a distorção γ é nula no ponto de integração reduzida, $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Fonte: Mamiya (2021)..	35
4.3	Elementos clássicos. Fonte: Mamiya (2021).	38
4.4	Representação esquemática de uma viga engastada. Fonte: Mamiya (2021). ...	39
4.5	Simulação da deflexão da viga considerando-se integração plena e $\nu = 0,4999$. Fonte: Autoria própria.	40
4.6	Simulação da deflexão da viga considerando-se integração reduzida e $\nu = 0,4999$. Fonte: Autoria própria.	41
4.7	Simulação da deflexão da viga considerando-se integração plena e $\nu = 0,3333$. Fonte: Autoria própria.	41
4.8	Gráfico comparativo das soluções numéricas e analítica para a deflexão da viga. Fonte: Autoria própria.	42
4.9	Representação esquemática do efeito do <i>hourglass</i> em um sólido quadrilateral. Fonte: Autoria própria.	43
6.1	Membrana de Cook. Fonte: Autoria própria.	50
6.2	Simulação da viga de Cook com elemento Q4r e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.	51
6.3	Simulação da viga de Cook com elemento Q4 e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.	51
6.4	Simulação da viga de Cook com elemento Q4 \bar{B} e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.	52
6.5	Simulação da viga de Cook com elemento Q8r e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.	52
6.6	Simulação da viga de Cook com elemento Q8 e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.	53
6.7	Gráfico comparativo da simulação da Membrana de Cook com coeficiente de Poisson = 0,4999 e variando-se o tipo de elemento e o grau de refinamento. Fonte: Autoria própria.	54

LISTA DE TABELAS

3.1	Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 4 nós empregando-se integração plena.	28
3.2	Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 4 nós empregando-se integração reduzida.	28
3.3	Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 8 nós empregando-se integração plena.	30
3.4	Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss no contorno do elemento quadrilateral de 8 nós.	33
6.1	Valores de referência para as propriedades utilizadas no modelo do CoFEA	49
6.2	Valores de $u_{y \text{ máx}}$, em milímetros, dos elementos, para cada grau de refinamento.	53

LISTA DE CÓDIGOS FONTE

8.1	Arquivo de cabeçalho do elemento quadrilateral com 4 nós com formulação B-bar.	59
8.2	Arquivo fonte do elemento quadrilateral com 4 nós com formulação B-bar.	60
8.3	Arquivo de cabeçalho do elemento quadrilateral com 8 nós.	64
8.4	Arquivo fonte do elemento quadrilateral com 8 nós.	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Na ciência e na engenharia existem diversos fenômenos físicos descritos por modelos matemáticos que envolvem equações diferenciais. Os problemas associados a tais fenômenos são frequentemente denominados problemas de campo. Em muitos casos, essas equações diferenciais são difíceis e até mesmo impossíveis de serem solucionadas analiticamente. Nesse contexto, são propostos métodos numéricos com o intuito de se buscar uma aproximação adequada para a solução analítica.

Em se tratando de problemas de campo, alguns dos métodos numéricos encontrados na literatura são: o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Volumes Finitos, o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno, entre outros. Este trabalho é desenvolvido com base no Método dos Elementos Finitos e alguns dos efeitos espúrios, ou seja, não observados na prática, que podem ocorrer nas simulações computacionais – **travamento** e **mecanismo**, frequentemente referidos na literatura como *locking* e *hourglass*.

1.2 Motivação

Uma das áreas de estudo da engenharia é a deformação de materiais incompressíveis, ou seja, a volume constante – isocóricas. Apesar de a maioria dos materiais não serem incompressíveis, sabe-se que a deformação plástica, principalmente de metais dúcteis, é isocórica. Isso se deve ao fato de que as deformações plásticas em metais ocorre por deslizamento de planos cristalinos, como pode-se ser visualizado na Fig. 1.1. À medida que a magnitude das deformações plásticas aumenta, a deformação total tende a ser predominantemente isocórica, levando à necessidade de se impor a restrição de incompressibilidade ao campo de deslocamentos.

No contexto do Método dos Elementos Finitos, a simulação de deformações isocóricas

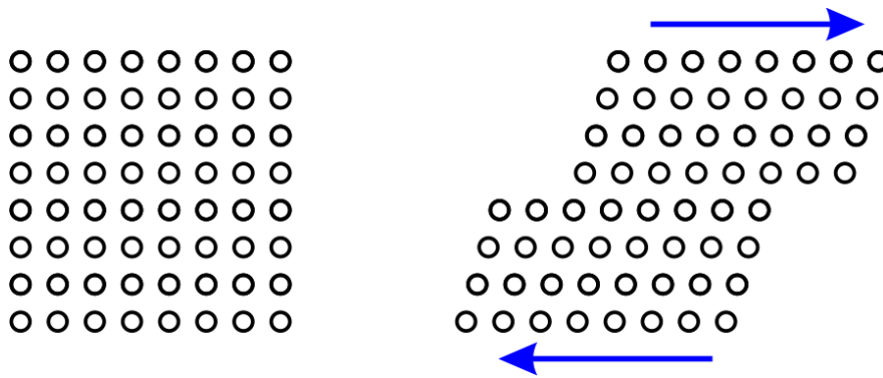


Figura 1.1: Representação esquemática da deformação plástica a nível do plano cristalino. Fonte: Mamiya (2021).

oferece desafios associados à imposição da restrição de deformações a volume constante. Na Mecânica dos Fluidos Computacional, há uma vasta literatura abordando esse tema, associada ao escoamento de fluidos incompressíveis, como a água, o óleo, etc. As abordagens propostas nessa literatura com frequência levam a métodos numéricos elaborados e de alto custo computacional (CROUZEIX; RAVIART, 1973; BOLAND; NICOLAIDES, 1983; FORTIN, 1981; GRIFFITHS, 1981; HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986).

Na Mecânica dos Sólidos Computacional, tem-se investido no desenvolvimento de abordagens mais simples, mas que têm fornecido resultados satisfatórios a um custo computacional relativamente reduzido. Tais abordagens têm sido implementadas em códigos comerciais como o Abaqus e o Ansys, por exemplo.

A descrição de deformações a volume constante pode ser obtida por meio de formulações mistas, ou ainda por meio de procedimentos mais simples, como a integração reduzida ou seletiva. Nas formulações mistas considera-se, além do campo de deslocamentos (u_x, u_y) , um campo de pressões p , por exemplo. Essa formulação foi primeiramente discutida por Veubeke (1965) e Herrmann (1965). Exemplos de formulação mista podem ser encontrados nas propostas de Pian e Sumihara (1984) (elemento baseado na interpolação dos campos de deslocamento e tensão, $\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}$) ou de Simo e Rifai (1990) (elemento baseado na interpolação dos campos de deslocamento, tensão e deformação, $\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$).

Elementos com integração reduzida são aqueles em que em sua formulação, a aproximação para a integração é feita considerando menos pontos de integração que em uma integração plena. Essa formulação foi primeiramente apresentada por Zienkiewicz, Taylor e Too (1971) e no contexto da incompressibilidade é mostrada a sua aplicação em Naylor (1974) e Zienkiewicz e Godbole (1975).

Já a integração seletiva considera, por exemplo, a integração reduzida dos termos associados à deformação volumétrica e a integração plena dos demais termos da equação variacional. Essa técnica foi primeiramente apresentada por Doherty, Wilson e Taylor (1969). Mais trabalhos no contexto da incompressibilidade integração seletiva foram realizados por Malkus (1976a), Malkus (1976b) e Malkus e Hughes (1978).

De acordo com Hughes (1987), as formulações baseadas nas integrações seletiva e reduzida podem ser equivalentes às formulações mistas, em alguns casos. Em outros, no entanto, a formulação mista se mostra mais eficiente, mas podem ser mais complicadas. Abordagens de deslocamento puro podem ser preferíveis para casos, anisotrópicos e ortotrópicos, além de serem mais simples.

O presente estudo aborda dificuldades e soluções na imposição da restrição de incompressibilidade. Por uma questão de simplicidade, o estudo se desenvolve no contexto da elasticidade linear, embora os resultados sejam diretamente aplicáveis à solução de problemas envolvendo o comportamento elasto-plástico.

1.3 Objetivo

O intuito deste trabalho é estudar soluções para evitar comportamentos espúrios – *locking* e *hourglass* – observados quando se empregam elementos finitos clássicos na determinação do campo de deslocamentos nos casos em que as deformações são predominantemente incompressíveis. Nesse sentido, será feita uma análise comparativa dos tipos de elementos e de integração de modo a se buscar relações entre esses e os modos espúrios.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado como segue.

- O capítulo 2 apresenta uma revisão teórica dos conceitos necessários para o desenvolvimento do estudo. Apresentam-se as definições de tensão e deformação, a relação entre elas, bem como a dedução matemática de deformação isocórica; o problema de equilíbrio em suas formas forte e fraca; o Método dos Elementos Finitos, com a exemplificação para o elemento triangular.
- O capítulo 3 detalha os elementos finitos quadrilaterais com 4 e 8 nós, apresentando as funções de base que os descrevem e suas derivadas; a integração numérica por Quadratura de Gauss; a matriz de rigidez e o vetor das forças de contato tanto para integração plena, como para integração reduzida em ambos os elementos.
- O capítulo 4 apresenta os conceitos de *locking* e *hourglass*, bem como uma relação de restrição que pode ser uma ferramenta para medir a tendência para travamento. Nesse mesmo capítulo são realizadas algumas simulações para se observar a ocorrência de efeitos espúrios de deformação (*locking* e *hourglass*) e sua relação com o modo de integração.
- O capítulo 5 faz a dedução das parcelas volumétrica e desviadora do tensor de deformações; introduz a formulação B-bar e descreve o elemento quadrilateral com 4 nós

com essa formulação.

- O capítulo 6 apresenta os resultados das simulações do problema de *benchmarking* membrana de Cook, obtidos com os elementos estudados neste projeto de graduação.
- O capítulo 7 expõe conclusões observadas a partir dos resultados das simulações com cada um dos elementos, no contexto em que eles foram estudados.
- O capítulo 8 apresenta, por fim, a proposta para continuidade e extensão dos estudos realizados neste projeto de graduação.

Capítulo 2

Revisão Teórica

Este capítulo aborda a base teórica para o estudo efetuado neste Projeto de Graduação. São apresentadas algumas definições, o problema de equilíbrio e o Método dos Elementos Finitos.

2.1 Deformação

A deformação pode ser entendida como a mudança da forma e do tamanho de um corpo em decorrência da aplicação de uma força (HIBBELER, 2014, p. 67). Essa mudança de forma e de tamanho provoca um deslocamento em um ponto material do elemento que se quer avaliar.

Dado um deslocamento

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T, \quad (2.1)$$

tem-se que a deformação linear, associada à configuração espacial do corpo contínuo, é tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (2.2)$$

Nota-se, portanto, que a deformação é um tensor de segunda ordem, uma vez que é resultado de uma operação que envolve o gradiente de um tensor de primeira ordem, relativo ao deslocamento. Dessa maneira, a deformação é representada na forma matricial como

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_2 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

em que

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad e \quad \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2. \quad (2.4)$$

2.2 Tensão

O vetor tensão descreve a força interna que atua em um plano específico passante por um ponto material. Como pode ser consultado em Gurtin (1982, p. 101), o Teorema de Cauchy estabelece que existe um tensor de segunda ordem, σ , tal que:

- o vetor tensão, \mathbf{t} , em um plano de normal, \mathbf{n} , é dado por

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}; \quad (2.5)$$

- o tensor tensão, σ , é simétrico:

$$\sigma^T = \sigma; \quad (2.6)$$

- o equilíbrio em um ponto material é expresso por

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

em que \mathbf{f} representa as forças de volume.

A representação matricial do tensor tensão de Cauchy é dada por

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

2.3 Relação Tensão–Deformação

No presente estudo considera-se comportamento elástico, linear e isotrópico, que pode ser expresso como

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon, \quad (2.9)$$

em que λ e μ são as constantes de Lamé, dadas por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.10)$$

e

$$\mu (= G) = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.11)$$

E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson do material.

Na forma matricial, essa relação é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} = \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_2 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

de modo que as componentes do tensor tensão de Cauchy são

$$\sigma_1 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad (2.13)$$

$$\sigma_2 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_3), \quad (2.14)$$

$$\sigma_3 = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (2.15)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}, \quad (2.16)$$

$$\sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{23} = 2\mu \varepsilon_{23}. \quad (2.18)$$

Em uma abordagem computacional é conveniente adotar a seguinte representação vetorial para os tensores de tensão e de deformação:

$$\sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T, \quad (2.19)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}]^T. \quad (2.20)$$

Assim, a relação entre a tensão e a deformação pode ser escrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}}_{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}, \quad (2.21)$$

ou seja,

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon. \quad (2.22)$$

O tensor de elasticidade, \mathbf{D} , é um tensor de 4ª ordem. Porém, a sua representação também pode se dar na forma matricial, como expresso na Eq. (2.21).

2.4 Deformações isocóricas

As deformações isocóricas são aquelas em que o volume do sólido, Vol , permanece constante, ou seja, $\Delta Vol = 0$.

O sólido ilustrado na Fig. 2.1, quando não deformado, possui dimensões L_{x0} , L_{y0} e L_{z0} . No estado deformado suas dimensões são

$$L_x = L_{x0} + \Delta L_x = L_{x0} (1 + \varepsilon_x), \quad (2.23)$$

$$L_y = L_{y0} + \Delta L_y = L_{y0} (1 + \varepsilon_y), \quad (2.24)$$

$$L_z = L_{z0} + \Delta L_z = L_{z0} (1 + \varepsilon_z). \quad (2.25)$$

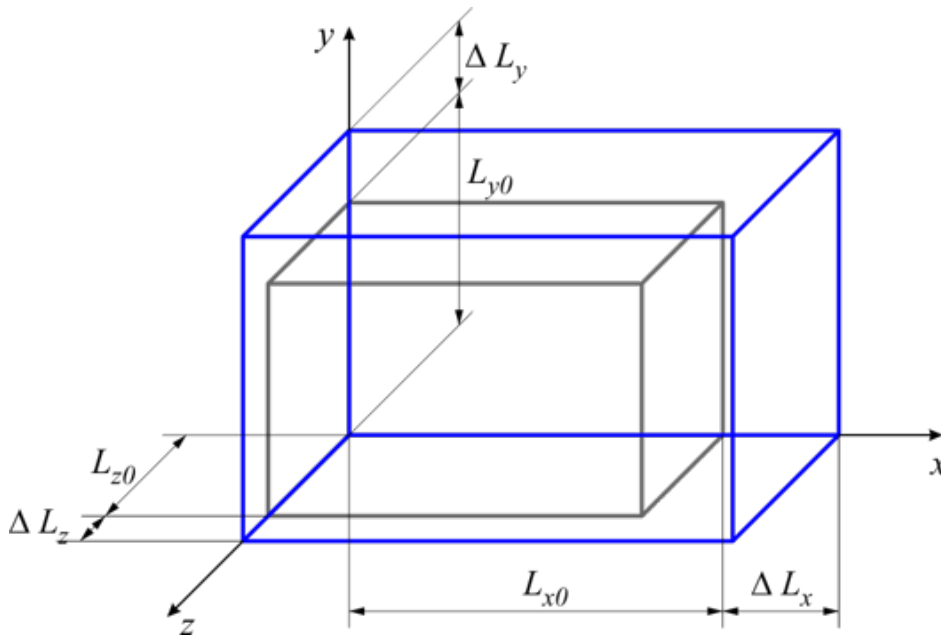


Figura 2.1: Deformação do sólido nas direções x, y e z. Fonte: Mamiya (2021).

O volume, por sua vez, é dado por

$$Vol = L_x L_y L_z \quad (2.26)$$

$$= L_{x0} (1 + \varepsilon_x) L_{y0} (1 + \varepsilon_y) L_{z0} (1 + \varepsilon_z) \quad (2.27)$$

$$= Vol_0 [1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + o(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)], \quad (2.28)$$

em que Vol_0 é o volume inicial e $\lim_{\|\varepsilon\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)\|}{\|\varepsilon\|} = 0$. Assim,

$$\Delta Vol = Vol_0 tr(\varepsilon) + o(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) \Rightarrow tr(\varepsilon) = 0, \text{ sob deformações isocóricas.} \quad (2.29)$$

Considerando-se o comportamento elástico linear isotrópico, sabe-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \quad (2.30)$$

Calculando-se $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$:

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{E}[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.32)$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.33)$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.34)$$

observa-se que

$$\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \quad (2.35)$$

Logo, se o coeficiente de Poisson tende a $\frac{1}{2}$, a deformação tende a ser isocórica, uma vez que o traço do tensor das deformações tende a zero.

2.5 Problema de equilíbrio

O sólido Ω tem contorno $\partial\Omega$ que pode ser decomposto em uma parcela Γ_g – onde os deslocamentos são prescritos – e outra parcela Γ_h – onde as forças de contato são prescritas. Γ_g e Γ_h devem ser tais que

$$\Gamma_g \cup \Gamma_h = \partial\Omega, \quad (2.36)$$

$$\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset. \quad (2.37)$$

Ou seja, Γ_g e Γ_h representam dois subconjuntos (que não se intersectam) do conjunto $\partial\Omega$, fronteira do domínio Ω .

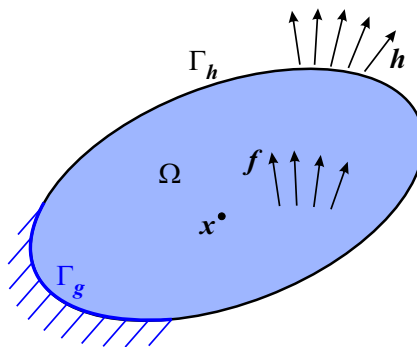


Figura 2.2: Representação esquemática do problema de equilíbrio. Fonte: Mamiya (2021).

Nota-se que esse corpo está submetido a forças de contato, de campo e a deslocamentos prescritos, tal que

- forças de contato $\mathbf{h} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$;

- forças de campo $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- deslocamentos prescritos $\mathbf{g} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Para solucionar esse problema de equilíbrio, podem ser utilizados dois tipos de formulação, a forte e a fraca.

2.5.1 Forma forte

De acordo com Fish e Belytschko (2007, p. 41),

"a formulação forte consiste em descrever o sistema físico considerando-se as equações governantes e as condições de contorno. As equações governantes são normalmente Equações Diferenciais Parciais (EDPs), mas no caso unidimensional são Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)".

O problema de equilíbrio em questão, descrito na formulação forte, se dá por:

“Dados $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{h} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{g} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}^3$, determinar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Omega; \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_h; \quad (2.39)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{sobre } \Gamma_g; \quad (2.40)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ ”.

De acordo com Hughes (1987), no contexto do método de elementos finitos, a intenção é desenvolver uma solução aproximada para o problema de equilíbrio, uma vez que a aplicação desse método pode ser feita em situações muito complexas em que não se encontram soluções exatas.

2.5.2 Forma fraca

A formulação fraca, também chamada de forma variacional, utiliza dois elementos importantes, a solução tentativa e a função peso, para descrever o problema de equilíbrio (HUGHES, 1987):

“Dados $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{h} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{g} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}^3$, determinar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{f} \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \mathbf{h} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad (2.41)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$, em que:

- A solução \mathbf{u} é um elemento do conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis:

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{u}|_{\Gamma_g} = \mathbf{g} \}; \quad (2.42)$$

- Define-se o espaço das variações (ou o espaço dos deslocamentos virtuais):

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{w}|_{\Gamma_g} = \mathbf{0} \}. \quad (2.43)$$

Nota-se que a formulação variacional consiste em reescrever a equação diferencial na forma de uma integral, a qual pode ser chamada de Princípio dos Trabalhos Virtuais (FISH; BELYTCHKO, 2007):

“O trabalho virtual de todas as forças – internas e externas – de um sistema em equilíbrio é igual a zero, para qualquer deslocamento virtual considerado”.

Da formulação fraca, observa-se que o produto interno entre o tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_2 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2 + \varepsilon_3\sigma_3 + 2\varepsilon_{23}\sigma_{23} + 2\varepsilon_{13}\sigma_{13} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Além disso, considerando $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, a formulação fraca pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{w}) \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^T \mathbf{h} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \quad (2.45)$$

O espaço vetorial dos deslocamentos virtuais tem dimensão infinita, de modo que, para encontrar a solução do problema de equilíbrio, aproxima-se a solução através da *Aproximação de Galerkin*, de modo que:

- pesquisa-se a solução aproximada \mathbf{u}^h em um subconjunto $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$;
- impõe-se a equação variacional de maneira aproximada sobre um subespaço $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ de dimensão finita n^h :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{w}^h) \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{u}^h) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}^{hT} \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^{hT} \mathbf{h} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (2.46)$$

Nesse sentido, tem-se que

$$\mathcal{S}^h = \{\mathbf{u}^h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{u}^h|_{\Gamma_g} = \mathbf{g}\} \quad (2.47)$$

e

$$\mathcal{V}^h = \{\mathbf{w}^h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2; \mathbf{w}^h|_{\Gamma_g} = \mathbf{0}\}. \quad (2.48)$$

Assim, os elementos do subconjunto das aproximações de deslocamentos cinematicamente admissíveis podem ser escritos como

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \mathbf{g}^h, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h, \\ \mathbf{g}^h \in \mathcal{S}^h \text{ qualquer.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Observa-se que

$$\mathbf{u}^h|_{\Gamma_g} = \underbrace{\mathbf{v}^h|_{\Gamma_g}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{g}^h|_{\Gamma_g}}_{=\mathbf{g}} = \mathbf{g}, \quad (2.50)$$

de modo que, substituindo $\mathbf{u}^h|_{\Gamma_g}$ na equação discretizada, a formulação variacional pode ser reescrita como:

“Determinar $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$ tal que

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{w}^h) \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{w}^{hT} \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^{hT} \mathbf{h} d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{w}^h) \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{g}^h) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (2.51)$$

2.5.2.1 Problemas planos

A solução aproximada \mathbf{v}^h pode ser escrita como uma combinação linear de elementos de uma base de funções $\{N_1, N_2, \dots\}$ do espaço \mathcal{V}^h . Em problemas planos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^h(x, y) &= \begin{bmatrix} v_x^h(x, y) \\ v_y^h(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x1}N_1(x, y) + v_{x2}N_2(x, y) + \dots \\ v_{y1}N_1(x, y) + v_{y2}N_2(x, y) + \dots \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \dots \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x, y)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\therefore \mathbf{v}^h(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{V}, \quad (2.53)$$

de modo que cada coluna de \mathbf{N} é um elemento de base de \mathcal{V}^h .

Analogamente, também pode-se escrever as componentes (w_x^h, w_y^h) de \mathbf{w}^h como uma combinação linear das funções $N_1(x, y), N_2(x, y), \dots$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^h(x, y) &= \begin{bmatrix} w_x^h(x, y) \\ w_y^h(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \dots \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x, y)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{x1} \\ w_{y1} \\ w_{x2} \\ w_{y2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\therefore \mathbf{w}^h(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{W}. \quad (2.55)$$

Nesse contexto, o tensor de deformação também pode ser escrito utilizando-se as funções de base $N_1(x, y), N_2(x, y), \dots$. Desse modo, no *estado plano de deformação* (em que $\varepsilon_z =$

$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$), tem-se que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x(v_x^h, v_y^h) \\ \varepsilon_y(v_x^h, v_y^h) \\ 2\varepsilon_{xy}(v_x^h, v_y^h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,x}^h \\ v_{y,y}^h \\ v_{x,y}^h + v_{y,x}^h \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ou seja, o tensor de deformação em função da solução aproximada, \mathbf{v}^h , pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) = \mathbf{B} \mathbf{V}. \quad (2.57)$$

Analogamente, a deformação em função do deslocamento virtual, \mathbf{w}^h , é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) = \mathbf{B} \mathbf{W}. \quad (2.58)$$

Já no caso da função \mathbf{g}^h , o procedimento é semelhante e escreve-se \mathbf{g}^h como combinação linear das funções, $\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots$. No entanto, estas não são funções de base, uma vez que o conjunto dos deslocamentos cinemáticos admissíveis, \mathcal{S} , não é um espaço vetorial. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}^h) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x(g_x^h, g_y^h) \\ \varepsilon_y(g_x^h, g_y^h) \\ 2\varepsilon_{xy}(g_x^h, g_y^h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{x,x}^h \\ g_{y,y}^h \\ g_{x,y}^h + g_{y,x}^h \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{N}_{1,x} & 0 & \hat{N}_{2,x} & 0 & \dots \\ 0 & \hat{N}_{1,y} & 0 & \hat{N}_{2,y} & \dots \\ \hat{N}_{1,y} & \hat{N}_{1,x} & \hat{N}_{2,y} & \hat{N}_{2,x} & \dots \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{x1} \\ g_{y1} \\ g_{x2} \\ g_{y2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}^h) = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G}. \quad (2.60)$$

Além disso, observa-se que o tensor de elasticidade, \mathbf{D} , no *estado plano de deformação*,

é dado por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Nesse sentido, fazendo-se as devidas transformações, a forma discretizada da equação variacional de equilíbrio, Eq. (2.51), pode ser reescrita como

$$\mathbf{W}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{V} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G} d\Omega \right) = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n^h}, \quad (2.62)$$

uma vez que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{w}^h) = \mathbf{W}^T \mathbf{B}^T, \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) = \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (2.64)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}^h) = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{w}^{hT} = \mathbf{W}^T \mathbf{N}^T. \quad (2.66)$$

A Eq. (2.62) estabelece uma relação de ortogonalidade entre a expressão entre parênteses e os elementos $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n^h}$, logo essa expressão é o elemento $\mathbf{0}$ de \mathbb{R}^{n^h} . Dessa forma, tem-se

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{V} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G} d\Omega, \quad (2.67)$$

representando um sistema de equações lineares

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (2.68)$$

em que

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.69)$$

é a matriz de rigidez e

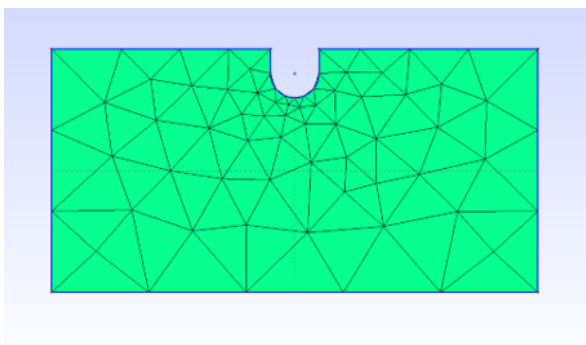
$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{G} d\Omega \quad (2.70)$$

é o vetor de carregamentos, estando o primeiro termo associado às forças de campo, F_f , o segundo, às forças de contato, F_c , e o terceiro, às forças internas, F_i .

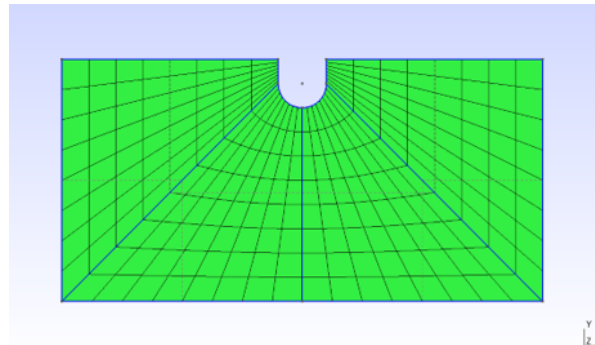
2.6 Método dos Elementos Finitos

Até então, foi visto que o Método de Galerkin propõe uma solução aproximada para o problema de equilíbrio representado na formulação fraca ou variacional. O método dos elementos finitos, por sua vez, é uma estratégia possível para a construção de bases para o espaço discretizado \mathcal{V}^h .

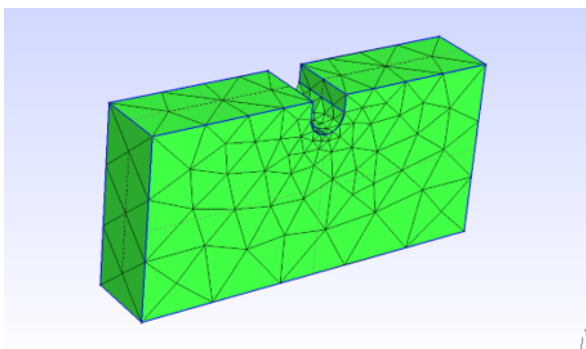
A metodologia se dá pela partição do domínio Ω em triângulos, quadriláteros, nos casos de problemas 2D ou em tetraedros, hexaedros, etc, nos casos de problemas 3D, como pode ser observado na Fig. 2.3.



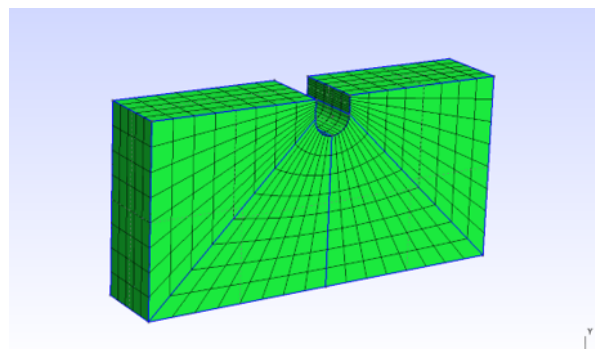
(a) Domínio bidimensional partido em triângulos



(b) Domínio bidimensional partido em quadriláteros



(c) Domínio tridimensional partido em tetraedros



(d) Domínio tridimensional partido em hexaedros

Figura 2.3: Partição de domínios bi e tridimensionais. Fonte: Mamiya (2021).

A partir dessa partição do domínio, denomina-se cada parte como um *elemento* e cada vértice dos elementos como um *nó* ou *ponto nodal*, como pode ser visualizado na Fig. 2.4. Podem-se definir nós também nas arestas, faces ou no interior dos elementos.

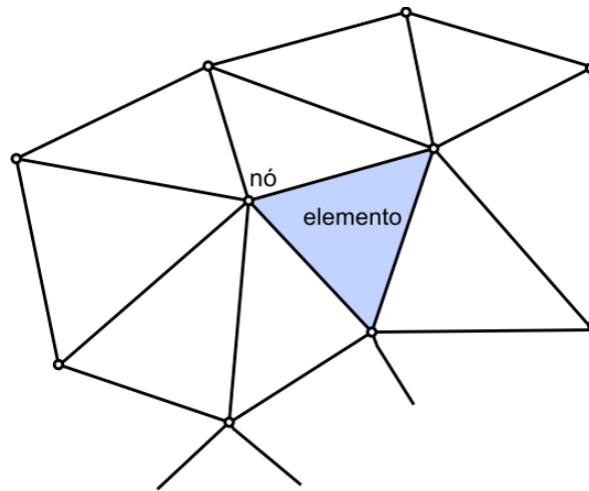


Figura 2.4: Representação esquemática dos nós e elementos do domínio repartido. Fonte: Mamiya (2021).

A par dessas informações, definem-se as funções de base para cada um dos elementos. Essas são funções polinomiais e assumem valor unitário no ponto nodal a que se referem, e valor nulo nos demais pontos nodais, ou seja:

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = 1, \text{ se } (x_i, y_i) \text{ são as coordenadas do nó } i, \\ N_i(x_j, y_j) = 0, \text{ se } (x_j, y_j) \text{ são as coordenadas dos demais pontos nodais, ou seja } j \neq i. \end{cases}$$

Isso pode ser melhor visualizado na Fig. 2.5

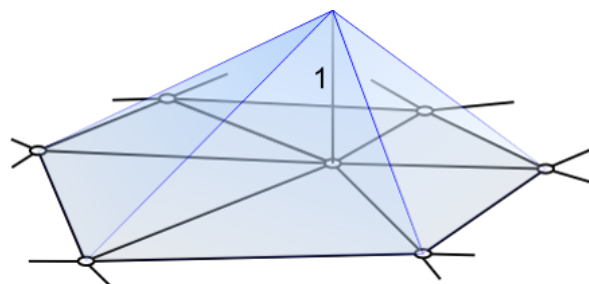


Figura 2.5: Representação esquemática da função de base $N_i(x, y)$. Fonte: Mamiya (2021).

Então, as componentes de \mathbf{v}^h , (v_x, v_y) , podem ser escritas como combinação linear das funções de base, tal que

$$v_x^h(x, y) = \sum v_{xi} N_i(x, y) \quad (2.71)$$

e

$$v_y^h(x, y) = \sum v_{yi} N_i(x, y), \quad (2.72)$$

em que os coeficientes v_{xi} e v_{yi} , que multiplicam as funções de base $N_i(x, y)$ previamente estabelecidas, são as incógnitas do problema de elementos finitos a ser solucionado.

Nesse contexto, o método de elementos finitos consiste em uma metodologia para construir as funções de base para o espaço de variações \mathcal{V}^h .

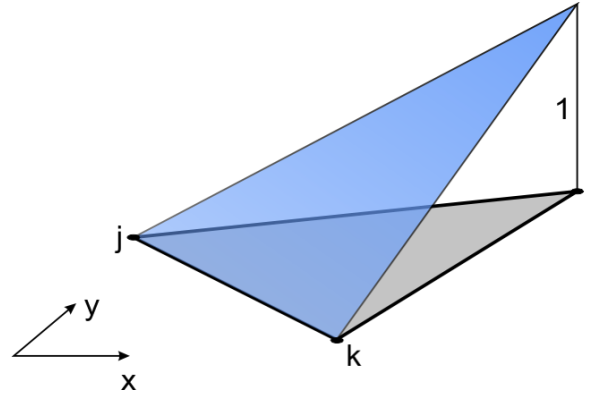


Figura 2.6: Elemento finito para a construção das funções de base. Fonte: Mamiya (2021).

Para o elemento da Fig. 2.6 a função de base é dada por uma função linear da forma,

$$N_i|_e(x, y) = a + bx + cy, \quad (2.73)$$

respeitando-se as condições de contorno

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = a + bx_i + cy_i = 1, \\ N_i(x_j, y_j) = a + bx_j + cy_j = 0, \\ N_i(x_k, y_k) = a + bx_k + cy_k = 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

A solução desse sistema fornece:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\Delta}(x_j y_k - x_k y_j), \\ b = \frac{1}{\Delta}(y_j - y_k), \\ c = \frac{1}{\Delta}(x_k - x_j), \end{cases} \quad (2.75)$$

em que

$$\Delta = x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j). \quad (2.76)$$

De posse das funções de base, calcula-se a matriz de rigidez a partir das derivadas parciais das funções de base. Para o elemento triangular em questão, representado na Fig. 2.6, têm-se derivadas constantes:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}|_e = b \quad e \quad \frac{\partial N_i}{\partial y}|_e = c. \quad (2.77)$$

Em problemas planos, os elementos finitos podem ser triangulares ou quadrilaterais. Dependendo da geometria e do número de nós do elemento finito, definem-se funções de base específicas, que podem ser polinômios lineares, quadráticos ou de ordem superior, dentro de cada elemento. Este trabalho se desenvolve sobre elementos quadrilaterais descritos por

funções polinomiais lineares e quadráticas. Em seguida esses elementos serão apresentados em detalhe.

Capítulo 3

Elementos quadrilaterais com funções de base lineares e quadráticas

Como foi abordado na Seção 2.6 deste trabalho, o Método de Elementos Finitos propõe uma metodologia para a construção das funções de base. Essas funções de base são funções polinomiais que podem ser lineares ou quadráticas. O exemplo mostrado na Seção 2.6 se refere a uma função de base linear triangular, mas são interesse de estudo neste projeto as funções de base lineares e quadráticas que descrevem os elementos quadrilaterais.

3.1 Matriz de rigidez

No caso de elementos bidimensionais, como é o caso dos quadrilaterais abordados neste capítulo, a matriz de rigidez é dada por

$$\mathbf{K} = \int_x \int_y \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dy \, dx. \quad (3.1)$$

Sabe-se que as componentes do operador deformação-deslocamento volumétrico, \mathbf{B} , são as funções de base. Logo, é necessário definir essas funções para os elementos quadrilaterais.

3.1.1 Elemento quadrilateral com 4 nós

Os elementos quadrilaterais com 4 nós são elementos que possuem 4 vértices com 1 ponto nodal em cada vértice, como o representado na Fig. 3.1.

A função de base que descreve esse elemento é uma função bilinear dada por

$$N_i|_e(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy. \quad (3.2)$$

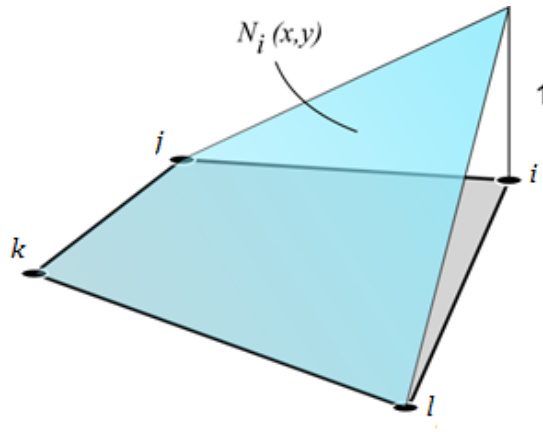


Figura 3.1: Elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).

Observa-se para esse caso, diferentemente do elemento triangular, que as derivadas parciais das funções de base, bem como o integrando da matriz de rigidez não são constantes. Além disso, os limites de integração, x e y , são variáveis, como é observado na Fig. 3.2 que mostra a região de integração do elemento quadrilateral com 4 nós.

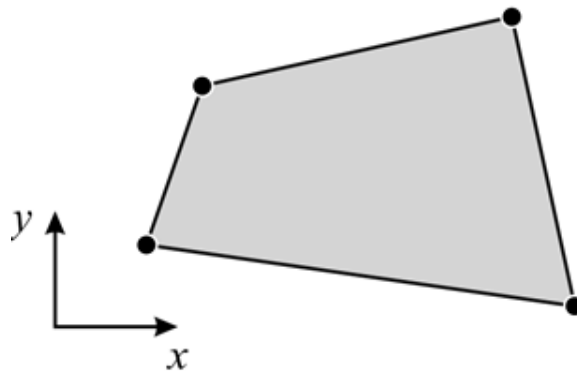


Figura 3.2: Região de integração do elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).

Pode ser conveniente calcular a integral da matriz de rigidez sobre um quadrado biunitário, nos termos das coordenadas do sistema local (ξ, η) , para facilitar a integração desse elemento, em que $\xi, \eta \in [-1, 1]$. Nesse contexto, faz-se uma mudança de variáveis, como é ilustrado na Fig. 3.3.

Dessa forma, a integral é escrita com limites de integração fixos em cada dimensão como

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) j(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (3.3)$$

em que $j(\xi, \eta)$ é o determinante da matriz Jacobiana do mapeamento $(d\xi, d\eta) \mapsto (dx, dy)$, ou seja,

$$j(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

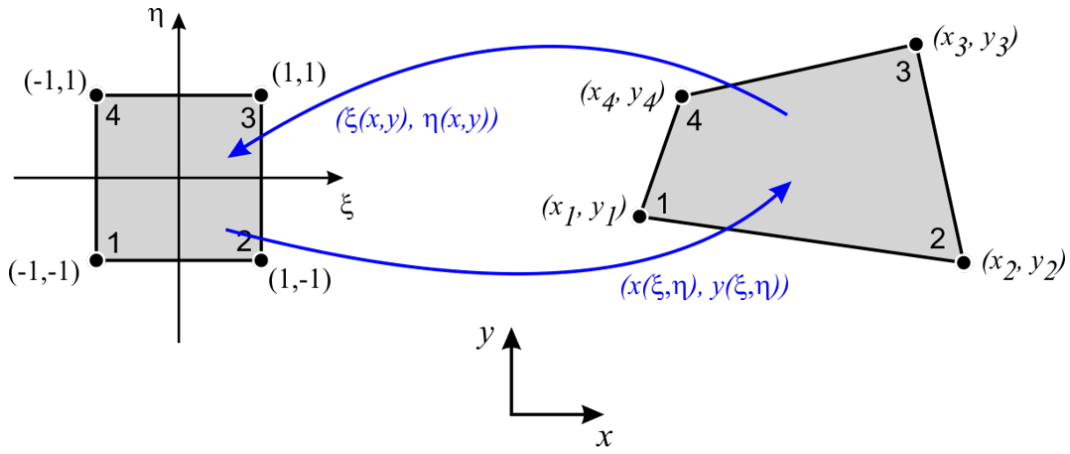


Figura 3.3: Representação do elemento quadrilateral com 4 nós nas coordenadas dos sistemas local (ξ, η) e global (x, y) . Fonte: Mamiya (2021).

Assim, as funções de base, $N_i(\xi, \eta)$, que descrevem esse elemento em coordenadas do sistema local, são dadas por

$$N_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta, \quad (3.5)$$

respeitando-se as condições de contorno

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Aplicando as condições de contorno da Eq. (3.6) na Eq. (3.5), obtêm-se as funções de base associadas a cada nó do elemento quadrilateral com 4 nós. Essas funções polinomiais são dadas pelas expressões

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (3.7)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (3.8)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (3.9)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \quad (3.10)$$

As derivadas parciais dessas funções, em relação a ξ e η , são dadas por

$$N_{1,\xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta), \quad (3.11)$$

$$N_{2,\xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta), \quad (3.12)$$

$$N_{3,\xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta), \quad (3.13)$$

$$N_{4,\xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta), \quad (3.14)$$

$$N_{1,\eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi), \quad (3.15)$$

$$N_{2,\eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi), \quad (3.16)$$

$$N_{3,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi), \quad (3.17)$$

$$N_{4,\eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi). \quad (3.18)$$

As derivadas parciais das funções de base em relação a x e y , que compõem a matriz \mathbf{B} , podem ser calculadas como

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

em que

$$j = \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

e

$$x_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_i^4 x_i N_{i,\xi}(\xi, \eta), \quad x_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_i^4 x_i N_{i,\eta}(\xi, \eta), \quad (3.21)$$

$$y_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_i^4 y_i N_{i,\xi}(\xi, \eta), \quad y_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_i^4 y_i N_{i,\eta}(\xi, \eta). \quad (3.22)$$

3.1.2 Elemento quadrilateral com 8 nós

Os elementos quadrilaterais com 8 nós são elementos que possuem 1 ponto nodal em cada vértice e 1 ponto nodal no meio de cada aresta.

Assim como o elemento quadrilateral com 4 nós, pode ser conveniente descrever o elemento quadrilateral com 8 nós utilizando-se coordenadas do sistema local (ξ, η) , fazendo-se uma mudança de variáveis para as coordenadas do quadrado biunitário, como ilustrado na

Fig. 3.4.

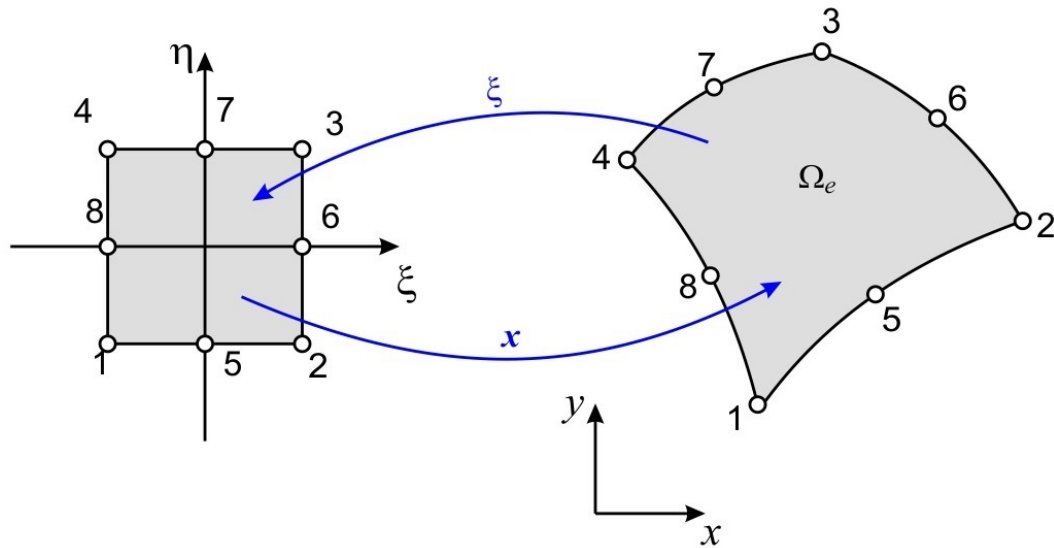


Figura 3.4: Representação do elemento quadrilateral com 8 nós nas coordenadas dos sistemas local (ξ, η) e global (x, y) . Fonte: Mamiya (2021).

As funções de base, $N_i(\xi, \eta)$, que descrevem esse elemento em coordenadas do sistema local, são dadas por

$$N_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2\eta + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2 + a_8\eta^2, \quad (3.23)$$

respeitando-se as condições de contorno

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (3.24)$$

de modo que cada função de base do elemento assume uma forma, conforme é ilustrado na Fig. 3.5.

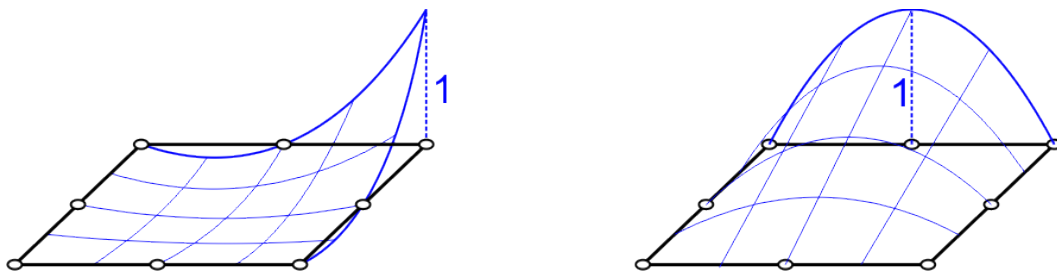


Figura 3.5: Funções de base do elemento, associados aos nós de vértices e de arestas. Fonte: Mamiya (2021).

Respeitando as condições de contorno da Eq. (3.24), obtêm-se as funções de base associadas a cada nó do elemento quadrilateral de 8 nós. Essas funções polinomiais são dadas

pelas expressões

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) (-\xi - \eta - 1), \quad (3.25)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) (\xi - \eta - 1), \quad (3.26)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) (\xi + \eta - 1), \quad (3.27)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) (-\xi + \eta - 1), \quad (3.28)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta), \quad (3.29)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2), \quad (3.30)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta), \quad (3.31)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2). \quad (3.32)$$

As derivadas parciais dessas funções, em relação a ξ e η , são dadas por

$$N_{1,\xi} = \frac{1}{4} (2\xi + \eta) (1 - \eta), \quad (3.33)$$

$$N_{2,\xi} = \frac{1}{4} (2\xi - \eta) (1 - \eta), \quad (3.34)$$

$$N_{3,\xi} = \frac{1}{4} (2\xi + \eta) (1 + \eta), \quad (3.35)$$

$$N_{4,\xi} = \frac{1}{4} (2\xi - \eta) (1 + \eta), \quad (3.36)$$

$$N_{5,\xi} = -\xi (1 - \eta), \quad (3.37)$$

$$N_{6,\xi} = \frac{1}{2} (1 - \eta^2), \quad (3.38)$$

$$N_{7,\xi} = -\xi (1 + \eta), \quad (3.39)$$

$$N_{8,\xi} = -\frac{1}{2} (1 - \eta^2), \quad (3.40)$$

$$N_{1,\eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(\xi + 2\eta), \quad (3.41)$$

$$N_{2,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(-\xi + 2\eta), \quad (3.42)$$

$$N_{3,\eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(\xi + 2\eta), \quad (3.43)$$

$$N_{4,\eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(-\xi + 2\eta), \quad (3.44)$$

$$N_{5,\eta} = -\frac{1}{2}(1 - \xi^2), \quad (3.45)$$

$$N_{6,\eta} = -(1 + \xi)\eta, \quad (3.46)$$

$$N_{7,\eta} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2), \quad (3.47)$$

$$N_{8,\eta} = -(1 - \xi)\eta. \quad (3.48)$$

As derivadas parciais das funções de base em relação a x e y , que compõem a matriz \mathbf{B} , podem ser calculadas como

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

em que

$$j = \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

e

$$x_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_i^8 x_i N_{i,\xi}(\xi, \eta), \quad x_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_i^8 x_i N_{i,\eta}(\xi, \eta), \quad (3.51)$$

$$y_{,\xi}(\xi, \eta) = \sum_i^8 y_i N_{i,\xi}(\xi, \eta), \quad y_{,\eta}(\xi, \eta) = \sum_i^8 y_i N_{i,\eta}(\xi, \eta). \quad (3.52)$$

3.1.3 Solução numérica das integrais

O Método dos Elementos Finitos envolve cálculos de integrais. Pode ser conveniente que as soluções das integrais sobre cada elemento Ω_e sejam calculadas numericamente, ou seja, pode-se aproximar a integral com a quadratura de Gauss, dada por

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \cong \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\tilde{\xi}_l) W_l, \quad (3.53)$$

em que n_{int} é o número de pontos de integração, $\tilde{\xi}_l$ é a coordenada do l -ésimo ponto de integração e W_l é o peso do l -ésimo ponto de integração.

Existem diversas fórmulas para integração numérica disponíveis na literatura, tais como a Regra do Trapézio, as Regras de Simpson, etc. No entanto, como mencionado em Hughes (1987, p. 141), o método de integração de Gauss é ideal porque fornece a melhor aproximação considerando-se o menor número de pontos de integração: alcança-se acurácia de ordem $O(2n_{int})$ para n_{int} pontos de integração.

3.1.3.1 Solução numérica da matriz de rigidez dos elementos quadrilaterais

Para a solução do problema de equilíbrio na sua forma variacional, é necessário calcular a matriz de rigidez sobre cada elemento Ω_e do domínio Ω . A integração da matriz de rigidez, calculada numericamente empregando-se a quadratura de Gauss, sobre o elemento biunitário, pode ser expressa como

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} j(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{b=1}^{n_{int}} \sum_{a=1}^{n_{int}} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} j(\xi, \eta)) (\bar{\xi}_a, \bar{\eta}_b) w_a w_b, \quad (3.54)$$

em que w_a e w_b são os pesos associados a cada ponto de Gauss, em cada direção, e n_{int} é a quantidade de pontos de integração.

3.1.4 Integração plena e reduzida para o elemento quadrilateral com 4 nós

Em problemas de elasticidade linear plana em que se usam elementos quadrilaterais com 4 nós, pode-se aproximar a solução empregando integração numérica com 4 pontos de Gauss – 2 em cada direção, ξ e η (integração plena), como mostrado na Fig. 3.6 ou com 1 ponto de Gauss (integração reduzida), como ilustrado na Fig. 3.7.

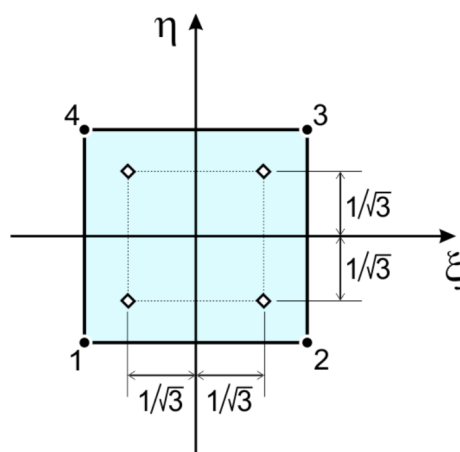


Figura 3.6: Pontos de Gauss para integração plena em elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).

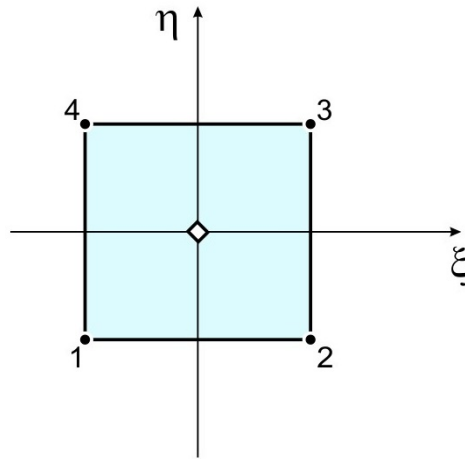


Figura 3.7: Pontos de Gauss para integração reduzida em elemento quadrilateral com 4 nós. Fonte: Mamiya (2021).

Empregando 2 pontos de Gauss em cada direção (integração plena), de acordo com o método da Quadratura de Gauss, os pesos associados aos pontos de Gauss na integração numérica são os elencados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 4 nós empregando-se integração plena.

a, b	$\bar{\xi}_a$	$\bar{\eta}_b$	w_a, w_b
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Empregando 1 ponto de Gauss em cada direção (integração reduzida), de acordo com o método da Quadratura de Gauss, o procedimento é o mesmo que o do caso da integração plena, mas, como só se tem 1 ponto de integração, o peso se altera, como mostrado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 4 nós empregando-se integração reduzida.

a, b	$\bar{\xi}_a$	$\bar{\eta}_b$	w_a, w_b
1	0	0	2

3.1.5 Integração plena e reduzida para o elemento quadrilateral com 8 nós

No caso dos elementos quadrilaterais com 8 nós, pode-se aproximar a solução empregando integração numérica com 9 pontos de Gauss – 3 em cada direção, ξ e η (integração plena), como mostrado na Fig. 3.8 ou com 4 pontos de Gauss – 2 em cada direção, ξ e η (integração reduzida), como ilustrado na Fig. 3.9.

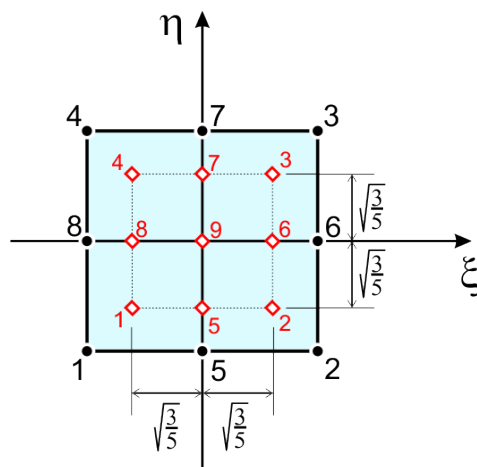


Figura 3.8: Pontos de Gauss para integração plena em elemento quadrilateral com 8 nós. Fonte: Mamiya (2021).

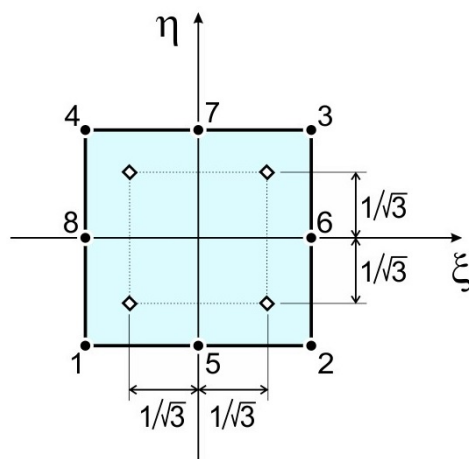


Figura 3.9: Pontos de Gauss para integração reduzida em elemento quadrilateral com 8 nós. Fonte: Mamiya (2021).

Empregando 3 pontos de Gauss em cada direção (integração plena), de acordo com o método da Quadratura de Gauss, os pesos associados aos pontos de Gauss na integração numérica são os elencados na Tabela 3.3.

Empregando 4 pontos de Gauss em cada direção (integração reduzida), as coordenadas e os pesos para o elemento quadrilateral com 8 nós com integração reduzida são os mesmos do elemento do elemento quadrilateral com 4 nós, elencados na Tabela 3.1.

Tabela 3.3: Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss do elemento quadrilateral com 8 nós empregando-se integração plena.

a, b	$\bar{\xi}_a$	$\bar{\eta}_b$	w_a, w_b
1	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
2	0	0	$\frac{8}{9}$
3	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

3.2 Vetor das forças de contato

Na Seção 2.5 foi apresentado o vetor de carregamentos. Esse vetor é composto pelas integrais das forças de campo, das forças de contato e dos deslocamentos prescritos. O vetor das forças de contato é representado na Eq. (3.55). Para efeito de simplificação, considera-se que a densidade de força de contato, \mathbf{h} , é constante sobre cada elemento.

$$\mathbf{F}_{c,e} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T(x, y) \mathbf{h} d\Gamma \quad (3.55)$$

Para a integração das forças de contato também se emprega uma mudança de variáveis das coordenadas (x, y) do contorno para a variável local $\xi \in [-1, 1]$. Desse modo, a Eq. (3.55) é reescrita, em função da coordenada local (ξ) , como

$$\mathbf{F}_{c,e} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T(x, y) \mathbf{h} d\Gamma = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(x(\xi), y(\xi)) \mathbf{h} \|\mathbf{x}_{,\xi}(\xi)\| d\xi, \quad (3.56)$$

em que

$$\mathbf{x}(\xi) = \begin{bmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{,\xi}(\xi) = \begin{bmatrix} x_{,\xi}(\xi) \\ y_{,\xi}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

3.2.1 Vetor das forças de contato no elemento quadrilateral com 4 nós

A Fig. 3.10 ilustra a mudança de variáveis para o contorno do elemento quadrilateral com 4 nós. As coordenadas no contorno podem ser descritas em função de um sistema de coordenadas local $\xi \in [-1, 1]$ como

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 x_i N_i(\xi), \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^2 y_i N_i(\xi), \quad (3.58)$$

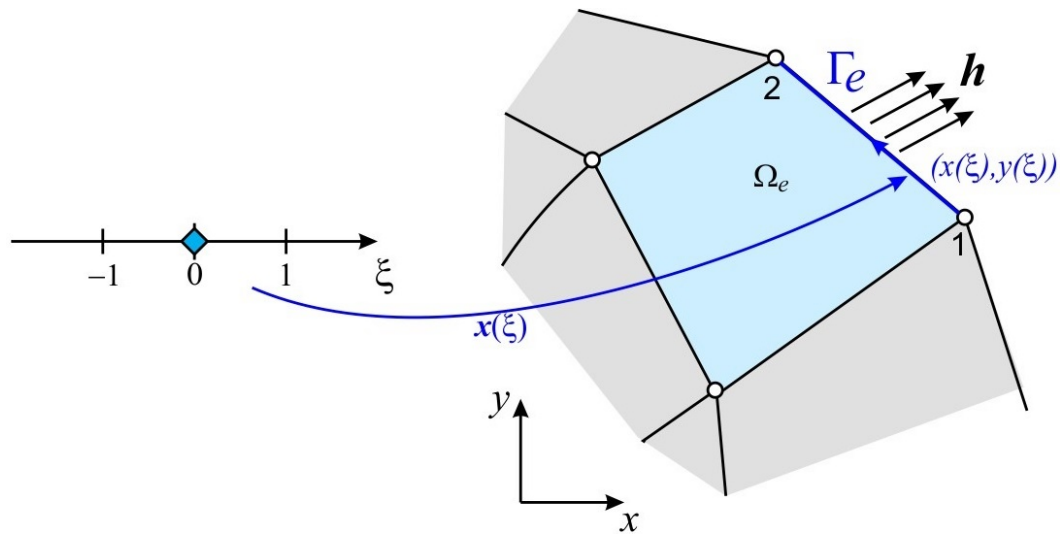


Figura 3.10: Força de contato constante no contorno do elemento quadrilateral com 4 nós nos sistemas de coordenadas local ξ e globais (x, y) com 1 ponto de Gauss. Fonte: Mamiya (2021).

em que as funções de base,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (3.59)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (3.60)$$

são ilustradas na Fig. 3.11.

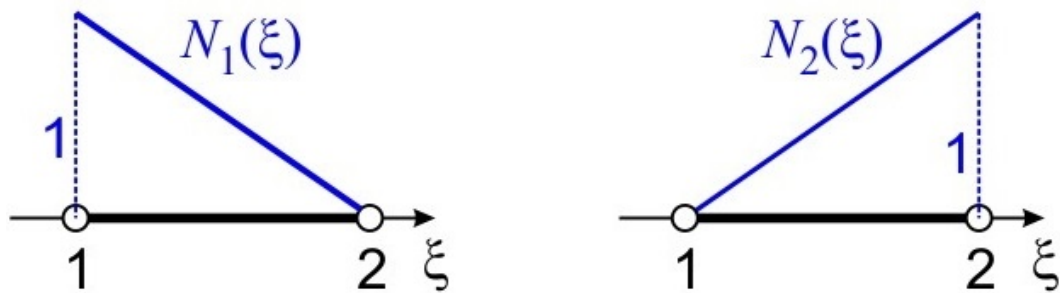


Figura 3.11: Funções de base no contorno com 2 nós. Fonte: Mamiya (2021).

As derivadas parciais das funções de base $N_i(\xi)$, em relação a ξ , são

$$N_{1,\xi} = -\frac{\xi}{2}, \quad N_{2,\xi} = \frac{\xi}{2}. \quad (3.61)$$

As derivadas $x_{,\xi}$ e $y_{,\xi}$, por sua vez, são

$$x_{,\xi}(\xi) = \sum_{i=1}^2 x_i N_{i,\xi}(\xi), \quad y_{,\xi}(\xi) = \sum_{i=1}^2 y_i N_{i,\xi}(\xi). \quad (3.62)$$

Assim, a Eq. (3.56), do vetor de forças de contato aplicada no contorno, integrada em ξ , é expressa por

$$\mathbf{F}_{c,e} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(x(\xi), y(\xi)) \mathbf{h} \|\mathbf{x}_{,\xi}(\xi)\| d\xi \approx 2 \mathbf{N}^T(0) \mathbf{h} \|\mathbf{x}_{,\xi}(0)\|. \quad (3.63)$$

3.2.2 Vetor das forças de contato no elemento quadrilateral com 8 nós

A Fig. 3.12 ilustra a mudança de variáveis para o contorno do elemento quadrilateral com 8 nós.

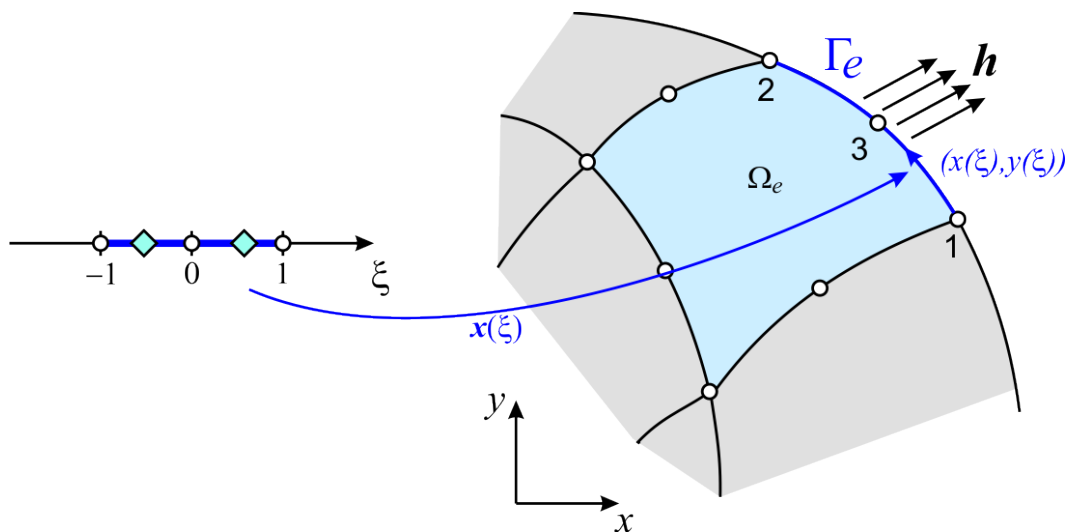


Figura 3.12: Força de contato constante no contorno do elemento quadrilateral com 8 nós nos sistemas de coordenadas local ξ e global (x, y) com 2 pontos de Gauss. Fonte: Mamiya (2021).

As coordenadas no contorno podem ser descritas em função de um sistema de coordenadas local $\xi \in [-1, 1]$ como

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 x_i N_i(\xi), \quad y(\xi) = \sum_{i=1}^3 y_i N_i(\xi), \quad (3.64)$$

em que as funções de base,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi), \quad (3.65)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2 + \xi), \quad (3.66)$$

$$N_3(\xi) = 1 - \xi^2, \quad (3.67)$$

são ilustradas na Fig. 3.13.

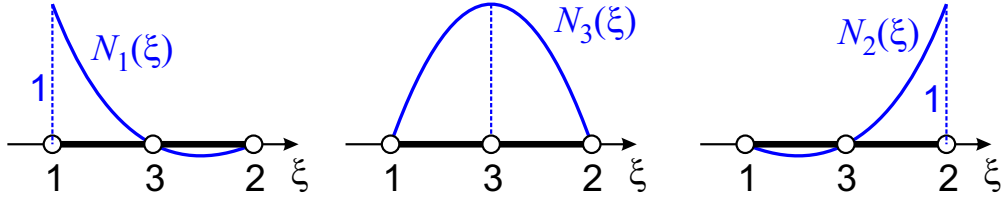


Figura 3.13: Funções de base no contorno com 3 nós. Fonte: Mamiya (2021).

As derivadas parciais das funções de base $N_i(\xi)$, em relação a ξ , são

$$N_{1,\xi} = \xi - \frac{1}{2}, \quad N_{2,\xi} = \xi + \frac{1}{2}, \quad N_{3,\xi} = -2\xi. \quad (3.68)$$

As derivadas $x_{,\xi}$ e $y_{,\xi}$ são

$$x_{,\xi}(\xi) = \sum_{i=1}^3 x_i N_{i,\xi}(\xi), \quad y_{,\xi}(\xi) = \sum_{i=1}^3 y_i N_{i,\xi}(\xi). \quad (3.69)$$

Assim, a Eq. (3.56), do vetor de forças de contato aplicada no contorno, integrada em ξ , é expressa por

$$\mathbf{F}_{c,e} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(x(\xi), y(\xi)) \mathbf{h} \|\mathbf{x}_{,\xi}(\xi)\| d\xi \approx \sum_{a=1}^2 \mathbf{N}^T(\bar{\xi}_a) \mathbf{h} \|\mathbf{x}_{,\bar{\xi}_a}(\xi)\| w_a, \quad (3.70)$$

em que os pesos associados aos pontos de Gauss na integração numérica são os elencados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Pesos e coordenadas associados aos pontos de Gauss no contorno do elemento quadrilateral de 8 nós.

a	$\bar{\xi}_a$	w
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Capítulo 4

Locking e Hourglass

O presente capítulo apresenta os dois efeitos computacionais espúrios que ocorrem na simulação de elementos finitos e levam as análises a resultados não coerentes, associados à rigidez insuficiente ou excessiva do elemento sob condições de deformação a volume constante. Esses erros na acurácia das soluções estão associados aos métodos de aproximação de soluções, como é o caso do método de elementos finitos.

4.1 *Locking*

O *locking*, ou travamento, é um efeito computacional espúrio, representado por uma rigidez excessiva do sólido, quando a formulação não consegue descrever adequadamente as deformações de materiais incompressíveis em nível do elemento.

Esse efeito pode ser visualizado na Fig. 4.1, que ilustra dois elementos planos triangulares sob deformação isocórica. Para que a deformação seja incompressível, o elemento em questão, deve manter a área ($A = base \times altura$) inalterada, mesmo sob distorção. Respeitando-se essa condição, na primeira imagem da figura, observa-se, então, que o nó superior direito do elemento possui apenas um grau de liberdade (deslocamento vertical). O mesmo ocorre para o nó superior do elemento ilustrado na imagem do meio, em que o grau de liberdade é apenas de deslocamento horizontal. Quando se unem os dois elementos, com o nó superior direito comum a ambos, o nó passa a não ter grau de liberdade, de modo que a solução resulta em uma rigidez sem significado físico, que caracteriza esse efeito espúrio de deformação, denominado travamento.

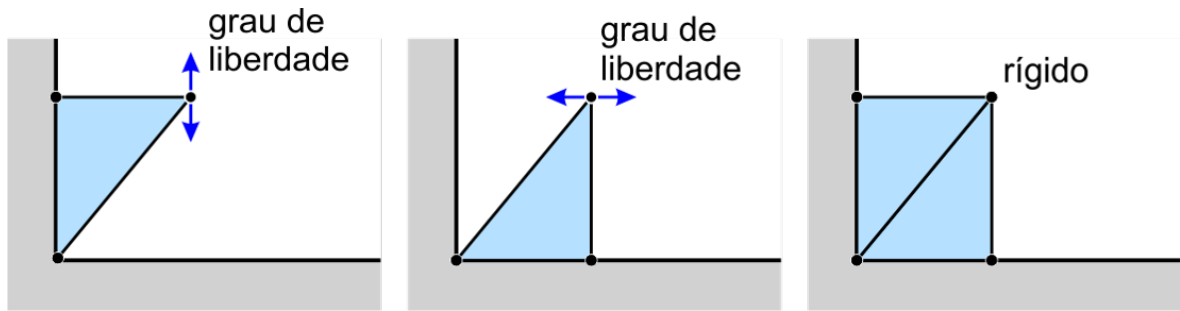


Figura 4.1: Representação da rigidez excessiva de um sistema com dois elementos triangulares com deformação a volume constante. Fonte: Mamiya (2021).

4.2 Hourglass

Hourglass, ou mecanismo, é outro efeito computacional espúrio associado à deformações isocóricas sob estado plano de deformações. É percebido quando se considera integração reduzida de elementos quadrilaterais com 4 nós, em que é usado 1 ponto de Gauss (nas coordenadas $(\xi, \eta) = (0, 0)$) para se integrar as contribuições das forças.

O efeito do *hourglass* pode ser visualizado na Fig. 4.2.

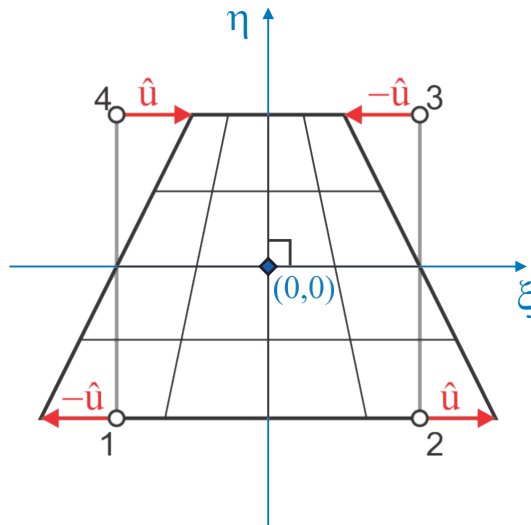


Figura 4.2: Modo espúrio de deformação cisalhante no elemento Q4: a distorção γ é nula no ponto de integração reduzida, $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Fonte: Mamiya (2021).

Por simplicidade, as coordenadas dos sistemas local e global são coincidentes, i.e., $x = \xi$ e $y = \eta$.

Observa-se que, sob o campo de deslocamentos ilustrado, todos os pontos do elemento, exceto os que estão sobre o eixo η , estão submetidos a deformação cisalhante, γ_{xy} , não nula. De fato, tem-se

$$\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x}, \quad (4.1)$$

em que $f_{,x} = \partial f / \partial x$, $f_{,y} = \partial f / \partial y$.

Considerando funções de base $N_a(x, y)$, $a = 1, \dots, 4$ sobre o elemento,

$$u_{x,y} = \sum_{a=1}^4 u_{x_a} N_{a,y}, \quad u_{y,x} = \sum_{a=1}^4 u_{y_a} N_{a,x}. \quad (4.2)$$

No exemplo ilustrado na Fig. 4.2, os deslocamentos nodais verticais u_{y_a} são nulos, e, portanto, $u_{y,x} = 0$. Os deslocamentos nodais horizontais, u_x , por sua vez, são expressos pelo vetor

$$[u_x] = \begin{bmatrix} -\hat{u} & \hat{u} & -\hat{u} & \hat{u} \end{bmatrix}^T. \quad (4.3)$$

E as derivadas parciais $N_{a,y}$ são

$$[N_{,y}](\xi, \eta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(1 - \xi) & -\frac{1}{4}(1 + \xi) & \frac{1}{4}(1 + \xi) & \frac{1}{4}(1 - \xi) \end{bmatrix}^T, \quad (4.4)$$

de modo que, no ponto de integração $(0, 0)$,

$$[N_{,y}](0, 0) = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}^T. \quad (4.5)$$

Retomando a Eq. (4.1), fazendo-se as devidas substituições, tem-se

$$\gamma_{xy}(0, 0) = [u_x]^T [N_{,y}](0, 0) = \begin{bmatrix} -\hat{u} & \hat{u} & -\hat{u} & \hat{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Desse modo, deduz-se que, no elemento em questão (sendo $u_{y_a} = 0$), o valor da deformação cisalhante, calculado em qualquer ponto em que $\xi = 0$, é nula, incluindo o ponto de integração reduzida. Conseqüentemente, o valor da tensão é também nulo. Assim, observa-se que o ponto de integração de Gauss não contabiliza a ação da distorção imposta sobre o elemento. Logo, não há acúmulo de energia de deformação, levando o elementos a se comportar de maneira espúria, como um mecanismo.

4.3 Relação entre a razão de restrição e o *locking*

É expresso em Hughes (1987, p. 209) que pode-se utilizar "uma abordagem heurística para determinar a habilidade de um elemento se comportar bem em aplicações incompressíveis ou quase incompressíveis". Apesar de não ser uma formulação com um base matemática forte e precisa, mostra-se como uma boa ferramenta para prever a tendência para *locking* do elemento em estudo.

A regra heurística é baseada na *razão de restrição*, r , definida como

$$r = \frac{n_{eq}}{n_c}, \quad (4.7)$$

em que n_{eq} representa o número de equações do problema e n_c representa o número de restrições de incompressibilidade – representado por

$$tr(\varepsilon) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = div \mathbf{u} = 0. \quad (4.8)$$

Se essa razão, para o problema discreto, mimetiza a situação que ocorre em um sistema contínuo, tem-se então uma situação ideal. Para o caso bidimensional, r deve assumir idealmente o valor de 2, uma vez que $n_{eq} = 2$ e $n_c = 1$. Nesse sentido, se o valor de r do sistema discreto em estudo não se aproxima do valor de r do sistema contínuo correspondente, tem-se as seguintes consequências – no caso de um sistema bidimensional:

- $r = 2$ – Relação ótima da razão de restrição;
- $r > 2$ – Restrição de incompressibilidade insuficiente – aproximação da condição de incompressibilidade pode ser ruim;
- $r < 2$ – Restrição de incompressibilidade em excesso – tendência para *locking*.

Para exemplificar, calcula-se o valor de r para o elemento quadrilateral com 4 nós, com integração reduzida e plena, ilustrados respectivamente nas Figs. 4.3 (b) e 4.3 (c).

Para encontrar o valor de n_c , é necessário observar, no caso do elemento quadrilateral com 4 nós, que

$$\mathbf{u}^h(x, y) = \begin{pmatrix} u_x^h(x(\xi), y(\eta)) \\ u_y^h(x(\xi), y(\eta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\xi 0} + b_{\xi 1}\xi + b_{\xi 2}\eta + b_{\xi 3}\xi\eta \\ b_{\eta 0} + b_{\eta 1}\xi + b_{\eta 2}\eta + b_{\eta 3}\xi\eta \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

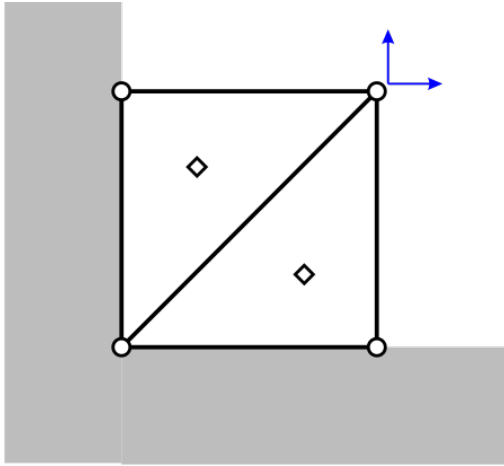
logo,

$$div \mathbf{u}^h = b_{\xi 1} + b_{\xi 3}\eta + b_{\eta 2} + b_{\eta 3}\xi = 0. \quad (4.10)$$

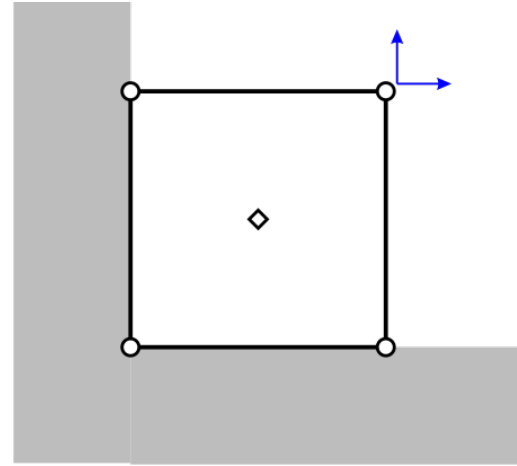
Nos casos em que o elemento é integrado com apenas um ponto de Gauss, $\xi = \eta = 0$, logo $n_c = 1$, dado que para a condição " $div \mathbf{u}^h = b_{\xi 1} + b_{\xi 3}\eta + b_{\eta 2} + b_{\eta 3}\xi = 0$ " ser satisfeita, apenas a condição

$$b_{\xi 1} + b_{\eta 2} = 0 \quad (4.11)$$

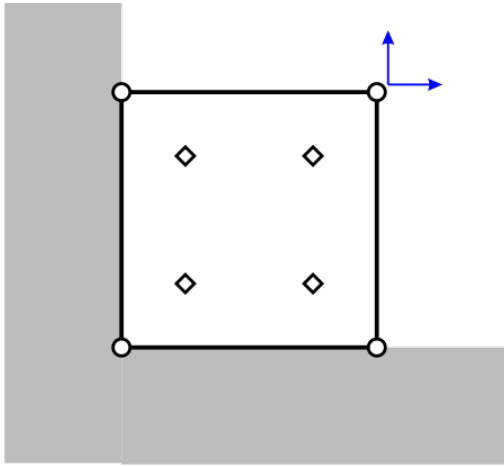
precisa ser verdadeira.



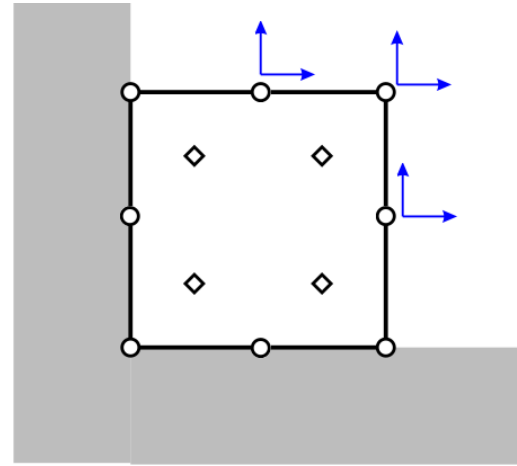
(a) Elemento triangular linear.



(b) Elemento quadrilateral com 4 nós e integração reduzida (1 ponto de Gauss).



(c) Elemento quadrilateral com 4 nós e integração plena (4 pontos de Gauss).



(d) Elemento quadrilateral com 8 nós e integração reduzida (4 pontos de Gauss).

Figura 4.3: Elementos clássicos. Fonte: Mamiya (2021).

Nos casos em que o elemento é integrado com 4 pontos de Gauss, $(\xi, \eta) \neq 0$, logo, para que " $div \mathbf{u}^h = b_{\xi 1} + b_{\xi 3}\eta + b_{\eta 2} + b_{\eta 3}\xi = 0$ " seja satisfeita, tem-se 3 equações de restrição, portanto $n_c = 3$:

$$\begin{cases} b_{\xi 1} + b_{\eta 2} = 0 \\ b_{\xi 3} = 0 \\ b_{\eta 3} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Nesse sentido, o cálculo de r para os casos das Figs. 4.3 (b) e 4.3 (c) é tal que:

- (b) – $n_{eq} = 2$ e $n_c = 1 \implies r = 2$;
- (c) – $n_{eq} = 2$ e $n_c = 3 \implies r = 2/3$.

4.4 Simulações para ilustração dos efeitos espúrios de deformação

É importante mencionar que o objetivo inicial deste trabalho era realizar a análise desses efeitos computacionais por meio do *software* comercial Ansys e estudar formas de controle no próprio *software* para evitar a incoerência nos resultados. Entretanto, por padrão, o Ansys aplica automaticamente ferramentas de controle dos efeitos espúrios de *locking* e *hourglass*. Tendo em vista os objetivos do presente estudo, encontrou-se dificuldade em desabilitar completamente os mecanismos de controle automático do Ansys. Nesse contexto, optou-se por uma mudança na metodologia dos estudos, passando-se a adotar o código acadêmico de elementos finitos EFS (MAMIYA, 2022), desenvolvido no departamento de Engenharia Mecânica da UnB, para a realização das simulações numéricas.

4.4.1 Efeito do *locking*

Inicialmente, para ilustrar o efeito espúrio de *locking* utilizou-se uma viga engastada na extremidade esquerda e com a aplicação de uma força, F , na extremidade direita com as seguintes características, como se visualiza na Fig. 4.4.

- Comprimento $L = 160 \text{ mm}$;
- Seção transversal retangular com altura $h = 40 \text{ mm}$ e base $b = 10 \text{ mm}$;
- Momento de inércia $I = \frac{bh^3}{12}$;
- Módulo de elasticidade $E = 200 \text{ GPa}$;
- Força $F = 4000 \text{ N}$.

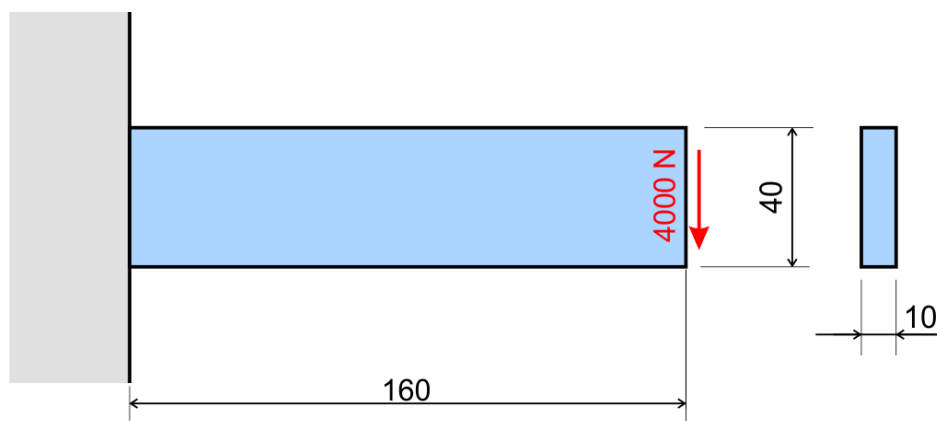


Figura 4.4: Representação esquemática de uma viga engastada. Fonte: Mamiya (2021).

A partir desse sistema, efetuou-se a solução analítica a fim de obter a maior deflexão da viga, ou seja, na extremidade mais distante do engastamento.

Sabe-se, portanto, que a deflexão da viga, $W(\xi)$, considerando $(\xi = x/L)$, é dada por

$$W(\xi) = \frac{FL^3}{EI} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right). \quad (4.13)$$

Portanto, a deflexão na extremidade mais distante do engatamento é

$$W(1) = 0,512 \text{ mm}.$$

Foi realizada, em contrapartida, a solução numérica desse exemplo, utilizando-se o **EFS**. Para essa simulação é necessário, portanto, definir alguns critérios que servem como dados para o código. São eles:

- Integração plena ou reduzida;
- Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3333$ ou $\nu = 0,4999$.

Nesse caso, efetuaram-se três simulações diferentes combinando-se esses critérios, como é mostrado nas Figs. 4.5, 4.6 e 4.7.

Na Fig. 4.5, em que $\nu = 0,4999$ e utilizou-se **integração plena**, observou-se que a deflexão na linha central da viga foi de $W(1) = 0.027 \text{ mm}$, o que representa um erro de aproximadamente 95% em relação ao valor encontrado analiticamente. Desse modo, nota-se que, quando foi empregada integração plena nesse exemplo, o sistema apresentou uma rigidez muito maior a flexão, o que se deve ao *locking* na simulação computacional.

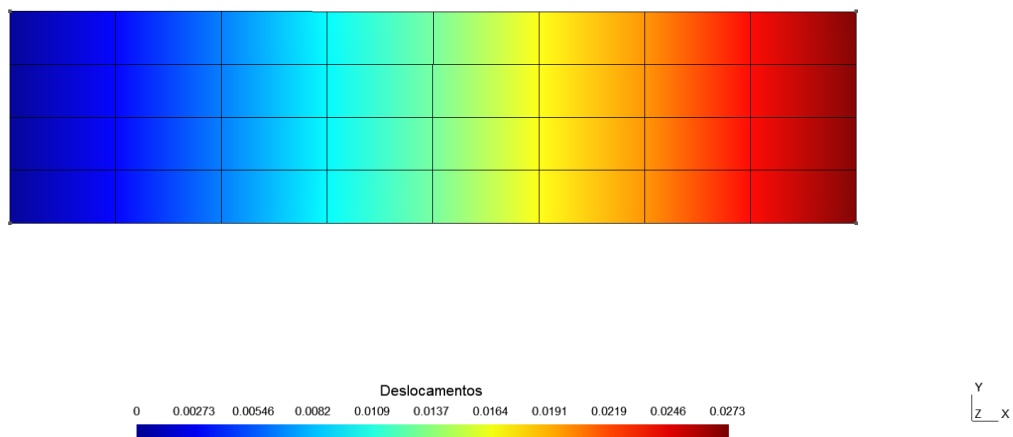


Figura 4.5: Simulação da deflexão da viga considerando-se integração plena e $\nu = 0,4999$. Fonte: Autoria própria.

Visando resolver esse efeito espúrio, emprega-se **integração reduzida** em um material ainda com $\nu = 0,4999$. Considera-se, portanto, apenas um ponto de Gauss para a integração numérica. Desse modo, o resultado obtido para a deflexão é expresso na Fig. 4.6, em que a deflexão na linha central da viga é $W(1) = 0.420 \text{ mm}$, o que representa um erro de

aproximadamente 18% em relação ao valor encontrado analiticamente. Presume-se que uma concordância maior com o resultado analítico pode ser obtida por meio de uma discretização mais refinada da malha, entretanto, o objetivo aqui é simplesmente ilustrar o efeito do *locking* em situação de deformação quase incompressível.

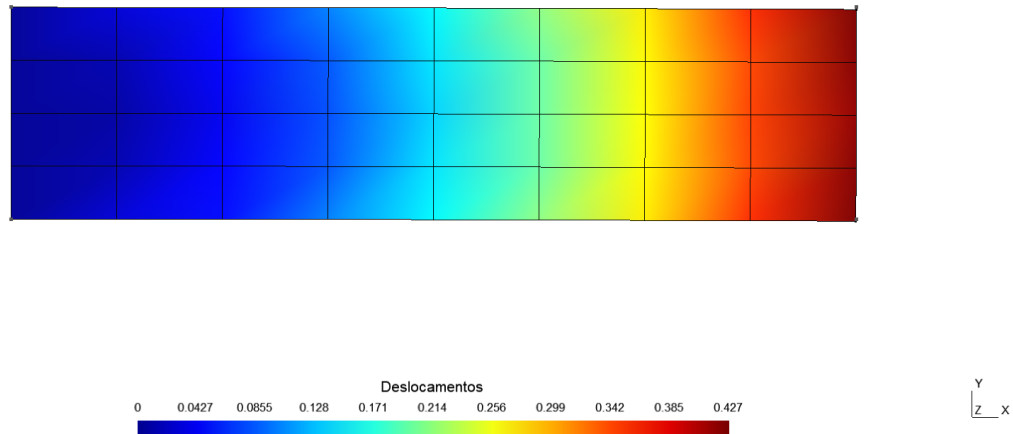


Figura 4.6: Simulação da deflexão da viga considerando-se integração reduzida e $\nu = 0,4999$. Fonte: Autoria própria.

Por fim, empregou-se uma simulação considerando-se **integração plena** em um material com $\nu = 0,3333$. Nesse caso, o resultado obtido para a deflexão é expresso na Fig. 4.7, em que a deflexão na linha central da viga é $W(1) = 0.422 \text{ mm}$, o que representa um erro de aproximadamente 17,5% em relação ao valor encontrado analiticamente.

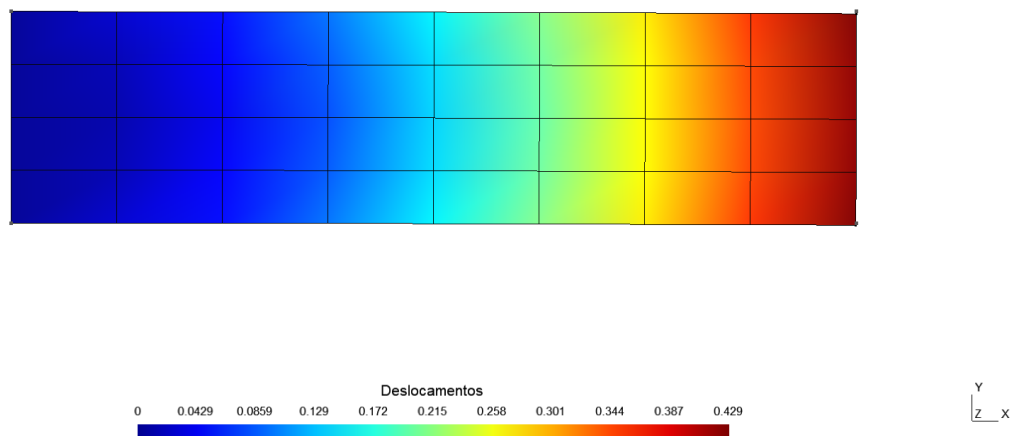


Figura 4.7: Simulação da deflexão da viga considerando-se integração plena e $\nu = 0,3333$. Fonte: Autoria própria.

Dessa maneira, para melhor visualização e comparação dos resultados, gerou-se um gráfico com os resultados das três soluções numéricas obtidas, juntamente com o resultado da solução analítica, como é mostrado na Fig. 4.8.

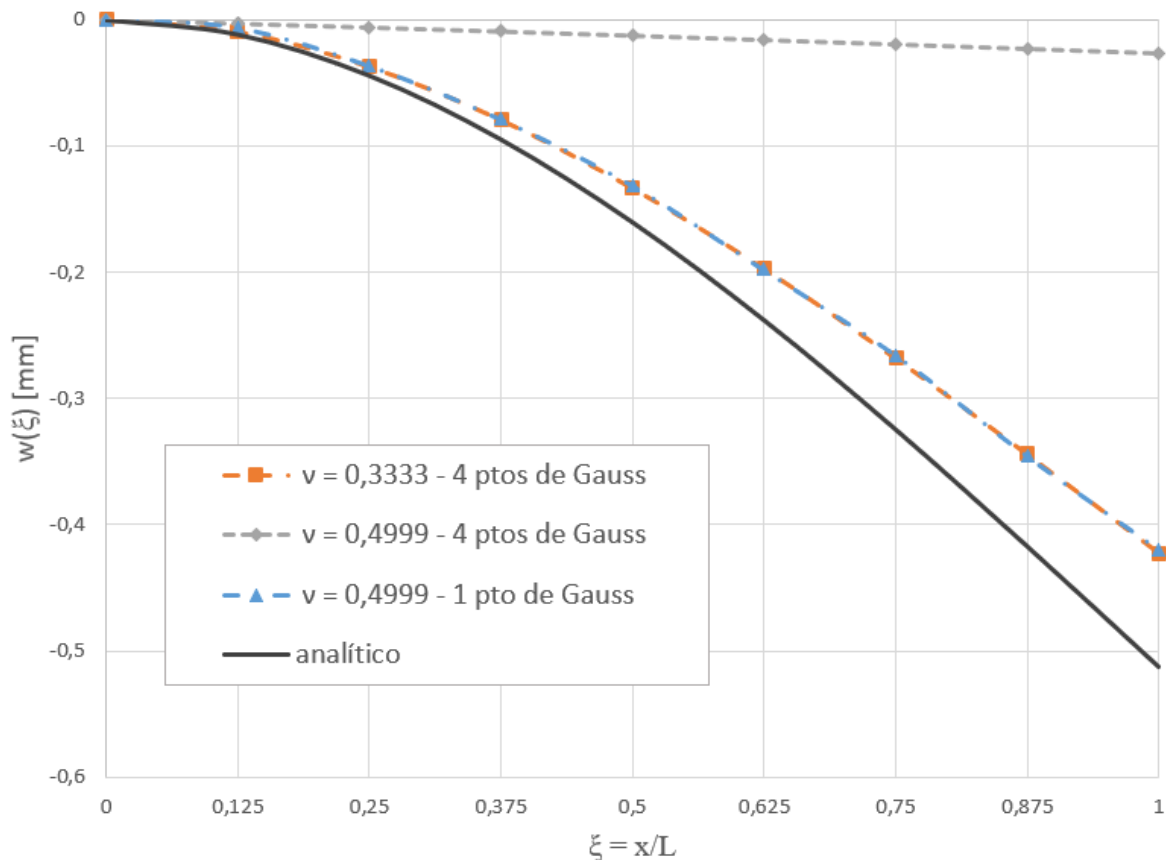


Figura 4.8: Gráfico comparativo das soluções numéricas e analítica para a deflexão da viga. Fonte: Autoria própria.

Desse modo, é possível reiterar as seguintes observações:

- No caso de deformações quase incompressíveis, $\nu = 0,4999$, a rigidez é excessiva quando se utiliza integração plena, caracterizando *locking*;
- Com integração reduzida o resultado se aproxima mais do analítico;
- Quando $\nu = 0,3333$, não se tem deformação quase incompressível e portanto não há problema em se utilizar integração plena;
- As diferenças, ainda presentes, podem ser justificadas pelo baixo refinamento da malha.

4.4.2 Efeito do *hourglass*

Para ilustrar o *hourglass*, efetuou-se uma simulação numérica, empregando-se elementos quadrilaterais com 4 nós e integração reduzida, em um sólido quadrilateral de dimensão 2×2 . Esse sólido possui um apoio fixo no ponto nodal a esquerda e é imposto sobre ele um deslocamento prescrito de 0,1 no ponto nodal a direita, como pode ser observado na Fig. 4.9.

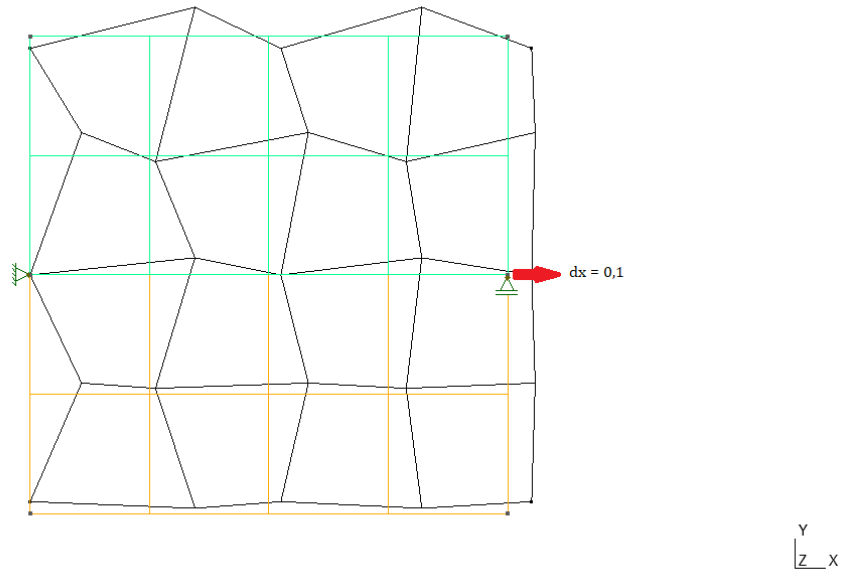


Figura 4.9: Representação esquemática do efeito do *hourglass* em um sólido quadrilateral. Fonte: Autoria própria.

A malha colorida na Fig. 4.9 é a representação da configuração material, enquanto a malha em preto é a representação espacial do sólido. Nesse contexto, observa-se na configuração deformada, que o material apresentou um modo espúrio de deformação, que é o *hourglass*, também conhecido como *checkerboard*. Esse tipo de deformação ocorre pelo fato de o sólido se comportar como um mecanismo, devido a um menor número de restrições associado ao modo de integração escolhido.

Dessa maneira, esse efeito pode ocorrer em algumas regiões de sistemas maiores, devido a restrições insuficientes. Nesse contexto, a integração reduzida, por vezes utilizada para se contornar o efeito do *locking*, pode levar a um outro erro nas simulações de elementos finitos, o *hourglass*.

Capítulo 5

Elemento com Formulação B-bar

Como observado no Capítulo 4, podem ocorrer efeitos espúrios nas soluções com o método de elementos finitos a depender do tipo de elemento e de integração que se usa. Desse modo foram propostos diversos elementos que corrigem esses efeitos espúrios (PIAN; SUMIHARA, 1984; SIMO; RIFAI, 1990). Este capítulo, apresenta a formulação **B-bar**, tal como apresentada por Hughes (1980), especificamente para estados planos de deformação.

5.1 Tensor de deformações – dedução das parcelas volumétrica e desviadora

O tensor de deformações lineares pode ser decomposto em uma parcela *volumétrica* e uma parcela *desviadora*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vol} = \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}. \quad (5.2)$$

Suas representações matriciais são dadas por

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{vol}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \frac{2}{3}\varepsilon_z - \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

No estado plano de deformações, as matrizes das Eqs. (5.3) e (5.4) podem ser escritas como

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{vol}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Pode ser conveniente representar esses tensores na forma vetorial. Assim, o tensor de deformação volumétrica é representado como

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{vol}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{vol} \\ \varepsilon_y^{vol} \\ \varepsilon_z^{vol} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon_x + \frac{1}{3}\varepsilon_y \\ \frac{1}{3}\varepsilon_x + \frac{1}{3}\varepsilon_y \\ \frac{1}{3}\varepsilon_x + \frac{1}{3}\varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1^{vol} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n_{en}}^{vol}] \mathbf{U}_e, \quad (5.7)$$

em que

$$\mathbf{B}_a^{vol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}N_{a,x} & \frac{1}{3}N_{a,y} \\ \frac{1}{3}N_{a,x} & \frac{1}{3}N_{a,y} \\ \frac{1}{3}N_{a,x} & \frac{1}{3}N_{a,y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, n_{en}. \quad (5.8)$$

e $\mathbf{U}_e = [u_{1x}, u_{1y}, \dots, u_{n_{en}x}, u_{n_{en}y}]^T$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento. $N_{a,x}$ e $N_{a,y}$ representam as derivadas parciais das funções de base $N_a(x, y)$, $a = 1, \dots, n_{en}$, respectivamente em relação a x e a y e n_{en} representa o número de nós por elemento.

Por sua vez, a representação vetorial do tensor de deformação desviadora é dada por

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y \\ -\frac{1}{3}\varepsilon_x + \frac{2}{3}\varepsilon_y \\ -\frac{1}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1^{dev} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n_{en}}^{dev}] \mathbf{U}_e, \quad (5.9)$$

em que

$$\mathbf{B}_a^{dev} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}N_{a,x} & -\frac{1}{3}N_{a,y} \\ -\frac{1}{3}N_{a,x} & \frac{2}{3}N_{a,y} \\ -\frac{1}{3}N_{a,x} & -\frac{1}{3}N_{a,y} \\ N_{a,y} & N_{a,x} \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, n_{en}. \quad (5.10)$$

5.2 Formulação B-bar

Observou-se no Capítulo 4 que o *locking* está associado à incapacidade de um elemento representar a deformação a volume constante, devido ao excesso de restrições do tipo $div \mathbf{u} = 0$. Empregar menos pontos de Gauss (integração reduzida) é uma forma de reduzir o número de restrições desse tipo no elemento, entretanto, porém, pode culminar no efeito *hourglass*. É nesse contexto que surge a proposição da Formulação B-bar.

A Formulação B-bar caracteriza-se pela substituição da matriz \mathbf{B}_a^{vol} da Eq. (5.8) por uma matriz modificada:

$$\bar{\mathbf{B}}_a^{vol} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\bar{N}_{a,x} & \frac{1}{3}\bar{N}_{a,y} \\ \frac{1}{3}\bar{N}_{a,x} & \frac{1}{3}\bar{N}_{a,y} \\ \frac{1}{3}\bar{N}_{a,x} & \frac{1}{3}\bar{N}_{a,y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Na matriz volumétrica modificada $\bar{\mathbf{B}}_a^{vol}$, as funções de base \bar{N}_a substituem as funções de base N_a . Cada escolha para as funções \bar{N}_a define uma possibilidade de implementação do elemento \bar{B} .

5.3 Elemento Q4 \bar{B}

No presente estudo, implementa-se a formulação B-bar para o elemento quadrilateral com 4 nós, em que os valores das derivadas parciais $\bar{N}_{a,x}$ e $\bar{N}_{a,y}$ dos termos associados à parcela volumétrica da Eq. (5.11) são dados por $N_{a,x}(0,0)$ e $N_{a,y}(0,0)$.

Isso se aplica no cálculo das forças internas de um elemento Ω_e ,

$$\mathbf{F}_{i,e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e d\Omega \quad (5.12)$$

$$= \int_{\Omega_e} (\bar{\mathbf{B}}_e^{vol} + \mathbf{B}_e^{dev})^T \mathbf{D} (\bar{\mathbf{B}}_e^{vol} + \mathbf{B}_e^{dev}) \mathbf{U}_e d\Omega. \quad (5.13)$$

Fazendo-se a distribuição, tem-se que

$$\mathbf{F}_{i,e} = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}_e^{vol T} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_e^{vol} \mathbf{U}_e d\Omega \quad (5.14)$$

$$+ \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}_e^{vol T} \mathbf{D} \mathbf{B}_e^{dev} \mathbf{U}_e d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{dev T} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_e^{vol} \mathbf{U}_e d\Omega \quad (5.15)$$

$$+ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{dev T} \mathbf{D} \mathbf{B}_e^{dev} \mathbf{U}_e d\Omega. \quad (5.16)$$

Então, para cálculo das forças internas de um elemento Ω_e , nota-se que:

- o termo (5.14) envolve apenas termos volumétricos, portanto é integrado na forma reduzida, ou seja, em $(\xi, \eta) = (0, 0)$;
- o termo (5.16) envolve apenas termos desviadores, logo deve ser integrado na forma plena;
- as integrais em (5.15) envolvem termos volumétricos e desviadores, associados respectivamente a integrações reduzidas e plenas.

Dessa forma, integra-se o termo (5.14) utilizando-se 1 ponto de Gauss, o termo (5.16), utilizando-se 4 pontos de Gauss e, para viabilizar a integração numérica dos termos (5.15), sabe-se que a integração reduzida com 1 ponto de Gauss equivale à integração plena de função constante, cujo valor é o calculado no ponto $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Logo,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 4 f(0, 0) = \sum_{i=1}^4 f(0, 0), \quad (5.17)$$

em que, a primeira igualdade se refere à integração reduzida com fator ponderador $w = 4$ e a segunda igualdade se refere a integração em 4 pontos de Gauss, com fator ponderador $w = 1$ mas com o integrando calculado em $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Assim, recuperando-se as Eqs. (5.12) e (5.13), a integração numérica do vetor das forças internas pode ser calculada como

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e d\Omega = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\bar{\mathbf{B}}_e^{vol}(0, 0) + \mathbf{B}_e^{dev}(\tilde{\xi}_{ij}, \tilde{\eta}_{ij}) \right)^T \mathbf{D} \left(\bar{\mathbf{B}}_e^{vol}(0, 0) + \mathbf{B}_e^{dev}(\tilde{\xi}_{ij}, \tilde{\eta}_{ij}) \right) \mathbf{U}_e, \quad (5.18)$$

em que as derivadas parciais $\bar{N}_{a,x}$ e $\bar{N}_{a,y}$ que compõem a matriz volumétrica modificada $\bar{\mathbf{B}}_a^{vol}$ do elemento quadrilateral com 4 nós são dadas por

$$\bar{N}_{a,x} = N_{a,x}(\xi = 0, \eta = 0), \quad \bar{N}_{a,y} = N_{a,y}(\xi = 0, \eta = 0). \quad (5.19)$$

É importante salientar que, no caso do elemento $Q4\bar{B}$, a matriz do operador deformação-deslocamento volumétrico tem dimensão $4 \times 2n_{en}$, em que n_{en} é o número de nós por elemento. Isso ocorre pois o tensor de deformações, no estado plano de deformação, só tem a componente ε_z anulada devido à soma da parcela volumétrica com a parcela desviadora. Como a construção do elemento $Q4\bar{B}$ envolve a substituição da matriz de volumétrica \mathbf{B}_a^{vol} pela matriz volumétrica modificada $\bar{\mathbf{B}}_a^{vol}$, a soma dessas duas parcelas não é mais nula. Dessa forma, é necessário incluir a linha da deformação na direção z ε_z na relação constitutiva.

Nesse sentido, para garantir a compatibilidade da operação matemática, é necessário também construir o tensor de elasticidade, \mathbf{D} , incluindo as dimensões associadas à deformação ε_z . Assim, tem-se a matriz 4×4 ,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

para representar o tensor de elasticidade.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

O presente capítulo apresenta os resultados obtidos a partir das simulações realizadas para se observar o comportamento de cada elemento estudado neste projeto. Os resultados fornecidos pelo elemento $Q4\bar{B}$ são comparados com os fornecidos pelos elementos Q4, Q4r, Q8 e Q8r, avaliando-se como cada elemento representa as deformações a volume constante.

6.1 Membrana de Cook

Para melhor ilustrar os efeitos do *locking* e do *hourglass*, utilizou-se um problema que é comumente utilizado como *benchmarking* – análise comparativa – para validação de programas de elementos finitos em relação a condições de incompressibilidade. Trata-se da **membrana de Cook**. (COOK, 1974)

Foi utilizado o exemplo de membrana de Cook com os dados encontrados na página da web do *CoFEA* (Cooperation and Finite Element Analysis), uma iniciativa que visa popularizar a aplicação de *software open-source* de simulação na resolução de problemas reais de engenharia, cujos autores são Polanski e Dudek (2020). Foram consideradas as propriedades do material listadas na Tabela 6.1 e a geometria, as dimensões e a carga apresentadas na Fig. 6.1.

Tabela 6.1: Valores de referência para as propriedades utilizadas no modelo do CoFEA

Módulo de Elasticidade	Coefficiente de Poisson
$E = 70 \text{ MPa}$	$\nu = 0,4999$

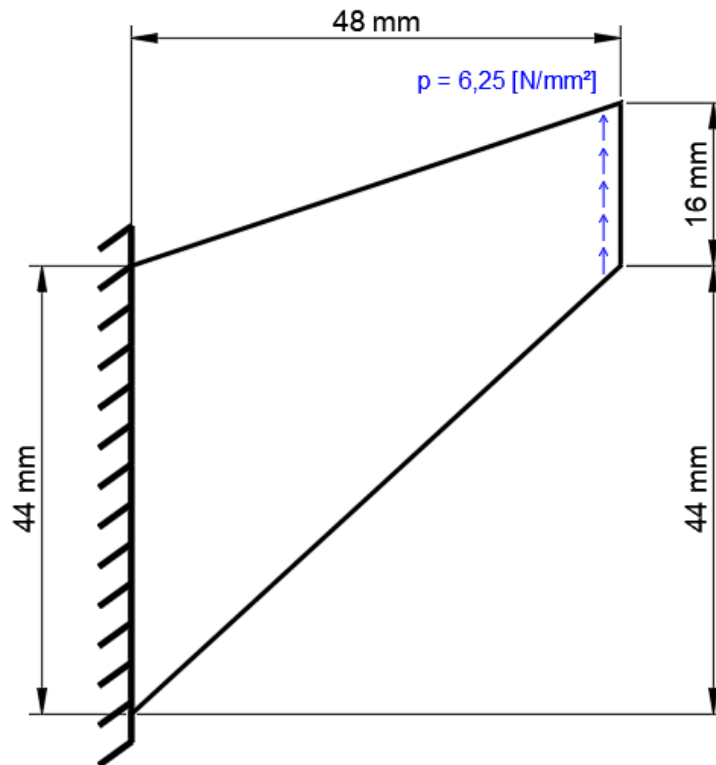


Figura 6.1: Membrana de Cook. Fonte: Autoria própria.

A partir desses parâmetros, simulou-se com o código **EFS** o comportamento mecânico da membrana de Cook empregando os elementos:

- Quadrilátero com 4 nós:
 - Com integração reduzida (1 ponto de Gauss) – **Q4r**;
 - Com integração plena (2×2 pontos de Gauss) – **Q4**;
 - Com formulação B-bar – **Q4 \bar{B}** ;
- Quadrilátero com 8 nós:
 - Com integração reduzida (2×2 pontos de Gauss) – **Q8r**;
 - Com integração plena (3×3 pontos de Gauss) – **Q8**.

Efetuararam-se simulações com esses elementos variando-se o grau de refinamento entre 3, 7, 11, 21 e 51 nós por direção. Os resultados para o grau de refinamento de 11 nós por direção é ilustrado nas Figs. 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 e 6.6.

Na Fig. 6.2 é apresentado o resultado do elemento Q4r. Verifica-se claramente o surgimento do *hourglass*, uma deformação que não possui um significado físico. Essa deformação excessiva, é resultante de uma rigidez reduzida do elemento, devido ao emprego de integração reduzida.

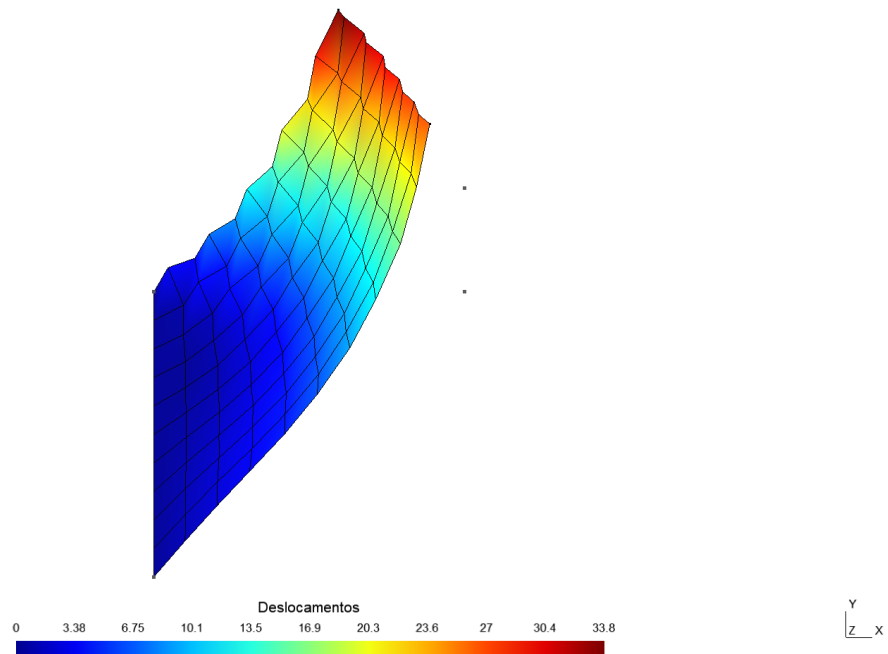


Figura 6.2: Simulação da viga de Cook com elemento Q4r e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.

Ilustra-se na Fig. 6.3 o comportamento da membrana de Cook associada ao elemento Q4. Observa-se nessa figura, comparando o resultado da deformação simulada com esse elemento em relação à simulada com os demais elementos, que a membrana apresenta uma rigidez excessiva, o que caracteriza *locking*.

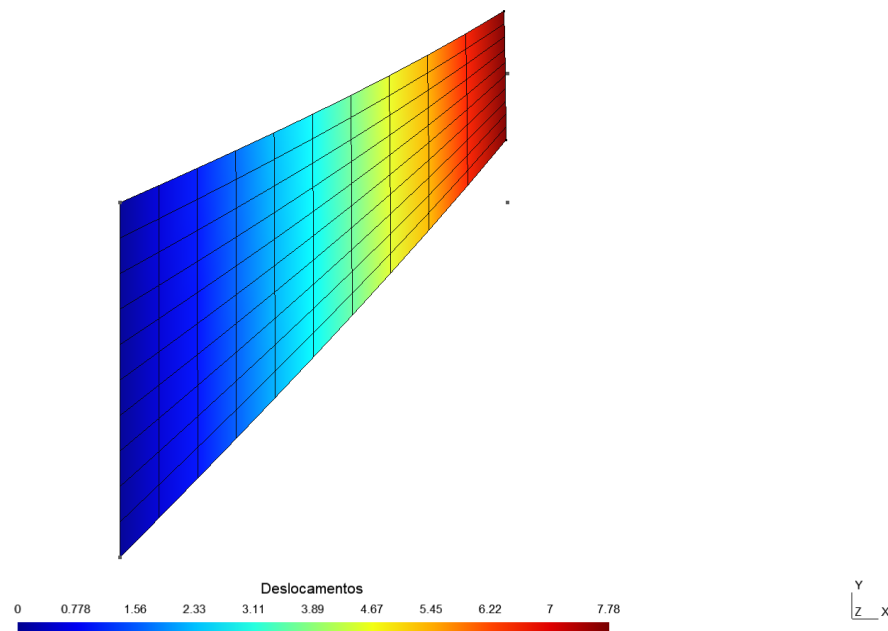


Figura 6.3: Simulação da viga de Cook com elemento Q4 e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.

Já nas Figs. 6.4, 6.5 e 6.6 apresentam-se os comportamentos dos elementos $Q4\bar{B}$, Q8r e Q8 respectivamente. Nota-se que nestas três simulações o resultado da deformação é bem

semelhante para o mesmo grau de refinamento com o mesmo número de nós por lado, 11.

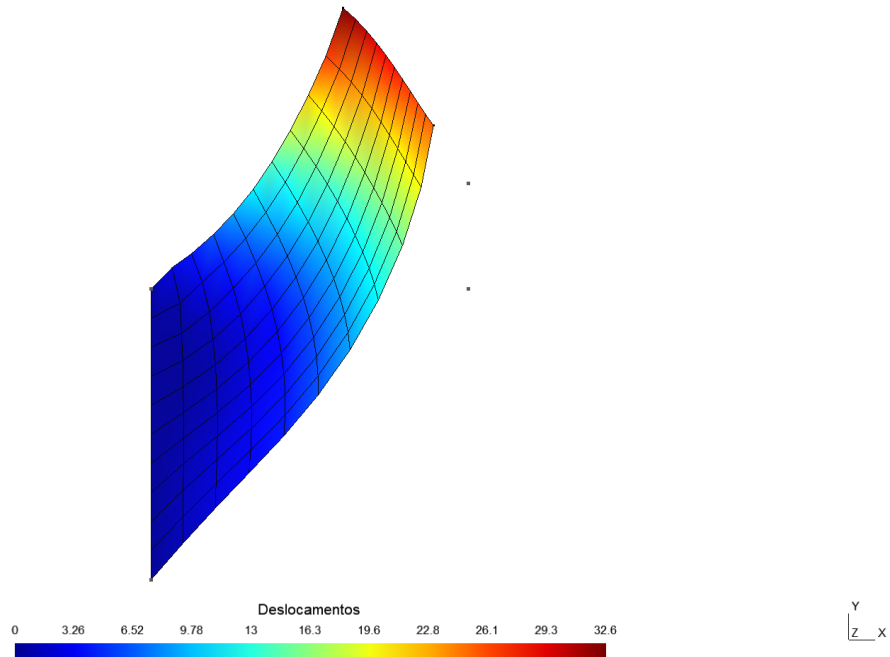


Figura 6.4: Simulação da viga de Cook com elemento $Q4\bar{B}$ e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.

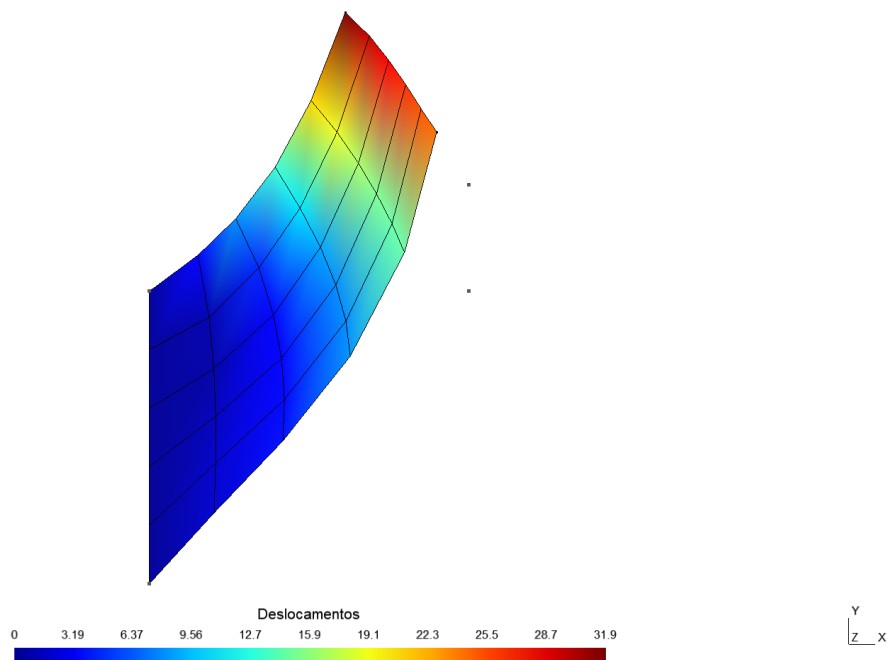


Figura 6.5: Simulação da viga de Cook com elemento $Q8r$ e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.

Evidencia-se que, no caso do elemento $Q8r$ (Fig. 6.5), apesar do uso de integração reduzida, não se observa o efeito do *hourglass*, como foi observado na Fig. 6.2. Isso se deve à maior quantidade de nós no elemento $Q8r$, e portanto, a um maior número de graus de liberdade para representar deformação a volume constante, sem, entretanto, diminuir excessivamente a rigidez ao cisalhamento.

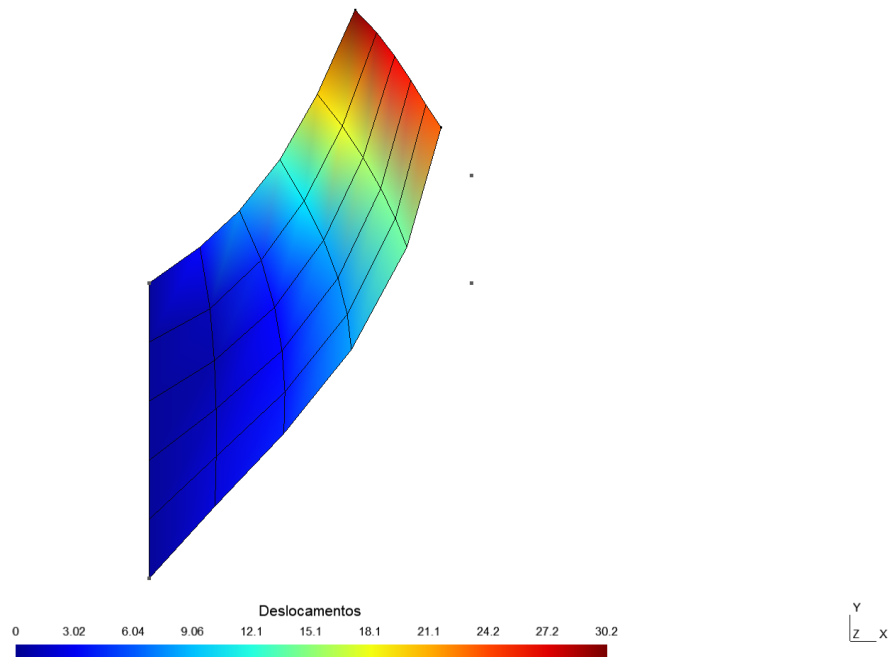


Figura 6.6: Simulação da viga de Cook com elemento Q8 e discretização de 11 nós por lado. Fonte: Autoria própria.

Foi realizado um estudo de convergência de malha para identificar a influência do refinamento no resultado, variando-se a quantidade de nós por direção. Os valores do deslocamento máximo em y ($u_{y\text{máx}}$) do nó superior direito, obtidos com os 5 tipos de elemento implementados, são representados em função do número de nós por lado no gráfico da Fig. 6.7 e na Tabela 6.2. Os resultados relatados por Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005, pp. 375–376), obtidos com o elemento de Pian e Sumihara (1984), também são representados na figura, para efeito de comparação.

Tabela 6.2: Valores de $u_{y\text{máx}}$, em milímetros, dos elementos, para cada grau de refinamento.

Número de nós / lado	Elemento				
	Q4	Q4r	Q8	Q8r	Q4Bbar
3	7,26	33,39	9,06	19,59	16,97
7	7,54	27,56	21,30	24,25	25,32
11	7,77	27,53	24,69	25,92	26,56
21	8,66	27,61	26,42	26,97	27,27
51	12,56	27,69	27,26	27,48	27,59

Membrana de Cook para $\nu = 0,4999$

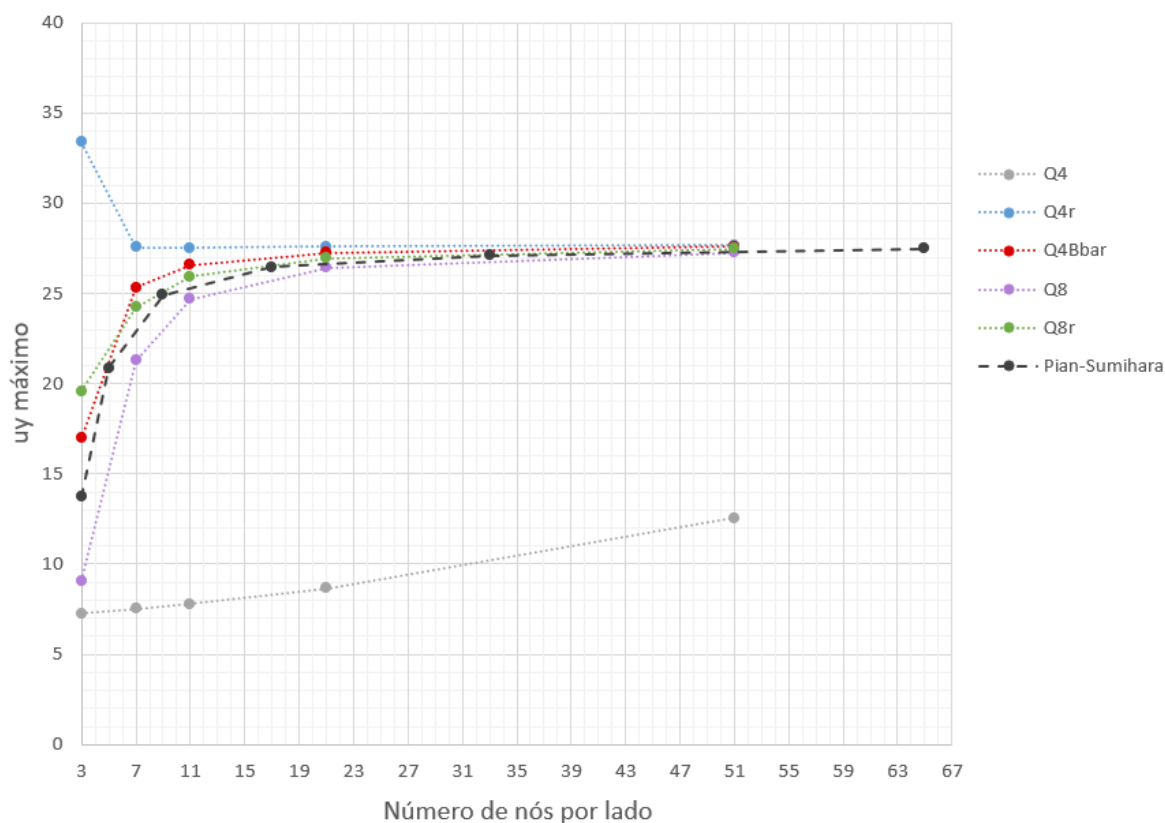


Figura 6.7: Gráfico comparativo da simulação da Membrana de Cook com coeficiente de Poisson = 0,4999 e variando-se o tipo de elemento e o grau de refinamento. Fonte: Autoria própria.

A partir desses dados é possível destacar as seguintes observações:

- Os resultados do elemento Q4r caracterizam uma flexibilidade excessiva para todos os níveis de refinamento. Isso está associado a deformações espúrias do tipo mecanismos ilustradas na Fig. 6.2;
- Os resultados obtidos com os elementos Q8, Q8r e $Q4\bar{B}$ convergem com taxas comparáveis à do elemento de Pian-Sumihara;
- A simulação utilizando o elemento Q4, com $\nu = 0,4999$ – contexto de quase incompressibilidade, retrata de modo insatisfatório a resposta da Membrana de Cook, uma vez que mostra uma rigidez excessivamente maior que a real, representada no gráfico pela curva em cinza, caracterizando travamento;
- O elemento $Q4\bar{B}$ é o que exhibe maior taxa de convergência, sem provocar *locking* ou *hourglass*.

Capítulo 7

Conclusão

Neste projeto de graduação foi apresentado um estudo da capacidade de elementos finitos representarem deformações a volume constante. As implicações deste estudo podem ser empregadas no contexto de deformações elásticas planas ou da plasticidade em metais.

A partir dos resultados das simulações, foi possível observar que o elemento quadrilateral com 4 nós e integração plena apresentou travamento espúrio, que o desqualifica para representar deformações isocóricas. Com base na abordagem heurística, o excesso de restrições de incompressibilidade ($div \mathbf{u} = 0$), associadas à deformação volumétrica, caracteriza esse efeito.

O elemento quadrilateral com 4 nós e integração reduzida, considerado para eliminar o efeito do travamento, apresenta modos espúrios de deformação (mecanismos), caracterizados pela falta de rigidez ao cisalhamento. Essa flexibilidade excessiva se deve ao fato de a aproximação numérica utilizando apenas 1 ponto de Gauss, localizado no centro do elemento, não ser sensível à deformação que ocorre no elemento como um todo, pois o ponto $(\xi, \eta) = (0, 0)$ não sofre efeito da deformação cisalhante.

Ambos os elementos quadrilaterais com 8 nós, com integração plena ou reduzida, apresentam bom desempenho na representação da deformação a volume constante, mas não possuem uma formulação desenvolvida especialmente para o caso da incompressibilidade. Desse modo, seu resultado satisfatório pode ser justificado pelo fato de serem elementos com alto grau de liberdade, que compensa a quantidade de restrições de incompressibilidade.

Por fim, o elemento quadrilateral com formulação B-bar apresenta maior taxa de convergência para soluções no contexto de deformações isocóricas devido à sua formulação. Esse elemento evita simultaneamente o *locking* e o *hourglass*, uma vez que considera integração reduzida para a parcela volumétrica da deformação e integração para a parcela desviadora.

Pode-se concluir que os elementos quadrilateral com 8 nós e integração reduzida e quadrilateral com 4 nós e formulação B-bar apresentam características favoráveis para permitir a descrição correta das deformações plásticas, no contexto das pequenas deformações (cinemática linear).

Capítulo 8

Proposta de Estudos Futuros

Uma proposta natural de continuação do estudo é a utilização do elemento quadrilateral com 4 nós e formulação B-bar em problemas de elastoplasticidade.

Conforme discussão em Hughes (1987, pp. 232), seção 4.5.1, algumas técnicas para tratar a deformação a volume constante funcionam em abordagens no estado plano de deformação e em problemas tridimensionais, mas são insuficientes para retratar adequadamente a solução de problemas axissimétricos e anisotrópicos (situações não abordadas no presente estudo). Nesse sentido, não é claro que a extensão do elemento quadrilateral com 8 nós para o contexto tridimensional, resultando no elemento hexaédrico com 20 nós, consiga descrever a deformação isocórica com qualidades similares, conforme foi observado no presente estudo. Isso justifica a recomendação de estudos comparativos entre os elementos hexaédricos com 20 nós e com 8 nós na formulação B-bar na solução de problemas tridimensionais.

Em problemas acadêmicos bidimensionais da elastostática linear, mesmo os processadores de computadores pessoais permitem a solução dos problemas de equilíbrio demandando pouco tempo de processamento. O cenário se modifica quando se considera a modelagem tridimensional do componente mecânico/estrutural: o número de equações geradas pelo método dos elementos finitos em problemas tridimensionais cresce com o cubo do nível de discretização. Em termos de tempo de processamento, isso é agravado pelo fato de que os métodos de solução dos sistemas de equações lineares envolvem números de operações de ponto flutuante proporcionais ao quadrado (ou ao cubo) do número de equações. Assim, uma análise do tempo de processamento requerido quando se considera um ou outro elemento finito se faz pertinente.

Referências Bibliográficas

- BOLAND, J.; NICOLAIDES, R. A. Stability of finite elements under divergence constraints. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 20, n. 4, p. 722–731, 1983.
- COOK, R. D. Improved two-dimensional finite element. *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, v. 100, n. 9, p. 1851–1863, 1974.
- CROUZEIX, M.; RAVIART, P.-A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, v. 7, n. R3, p. 33–75, 1973.
- DOHERTY, W.; WILSON, E.; TAYLOR, R. Stress analysis of axisymmetric solids utilizing higher order quadrilateral finite elements, sesm report 69-3, department of civil engineering. *University of California, Berkeley*, 1969.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A first course in finite elements*. [S.l.]: Wiley, 2007.
- FORTIN, M. Old and new finite elements for incompressible flows. *International Journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 1, n. 4, p. 347–364, 1981.
- GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.
- GRIFFITHS, D. An approximately divergence-free 9-node velocity element (with variations) for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 1, n. 4, p. 323–346, 1981.
- GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. et al. *Eigen v3*. 2010. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org>. Acesso em: 15 mar. 2022.
- GURTIN, M. E. *An introduction to continuum mechanics*. [S.l.]: Academic press, 1982.
- HERRMANN, L. R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA journal*, v. 3, n. 10, p. 1896–1900, 1965.
- HIBBELER, R. C. *Mechanics of Materials*. 9th. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2014.
- HUGHES, T. J. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 15, n. 9, p. 1413–1418, 1980.
- HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc, 1987.

- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the babuška-brezzi condition: A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85–99, 1986.
- MALKUS, D. Finite element analysis of incompressible solids. *Ph. D. Thesis, Boston University, Boston*, 1976.
- MALKUS, D. S. A finite element displacement model valid for any value of the compressibility. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 12, n. 11, p. 731–738, 1976.
- MALKUS, D. S.; HUGHES, T. J. Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 63–81, 1978.
- MAMIYA, E. N. Notas de aula. 2021.
- MAMIYA, E. N. EFS, código acadêmico de elementos finitos para análise de tensão em sólidos. *Universidade de Brasília*, 2022.
- NAYLOR, D. Stresses in nearly incompressible materials by finite elements with application to the calculation of excess pore pressures. *international journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 8, n. 3, p. 443–460, 1974.
- PIAN, T. H.; SUMIHARA, K. Rational approach for assumed stress finite elements. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 20, n. 9, p. 1685–1695, 1984.
- POLANSKI, S.; DUDEK, M. *CoFEA Initiative*. 2020. Disponível em: <https://cofea.readthedocs.io/en/docs-dev/benchmarks/002-cook-membrane/index.htmlcooks-membrane>. Acesso em: 28 mar. 2020.
- SIMO, J. C.; RIFAI, M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 29, n. 8, p. 1595–1638, 1990.
- VEUBEKE, B. Fraeijs de. Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress analysis*, John Wiley & Sons, p. chapter–9, 1965.
- ZIENKIEWICZ, O.; GODBOLE, P. Viscous incompressible flow with special reference to non-newtonian (plastic) fluids. *Finite elements in fluids*, Wiley New York, v. 1, 1975.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; TOO, J. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 275–290, 1971.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The finite element method: its basis and fundamentals*. [S.l.]: Elsevier, 2005.

Apêndice

Implementação do Elemento $Q4\bar{B}$

A implementação dos elementos $Q4\bar{B}$ e $Q8$ se deu no código acadêmico de elementos finitos **EFS**, escrito em linguagem C++ com o uso da biblioteca *Eigen* de Álgebra Linear Computacional (GUENNEBAUD; JACOB et al., 2010). As malhas foram geradas e os resultados foram visualizados com o *software* GMSH (GEUZAINÉ; REMACLE., 2009). Esse código resolve o problema de equilíbrio a partir de cada tipo de elemento implementado. A contribuição deste projeto de graduação está na implementação dos elementos $Q4\bar{B}$ e $Q8$ para complementar o **EFS** para a solução de problemas de deformações incompressíveis.

Na implementação de um novo elemento, é necessário construir o vetor das forças internas, que compreende também o cálculo das funções de base e das matrizes de deformação-deslocamento e de elasticidade, construir a matriz de rigidez e por fim construir o arranjo das tensões no elemento.

Apresentam-se as listagens dos arquivos de cabeçalho e fonte dos dois elementos implementados no código **EFS**, em linguagem C++:

Listagem 8.1: Arquivo de cabeçalho do elemento quadrilateral com 4 nós com formulação B-bar.

```
/**
 * elastBbar - classe para o elemento finito quadrilateral de 4 nós - Bbar:
 * ===== elasticidade linear isotrópica com integração plena (4 ptos de
 * Gauss) na parte desviatória e reduzida (1 pto de Gauss) na parte volumétrica
 * (c) EFS 2021-2022 Edgar Nobuo Mamiya - Universidade de Brasília
 * versão de 22 de março de 2022 - Implementado por Brenda Kennedy de Oliveira
 */

#ifndef ELASTBBAR_HH
#define ELASTBBAR_HH

#include <iostream>
#include <vector>
#include "Eigen/Dense"
#include "element.hh"

using namespace std;
using namespace Eigen;

class elastBbar : public element
{
```



```

public:
    // construtor
    elastBbar(vector<double>&      Par,
              vector<int>&        ENi,
              vector<array<double,3>>& X);

    // vetor resíduo no elemento associado à estimativa de solução U
    VectorXd internalForce(vector<array<double,3>>& U);

    // construção do gradiente do resíduo
    MatrixXd stiffnessMatrix();

    // cálculo das tensões nos ptos de Gauss
    MatrixXd stress(vector<array<double,3>>& U);

private:

    // funções de base
    void build_shapeFunctions_at(int gaussPoint);
    void build_shapeFunctions_bar_at();

    // matriz elasticidade
    MatrixXd Dmatrix();

    // operador deformação-deslocamento
    MatrixXd Bvolmatrix();
    MatrixXd Bdevmatrix();

    // Derivadas das funções de base N barra
    VectorXd  Nbar_x;    // derivadas das func de base barra em relação a x
    VectorXd  Nbar_y;    // derivadas das func de base barra em relação a y
};

#endif

```

Listagem 8.2: Arquivo fonte do elemento quadrilateral com 4 nós com formulação B-bar.

```

/**
 * elastBbar - classe para o elemento finito quadrilateral com 4 nós:
 * ===== elasticidade linear isotrópica com integração plena (4 ptos de
 * Gauss) na parte desviadora e reduzida (1 pto de Gauss) na parte volumétrica
 * (c) EFS 2021-2022 Edgar Nobuo Mamiya - Universidade de Brasília
 * versão de 22 de março de 2022 - Implementado por Brenda Kennedy de Oliveira
 */

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include "Eigen/Dense"
#include "elastBbar.hh"

using namespace std;
using namespace Eigen;

/*
 * =====
 * Índice |
 * =====
 * 0. elastBbar(Par, ENi, X) | construtor |
 * 1. Vetor Força (Fe) | força interna |
 * 1.1. build_shapeFunctions_at(point) | calcula funções de base (private) |
 * 1.2. Bvolmatrix() e Bdevmatrix() | matrizes deform-desloc (private) |
 * 1.3. Dmatrix() | matriz de elasticidade (private) |
 */

```

```

* 2. stiffnessMatrix()          | matriz de rigidez          |
* 3. stress(U)                 | tensões                  |
* =====
*/

/// -----
/// 0. Construtor
/// -----
elastBbar::elastBbar(vector<double>& Par,
                    vector<int>& ENi,
                    vector<array<double, 3>>& X)
{
    efsType = 303;   nsd = 2;   nen = 4;   nee = nsd * nen;   ngauss = 5;

    par = Par;
    EN = ENi;

    xe.resize(nen);   ye.resize(nen);   ze.resize(nen);
    for (int node = 0; node < nen; node++)
    {
        xe[node] = X[EN[node]][0];   // EN são as coordenadas de cada nó
        ye[node] = X[EN[node]][1];
        ze[node] = X[EN[node]][2];
    }

    Ue.resize(nee);

    Nx.resize(nen);
    Ny.resize(nen);

    Nbar_x.resize(nen);
    Nbar_y.resize(nen);

    D.resize(4, 4);
    Bvol.resize(4, nee);
    Bdev.resize(4, nee);
}

/// -----
/// 1. construção do vetor força interna no elemento
/// -----
VectorXd elastBbar::internalForce(vector<array<double, 3>>&U)
{
    VectorXd Fe;

    D = Dmatrix();
    Ue = get_elemDisplacements(U);
    Fe = VectorXd::Zero(nee);

    build_shapeFunctions_at(4); // 5° pto = ngauss(4) -> (xi, eta) = (0,0)
    Bvol = Bvolmatrix();

    for (int point = 0; point < ngauss; point++) // 1° pto = ngauss(0)
                                                // ao 4° pto = ngauss(3)
    {
        build_shapeFunctions_at(point);
        Bdev = Bdevmatrix();
        B = Bvol + Bdev;
        Fe += B.transpose() * ((D * w) * (B * Ue));
    }
    return Fe;
}

```

```

}

/// -----
/// 1.1 função private: construção funções de base - int plena e reduzida
///-----
void elastBbar::build_shapeFunctions_at(int gauss)
{
    // coords locais dos 4 ptos de Gauss
    /*
    *   3               2
    *   o-----o      Ordenar os 4 pontos de Gauss
    *   |           |      obedecendo à mesma convenção que a
    *   |   g3     g2 |      numeração dos pontos nodais.
    *   |           |
    *   |           |      Isso é necessário para a aproximação
    *   |   g4     |      das tensões: cada ponto nodal é associado,
    *   |           |      em elastQ4:stress, às tensões calculadas
    *   |   g0     g1 |      no ponto de Gauss mais próximo.
    *   |           |
    *   o-----o
    *   0               1
    */

    const double S3 = sqrt(3.) / 3.;
    VectorXd xi{ {-S3, S3, S3, -S3, 0} }; // 5° pto p/ integ. reduzida
    VectorXd et{ {-S3, -S3, S3, S3, 0} }; // 5° pto p/ integ. reduzida

    // derivadas das funções de base em relação a cs e et
    VectorXd Nxi(4);
    VectorXd Net(4);

    Nxi[0] = -(1 - et[gauss]) / 4;
    Nxi[1] = (1 - et[gauss]) / 4;
    Nxi[2] = (1 + et[gauss]) / 4;
    Nxi[3] = -(1 + et[gauss]) / 4;

    Net[0] = -(1 - xi[gauss]) / 4;
    Net[1] = -(1 + xi[gauss]) / 4;
    Net[2] = (1 + xi[gauss]) / 4;
    Net[3] = (1 - xi[gauss]) / 4;

    // derivadas das coords globais em rel às coords locais
    double xxi, xet, yxi, yet;

    xxi = xe.dot(Nxi);    xet = xe.dot(Net);
    yxi = ye.dot(Nxi);    yet = ye.dot(Net);

    // matriz dos cofatores
    MatrixXd cof{ { yet, -xet},
                 {-yxi, xxi} };

    // determinante do jacobiano
    double detJ = xxi * yet - yxi * xet;

    // derivadas das funções de base em relação a x e y
    for (int i = 0; i < 4; i++)
    {
        Nx[i] = (cof(0, 0) * Nxi[i] + cof(1, 0) * Net[i]) / detJ;
        Ny[i] = (cof(0, 1) * Nxi[i] + cof(1, 1) * Net[i]) / detJ;
    }

    // pesos nos ptos de Gauss -> 5° pto p/ integ. reduzida, weig(4) não é usado
    VectorXd weig{ {1, 1, 1, 1, 0} };

```

```

// peso da integração numérica
w = weig(gauss) * abs(detJ);
}

/// -----
/// 1.2. função private: construção operador deformação-deslocamento volumétrico
/// -----
MatrixXd elastBbar::Bvolmatrix()
{
    MatrixXd Bvol(4, nee);
    for (int i = 0; i < nen; i++)
    {
        Bvol(0, 2 * i) = 1. / 3. * Nx[i];    Bvol(0, 2 * i + 1) = 1. / 3. * Ny[i];
        Bvol(1, 2 * i) = 1. / 3. * Nx[i];    Bvol(1, 2 * i + 1) = 1. / 3. * Ny[i];
        Bvol(2, 2 * i) = 1. / 3. * Nx[i];    Bvol(2, 2 * i + 1) = 1. / 3. * Ny[i];
        Bvol(3, 2 * i) = 0.;                 Bvol(3, 2 * i + 1) = 0.;
    }
    return Bvol;
}

MatrixXd elastBbar::Bdevmatrix()
{
    MatrixXd Bdev(4, nee);
    for (int i = 0; i < nen; i++)
    {
        Bdev(0, 2 * i) = 2. / 3. * Nx[i];    Bdev(0, 2 * i + 1) = -1. / 3. * Ny[i];
        Bdev(1, 2 * i) = -1. / 3. * Nx[i];   Bdev(1, 2 * i + 1) = 2. / 3. * Ny[i];
        Bdev(2, 2 * i) = -1. / 3. * Nx[i];   Bdev(2, 2 * i + 1) = -1. / 3. * Ny[i];
        Bdev(3, 2 * i) = Ny[i];              Bdev(3, 2 * i + 1) = Nx[i];
    }
    return Bdev;
}

/// -----
/// 1.3. função private: construção da matriz elasticidade 4 x 4
/// -----
MatrixXd elastBbar::Dmatrix()
{
    double E = par[0]; // módulo de elasticidade (MPa)
    double nu = par[1]; // coeficiente de Poisson
    int state = static_cast<int>(par[2]); // 1 tensão plana, 2 deform plana

    double lbd = (E * nu) / ((1 + nu) * (1 - 2 * nu));
    double mu = E / (2 * (1 + nu));
    if (state == 1) lbd = (2 * lbd * mu) / (lbd + 2 * mu); // tensão plana
    double l2m = lbd + 2 * mu;

    MatrixXd D{ {l2m, lbd, lbd, 0.0},
                {lbd, l2m, lbd, 0.0},
                {lbd, lbd, l2m, 0.0},
                {0.0, 0.0, 0.0, mu} };
    return D;
}

/// -----
/// 2. construção da matriz de rigidez
/// -----
MatrixXd elastBbar::stiffnessMatrix()
{
    MatrixXd DFe = MatrixXd::Zero(nee, nee);
}

```

```

D = Dmatrix();

build_shapeFunctions_at(4); // no ponto de Gauss (xi, eta) = (0,0)
Bvol = Bvolmatrix();

for (int point = 0; point < ngauss; point++)
{
    build_shapeFunctions_at(point);
    Bdev = Bdevmatrix();

    B = Bvol + Bdev; //Bvol do pto 5 é somado ao Bdev
                    // dos pto de 1 a 4 de cada loop

    DFe += B.transpose() * ((D * w) * B); // w de 1 a 4; é desprezado no pto 5

}
return DFe;
}

/// -----
/// 3. construção do arranjo de tensões no elemento
/// -----
MatrixXd elastBbar::stress(vector<array<double, 3>>&U)
{
    // as tensões são aproximadas para cada ponto nodal
    MatrixXd Se = MatrixXd::Zero(nen, 6);

    // matriz elasticidade, constante por elemento
    D = Dmatrix();

    // deslocamentos nodais: calculados e prescritos
    Ue = get_elemDisplacements(U);

    build_shapeFunctions_at(4);
    Bvol = Bvolmatrix();

    for (int node = 0; node < nen; node++)
    {
        // tensor tensão calculado no ponto de Gauss mais próx ao nó node
        // (vide comentário em elastBbar::build_shapeFunctions_at)
        build_shapeFunctions_at(node);
        Bdev = Bdevmatrix();
        B = Bvol + Bdev;

        Vector4d eps = B * Ue;
        Vector4d sig = D * eps;

        Se(node, 0) = sig[0];
        Se(node, 1) = sig[1];
        Se(node, 2) = sig[2];
        Se(node, 5) = sig[3];
    }
    return Se;
}
}

```

Listagem 8.3: Arquivo de cabeçalho do elemento quadrilateral com 8 nós.

```

/**
 * elastQ8 - classe para o elemento finito quadrilateral de 8 nós:
 * ===== elasticidade linear isotrópica com integração plena (9 pto de Gauss)
 * (c) EFS 2021-2022 Edgar Nobuo Mamiya - Universidade de Brasília

```

```

* versão de 10 de março de 2022 - Implementado por Brenda Kennedy de Oliveira
*/
#ifndef ELASTQ8_HH
#define ELASTQ8_HH

#include <iostream>
#include <vector>
#include "Eigen/Dense"
#include "element.hh"

using namespace std;
using namespace Eigen;

class elastQ8 : public element
{
public:
    // construtor
    elastQ8(vector<double>&          Par,
            vector<int>&            ENi,
            vector<array<double,3>>& X);

    // vetor resíduo no elemento associado à estimativa de solução U
    VectorXd internalForce(vector<array<double,3>>& U);

    // construção do gradiente do resíduo
    MatrixXd stiffnessMatrix();

    // cálculo das tensões nos ptos de Gauss
    MatrixXd stress(vector<array<double,3>>& U);

private:
    // funções de base
    void build_shapeFunctions_at(int gaussPoint);

    // matriz elasticidade
    MatrixXd Dmatrix();

    // operador deformação-deslocamento
    MatrixXd Bmatrix();
};

#endif

```

Listagem 8.4: Arquivo fonte do elemento quadrilateral com 8 nós.

```

/**
* elastQ8 - classe para o elemento finito quadrilateral de 8 nós:
* ===== elasticidade linear isotrópica com integração plena (9 ptos de Gauss)
* (c) EFS 2021-2022 Edgar Nobuo Mamiya - Universidade de Brasília
* versão de 10 de março de 2022 - Implementado por Brenda Kennedy de Oliveira
*/

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include "Eigen/Dense"
#include "elastQ8.hh"

using namespace std;
using namespace Eigen;

/*

```

```

* =====
* Índice |
* =====
* 0. elastQ8(Par, ENi, X) | construtor |
* 1. Vetor Força (Fe) | força interna |
* 1.1. build_shapeFunctions_at(gauss) | calcula funções de base (private) |
* 1.2. Dmatrix() | matriz elasticidade (private) |
* 1.3. Bmatrix() | matriz deform-desloc (private) |
* 2. stiffnessMatrix() | matriz de rigidez |
* 3. stress(U) | tensões |
* =====
*/

/// -----
/// 0. Construtor
/// -----
elastQ8::elastQ8(vector<double>& Par,
                vector<int>& ENi,
                vector<array<double,3>>& X)
{
    efsType = 1601; nsd = 2; nen = 8; nee = nsd*nen; ngauss = 9;

    par = Par;
    EN = ENi;

    xe.resize(nen); ye.resize(nen); ze.resize(nen);
    for (int node = 0; node < nen; node++)
    {
        xe[node] = X[ EN[node] ][0];
        ye[node] = X[ EN[node] ][1];
        ze[node] = X[ EN[node] ][2];
    }

    Ue.resize(nee);

    Nx.resize(nen);
    Ny.resize(nen);

    D.resize(3,3);
    B.resize(3,nee);
}

/// -----
/// 1. 1. construção do vetor força interna no elemento
/// -----
VectorXd elastQ8::internalForce(vector<array<double,3>>& U)
{
    VectorXd Fe;

    D = Dmatrix();
    Ue = get_elemDisplacements(U);
    Fe = VectorXd::Zero(nee);

    for (int point = 0; point < ngauss; point++)
    {
        build_shapeFunctions_at(point);
        B = Bmatrix();
        Fe += B.transpose() * ((D * w) * (B * Ue));
    }
    return Fe;
}

```

```

/// -----
/// 1.1 função private: construção funções de base - int plena
///-----
void elastQ8::build_shapeFunctions_at(int gauss)
{
    const double s35 = 0.7745966692414834;
    const double c59 = 0.5555555555555556;
    const double c89 = 0.8888888888888889;

    // pesos nos 9 ptos de Gauss
    VectorXd weig(ngauss);
    weig << c59*c59, c59*c59, c59*c59, c59*c59,
            c59*c89, c59*c89, c59*c89, c59*c89,
            c89*c89;

    // coords locais dos 9 ptos de Gauss
    /*
    *   3           6           2
    *   o-----o-----o   Ordenar os 8 primeiros pontos de Gauss
    *   |           |           |   obedecendo à mesma convenção que a
    *   |   g3   g6   g2   |   numeração dos pontos nodais.
    *   |           |           |
    *   7 o   g7   g8   g5   o 5   Isso é necessário para a aproximação
    *   |           |           |   das tensões: cada ponto nodal é associado,
    *   |   g0   g4   g1   |   em elastQ8:stress, às tensões calculadas
    *   |           |           |   no ponto de Gauss mais próximo.
    *   o-----o-----o
    *   0           4           1
    */
    VectorXd xi(ngauss);
    VectorXd et(ngauss);
    xi << -s35, s35, s35, -s35, 0, s35, 0, -s35, 0;
    et << -s35, -s35, s35, s35, -s35, 0, s35, 0, 0;

    // derivadas das funções de base em relação a cs e et
    VectorXd Nxi(nen);

    Nxi[0] = (2 * xi[gauss] + et[gauss]) * (1 - et[gauss]) / 4;
    Nxi[1] = (2 * xi[gauss] - et[gauss]) * (1 - et[gauss]) / 4;
    Nxi[2] = (2 * xi[gauss] + et[gauss]) * (1 + et[gauss]) / 4;
    Nxi[3] = (2 * xi[gauss] - et[gauss]) * (1 + et[gauss]) / 4;

    Nxi[4] = - xi[gauss] * (1 - et[gauss]);
    Nxi[6] = - xi[gauss] * (1 + et[gauss]);

    Nxi[5] = (1 - et[gauss] * et[gauss]) / 2;
    Nxi[7] = - (1 - et[gauss] * et[gauss]) / 2;

    VectorXd Net(nen);

    Net[0] = (1 - xi[gauss]) * ( xi[gauss] + 2 * et[gauss]) / 4;
    Net[1] = (1 + xi[gauss]) * (-xi[gauss] + 2 * et[gauss]) / 4;
    Net[2] = (1 + xi[gauss]) * ( xi[gauss] + 2 * et[gauss]) / 4;
    Net[3] = (1 - xi[gauss]) * (-xi[gauss] + 2 * et[gauss]) / 4;

    Net[4] = -(1 - xi[gauss] * xi[gauss]) / 2;
    Net[6] = (1 - xi[gauss] * xi[gauss]) / 2;

    Net[5] = -(1 + xi[gauss]) * et[gauss];
    Net[7] = -(1 - xi[gauss]) * et[gauss];

```



```

// derivadas das coords globais em rel às coords locais
double xxi, xet, yxi, yet;

xxi = xe.dot(Nxi);   xet = xe.dot(Net);
yxi = ye.dot(Nxi);   yet = ye.dot(Net);

// matriz dos cofatores
MatrixXd cof {{ yet, -xet},
              {-yxi, xxi}};

// determinante do jacobiano
double detJ = xxi*yet - yxi*xet;

// derivadas das funções de base em relação a x e y
for (int i = 0; i < nen; i++)
{
    Nx[i] = (cof(0,0)*Nxi[i] + cof(1,0)*Net[i]) / detJ;
    Ny[i] = (cof(0,1)*Nxi[i] + cof(1,1)*Net[i]) / detJ;
}

// peso da integração numérica
w = weig(gauss) * abs(detJ);
}

/// -----
/// 1.2. função private: construção matriz elasticidade
/// -----
MatrixXd elastQ8::Dmatrix()
{
    double E      = par[0];           // módulo de elasticidade (MPa)
    double nu     = par[1];           // coeficiente de Poisson
    int    state  = static_cast<int>(par[2]); // 1 tensão plana, 2 deform plana

    double lbd = (E*nu)/((1 + nu)*(1 - 2*nu));
    double mu  = E/(2*(1+nu));
    if (state == 1) lbd = (2*lbd*mu)/(lbd+2*mu); // tensão plana
    double l2m = lbd + 2*mu;

    MatrixXd D {{l2m, lbd, 0.0},
               {lbd, l2m, 0.0},
               {0.0, 0.0, mu}};
    return D;
}

/// -----
/// 1.3. função private: construção operador deformação-deslocamento
/// -----
MatrixXd elastQ8::Bmatrix()
{
    MatrixXd B(3, nen);
    for (int i = 0; i < nen; i++)
    {
        B(0, 2*i) = Nx[i];   B(0, 2*i+1) = 0    ;
        B(1, 2*i) = 0      ; B(1, 2*i+1) = Ny[i];
        B(2, 2*i) = Ny[i];  B(2, 2*i+1) = Nx[i];
    }
    return B;
}

/// -----
/// 2. construção matriz de rigidez

```

```

/// -----
MatrixXd elastQ8::stiffnessMatrix()
{
    MatrixXd DFe = MatrixXd::Zero(nee,nee);

    D = Dmatrix();

    for (int gauss = 0; gauss < ngauss; gauss++)
    {
        build_shapeFunctions_at(gauss);
        B = Bmatrix();
        DFe += B.transpose() * ((D * w) * B);
    }
    return DFe;
}

/// -----
/// 3. construção arranjo de tensões no elemento
/// -----
MatrixXd elastQ8::stress(vector<array<double,3>>& U)
{
    // as tensões são aproximadas para cada ponto nodal
    MatrixXd Se = MatrixXd::Zero(nen,6);

    // matriz elasticidade, constante por elemento
    D = Dmatrix();

    // deslocamentos nodais: calculados e prescritos
    Ue = get_elemDisplacements(U);

    for (int node = 0; node < nen; node++)
    {
        // tensor tensão calculado no ponto de Gauss mais próximo ao nó node
        // (vide comentário em elastQ8::build_shapeFunctions_at)
        build_shapeFunctions_at(node);
        B = Bmatrix();
        Vector3d eps = B * Ue;
        Vector3d sig = D * eps;

        Se(node,0) = sig[0];
        Se(node,1) = sig[1];
        Se(node,5) = sig[2];

        // tensão szz para estado plano de deformação
        int state = static_cast<int>(par[2]); // 1 tensão plana, 2 deform plana

        if (state == 2)
        {
            double E = par[0]; // módulo de elasticidade (MPa)
            double nu = par[1]; // coeficiente de Poisson
            double lbd = (E*nu)/((1 + nu)*(1 - 2*nu)); // constante de Lamé

            Se(node,2) = lbd * (eps[0] + eps[1]);
        }
    }
    return Se;
}

```