UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA Faculdade de Tecnologia Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE NUMÉRICA DE BOMBEAMENTO EM RESERVATÓRIO DE ÁGUA

Por

Afonso Barros Dias Júnior

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Eder Lima Albuquerque, UnB/ENM

Prof. Eugênio Fortaleza, UnB/ENM

Prof. Edgar Nobuo Mamiya , UnB/ENM

Brasília, 08 de Dezembro , 2011.

Sumário

1	INT	TRODUÇÃO	2
	1.1	CONE DE ÁGUA	2
2	O F	ENÔMENO DO CONE DE ÁGUA	4
	2.1	ASPECTOS GERAIS SOBRE O PETRÓLEO	4
	2.2	CONE DE ÁGUA	6
	2.3	MODELOS FÍSICOS UTILIZADOS	8
		2.3.1 MODELOS ANALÍTICOS	8
		2.3.2 MODELOS NUMÉRICOS	9
		2.3.3 MODELOS EXPERIMENTAIS	10
3	ΑE	QUAÇÃO DE DARCY PARA UM ESCOAMENTO EM MEIO)
	PO	ROSO	12
	3.1	ESCOAMENTO DE DARCY	12
	3.2	VELOCIDADE DE DARCY E VELOCIDADE DO FLUIDO NO MEIO	
		POROSO	13
	3.3	EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA	15
4	O N	IÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)	16
	4.1	MÉTODOS NUMÉRICOS	16
		4.1.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	18
		4.1.2 TEOREMA GAUSS GREEN (2-D)	18
	4.2	EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	21
	4.3	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE LAPLACE	25
	4.4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	27
	4.5	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	30
		4.5.1 ELEMENTOS DE CONTORNO LINEARES	32
5	\mathbf{SIN}	IULAÇÃO NUMÉRICA	33
	5.1	VALIDAÇÃO NUMÉRICA	33
		5.1.1 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM PLACA	33

6	CO	NCLUS	SÕES E I	FRABALI	HOS FUT	UROS				44
	5.3	RESUI	TADOS						•	40
	5.2	ESCOA	AMENTO	EM MEIO	POROSO	COM SU	PERFÍCIE	LIVRE .		37
		5.1.2	ESCOAM	ENTO DE	FLUIDO I	EM TUBO)			35

RESUMO

O presente trabalho é de natureza numérica e visa estudar a extração de um fluido dentro de um reservatório. A equação diferencial governante do problema é a equação de Laplace. Nesse problema, o fluido possui uma superfície livre correspondente ao contato fluido/gás. A forma da superfície livre, que também é uma variável desconhecida do problema, é determinada pela distribuição de pressão sobre o fluido. O método dos elementos de contorno é usado para modelagem numérica do problema. A equação integral de contorno é obtida a partir da equação de Laplace, utilizando o métodos dos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green. Estas equações integrais de contorno são discretizadas e as condições de contorno são aproximadas por elementos de contorno lineares contínuos. Primeiramente é feita uma validação da formulação implementada, aplicando a problemas que possuem solução analítica e que também são governados pela equação de Laplace. É encontrado uma boa concordância dos resultados obtidos com os resulados analíticos presentes na literatura. Por último, o método é aplicado no problema de extração do fluido de um reservatório.

Neste caso o bombeamento é tratados como uma sequência de sucessivos estados estacionários que são resolvidos passo a passo. As variáveis desconhecidas são calculadas para cada passo. A forma da superfície livre é determinada pelo campo de pressão no passo atual e em passos anteriores. A formulação desenvolvida é aplicada a um reservatório quadrado em que a bomba se encontra na aresta do fundo do reservatório.

ABSTRACT

The present work is of numerical nature and aims to study the extraction of a fluid from a reservoir. The governing equation of the problem is the Laplace equation. In this problem, the fluid has a free surface due to the contact fluid/gas. The shape of the free surface, that is also an unknown variable of the problem, is determined by the distribution of pressure on the fluid. The boundary element method is used for the numerical modeling of the problem. The boundary integral equation is obtained from the Laplace equation using the methods of the weighted residues and the theorem of Gauss-Green. The boundary integral equation is discretized and the boundary conditions are approximated by continuous linear boundary elements. First, a validation of the implemented formularization is carried out by analyzing problems governed by Laplace equation that have analytical solutions. It is found a good agreement of the results obtained by the present formulation with analytical results available in literature Finally, the method is applied in the problem of extraction of a fluid from a reservoir.

In this case the pumping is treated as a sequence of successive steady states that are computed step by step. The unknown variables are calculated for each step. The form of the free surface is determined by the field of pressure at the current and previous steps. The developed formularization is applied to a squared reservoir where the pump is placed at the bottom edge of reservoir.

Lista de Figuras

1.1	CONE DE ÁGUA	2
1.2	RESERVATÓRIO DE ÁGUA	3
2.1	ESQUEMA DO RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO	5
2.2	CONTATO ÓLEO E ÁGUA - fonte: [3] modificada	6
2.3	CONE DE ÁGUA	8
2.4	EXPERIMENTO DE HELE-SHAW - fonte:[11]	10
3.1	EXPERIMENTO DE DARCY - fonte: [2] modificada	12
4.1	GAUSS-GREEN - fonte: [9] modificada	18
4.2	VETORES - fonte: [9] modificada	19
4.3	PONTO FONTE E PONTO CAMPO - fonte: Notas de aula - Eder	25
4.4	CONTORNO MODIFICADO - fonte: Notas de aula - Eder	28
4.5	CONTORNO DISCRETIZADO - fonte [9]	30
4.6	ELEMENTO DE CONTORNO LINEAR - fonte: [9]	32
5.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO - fonte: Notas de aula - Eder $\ .\ .\ .$.	33
5.2	DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA	34
5.3	ESCOAMENTO EM TUBO - fonte: [9] modificada	35
5.4	POTENCIAL DE VELOCIDADE - Katsikadelis - fonte: [9] modificada	36
5.5	POTENCIAL DE VELOCIDADE - MEC	36
5.6	RESERVATÓRIO DE ÁGUA - fonte: [16] modificada	37
5.7	RESERVATÓRIO DISCRETIZADO	38
5.8	Superfície freática	40
5.9	BOMBEAMENTO DE 4 SEGUNDOS	41
5.10	BOMBEAMENTO DE 6 SEGUNDOS	41
5.11	BOMBEAMENTO DE 69 SEGUNDOS	42

Símbolos

Letras gregas

ϕ = Cabeça piezométrica.
$\delta = Delta de dirac.$
$\rho = \text{Densidade do fluido} \dots [\frac{kg}{m^3}].$
$\nu = \text{Viscosidade cinemática do fluido } \dots [\frac{m^2}{s}].$
$\Theta = \text{Porosidade do meio.}$
$\varpi =$ Função de ponderação.

Letras arábicas

$K =$ Condutividade hidráulica $\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{\iota}{2}\right]$.
z = Elevação do fluido	ı].
$p = Pressão atmosférica \dots [atm$	1].
$g = \text{Gravidade} \dots [\frac{m}{s^2}]$	$\left[\frac{i}{2}\right]$.
k = Permeabilidade absoluta do meio poroso[darcy	/].
$Q = $ Fluxo do fluido $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	·].
$V =$ Velocidade média $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{i}{2}\right]$.
$u_f = $ Velocidade de Darcy $[\frac{m}{s^2}]$	$\frac{i}{2}$].
$A = $ Àrea [m^2	²].

Capítulo 1 INTRODUÇÃO

1.1 CONE DE ÁGUA

Esse projeto tem como objetivo principal estudar o processo de extração de fluido de um reservatório usando o métodos dos elementos de contorno.

A motivação para este trabalho é de, futuramente, é estender a formulação para a análise do fenômeno do cone de água que ocorre durante a extração do petróleo. No caso do cone de água, dois fluidos, água e petróleo, de viscosidades e densidades diferentes, encontram-se no mesmo reservatório. Na exploração comercial do reservatório se deseja extrair o petróleo, que é o fluido menos denso e mais viscoso, com um mínimo de extração de água. O fenômeno do cone de água é caracterizado pela invasão da água na zona onde se extrai o petróleo. Essa invasão acontece quando o equilíbrio entre as forças do sistema é desfeito. Logo, a água sobe em direção ao poço e começa a ser produzida, pois ela tem maior mobilidade que o petróleo. A Figura 1.1 mostra o esquema do problema.



Figura 1.1: CONE DE ÁGUA

Vale ressaltar que a produção execessiva de água é um problema comum em reservatórios de petróleo, devido a existência de uma camada de água abaixo da zona petrolífera.

Além de não possuir valor comercial, a água retirada desses reservatórios não é adequada para o consumo e seu descarte pode causar danos ao meio ambiente devido à contaminação por resíduos tóxicos. Sendo assim, é necessário realizar uma série de tratamentos a fim de torna-lá menos agressiva. Naturalmente, esses tratamentos aumentam os custos da extração do petróleo.

Para compreender o comportamento do problema do cone de água, considere o escoamento de um único fluido em um meio poroso submetido à pressão de uma bomba de sucção. O fluido tem uma superfície de controle deformável, isto é, o formato da superfíce varia com tempo, devido à variação do campo de pressão.



Figura 1.2: RESERVATÓRIO DE ÁGUA

A representação do problema acima é ilustrado pela Figura 1.2, que mostra o comportamento do fluido quando o mesmo estiver sendo bombeado. Devido às dificuldades de se modelar a superfície livre, não é possível se obter um resultado analítico para este problema. Assim sendo, o uso de um método numérico torna-se necessário. Neste trabalho o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é o método numérico escolhido para tal análise. Considerações sobre tal formulação, e sobre o modelo físico proposto, são apresentados em capítulos posteriores.

Capítulo 2 O FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA

2.1 ASPECTOS GERAIS SOBRE O PETRÓLEO

O petróleo é o nome dado à mistura de compostos orgânicos, formados por carbono e hidrogênio, conhecidos como hidrocarbonetos. Sua origem está relacionada com a degradação, não-oxidante, da matéria orgânica marinha soterrada em regiões de elevada temperatura e pressão. De acordo com [14], a interação entre os mesmos (matéria orgânica, pressão e temperatura) determina o estado físico (líquido ou gasoso) do petróleo. O petróleo no estado líquido é uma substância oleosa, inflamável, menos densa que a água e com a cor variando entre o negro e o castanho-claro. O petróleo na forma gasosa é conhecido como gás natural.

A formação de um reservatório de petróleo começa com uma rocha mineral conhecida como fonte ou geradora. Nessas rochas, a matéria orgânica, depositada, será degradada, transformando-se em petróleo, devido as condições de temperatura e pressão, que devem ser adequadas para iniciar o processo descrito acima. Após essa etapa, o petróleo é armazenado e acumulado.

Segundo [14], o acúmulo do petróleo depende das características e do arranjo de certos tipos de rochas presentes no subsolo da terra. O petróleo é acumulado quando ele se desloca da rocha geradora até uma região denominada de armadilha geológica, conforme indicam as setas na Figura 2.1. Uma explicação para o deslocamento do petróleo está relacionada com a presença de microfraturamento na rocha geradora causada pela alta pressão de compactação, o que possibilita o escoamento do fluido. Esse deslocamento é conhecido como migração primária.

Após migração primária, o petróleo executa outra migração, denominada de secundária. A migração secundária é conhecida como o percurso executado pelo petróleo ao longo de uma região que contenha rochas permeáveis e porosas. Segundo [14], essa migração só irá cessar quando o petróleo encontrar uma região conhecida como armadilha geológica, que é composta por rochas impermeáveis, conhecidas como selantes. É nessa região que o reservatório de petróleo será formado. A Figura 2.1 representa um esquema do reservatório de petróleo.

Sendo assim, pode-se definir um reservatório de petróleo como uma zona de acúmulo de petróleo que será explorado, economicamente, através de tecnologias economicamente viáveis para produzir uma quantidade considerável de hidrocarbonetos. Desta forma, quando uma região com essas características é encontrada, a perfuração do reservatório de petróleo é realizada, criando um poço de petróleo.



Figura 2.1: ESQUEMA DO RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO

O poço de petróleo é um furo, envolto por um tubo de aço, que permite acesso ao reservatório de petróleo. Ele é criado por um conjunto de equipamentos, denominados de sonda de perfuração, cuja finalidade é perfurar os locais onde se encontram os reservatórios de petróleo. Em geral, dentro desses reservatórios, o petróleo encontra-se submetido a grandes pressões de compressão e, quando um poço é perfurado, o petróleo é impulsionado em direção a ele pela energia natural do reservatório.

Contudo, durante o tempo de operação do poço de petróleo, o reservatório onde se encontra o petróleo é despressurizado lentamente. Sendo assim, em algum momento, a pressão subterrânea será insuficiente para forçar a subida do óleo. Então, algumas técnicas são utilizadas para aumentar a pressão do reservatório.

Para que o poço de petróleo esteja continuamente em operação, é necessário garantir que a pressão do reservatório onde se acumulou o petróleo seja maior que a pressão do poço perfurado, pois os fluidos se deslocam de um local com alta pressão para outro com baixa pressão. Contudo, durante a produção do petróleo, uma quantidade de água também é produzida, devido expansão de um aquífero de água que normalmente está presente abaixo do reservatório de petróleo.

Essa expansão ocorre devido à despressurização do reservatório. Segundo [10], a quantidade de água produzida é significantemente influenciada pela forma de produção do poço. Constate-se, também, que a produtividade nos poços de petróleo é reduzida quando a quantidade de água produzida aumenta. Em alguns casos, a produtividade de petróleo torna-se inviável, pois a alta quantidade de água produzida impede a extração do petróleo. Além disso, segundo [10], a água produzida junto com o petróleo pode apresentar níveis de sanilidade elevado, o que torna necessário aplicar um tratamento adequado para descartar a água na superfície ou reinjetar no reservatório.

O principal fator que contribui para a alta produtividade da água está relacionado com o fenômeno conhecido como cone de água. De acordo com [10], o cone de água é um fenômeno associado à invasão da água na zona de produção de óleo, quando a vazão utilizada para retirada do petróleo ultrapassa uma vazão conhecida como crítica. Um esquema do contato oléo e água é apresentado na Figura 2.2.



Figura 2.2: CONTATO ÓLEO E ÁGUA - fonte: [3] modificada

2.2 CONE DE ÁGUA

O fenômeno do cone de água está associado com o movimento ascendente da água na zona de produção do petróleo. Esse fenômeno causa sérios impactos na produtividade e na eficiência da recuperação do petróleo, além de acarretar os seguintes problemas:

- A água produzida, geralmente, tem alta salinidade, além de conter resíduos de produtos químicos (devido aos processos de perfuração e produção) associadas à partículas de óleo em suspensão e metais pesados. Além disso, algumas vezes, a água pode conter alguma radioatividade. Isto a torna um poluente de difícil descarte, pois o volume produzido é elevado. Logo, o descarte inadequado da água implica em efeitos nocivos ao meio ambiente;
- Pode ocorrer o abandono prematuro do poço perfurado, devido ao alto custo associado à produção do petróleo;

Logo, retardar a produção da água é essencial para controlar os fatores que maximizam a produção do petróleo, além de influenciar economicamente o custo da operação envolvida.

Segundo [4], quando o poço de petróleo é criado, nota-se uma queda de pressão dentro do mesmo, devido à extração do petróleo. Essa queda de pressão gera um conjunto de forças dinâmicas, ascendentes, que irão promover a invasão da água na zona de produção do óleo, até uma determinada altura, formando um cone de água estável. De acordo com [3], a origem dessas forças dinâmicas está associada ao gradiente de pressão e ao fluxo do fluido através do reservatório, gerando forças viscosas, que podem ser descritas pela lei de Darcy. Contrabalanceando as forças viscosas ascendentes, temos a presença da força gravitacional, no sentido vertical, que surge devido à diferença de densidade entre os fluidos.

Quando a vazão utilizada para retirar o petróleo for menor que a vazão crítica, o petróleo é retirado sem o avanço da água, pois o gradiente de pressão dentro do reservatório é constante e a resultante de forças é igual a zero. À medida que a vazão de produção aumenta, a altura do contato petróleo água cresce, até um certo limite. Quando esse limite é ultrapassado, forma-se um cone instável de água. Nesse momento, a água é produzida.

De acordo com [3], uma vez que a água se encontra nas vizinhaças do poço de petróleo, ela será retirada em detrimento do petróleo, pois sua mobilidade é maior. Vale ressaltar que, quanto mais viscoso for petróleo, maior será a produção de água, devido à menor mobilidade do petróleo (alta viscosidade). Segundo [10] e [4], o fator mobilidade e densidade entre o petróleo e a água é um dos fatores que mais influencia a formação do cone, pois a rapidez com que um fluido se move é inversamente proporcional à viscosidade.

Além disso, o formato do cone de petróleo está associado à forma como a perturbação da pressão se propaga no reservatório de petróleo. A intensidade do gradiente de pressão, segundo [3], é mais intensa nas vizinhas do poço de petróleo e diminui de maneira radial, causando deformação na fronteira da água que avança na direção do poço de petróleo. Essa deformação irá resultar em um formato de cone, dando, assim, o nome a esse fenômeno. O problema físico é representado na Figura 2.3.

Para minimizar a produção de água, uma das técnicas utilizada está relacionada à utilização de polímeros para diminuir a mobilidade da água. Outra maneira está relacionada à criação de barreiras artificiais para modificar a distribuição de pressão no reservatório. Segundo [10], a construção de um fraturamento horizontal próximo à interface do petróleo com a água, utilizando cimento, poderia ser uma barreira artificial a fim de diminuir a produção de água. Contudo, esse procedimento também poderia



Figura 2.3: CONE DE ÁGUA

prejudicar a extração do petróleo.

Logo, para estudar e compreender o fenômeno do cone de água, faz-se necessário a utilização de modelos físicos para representar o problema em questão. Sendo assim, os modelos utilizados hoje em dia são:

- 1. Analíticos;
- 2. Numéricos;
- 3. Experimentais.

2.3 MODELOS FÍSICOS UTILIZADOS

Segundo [4], um grande número de autores tem estudado o comportamento do cone de água através de modelos analíticos, numéricos e experimentais.

2.3.1 MODELOS ANALÍTICOS

A modelagem matemática é uma técnica que utiliza modelos experimentais e equações matemáticas para avaliar o comportamento de algum sistema submetido à investigação. Para validar um modelo matemático, alguns parâmetros devem ser considerados:

- O modelo matemático deve ser analisado e comparado com os resultados experimentais e numéricos;
- O modelo matemático deve ser capaz de apoiar teorias e hipóteses que explicam o comportamento observado, e predizer o comportamento futuro do sistema;

• O modelo matemático deve ser capaz de responder a mudanças de variáveis com a mesma sensibilidade apresentada pelo modelo experimental.

Assim, o modelo matemático deve ser capaz de oferecer as condições acima com o menor erro possível pois, quando os modelos possuem pouca afinidade com as considerações acima, esses devem ser substituídos por outros mais confiáveis.

Atualmente, os modelos analíticos utilizam as equações diferenciais para descrever o fenômeno do cone de água. Mais precisamente, esses modelos descrevem o escoamento de fluidos no meio poroso, aplicando o princípio de conservação de massa e a lei de Darcy. Contudo, de acordo com [10], os resultados encontrados pelos modelos analíticos apresentam disparidades entre si, devido às simplificações que as equações diferenciais podem assumir.

Essas considerações são feitas para facilitar a solução analítica, a fim de proporcionar resultados mais aproximados. Normalmente são consideradas soluções para regimes permanentes, que consideram a formação estável do cone. Isto implica na limitação da aplicação deste modelo ao problema.

Além disso, de acordo com [4], na condição de regime permanente há um equilíbrio entre forças viscosas e a força gravitacional, sendo que, a primeira, é induzida pelo fluxo dos fluidos e, a segunda, resultante da diferença de densidade dos fluidos. Logo, compreender as consequências que essas simplificações trarão aos resultados encontrados é de suma importância, já que o modelo analítico deve representar o problema físico da maneira mais fiel possível.

2.3.2 MODELOS NUMÉRICOS

As aplicações dos modelos numéricos têm crescido com o passar dos anos, já que o avanço dos computadores tem permitido sofisticar os modelos numéricos propostos, possibilitando aumentar a complexidade e heterogeneidade dos problemas. Essa é uma característica que torna o modelo numérico mais atraente do que o modelo analítico, uma vez que os modelos analíticos tratam como constante as características dos reservatórios para facilitar a manipulação das equações diferencias. Além disso, os modelos numéricos também possibilitam a análise do problema no regime transiente.

Sendo assim, a tarefa do método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo-se as derivas existentes por expressões algébricas que envolvam a função incógnita. Atualmente, os modelos numéricos utilizados concentram-se em simular o escoamento de fluidos em reservatórios, através da discretização das equações diferenciais ou integrais que governam o escoamento no espaço e no tempo. Uma das características da simulação numérica é permitir que as condições particulares de um problema real possam ser estudas sem perda de simplificação, fazendo com que os resultados encontrados sejam mais confiáveis. Outra vantagem desse método, de acordo com [10], está associada à generalidade que o método computacional apresenta, já que as características individuais de cada reservatório podem ser consideras sem a necessidade de simplificar o problema.

Nesse trabalho, a opção pelo método numérico como ferramenta de análise do problema está associada à facilidade de se aplicar a modelagem numérica a problemas transientes, já que os modelos analíticos são limitados a aplicações práticas simples, geralmente em problemas estacionários (problemas onde as variáveis se mantém constantes ao longo do tempo).

2.3.3 MODELOS EXPERIMENTAIS

Os modelos experimentais estudados em laboratórios têm sido utilizados em escala menor, a fim de prever o comportamento do cone de água. Nesses modelos, algumas características como: geometria de fluxo dos fluidos, penetração do poço no reservatório, vazão de produção de óleo, razão de mobilidade e espessura da zona de óleo são analisadas em condições de fluxo permanente. O aparamento experimental usado nesses modelos, em forma de escala, são as células de Hele-Shaw. Elas são utilizados para estudar o escoamento bidimensional de fluidos. Uma representação experimental da célula de Hele-Shaw, para representar o fenômeno do cone de água, é apresentada na Figura 2.4.



Figura 2.4: EXPERIMENTO DE HELE-SHAW - fonte:[11]

Essas células são utilizadas de modo que a complexidade apresentada pelos padrões de escoamento bifásico possam ser adequadamente visualizados e filmados. O estudo de escoamento bifásico em geometria plana é capaz de mostrar aspectos relevantes do comportamento entre o sistema água-óleo, produzindo importantes resultados que servem de base para solução de geometrias tridimensionais na presença de meios porosos. Além disso, a célula de Hele-Shaw também é usada para estudar o balanço de forças na interface que separa dois fluidos, como o óleo e a água. Nesse modelo, um fluido viscoso ocupa uma região limitada por duas placas paralelas, sendo injetado ou removido por um ponto arbitrário.

Capítulo 3 A EQUAÇÃO DE DARCY PARA UM ESCOAMENTO EM MEIO POROSO

3.1 ESCOAMENTO DE DARCY

O estudo do escoamento de um fluido em um meio poroso foi feito, primeiramente, por Henry Darcy. Em 1856, na cidade de Dijon, na França, Darcy investigou o comportamento do escoamento da água através de um filtro vertical contendo areia. O experimento de Darcy consiste em simular o escoamento de água, sob pressão, através de um cilindro de seção transversal A preenchido com areia até uma altura L. A Figura 3.1 representa um esquema do experimento de Darcy.



Figura 3.1: EXPERIMENTO DE DARCY - fonte: [2] modificada

A partir desse experimento, ele concluiu que a taxa de fluxo Q do fluido através do meio poroso se comportava de acordo com a seguinte equação:

$$Q = \frac{KA(\phi_1 - \phi_2)}{L} \tag{3.1}$$

onde:

- $\phi_1 e \phi_2 = \text{cabeça piezométrica};$
- K =condutividade hidraúlica;

Sendo que ϕ é definida como:

$$\phi = z + \frac{p}{\rho g} \tag{3.2}$$

Onde:

- z = elevação do fluido com relação a um referencial, com sentido positivo para baixo;
- p = pressão atmosférica;
- ρ = densidade do fluido;
- g = gravidade;

A condutividade hidráulica é definida como:

$$K = \frac{kg}{\nu} \tag{3.3}$$

Onde:

- k = permeabilidade absoluta do meio poroso;
- g = gravidade;
- ν = viscosidade cinemática do fluido

A equação (3.1) é uma importante lei usada para calcular o escoamento de petróleo e gás em rochas porosas. A partir dela será deduzida a equação diferencial governante do fluido em um meio poroso e sua respectiva equação integral.

3.2 VELOCIDADE DE DARCY E VELOCIDADE DO FLUIDO NO MEIO POROSO

Para o cálculo da velocidade de Darcy, iremos considerar a seguinte equação:

$$Q = \int_{A} V \cdot dA \tag{3.4}$$

Essa equação representa a taxa volumétrica, ou seja, o fluxo Q. Considerando que V seja uma velocidade média, temos como resultado da equação (3.4):

$$Q = VA \tag{3.5}$$

Igualando a equação (3.5) com a equação (3.1), iremos encontrar que:

$$VA = \frac{KA}{L}(\phi_1 - \phi_2) \tag{3.6}$$

Logo:

$$V = \frac{K}{L}(\phi_1 - \phi_2)$$
 (3.7)

Essa velocidade é conhecida como velocidade de Darcy ou velocidade superficial. Ela representa o comportamento médio do escoamento. De acordo com [5] ela não coincide com a velocidade real do fluido u_f pois, quando analisamos um escoamento na escala dos poros (microescala), percebe-se a interação do escoamento do fluido com uma grande quantidade de materiais (rochas, água, ar, etc). Quando existem essas interações, pode ocorrer a troca de momentum, energia e a massa entre os mesmos. Assim, um observador presente na escala macroscópica não é capaz de identificar as interações descritas acima.

Logo, segundo [5], a formulação das leis de conservação para o escoamento macroscópico de um meio poroso não é da mesma forma que a dos meios contínuos. Para formular tais leis, existem algumas técnicas (Teoria das Misturas, Média Volumétrica e o Método da Homogeneização) que propagam informações vindas da microescala para descreverem os fenômenos presentes na macrosescala.

Pode-se considerar que a lei de Darcy é valida para um fluido newtoniano incompressível que escoa em um meio poroso rígido completamente saturado pelo mesmo. A forma mais geral para a equação (3.8) é dada por:

$$u_f = \frac{K}{\Theta L} (\phi_1 - \phi_2) \tag{3.8}$$

onde Θ é a porosidade do meio. De acordo com [14], a porosidade mede a capacidade de armazenamento dos fluido. Ela é definida como a porosidade absoluta do meio e representa a relação entre o volume de total de vazios de uma rocha e o volume total da mesma. Matematicamente podemos definir essa porosidade como:

$$\Theta = \frac{Vol_{vazio}}{Vol_{total}} \tag{3.9}$$

Sendo assim, utilizando a equação (3.8) e a (3.7), podemos encontrar a seguinte relação para as velocidades:

$$V = \Theta u_f \tag{3.10}$$

Pode-se considerar que a equação (3.7) é um caso particular da equação (3.8).

3.3 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para finalizarmos a demonstração da equação diferencial governante do escoamento de um fluido em um meio poroso, considere a conservação de massa para um escoamento em meio poroso dada por:

$$\nabla \cdot (\Theta u_f) = 0 \to \nabla \cdot (V) = 0 \tag{3.11}$$

Podemos reescrever a velocidade da seguinte maneira:

$$V = \frac{K}{L} \nabla \phi \tag{3.12}$$

Substituindo esse resultado na equação (3.11), iremos encontrar a seguinte equação:

$$\nabla \cdot \left(\frac{K}{L}\nabla\phi\right) = 0 \to \frac{K}{L}(\nabla \cdot \nabla\phi) + \nabla\phi(\nabla \cdot \frac{K}{L}) = 0$$
(3.13)

Considerando que o termo (K/L) é constante, o segundo termo da equação torna-se zero. Logo, temos que:

$$\frac{K}{L}(\nabla \cdot \nabla \phi) = 0 \to \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \tag{3.14}$$

Ou seja:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \to \nabla^2 \phi = 0 \tag{3.15}$$

Com essa equação, iremos simular o escoamento do fluido em um meio poroso. A partir desta equação, usando o métododos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green, será deduzida a equação integral de contorno que, descretizada dá origem ao método dos elementos de contorno.

Capítulo 4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

4.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

Quando se busca solucionar um problema de engenharia, as soluções conhecidas como analíticas são normalmente desejadas. Uma solução analítica é uma expressão matemática que representa o valor exato da solução de um problema. Para conseguirmos uma solução analítica, faz-se necessário a existência de métodos matemáticos capazes de resolver equações algébricas, diferenciais e integrais. Contudo, encontramos diversos problemas práticos cujas soluções analíticas são difíceis ou impossíveis de serem obtidas

Sendo assim, com o passar dos anos, foram desenvolvidas técnicas matemáticas conhecidas como métodos numéricos que encontraram soluções aproximadas, através de um valor numérico, para esses complicados problemas. Segundo [7], as técnicas numéricas começaram a se desenvolver há centenas de anos atrás para resolverem problemas matemáticos. Porém, suas utilizações eram bastante limitadas, pois os cálculos eram realizados manualmente e com baixa precisão nos resultados. Hoje em dia, essas técnicas matemáticas são realizadas em computadores que permitem uma rápida execução de um grande número de cálculos em um curto espaço de tempo, produzindo soluções mais precisas. Atualmente, os métodos numéricos mais utilizados para encontrar soluções aproximadas de problemas físicos são:

- Método das Diferenças Finitas (MDF);
- Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Método dos Elementos de Contorno (MEC).

De acordo com [1], esses métodos são capazes de construir modelos discretos a partir do modelo contínuo. Isto resulta na substituição do sistema original por um outro mais simples, obtido através da discretização do problema. Assim, constatou-se que boas soluções são obtidas quando esse tipo de simplificação é realizada.

O MDF é classificado como um método diferencial. Trata-se de um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. Ele transforma equação diferencias em equações algébricas nos nós de um domínio, através da aproximação citada acima. De acordo com [8], o MEF transforma a equação diferencial governante do problema numa equação integral equivalente que trabalha com respostas desconhecidas. Essas equações integrais são aproximadas por um conjunto semelhante de equações integrais discretizadas, onde a resposta é desconhecida em um conjunto finito de nós. De acordo com [6], a resposta de cada elemento é caracterizada em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são representados como os valores das funções desconhecidas, em um conjunto de pontos nodais. A formulação do elemento é definida por equações algébricas obtidas de considerações matemáticas ou experimentais. A solução do sistema original é aproximada, pois um modelo discreto é construído pela conexão de todos os elementos.

Segundo [1], o MEF apresenta vantagens sobre o MDF, pois esse permite uma melhor aplicação das condições de contorno do problema e permite que a construção da malha apresente tamanho variável. Contudo, o método de MEF possui como característica, a utilização de um número muito grande de variáveis nas suas equações, consumindo, assim, um tempo computacional muito grande. Além disso, a entrada e saída de dados são muito trabalhosas quando o problema é complexo.

O outro método computacional utilizado é o MEC, que é um método integral. Nesse trabalho será utilizado o MEC, também conhecido como Boundary Element Method (BEM). O MEC consiste em obter as equações integrais somente com informações do contorno de um problema. Podemos definir uma equação integral como uma equação que contém uma função operada por uma integral.

Uma das vantagens do MEC sobre o MDF e o MEF é que ele diminui, em uma ordem, a dimensão do problema proposto. Logo, existe uma diminuição na quantidade de dados de entrada, no tempo de processamento e no armazenamento das informações processadas, propiciando, uma menor quantidade de operações aritméticas. Além disso, utilizando MEC, segundo [1], encontramos soluções mais precisas, pois esse trabalha com soluções de equações integrais sem aproximação no domínio (apenas as considerações de contorno e a geometria são aproximadas). Outra característica do MEC é a obtenção das informações do domínio a partir das variáveis de contorno. Isso acontece porque os valores das variáveis nos pontos internos de um problema podem ser escritos como funções das variáveis externas presentes no contorno. Vale ressaltar, ainda, que o MEC é interessante para problemas que requerem alteração constante na malha de uma estrutura para aperfeiçoar a solução de um problema. O MEC também é interessante em problemas que trabalham com um domínio infinito, como na geologia, acústica e escoamento com superfície livre.

Contudo, a aplicação desse método é comercialmente menos utilizada, pois ela está limitada a problemas que apresentam as chamadas soluções fundamentais ou funções de Green. Uma função de Green é um tipo de função usada para resolver equações diferenciais homogêneas não sujeitas a condições de contorno. A existência de uma solução fundamental é necessária para fazermos a transformação da equação diferencial que governa o problema para uma equação integral de contorno. Essa transformação é feita utilizando a solução fundamental do problema com o Teorema Gauss-Green.

A formulação do MEC é obtida a partir da discretização da equação integral que governa o problema proposto. Quando essa discretização é realizada, um conjunto de equações algébricas é obtido e, quando solucionamos essas equações, estaremos encontrando as incógnitas do contorno. Antes de apresentarmos a formulação do método de elemento de contorno para equação de Laplace, algumas relações matemáticas irão ser apresentadas.

4.1.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do cálculo é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são considerados como inverso um do outro. Logo, ele estabelece uuma importante conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Sendo assim, considere a preposição:

Seja f contínua em um intervalo [a, b]. Seja F uma anti-derivada de f[a, b]. Então:

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$
(4.1)

4.1.2 TEOREMA GAUSS GREEN (2-D)

O teorema Gauss-Green é uma identidade que relaciona uma integral de domínio com integral de contorno do respectivo domínio. Considere uma função f(x, y), contínua em um domínio de área A (Figura 4.1) limitada por um contorno S.



Figura 4.1: GAUSS-GREEN - fonte: [9] modificada

A integral da derivada de f em relação a x ao longo da área A é dado por:

$$\int_{A} \frac{df}{dx} da = \int_{y_2}^{y_1} \int_{x_2}^{x_1} [f(x)dx] dy$$
(4.2)

Utilizando o teorema fundamental do cálculo dado pela equação (4.1), teremos:

$$\int_{A} \frac{df}{dx} da = \int_{y_2}^{y_1} \int_{x_2}^{x_1} [f(x)dx] dy = \int_{y_2}^{y_1} [f(x_2, y) - f(x_1, y)] dy$$
(4.3)

Pela relações geométricas mostradas na (Figura 4.2), tem-se que:



Figura 4.2: VETORES - fonte: [9] modificada

$$\vec{u_1} = \Delta x \vec{e_x} + \Delta y \vec{e_y} \tag{4.4}$$

$$|u_1| = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \Delta s \tag{4.5}$$

Considere o seguinte limite:

$$\vec{t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|} = \lim_{\Delta s \to 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta s} \vec{e_x} + \frac{\Delta y}{\Delta s} \vec{e_y} \right] = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} \vec{e_x} + \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} \vec{e_y}$$
(4.6)

Então:

$$t = \frac{dx}{ds}e_x + \frac{dy}{ds}e_y \tag{4.7}$$

Considere que o vetor \vec{n} seja um vetor unitário ao contorno S apontando para fora do domínio A. Assim, tem-se:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} \tag{4.8}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \to n_x t_x + n_y t_y = 0 \tag{4.9}$$

Uma vez que \vec{n} é unitário, tem-se:

$$\sqrt{(n_x)^2 + (n_y)^2} = 1 \tag{4.10}$$

Assim, temos duas possibilidades, uma vez que \vec{t} é também unitário:

$$\begin{cases} n_x = t_y; n_y = t_x \to (n_y)n_x + (-n_x)(n_y) = 0\\ n_x = -t_y; n_y = t_x \to (-n_y)n_x + (n_x)(n_y) = 0 \end{cases}$$
(4.11)

Da figura, nota-se que se $t_x > 0$
e $t_y > 0$, então o vetor \vec{n} tem como componente
s $n_x > 0$ e $n_y < 0$. Daí, conclui-se que:

$$n_x = t_y; n_y = -t_x \tag{4.12}$$

Da equação (4.7), tem-se que:

$$t_x = \frac{dx}{ds}; t_y = \frac{dy}{ds} \tag{4.13}$$

O vetor \vec{t} é sempre definido percorrendo S no sentido anti-horário, se S for um contorno externo e horário, caso S seja um contorno interno.



Igualando (4.12) e (4.13), tem-se que:

$$dy = n_x ds; dx = -n_y ds \tag{4.14}$$

Assim, substituindo esse resultado na equação (4.3), temos:

$$\int_{A} \frac{df}{dx} dA = \oint_{S_2} f(x_2, y) n_x ds + \oint_{S_1} f(x_1, y) n_x ds$$

$$(4.15)$$

$$\int_{A} \frac{df}{dx} dA = \oint_{S} f(x, y) n_x ds \tag{4.16}$$

Desenvolvendo a mesma relação para $\frac{df}{dy}$, iremos encontrar que:

$$\int_{A} \frac{df}{dy} dA = -\oint_{S} f(x,y) n_y ds \tag{4.17}$$

As equações (4.16) e (4.17) representam o teorema de Gauss-Green no plano. Este teorema será usado na seção seguinte para a dedução da equação integral de contorno.

4.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Conforme mostrado no capítulo 3, a equação de Laplace é dada por:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{4.18}$$

Para obtermos a equação integral de contorno referente a equação de Laplace, utilizaremos um método de aproximação conhecido como métodos dos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green. De acordo com [13], o método de resíduos ponderados é um método da física matemática e da análise que serve de base para o método dos elementos finitos e para outros métodos numéricos. Sendo assim, considere o produto da equação (4.18) por uma função ϖ .

$$(\nabla^2 \phi, \varpi) = \int\limits_A \nabla \phi^2 \cdot \varpi dA \tag{4.19}$$

onde ϖ é uma função de ponderação qualquer, contínua ao longo do domínio A.

Expandindo esse produto, tem-se:

$$\int_{A} \nabla \phi^2 \cdot \varpi dA = \int_{A} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \varpi dA \tag{4.20}$$

$$\int_{A} \nabla \phi^2 \cdot \overline{\omega} dA = \int_{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \overline{\omega} dA + \int_{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \overline{\omega} dA$$
(4.21)

Considerando o teorema Gauss-Green como:

$$\int_{A} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \oint_{S} f(x, y) n_x ds \tag{4.22}$$

Na equação (4.22), podemos considerar que:

$$f = \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi \tag{4.23}$$

Então, substituindo a equação (4.23) no teorema de Gauss-Green, temos:

$$\int_{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi \right) dA = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds \tag{4.24}$$

Aplicando a regra da cadeia no lado esquerdo da equação (4.24), iremos encontrar que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \varpi + \frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
(4.25)

Substituindo esse resultado na equação (4.24), iremos encontrar que:

$$\int_{A} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \varpi + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds \tag{4.26}$$

$$\int_{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \varpi dA + \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds \tag{4.27}$$

$$\int_{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \varpi \, dA = -\int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA + \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds \tag{4.28}$$

Considerando o mesmo resultado para a variável y, iremos encontrar:

$$\int_{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \varpi dA = -\int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \varpi}{\partial y} \right) dA + \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varpi n_y ds \tag{4.29}$$

Substituindo as equações (4.28) e (4.29) na equação (4.21), iremos encontrar:

$$\int_{A} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \varpi dA = - \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA + \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds$$
$$- \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \varpi}{\partial y} \right) dA + \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varpi n_y ds \tag{4.30}$$

Reorganizando a equação (4.30), temos:

$$\int_{A} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \varpi da = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varpi n_x ds + \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial y} \varpi n_y ds$$
$$- \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA - \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \varpi}{\partial y} \right) dA \tag{4.31}$$

Utilizando novamente o teorema Gauss-Green para o último termo do lado direito da equação (4.31), iremos encontrar que:

$$f = \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi \tag{4.32}$$

Então:

$$\int_{A} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \oint_{S} f(x, y) n_x ds \to \int_{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} da \right) = \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi dS$$
(4.33)

Aplicando a regra da cadeia no lado esquerdo da equação (4.33), iremos encontrar que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi \right) = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x}$$
(4.34)

Substituindo esse resultado na equação (4.33), iremos encontrar que:

$$\int_{A} \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA = \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi n_x ds \tag{4.35}$$

$$\int_{A} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \phi dA + \int_{A} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dA = \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi n_x ds$$
(4.36)

$$\int_{A} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA = -\int_{A} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \phi dA + \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi n_x ds \tag{4.37}$$

Considerando o mesmo resultado para a variável y, iremos encontrar:

$$\int_{A} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA = -\int_{A} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \phi dA + \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial y} \phi n_y ds \tag{4.38}$$

Igualando os dois resultados, acima, com o último termo do lado direito da equação (4.31), iremos encontrar:

$$\int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA + \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA = -\int_{A} \frac{\partial^{2} \omega}{\partial x^{2}} \phi dA + \oint_{S} \frac{\partial \omega}{\partial x} \phi n_{x} ds$$

$$- \int_{A} \left(\frac{\partial^{2} \omega}{\partial y^{2}} \phi \right) dA + \oint_{S} \frac{\partial \omega}{\partial y} \phi n_{y} ds$$
(4.39)

Reorganizando a equação (4.39), temos:

$$\int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA + \int_{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \right) dA = -\int_{A} \frac{\partial^{2} \varpi}{\partial x^{2}} \phi dA - \int_{A} \frac{\partial^{2} \varpi}{\partial y^{2}} \phi dA + \left[\oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial x} \phi n_{x} ds + \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial y} \phi n_{y} ds \right]$$
(4.40)

Substituindo esse resultado na equação (4.31), iremos encontrar:

$$\int_{A} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \varpi da = \oint_{S} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] \varpi dS + \int_{A} \left[\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right] \phi dA - \oint_{S} \left[\frac{\partial \varpi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} n_y \right] \phi ds$$

$$(4.41)$$

Agora, considere as seguintes simplificações:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \tag{4.42}$$

$$\nabla^2 \varpi = \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial n} = \frac{\partial \varpi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} n_y \tag{4.44}$$

Substituindo esse três resultados na (4.41), iremos encontrar que:

$$\int_{A} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \cdot \varpi da = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial n} \varpi ds - \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial n} \phi ds + \int_{A} \nabla^2 \varpi \phi dA \tag{4.45}$$

$$\int_{A} \nabla^2 \phi \cdot \varpi da = \oint_{S} \frac{\partial \phi}{\partial n} \varpi ds - \oint_{S} \frac{\partial \varpi}{\partial n} \phi ds + \int_{A} \phi \nabla^2 \varpi dA$$
(4.46)

$$\int_{A} \nabla^2 \phi \cdot \varpi da = \oint_{S} \left[\varpi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varpi}{\partial n} \right] ds + \int_{A} \phi \nabla^2 \varpi dA \tag{4.47}$$

Igualando a equação (4.47) com a equação (4.18), tem-se:

$$\oint_{S} \left[\varpi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varpi}{\partial n} \right] ds + \int_{A} \phi \nabla^2 \varpi dA = 0$$
(4.48)

Como pode ser notado, a equação (4.48) possui apenas uma integral de domínio na qual aparece o laplaciano da função de ponderação. Desta forma, para transformar esta equação em uma equação integral de contorno pura, teoricamente basta cosiderar como função de ponderação uma função harmônica (função cuja laplaciano não é zero). Entretanto, esta escolha não é apropriada para o propósito de se gerar um sistema linear com o número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas. Conforme será mostrado no decorrer deste capítulo, uma escolha adequada para a função de ponderação é uma função cujo laplaciano é igual ao delta de Dirac, ou seja:

$$\nabla^2 \varpi = \delta(x - x') \tag{4.49}$$

Neste caso, a equação (4.48) é reescrita como:

$$\oint_{S} \left[\varpi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varpi}{\partial n} \right] ds + \int_{A} \phi \delta(x - x') dA = 0$$
(4.50)

ou seja:

$$\phi(x - x') = \oint_{S} \left[\varpi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \varpi}{\partial n} \right] ds$$
(4.51)

A questão agora é resolver analiticamente a equação (4.49) para se calcular a função de ponderação. A função de ponderação, neste caso, é conhecida como solução fundamental ou função de Green e, sua dedução será feita no decorrer deste capítulo.

4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Em matemática, pode-se entender a solução fundamental, de um operador diferencial parcial, como a solução da seguinte equação:

$$\nabla^2 \phi^* = \delta(x - x') \tag{4.52}$$

Sendo que δ é um delta de Dirac. Uma função que satisfaz a equação acima é dada por:

$$\nabla^2 \phi^* = A(\ln(R)) \tag{4.53}$$

onde R é a distância entre um ponto chamado de fonte e outro ponto conhecido como ponto campo. Além disso, A é uma constate a ser determinada. Considerando que o ponto fonte esteja localizado na origem do sistema de coordenadas, de acordo com a Figura 4.3, então temos:



Figura 4.3: PONTO FONTE E PONTO CAMPO - fonte: Notas de aula - Eder

$$R^{2} = (x - 0)^{2} + (y - 0)^{2} = x^{2} + y^{2}$$
(4.54)

Sendo assim, considere que:

$$\nabla^2 \phi^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} \tag{4.55}$$

Desenvolvendo as derivadas na equação (4.55), iremos encontrar que:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial x} = \frac{A ln(R)}{\partial x} = A \frac{\partial ln(R)}{\partial x} + ln(R) \frac{\partial A}{\partial x} = A \left[\frac{\partial ln(R)}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \right] + 0$$
(4.56)

Considere que:

$$\frac{\partial ln(R)}{\partial x} = \frac{1}{R} \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2)^{0.5}}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{0.5} (2x)$$
(4.58)

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{0.5}} = \frac{x}{R}$$
(4.59)

Então, substituindo esses resultados na equação (4.52), iremos encontrar que:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial x} = A \left[\frac{\partial ln(R)}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \right] = A \left[\frac{1}{R} \frac{x}{R} \right] = \frac{Ax}{R^2}$$
(4.60)

Derivando novamente a equação (4.56), tem-se:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial^2 x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{Ax}{R^2} = \frac{AR^2(\frac{\partial x}{\partial x}) - Ax\frac{\partial R^2}{\partial x}}{R^4}$$
(4.61)

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial^2 x} = \frac{AR^2}{R^4} - \frac{2x^2 A}{R^4} = \frac{A}{R^2} - \frac{2x^2 A}{R^4}$$
(4.62)

Desenvolvendo o mesmo resultado para $\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2},$ iremos encontrar que:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} = \frac{A}{R^2} - \frac{2y^2 A}{R^4} \tag{4.63}$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} = \frac{A}{R^2} - \frac{2x^2 A}{R^4} + \frac{A}{R^2} - \frac{2y^2 A}{R^4} = \frac{2A}{R^2} - \frac{2x^2 A}{R^4} - \frac{2y^2 A}{R^4}$$
(4.64)

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} = 2A \left(\frac{1}{R^2} - \frac{x^2}{R^4} - \frac{y^2}{R^4} \right)$$
(4.65)

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \phi^* = 2A\delta(x-0) \tag{4.66}$$

Igulando essa equação com equação (4.52), iremos encontrar que:

$$2A\delta(x-0) = \delta(x-0) \to 2A = -1 \to A = \frac{-1}{2}$$
(4.67)

Assim, temos:

$$\phi^* = \frac{-1}{2} ln(R) \tag{4.68}$$

Uma vez que a equação de Darcy é escrita como:

$$Q = \frac{KA}{L} \nabla \phi^* \tag{4.69}$$

E considerando que:

$$q = \frac{Q}{A} \tag{4.70}$$

Tem-se:

$$q = \frac{K}{L} \nabla \phi^* \tag{4.71}$$

Então:

$$q = \frac{K}{L} \nabla \left(-\frac{1}{2} ln(R) \right) = \frac{-K}{2L} \nabla (ln(R))$$
(4.72)

$$q = -\frac{K}{2L} \left[\frac{\partial ln(R)}{\partial x} n_x + \frac{\partial ln(R)}{\partial y} n_y \right]$$
(4.73)

Considerando que os resultados de $\frac{\partial ln(R)}{\partial x}$ e $\frac{\partial ln(R)}{\partial y}$ são conhecidos, temos então:

$$q = \frac{K}{2L} \left[\frac{x}{R^2} n_x + \frac{y}{R^2} n_y \right] \tag{4.74}$$

4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Fazendo $\varpi = \delta^*$, a equação (4.51) pode ser escrita como:

$$\phi(x') = \oint_{S} \phi \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} ds - \oint_{S} \phi^{*} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.75)

A equação acima representa a integral de contorno para o ponto fonte no interior do domínio, pois utilizou-se um delta de Dirac no domínio. Sendo assim, para considerar o ponto x' no contorno, faz-se uma pequena modificação no domínio. Considere a Figura 4.4 e a equação resultante dessa transformação:



Figura 4.4: CONTORNO MODIFICADO - fonte: Notas de aula - Eder

$$\phi(x') = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \oint_{S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.76)

Considerando que:

$$q^* = \frac{K}{L} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \tag{4.77}$$

$$q^* = \frac{K}{2LR^2}(xn_x + yn_y)$$
(4.78)

Igualando as equações (4.77) e (4.78):

$$\frac{K}{2LR^2}(xn_x + yn_y) = K\frac{\partial\phi^*}{\partial n} \to \frac{1}{2LR^2}(xn_x + yn_y) = \frac{\partial\phi^*}{\partial n}$$
(4.79)

Substituindo esse resultado na equação (4.76) iremos encontrar que:

$$\phi(x') = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} (xn_x + yn_y) ds - \oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (4.80)$$

Considerando que:

$$n_x = \frac{R_x}{R}, n_y = \frac{R_y}{R} \tag{4.81}$$

Podemos escrever que:

$$\phi(x') = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds - \oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (4.82)$$

Além disso:

$$ds = \epsilon d\theta \tag{4.83}$$

Assim, analisando a seguinte integral:

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) \epsilon d\theta$$
(4.84)

Como $\epsilon = R$, $x = R_x$ e $y = R_y$ temos:

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \oint_{S'} \phi \frac{1}{2\epsilon^2} \left(R_x \frac{R_x}{\epsilon} + R_y \frac{R_y}{\epsilon} \right) \epsilon d\theta$$
(4.85)

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \oint_{S'} \phi \frac{1}{2\epsilon^2} \left(\frac{R_x^2}{\epsilon} + R_y^2 \epsilon \right) \epsilon d\theta \tag{4.86}$$

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \oint_{S'} \phi \frac{1}{2\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon} \right) \epsilon d\theta \tag{4.87}$$

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \oint_{S'} \phi \frac{\epsilon^3}{2\epsilon^3} d\theta = \oint_{S'} \frac{\phi}{2} d\theta$$
(4.88)

Quando o limite de $(\epsilon \rightarrow 0)$ é considerado na equação acima, temos como resultado:

$$\oint_{S'} \phi \frac{1}{2R^2} \left(x \frac{R_x}{R} + y \frac{R_y}{R} \right) ds = \frac{\phi(d)}{2} (\theta_2 - \theta_1) \tag{4.89}$$

Fazendo a mesma análise, acima, para a seguinte integral:

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \oint_{S'} \left(-\frac{1}{2} ln(R) \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.90)

Considerando que $R = \epsilon$ e $ds = \epsilon d\theta$, iremos encontrar o seguinte resultado:

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \oint_{S'} \left(-\frac{1}{2} ln(\epsilon) \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \epsilon d\theta$$
(4.91)

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \left(-\frac{1}{2} ln(\epsilon) \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \epsilon \oint_{S} d\theta$$
(4.92)

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \left(-\frac{1}{2} ln(\epsilon) \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \epsilon \oint_{S} d\theta$$
(4.93)

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \left(-\frac{1}{2} ln(\epsilon) \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \epsilon(\theta_2 - \theta_1)$$
(4.94)

Quando o limite de $(\epsilon \rightarrow 0)$ na equação acima é consider
do, temos como resultado:

$$\oint_{S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0 \tag{4.95}$$

Então, a equação (4.82) fica da seguinte forma:

$$\phi(x') = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \frac{\phi(x')}{2} (\theta_2 - \theta_1) - 0$$
(4.96)

$$\phi(x') - \frac{\phi(x')}{2}(\theta_2 - \theta_1) = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.97)

$$\phi(x')\left(1-\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) = \oint_{S-S'} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \oint_{S-S'} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.98)

A equação acima pode ser generalizada para a seguinte forma:

$$\phi(x')c = \oint_{S} \phi \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} ds - \oint_{S} \phi^{*} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.99)

Onde $c = (1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2})$. Esse termo é conhecido como ângulo interno do contorno.

4.5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Uma vez obtida a integral de contorno, o próximo passo é a discretização desta equação de forma que a integrais, ao longo deste contorno, sejam escritas como a soma de (N_e) pequenos segmentos (S_j) . Sendo assim, considere a equação (4.99) e a Figura 4.5 abaixo:



Figura 4.5: CONTORNO DISCRETIZADO - fonte [9]

$$\sum_{j}^{N_e} S_j = S \tag{4.100}$$

A equação (4.99) pode ser escrita como:

$$\phi(x')c = \sum_{j}^{N_e} \oint_{S_j} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds - \sum_{j}^{N_e} \oint_{S_j} \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.101)

Sendo assim, para continuar a resolução do problema, iremos continuar a desenvolver a equação (Cap4Eq.101), considerando c = frac12:

$$\frac{1}{2}\phi(x')^{i} = \sum_{j}^{N_{e}} \oint_{S_{j}} \phi \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} ds - \sum_{j}^{N_{e}} \oint_{S_{j}} \phi^{*} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$
(4.102)

$$-\frac{1}{2}\phi(x')^{i} + \sum_{j}^{N_{e}} \oint_{S_{j}} \phi \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} ds - \sum_{j}^{N_{e}} \oint_{S_{j}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^{*} ds = 0$$

$$(4.103)$$

Considerando as equações abaixo:

$$H_{ij} = \begin{cases} \oint \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds & se \quad i \neq j \\ -\frac{1}{2} + \oint \frac{\partial \phi^*}{\partial n} ds & se \quad i = j \end{cases}$$
(4.104)

$$G_{ij} = \oint_{S_j} \phi^* ds \tag{4.105}$$

A equação (4.102) ficará da seguinte forma:

$$\sum_{j}^{N_e} [H_{ij}\phi]_j = \sum_{j}^{N_e} [G_{ij}(\frac{\partial\phi^*}{\partial n})]_j$$
(4.106)

As matrizes $\mathbf{H} \in \mathbf{G}$ são quadradas e retangular, da ordem N_e . O potencial e o fluxo são vetores que contêm os pontos nodais do potencial de velocidade e de fluxo.

Além disso, de acordo com [9], a essência do MEC é discretizar o contorno em um número finitos de segmentos. Eles são chamados de elementos de contorno e, normalmente, não possuem o mesmo comprimento. Os elementos de contorno são compostos por dois tipos de pontos. O primeio deles é chamado de ponto nodal e, o segundo, é chamado de ponto extremos. No ponto nodal colocamos o valor assumido pela condição de contorno. Já os pontos extremos são utilizados utilizado para delimitar os segmentos.

Além disso, os elementos de contorno podem ser classificados quanto a ordem dos elementos em:

- Elementos Constantes;
- Elementos Lineares;
- Elementos Quadráticos.

Nesse trabalho serão utilizados os elementos de contorno lineares, que serão apresentados abaixo.

4.5.1 ELEMENTOS DE CONTORNO LINEARES

Os elementos de contorno lineares são aproximado por linhas retas e, nos seus extremos, temos os pontos nodais. Sendo assim, temos uma variação linear da condição de contorno. A Figura 4.6 ilustra um elemento de contorno linear.



Figura 4.6: ELEMENTO DE CONTORNO LINEAR - fonte: [9]

Sendo assim, considere que as partes do contorno $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ sejam aproximadas por segmentos retilíneos e, ao longo destes segmentos, o potencial e a velocidade tenham variações lineares.

Capítulo 5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

5.1 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Com a finalidade de validar a formulação implementada, serão analisados 3 problemas numéricos neste trabalho. O primeiro, trata-se de um problema de condução de calor de solução analítica conhecida. A equação governante do problema de condução de calor é a equação de Laplace, ou seja, a mesma equação governante de escoamento em meio porosos. O segundo problema trata-se de um escoamento através de um tubo. Este problema foi apresentado por [9] e a solução obtida neste trabalho será comparada com a solução de [9]. Finalmente, o terceiro problema trata-se de um problema de escoamento em meio poroso com a superfície livre. Neste problema, a forma da superfície livre é determinada em função do fluxo normal perpendicular a superfície.

5.1.1 DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM PLACA

O primeiro problema que valida a aplicação do método de elemento de contorno em problemas governados pela equação de Laplace é apresentado a seguir. Nesse problema, é feita uma análise do perfil de temperatura de uma placa sujeita as condições de contorno mostrados na Figura 5.1. A equação diferencial governante do problema é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \to \nabla^2 T = 0$$
(5.1)



Figura 5.1: CONDIÇÕES DE CONTORNO - fonte: Notas de aula - Eder

O resultado analítico da distribuição de temperatura é apresentada pela equação (5.2). Para compararmos os resultados analítico e do MEC, será utilizada a equação (5.3) para o cálculo do erro percentual. Então, temos:

$$T^{anl} = \frac{\sinh(\pi x)\cos(\pi y)}{\sinh(\pi)}$$
(5.2)

$$\epsilon\% = 100\% \frac{|T^{anl} - T|}{T^{anl}}$$
(5.3)

O erro que iremos apresentar refere-se à diferença entre o resultado analítico e o resultado do MEC para um ponto interno de coordedanas (1/3; 1/3). Foi utilizada uma malha de 72 elementos de contorno (24 por lado). A Figura 5.2 mostra a distrbuição de temperatura do problema. Então, tem-se que:



$$\epsilon = 0.0441 \tag{5.4}$$

Figura 5.2: DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA

5.1.2 ESCOAMENTO DE FLUIDO EM TUBO

O segundo problema trata-se de um escoamento laminar, incompressível e inviscido de um fluido através de um tubo. Esse problema se relaciona a uma classe de escoamentos em que o campo de velocidades é determinado pelo gradiente da função potencial ϕ . De acordo com [9], esse escoamento é governado pela equação de Laplace. Para resolver esse problema, é necessário considerar todas as informação do contorno. Sendo assim, considere a Figura 5.3 e as condições de contorno do problema, dadas por:



Figura 5.3: ESCOAMENTO EM TUBO - fonte: [9] modificada

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -1 \quad \text{em AA'}; \tag{5.5}$$

$$\phi = 0 \quad \text{em } \quad \text{DD}'; \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em ABDC};$$
 (5.7)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } A'B'C'D';$$
 (5.8)

Foi utilizada uma malha de 64 elementos de contorno (8 por lado). A partir dessas condições, os resultados encontrados por [9] e os resultados encontrados pelo método de elemento de contorno são apresentados na Figura 5.4 e na Figura 5.5, respectivamente. Eles se referem ao potencial de velocidade do escoamento.

Pode-se observar uma perfeita concordância entre os resultados obtios neste trabalho e os resultados acima.



Figura 5.4: POTENCIAL DE VELOCIDADE - Katsikadelis - fonte: [9] modificada



Figura 5.5: POTENCIAL DE VELOCIDADE - MEC

5.2 ESCOAMENTO EM MEIO POROSO COM SUPERFÍCIE LIVRE

Neste trabalho será feito a simulação do bombeamento de um reservatório de água. Tal modelo foi adotado devido às considerações feitas na introdução desse trabalho. Sendo assim, considere a Figura 5.6.



Figura 5.6: RESERVATÓRIO DE ÁGUA - fonte: [16] modificada

Para simular esse escoamento, utilizamos o MEC. O reservatório de água foi considerado um quadrado de área igual a 1 m² (H = 1 m e W = 1 m). As condições de contorno foram adotadas de acordo com [16] e seus respectivos valores são apresentados abaixo:

Tabela 5.1: Condições de contorno				
	Potencial	Fluxo		
Linha 1	desconhecido	0		
Linha 2	1	desconhecida		
Linha 3	y	desconhecida		
Linha 4	1	desconhecida		

Além disso, cada lado foi discretizado em 16 segmentos, compostos por elementos de contorno lineares. O ponto onde foi colocado a bomba, denominado de sorvedouro, na figura acima, está presente no meio da linha 1. Sendo assim, o desenho esquemático do problema será apresentado na Figura 5.7. Os pontos em verde, dentro do reservatório, representam os pontos internos do domínio. Esses pontos são necessários, pois desejamos obter, também, a resposta do problema no domínio do sistema e, essas resposta, são obtidas utilizando equação integral de contorno nos pontos internos. Além

disso, as condições de contorno para o para o potencial são representadas nas linhas 2, 3 e 4. As condições de contorno para fluxo é representada na linha 1.



Figura 5.7: RESERVATÓRIO DISCRETIZADO

Por fim, para deformamos a superfície do fluido, iremos utilizar a equação (5.20). De acordo com [2], a superfície de um fluido é sempre composta da mesma partícula. Logo, a equação que descreve uma superfícies é:

$$F(x, y, z, t) = 0$$
 (5.9)

Além disso, essa superfície é considerada uma superfície livre e, de acordo com [2], superfícies livres são aquelas em que a pressão atmosférica é assumida como p = 0e, quando a superfície se deformar, o ar irá ocupar os espaços vazios. Contudo, vale considerar que, em situações reais, a *capillary fringe* pode estar localizada acima, do lado ou abaixo da superfície livre. *Capillary fringe* pode ser definida como uma faixa estreita, na qual a água pode ter movimento descendente, por acção da força de gravidade, e movimento ascendente, por acção das forças de capilaridade entre partículas adjacentes. Trata-se de uma zona em que a água está em movimento constante.

Sendo assim, de acordo com [2], podemos definir a superfície livre como uma superfície freática, pois ela é descrita por p = 0. Logo, quando assumimos essa condição, devemos negligenciar o efeito da *capillary fringe* e, devemos assumir que a superfície livre é uma interface abrupta entre o ar e a água no espaço vazio.

Contudo, a localização e a forma da geometria da superfície livre são desconhecidas. De acordo com [2], esse contorno é chamado de fronteira flutuante. Logo, para representarmos o movimento da superfície livre, devemos utilizar a equação (5.9) e a seguinte condição:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F = 0 \tag{5.10}$$

Sendo que \mathbf{V} é a velocidade das partículas pertencentes a superfície livre, ela está relacionada com a seguinte equação:

$$\mathbf{V} = \frac{K}{L} \nabla \phi \tag{5.11}$$

onde n_e é definido como a porosidade efetiva com respeito ao fluxo. Substituindo esse resultado na equação (5.10), temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{K}{L} \nabla \phi \cdot \nabla F = 0 \tag{5.12}$$

Na equação (5.12), podemos subsituir F(x, y, z) por $\varphi(x, y, z)$, pois, de acordo com [2], a equação que descreve a geometria da superfície livre do fluido pode estar relacionada com as coordenadas dos pontos da mesma. Logo, a ssociação feita acima é valida. Porém, vale considerar que o $\phi(x, y, z)$ da superfície livre é dado por:

$$\phi(x,y,z) = z + \frac{p}{\rho g} \to \phi(x,y,z) - z = 0 \to F \equiv \phi(x,y,z) - z \tag{5.13}$$

$$\nabla F = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{z} + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{z}$$
(5.14)

Então, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{K}{L} \nabla \phi \cdot \nabla F = 0 \tag{5.15}$$

Então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{K}{L} (\nabla \phi \cdot \nabla F) = 0$$
(5.16)

De acordo com [2], a equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{K}{L} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right] = 0$$
(5.17)

E, a equação (5.17) pode ser linearizada para a seguinte condição:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{K}{L} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{K}{L} q_z = 0$$
(5.18)

Sendo que:

$$q_z = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \tag{5.19}$$

Por fim, podemos escrever a seguinte igualdade, a partir da 5.8:

$$q_z = \frac{q}{\cos(\theta)} \tag{5.20}$$



Figura 5.8: Superfície freática

A equação acima representa a a condutividade hidráulica na direção do fluxo. Sendo assim, podemos escrever a (5.18) como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{K}{L}q_z = 0 \to \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q}{\cos(\theta)} = 0$$
(5.21)

Assim, a equação acima foi utilizada para representar a deformação da superfície livre quando ocorre o bombeamento do reservatório de água. Além disso, a porosidade L e a condutividade hidráulica K foram considerados igual a 1.

5.3 RESULTADOS

Os resultados para este problema foi satisfatório quando se considerou pequena a potência da bomba ou pequeno o tempo em que a bomba permanece ligada, conforme pode ser mostrado na figura 5.9

Para tempos ou potênciaS maiores, há uma instabilidade na resposta, conforme mostra as figuras 5.10 e 5.11. Foram implementados procedimentos alternativos para a integração no tempo, tais como Runge Kuta com passo adaptativo [12] e o uso das functions ode23 e ode45 do MatLab. Porém, em todos os casos a instabilidade se manteve.



Figura 5.9: BOMBEAMENTO DE 4 SEGUNDOS



Figura 5.10: BOMBEAMENTO DE 6 SEGUNDOS



Figura 5.11: BOMBEAMENTO DE 69 SEGUNDOS

Esta instabilidade é relatada em outros trabalhos da literatura. O autor [15] explica que esta instabilidade é devido às quinas formadas durante a deformação da superfície livre, o que causa descontinuidades na derivada da forma da superfície. Ele recomenda o uso de funções de forma B-Spline, de maneira que não haja descontinuidades nas derivadas da forma da superfície livre. As funções B-Splines são polinômios de terceiro grau no qual é garantida a continuidade da primeira e da segunda derivada das funções de forma entre um elemento e outro.

Capítulo 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou uma análise do problema de extração de um fluido de um reservatório usando o método dos elementos de contorno. A formulação foi desenvolvida a partir da equação de Laplace, que é a equação governante do problema. Foram usados elementos lineares contínuos para aproximar a geometria e as condições de contorno. A forma da superfície livre era uma das incógnitas do problema. Primeiramente a formulação foi testada em problemas governados pela equação de Laplace que possuem soluções conhecidas na literatura. Em todos os casos houve boa concordância entre os resultados obtidos pela formulação apresentada neste trabalho e as soluções da literatura. No caso do problema de extração, o resultado foi satisfatório para problemas onde a potência da bomba foi considerada pequena ou para pequenos intervalos de tempo. Para potências maiores ou intervalos de tempo, houve instabilidades nos resultados.

Fica como sugestão para trabalhos futuros, a implementação de elementos de mais alta ordem para a modelagem da interface que apresentem continuidade na primeira e segunda derivada da superfície livre entre um elemento e outro. Como conseqüência deste trabalho, também fica como sugestão a modelagem de problemas de dois fluidos de densidades e viscosidades de diferentes estão envolvidos. Este tipo de problema é de forte interesse da se para petrolífera, pois é a base para a análise do fênomeno do cone de água, que reduz draticamente a produção de um poço de petróleo.

Referências Bibliográficas

- C. A. C. Azevedo. Formulação alternativa para análise de domínios não homogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, 2007.
- [2] J. Bear. Dynamics of fluid in porous media. American Elsevier Environmental Science Series, 1972.
- [3] J. R. Blake e M. Muskat. Coning in oil reservoirs. Math.Sci., 13:36–47, 1988.
- [4] J. R. Cavalcante. Previsão do comportamento do cone de água. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1996.
- [5] M. R. Correa. Métodos dos Elementos Finitos Estabilizados Para escoamento de Darcy e de Stoke-Darcy Acoplados. Tese de doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2006.
- [6] C. A. Felippa. Finite Element Discretization and the Direct Stiffness Method. 2011.
- [7] V. S. A. Gilat. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas. Bookman, 2008.
- [8] J. H. Kane. Boundary Element Analysisi in Engineering Continuum Mechanics. Prentice Hall, 1994.
- [9] J. T. Katsikadelis. Boundary Elements. Elsevier, 2002.
- [10] M. M. Kikuchi. Otimização de parâmetros de produção para minimizar os efeitos do cone de Água. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [11] B. Mészáros, G. Wittman, J. Vad e G. Szabo. Experimental Modeling of Water and Gas Coning in Horizontal Oil Producting Wells. Relatório do Departamento de Mecânica dos Fluidos, Budapest
- [12] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery. Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1992.

- [13] V. Rezende. O Método de Galerkin. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá, 2005.
- [14] J. E. Thomas. Fundamento da Engenharia do petróleo. Editora Interciência, 2001.
- [15] L. C. Wrobel. The Boundary Element Method, Applications in Thermo-Fluids and Acoustics. John Wiley & Sons, 2002.
- [16] H. Zhang, D. A. Barray e G. C Hocking. Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer, 2002 Advances in Water Resourcer, 6:623–632, 1998.