Imaginação e Tempo: Incursões Filosóficas à Temporalização de Lógicas

Gabriel Lima

Resumo

A presente Monografia se faz com intenção de apresentar o trabalho final para a conclusão da graduação em Filosofia no FIL-UnB. São apresentadas neste trabalho noções de como uma lógica modal pode ser temporalizada, uma lógica objeto, a lógica da imaginação **IMAG** e o uso de **IMAG** como lógica-objeto para a operação de temporalização de lógicas. Além da temporalização de **IMAG**, o trabalho busca apresentar indagações acerca de como as noções temporais podem alterar e estender os conceitos de possibilidade, concepção e imaginação

Introdução

Historicamente, a questão do tempo sempre foi de extrema relevância para a filosofia, especialmente em relação às questões metafísicas. Desde a antiguidade, com Diodorus Cronus, filiado à escola megárica, até questionamentos contemporâneos, como apresentados por McTaggart, passando por Kant e Santo Agostinho, a indagação acerca do tempo possui grande peso para as questões filosóficas.

Dentro da própria lógica, a partir de estudos e propostas de Arthur Prior, desenvolveram-se diversas formalizações para a temporalizada a partir de uma linguagem formal, sendo de grande relevância para o estudo da filosofia e de questões temporais formalizadas.

Os recentes desenvolvimentos da lógica matemática, em especial da lógica modal, permitem diversos resultados produtivos e relevantes para a filosofia. Neste campo, provavelmente uma das maiores inovações tem sido a combinação de lógicas, que permite o desenvolvimento de lógicas chamadas de multimodais. São multimodais as lógicas que possuem mais de um operador primitivo, ou seja, não interdefinível a partir de outros neste sistema. Os resultados mais relevantes dessa operação são lógicas que sistematizem diferentes conceitos dentro de uma linguagem artificial, possibilitando a criação de lógicas que abrangem distintos conceitos de maneira combinada.

A proposta principal do presente trabalho é desenvolver a aplicação da operação de temporalização de lógicas. Ao se pensar no processo de temporalizar lógicas, além dos resultados que permitem expandir as dimensões de uma lógica, surgem questionamentos filosóficos que nos permitem analisar diferentes conceitos à luz de uma nova dimensão. Como os conceitos temporais podem mudar a concepção de um operador modal?

Que interações são possíveis a partir de uma lógica combinada? Muitas destas interações podem ser pensadas a partir de lógicas modais já existentes: epistêmicas, deônticas e temporais. Uma lógica deôntica-temporal, por exemplo, analisaria os conceitos éticos dentro de uma estrutura contendo relações de passado e futuro, assim como uma lógica epistêmica-temporal tornaria possível a utilização do operador de conhecimento dentro de uma formulação que leva em consideração os aspectos de marcação temporal.

Contudo, neste trabalho não se pretende abordar a natureza metafísica ou ontológica do tempo, deixando tais questões à luz de indagações de outros campos da filosofia. Não se trata de desconsiderar estas discussões, porém trabalhar a temporalidade a partir de outro viés, o viés lógico. A natureza do tempo não será abordada ou indagada, mas sim formalizada a partir de noções da lógica modal aqui apresentadas e posteriormente desenvolvidas.

A operação de temporalização se baseia nas lógicas temporais e nas *tense logics* apresentadas em diversos trabalhos de Arthur Prior, trazendo à lógica em que é aplicada noções como *antes, depois, até* e *a partir de.* Estas noções são definidas a partir de operadores temporais básicos, que exprimem ideias de *sempre foi o caso que* e *sempre será o caso que*, além de *foi o caso que* e *será o caso que.* A apresentação de cada operador, suas funcionalidades e aplicações será apresentada no primeira capítulo, sobre lógicas temporais.

Porém, não se pretende manter o trabalho restrito à apresentação da operação de temporalização, mas sim trabalhar de forma a aplicá-la a uma lógica. No caso, a lógica-objeto será a lógica $IMAG$, a lógica da imaginação, proposta por Alexandre Costa-Leite.

A lógica da imaginação trabalha combinando as noções de *imaginação*, *concepção* e *possibilidade*, demonstrando operações mentais e as transmitindo à sistematização da lógica modal.

A principal intenção de se combinar ambas as lógicas é de apresentar resultados originais da aplicação de conceitos temporais à lógica da imaginação. Noções como memória e especulação serão trabalhadas, trazendo uma forma de sistematizar tais operações mentais em uma linguagem lógica.

O trabalho será dividido em três partes principais. A primeira servirá para apresentar as lógicas temporais, incluindo o sistema *K(T)*, uma lógica temporal completa. A segunda parte do trabalho se destina à breve apresentação e da lógica da imaginação. Por fim, a terceira parte, o ponto fundamental do trabalho, apresentará a aplicação dos conceitos da lógica temporal à lógica da imaginação

Capítulo 1

Lógica e Temporalidade

1.1 Introdução

O presente capítulo tem por intenção apresentar um estudo acerca das formalizações lógicas para noções de temporalidade incorporadas à filosofia. Serão apresentados sistemas lógicos distintos em caráter de estudo, considerando suas aplicações e incorporações à filosofia. Como dito anteriormente, o trabalho não pretende ser um trabalho metafísico de análise do tempo, porém um trabalho que busca abordar as diferentes características da temporalidade apresentada pela literatura canônica da lógica.

A seguir serão apresentadas três distintos sistemas lógicos temporais. Os dois primeiros servirão de base à lógica temporal completa, **(T)**. Deve-se frisar que resultados desta seção não são originais, mas sim apresentados com base no livro de referência *Modalities and Multimodalities*.

A lógica K_t permite a expressão de noções verbais temporais de passado e futuro, enquanto a lógica *(US)* é uma construção das mesmas noções a partir da visão de *até* e *a partir de*. Estas noções serão utilizadas para a construção da lógica completa **(T)**, utilizada para a temporalização da lógica IMAG, apresentada no capítulo seguinte.

Primeiramente serão apresentados os sistemas K_t e **US**, promovendo a sistematização de seus operadores, e, a seguir, a lógica **(T)**, uma lógica completa que servirá como inspiração para a operação de temporalização de lógicas, o ponto principal deste trabalho. A lógica **(T)**, que é uma extensão do sistema da lógica proposicional clássica, será apresentada de forma completa, contendo as regras de inferência, seus axiomas e operadores, incluindo sua semântica e sintaxe de operação.

1.1.1 A Lógica K_t

A primeira proposta de uma lógica que possuísse em si a ideia de passado e futuro foi primeiramente proposta por Arthur Prior em trabalhos datados de 1957, 1967, e 1969. A formalização lógica proposta por Prior ainda é chamada de Tense Logic, por dizer respeito à dimensão temporal existente na linguagem.

As lógica Kt apresentada pro Prior consiste na substituição do operador primitivo da lógica K, $\Box$, por dois outros, H e G, que simbolizam, respectivamente, "sempre foi o caso que"e "sempre será o caso que". A partir de uma breve análise, pode-se notar que ambos os operadores consistem numa separação da noção de necessidade lógica, sendo H a necessidade no passado e G a necessidade aplicada ao futuro.

Por possuir dois operadores primitivos, a lógica Kt é considerada uma lógica multimodal, no caso, bimodal. Os operadores duais, correspondentes à possibilidade, são interdefiníveis a partir dos operadores primitivos, como pode ser visto a seguir:

- $P\phi =_{def} \neg H \neg \phi$
- $F\phi =_{def} \neg G \neg \phi$

No caso, o operador P representa a noção de "ϕ foi verdade em um momento do passado", enquanto F traz consigo a noção de "ϕ será verdadeiro em um momento futuro". A lógica Kt é análoga à lógica K, bastando para tanto a adição dos seguintes axiomas:

- **Axioma K para H:** $H(\phi \to \psi) \to (H\phi \to H\psi)$
- **Axioma K para G:** $G(\phi \to \psi) \to (G\phi \to G\psi)$
- **Axioma da ponte passado-futuro:** $\phi \to HF\phi$
- **Axioma da ponte futuro-passado:** $\phi \to GP\phi$

Ambos os axiomas de ponte são necessários para tanto estabelecer as regras de interação entre os operadores temporais, quanto para derivar a regra de necessitação do sistema K ao sistema Kt:

- **Regra de Necessitação HF:** $\vdash_{Kt} \phi$ implica que $\vdash_{Kt} HF\phi$
- **Regra de Necessitação GP:** $\vdash_{Kt} \phi$ implica que $\vdash_{Kt} GP\phi$

A partir de ambas as regras de necessitação se torna possível aplicar tais noções temporais a qualquer tipo de fórmula lógica que não possua um caráter temporal. Tais normas são fundamentais para a interpretação temporal das fórmulas da lógica modal.

Tendo seus axiomas apresentados, é necessário que a estrutura da lógica Kt seja definida. Assim como em K, a estrutura da lógica é composta pelo conjunto W de todos os mundos possíveis e pela relação de acessibilidade. Porém, para a lógica K_t, estabelecemos T como o conjunto de todos os instantes temporais $to, t1, t2...tn$, e, ao invés de uma única relação de acessibilidade, em duas: $\overrightarrow{R}$ e $\overleftarrow{R}$, como definidas a seguir:

t$\overrightarrow{R}t'$ (t' é posterior a t) t$\overleftarrow{R}t'$ (t é anterior a t')

É importante definir que $\overrightarrow{R}$ e $\overleftarrow{R}$ são relações conversas, ou seja: $t\overrightarrow{R}t'$ implica que t' $\overleftarrow{R}$ t. Sendo assim, a estrutura temporal é composta pela tripla $\Im = \langle T, \overrightarrow{R}, \overleftarrow{R}\rangle >$. Além disso, posto que as relações de acessibilidade para K_t são diferentes de K, devem ser definidas também as definições semânticas de verdade e validade:

Sendo M um modelo baseado numa estrutura $\langle T, \overrightarrow{R}, \overleftarrow{R}\rangle$,

$M, t \models G\phi$ se e somente se $M, t' \models \phi$ para cada t' tal que t $\overrightarrow{R}t'$. $M, t \models H\phi$ se e somente se $M, t' \models \phi$ para cada t' tal que t $\overleftarrow{R}t'$.

De maneira análoga, temos:

$M, t \models$ Fϕ se e somente se M, t' $\models \phi$ para algum t' tal que $t\overrightarrow{R}t'$. $M, t \models$ Pϕ se e somente se M, t' $\models \phi$ para algum t' tal que $t\overleftarrow{R}t'$.

Ainda que a base da lógica esteja completa, muito pode ser adicionado a ela. Por exemplo, diversos axiomas podem ser incorporados a fim de transmitir um modelo temporal. É importante deixar aqui claro que por meio da lógica não existe a pretensão de explicar o que o tempo de fato seja, mas sim definir modelos para sua interpretação.

Por exemplo, pode-se construir um sistema com o modelo do tempo ramificado, chamado de *CR*, adicionando os axiomas $(FF\phi \to F\phi)$ e $(PP\phi \to P\phi)$. O primeiro destes axiomas mostra que as estruturas podem ser transitivas, de maneira análoga ao axioma *(4)* da lógica modal. Esta interpretação do tempo mostra um modelo temporal em que não há linearidade. Seja no passado ou no futuro, cada evento se ramifica em vários outros.

1.1.2 A lógica *US*

Proposta em 1968 por Hans Kamp, a lógica *US* utiliza dois operadores binários que enriquecem as noções apresentadas na lógica *Kt*. Estes operadores, U e S adicionam à lógica temporal, respectivamente, as noções de até e a partir de, tendo como referência os operadores da lógica *Kt* P e F.

O operador U é utilizado da seguinte forma: $U(\phi, \psi)$, onde se quer dizer que "ϕ será verdadeiro em um determinado momento do futuro e ψ é verdadeiro até então." De forma semelhante, S se apresenta como $S(\phi, \psi)$, onde se diz que "ϕ foi verdadeiro em um determinado momento do futuro e ψ é verdadeiro a partir deste momento."

A construção destes operadores pode ser dada da seguinte forma:

- $S(\top, \phi) =_{def} H\phi$, onde $S(\top, \phi)$ significa que "ϕ sempre foi verdadeiro até o presente momento."

- $U(\top, \phi) =_{def} G\phi$, onde $U(\top, \phi)$ significa que "ϕ sempre será verdadeiro desde o presente momento."

Ou, se preferível:

- $S(\phi, \top) =_{def} P\phi$
- $U(\phi, \top) =_{def} F\phi$

Da mesma forma que o sistema K_t, a estrutura para a lógica US é definida pela tripla $\Im = \langle T, \overrightarrow{R}, \overleftarrow{R} \rangle$, sendo mantidas as condições de verdade e validade de Kt, assim como a verofuncionalidade de seus operadores. Porém, as condições de verdade para os operadores U e S são definidas como a seguir:

Sendo M um modelo baseado numa estrutura $\langle T, \overrightarrow{R}, \overleftarrow{R} \rangle$,

- $M, t \models S(\phi, \psi)$ se e somente se existe um t' onde $t\overleftarrow{R}t'$ e M, $t' \models \phi$, e para todo t" em que t $\overleftarrow{R}$ t" e t" $\overleftarrow{R}$t' valha M, t" $\models \psi$.
- $M, t \models U(\phi, \psi)$ se e somente se existe um t' onde t $\overrightarrow{R}$ t' e M, $t' \models \phi$, e para todo t" em que t $\overrightarrow{R}t''$ e $t''\overrightarrow{R}t$' valha M, $t'' \models \psi$.

1.2 A Lógica Proposicional Temporal (T)

Tendo sido apresentadas as lógicas K_t e US, apresenta-se nesta seção a lógica temporal completa, nomeada **(T)**. Esta lógica traz consigo os operadores de ambas as lógicas, além das regras de inferência e os axiomas necessários para a operação de temporalização. Serão apresentadas também sua sintaxe e semântica. As provas de completude e corretude serão apresentadas na próxima seção, onde demonstra-se a operação de temporalização de lógicas.

Esta linguagem lógica é definida a partir de um conjunto de variáveis proposicionais P e suas fórmulas são construídas a partir destas letras proposicionais utilizando os operadores booleanos $\neg$, negação, e $\wedge$, conjunção, além dos operadores binários temporais $S_{(\phi,\psi)}$, 'desde', e $U_{(\phi,\psi)}$, 'até'. Como se sabe, os outros conectivos booleanos, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, tal como as variáveis de verdade e falsidade $\perp$ e $\top$ são definidos a partir dos operadores $\wedge$ e $\neg$. Da mesma forma, os operadores temporais H, G, P e F são definidos a partir de termos de U e S, como visto na seção anterior. Na apresentação da lógica **(T)**, as variáveis proposicionais são representadas pelas letras *p, q, r* e *s* e as fórmulas temporais serão representadas pelas letras gregas maiúsculas Φ, Ψ, X e Ω.

1.2.1 A sintaxe de (T)

Seja P um conjunto infinito de variáveis proposicionais. O conjunto $Ł_{U,S}$ de fórmulas temporais proposicionais é o menor conjunto em que:

- $P \subset Ł_{U,S}$;

- Se Φ e Ψ estão em $Ľ_{U,S}$, então $\neg\Phi$ e $(\Phi \wedge \Psi)$ também se encontram em $Ľ_{U,S}$;
- Se Φ e Ψ estão em $Ľ_{U,S}$, então $S_{(\Phi,\Psi)}$ e $U_{(\Phi,\Psi)}$ também se encontram em $Ľ_{U,S}$.

A *versão espelhada* de uma fórmula pode ser obtida a partir da troca de U por S e vice-versa.

Como mostrado anteriormente, os operadores H, G, P e F podem ser obtidos a partir de U e S, enquanto os outros operadores booleanos são obtidos a partir de $\neg$ e $\wedge$.

Um fluxo de tempo é definido a partir do par ordenado $F = (T, \lesseqgtr)$, sendo T o conjunto de todos os instantes temporais $(t_1, t_1, \ldots t_n)$ e $\lesseqgtr$, uma relação de acessibilidade binária temporal em T[1]. Além disso, define-se a valoração g como uma função que atribui um conjunto de variáveis proposicionais $g(t) \subset qP$ a cada instante temporal p em T, sendo este o conjunto de variáveis proposicionais verdadeiras no instante t. Um modelo M é uma tripla contendo $(T, \lesseqgtr, g)$, onde $(T, \lesseqgtr)$ é o fluxo de tempo no qual o modelo se embasa e g é a valoração. Um exemplo de modelo M é $M,\ t \Vdash \Phi$, onde se apresenta que a fórmula Φ vale no modelo M num determinado instante temporal t.

1.2.2 A semântica de (T)

Pode-se definir a semântica para a lógica **(T)** a partir das seguintes proposições:

$M,\ t \Vdash$ p, p$\in P$ se e somente se p$\in$ $g(t)$;

$M,\ t \Vdash \neg\Phi$ se e somente se não é o caso que $M,\ t \Vdash \Phi$;

$M,\ t \Vdash \Phi \wedge \Psi$ se e somente se $M,\ t \Vdash \Phi$ e $M,\ t \Vdash \Psi$;

$M,\ t \Vdash S_{\Phi,\Psi}$ se e somente se existe um $s \in$ T com $s \overrightarrow{R}\ t$ e $M,\ s \Vdash \Phi$ e para cada $u \in$ T, se $s \overrightarrow{R}\ u \overrightarrow{R}\ t$ então $M,\ u \Vdash \Psi$;

$M,\ t \Vdash U_{\Phi,\Psi}$ se e somente se existe um $s \in$ T com $t \overrightarrow{R}\ s$ e $M,\ s \Vdash \Phi$ e para cada $u \in$ T, se $t \overrightarrow{R}\ u \overrightarrow{R}\ s$ então $M,\ u \Vdash \Psi$

Uma fórmula Φ é válida sobre uma classe K de fluxos temporais, indicada por $K \Vdash \Phi$, se para cada modelo embasado em um fluxo temporal está em K e para cada instante temporal $t \in$ T, $M,\ t \Vdash \Phi$. Sendo Σ um conjunto de fórmulas, se utiliza $K \Vdash \Sigma$ para indicar que $K \Vdash \Phi$ para cada $\Phi \in \Sigma$.

Um sistema axiomático mínimo para a lógica temporal **(T)** sobre a classe $(K, \vdash_{(T)}$ contém os seguintes axiomas:

- **A0** todas as tautologias da lógica proposicional clássica

[1]Deve-se notar que quando se refere a um *fluxo de tempo*, esta construção diz respeito à estrutura da lógica, enquanto a relação binária $\lesseqgtr$ é utilizada arbitrariamente como representação das relações de acessibilidade $\overrightarrow{R}$ e $\overleftarrow{R}$.

- **A1a** $G(p \to q) \to (U_{(p,r)} \to (U_{(q,r)})$
- **A1b** $H(p \to q) \to (S_{(p,r)} \to (S_{(q,r)})$
- **A2a** $G(p \to q) \to (U_{(r,p)} \to (U_{(r,q)})$
- **A2b** $H(p \to q) \to (S_{(r,p)} \to (S_{(r,q)})$
- **A3a** $(p \wedge U_{(q,r)}) \to U_{q \wedge S_{(p,r)}, r})$
- **A3b** $(p \wedge S_{(q,r)}) \to S_{q \wedge U_{(p,r)}, r})$

A leitura destes axiomas demanda um certo tempo por serem pouco intuitivos. Deve-se notar que os axiomas **A1, A2** e **A3** aparecem em pares, pois um é a versão espelhada de outro - propriedade que é obtida por razões de existirem relações de acessibilidade tanto para demarcar passado quanto futuro.

As regras de inferência para o sistema **(T)** são as seguintes:

Subst. - Substituição Uniforme, em outras palavras, seja $\Phi(q)$ um axioma contendo a variável proposicional q e seja Ψ uma fórmula qualquer, então a partir de $\vdash \Phi(q)$ infere-se $\vdash \Phi(q/\Psi)$ através da substituição de todas as aparições de q em Φ por Ψ;

MP - Modus Ponens, ou seja, de $\vdash \Phi$ e $\vdash \Phi \to \Psi$, infere-se que $\vdash \Psi$;

GT - Generalização temporal, uma forma mais simples das regras de necessitação HG e GH apresentadas anteriormente. De $\vdash \Phi$ infere-se que $\vdash H\Phi$ e $\vdash G\Phi$.

Define-e que um sistema de inferência é correto e completo em respeito a uma classe K de instantes temporais se $K \vDash \Phi$ se e somente se $\vdash \Phi$. Em outros termos, Φ é consistente se e somente se Φ possui um modelo em **K**. Contudo, para o caso da completude, se a lógica é baseada em uma estrutura linear, é necessária a adição de certos axiomas. São eles:

- **A4a** $U_{(p,q)} \to U_{p, q \wedge U_{(p,q)}}$;
- **A4b** $S_{(p,q)} \to S_{p, q \wedge S_{(p,q)}}$;
- **A5a** $U_{(q \wedge U_{(p,q}}, q) \to U_{(p,q)}$;
- **A5b** $S_{(q \wedge S_{(p,q}}, q) \to S_{(p,q)}$;
- **A6a** $(U_{(p,q)} \wedge U_{(r,s)}) \to (U_{(p \wedge r, q \wedge s) \vee U_{(p \wedge s, q \wedge s)}} \vee U_{(q \vee r, q \wedge s)}$;
- **A6b** $(S_{(p,q)} \wedge S_{(r,s)}) \to (S_{(p \wedge r, q \wedge s) \vee S_{(p \wedge s, q \wedge s)}} \vee S_{(q \vee r, q \wedge s)}$;
- **A7a** $(p \wedge Hp) \to FHp$.
- **A7a** $(p \wedge Gp) \to PGp$.

Os axiomas **A4a, A5a e A6a** e suas formas espelhadas são fundamentais para a construção de uma lógica temporal sobre um sistema linear, enquanto os dois últimos axiomas restringe o fluxo temporal a uma forma *discreta*. Tomando em conjunto os axiomas **A0** a **A7**, temos estabelecida uma lógica correta e completa em relação a uma estrutura - ou fluxo temporal - que é linear, discreta e transitiva.

1.3 Temporalização de Lógicas

Originalmente, a temporalização de lógicas foi concebida por Marcelo Finger e Dov Gabbay. Porém, o método apresentado por ambos se vale da lógica *US* e utilizam *mapeamento de correspondências* para sua execução. Este método não será utilizado por estar muito além do que se pretende neste trabalho. Pelo fato de a lógica objeto, *IMAG*, ser uma lógica trimodal, a temporalização se torna uma operação de grandes proporções e pouco intuitiva.

Para a temporalização apresentada no trabalho, será utilizado um método mais simples, o método de fusão de lógicas. Este método, proposto originalmente por R. Thomason, consiste na união dos aspectos sintáticos e semânticos de duas ou mais lógicas modais normais. Este método combina as relações de acessibilidade e os operadores primitivos, ou seja, que não são interdefiníveis. Sendo assim, a operação de temporalização a ser apresentada no trabalho segue um modelo mais simples e intuitivo.

Ao considerar os operadores da lógica temporal, serão utilizados apenas os operadores F e P para a fundamentação da temporalização aplicada à lógica da imaginação *IMAG*. Isto se dá por razões estruturais, posto que todos os operadores da lógica da imaginação seguem o modelo de operadores do tipo $\diamond$ - tal como os operadores F e P. Os outros operadores temporais, G e H são interdefiníveis a partir de F e P.

Capítulo 2

A Lógica da Imaginação

2.1 Introdução

A lógica-objeto do trabalho, a lógica IMAG, será apresentada neste capítulo. Assim como no capítulo anterior, reitero que não são apresentados aqui resultados originais, mas sim é feita uma apresentação didática da lógica concebida por Alexandre Costa-Leite em trabalho recente*. Porém, já foi feita outra tentativa de se apresentar uma lógica para a imaginação por Ilkka Niiniluoto, em um trabalho datado de 1985. Porém, o trabalho de Niiniluoto apresenta uma série de problemas teóricos, como por exemplo, o uso do operador de imaginação possuindo operações análogas ao operador de necessidade lógica, $\Box$. Além disso, Niiniluoto utiliza a noção de imaginação em sua lógica como Hintikka o faz em sua lógica epistêmica.

A lógica IMAG apresenta a combinação entre os conceitos de imaginação, concepção e possibilidade, demonstrando que ambos os primeiros são duas formas mais fracas de possibilidade lógica. Além disso, dentro da lógica IMAG são apresentadas normas de interação entre os três distintos conceitos, baseando-se em bibliografia de Hume e Descartes.

A intenção de se utilizar a lógica IMAG como lógica-objeto se dá pelas interações entre os conceitos desta lógica e os conceitos temporais a serem apresentados. Pretendo demonstrar no capítulo final do trabalho, como os operadores de concepção e imaginação podem se apresentar de formas distintas após passarem pela operação de temporalização, se tornando operadores que representam conceitos derivados, como especulação e memória.

2.2 Conceitos e Operadores

2.2.1 Imaginação e concepção

Em seu trabalho, Costa-Leite apresenta a imaginação como sendo a faculdade mental que permite a criação de imagens, sejam estes reais ou não. A visão de imaginação utilizada no trabalho possui um viés empírico, posto que se baseia no conceito de imaginação apresentado por Hume em seu Tratado Sobre a Natureza Humana. Quando se diz que a imaginação, em Hume, possui um viés empírico, se assume que a imaginação produz imagens mentais baseadas em conhecimentos anteriores possuídos pelo agente que imagina.

Porém, em sua obra, Hume não apresenta uma distinção entre concepção e imaginação - posto que para o filósofo ambas as noções exprimem o mesmo significado. Porém, para o desenvolvimento do conceito lógico de imaginação, que difere da concepção, não se deve considerar esta proposição.

Para a apresentação da lógica IMAG, se assume que aquilo que é imaginado pelo agente é uma proposição. O trabalho de Costa-Leite propõe que a imaginação a ser desenvolvida é uma *imaginação proposicional*, assim como propõe Nichols em seu trabalho "The Architecture of Imagination".

Já o conceito de concepção se inspira no que é apresentado por Descartes como "pura intelecção"em suas Meditações Metafísicas. A concepção é a faculdade mental que gera conceitos que possuem a capacidade de serem compreendidos pela mente - diferentemente da imaginação, que gera imagens mentais, a concepção geraria um conceito abstrato passível de entendimento.

Com o apresentado acima, pode-se notar que tanto imaginação quanto concepção são operações mentais que dizem respeito à representação de proposições. Tendo em vista tais propriedades, podemos dizer que para ambas as operações, temos um agente que imagina ou concebe alguma proposição. Deve-se recordar que aqui se falam em proposições no seu sentido lógico, podendo dizer respeito a objetos, conceitos, ideias, noções, sentenças etc.

Considerando o parágrafo anterior, pode-se pensar no *conteúdo* de uma proposição. Posso afirmar que um agente imagina a sua cidade natal, assim como também posso afirmar que este mesmo agente imagina que é feriado em sua cidade natal. Nas duas proposições, se dá a operação de imaginação, porém, o conteúdo de imaginação das duas sentenças é diferente. Assim como, pode-se fazer a mesma analogia para a operação de concepção.

2.2.2 Diferentes formas de possibilidade

Em filosofia existem diversas noções do que seja a possibilidade, e, além disso, diferentes níveis de possibilidade. Uma distinção existente é a diferença entre a possibilidade lógica e a possibilidade empírica. Na segunda forma de possibilidade, a empírica, se assume que dado um determinado contexto de conhecimento, algo pode ser possível ou não de acordo com o que é estabelecido por esse contexto. Sendo assim, só se pode dizer que alguma proposição é empiricamente possível se e somente se não apresenta contradições à teoria de modo geral. Por exemplo, é biologicamente impossível que um animal possua coração e não rins, apesar de tal proposição ser logicamente possível.

Já a possibilidade lógica é muito mais abrangente. Partindo de concepções metafísicas, se assume como logicamente possível tudo aquilo que existe em um mundo possível acessível a partir do mundo atual. Em comparação à possibilidade empírica, podemos dizer que a possibilidade lógica é uma possibilidade mais forte. utilizando o operador $\diamond$, pode-se formalizar sentenças como "ϕ é possível"a partir da construção "$\diamond\phi$". A representação da lógica modal para a possibilidade lógica pode ser dada pela fórmula:

$w \models \diamond\phi$ se e somente se existe um w' em que wRw' e w' $\models \phi$

Utilizando o conceito de possibilidade lógica, pode-se entender que imaginação e concepção representam diferentes formas de possibilidade, posto que se uma proposição é imaginável ou concebível, ela deve ser logicamente possível.

A própria lógica temporal apresentada anteriormente apresenta diferentes formas de possibilidade. Os operadores F e P, ao seguirem o modelo do operador $\diamond$, carregam consigo a noção de possibilidade, sendo esta bipartida entre as noções temporais de passado e futuro.

2.2.3 Operadores

A partir de tal desenvolvimento, pode-se apresentar a lógica da imaginação utilizando conceitos modais, porém, devem ser estabelecidas as relações entre eles. Na lógica IMAG, possibilidade, concepção e imaginação são utilizados como os três operadores primitivos desta lógica, tornando-a uma lógica trimodal.

Os operadores são definidos como I, para imaginação, C para concepção e $\diamond$, como tradicionalmente na lógica modal, possibilidade. Combinados sem nenhuma regra de interação, pode se ter também $\diamond I$ como "imaginabilidade"e $\diamond C$ como "conceptibilidade", ou seja, a possibilidade de se imaginar ou conceber algo.

Apresentados os conceitos iniciais, a estrutura da lógica será apresentada a seguir.

2.3 A lógica *IMAG*

A construção da lógica IMAG se dá pela extensão da lógica proposicional clássica. A estrutura da lógica proposicional é definida pelo conjunto L = $\langle \wedge, \vee, \rightarrow, \neg \rangle$. Ao adicionar o operador I, correspondente à Imaginação, a estrutura da lógica se torna $L_I = \langle \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, I \rangle$. O mesmo é feito com os operadores primitivos da lógica IMAG, C, o operador para concepção e $\Diamond$, assim obtendo L_C e $L_\diamond$.

Além disso, é necessário que se defina o operador dual de cada um dos operadores primitivos já formulados. Para o operador $\diamond$, é utilizado seu dual como na lógica modal alética, $\Box$. Já para os outros operadores primitivos, I e C, se estabelecem os operadores $\Box_I$ e $\Box_C$.

A apresentação da lógica IMAG utiliza o modelo proposto por Blackburn, De Rijke e Venema*, cujo operador primitivo é $\diamond$. Considerando um operador não especificado $\sharp$, o sistema axiomático segue a seguinte formulação:

1. $\sharp\bot \leftrightarrow \bot$
2. $\sharp(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\sharp\phi \vee \sharp\psi)$
3. $\vdash \phi \rightarrow \psi$ então $\vdash \sharp\phi \rightarrow \sharp\psi$

Ao considerar o sistema axiomático acima e repetindo o processo para os operadores I, C e $\diamond$, temos garantida a normalidade do sistema lógico. Porém, este sistema ainda possui três linguagens isoladas, não existindo qualquer relação entre L_I, L_C e $L_\diamond$. Para isto, é necessário que seja feita a fusão entre as três linguagens e após a fusão, sejam estabelecidos os axiomas de interação entre os três operadores.

É importante ressaltar que na lógica IMAG, os operadores de Imaginação e Concepção atuam como modalidades mais fracas do operador de possibilidade. Apesar de terem as mesmas propriedades, é importante ressaltar que seu campo de ação e aplicação não são os mesmos, apesar da semelhança entre o funcionamento de ambos.

Agora, com a linguagem estabelecida, deve-se definir a apresentação sintática da lógica IMAG. Para isto, é definida a estrutura de cada um dos operadores das linguagens L_I, L_C e $L_\diamond$ como a seguir. Para cada $\sharp \in \{I, C, \diamond\}$, define-se que $\Im_\sharp = \langle W, R_\sharp \rangle$, sendo W o conjunto de todos os mundos possíveis e $R_\sharp$, a relação de acessibilidade adequada a cada operador. Sendo assim, os operadores de imaginação, concepção e possibilidade possuem a seguinte condição de verdade:

$w \Vdash \sharp\phi$ se e somente se $\exists\ w'$ tal que $wR_\sharp w', w' \Vdash \phi$

De forma semelhante, a semântica para a lógica deve ser estabelecida para que se construam as distinções entre imaginação, concepção e possibilidade. Em cada instância de $\sharp$, para os operadores I, C e $\diamond$, temos uma lógica correta e completa em relação às classes de estruturas. São elas: K_I, K_C e $K_\diamond$. Porém, não se tem até agora nenhuma forma de interação entre estes operadores, sendo necessária a adição de axiomas que construam uma interação entre os três conceitos, além da própria fusão entre as três linguagens. A partir da fusão de lógicas se tem uma linguagem:

$$K_I \oplus K_C \oplus K_\diamond$$

que é correta e completa em relação à classe de estruturas definida da seguinte forma:

$$\Im = \langle W, R_I, R_C, R_\diamond \rangle$$

A prova de corretude e completude para esta lógica pode ser construída por meio da prova sobre os modelos canônicos ou pela preservação da completude por fusão.

Apesar de feita a fusão, os operadores I, C e $\diamond$ se confundem, posto que os axiomas de interação não foram definidos. Para estes axiomas, Costa-Leite utiliza intuições filosóficas obtidas a partir dos autores de inspiração, Descartes e Hume.

A primeira lei de interação é a Lei de Descartes, em que se postula que imaginação implica em concepção:

$$I\phi \rightarrow C\phi \textbf{ (Lei de Descartes)}$$

Em seguida, a partir das intuições de Hume, são definidas duas Leis de Hume, que assumem que tanto a imaginação quanto a concepção implicam em possibilidade:

$$C\phi \rightarrow \diamond\phi \textbf{ (Primeira Lei de Hume)}$$
$$I\phi \rightarrow \diamond\phi \textbf{ (Segunda Lei de Hume)}$$

É importante lembras que Hume não apresenta distinção entre imaginação e concepção, e sendo assim, ambas as operações mentais implicam em possibilidade. Também pode-se observar que a Segunda Lei de Hume não é mais do que uma consequência da Lei de Descartes e da Primeira Lei de Hume.

Sendo assim, não é necessário acrescentar a Segunda Lei de Hume à fusão contendo os axiomas de interação às linguagens. A fusão completa é definida como a seguir:

$$K_I \oplus K_C \oplus K_\diamond \oplus (I\phi \rightarrow C\phi) \oplus (C\phi \rightarrow \diamond\phi)$$

Assim temos construída a lógica IMAG. Esta lógica é correta e completa em relação a todas as classes de estruturas em que $R_I \subseteq R_C \subseteq R_\diamond$. Deve-se lembrar das proposições anteriores, em que se apresentam que concepção e imaginação seriam formas mais fracas de possibilidade, sendo, dentre elas, a imaginação a mais simples.

Esta classe de estruturas chama-se $\Im_\subseteq$. Deve-se provar, a seguir, se a lógica IMAG é correta e completa em respeito à $\Im_\subseteq$.

Para a corretude, deve-se verificar se os axiomas de interação (Lei de Descartes e a Primeira Lei de Hume) são válidos. A Lei de Descartes pode ser testada como a seguir:

Assumindo que $w \Vdash I\phi$, mas $w \nVdash C\phi$, temos

1. $w \vDash I\phi \leftrightarrow \exists w'$ tal que wR_Iw', $w' \Vdash \phi$

2. $w \nVdash C\phi \leftrightarrow \forall w'$ tal que wR_Cw', $w' \nVdash \phi$

Já para a Primeira Lei de Hume se faz o mesmo:

Assumindo que $w \Vdash C\phi$, mas $w \nVdash \diamond\phi$, temos

1. $w \vDash C\phi \leftrightarrow \exists w'$ tal que wR_Cw', $w' \Vdash \phi$

2. $w \nVdash \diamond\phi \leftrightarrow \forall w'$ tal que $wR_\diamond w'$, $w' \nVdash \phi$

Dado que $R_I \subseteq R_C$ e $R_C \subseteq R_\diamond$, tem-se estabelecido que a corretude é válida. Já que a Segunda Lei de Hume é consequência das duas leis apresentadas previamente, não há necessidade de apresentá-la.

Para a prova de completude, é necessário mostrar que todas as fórmulas válidas de IMAG são teoremas. Pode-se proceder utilizando o método de prova utilizando modelos canônicos. Para esta prova, é necessário levar em consideração os operadores duas de I, C e $\diamond$, tendo em vista que eles atuam da mesma forma que os operadores do tipo $\Box$.

Dado que as relações de acessibilidade em IMAG respeitam a ordem

$$R_I \subseteq R_C \subseteq R_\diamond$$

a prova de completude para IMAG pode ser obtida sem complicações.

2.4 Propriedades de IMAG

Já tendo sido definidas as propriedades da lógica IMAG, deve-se agora responder a certas questões apresentadas pela literatura de inspiração sobre a relação entre imaginação, concepção e possibilidade. Deve-se notar que as noções derivadas citadas anteriormente, como "imaginabilidade"e "conceptibilidade"não podem ser reduzidas a imaginação e concepção, respectivamente, se algumas restrições de interação não forem adicionadas às relações de acessibilidade. As fórmulas seguintes são válidas em IMAG, demonstrando suas propriedades:

Interação	**Distribuição**	**Conexão**
$I\phi \to C\phi$	$I(\phi \land \psi) \to (I\phi \land I\psi)$	$I \diamond \phi \leftrightarrow \diamond I\phi$
$C\phi \to \diamond\phi$	$C(\phi \land \psi) \to (C\phi \land C\psi)$	$C \diamond \phi \to \diamond C\phi$
$I\phi \to \diamond\phi$	$\diamond(\phi \land \psi) \to (\diamond\phi \land \diamond\psi)$	$IC\phi \leftrightarrow CI\phi$

Antes de dar continuidade a outras fórmulas de IMAG, um breve interlúdio para a interpretação das três fórmulas de conexão. Estas fórmulas carregam consigo um viés filosófico de grande valor, posto que demonstram algumas propriedades dos operadores combinados. Na primeira delas, $I \diamond \phi \leftrightarrow \diamond I\phi$, pode-se notar que um agente pode imaginar ϕ se e somente se a proposição ϕ é imaginável. O mesmo vale para a segunda fórmula, $C\diamond\phi \rightarrow \diamond C\phi$, porém, para o caso da concepção. Já a terceira delas, nos mostra que um agente imagina que concebe ϕ se e somente se este agente concebe que imagina ϕ.

Por fim, vale frisar que as seguintes fórmulas não são válidas em IMAG:

$I \diamond \phi \rightarrow \diamond\phi$	$C \diamond \phi \rightarrow \diamond\phi$	$IC \diamond \phi \rightarrow I\phi$	$\diamond\phi \leftrightarrow \phi$ $\diamond\phi \rightarrow I\phi$
$I \diamond \phi \rightarrow I\phi$	$C \diamond \phi \rightarrow C\phi$	$IC \diamond \phi \rightarrow \phi$	$\diamond\phi \rightarrow C\phi$
$I \diamond \phi \rightarrow \phi$	$IC \diamond \phi \rightarrow C\phi$	$I\phi \leftrightarrow \phi$ $C\phi \leftrightarrow \phi$	$C\phi \rightarrow I\phi$

Deve-se notar que algumas destas fórmulas não válidas também carregam consigo propriedades relevantes da lógica IMAG. Por exemplo, a primeira fórmula, $I \diamond \phi \rightarrow \diamond\phi$, nos mostra que na lógica IMAG o fato da operação de imaginar uma proposição como possível não a torna possível, valendo o mesmo para concepção. Já nas fórmulas $I\phi \leftrightarrow \phi$ e $C\phi \leftrightarrow \phi$ pode-se notar que tanto a imaginação quanto a concepção de ϕ não está ligada estritamente à ocorrência de ϕ. Estas fórmulas não válidas possuem um grande valor, posto que nos mostram algumas interações que o sistema IMAG não suporta, sendo assim, condizente às propriedades da imaginação e da concepção.

Tendo algumas fórmulas definidas, podemos pensar as propriedades filosóficas que a lógica IMAG traz consigo. Considerando que assim como toda lógica, IMAG possui certas propriedades metalógicas - algumas foram mostradas acima -, estas propriedades podem ser utilizadas como uma forma de interpretar as propriedades das operações de imaginação e concepção, tal como a noção de possibilidade.

Estas propriedades de IMAG também levam a um outro nível o debate sobre as interações entre os conceitos de imaginação, concepção e possibilidade, fornecendo ferramentas para uma análise mais criteriosa destes três conceitos. Pode-se, assim, notar uma preciosa aplicação das lógicas modais, que é fornecer uma linguagem formalizada para o trabalho com certos conceitos.

A partir de agora, serão apresentadas e interpretadas algumas propriedades da lógica IMAG e suas aplicações à filosofia.

2.4.1 A lei de Descartes

A proposta de Descartes diferencia as operações de imaginação e concepção (pura intelecção). O exemplo utilizado pelo filósofo é bastante intuitivo: podemos imaginar um triângulo, porém não podemos imaginar um quilógono - um polígono de mil lados. Porém, podemos conceber um quilógono, sendo este um conceito de fácil entendimento. A partir daí, pode-se, de forma intuitiva, notar que a imaginação implica na concepção, porém, o contrário não se dá.

2.4.2 As leis de Hume

Hume apresenta em sua obra as noções de concepção e imaginação sem nenhuma distinção entre elas. Como dito anteriormente, não se pode aceitar que as noções são as mesmas. Porém, Hume apresenta que ambas as operações implicam em possibilidade, ou seja, se uma proposição é imaginável ou concebível, esta é possível. As leis de Hume fornecem uma grande ponte de interação entre os operadores de imaginação e concepção e o operador de possibilidade, demonstrando assim uma sólida base para os conceitos trabalhados na lógica IMAG.

2.4.3 Diferentes níveis de possibilidade

A lógica da imaginação também carrega consigo noções de que existem diferentes formas de possibilidade. Esta noção é importante tanto para diversas reflexões sobre o próprio conceito de possibilidade, quanto para a fundamentação de uma interação entre diferentes níveis do possível. Ao trabalhar estes diferentes níveis, se entende a dimensão deste conceito, além de pensar suas fundamentações. Além disso, pode-se transportar esta noção aos níveis da lógica temporal, como será feito no capítulo final do presente trabalho.

Capítulo 3

A Lógica T(IMAG)

3.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo o ponto fundamental do trabalho, a temporalização de **IMAG**. Serão apresentados a operação por si só, o resultado da lógica temporalizada, diagramas indicando os modelos da lógica **T(IMAG)** e as questões filosóficas relacionadas às operações de concepção e imaginação quando temporalizadas.

A proposta de temporalizar **IMAG** eleva a operação de temporalização de lógicas, pois neste caso a lógica-objeto é uma lógica multimodal formulada a partir da fusão de linguagens lógicas. Pretende-se ainda mostrar que a lógica temporalizada **T(IMAG)** conserva as propriedades e os axiomas de interação de **IMAG**.

É importante salientar que para o processo de temporalização de **IMAG**, será utilizado o método de Finger apresentado na primeira seção do presente trabalho. Porém, em virtude de questões práticas para a lógica **T(IMAG)**, este método será aplicado de forma simplificada, desconsiderando certas propriedades em virtude da funcionalidade da lógica a ser construída.

A seguir, serão apresentados o processo de temporalização de IMAG, por meio da fusão de lógicas, sua axiomatização, seus axiomas de interação e suas propriedades metalógicas.

3.1.1 Tempo e Imaginação

Pensa-se no presente trabalho uma proposta para incorporar noções temporais à logica da imaginação. Contudo, historicamente, pensando as propostas inúmeras propostas filosóficas acerca do tempo, deve-se levar em consideração que a própria noção do tempo não é uma noção trivial.

Historicamente, pode-se pensar em ao menos três noções comuns para o tempo. A primeira delas, considerada pelo autor a noção mais trivial de tempo, a ser utilizada e considerada no trabalho, entende o fluxo temporal a partir de uma visão linear, considerando os eventos do passado como passíveis de ordenamento, sendo o passado anterior ao futuro, caminhando por um único sentido.

Outra noção é a visão ramificada do tempo, seja no passado ou no futuro. Tal noção considera o presente como uma interseção entre diversos fluxos, donde o presente pode dar origem a diversos fluxos temporais, sendo também originário de fluxos possivelmente distintos.

Por fim, existe a visão acerca de uma temporalidade circular, donde passado e futuro se confudem, posto que o futuro sempre se caracterizaria a partir de seu retorno ao passado e manutenção do fluxo temporal de forma redundante.

De acordo com as finalidades do trabalho, será utilizada a visão linear do tempo. Esta visão, apesar de se apresentar como trivial, engloba as finaldiades do trabalho, ao trazer noções acerca da temporalidade de forma simples. Os axiomas apresentados na fundamentação da lógica temporal garantem a linearidade e a transitividade do sistema, trazendo tal visão elementar do tempo. Assim sendo, pode-se passar ao trabalho lógico de formalização da imaginação a partir da temporalidade.

3.2 A Temporalização de IMAG

A seguir, será mostrada a operação de temporalização de **IMAG**. Para tanto, algumas demarcações são necessárias.

A lógica **IMAG** é caracterizada pela estrutura $\Im = \langle W, R_I, R_C, R_\Diamond \rangle$, sendo R_I, R_C e $R_\diamond$ as relações de acessibilidade possibilitadas por cada operador, ao passo que a lógica **(T)** tem sua estrutura caracterizada pela tripla $\Im = \langle T, \overrightarrow{R}, \overleftarrow{R} \rangle$, onde $\overleftarrow{R}$ e $\overrightarrow{R}$ são as relações de acessibilidade para passado e futuro. A lógica IMAG é uma lógica trimodal, ou seja, contém três operadores primitivos, enquanto a lógica **(T)** possui dois operadores primitivos, assim sendo uma lógica bimodal. A lógica **T(IMAG)** será assim uma lógica *pentamodal*, posto que utilizará os operadores F, P, I, C e $\diamond$ como primitivos.

Apesar de suas múltiplas modalidades, a lógica **T(IMAG)** possui operadores do tipo $\diamond$, sendo também sua apresentação definida como apresentada

Note-se que por razões práticas, a estrutura da lógica **T(IMAG)** não utilizará todos os operadores da lógica temporal como primitivos, porém, os outros operadores temporais (em especial P e G) podem ser apresentados a partir de F e P.

De maneira análoga a **IMAG**, a lógica a ser apresentada utiliza a apresentação proposta por Blackburn, De Rijke e Venema, donde o operador primitivo é $\diamond$. Considerando $\sharp$ um dos cinco operadores para a lógica **IMAG** temporalizada (C, I, F, P ou $\diamond$), o sistema axiomático de **T(IMAG)** se dá por:

1. $\sharp\bot \leftrightarrow \bot$

2. $\sharp(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\sharp\phi \vee \sharp\psi)$

3. $\vdash \phi \rightarrow \psi$ então $\vdash \sharp\phi \rightarrow \sharp\psi$

Com isto, temos para cada um dos operadores primitivos uma linguagem lógica $K_\sharp$, definida como $L_\sharp = \langle \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \sharp \rangle$, cuja estrutura segue o modelo $\Im_\sharp = \langle T, R_\sharp \rangle$. Note-se que por se tratar de um sistema temporal, as estruturas da lógica **T(IMAG)** utilizam T e não W como marcador do conjunto de todos mundos possíveis - ou, neste caso, todos os instantes temporais possíveis. Além disso, no caso dos operadores temporais F e P, a relação de acessibilidade é dada por $\overrightarrow{R}$ e $\overleftarrow{R}$, respectivamente, a fim de facilitar a leitura de suas proposições. Para os operadores da lógica **T(IMAG)**, a condição de verdade se dá por:

$t \Vdash \sharp\phi$ se e somente se $\exists\ t'$ tal que $tR_\sharp t', t' \Vdash \phi$

E, particularmente, para os operadores temporais temos que:

$t \Vdash F\phi$ se e somente se $\exists\ t'$ tal que $t\overrightarrow{R}t', t' \Vdash \phi$

$t \Vdash P\phi$ se e somente se $\exists\ t'$ tal que $t\overleftarrow{R}t', t' \Vdash \phi$

A axiomatização acima garante a normalidade do sistema lógico e ainda permite a criação dos operadores duais de necessidade seguindo o modelo $\Box_\sharp =_{def} \neg\sharp\neg\alpha$, considerando $\sharp$ como um dos cinco operadores primitivos. Para $\diamond$ temos o operador de necessidade $\Box$, I e C temos seus duais $\Box_C$ e $\Box_I$ e para os operadores F e P, se tem os operadores de necessidade temporal, G e H, respectivamente.

É necessário demarcar a importância do estabelecimento destes operadores duais. Para os operadores específicos da lógica da imaginação, os duas de necessidade servem para a prova de completude. Já os duais dos operadores temporais servem para adicionar formas temporais dos axiomas da lógica modal alética, que garantem certas características às estruturas - neste caso, são de interesse os axiomas **(D)**, que garante a serialidade e o axioma **(4)**, para a transitividade.

3.2.1 Fusão dos operadores temporais

Como apresentado, a lógica **IMAG** é obtida a partir da fusão de três linguagens lógicas contendo os três operadores primitivos de possibilidade, imaginação e concepção. Para a construção de **T(IMAG)**, será utilizada uma metodologia semelhante, por meio da fusão dos operadores F e P.

Anteriormente, foi apresentado um sistema axiomático que constrói uma linguagem para cada um dos cinco operadores primitivos de **T(IMAG)**. Agora, o que deve ser feito é a fusão destas linguagens a fim de garantir completude e corretude deste sistema.

Para a fusão, considere-se a linguagem K_{IMAG}, contendo todos os operadores da lógica proposicional clássica, as regras de inferência e os axiomas de interação apresentados no capítulo anterior. A fusão para **T(IMAG)** se dá por:

$$K_{IMAG} \oplus K_F \oplus K_P$$

Sendo assim, a linguagem para **T(IMAG)** é composta por $L_{T(IMAG)} = \langle \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, I, C, \diamond, F, P \rangle$. Contudo, apesar da fusão, não foi definida uma hierarquia entre os operadores modais além das leis de interação existentes em **IMAG**. Para tanto, novos axiomas de interação serão apresentados na seção posterior do presente trabalho.

3.3 Axiomas de interação para T(IMAG)

Tendo sido definida a lógica **T(IMAG)**, agora o foco do trabalho é definir os axiomas de interação desta lógica, a partir da interação dos conceitos da lógica da imaginação e da lógica temporal. Para tanto, são necessárias certas indagações filosóficas acerca de como a imaginação se apresenta de maneira temporalizada.

É fato sabido que tanto a imaginação quanto a concepção são operações mentais que permitem ao agente construir ideias que não necessariamente se adequem ao mundo atual. Ao adicionar noções temporais à lógica da imaginação, a intenção é demonstrar como as noções de imaginação e concepção podem ser estendidas a partir da visão de passado e futuro. Com isto, temos uma composição lógica que não atua necessariamente no presente, podendo ser estendida a outros instantes temporais.

Primeiramente, deve-se entender que os operadores temporais dizem respeito a uma forma de possibilidade física, dado que são dados em relação a um instante temporal. Sendo assim, estes representariam uma forma de possibilidade mais fraca que a possibilidade metafísica. Podemos estabelecer uma interação entre os operadores temporais e o operador de possibilidade por meio do que se segue:

$P\phi \rightarrow \diamond\phi$ e $F\phi \rightarrow \diamond\phi$

Ou seja, se será ou foi o caso que ϕ, então assume-se intuitivamente que ϕ é possível. O leitor há de notar que é contraintuitivo estabelecer uma hierarquia entre os operadores temporais P e F, dado que ambos estabelecem relações que são conversas entre si. Porém, estas relações de acessibilidade dos operadores temporais podem ser hierarquizadas em relação à funcionalidade do operador $\diamond$:

$$(\overleftarrow{R} \cup \overrightarrow{R}) \subseteq R_{\diamond}$$

Contudo, não há uma interações formadas de maneira intuitiva entre os operadores temporais e os operadores de concepção e imaginação. Assim sendo, não se pode hierarquizar os operadores temporais na sua forma pura, porém, há a necessidade de acrescentar à lógica uma noção híbrida de *possibilidade temporal.*

Pode-se questionar as razões para entender a necessidade da visão de uma possibilidade temporal. A partir dos axiomas de interação da lógica $IMAG$, sabe-se que tanto imaginação quanto concepção implicam possibilidade. Porém, seria ingênuo afirmar que a imaginação ou a concepção de uma proposição implicasse que esta proposição seria verdadeira no passado ou no futuro, como propõem os operadores temporais F e P.

Sendo assim, formaliza-se a noção de possibilidade temporal a partir de:

$\diamond P\phi$ e $\diamond F\phi$

Uma leitura intuitiva destas operações pode ser dada por "é possível que ϕ tenha ocorrido em algum momento passado"e "é possível que ϕ venha a ocorrer". A partir dessas noções híbridas, se estabelece também uma relação de acessibilidade própria, a qual pode ser representada por $\overleftarrow{R_\diamond}$, para a possibilidade temporal no passado e $\overrightarrow{R_\diamond}$ para a possibilidade no futuro. As condições de verdade para estas relações de acessibilidade podem ser dadas por:

$$t \Vdash \diamond P\phi \text{ se e somente se } \exists t' \text{ tal que } tR_\diamond t', t' \Vdash P\phi$$
$$t \Vdash \diamond F\phi \text{ se e somente se } \exists t' \text{ tal que } tR_\diamond t', t' \Vdash F\phi$$

Ora, se é possível que um evento ϕ ocorra no passado ou no futuro, intuitivamente, ϕ é possível. Logo, se têm dois axiomas de interação entre a possibilidade temporal e a possibilidade metafísica. Nomeio-os **PTa** e **PTb**, respectivamente:

$\diamond P\phi \rightarrow \diamond\phi$
$\diamond F\phi \rightarrow \diamond\phi$

Em decorrência do afirmado acima, se estabelece também uma hierarquia entre estas relações de acessibilidade. A diferença é que as relações de acessibilidade da noção de possibilidade temporal serão utilizadas posteriormente em relação às relações de acessibilidade das operações de Imaginação e Concepção. Dado que possibilidade temporal implica em possibilidade metafísica, têm-se que:

$$(\overleftarrow{R_\diamond} \cup \overrightarrow{R_\diamond}) \subseteq R_\diamond$$

Posto que a lógica $IMAG$ possui axiomas que demonstram que tanto imaginação quanto concepção implicam em possibilidade - as chamadas Leis de Hume - pode-se dizer que ambas as noções também implicam na noção de *possibilidade temporal.* Estes axiomas podem ser chamados de Lei Temporal de Imaginação e Lei Temporal da Concepção, indicados por **IT** e **CT**, respectivamente:

$I\phi \to \diamond P\phi$ **(ITa)**
$I\phi \to \diamond F\phi$ **(ITb)**

$C\phi \to \diamond P\phi$ **(CTa)**
$C\phi \to \diamond F\phi$ **(CTb)**

Estes axiomas respeitam a hierarquia de operadores apresentada na lógica da imaginação, além de serem consoantes aos axiomas já apresentados na lógica objeto. Assim sendo, as provas de completude e corretude para a lógica $IMAG$ temporalizada se tornarão mais intuitivas. A partir destas noções, pode-se estabelecer uma hierarquia entre todas as noções incorporadas pela lógica **T(IMAG)**, tanto de forma sintática, quanto de forma semântica. De forma semântica, se assume que:

$$R_I \subseteq R_C \subseteq (\overleftarrow{R_\diamond} \cup \overrightarrow{R_\diamond}) \subseteq R_\diamond$$

A fusão dos operadores e axiomas de interação para a lógica **T(IMAG)** é apresentada por:

$$K_I \oplus K_C \oplus K_{\diamond F} \oplus K_{\diamond P} \oplus (C\phi \to (\diamond P\phi \vee \diamond F\phi)) \oplus (I\phi \to (\diamond P\phi \vee \diamond F\phi)) \oplus ((\diamond P\phi \vee \diamond F\phi) \to \diamond\phi) \oplus K_\diamond$$

Nota-se que as formas duplas dos axiomas **CT, IT** e **PT** foram incorporadas à fusão de forma simplificada, a fim de tornar a leitura da operação mais intuitiva. Porém, este sistema lógico ainda não possui propriedades para suas estruturas, como transitividade e serialidade. Para tal, na seção seguinte será apresentada a axiomatização que garante estas propriedades para o sistema lógico.

É possível verificar a corretude para a lógica **T(IMAG)** meramente verificando se os axiomas de interação acrescentado são válidos. Primeiramente, verifica-se o axioma **PTa**. Para tanto, é necessário considerar que $t \vDash \diamond P\phi$ porém $t \nvDash \diamond\phi$. Então:

1. $t \vDash \diamond P\phi$ se e somente se $\exists t'$ tal que $tR_\diamond t', t' \vDash P\phi$

2. $t \nvDash \diamond\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_\diamond t', t' \nvDash \phi$

Para o axioma **PTb**, o resultado se prova de maneira análoga, fazendo as devidas substituições.

Da mesma forma, provam-se os axiomas duplos **CT** e **IT**. Por razões de clareza, provarei apenas uma parte de cada um dos axiomas duplos, posto que as noções de possibilidade temporal são equivalentes. Primeiramente, provam-se os axiomas duplos da concepção assumindo que $t \vDash C\phi$ porém $t \nvDash \diamond P\phi$:

1. $t \vDash C\phi$ se e somente se $\exists t'$ tal que $tR_C t', t' \vDash P\phi$

2. $t \nvDash \diamond P\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_\diamond t', t' \nvDash P\phi$

Posto que $R_C \subseteq R_\diamond$, o resultado esperado é atingido.

Para os axiomas duplos **IT**, o resultado se dá por:

1. $t \vDash I\phi$ se e somente se $\exists t'$ tal que $tR_It', t' \vDash P\phi$

2. $t \nvDash \diamond P\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_\diamond t', t' \nvDash P\phi$

Assim como na prova anterior, o resultado é garantido pelo fato de que $R_I \subseteq R_\diamond$

3.3.1 Axiomatização de T(IMAG)

Tendo sido definida a linguagem lógica de **T(IMAG)**, a axiomatização da lógica **T(IMAG)** é dada da seguinte forma:

1. Todas as tautologias da lógica proposicional clássica;

2. A Lei de Descartes[1];

3. Os axiomas duplos de interação para a lógica **IMAG** temporalizada: **PT, IT, CT** ;

4. Os axiomas da lógica modal alética **(D)** e **(4)**;

5. Regras de inferência: **Subst., MP.**

A partir do sistema axiomático, a estrutura para o sistema lógico **T(IMAG)** é caracterizada como $\Im = \langle T, R_I, R_C, \overleftarrow{R_\diamond}, \overrightarrow{R_\diamond}, R_\Diamond \rangle$. Para a construção de um modelo neste sistema, deve-se adicionar o instante atual *0*, que é o ponto de partida para as relações temporais. Nota-se que a serialidade e a transitividade deste sistema lógico são garantidas por meio dos axiomas **(D)** e **(4)**, respectivamente, como apresentados a seguir:

- **Axioma (D)** $\Box\phi \rightarrow \diamond\phi$

- **Axioma (4)** $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

O axioma **D** pode ser facilmente apresentado, considerando que $t \vDash \Box\phi$ porém $t \vDash \diamond\phi$:

1. $t \vDash \Box\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_\Box t'$ e $t' \vDash \phi$

2. $t \nvDash \diamond\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_\Box t'$ e $t' \nvDash \phi$

Já para o axioma **4**, a prova se dá ao considerar que $t \vDash H\phi$ porém $t \nvDash HH\phi$:

[1]Não há necessidade de incorporar as Leis de Hume da lógica *IMAG*, posto que são consequências dos axiomas de interação temporal

1. $t \vDash \Box\phi$ se e somente se $\forall t'$ tal que $tR_{\Box}t', t' \vDash \phi$

2. $t \nvDash \Box\Box\phi$ se e somente se $\exists t''$ tal que $tR_{\Box}t'$ e $t'R_{\Box}t'', t' \nvDash \phi, t'' \vDash \phi$

Assim sendo, tem-se um sistema lógico correto em relação às classes de estruturas T, donde valham as propriedades de serialidade e temporalidade.

Tendo sidos apresentados os axiomas, a fusão completa para a lógica da imaginação temporalizada se dá por:

$$K_I \oplus K_C \oplus K_F \oplus K_P \oplus K_{\diamond} \oplus (PT, IT, CT) \oplus (D, 4)$$

Com isto, tem-se uma lógica **IMAG** temporalizada, contendo os axiomas de interação da lógica da imaginação temporalizada e os axiomas originais de **IMAG**, derivados a partir dos axiomas duplos **IT, CT** em relação à dupla de axiomas **PT**.

Tendo sido provada a validade dos axiomas de interação para a lógica da imaginação temporalizada e dos axiomas que garantem a serialidade e a transitividade das estruturas da lógica **T(IMAG)**, a completude desta lógica está dada.

A prova de completude para o sistema lógico **T(IMAG)** se dá por meio de modelos canônicos.

3.4 Propriedades de T(IMAG)

Como apresentado anteriormente, a lógica **T(IMAG)** possui uma estrutura serial e transitiva, demonstrando em si a passagem de tempo. Além dos axiomas de interação, devem ser estabelecidas as fórmulas válidas e certas restrições para a funcionalidade da lógica.

No conjunto de fórmulas válidas da lógica **T(IMAG)**, são consideradas válidas todas os axiomas de interação de *IMAG*, suas distribuições e suas leis de conexão. Além disso, podem ser acrescentadas:

Interação	**Distribuição**	**Conexão**
$\diamond P\phi \to \diamond\phi$	$P(\phi \wedge \psi) \to (P\phi \wedge P\psi)$	$P \diamond \phi \leftrightarrow \diamond P\phi$
$\diamond F\phi \to \diamond\phi$	$F(\phi \wedge \psi) \to (F\phi \wedge F\psi)$	$F \diamond \phi \leftrightarrow \diamond F\phi$
$C\phi \to \diamond P\phi$	$\diamond P(\phi \wedge \psi) \to$	$CP \diamond \phi \to C \diamond P\phi$
$C\phi \to \diamond F\phi$	$(\diamond P\phi \wedge \diamond P\psi)$	$CF \diamond \phi \to C \diamond F\phi$
$I\phi \to \diamond P\phi$	$\diamond F(\phi \wedge \psi) \to$	$IP \diamond \phi \to I \diamond P\phi$
$I\phi \to \diamond F\phi$	$(\diamond F\phi \wedge \diamond F\psi)$	$IF \diamond \phi \to I \diamond F\phi$

Vale citar também que nenhuma das fórmulas a seguir é válida em **T(IMAG)**:

$P\phi \to \phi$	$F\phi \to I\phi$	$CP\phi \to PC\phi$	$\diamond\phi \to F\phi$
$F\phi \to \phi$	$C\phi \to P\phi$	$CF\phi \to FC\phi$	$P\phi \to F\phi$
$P\phi \to C\phi$	$C\phi \to F\phi$	$IP\phi \to PI\phi$	$F\phi \to P\phi$
$F\phi \to C\phi$	$I\phi \to P\phi$	$IF\phi \to FI\phi$	$\diamond P\phi \to P\phi$
$P\phi \to I\phi$	$I\phi \to F\phi$	$\diamond\phi \to P\phi$	$\diamond F\phi \to F\phi$

3.4.1 A proposta humeana acerca da crença e da imaginação.

Após ser definida a linguagem para a lógica da imaginação temporalizada, certas noções que combinam as operações de concepção, imaginação e possibilidade às visões temporais podem ser definidas. A principal delas, e um dos focos do trabalho, é a formalização da proposta humeana acerca do hábito como formador de crença, como apresentado em sua Investigação acerca do Entendimento Humano, como citado a seguir:

It appears, then, that this idea of a necessary connexion among events arises from a number of similar instances which occur, of the constant conjunction of these events; nor can that idea ever be suggested by any one of these instances, surveyed in all possible lights and positions. But there is nothing in a number of instances, different from every single instance, which is supposed to be exactly similar; except only, that after a repetition of similar instances, the mind is carried by habit, upon the appearance of one event, to expect its usual attendant, and to believe, that it will exist. This connexion, therefore, which we feel in the mind, this customary transition of the imagination from one object to its usual attendant, is the sentiment or impression, from which we form the idea of power or necessary connexion. Nothing farther is in the case. Contemplate the subject on all sides; you will never find any other origin of that idea. This is the sole difference between one instance, from which we can never receive the idea of connexion, and a number of similar instances, by which it is suggested. The first time a man saw the communication of motion by impulse, as by the shock of two billiard-balls, he could not pronounce that the one event was connected: but only that it was conjoined with the other. After he has observed several instances of this nature, he then pronounces them to be connected. What alteration has happened to give rise to this new idea of connexion? Nothing but that he now feels these events to be connected in his imagination, and can readily foretel the existence of one from the appearance of the other. When we say, therefore, that one object is connected with another, we mean only, that they have acquired a connexion in our thought, and give rise to this inference, by which they become proofs of each other's existence: A conclusion, which is somewhat extraordinary; but which seems founded on sufficient evidence. Nor will its evidence be weakened by any general diffidence of the understanding, or sceptical suspicion concerning every conclusion, which is new and extraordinary. No conclusions can be more agreeable to scepticism than such as make discoveries concerning the weakness and narrow limits of human reason and *capacity.*[2]

Pensando a proposta humeana de que a partir da relação de causalidade num evento passado levaria um indivíduo a crer na conexão necessária entre as duas partes de tal relação, pode-se pensar em como formalizar tal proposta a partir da linguagem e dos operadores da lógica **T(IMAG)**.

Ora, se as diversas ocorrências de um evento no passado levam a crer, por meio da imaginação, no estabelecimento de uma relação clara e bem formulada de causalidade entre dois objetos ou eventos distintos, pode-se pensar em como se estabelece tal relação. Para tanto, podemos pensar na utilização dos operadores P, F e I, pensando a relação entre a causalidade ocorrida no passado e a imaginação da reocorrência de tal evento no futuro.

Considerando a proposta de Hume de que o princípio de causalidade é um princípio que só existe como crença a partir do hábito, pode-se dizer que um agente concebe as relações causais a partir dos próprios eventos ocorridos no passado. Assim, enuncia-se a **Terceira Lei de Hume**:

$$P(\phi \to \psi) \to IF(\phi \to \psi)$$

Uma leitura intuitiva nos mostra que se foi o caso que ϕ implica ψ, um agente imagina que será o caso que futuramente, ϕ implique ψ. Este enunciado capta as noções transmitidas por Hume no trecho acima, utilizando noções da lógica **T(IMAG)**.

Esta proposta demonstra as dimensões de **T(IMAG)**, além de apresentar, de maneira formalizada a proposta humeana sobre a conexão entre os eventos passados e futuros. Tal proposta incorpora novas intuções humeanas, em adição às propostas que serviram como base para a lógica da imaginação.

[2] HUME, D., An Enquiry concerning Human Understanding. ps. 59-60

Conclusão

Este trabalho apresenta em seus dois primeiros capítulos algumas percepções lógicas acerca de temporalidade, utilizando como base as lógicas temporais e as *tense logics*, além da lógica da imaginação *IMAG* apresentada por Alexandre Costa-Leite. Porém, nenhum destes resultados apresentados inicialmente pode ser classificado como um resultado original.

O terceiro capítulo diz respeito à demonstração de como noções temporais podem ser aplicadas a uma lógica preexistente, mostrando a aplicação de tais visões temporais à lógica da imaginação. É possível ao leitor notar que este é um método novo, utilizando a operação de fusão de lógicas ao incorporar noções temporais de forma arbitrária. A lógica construída, chamada de **T(IMAG)** é um sistema lógico correto e completo, que carrega consigo as propriedades de serialidade e transitividade da lógica modal alética.

Apesar de já ter sido apresentada anteriormente, a operação de temporalização de lógicas aqui se vale de um método diferente, posto que utiliza os operadores temporais não em relação a uma lógica-objeto, porém os utiliza nas próprias bases da construção da lógica. Um resultado que pode ser considerado de grande relevância é que os axiomas apresentados para a lógica **T(IMAG)** já provam em si mesmo dois dos três axiomas da lógicas *IMAG*.

Além dos resultados originais na formalização de uma nova lógica, o trabalho mostra como noções modais podem ser enriquecidas a partir do acréscimo de visões temporais. Possuindo grande relevância filosófica, também é mostrada como exemplo a formalização da noção humeana acerca do hábito e da crença, a partir dos operadores da lógica da imaginação temporalizada.

Contudo, apenas este exemplo foi apresentado, demonstrando o grande espectro de ação das lógicas temporais e da própria lógica modal, que permite a formalização de diversas noções filosóficas em uma linguagem matemática, facilitando a análise e o trabalho filosófico, além de expandir suas fronteiras.

Neste caso, foi visto como uma lógica em especial pode ter suas noções alteradas a partir de uma visão temporal. A lógica *IMAG* foi escolhida por razões de familiaridade do autor, além de carregar consigo a proposta de hierarquização entre operadores de possibilidade, esta sendo estendida a partir dos operadores temporais. Porém, pode-se pensar em como outras lógicas podem ser construídas a partir da incorporação de tais operadores.

Como seria uma lógica deôntica-temporal construída a partir deste método? Ou como se daria uma lógica epistêmica temporalizada? Apesar de já existirem trabalhos dedicados a tais temas, pode-se pensar como outras formas temporalizadas de tais lógicas podem ser construídas.

A própria relevância filosófica do trabalho não precisa ser justificada além do que já foi. Ao utilizar novos métodos, este trabalho de conclusão de curso, dentre tantos outros, mostra que a lógica matemática está em pleno desenvolvimento, permitindo novas noções e problematizações filosóficas.

Bibliografia

1. CARNIELLI, Walter ; PIZZI, C. . Modalities and Multimodalities. 1. ed. Amsterdam: Springer Verlag, 2008. v. 1. 306 p.

2. COSTA-LEITE, A. (2010). Logical properties of imagination. Abstracta: Linguagem, Mente e Ação, vol. 06 (1);

3. FINGER, M., Changing The Past: applications of two-dimensional temporal logic to databases. 1994.

4. HUME, D., An Enquiry concerning Human Understanding. Coleção CLARENDON EDITION OF THE WORKS OF DAVID HUME, v. 3. Oxford University Press UK. 2000.

5. PRIOR, A. N., Papers on Time and Tense, Oxford University Press. 2003.