UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas
Departamento de Economia

Giovanni Cavalcanti

IMPACTO DE INSUMOS LOCALIZADOS NAS CADEIAS DE PRODUÇÃO GLOBAL

Brasília, DF
2022

Giovanni Cavalcanti

IMPACTO DE INSUMOS LOCALIZADOS NAS CADEIAS DE PRODUÇÃO GLOBAL

Monografia apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento

Brasília, DF

2022

Giovanni Cavalcanti

IMPACTO DE INSUMOS LOCALIZADOS NAS CADEIAS DE PRODUÇÃO GLOBAL

Monografia apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento

Trabalho aprovado em:

Prof. Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento

Orientador

Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro

Convidado

Brasília, DF

2022

RESUMO

O objetivo deste trabalho é descrever teoricamente as estruturas de produção que emergem no Comércio Internacional utilizando da modelagem matemática de equilíbrio geral para compreender a dependência de países por insumos estratégicos. Primeiramente, define-se um modelo fechado com dois insumos, dois produtos e dois consumidores. A seguir, modifica-se o modelo para que um dos insumos seja também um produto e define-se o novo equilíbrio de mercado. A segunda parte deste trabalho estende o modelo autárquico para um ambiente de comércio internacional entre quatro agentes, definindo também com rigorosidade o equilíbrio. Ao final, analisa-se, de forma análoga à primeira parte, o caso específico de quando um dos insumos puder ser também um dos produtos finais. Prova-se ao decorrer desta monografia que o teorema das vantagens comparativas somente será válido caso os produtos ofertados não sejam usados em nenhum outro processo produtivo, portanto a especialização de um país na produção de insumos não é o melhor equilíbrio de mercado possível pela ótica do bem-estar.

Palavras-chave: Economia Internacional, modelagem econômica, equilíbrio geral, cadeias de produção

ABSTRACT

The objective of this work is to theoretically describe the production structures that emerge in International Trade, using general equilibrium mathematical modeling to understand the dependence of countries on strategic inputs. First, a closed economy is defined with two inputs, two products and two consumers. Next, the model is modified so that one of the inputs is also a product and the new market equilibrium is found. The second part of this work extends the autarchic model to an environment of international trade between four agents, also rigorously defining the equilibrium. At the end, it is analyzed, similarly to the first part, the specific case where one of the inputs can also be one of the products supplied internationally. It is proved that the theorem of comparative advantages will only be valid if the products are not used in any other production process, so the specialization of a country in the production of inputs is not the best possible market equilibrium from the paretian perspective.

Keywords: International Economics, economic modeling, general equilibrium, production chains

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fronteiras de produção confrontadas 20

Figura 2 - Caixa de Edgeworth-Bowley, insumos 22

Figura 3 – Caixa de Edgeworth-Bowley 25

Figura 4– Caixa de Edgeworth-Bowley 25

Figura 5 - Caixa de Edgeworth-Bowley 26

Figura 6 - FPP e curva de indiferença na tangência 27

Figura 7 - Derivação da taxa de substituição entre os agentes 28

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11

1.1 Motivação e revisão de literatura 11

1.2 Modelo tradicional ricardiano de comércio internacional 14

1.2.1 Notação 15

1.2.2 Fronteira de produção 15

1.2.3 Vantagens comparativas e absolutas 16

1.2.4 Produtividade dos fatores empregados 17

1.2.5 Segundo país 17

1.2.6 Restrições dos insumos 18

1.2.7 Exemplo numérico 19

1.3 Modelo do agente isolado – Modelo Menger/Wieser 20

1.3.1 Notação 21

1.3.2 A Caixa de Edgeworth-Bowley 21

1.3.3 A curva de contrato 23

1.3.4 Curva de possibilidade de produção 23

1.3 5 Mapa de indiferença de Robinson 26

1.3.6 Mapa de Indiferença e possibilidades de produção confrontadas 27

1.3.7 Inserção de um segundo agente no modelo 27

1.3.8 Taxa de substituição 28

1.3.9 O equilíbrio da primeira pessoa 29

1.3.10 Equilíbrio de mercado 29

2. MODELO AUTÁRQUICO 31

2.1 Notação 31

2.2 Parâmetros.... 32

2.2 Função de produção..32

2.3 Maximização de lucros em competição pura...32

2.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias:...33

2.5 Maximização da utilidade...34

2.6 Rendas individuais...35

2.7 Equilíbrio dos mercados de insumos...35

2.8 Equilíbrio dos mercados de produtos 35

2.9 Soluções...36

3. MODELO AUTÁRQUICO COM UM INSUMO SENDO TAMBÉM PRODUTO 39

3.1 Notação..39

3.2 Parâmetros....... 40

3.3 Funções de utilidade 40

3.4 Maximização da utilidade..41

3.5 Rendas individuais..41

3.6 Função de produção..42

3.7 Maximização de lucros em competição pura...42

3.8 Equilíbrio dos mercados de insumos..43

3.9 Equilíbrio dos mercados de produtos 43

3.10 Soluções..44

4. INTRODUÇÃO DO COMÉRCIO INTERNACIONAL: 2 PAÍSES 47

4.1 Notação..47

4.1.1 Variáveis..47

4.1.2 Parâmetros 48
4.2 Funções de produção 48
4.3 Maximização do lucro em competição pura 49
4.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias 50
4.5 Maximização da utilidade 51
4.6 Rendas individuais 52
4.7 Equilíbrio nos mercados de insumos 52
4.8 Equilíbrios nos mercados finais 53
4.9 A taxa de câmbio 53
4.10 Os balanços de pagamento 53
4.11 Número de equações e variáveis 54
4.12 Teorema de equalização fraca dos preços relativos 54
4.13 Alocação de insumos 55
4.14 Solução para preços relativos dos insumos 56
4.15 Teorema de equalização forte dos preços relativos 57
4.16 Solução para a taxa de câmbio 59
4.17 Soluções para os produtos 59
4.18 Soluções para as rendas individuais 60
4.19 Caso único: especialização total em vantagens comparativas 60
4.20 Soluções dos insumos com especialização completa 61
4.21 Soluções dos preços relativos com especialização completa 62
4.22 Solução da taxa de câmbio em especialização completa 62
4.23 Preços relativos dos insumos e produtos em especialização completa 62
4.24 Soluções dos produtos e suas alocações em especialização completa 63

4.25 Solução das rendas pessoais com completa especialização....63

5. COMÉRCIO INTERNACIONAL COM UM INSUMO SENDO TAMBÉM PRODUTO 65

5.1 Notação....65

5.1.1 Variáveis....65

5.1.2 Parâmetros....66

5.2 Funções de produção....66

5.3 Maximização do lucro em competição pura....67

5.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias....68

5.5 Maximização da utilidade....69

5.6 Rendas individuais....70

5.7 Equilíbrio nos mercados de insumos:....70

5.8 Equilíbrios nos mercados finais:....71

5.9 A taxa de câmbio....71

5.10 Os balanços de pagamento....71

5.11 Número de equações e variáveis....72

5.12 Teorema de equalização fraca dos preços relativos....72

5.13 Alocação de insumos....73

5.14 Solução para preços relativos dos insumos....74

5.15 Teorema de equalização forte dos preços relativos....75

5.16 Solução para a taxa de câmbio....76

5.17 Soluções para os produtos....76

5.18 Soluções para as rendas individuais....77

5.19 Não haverá especialização total....78

5.20 Soluções dos preços relativos no ótimo....78

5.21 Solução da taxa de câmbio no ótimo 79

5.22 Preços relativos dos insumos e produtos no ótimo 79

5.23 Soluções dos produtos e suas alocações no ótimo 79

5.24 Solução das rendas pessoais no ótimo 80

6. CONCLUSÃO 81

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 83

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e revisão de literatura

Ao longo dos mais diversos períodos da humanidade a dependência de insumos estratégicos não só influenciaram ativamente as cadeias de produção supranacionais, mas também o conflito de interesses entre as partes acometidas. A história recente brasileira não é exceção, pelo testemunho das duas crises do petróleo e, mais recentemente, pelo Brasil ser um entre os mais diversos países afligidos pelo desabastecimento de insumos básicos, como fertilizantes ou partes eletrônicas, decorrentes respectivamente ao estado de beligerância entre a Rússia e a Ucrânia e à quarentena sanitária aplicada na China.

Choques nos preços de bens comercializados internacionalmente influenciam sobremaneira vários países, afetando o bem-estar econômico de diversos grupos econômicos. No Brasil, especialmente, as variações bruscas em preços de commodities afetam negativamente as decisões de consumo e de produção, tendo suas repercussões não somente econômicas, mas também políticas e sociais.

Neste contexto, um exemplo clássico da história macroeconômica é visto nos anos 1970, manifestados pela estagflação de diversas economias; incutida em princípio pelos choques do petróleo, a década foi enfim marcada por um lento crescimento econômico associado a altas taxas de inflação. Para compreender melhor estes fenômenos, é necessário suscitar na análise econômica os efeitos da demanda e da oferta, respectivamente, mas não somente a demanda de bens intermediários como o petróleo; e a estrutura de produção nas cadeias globais de valor no comércio internacional. Isto requererá uma abordagem que perpasse modelos de equilíbrio parcial macroeconômicos tradicionais.

Comparando aos eventos recentes, como a alta do preço do petróleo, a escassez de microprocessadores ou a crise dos fertilizantes, é explícita a importância de ter instrumentos adequados para analisar e compreender as repercussões destes movimentos nos mercados internacional e local. Construir um modelo com base na teoria de preços de equilíbrio e no instrumental matemático básico descrito por Aloísio Araújo (2011) mostra-se como um bom ponto de partida para estudar estes fenômenos que conflagram o início dos anos 2020 com também conflagraram os anos 1970.

Logo, com o intuito de explorar a relação de dependência de insumos estratégicos entre nações, este trabalho abordará, em um escopo limitado, a modelagem mínima necessária para analisar as cadeias de produção por meio de um modelo de equilíbrio geral. Será extensivamente feita a modelagem do comportamento dos agentes econômicos participantes – consumidores, firmas e países - e suas decisões referentes aos bens descritos.

Porventura descrever instrumentos os quais possam auxiliar a tomada de decisões estratégicas a respeito da flutuação de preços e a propagação desses efeitos entre países é de natureza ímpar no estudo do bem-estar econômico dos cidadãos, empresas e governos. Ao detalhar um modelo de equilíbrio geral com bens intermediários fixos e bens finais possíveis de serem negociados internacionalmente, é de se esperar que haja a interdependência na formulação das cestas de consumo e as decisões de produzir entre países, o que poderá explicar as cadeias globais de produção.

Ao desenvolver um modelo para captar os efeitos de um choque de oferta internacional em um universo de 2 economias que compõem um certo mercado compartilhado, optando por estes efeitos serem determinísticos, efeitos de demanda ou de oferta são válidos de serem avalizados dentro do modelo, com a possibilidade de formulação de políticas públicas.

Limitando em princípio a análise para um único período, analisar-se-á diretamente o impacto da produção e da oferta de bens. Pode-se analisar também o impacto nos gostos dos consumidores entre países. Outro aspecto que pode ser explorado é a compreensão do impacto de se fechar o comércio internacional por um período, da mesma forma que ocorreu durante o ciclo pandêmico de COVID-19.

A primeira parte da monografia focará em desenvolver um modelo cujo único país atue em autarquia entre 2 tipos de agentes, consumidor e firma, e na parte subsequente tal modelo será generalizado com a interação entre 2 países, cada consumidor e firma, mas considerando o bem intermediário presente como também produto em ambos os países.

Em cada uma dessas duas partes, será ostensivamente trabalhada a definição de dotações iniciais, preferências dos consumidores, plano de produção das firmas, bens finais e o equilíbrio de mercado resultante.

Será necessário antes revisar os principais elementos das unidades econômicas recorrentes, sendo que nas partes subsequentes tais serão mais bem formuladas, dado a necessidade.

Em primeira instância, as dotações iniciais referenciam-se aos recursos iniciais na economia. Elas podem ser puramente consumidas ou usadas como insumos para a manufatura de outros bens. Outro aspecto importante é considerar estes recursos fixos em seus países de origem e, mesmo que haja perfeita mobilidade intersetorial para os insumos, eles não podem ser negociados afora.

Os consumidores são indivíduos agregados em grupos dentro dos países separados por preferências de consumo, preferências estas detalhadas em uma estrutura de utilidade dependente de bens ofertados. Suas rendas serão dependentes das remunerações das dotações iniciais e da produção das firmas.

Firmas serão meios pelos quais produtos refinados serão ofertados aos consumidores, foi-se optado em considerar as firmas competitivas por simplicidade. Para simplificar a análise será suposto a mesma tecnologia, e logo a mesma função de produção, para todos os países.

O bem final compõe um dos 2 tipos de bens que o consumidor pode consumir. A princípio é óbvio que tal bem, por ser produzido com base do bem intermediário, terá que proporcionar relativamente mais utilidade ao consumo que somente o consumo puro do bem não refinado

Por fim, países representam mercados em que grupos de consumidores vivem, assim países tem seus mercados domésticos e podem optar em participar do mercado internacional, o que em prática é entendido como unir o seu mercado doméstico com o mercado doméstico de outros países.

O equilíbrio de mercado é uma lista composta pelas quantidades consumidas de produtos por cada agente, os insumos alocados em cada processo produtivo e o vetor de preços ordenada, tais que não haja excesso de oferta em nenhum mercado e toda a renda seja exaurida, sendo válida a lei de Walras.

Será comentado sucintamente algumas abordagens diretamente ligadas ao tema proposto como pare da revisão de literatura, visto o caráter formal abordado nesta dissertação, serão valorizados dois modelos extremamente influentes na história econômica.

1.2 Modelo tradicional ricardiano de comércio internacional

Ter uma economia isolada do mercado internacional é empiricamente danosa para o bem-estar econômico da nação isolada. Diversos casos ao longo da história econômica evidenciam isto; mesmo o Estados Unidos, maior economia do mundo, já flertou com o isolacionismo econômico ao fechar seus portos a outras nações no início do século XIX [Irwin Douglas, 2003], mesmo em uma época em que navegações intercontinentais ainda apresentavam custos de transporte exorbitantes, foi calculado que neste período de isolamento, a renda média do cidadão americano caiu 8%.

Outro caso notório, influenciando os escritos de David Ricardo, foi a lei do Cereais, que taxavam sobremaneira a importação de grãos para as ilhas britânicas, entre o período de 1815 a 1846. Isto, aliado a outros fatores, propiciou uma das maiores tragédias humanitárias do século XIX, a Grande Fome da Irlanda. Foi neste contexto, dentro do partido liberal Whig, que Ricardo advocou pelo fim das barreiras entre países e a liberalização do comércio, havendo desenvolvido o conceito de vantagens comparativas para sustentar seu argumento. Posteriormente, diversos economistas formalizaram os argumentos de Ricardo com uma modelagem matemática, sendo uma das melhores apresentadas por Rudiger, Dornbusch e Paul Samuelson em "*Comparative Advantage, Trade, and Payments in a Ricardian Model with a Continuum of Goods"*.

O primeiro modelo aqui comentado é a revisão básica do modelo ricardiano do comércio internacional descrito por Samuelson. O cerne dessa teoria está no conceito de vantagens comparativas; mesmo sendo um conceito relativamente simples, não deixa de ser elegante e essencial comentá-lo para o início de qualquer discussão sobre o motivo de países comercializarem entre si, além de ter sido um dos primeiros modelos de equilíbrio geral já desenvolvidos.

Ao iniciar os trabalhos de modelagem com as hipóteses básicas, considerara-se uma economia com um único fator de produção, tendo imobilidade de circulação entre países, mas perfeita mobilidade intersetorial. Imagina-se que nessa economia haja somente dois bens, x_1 e x_2, produzidos entre dois setores. O único insumo da função de produção desses bens é o trabalho, representado em sua totalidade por L. Como o insumo dessa economia é limitado, há um limite máximo de produção para os dois bens, e como há um único fator de produção, a fronteira de produção dessa economia se mostrará como uma linha reta. Ressalta-se que no modelo original não há custos de transporte, a competição é perfeita, e não se faz necessário introduzir a análise da utilidade dos agentes – e consequentemente suas demandas finais.

1.2.1 Notação

A notação abaixo será utilizada

Q_{Xi} = produção máxima do i-ésimo produto no primeiro país

Q_{Xi}^{*} = produção máxima do i-ésimo produto no segundo país

L = quantidade máxima de insumo trabalho no primeiro país

L^{*} = quantidade máxima de insumo trabalho no segundo país

$\frac{1}{\alpha_{Xi}}$ = fator multiplicativo da função de produção do i-ésimo produto no primeiro país

$\frac{1}{\alpha_{Xi}^{*}}$ = fator multiplicativo da função de produção do i-ésimo produto no segundo país

P_i = preço do i-ésimo bem no primeiro país

P_i^{*} = preço do i-ésimo bem no segundo país

1.2.2 Fronteira de produção e o problema de maximização do produto nominal

Se Q_{X1} é a produção máxima do bem 1 e Q_{X2} é a produção máxima do bem 2 para qualquer período, o trabalho necessário alocado na produção de x_1 será $\alpha_{X1}Q_{X1}$ e o trabalho necessário para a produção de x_2 será $\alpha_{X2}Q_{X2}$. A fronteira de possibilidades de produção ficará restrita pela área entre o segmento de reta que cruza o primeiro quadrante cartesiano segundo a equação de reta

$$\alpha_{X1}Q_{X1} + \alpha_{X2}Q_{X2} = \mathrm{L}$$

e seus limites inferiores. Pode-se optar em reescrever a fronteira como

$$Q_{X1} = \frac{L}{\alpha_{X1}} - \frac{a_{X2}}{\alpha_{X1}} Q_{X2}.$$

O problema de maximização do produto em termos de trabalho dessa economia é explicitado por

$$\max P_1 Q_1 + P_2 Q_2$$
$$\text{s. t } Q_1 = \frac{L}{\alpha_{X1}} - \frac{a_{X2}}{\alpha_{X1}} Q_2, Q_1, Q_2 \geq 0.$$

1.2.3 Vantagens comparativas e absolutas

Sendo P_1 e P_2 os preços dos bens 1 e 2, respectivamente, e sabendo de antemão que a economia descrita é competitiva, pode-se facilmente mostrar que haverá a especialização de produção do bem 1 caso a condição $P_1/P_2 > a_{X1}/a_{X2}$ seja atendida, ou haverá a especialização de produção do bem 2 caso a condição $P_1/P_2 < a_{X1}/a_{X2}$ seja atendida, e caso $P_1/P_2 = a_{X1}/a_{X2}$ ocorra haverá a produção dos dois bens, decorrente da comparação das produtividades marginais. Esse resultado é o teorema das vantagens comparativas.

$$\pi = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - L_1 - L_2$$

$$= \left(\frac{P_1}{\alpha_{X1}} L_1\right) + \left(\frac{P_2}{\alpha_{X2}} L_2\right) - \mathrm{L} \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_1} = \frac{P_1}{\alpha_{X1}}, \frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_2} = \frac{P_2}{\alpha_{X2}}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_1} > \frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_2} \rightarrow \frac{P_1}{\alpha_{X1}} > \frac{P_2}{\alpha_{X2}} \ ou \ \frac{P_1}{\mathrm{P}_2} > \frac{\alpha_{X1}}{\alpha_{X2}}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_1} < \frac{\partial \pi}{\partial \mathrm{L}_2} \rightarrow \frac{P_1}{\alpha_{X1}} < \frac{P_2}{\alpha_{X2}} \ ou \ \frac{P_1}{\mathrm{P}_2} < \frac{\alpha_{X1}}{\alpha_{X2}}$$

Um país possui vantagem comparativa na produção de um bem (relativamente a outro) se puder produzi-lo a um custo menor em termos de trabalho - ou produtividade maior. É importante não confundir essa definição com capacidade de produção bruta, ou vantagem absoluta; enquanto a primeira é excludente, ou seja, se o primeiro país tiver vantagem comparativa em 1, necessariamente o segundo país terá vantagem comparativa na produção de

2; o segundo não é excludente, podendo um país sozinho ter capacidade de produzi ambos os bens em maior quantidade que o segundo país.

Um corolário desta conclusão é que a economia se especializará na produção do primeiro bem se e somente se seu preço relativo for maior que o seu custo de oportunidade, da mesma forma que pode ser dito que a economia se especializará na produção do segundo bem se e somente se o preço relativo do primeiro for menor que seu custo de oportunidade. Assim, em uma economia ricardiana fechada, o preço relativo dos bens é igual ao seu custo unitário de trabalho relativo à produção.

1.2.4 Produtividade dos fatores empregados

A produtividade do trabalho empregada é definida como a quantidade de trabalho necessário para permitir a produção do bem, isto é

$$LP_1 = 1/\alpha_{X1} \quad LP_2 = 1/\alpha_{X2}.$$

Se um país deseja produzir mais do primeiro bem, precisará remover trabalho alocado na produção do segundo bem para o primeiro, e a perda de quantidade do segundo produto representa o custo de oportunidade da produção do primeiro bem para o país. A inclinação da fronteira de produção, dada por $-\frac{\alpha_{X1}}{\alpha_{X2}}$, é a representação marginal desse custo.

Ricardo focava-se doravante na oferta da economia. Foi somente com John Stuart Mill [*Principles,* 1848] que foi introduzido a demanda comparativa, e consequentemente a modelagem de utilidade. Por seguinte, mesmo não sendo necessário, a utilidade do consumo da cesta dos dois bens nesse plano econômico será dada pela relação

$$U(X_1, X_2) = X_1 X_2$$

em que X_j representa o consumo do bem j ∈ {1,2}

1.2.5 Segundo país

Se faz necessário introduzir um segundo país, cujo único insumo também é o trabalho representado por L^*. Também neste país poderá ser ora produzido os dois bens anteriormente descritos por $\alpha^*_{X1}Q^*_{X1}$ ou $\alpha^*_{X2}Q^*_{X2}$. O que fará com que a fronteira de produção seja representada por

$$\alpha^*_{X1}Q^*_{X1} + \alpha^*_{X2}Q^*_{X2} = L^* \ .$$

A título de comparação, será considerado que o primeiro país é mais produtivo que o segundo para a produção do primeiro bem, isto é, o mesmo que descrever matematicamente

$$\alpha_{X1}/\alpha_{X2} < \alpha^*_{X1}/\alpha^*_{X2} \text{ ou } \frac{1/\alpha_{X1}}{1/\alpha_{X2}} >, \ \frac{1/\alpha^*_{X1}}{1/\alpha^*_{X2}} \text{ ou } \frac{Pmg_1}{Pmg_2} > \frac{Pmg^*_1}{Pmg^*_2}$$

ou de forma equivalente

$$\alpha_{X1}/\alpha^*_{X1} < \alpha_{X2}/\alpha^*_{X2} \ .$$

Pode-se entender disso que a razão de unidades de trabalho necessárias para produzir o bem 1 ao bem 2 é menor no primeiro país que no segundo. Além disso, pode-se dizer que o país 1 tem vantagem comparativa para a produção do bem 1. De forma equânime, o país 2 terá vantagem comparativa para a produção do bem 2.

1.2.6 Restrições dos insumos

As restrições de recursos dessas duas economias serão respectivamente representadas por

$$L_1 + L_2 = L$$

$$L^*_1 + L^*_2 = L^* \ .$$

Portanto, as variáveis endógenas do modelo são

$$L_1, L_2, X_1, X_2 \quad e \quad L^*_1, L^*_2, X^*_1, X^*_2 \ .$$

E as variáveis exógenas são

$$L, \alpha_1, \alpha_2 \quad e \quad L^*, \alpha^*_1, \alpha^*_2 \ .$$

Na ausência de comércio internacional, os preços relativos dos dois países seriam respectivamente α_{X1}/α_{X2} e $\alpha^*_{X1}/\alpha^*_{X2}$. Mas existindo o comércio entre países, enquanto perdurar a diferença de preços entre as duas localidades, será lucrativo exportar o bem 1 do país 1 e o bem 2 do país 2, e isto não pode se manter indefinidamente. Irrevogavelmente, ocorrerá uma equalização entre os dois preços relativos.

Os países se especializarão naqueles bens que apresentam vantagem relativa pois estes serão demandados no exterior por um preço maior que o do mercado local, dado a escassez relativa maior desses no exterior.

1.2.7 Exemplo numérico

A apresentação do modelo deixou notória os ganhos de bem-estar quando países se abrem ao comércio internacional. Isto ficará ainda mais claro com um exemplo numérico.

Suponha-se que o país 1 apresente os seguintes parâmetros

$\alpha_1 = 2$

$\alpha_2 = 1$

$L = 24$.

E que a segunda economia apresente os seguintes parâmetros

$\alpha^*_1 = 3$

$\alpha^*_2 = 6$

$L^* = 24$.

O primeiro país possui a vantagem absoluta para a produção de ambos os bens, visto que

$Q_{1,max} = 24/2 = 12 > 7 = 24/3 = Q^*_{1,max}$,

$Q_{2,max} = 24/1 = 24 > 4 = 24/6 = Q^*_{2,max}$.

Entretanto, o país 1 possui vantagem comparativa na produção do bem 2, pois

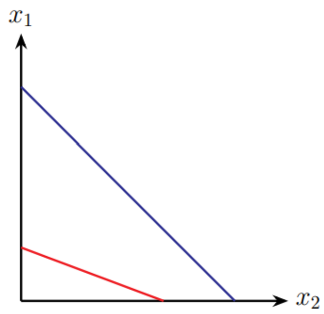
$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1/2 < 6/3 = \frac{\alpha_2^*}{\alpha_1^*}$.

E, em contrapartida, o país 2 possui vantagem comparativa na produção do bem 1, pois

$\frac{\alpha_1^*}{\alpha_2^*} = 3/6 < 2/1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Graficamente, as fronteiras de possibilidade de produção (FPP) serão

Figura 1 - Fronteiras de produção confrontadas



Fonte – Elaboração Própria

Em vermelho é a FPP do país 2, e em azul é a FPP do país 1

Se cada país se especializar naquilo em que tem vantagem comparativa, fica evidente que a quantidade bruta de bens na economia será maior que qualquer outra combinação sobre as fronteiras de possibilidade de produção. Neste caso, o país 1 produziria 24 unidades do bem 2, enquanto o país 2 produziria 8 unidades do bem 1. Assim, a produção mundial dos dois bens é maior em especialização que em autarquia.

1.3 Modelo do agente isolado – Modelo Menger/Wieser

Outro modelo a ser detalhado ficou conhecido na literatura econômica como o modelo do náufrago, modelo Robinson Crusoé, modelo Menger/Wieser, ou modelo de um único agente.

Este modelo apresenta um equilíbrio de dois insumos e dois produtos onde a produção é instantânea, logo não há produtos duráveis- e não haverá acumulação de capital, simplificando a análise para um único período. Sua relevância neste contexto é que sua estrutura pode ser facilmente adaptada para adicionar mais consumidores ou bens. Mais especificamente, os modelos futuramente derivados são frutos de alterações desse modelo. Entretanto, ele não apresenta um sistema de preços explícitos, sendo uma economia de trocas puras.

1.3.1 Notação

A notação utilizada será

U $=$ utilidade de Robinson resultante de seu consumo

X_j $=$ j-ésima produção por ano $j = 1, 2$

x_{ij} $=$ i-ésimo insumo absorvido pelo j-ésimo produto por ano, $i = j = 1, 2$

Os parâmetros presentes serão

A $=$ elasticidade da utilidade em respeito ao primeiro produto

B $=$ elasticidade da utilidade em respeito ao segundo produto

α_j $=$ elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao primeiro insumo, $j = 1, 2$

β_j $=$ elasticidade do j-ésimio produto em respeito ao segundo insumo, $j = 1, 2$

M_j $=$ fator multiplicativo na função de produção para o j-ésimo produto, $j = 1, 2$

N $=$ fator multiplicativo na função de produção

1.3.2 A Caixa de Edgeworth-Bowley

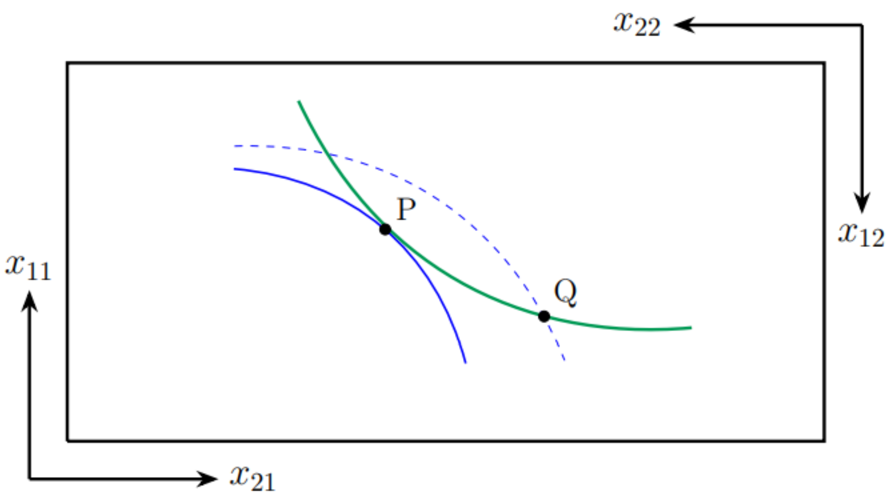
As funções de produção de Robinson serão representadas na estrutura Cobb-Douglas, sendo válido $\alpha_1 + \beta_1 = 1$.

$$X_1 = M_1 x_{11}^{\alpha_1} x_{21}^{\beta_1} \quad (1)$$

$$X_2 = M_2 x_{12}^{\alpha_2} x_{22}^{\beta_2} \quad . \quad (2)$$

Como ponto de partida, imagina-se que Robinson considere a produção de uma quantidade arbitrária do primeiro produto. Desenha-se um diagrama onde o primeiro insumo seja o eixo vertical e o segundo insumo seja o eixo horizontal; em sequência desenha-se a isoquanta para a quantidade de produto arbitrária. Como é sabido, para uma função de produção como (1), a isoquanta será convexa à origem.

Figura 2 - Caixa de Edgeworth-Bowley, insumos



Fonte – Elaboração Própria

Aproveita-se a suposição de que a quantidade total disponível de cada insumo será fornecida, e o diagrama acima torna-se na célebre caixa de Edgeworth-Bowley, ou seja, um retângulo cuja altura mede a quantidade total disponível do primeiro insumo e cuja base mede a quantidade total disponível do segundo insumo. Enquanto Robinson quiser produzir a quantidade fixa arbitrária do primeiro insumo, ele obviamente escolherá ponto P, entre as outras possibilidades de produção. Se ele, por exemplo, produzisse no ponto Q, ele obteria a mesma quantidade do primeiro produto, mas menos do segundo.

1.3.3 A curva de contrato

Se faz necessário agora derivar o lugar geométrico de todos esses pontos de tangência, ou seja, a curva de Edgeworth. As isoquantas de produção encontram-se definidas pelo requisito de que a quantidade de produto permaneça inalterada

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_{11}} dx_{11} + \frac{\partial X_1}{\partial x_{21}} dx_{21} = 0 \tag{3}$$

$$dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_{12}} dx_{12} + \frac{\partial X_2}{\partial x_{22}} dx_{22} = 0 \ . \tag{4}$$

As equações (3) e (4) são respectivamente a generalização de todas as curvas verde e azul da imagem anterior.

Usando das funções de produção (1) e (2), pode-se fazer a derivação ordenada por (3) e (4) e assim encontrar as inclinações das duas isoquantas.

$$\frac{dx_{11}}{dx_{21}} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{x_{11}}{x_{21}} \tag{5}$$

$$\frac{dx_{12}}{dx_{22}} = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{x_{12}}{x_{22}} \quad . \tag{6}$$

No ponto de tangência, as curvas (5) e (6) são iguais, logo

$$\frac{x_{11}/x_{21}}{x_{12}/x_{22}} = \frac{\beta_2/\alpha_2}{\beta_1/\alpha_1} \quad . \tag{7}$$

1.3.4 Curva de possibilidade de produção

Ao traçar as duas quantidades de produto X_1 e X_2 para cada ponto de tangência na caixa de Edgeworth em um novo diagrama com os dois produtos em seus eixos em vez dos dois insumos encontra-se um novo elemento conhecido como curva de possibilidades de produção de Samuelson. Tal é definida ao dividir (3) por (4)

$$\frac{dX_1}{dX_2} = \frac{{}^{\partial X_1}/_{\partial x_{11}} dx_{11} + {}^{\partial X_1}/_{\partial x_{21}} dx_{21}}{{}^{\partial X_2}/_{\partial x_{12}} dx_{12} + {}^{\partial X_2}/_{\partial x_{22}} dx_{22}} \quad . \tag{8}$$

Sabe-se que ao longo da curva de contrato dois aspectos se mantêm constantes, a equação (7) sempre será válida e todos os insumos são exauridos

$$dx_{11} = -dx_{12} \tag{9}$$

$$dx_{21} = -dx_{22} \quad . \tag{10}$$

Ao levar a derivação ordenada de (8) e inserindo (7) múltiplas vezes, e por fim usando (9) e (10), pode-se obter as seguintes razões

$$\frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{X_1}{x_{11}}\frac{x_{12}}{X_2} = -\frac{\partial X_1/\partial x_{11}}{\partial X_2/\partial x_{12}} \tag{11}$$

$$\frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{X_1}{x_{21}}\frac{x_{22}}{X_2} = -\frac{\partial X_1/\partial x_{21}}{\partial X_2/\partial x_{22}} \quad . \tag{12}$$

Portanto, há duas expressões alternativas para a inclinação da curva de possibilidades de produção. A Equação (11) é a razão entre as produtividades marginais do primeiro insumo em X_1 e X_2. A equação (12) é a razão entre as produtividades marginais do segundo insumo; também em X_1 e X_2. Uma expressão é tão boa quanto a outra, mas será em diante usado somente a (12). Ao usar apenas as duas funções de produção (1) e (2), pode-se descrever

$$\frac{X_1}{x_{21}} = M_1\left(\frac{x_{11}}{x_{21}}\right)^{\alpha_1} \tag{13}$$

$$\frac{x_{22}}{X_2} = \frac{1}{M_2}\left(\frac{x_{12}}{x_{22}}\right)^{-\alpha_2} \quad . \tag{14}$$

Inserindo (13) e (14) em (12), tem-se

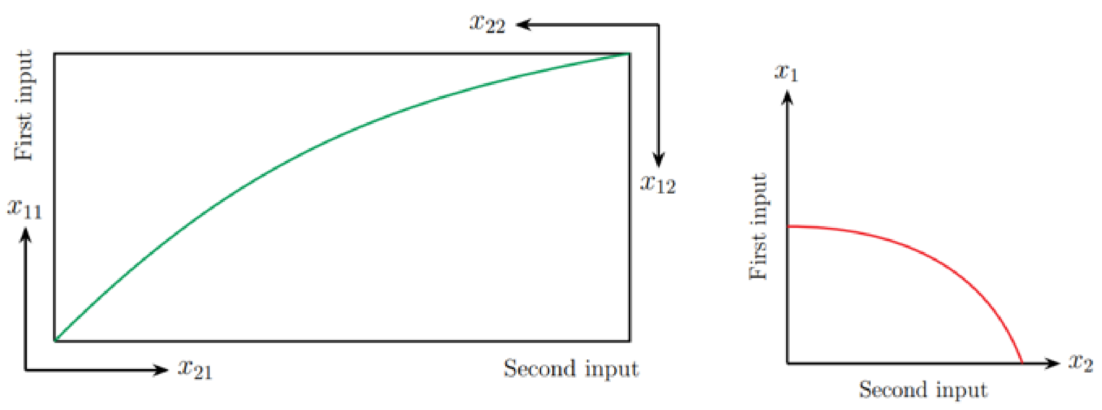
$$\frac{dX_1}{dX_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{M_1}{M_2}\left(\left(\frac{x_{11}}{x_{21}}\right)^{\alpha_1} \Big/ \left(\frac{x_{12}}{x_{22}}\right)^{\alpha_2}\right).$$

Finalmente, reescrevendo α_1 como $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$ e usando (7) de novo, chega-se em

$$\frac{dX_1}{dX_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{M_1}{M_2}\left(\frac{x_{11}}{x_{21}}\right)^{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{\beta_2/\alpha_2}{\beta_1/\alpha_1}\right)^{\alpha_2}. \tag{15}$$

Equação (15) permite ver o que a inclinação da curva de possibilidades de produção depende do que ocorre entre a razão $\frac{x_{11}}{x_{21}}$ ao longo da curva de Edgeworth-Bowley. Graficamente

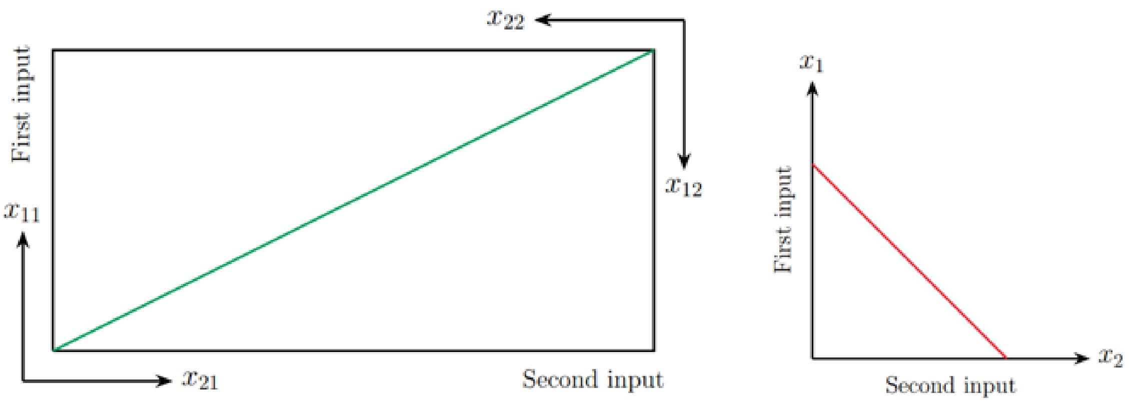
Figura 3 – Caixa de Edgeworth-Bowley



Fonte – Elaboração Própria

Se a razão (7) for maior que 1, ou que $\alpha_1 > \alpha_2$

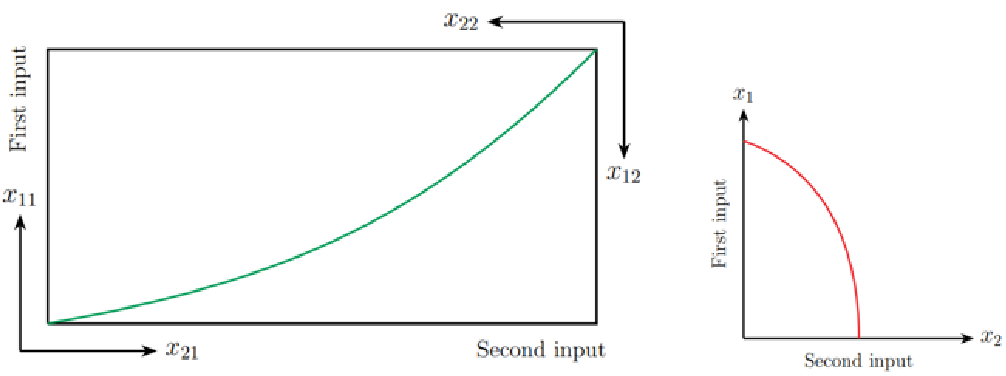
Figura 4– Caixa de Edgeworth-Bowley



Fonte – Elaboração Própria

Se a razão (7) for igual a1, ou que $\alpha_1 = \alpha_2$

Figura 5 - Caixa de Edgeworth-Bowley



Fonte – Elaboração Própria

Se a razão (7) for menor a1, ou que $\alpha_1 < \alpha_2$

1.3 5 Mapa de indiferença de Robinson

Considerando que Robinson tem suas preferências na forma Cobb-Douglas

$$U = NX_1^A X_2^B \quad . \tag{16}$$

Onde A e B são parâmetros entre 0 e 1, e em que *N* é um fator multiplicativo dependente das unidades de mensuração

$$dU = \frac{\partial U}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial U}{\partial X_2} dX_2 = 0 \, . \tag{17}$$

(17) é a diferenciação total da função de utilidade, será usado de (16) e (17) para encontrar a taxa marginal de substituição de Robinson

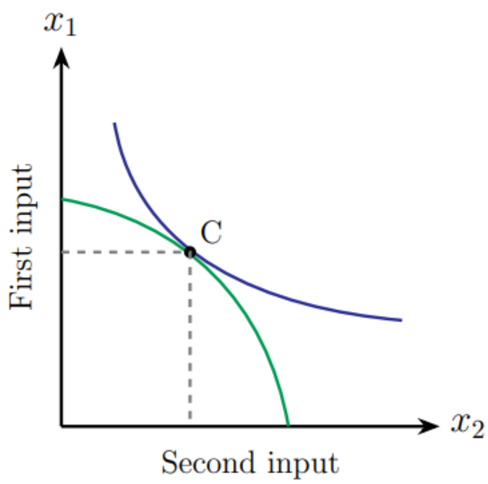
$$\frac{dX_1}{dX_2} = -\frac{B}{A}\frac{X_1}{X_2} = -\frac{\partial U/\partial X_2}{\partial U/\partial X_1} \quad . \tag{18}$$

Portanto, a inclinação da curva de indiferença de Robinson, ou sua taxa marginal de substituição, parece ser igual a razão entre as utilidades marginais dos produtos X_2 e X_1.

1.3.6 Mapa de Indiferença e possibilidades de produção confrontadas

No plano cartesiano $X_1 \cdot X_2$, será desenhado o mapa de indiferença de Robinson e sua fronteira de produção. A sua curva de indiferença deve se encontrar em uma posição de tangência em relação a fronteira de possibilidades de produção. Isso decorre, pois, a fronteira de possibilidades de produção é sempre não convexa. É óbvio então que uma função de utilidade como a (16) terá curvas de indiferença sempre convexas a origem. O ponto de tangência será indiscutivelmente o ótimo de Robinson para produção – e consumo- para cada produto.

Figura 6 - FPP e curva de indiferença na tangência



Fonte – Elaboração Própria

Por fim, pode ser dito que a alocação racional dos insumos de Robinson implica em

$$\frac{\partial X_1/\partial x_{11}}{\partial X_2/\partial x_{12}} = \frac{\partial X_1/\partial x_{21}}{\partial X_2/\partial x_{22}} = \frac{\partial U/\partial X_2}{\partial U/\partial X_1}\,. \tag{19}$$

1.3.7 Inserção de um segundo agente no modelo

Agora, será introduzido sexta-feira como o segundo indivíduo nesta economia. Assim se faz necessário atualizar a notação até aqui utilizada, adicionando alguns elementos

$C_{jk} =$ j-ésimo produto consumido pela k-ésima pessoa, $k = 1,2$

E = taxa de substituição, em número de unidades físicas do primeiro produto trocadas pelo número de unidades físicas do segundo produto.

$U_k =$ utilidade da k-ésima pessoa resultante do seu consumo, $k = 1, 2$

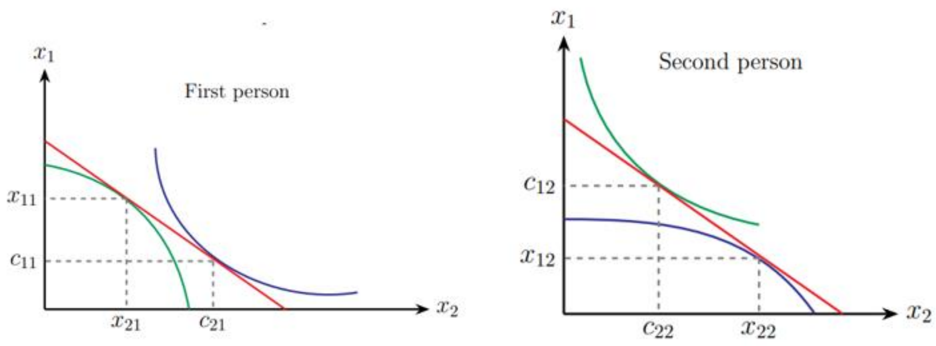
$X_{jk} =$ j-ésimo produto produzido pela k-ésima pessoa, $k = 1, 2$

$x_{ijk} =$ i-ésimo insumo absorvido pelo j-ésimo produto pela k-ésima pessoa, $k = 1, 2$

1.3.8 A Taxa de substituição

Agora, os dois indivíduos do modelo recebem respectivamente duas cestas com quantidades relativas diferentes de insumos. Logo, estes dois indivíduos terão fronteiras de produção e mapas de indiferença diferentes entre si. Graficamente é possível supor

Figura 7 - Derivação da taxa de substituição entre os agentes



Fonte – Elaboração Própria

Onde a linha superior representa a curva de indiferença derivada da função utilidade, a linha inferior representa a fronteira de possibilidades de produção e a linha vermelha a taxa de substituição definida como o número de unidades físicas do primeiro produto trocadas por uma unidade física do segundo produto

A reta tangente vermelha deverá ser determinada para encontrar o equilíbrio dos consumidores

1.3.9 O equilíbrio dos consumidores

A primeira pessoa deverá produzir X_{11} e X_{12} e consumir C_{11} e C_{12}, logo trocando as quantidades $X_{11} - C_{11}$ do primeiro produto em retorno da quantidade $X_{21} - C_{21}$ do segundo produto. Isto o possibilitaria alcançar a maior curva de indiferença possível pelo ponto de tangência (C_{21}, C_{11}).

$$E = \frac{dX_{11}}{dX_{21}} = -\frac{\partial X_{11}/\partial x_{111}}{\partial X_{21}/\partial x_{121}} = -\frac{\partial X_{11}/\partial x_{211}}{\partial X_{21}/\partial x_{121}} \ , \tag{20}$$

é derivada das equações (11) e (12)

Do fato de que a linha reta cuja inclinação é a taxa de substituição é também tangente a curva de indiferença, da equação (18) se deriva

$$E = \frac{dC_{11}}{dC_{21}} = \frac{\partial U_1/\partial C_{21}}{\partial U_1/\partial C_{11}} \ . \tag{21}$$

Para o segundo indivíduo, o desenvolvimento é análogo ao primeiro, e

$$E = \frac{dX_{12}}{dX_{22}} = -\frac{\partial X_{12}/\partial x_{112}}{\partial X_{22}/\partial x_{122}} = -\frac{\partial X_{12}/\partial x_{212}}{\partial X_{22}/\partial x_{122}} \tag{22}$$

$$E = \frac{dC_{12}}{dC_{22}} = \frac{\partial U_2/\partial C_{22}}{\partial U_2/\partial C_{12}} \ . \tag{23}$$

1.3.10 Equilíbrio de mercado

Para que a taxa de substituição E esteja em equilíbrio, a oferta da primeira pessoa do primeiro produto deve ser igual a demanda da segunda pessoa por ele, isto é

$$X_{11} - C_{11} = C_{12} - X_{12} \ . \tag{24}$$

E a mesma lógica pode ser aplicada ao segundo produto

$$C_{21} - X_{21} = X_{22} - C_{22} \ . \tag{25}$$

Portanto, para finalizar, em equilíbrio cada agente estará disposto a dar a quantidade exata de que a outra pessoa demanda. Se isto não ocorresse, a taxa de substituição se alteraria até que fosse válido

$$\frac{X_{11}-C_{11}}{E} = X_{21} - C_{21},$$

$$\frac{C_{12}-X_{12}}{E} = C_{22} - X_{22}.$$

Estas equações são conhecidas como funções excedentes de demanda e estão de acordo com a lei de Walras, em que não pode haver em equilíbrio excesso de oferta, e concomitantemente falta de demanda.

2. MODELO AUTÁRQUICO

Os modelos apresentados anteriormente não diferenciavam o consumidor do produtor e não apresentavam um sistema de preços como sinais dos custos de oportunidade por já serem internalizados pelos agentes. Isto é o mesmo que dizer que as economias modeladas eram modelos de equilíbrio geral de produção e trocas puras entre indivíduos.

Firmas não cobravam preços pelos seus produtos e não pagavam pelos seus insumos ou maximizavam seus lucros, e nenhum consumidor recebia ou gastava dinheiro nestes cenários.

Agora será introduzida um sistema de preços explícito, o que aproximará o modelo da realidade. Ainda assumindo funções de produção homogêneas e competição perfeita, haverá dois insumos, dois produtos e dois consumidores. Como as firmas operarão em competição perfeita, elas não apresentarão lucros e logo é indeterminado a quantidade de firmas que estarão em operação.

2.1 Notação

A notação apresentada neste capítulo terá como referência

C_{jk} = j-ésimo produto consumido pelo k-ésimo consumidor

P_j = preço do j-ésimo produto

p_i = preço do i-ésimo insumo

U_k = utilidade do k-ésimo consumidor, resultante de seu consumo instantâneo

$\mathrm{X_j}$ = j-ésimo produto

x_{ij} = i-ésimo insumo absorvido para a produção do j-ésimo produto

Y_k = renda do k-ésimo consumidor

2.2 Parâmetros

Os parâmetros trabalhados neste capítulo são sumarizados por

$A =$ elasticidade da utilidade em respeito ao primeiro produto

$B =$ elasticidade da utilidade em respeito ao segundo produto

$\alpha_j =$ elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao primeiro insumo

$\beta_j =$ elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao segundo insumo

$M_j =$ fator multiplicativo da função de produção para o j-ésimo produto

$N =$ fator multiplicativo da função de utilidade

$x_i =$ dotação do i-ésimo insumo

2.2 Função de produção

Considera-se que as funções de produção para os dois produtos sejam da forma Cobb-Douglas, visto sua versatilidade e fácil interpretação.

$$X_1 = M_1 x_{11}^{\alpha_1} x_{12}^{\beta_1}, \tag{1}$$

$$X_2 = M_2 x_{12}^{\alpha_2} x_{22}^{\beta_2} \,. \tag{2}$$

Em que $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$, $M_j > 0$ e $\alpha_j + \beta_j = 1$. As funções de produção (1) e (2) são adotadas com seis restrições $x_{ij} \geq 0$, e $\mathrm{X_j} \geq 0,\ \mathrm{i} = \mathrm{j} = 1{,}2$.

2.3 Maximização de lucros em competição pura.

O problema de maximização incondicional dos lucros será expresso por

$$\max \ \ \pi_\mathrm{i} = P_i X_i - p_1 x_{i1} - p_2 x_{i2}.$$

Em competição perfeita, as remunerações dos fatores de produção são iguais a suas respectivas produtividades marginais. Pôr a função de produção ser Cobb-Douglas e aplicando o princípio anteriormente exposto, encontram-se 4 condições de primeira ordem.

$$p_1 = P_1 \frac{\alpha_1}{x_{11}} X_1 \ , \tag{3}$$

$$p_2 = P_1 \frac{\beta_1}{x_{12}} X_1 \ , \tag{4}$$

$$p_1 = P_2 \frac{\alpha_2}{x_{21}} X_2 \ , \tag{5}$$

$$p_2 = P_2 \frac{\beta_2}{x_{22}} X_2 \ . \tag{6}$$

Rearranjando (3) e (4) e somando-as, tem-se

$$P_1 X_1 = p_1 x_{11} + p_2 x_{12} \ . \tag{3a}$$

E rearranjando (5) e (6) de forma equânime, tem-se

$$P_2 X_2 = p_1 x_{21} + p_2 x_{22} \ . \tag{5a}$$

As equações (3a) e (5a) mostram que o valor auferido do i-ésimo bem final será igual as parcelas de valor agregado dos insumos absorvidos durante o processo de produção. O produto nominal total dessa economia é a soma de (3a) e (5a).

2.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias

Ambos os agentes terão suas utilidades representadas em suas formas funcionais como funções Cobb-Douglas.

$$U_1 = N C_{11}^{A} C_{21}^{B},$$

$$U_2 = N C_{12}^{A} C_{22}^{B}.$$

Em que A e B são parâmetros entre 0 e 1 e N é um fator multiplicativo dependente das unidades de mensuração. Não é necessário assumir que a soma dos expoentes é unitária, ou o mesmo que dizer $A + B = 1$.

Por ser um modelo de único período e a renda sozinha não auferir utilidade, não haverá poupança e as restrições orçamentárias serão representadas por

$$Y_1 = P_1 C_{11} + P_2 C_{21},$$

$$Y_2 = P_1 C_{12} + P_2 C_{22}.$$

2.5 Maximização da utilidade

O problema de maximização condicional da utilidade será, portanto, expressa como

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathrm{U_i}(C_{1i}, C_{2i}) = C_{1i}^{A} C_{2i}^{B} \\ \mathrm{s.t} \quad & \mathrm{Y_i} = \mathrm{P_1} C_{1i} + \mathrm{P_2} C_{2i}. \end{aligned}$$

Maximizar a utilidade de uma função Cobb-Douglas propicia funções de demanda cujas elasticidades em respeito a renda são unitárias, cujas elasticidades em respeito aos preços são iguais a menos 1, e cujas elasticidades cruzadas são nulas. Assim, as estruturas de demanda resultantes ficam

$$C_{11} = \frac{A}{A+B} \frac{Y_1}{P_1} \quad , \tag{7}$$

$$C_{21} = \frac{B}{A+B} \frac{Y_1}{P_2} \quad , \tag{8}$$

$$C_{21} = \frac{A}{A+B} \frac{Y_2}{P_1} \quad , \tag{9}$$

$$C_{22} = \frac{B}{A+B} \frac{Y_2}{P_2} \quad . \tag{10}$$

2.6 Rendas individuais

Caso o primeiro consumidor seja o proprietário do primeiro insumo e o segundo consumidor seja o proprietário do segundo insumo, a distribuição de rendas dessa economia é representada por

$$Y_1 = p_1 x_1 \ , \tag{11}$$

$$Y_2 = p_2 x_2 \ . \tag{12}$$

2.7 Equilíbrio dos mercados de insumos

Como é necessário que todos os insumos ao final do processo de produção sejam absorvidos, são verdadeiras as igualdades

$$x_1 = x_{11} + x_{12} \ , \tag{13}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} \ . \tag{14}$$

2.8 Equilíbrio dos mercados de produtos

O preço do primeiro produto se ajusta de tal forma que a produção sempre se iguala a demanda

$$X_1 = C_{11} + C_{12} \ . \tag{15}$$

Para encontrar o equilíbrio do segundo produto, primeiro deve-se combinar (3a), (5a), (11), (12), (13) e (14) para obter

$$P_1 X_1 + P_2 X_2 = Y_1 + Y_2 .$$

Ao combinar (7) até (10) e usando (15) obtém-se

$$P_1 X_1 + P_2 (C_{12} + C_{22}) = Y_1 + Y_2 .$$

Segue-se disso que o segundo produto, também, terá oferta e demanda iguais

$$X_2 = C_{21} + C_{22}\,. \tag{15a}$$

De novo, as duas últimas condições são a lei de Walras, ou que não há excesso de demanda nessa economia em equilíbrio, além disso (15a) é uma equação dependente de (15), pois enquanto (15) se mostrar verdadeira, (15a) também a será. Assim, o modelo tem 15 equações para determinar 16 variáveis

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$	X_1, X_2
P_1, P_2	$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$
p_1, p_2	Y_1, Y_2

É óbvio que o sistema apresentado terá soluções indeterminadas caso nenhuma hipótese a mais seja considerada. Para circunscrever este problema, considera-se o preço p_1 do primeiro insumo como sendo unitário – o numerário walrasiano-. Isso eliminará uma variável do sistema o que deixa preços e rendas relativas ao preço p_1.

2.9 Soluções

Primeiro, resolve-se para os quatros insumos x_{ij} usando (3a), (5a), (7) até (10), (15) e (15a), o que resulta em

$$A(p_1 x_{12} + P_2 x_{22}) = B(p_1 x_{11} + p_2 x_{21}).$$

De (3) até (6) encontra-se

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{x_{22}}{x_{12}}.$$

Destes dois resultados, aliados as equações (13) e (14), obtém-se as soluções de distribuição dos insumos

$$x_{11} = \frac{\alpha_1 A}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} x_1, \tag{16}$$

$$x_{12} = \frac{\alpha_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} x_1, \tag{17}$$

$$x_{21} = \frac{\beta_1 A}{\beta_1 A + \beta_2 B} x_2, \tag{18}$$

$$x_{22} = \frac{\beta_2 B}{\beta_1 A + \beta_2 B} x_2. \tag{19}$$

Uma vez determinada a alocação ótima dos insumos, o resto é direto. Combina-se (1) até (6) com (16) até (19) e obtém-se as soluções dos preços relativos ao numerário p_1

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\beta_1 A + \beta_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}, \tag{20}$$

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{1}{M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1}} \frac{\beta_1 A + \beta_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}^{\beta_1}, \tag{21}$$

$$\frac{P_2}{p_1} = \frac{1}{M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1}} \frac{\beta_1 A + \beta_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}^{\beta_2}. \tag{22}$$

A inserção direta de (16) até (19) dentro de (1) e (2) retorna as soluções do total dos produtos

$$X_1 = M_1 \left(\frac{\alpha_1 A x_1}{\alpha_1 A + \alpha_2 B}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\beta_1 A x_2}{\beta_1 A + \beta_2 B}\right)^{\beta_1}, \tag{23}$$

$$X_2 = M_2 \left(\frac{\alpha_2 A x_1}{\alpha_1 A + \alpha_2 B}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\beta_2 A x_2}{\beta_1 A + \beta_2 B}\right)^{\beta_2}. \tag{24}$$

A inserção direta de (11), (12), e de (20) até (22) dentro de (7) até (10) retorna as soluções de alocação dos produtos

$$C_{11} = \frac{A}{A+B} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_1 A + \alpha_2 B}{\beta_1 A + \beta_2 B} \frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1} x_1, \tag{25}$$

$$C_{21} = \frac{B}{A+B} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{\alpha_1 A + \alpha_2 B}{\beta_1 A + \beta_2 B} \frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2} x_1, \tag{26}$$

$$C_{12} = \frac{A}{A+B} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{\beta_1 A + \beta_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_1} x_2, \tag{27}$$

$$C_{22} = \frac{B}{A+B} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{\beta_1 A + \beta_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_2} x_2. \tag{28}$$

Finalmente, ao combinar (11), (12) e (20) encontra-se as rendas relativas ao numerário p_1

$$\frac{Y_1}{p_1} = x_1, \tag{29}$$

$$\frac{Y_2}{p_1} = \frac{\beta_1 A+\beta_2 B}{\alpha_1 A+\alpha_2 B} x_1. \tag{30}$$

ou de forma análoga

$$\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{\alpha_1 A+\alpha_2 B}{A+B}, \tag{29a}$$

$$\frac{Y_2}{Y_1+Y_2} = \frac{\beta_1 A+\beta_2 B}{A+B}. \tag{29b}$$

Estes resultados serão comparados com o caso específico do próximo capítulo.

3. MODELO AUTÁRQUICO COM UM INSUMO SENDO TAMBÉM PRODUTO

O objetivo deste capítulo é generalizar o modelo anteriormente apresentado ao aplicar a ideia de que um dos insumos pode ser consumido em sua forma pura, sem necessidade de ser absorvido junto com outros insumos em um processo de produção - como exemplo pode-se comparar a gasolina, a comida *in natura* ou a eletricidade, bens que ora são insumos em processos produtivos ou bens finais. Assim espera-se comparar o efeito desse tipo especial de bem na formulação das cestas de consumo e produção dos agentes dentro do modelo.

Mas antes de iniciar a análise, é imperioso determinar como em um cenário de autarquia as decisões e interações dos agentes são modeladas e constituídas. Uma vez havendo consistência lógica e formal nessas iterações, pode-se expandir o escopo da análise adicionando outros elementos, refinando assim o modelo. A configuração proposta começará com dois agentes, 2 insumos e 2 produtos, como foi feito anteriormente.

3.1 Notação

Os dois consumidores, tomadores de preço, viverão por um único período mensurado onde cada um terá em sua posse um dos bens intermediários. Para facilitar a análise, considere que o primeiro insumo pertença ao primeiro consumidor e o segundo bem pertença ao segundo consumidor. Haverá no período 2 planos de produção com acesso a uma tecnologia que ao ser imbuída dos insumos, o bem final será ofertado instantaneamente; em especial, o primeiro plano de produção será uma transformação linear unitária, em que uma unidade do primeiro insumo se transforma em uma unidade do primeiro produto. A notação apresentada neste capítulo terá como referência

C_{jk} = j-ésimo produto consumido pelo k-ésimo consumidor

P_j = preço do j-ésimo produto

p_i = preço do i-ésimo insumo

u_k = utilidade do k-ésimo consumidor, resultante de seu consumo instantâneo

$\mathrm{X_j}$ = j-ésimo produto presente

x_{ij} = i-ésimo insumo absorvido para a produção do j-ésimo produto

Y_k = renda do k-ésimo consumidor

3.2 Parâmetros

Os parâmetros trabalhados neste capítulo são sumarizados por

δ_k = fator de desconto intertemporal do k-ésimo consumidor

A = elasticidade da utilidade em respeito ao primeiro produto

B = elasticidade da utilidade em respeito ao segundo produto

α_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao primeiro insumo

β_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao segundo insumo

M_j = fator multiplicativo da função de produção para o j-ésimo produto

N = fator multiplicativo da função de utilidade

x_i = dotação do i-ésimo insumo

3.3 Funções de utilidade

O consumidor terá preferências contínuas, convexas, e estritamente monotônicas $\succeq$ definidas sobre o consumo dos produtos. Sua preferência é advinda da função utilidade

$$u_k(\cdot) \tag{1}$$

Em que $u(\cdot)$ é a função de utilidade instantânea definida em $\mathbb{R}^2_+$. Para manter a abordagem simples, a utilidade instantânea dos consumidores terá a forma funcional de uma função Cobb-Douglas, respectivamente

$$u_{1t} = \mathrm{N}C_{11t}^{A}C_{21t}^{B},$$

$$u_{2t} = \mathrm{N} C_{12t}^{A} C_{22t}^{B}.$$

Em que A e B são parâmetros entre 0 e 1 e N é um fator multiplicativo dependente das unidades de mensuração.

3.4 Maximização da utilidade

O problema de maximização condicional da utilidade será, portanto, expressa como

$$\begin{aligned} &\max \ \ \mathrm{U_i}(C_{1i}, C_{2i}) = C_{1i}^{A} C_{2i}^{B} \\ &\mathrm{s.t} \ \ \mathrm{Y_i} = \mathrm{P_1} C_{1i} + \mathrm{P_2} C_{2i} \end{aligned}$$

Maximizar a utilidade de uma função Cobb-Douglas propicia funções de demanda cujas elasticidades em respeito a renda são iguais a 1, cujas elasticidades em respeito aos preços são iguais a menos 1, e cujas elasticidades cruzadas são iguais a zero. Assim, as estruturas de demanda serão

$$C_{11} = \frac{A}{A+B}\frac{Y_1}{P_1}, \tag{2}$$

$$C_{21} = \frac{B}{A+B}\frac{Y_1}{P_2}\,, \tag{3}$$

$$C_{21} = \frac{A}{A+B}\frac{Y_2}{P_1}\,, \tag{4}$$

$$C_{22} = \frac{B}{A+B}\frac{Y_2}{P_2}\,. \tag{5}$$

3.5 Rendas individuais

Como o primeiro consumidor é o proprietário do primeiro insumo e o segundo consumidor é o proprietário do segundo insumo, a distribuição de rendas dessa economia será representada por

$$Y_1 = p_1 x_1\,, \tag{6}$$

$$Y_2 = p_2 x_2\,, \tag{7}$$

3.6 Função de produção

Usa-se dos insumos para a produção do segundo produto de acordo com uma função de produção $Y = f(\cdot), Y \Leftarrow \mathbb{R}^{2L}$ estritamente crescente e côncava para cada insumo. Logo, a produção do segundo bem final será em detrimento da redução do estoque dos insumos. Considera-se que as funções de produção para o segundo produto sejam da forma Cobb-Douglas, visto sua versatilidade e fácil interpretação.

$$X_2 = M_2 x_{12}^{\alpha_2} x_{22}^{\beta_2}. \tag{8}$$

Em que $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$, $M_j > 0$ e $\alpha_j + \beta_j = 1$. A função de produção (2) é adotada com seis restrições $x_{ij} \geq 0$, e $X_j \geq 0$, $i = j = 1,2$.

Em relação a primeira função de produção, como o primeiro insumo pode ser consumido *in natura,* pode-se optar em considerar que o primeiro insumo se transmuta no primeiro produto pela função de produção

$$X_1 = x_{11}^{\alpha_1} x_{22}^{\beta_1} \quad . \tag{9}$$

Em que $\alpha_L = 1$, $\beta_L = 0$, e $\alpha_L + \beta_L = 1$. Uma unidade do primeiro insumo é absorvida em uma unidade do primeiro produto.

3.7 Maximização de lucros em competição pura

As firmas buscarão maximizar seus lucros aos preços de mercado dados, sendo (P_1, P_2) os preços dos produtos e (p_1, p_2) os preços dos insumos; o problema de maximização incondicional dos lucros será expresso por

$$\max \ \pi_i = P_i X_i - p_1 x_{i1} - p_2 x_{i2}$$

Em competição perfeita, a remuneração dos fatores de produção é igual a suas produtividades marginais, assim o problema da firma terá as seguintes condições de primeira ordem

$$p_1 = \frac{P_1}{\mathrm{x}_{11}} X_1 \,, \tag{10}$$

$$p_1 = P_2 \frac{\alpha_2}{x_{12}} X_2 \,, \tag{11}$$

$$p_2 = P_2 \frac{\beta_2}{x_{22}} X_2 \,. \tag{12}$$

Como há igualdade comparativa entre o primeiro insumo o primeiro produto, tais deverão ter o mesmo preço, caso contrário haveria margem de arbitragem, assim pode-se reescrever (10) como

$$p_1 = P_1, x_{11} = X_1. \tag{10a}$$

As parcelas de rendas nominais dessa economia portanto serão

$$P_1 X_1 = p_1 x_{11} \,, \tag{10c}$$

e

$$P_2 X_2 = p_1 x_{21} + p_2 x_{22} \,. \tag{11a}$$

Como não se utiliza de x_2 no processo produtivo de X_1, ele será alocado em sua totalidade para a produção de X_2.

3.8 Equilíbrio dos mercados de insumos

Como é necessário que todos os insumos ao final do processo de produção sejam absorvidos, são verdadeiras as igualdades

$$x_1 = x_{11} + x_{12} \,, \tag{13}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22}, x_{21} = 0 \rightarrow x_2 = x_{22} \,. \tag{14}$$

3.9 Equilíbrio dos mercados de produtos

O preço do primeiro produto se ajusta de tal forma que a produção sempre se iguala a demanda

$$X_1 = C_{11} + C_{12} \,. \tag{15}$$

Para encontrar o equilíbrio do segundo produto, primeiro deve-se combinar (10c) e (11a) (6), (7), (13) e (14) para obter

$$P_1X_1 + P_2X_2 = Y_1 + Y_2.$$

E então ao combinar (2) até (5) e usando (15) obtém-se

$$P_1X_1 + P_2(C_{12} + C_{22}) = Y_1 + Y_2.$$

Segue-se disso que o segundo produto, também, terá oferta e demanda iguais

$$X_2 = C_{21} + C_{22}. \tag{15a}$$

De novo, as duas últimas condições são a lei de Walras, ou que não há excesso de demanda nessa economia em equilíbrio, além disso (20a) é uma equação dependente de (15), pois enquanto (15) se mostrar verdadeira, (15a) também a será. Assim, o modelo tem 14 equações para determinar 15 variáveis

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$	X_1, X_2
P_1, P_2	x_{11}, x_{21}, x_{22}
p_1, p_2	Y_1, Y_2

É óbvio que o sistema apresentado terá soluções indeterminadas caso nenhuma hipótese aa mais seja considerada. Para circunscrever este problema, simplesmente considere o preço p_1 do primeiro insumo como sendo unitário – o numerário walrasiano-. Isso eliminará duas variáveis do sistema, P_1 e p_1, o que nos deixa preços e rendas relativas ao preço p_1.

3.10 Soluções

Primeiro, resolve-se para os três insumos x_{ij} usando (15c), (16a), (2) até (5), (15) e (15c), o que resulta em

$$A(p_1 x_{12} + P_2 x_{22}) = B(p_1 x_{11}).$$

De (10) até (12) encontra-se

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{x_{22}}{x_{12}}.$$

Destes dois resultados, aliados as equações (13) e (14), obtém-se as soluções de distribuição dos insumos

$$x_{11} = \frac{\alpha_1 A}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} x_1, \qquad (16)$$

$$x_{12} = \frac{\alpha_2 B}{\alpha_1 A + \alpha_2 B} x_1, \qquad (17)$$

$$x_{21} = 0, \qquad (18)$$

$$x_{22} = x_2. \qquad (19)$$

Uma vez determinado a alocação ótima dos insumos, o resto é direto. Combina-se (8) até (12) com (16) até (19) e obtém-se as soluções dos preços relativos ao numerário p_1

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\beta_2 B}{A + \alpha_2 B}\frac{x_1}{x_2}, \qquad (20)$$

$$\frac{P_1}{p_1} = 1 \ , \qquad (21)$$

$$\frac{P_2}{p_1} = \frac{\beta_2 B}{A + \alpha_2 B}\frac{x_1}{x_2}^{\beta_2}. \qquad (22)$$

A inserção direta de (16) até (19) dentro de (8) e (9) retorna as soluções do total dos produtos

$$X_1 = \left(\frac{A x_1}{A + \alpha_2 B}\right), \qquad (23)$$

$$X_2 = M_2 \left(\frac{\alpha_2 A x_1}{A + \alpha_2 B}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{A x_2}{B}\right)^{\beta_2}. \qquad (24)$$

A inserção direta de (6), (7), e de (20) até (22) dentro de (2) até (5) retorna as soluções de alocação dos produtos

$$C_{11} = \frac{A}{A+B} x_1, \tag{25}$$

$$C_{21} = \frac{B}{A+B} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{A+\alpha_2 B}{\beta_2 B} \frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2} x_1, \tag{26}$$

$$C_{12} = \frac{B}{A+B} x_2, \tag{27}$$

$$C_{22} = \frac{B}{A+B} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{\beta_2 B}{A+\alpha_2 B} \frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_2} x_2, \tag{28}$$

Finalmente, ao combinar (6), (7) e (20) encontra-se as rendas relativas ao numerário p_1

$$\frac{Y_1}{p_1} = x_1, \tag{29}$$

$$\frac{Y_2}{p_1} = \frac{\beta_2 B}{A+\alpha_2 B} x_1 \ . \tag{30}$$

Ou de forma análoga

$$\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{A+\alpha_2 B}{A+B} \ , \tag{29a}$$

$$\frac{Y_2}{Y_1+Y_2} = \frac{\beta_2 B}{A+B} \quad . \tag{30b}$$

Comparando com o capítulo passado, percebe-se que a nova estrutura de produção fez com o proprietário do bem intermediário auferisse maior renda, em detrimento do segundo consumidor, que relativamente terá uma renda menor e uma menor cesta de consumo que o primeiro consumidor.

4. INTRODUÇÃO DO COMÉRCIO INTERNACIONAL 2 PAÍSES

A necessidade de uma teoria envolvendo um mercado internacional se mostra relevante por dois fatores. Primeiro, a mobilidade de insumos e produtos entre países é muito menor que o mobilidade dentro deles. Também países usam diferentes sistemas monetários [KRUGMAN, Paul, *International Economics*].

Será estendido o modelo do capítulo 2 para dois países e assumir que, primeiramente, produtos podem se mover livremente de um país ao outro, que insumos são fixos a cada país, e por último cada país tem seu próprio numerário – sendo o numerário, de forma arbitrária, igual ao primeiro insumo observado dos dois países.

De novo será assumido homogeneidade nas funções de produção e competição pura, havendo 2 insumos, 2 produtos, e dois consumidores em cada país.

4.1 Notação

Neste modelo a seguinte notação será usada

4.1.1 Variáveis

$C_{hjk} =$ j-ésimo produto consumido pelo k-ésimo consumidor no h-ésimo país

$E =$ taxa de câmbio, em número de unidades monetárias do país 1 equivalente às unidades monetárias do país 2

$P_{hj} =$ preço de j-ésimo produto no h-ésimo país

$p_{hi} =$ preço do i-ésimo insumo no h-ésimo país

$U_{hk} =$ utilidade da k-ésima pessoa no h-ésimo país, resultante de seu consumo

$X_{hj} =$ j-ésimo produto produzido no h-ésimo país

$x_{hij} =$ i-ésimo insumo absorvido pelo j-ésimo produto no h-ésimo país

Y_{hk} = renda monetária do k-ésimo consumidor no h-ésimo país

4.1.2 Parâmetros

A_h = elasticidade da utilidade em respeito ao primeiro produto no h-ésimo país

B_h = elasticidade da utilidade em respeito ao segundo produto no h-ésimo país

α_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao primeiro produto

β_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao segundo produto

M_j = fator multiplicativo na função de produção do j-ésimo produto

N_h = fator multiplicativo na função utilidade do h-ésimo país

x_{hi} = dotação de insumo presente no h-ésimo país

4.2 Funções de produção

Considera-se que ambos os países são capazes de produzir ambos os bens com a mesma tecnologia de produção, linearmente homogênea e estruturado como uma Cobb-Douglas. O primeiro país terá funções de produção representadas como

$$X_{11} = M_1 x_{111}^{\alpha_1} x_{121}^{\beta_1} \quad , \tag{1}$$

$$X_{12} = M_2 x_{112}^{\alpha_2} x_{122}^{\beta_2} \quad . \tag{2}$$

E o segundo país, de forma análoga

$$X_{21} = M_1 x_{211}^{\alpha_1} x_{221}^{\beta_1} \quad , \tag{3}$$

$$X_{22} = M_2 x_{212}^{\alpha_2} x_{222}^{\beta_2} \quad . \tag{4}$$

Em que $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$, $M_j > 0$, $\alpha_j + \beta_j = 1$ e $\alpha_1 \gtrless \alpha_2$ (e $\beta_1 \gtrless \beta_2$). As quatro funções de produção serão adotadas com as seguintes restrições $x_{hij} \geq 0$, e $X_{hj} \geq 0$,sendo que $h = i = j = 1{,}2$.

4.3 Maximização do lucro em competição pura

O problema de maximização incondicional dos lucros será expresso por

$$\max \ \pi_{\mathrm{hj}} = P_i X_{hi} - p_1 x_{hi1} - p_2 x_{hi2}$$

Sabe-se que, do problema de maximização do lucro, as condições de primeira ordem determinam que qualquer insumo será auferido até que seus preços se igualem a produtividade marginal empenhada na produção. Aplicando esta condição para o caso específico analisado e o resultado será 8 equações de primeira ordem, quatro para cada país. Para o primeiro país tem-se

$$p_{11} = P_{11} \frac{\alpha_1}{x_{111}} X_{11}, \tag{5}$$

$$p_{12} = P_{11} \frac{\beta_1}{x_{121}} X_{11}, \tag{6}$$

$$p_{11} = P_{12} \frac{\alpha_2}{x_{112}} X_{12}, \tag{7}$$

$$p_{12} = P_{12} \frac{\beta_2}{x_{122}} X_{12}. \tag{8}$$

E para o segundo país

$$p_{21} = P_{21} \frac{\alpha_1}{x_{211}} X_{21}, \tag{9}$$

$$p_{22} = P_{21} \frac{\beta_1}{x_{221}} X_{21}, \tag{10}$$

$$p_{21} = P_{22} \frac{\alpha_2}{x_{212}} X_{22}, \tag{11}$$

$$p_{22} = P_{22} \frac{\beta_2}{x_{222}} X_{22}. \tag{12}$$

Ao rearranjar e somar (5) e (6), (7) e (8), (9) e (10), (11) e (12) pode-se encontrar as parcelas distributivas dos insumos, consequência do teorema de Euler. Então, para o primeiro país

$$P_{11}X_{11} = p_{11}x_{111} + p_{12}x_{121}\,, \tag{5a}$$

$$P_{12}X_{12} = p_{11}x_{112} + p_{12}x_{122}\,, \tag{7a}$$

e para o segundo país

$$P_{21}X_{21} = p_{21}x_{211} + p_{22}x_{221}\,, \tag{9a}$$

$$P_{22}X_{22} = p_{22}x_{212} + p_{22}x_{222}\,. \tag{11a}$$

4.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias

Em cada país considere que cada consumidor tenha a mesma função de utilidade, na estrutura de uma Cobb-Douglas. Entretanto, pode-se haver mudanças de parâmetros nas funções entre países. As utilidades presentes no primeiro país serão

$$U_{11} = N_1 C_{111}^{A_1} C_{121}^{B_1},$$

$$U_{12} = N_1 C_{112}^{A_1} C_{122}^{B_1}.$$

E para o segundo serão

$$U_{21} = N_2 C_{211}^{A_2} C_{221}^{B_2},$$

$$U_{22} = N_2 C_{212}^{A_2} C_{222}^{B_2}.$$

Em que A_h e $B_h$são parâmetros entre zero e 1, e N_h é um fator multiplicativo dependente das unidades de mensuração assumidas. Não é necessário assumir que $\mathrm{A}_1 \gtrless \mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1 \gtrless \mathrm{B}_2$ ou que $A_h + B_h = 1, h = 1{,}2$.

Como a economia é de um único período, ninguém poupa, logo suas restrições orçamentárias do primeiro país serão

$$Y_{11} = P_{11}C_{111} + P_{12}C_{121},$$

$$Y_{12} = P_{11}C_{112} + P_{12}C_{122}.$$

E as restrições orçamentárias do segundo país serão

$$Y_{21} = P_{21}C_{211} + P_{22}C_{221},$$

$$Y_{22} = P_{22}C_{212} + P_{22}C_{222}.$$

4.5 Maximização da utilidade

O problema de maximização condicional da utilidade será expresso como

$$\begin{aligned} &\max \;\; \mathrm{U_i}(C_{1i}, C_{2i}) = C_{1i}^{A} C_{2i}^{B} \\ &\mathrm{s.t} \;\; \mathrm{Y_i} = \mathrm{P_1} C_{1i} + \mathrm{P_2} C_{2i} \end{aligned}$$

Ao maximizar a utilidade em relação à restrição orçamentária, encontra-se funções de demanda cujas elasticidades-renda são iguais a um, cujas elasticidades-preços são iguais a menos 1, e as elasticidades cruzadas são iguais a 0. Logo as demandas de cada consumidor são respectivamente

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{11}}{P_{11}}, \tag{13}$$

$$C_{121} = \frac{B_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{11}}{P_{12}}, \tag{14}$$

$$C_{112} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{12}}{P_{11}}, \tag{15}$$

$$C_{122} = \frac{B_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{12}}{P_{12}}, \tag{16}$$

$$C_{211} = \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{21}}{P_{21}}, \tag{17}$$

$$C_{221} = \frac{B_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{21}}{P_{22}}, \tag{18}$$

$$C_{212} = \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{22}}{P_{21}}, \tag{19}$$

$$C_{222} = \frac{B_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{22}}{P_{22}}. \tag{20}$$

4.6 Rendas individuais

Deixe que o primeiro insumo pertença ao primeiro consumidor e o segundo insumo pertença ao segundo consumidor em cada país. Aliado a isso, pôr os planos de produção serem linearmente homogêneas, não haverá lucros na produção. Consequentemente, as únicas rendas dos consumidores partirão das remunerações dos fatores de produção. Para o primeiro país, as rendas serão

$$Y_{11} = p_{11}x_{11}, \tag{21}$$

$$Y_{12} = p_{12}x_{12}. \tag{22}$$

E para o segundo país, as rendas serão

$$Y_{21} = p_{21}x_{21}, \tag{23}$$

$$Y_{22} = p_{22}x_{22}. \tag{24}$$

4.7 Equilíbrio nos mercados de insumos

Insumos são restritos geograficamente aos mercados locais que pertencem. Por conseguinte, os mercados de insumos são mercados nacionais fechados. Assim, considere que o i-ésimo insumo no h-ésimo país seja um parâmetro positivo x_{hi}. No primeiro país, os preços dos insumos ajustam de tal fora que o total produzido absorva todos os insumos ofertados, ou matematicamente

$$x_{11} = x_{111} + x_{112}, \tag{25}$$

$$x_{12} = x_{121} + x_{122}. \tag{26}$$

Similarmente, ao segundo país

$$x_{21} = x_{211} + x_{212}, \tag{27}$$

$$x_{22} = x_{221} + x_{222}. \tag{28}$$

4.8 Equilíbrios nos mercados finais

Diferentemente dos insumos, os produtos podem fluir de um país para o outro, sendo os custos de transporte negligíveis. Logo, os mercados de insumos serão definidos em uma escala global. Os mercados internacionais terão preços que se ajustarão de tal forma que a demanda final seja igual a oferta global dos produtos

$$X_{11} + X_{21} = C_{111} + C_{112} + C_{211} + C_{212}, \tag{29}$$

$$X_{12} + X_{22} = C_{121} + C_{122} + C_{221} + C_{222}. \tag{30}$$

4.9 A taxa de câmbio

Precisamente por os produtos fluírem livremente entre países e os custos de transporte serem negligíveis, o primeiro produto deve compartilhar da mesma estrutura de preço no mercado internacional, isto é, a paridade de preços deverá ser válida

$$P_{11} = EP_{21}. \tag{31}$$

Pela mesma razão, esta conclusão pode ser usada para o segundo bem em um mercado em equilíbrio

$$P_{12} = EP_{22}. \tag{31a}$$

4.10 Os balanços de pagamento

Por fim, determina-se as equações do balanço de pagamentos para cada país em suas próprias unidades monetárias, logo

$$P_{11}(C_{111} + C_{112} - X_{11}) + P_{12}(C_{121} + C_{122} - X_{12}) = 0, \tag{32}$$

$$P_{21}(C_{211} + C_{212} - X_{21}) + P_{22}(C_{221} + C_{222} - X_{22}) = 0. \tag{33}$$

Entretanto, as equações (32) e (33) não são novas ou independentes, visto que tais podem ser encontradas como consequência da lei de Walras ajustada.

4.11 Número de equações e variáveis

Há, até aqui definida, 31 equações para determinar 33 incógnitas

$C_{111}, C_{112}, C_{121}, C_{122}, C_{211}, C_{212}, C_{221}, C_{222}$,

E ,

$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$,

$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$,

$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$,

$x_{111}, x_{112}, x_{121}, x_{122}, x_{211}, x_{212}, x_{221}, x_{222}$,

$Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$.

Entretanto, como já foi detalhado, basta neste caso dividir os preços e rendas por um numerário walrasiano, sendo neste caso optado pelo primeiro insumo de cada país, (p_{11}, p_{12}) respectivamente. Isto eliminará 2 incógnitas, o que resultará em um sistema determinado.

Todas as incógnitas até aqui descritas, $C_{hjk}, E, P_{hj}, p_{hi}, X_{hj}, x_{hij}$ e Y_{hk}, devem necessariamente apresentar valores não negativos.

4.12 Teorema de equalização fraca dos preços relativos

Após dividir (6) por (5), (8) por (7), (10) por (9) e (12) por (11), obtém-se

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{x_{111}}{x_{121}}, \tag{5b}$$

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{x_{112}}{x_{122}}, \tag{7b}$$

$$\frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{x_{211}}{x_{221}}, \tag{9b}$$

$$\frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{x_{212}}{x_{222}}. \tag{11b}$$

Ao usar as equações anteriores de em (5), (7), (9) e (11), e inserindo os resultados de (1) até (4), tem-se

$$\frac{P_{11}}{P_{21}} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{x_{111}/x_{121}}{x_{211}/x_{221}}\right)^{\beta_1} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{p_{12}/p_{11}}{p_{22}/p_{21}}\right)^{\beta_1}, \tag{5c}$$

$$\frac{P_{12}}{P_{22}} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{x_{112}/x_{122}}{x_{212}/x_{222}}\right)^{\beta_2} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{p_{12}/p_{11}}{p_{22}/p_{21}}\right)^{\beta_2}. \tag{7c}$$

Estas equações mostram que haverá uma equalização entre os preços dos insumos em nível subnacional decorrente do uso intersetorial dos insumos, porém ela é fraca por não garantir a mesma equalização em nível supranacional, este desenvolvimento foi descrito primeiramente por Samuelson em *International Trade and Equalization of Factor Prices*.

4.13 Alocação de insumos

Agora usa-se de (5b) e (7b) dentro de (25), e do resultado combina-se com (26), assim pode-se expressar x_{121} e x_{122} em termos da razão de preços p_{12}/p_{11}. Similarmente, usa-se de (9b) e (11b) dentro de (27), e do resultado combina-se com (28), assim pode-se expressar x_{221} e x_{222} em termos da razão de preços p_{22}/p_{21}. Finalmente, usa-se de (5b) até (11b) para expressar x_{111}, x_{112}, x_{211} e x_{212} em termos de x_{121}, x_{122}, x_{221} e x_{222}, respectivamente. Como resultado, obtém-se as seguintes expressões para a alocação dos insumos para o primeiro país

$$x_{111} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\mathrm{x}_{11} - \frac{\alpha_2 \mathrm{p}_{12}}{\beta_2 \mathrm{p}_{11}}\mathrm{x}_{12}}{\mathrm{D}}, \tag{32}$$

$$x_{121} = \frac{\mathrm{p}_{11}}{\mathrm{p}_{12}}\frac{\mathrm{x}_{11} - \frac{\alpha_2 \mathrm{p}_{12}}{\beta_2 \mathrm{p}_{11}}\mathrm{x}_{12}}{\mathrm{D}}, \tag{33}$$

$$x_{112} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\frac{\alpha_1 \mathrm{p}_{11}}{\beta_1 \mathrm{p}_{12}}\mathrm{x}_{12} - x_{11}}{\mathrm{D}}, \tag{34}$$

$$x_{122} = \frac{p_{11}}{p_{12}} \frac{\frac{\alpha_1 p_{12}}{\beta_1 p_{11}} x_{12} - x_{11}}{D}. \qquad (35)$$

Para o segundo país, os resultados serão

$$x_{211} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{x_{21} - \frac{\alpha_2 p_{22}}{\beta_2 p_{21}} x_{22}}{D}, \qquad (36)$$

$$x_{221} = \frac{p_{21}}{p_{22}} \frac{x_{21} - \frac{\alpha_2 p_{22}}{\beta_2 p_{21}} x_{22}}{D}, \qquad (37)$$

$$x_{212} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\frac{\alpha_1 p_{22}}{\beta_1 p_{21}} x_{22} - x_{21}}{D}, \qquad (38)$$

$$x_{122} = \frac{p_{21}}{p_{22}} \frac{\frac{\alpha_1 p_{22}}{\beta_1 p_{21}} x_{22} - x_{21}}{D}. \qquad (39)$$

Sendo os denominadores D's iguais a $D = \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}$

Caso não se assuma que $\alpha_1 \gtrless \alpha_2$ (e $\beta_1 \gtrless \beta_2$), o denominador pode zerar, e os insumos teriam quantidades mal definidas e sem significado econômico.

Equações (32) a (35) contêm a razão p_{12}/p_{11}, e equações (36) a (39) contêm a razão p_{22}/p_{21}.Sabendo que os custos de fatores não podem se diferenciar entre países, o que impactaria a equação (29b), pode-se concluir que

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{21}}. \qquad (29c)$$

Logo, mesmo que insumos não circulem entre países, seus preços relativos ainda devem se igualar. Assim mesmo que saibamos que as razões apresentadas em (29c) sejam iguais, enquanto não estiver determinado seus valores, não se pode dizer que as equações (32) a (39) sejam soluções para a alocação dos insumos.

4.14 Solução para preços relativos dos insumos

Partido da equação de equilíbrio dos mercados (29), usa-se as equações de demanda (13), (15), (17) e (19) e as equações de renda (21) à (24) para encontrar

$$X_{11} + X_{12} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{1}{p_{11}}(p_{11}x_{11} + p_{12}x_{12}) + \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{1}{P_{21}}(p_{21}x_{21} + p_{22}x_{22}),$$

e das equações (5c), (7c), (29c) e (31) deriva-se

$$\frac{P_{11}}{P_{11}} = \frac{p_{11}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} = E \quad . \tag{31b}$$

Inserindo (31b) nas equações de Euler (5a) e (9a), como também em (5b) e (9b), com o objetivo de expressar a razão de preços P_{12}/P_{11} em termos de x_{111} e x_{211}. Pegue o resultado obtido junto com (32) e (36) e finalmente chegue à solução de P_{12}/P_{11}, que de acordo com (29c) será análogo a solução de P_{22}/P_{21}.

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{21}} \tag{40}$$

$$= \frac{\frac{\beta_1 A_1+\beta_2 B_1}{A_1+B_1}x_{11} + \frac{\beta_1 A_2+\beta_2 B_2}{A_2+B_2}x_{21}}{\frac{\alpha_1 A_1+\alpha_2 B_1}{A_1+B_1}x_{12} + \frac{\alpha_1 A_2+\alpha_2 B_2}{A_2+B_2}x_{22}} \quad . \tag{41}$$

Por causa do pressuposto feitos sobre os parâmetros descritos até aqui, (40) e (41) sempre serão positivos, pois todos seus elementos são positivos. Como agora há soluções para os parâmetros P_{12}/P_{11} e P_{22}/P_{21}. Equações (32) à (39) também podem ser consideradas soluções para a alocação dos insumos, por somente parâmetros as representarem após substituir (40) e (41) em (32) até (39).

4.15 Teorema de equalização forte dos preços relativos

Ao invés de resolver os preços relativos tendo o numerário em seus denominadores, poderá ser útil determinar os recíprocos destes. De (5) até (12), com (1) até (4) sendo inseridos neles, encontra-se as seguintes soluções para os salários reais nos dois países, respectivamente

$$\frac{p_{11}}{P_{11}} = M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_1}, \tag{42}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{21}} = M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_1}. \tag{43}$$

Por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (42) e (43) são iguais. Os salários reais em ambos os países são iguais em termos do primeiro produto. Mas além disso se encontra

$$\frac{p_{11}}{P_{12}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_2}, \tag{44}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_2}. \tag{45}$$

De novo, por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (44) e (45) são iguais. Os salários reais em ambos os países são iguais em termos do segundo produto.

Além disso, pode-se encontrar as seguintes soluções para o custo de oportunidade do primeiro insumo

$$\frac{p_{12}}{P_{11}} = M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_1}, \tag{46}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{21}} = M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_1}. \tag{47}$$

Por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (46) e (47) são iguais. Os custos reais do primeiro insumo em ambos os países são iguais em termos do primeiro produto. Mas além disso se encontra

$$\frac{p_{12}}{P_{12}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_2}, \tag{48}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_2}. \tag{49}$$

De novo, por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (48) e (49) são iguais. Os custos reais do segundo insumo em ambos os países são iguais em termos do segundo produto.

Pelo teorema fraco da equalização dos preços, os preços relativos do primeiro e segundo insumos só eram iguais intersetorialmente- equação (29c). Equações (42) até (49) fortalecem

(29c) na conclusão de que em ambos os países cada um dos dois insumos apresenta o a mesma remuneração real definidas em termos de cada produto. Isto é o famoso teorema de equalização forte de preços desenvolvido por Heckscher, Ohlin e Samuelson.

O teorema de equalização forte dos preços dos fatores expressado de forma extensiva de (42) até (49) pode ser considerada como solução dos preços relativos.

4.16 Solução para a taxa de câmbio

No processo de encontrar (40) e (41), já foi provado a solução da taxa de câmbio; isto é, de (31b), a taxa de câmbio é igual a razão entre os dois numerários de cada economia

$$\frac{p_{11}}{p_{21}} = E. \tag{50}$$

4.17 Soluções para os produtos

Uma vez possuindo as soluções das alocações dos insumos, pode-se usá-los nas equações (1) até (4) para obter somente em termos de parâmetros os produtos. Para o primeiro país, tem-se

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_1} x_{11} \ . \tag{51}$$

$$C_{121} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_2} x_{11} \ , \tag{52}$$

$$C_{112} = \frac{A_1}{A_1+B_1} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_1} x_{12} \ , \tag{53}$$

$$C_{122} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_2} x_{12} \ . \tag{54}$$

Similarmente, para o segundo país

$$C_{211} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_1} x_{21} \ , \tag{55}$$

$$C_{121} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_2} x_{21} \ , \tag{56}$$

$$C_{112} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_1 \alpha_1^{\alpha_1} \beta_1^{\beta_1} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_1} x_{22} \ , \tag{57}$$

$$C_{122} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_2} x_{22} \ . \tag{58}$$

4.18 Soluções para as rendas individuais

De (21) até (24) encontra-se as rendas monetárias relativas aos numerários p_{11} e p_{21}

$$\frac{Y_{11}}{p_{11}} = x_{11} \quad , \tag{59}$$

$$\frac{Y_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{12}}{p_{11}} x_{12} \quad , \tag{60}$$

$$\frac{Y_{21}}{p_{21}} = x_{21} \quad , \tag{61}$$

$$\frac{Y_{22}}{p_{21}} = \frac{p_{22}}{p_{21}} x_{22} \quad . \tag{62}$$

Pode-se encontrar também as respectivas parcelas distributivas

$$\frac{Y_{11}}{Y_{11}+Y_{12}} = \frac{1}{1+\frac{p_{12}x_{12}}{p_{11}x_{11}}} \quad , \tag{63}$$

$$\frac{Y_{12}}{Y_{11}+Y_{12}} = \frac{1}{1+\frac{p_{11}x_{11}}{p_{12}x_{12}}} \quad , \tag{64}$$

$$\frac{Y_{21}}{Y_{21}+Y_{22}} = \frac{1}{1+\frac{p_{22}x_{22}}{p_{21}x_{21}}} \quad , \tag{65}$$

$$\frac{Y_{22}}{Y_{21}+Y_{22}} = \frac{1}{1+\frac{p_{21}x_{21}}{p_{22}x_{22}}} \quad . \tag{66}$$

4.19 Caso único especialização total em vantagens comparativas

Suponha que a seguinte relação seja válida entre os países

$$\frac{x_{11}}{x_{12}} > \frac{x_{21}}{x_{22}}.$$

Ou seja, o primeiro país apresente proporcionalmente mais do primeiro insumo que do segundo comparativamente ao país 2. E suponha também

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

ou seja, o primeiro bem em sua produção será mais intensivo no uso do primeiro insumo que o segundo. Logo aplicando o princípio das vantagens comparativas já discutida e também o teorema Heckscher/Ohlin, o primeiro país usará de todos os seus insumos para a fabricação do primeiro bem, enquanto o segundo país focará todos os seus insumos para a produção do segundo bem.

4.20 Soluções dos insumos com especialização completa

Ao assumir especialização completa em ambos os países e inserir (34a) até (37a) em (25) até (28), obtém-se simples resultados de insumos

$$x_{111} = \mathrm{x}_{11} \quad , \tag{67}$$

$$x_{121} = \mathrm{x}_{12} \quad , \tag{68}$$

$$x_{112} = 0 \quad , \tag{69}$$

$$x_{122} = 0 \quad , \tag{70}$$

$$x_{211} = 0 \quad , \tag{71}$$

$$x_{221} = 0 \quad , \tag{72}$$

$$x_{212} = \mathrm{x}_{21} \quad , \tag{73}$$

$$x_{122} = \mathrm{x}_{22} \quad . \tag{74}$$

4.21 Soluções dos preços relativos com especialização completa

Inserindo (67) e (68) em (5b) e (73) e (74) em (11b), obtém-se

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{x_{11}}{x_{12}} \quad , \tag{75}$$

$$\frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{x_{21}}{x_{22}} \quad . \tag{76}$$

4.22 Solução da taxa de câmbio em especialização completa

Visto que as equações (5c) e (7c) perdem sua significância quando há especialização, não se pode usar de (31b) para derivar a taxa de câmbio em especialização. Porém, os produtos ainda se movem livremente entre países – que é o incentivo de os países se especializarem – portanto, (31) e (31a) ainda são válidos. Dessa forma, em (29) considere $X_{21} = 0$, usa-se (5a), (13), (15), (17), (19), (21) até (24), (31), (67), (68), (75) e (76) para chegar na solução do câmbio

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{B_1}{A_2}\frac{A_2+B_2}{A_1+B_1}\frac{x_{11}}{x_{21}}\frac{p_{11}}{p_{21}}. \tag{77}$$

Portanto, em completa especialização, a taxa de câmbio não será somente a razão entre os dois numerários, mas também dependerá da estrutura de produção do primeiro bem ser mais insumo intensiva para o primeiro insumo, da estrutura de produção do segundo bem ser mais insumo intensiva para o segundo insumo, do quão intenso é a preferência do segundo bem no primeiro país, do quão intenso é a preferência do primeiro bem no segundo país, do quão dotado de primeiro insumo é o primeiro país e do quão dotado de primeiro insumo é o segundo país.

4.23 Preços relativos dos insumos e produtos em especialização completa

Combine equações (1), (4), (5), (6), (11), (12), (67), (68), (73) e (74) para obter

$$\frac{p_{11}}{P_{11}} = M_1\alpha_1\left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\beta_1} \quad , \tag{78}$$

$$\frac{p_{12}}{P_{11}} = M_1\beta_1\left(\frac{x_{11}}{x_{12}}\right)^{\alpha_1} \quad , \tag{79}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} \quad , \tag{80}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{22}} = M_2 \beta_2 \left(\frac{x_{21}}{x_{22}}\right)^{\alpha_2} \quad . \tag{81}$$

4.24 Soluções dos produtos e suas alocações em especialização completa

Para obter a alocação dos produtos entre os consumidores, usa-se de (21) até (24), (31), (31a), e (75) até (76) dentro de (13) até (20) para encontrar

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1} M_1 \alpha_1 \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\beta_1} x_{11}, \tag{82}$$

$$C_{121} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_1 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} x_{21}, \tag{83}$$

$$C_{112} = \frac{A_1}{A_1+B_1} M_1 \beta_1 \left(\frac{x_{11}}{x_{12}}\right)^{\beta_2} x_{12}, \tag{84}$$

$$C_{122} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_2 \beta_1 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} x_{21}, \tag{85}$$

$$C_{211} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_1 \alpha_2 \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\beta_1} x_{11}, \tag{88}$$

$$C_{221} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_2 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} x_{21}, \tag{86}$$

$$C_{212} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_1 \beta_2 \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right)^{\beta_1} x_{11}, \tag{88}$$

$$C_{222} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \beta_2 \left(\frac{x_{21}}{x_{22}}\right)^{\alpha_2} x_{22}. \tag{89}$$

4.25 Solução das rendas pessoais com completa especialização

Ao inserir (75) e (76) em (21) até (24), pode-se resolver as rendas pessoais e suas parcelas distributivas. Parcelas distributivas especialmente terão interpretação fácil, pois α_1 e

β_1 serão as parcelas do país 1 e α_2 e β_2 serão as parcelas do país 2, como é de se esperar quando a função e produção é Cobb-Douglas.

5. COMÉRCIO INTERNACIONAL COM UM INSUMO SENDO TAMBÉM PRODUTO

De forma análoga ao capítulo 2, o modelo anterior será alterado para conter um insumo que atue como produto. Os produtos andam podem se mover livremente de um país ao outro, mas os insumos são fixos a cada país. Cada país tem seu próprio numerário – sendo o numerário, de forma arbitrária, igual ao primeiro insumo observado dos dois países.

De novo será assumido homogeneidade nas funções de produção e competição pura, havendo 2 insumos, 2 produtos, e dois consumidores em cada país.

5.1 Notação

Neste modelo a seguinte notação será usada

5.1.1 Variáveis

$C_{hjk} =$ j-ésimo produto consumido pelo k-ésimo consumidor no h-ésimo país

$E =$ taxa de câmbio, em número de unidades monetárias do país 1 equivalente às unidades monetárias do país 2

$P_{hj} =$ preço de j-ésimo produto no h-ésimo país

$p_{hi} =$ preço do i-ésimo insumo no h-ésimo país

$U_{hk} =$ utilidade da k-ésima pessoa no h-ésimo país, resultante de seu consumo

$X_{hj} =$ j-ésimo produto produzido no h-ésimo país

$x_{hij} =$ i-ésimo insumo absorvido pelo j-ésimo produto no h-ésimo país

$Y_{hk} =$ renda monetária do k-ésimo consumidor no h-ésimo país

5.1.2 Parâmetros

A_h = elasticidade da utilidade em respeito ao primeiro produto no h-ésimo país

B_h = elasticidade da utilidade em respeito ao segundo produto no h-ésimo país

α_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao primeiro produto

β_j = elasticidade do j-ésimo produto em respeito ao segundo produto

M_j = fator multiplicativo na função de produção do j-ésimo produto

N_h = fator multiplicativo na função utilidade do h-ésimo país

x_{hi} = dotação total de insumo presente no h-ésimo país

5.2 Funções de produção

Considera-se que ambos os países são capazes de produzir o segundo bem com a mesma tecnologia de produção, linearmente homogênea e estruturado como uma Cobb-Douglas. O primeiro país terá funções de produção representadas por

$$X_{11} = x_{111}^{\alpha_1} x_{121}^{\beta_1} \quad , \tag{1}$$

$$X_{12} = M_2 x_{112}^{\alpha_2} x_{122}^{\beta_2} \quad . \tag{2}$$

E o segundo país, de forma análoga

$$X_{21} = x_{211}^{\alpha_1} x_{221}^{\beta_1} \quad , \tag{3}$$

$$X_{22} = M_2 x_{212}^{\alpha_2} x_{222}^{\beta_2} \quad . \tag{4}$$

Em que $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$, $M_j > 0$, $\alpha_j + \beta_j = 1$ e $\alpha_1 \gtrless \alpha_2$ (e $\beta_1 \gtrless \beta_2$). As quatro funções de produção serão adotadas com as seguintes restrições $x_{hij} \geq 0$, e $X_{hj} \geq 0$, sendo que $h = i = j = 1{,}2$.

Em relação a primeira função de produção, como o primeiro insumo pode ser consumido *in natura*, opta-se em considerar que ele se transmuta no primeiro produto, logo deverá ser válida as seguintes relações $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, e $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, ou que uma unidade do primeiro insumo é completamente absorvida em uma unidade do primeiro produto.

5.3 Maximização do lucro em competição pura

O problema de maximização incondicional dos lucros será expresso por

$$\max \ \pi_{hj} = P_i X_{hj} - p_1 x_{hj1} - p_2 x_{hj2}$$

Sabe-se que, do problema de maximização do lucro, as condições de primeira ordem determinam que qualquer insumo será auferido até que seus preços se igualem a produtividade marginal empenhada na produção. Aplicando esta condição para o caso específico analisado e o resultado será 6 equações de primeira ordem, três para cada país. Para o primeiro país tem-se

$$p_{11} = \frac{P_{11}}{x_{111}} X_{11}\,, \tag{5}$$

$$p_{11} = P_{12} \frac{\alpha_2}{x_{112}} X_{12} \quad , \tag{6}$$

$$p_{12} = P_{12} \frac{\beta_2}{x_{122}} X_{12} \quad . \tag{7}$$

E para o segundo país

$$p_{21} = \frac{P_{21}}{x_{211}} X_{21}\,, \tag{8}$$

$$p_{21} = P_{22} \frac{\alpha_2}{x_{212}} X_{22}, \tag{10}$$

$$p_{22} = P_{22} \frac{\beta_2}{x_{222}} X_{22}, \tag{11}$$

Ao rearranjar e somar (5) e (6), (6) e (7), (8) e (9), (10) e (11) pode-se encontrar as parcelas distributivas dos insumos, consequência do teorema de Euler. Então, para o primeiro país

$$P_{11}X_{11} = p_{11}x_{111}, \tag{5a}$$

$$P_{12}X_{12} = p_{11}x_{112} + p_{12}x_{122}\ , \tag{7a}$$

e para o segundo país

$$P_{21}X_{21} = p_{21}x_{211}, \tag{9a}$$

$$P_{22}X_{22} = p_{22}x_{212} + p_{22}x_{222}\,. \tag{11a}$$

5.4 Funções de utilidade e restrições orçamentárias

Em cada país considere que cada consumidor tenha a mesma função de utilidade, na estrutura de uma Cobb-Douglas. Entretanto, pode-se haver mudanças de parâmetros nas funções entre países. As utilidades presentes no primeiro país serão

$$U_{11} = N_1 C_{111}^{A_1} C_{121}^{B_1},$$

$$U_{12} = N_1 C_{112}^{A_1} C_{122}^{B_1}.$$

E para o segundo serão

$$U_{21} = N_2 C_{211}^{A_2} C_{221}^{B_2},$$

$$U_{22} = N_2 C_{212}^{A_2} C_{222}^{B_2}.$$

Em que A_h e $B_h$são parâmetros entre zero e 1, e N_h é um fator multiplicativo dependente das unidades de mensuração assumidas. Não é necessário assumir que $\mathrm{A}_1 \gtrless \mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1 \gtrless \mathrm{B}_2$ ou que $A_h + B_h = 1, h = 1{,}2$.

Como a economia é de um único período, ninguém poupa, logo suas restrições orçamentárias do primeiro país serão

$$Y_{11} = P_{11}C_{111} + P_{12}C_{121},$$

$$Y_{12} = P_{11}C_{112} + P_{12}C_{122}.$$

E as restrições orçamentárias do segundo país serão

$$Y_{21} = P_{21}C_{211} + P_{22}C_{221},$$

$$Y_{22} = P_{22}C_{212} + P_{22}C_{222}.$$

5.5 Maximização da utilidade

O problema de maximização condicional da utilidade será, portanto, expressa como

$$\begin{aligned} &\max \ \ \mathrm{U_i}(C_{1i}, C_{2i}) = C_{1i}^{A} C_{2i}^{B} \\ &\mathrm{s.t} \ \ \mathrm{Y_i} = \mathrm{P_1} C_{1i} + \mathrm{P_2} C_{2i} \end{aligned}$$

Ao maximizar a utilidade em relação à restrição orçamentária, encontra-se funções de demanda cujas elasticidades-renda são iguais a um, cujas elasticidades-preços são iguais a menos 1, e as elasticidades cruzadas são iguais a 0. Logo as demandas de cada consumidor são respectivamente

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{11}}{P_{11}}, \tag{12}$$

$$C_{121} = \frac{B_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{11}}{P_{12}}, \tag{13}$$

$$C_{112} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{12}}{P_{11}}, \tag{14}$$

$$C_{122} = \frac{B_1}{A_1+B_1}\frac{Y_{12}}{P_{12}}, \tag{15}$$

$$C_{211} = \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{21}}{P_{21}}, \tag{16}$$

$$C_{221} = \frac{B_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{21}}{P_{22}}, \tag{17}$$

$$C_{212} = \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{22}}{P_{21}}, \tag{18}$$

$$C_{222} = \frac{B_2}{A_2+B_2}\frac{Y_{22}}{P_{22}}. \tag{19}$$

5.6 Rendas individuais

Deixe que o primeiro insumo pertença ao primeiro consumidor e o segundo insumo pertença ao segundo consumidor em cada país. Aliado a isso, pôr os planos de produção serem linearmente homogêneas, não haverá lucros na produção. Consequentemente, as únicas rendas dos consumidores partirão das remunerações dos fatores de produção. Para o primeiro país, as rendas serão

$$Y_{11} = p_{11}x_{11} \quad , \tag{20}$$

$$Y_{12} = p_{12}x_{12} \quad . \tag{21}$$

E para o segundo país, as rendas serão

$$Y_{21} = p_{21}x_{21} \quad , \tag{22}$$

$$Y_{22} = p_{22}x_{22} \quad . \tag{23}$$

5.7 Equilíbrio nos mercados de insumos

Insumos são restritos geograficamente aos mercados locais que pertencem. Por conseguinte, os mercados de insumos são mercados nacionais fechados. Assim, considere que o i-ésimo insumo no h-ésimo país seja um parâmetro positivo x_{hi}. No primeiro país, os preços dos insumos ajustam de tal forma que o total produzido absorva todos os insumos ofertados, ou matematicamente

$$x_{11} = x_{111} + x_{112} \quad , \tag{24}$$

$$x_{12} = x_{122} \quad . \tag{25}$$

Similarmente, ao segundo país

$$x_{21} = x_{211} + x_{212} \quad , \tag{26}$$

$$x_{22} = x_{222} \quad . \tag{27}$$

5.8 Equilíbrios nos mercados finais

Diferentemente dos insumos, os produtos podem fluir de um país para o outro, sendo os custos de transporte negligíveis. Logo, os mercados de insumos serão definidos em uma escala global. Os mercados internacionais terão preços que se ajustarão de tal forma que a demanda final seja igual a oferta global dos produtos

$$X_{11} + X_{21} = C_{111} + C_{112} + C_{211} + C_{212}, \tag{28}$$

$$X_{12} + X_{22} = C_{121} + C_{122} + C_{221} + C_{222}. \tag{29}$$

5.9 A taxa de câmbio

Precisamente por os produtos fluírem livremente entre países e os custos de transporte serem negligíveis, o primeiro produto deve compartilhar da mesma estrutura de preço no mercado internacional, isto é, a paridade de preços deverá ser válida

$$P_{11} = EP_{21}. \tag{30}$$

Pela mesma razão, esta conclusão pode ser usada para o segundo bem em um mercado em equilíbrio

$$P_{12} = EP_{22}. \tag{30a}$$

5.10 Os balanços de pagamento

Por fim, determina-se as equações do balanço de pagamentos para cada país em suas próprias unidades monetárias, logo

$$P_{11}(C_{111} + C_{112} - X_{11}) + P_{12}(C_{121} + C_{122} - X_{12}) = 0, \tag{31}$$

$$P_{21}(C_{211} + C_{212} - X_{21}) + P_{22}(C_{221} + C_{222} - X_{22}) = 0. \tag{32}$$

Entretanto, as equações (31) e (32) não são novas ou independentes, visto que tais podem ser encontradas como consequência da lei de Walras ajustada.

5.11 Número de equações e variáveis

Há, até aqui definida, 29 equações para determinar 31 incógnitas

$C_{111}, C_{112}, C_{121}, C_{122}, C_{211}, C_{212}, C_{221}, C_{222}$

E

$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$

$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$

$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$

$x_{111}, x_{112}, x_{122}, x_{211}, x_{212}, x_{222}$

$Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$

Entretanto, como já foi detalhado, basta neste caso dividir os preços e rendas por um numerário walrasiano, sendo neste caso optado pelo primeiro insumo de cada país, (p_{11}, p_{12}) respectivamente. Isto eliminará 2 incógnitas, o que resultará em um sistema determinado.

Todas as incógnitas até aqui descritas, $C_{hjk}, E, P_{hj}, p_{hi}, X_{hj}, x_{hij}$ e Y_{hk}, devem necessariamente apresentar valores não negativos.

5.12 Teorema de equalização fraca dos preços relativos

Após dividir (6) por (5), (7) por (6), (9) por (8) e (11) por (10), obtém-se

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{x_{112}}{x_{122}} \quad , \tag{6b}$$

$$\frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \frac{x_{212}}{x_{222}} \quad . \tag{10b}$$

Ao usar as equações anteriores de em (5), (6), (8) e (10), e inserindo os resultados de (1) até (4), tem-se

$$\frac{P_{11}}{P_{21}} = \frac{p_{11}}{p_{12}} \qquad , \tag{4c}$$

$$\frac{P_{12}}{P_{22}} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{x_{112}/x_{122}}{x_{212}/x_{222}}\right)^{\beta_2} = \frac{p_{11}}{p_{12}}\left(\frac{p_{12}/p_{11}}{p_{22}/p_{21}}\right)^{\beta_2} \qquad . \tag{6c}$$

5.13 Alocação de insumos

Agora usa-se de (5b) e (7b) dentro de (25), e do resultado combina-se com (26), assim pode-se expressar x_{121} e x_{122} em termos da razão de preços p_{12}/p_{11}. Similarmente, usa-se de (9b) e (11b) dentro de (27), e do resultado combina-se com (28), assim pode-se expressar x_{221} e x_{222} em termos da razão de preços p_{22}/p_{21}. Finalmente, usa-se de (5b) até (11b) para expressar x_{111}, x_{112}, x_{211} e x_{212} em termos de x_{122}e x_{222}, respectivamente. Como resultado, obtém-se as seguintes expressões para a alocação dos insumos para o primeiro país

$$x_{111} = \mathrm{x}_{11} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\mathrm{p}_{12}}{\mathrm{p}_{11}}\mathrm{x}_{12}, \tag{33}$$

$$x_{121} = 0 \qquad , \tag{34}$$

$$x_{112} = \mathrm{x}_{11} \qquad , \tag{35}$$

$$x_{122} = x_{12} \qquad . \tag{36}$$

Para o segundo país, os resultados serão

$$x_{211} = \mathrm{x}_{21} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\mathrm{p}_{22}}{\mathrm{p}_{21}}\mathrm{x}_{22}, \tag{37}$$

$$x_{221} = 0 \qquad , \tag{38}$$

$$x_{212} = x_{21} \qquad , \tag{39}$$

$$x_{122} = x_{21} \qquad . \tag{40}$$

Caso não se assuma que $\alpha_1 \gtrless \alpha_2$ (e $\beta_1 \gtrless \beta_2$), o denominador pode zerar, e os insumos teriam quantidades mal definidas e sem significado econômico.

Equações (33) a (36) contêm a razão p_{12}/p_{11}, e equações (37) a (40) contêm a razão p_{22}/p_{21}.Sabendo que os custos de fatores não podem se diferenciar entre países, o que impactaria a equação (29b), pode-se concluir que

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{21}}. \tag{29c}$$

Logo, mesmo que insumos não circulem entre países, seus preços relativos ainda devem se igualar. Assim mesmo que saibamos que as razões apresentadas em (29c) sejam iguais, enquanto não estiver determinado seus valores, não se pode dizer que as equações (33) a (40) sejam soluções para a alocação dos insumos.

5.14 Solução para preços relativos dos insumos

Partido da equação de equilíbrio dos mercados (30), usa-se as equações de demanda (12), (14), (17) e (19) e as equações de renda (21) à (24) para encontrar

$$X_{11} + X_{12} = \frac{A_1}{A_1+B_1}\frac{1}{p_{11}}(p_{11}x_{11} + p_{12}x_{12}) + \frac{A_2}{A_2+B_2}\frac{1}{P_{21}}(p_{21}x_{21} + p_{22}x_{22}).$$

E das equações (5c), (7c), (29c) e (31) deriva-se

$$\frac{P_{11}}{P_{11}} = \frac{p_{11}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} = E. \tag{31b}$$

Inserindo (31b) nas equações de Euler (5a) e (9a), como também em (5b) e (9b), com o objetivo de expressar a razão de preços P_{12}/P_{11} em termos de x_{111} e x_{211}. Pegue o resultado obtido junto com (32) e (36) e finalmente chegue à solução de P_{12}/P_{11}, que de acordo com (29c) será análogo a solução de P_{22}/P_{21}.

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{22}}{p_{21}} \tag{41}$$

$$= \frac{\frac{\beta_2 B_1}{A_1+B_1}x_{11} + \frac{\beta_2 B_2}{A_2+B_2}x_{21}}{\frac{A_1+\alpha_2 B_1}{A_1+B_1}x_{12} + \frac{A_2+\alpha_2 B_2}{A_2+B_2}x_{22}}. \tag{42}$$

Por causa dos pressupostos feitos sobre os parâmetros descritos até aqui, (41) e (42) sempre serão positivos, pois todos seus elementos são positivos. Como agora há soluções para os parâmetros P_{12}/P_{11} e P_{22}/P_{21}. Equações (33) à (40) também podem ser consideradas soluções para a alocação dos insumos, por somente parâmetros as representarem após substituir (41) e (42) em (33) até (40).

5.15 Teorema de equalização forte dos preços relativos

Ao invés de resolver os preços relativos tendo o numerário em seus denominadores, poderá ser útil determinar os recíprocos destes. De (5) até (11), com (1) até (4) sendo inseridos neles, encontra-se as seguintes soluções para os salários reais nos dois países, respectivamente

$$\frac{p_{11}}{P_{11}} = 1, \tag{43}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{21}} = 1. \tag{44}$$

Por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (43) e (44) são iguais. Os salários reais em ambos os países são iguais em termos do primeiro produto. Mas além disso se encontra

$$\frac{p_{11}}{P_{12}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_2}, \tag{45}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_2}. \tag{46}$$

De novo, por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (45) e (46) são iguais. Os salários reais em ambos os países são iguais em termos do segundo produto.

Além disso, pode-se encontrar as seguintes soluções para o custo de oportunidade do primeiro insumo

$$\frac{p_{12}}{P_{11}} = 1\left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{1}, \tag{47}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{21}} = 1\left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{1}. \tag{48}$$

Por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (47) e (48) são iguais. Os custos reais do primeiro insumo em ambos os países são iguais em termos do primeiro produto. Mas além disso se encontra

$$\frac{p_{12}}{P_{12}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_2}, \tag{49}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_2}. \tag{50}$$

De novo, por causa do teorema da equalização fraca dos preços, (29c), (49) e (50) são iguais. Os custos reais do segundo insumo em ambos os países são iguais em termos do segundo produto.

Pelo teorema fraco da equalização dos preços, os preços relativos do primeiro e segundo insumos eram iguais intersetorialmente- equação (29c). Equações (43) até (50) fortalecem (29c) na conclusão de que em ambos os países cada um dos dois insumos apresenta o a mesma remuneração real definidas em termos de cada produto. Isto é o famoso teorema de equalização de preços desenvolvido por Heckscher, Ohlin e Samuelson.

O teorema de equalização forte dos preços dos fatores expressado de forma extensiva de (43) até (50) pode ser considerada como solução dos preços relativos.

5.16 Solução para a taxa de câmbio

No processo de encontrar (40) e (41), já foi provado a solução da taxa de câmbio; isto é, de (31b), a taxa de câmbio é igual a razão entre os dois numerários de cada economia

$$\frac{p_{11}}{p_{21}} = E. \tag{51}$$

5.17 Soluções para os produtos

Uma vez possuindo as soluções das alocações dos insumos, pode-se usá-los nas equações (1) até (4) para obter somente em termos de parâmetros os produtos. Para o primeiro país, tem-se

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1} x_{11} \qquad , \tag{52}$$

$$C_{121} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)^{\beta_2} x_{11}, \tag{53}$$

$$C_{112} = \frac{A_1}{A_1+B_1} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right) x_{12}, \tag{54}$$

$$C_{122} = \frac{B_1}{A_1+B_1} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{12}}{p_{11}}\right)^{\alpha_2} x_{12}. \tag{55}$$

Similarmente, para o segundo país

$$C_{211} = \frac{A_2}{A_2+B_2} x_{21}, \tag{56}$$

$$C_{121} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)^{\beta_2} x_{21} , \tag{57}$$

$$C_{112} = \frac{A_2}{A_2+B_2} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right) x_{22}, \tag{58}$$

$$C_{122} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \alpha_2^{\alpha_2} \beta_2^{\beta_2} \left(\frac{p_{22}}{p_{21}}\right)^{\alpha_2} x_{22} . \tag{59}$$

5.18 Soluções para as rendas individuais

De (21) até (24) encontra-se as rendas monetárias relativas aos numerários p_{11} e p_{21}

$$\frac{Y_{11}}{p_{11}} = x_{11} \qquad , \tag{60}$$

$$\frac{Y_{12}}{p_{11}} = \frac{p_{12}}{p_{11}} x_{12} \quad , \tag{61}$$

$$\frac{Y_{21}}{p_{21}} = x_{21} \qquad , \tag{62}$$

$$\frac{Y_{22}}{p_{21}} = \frac{p_{22}}{p_{21}} x_{22} \quad . \tag{63}$$

Pode-se encontrar também as respectivas parcelas distributivas

$$\frac{Y_{11}}{Y_{11}+Y_{12}} = \frac{1}{1+\frac{p_{12}x_{12}}{p_{11}x_{11}}} \quad , \tag{64}$$

$$\frac{Y_{12}}{Y_{11}+Y_{12}} = \frac{1}{1+\frac{p_{11}x_{11}}{p_{12}x_{12}}} \quad , \tag{65}$$

$$\frac{Y_{21}}{Y_{21}+Y_{22}} = \frac{1}{1+\frac{p_{22}x_{22}}{p_{21}x_{21}}} \quad , \tag{66}$$

$$\frac{Y_{22}}{Y_{21}+Y_{22}} = \frac{1}{1+\frac{p_{21}x_{21}}{p_{22}x_{22}}} \quad . \tag{67}$$

5.19 Não haverá especialização total

Suponha que a seguinte relação seja válida entre os países

$$\frac{x_{11}}{x_{12}} > \frac{x_{21}}{x_{22}},$$

e observa-se em todos os casos possíveis a veracidade de

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Ou seja, o primeiro bem em sua produção somente usará do primeiro insumo. Logo aplicando o princípio das vantagens comparativas já discutido, o primeiro país deveria usar de todos os seus insumos para a fabricação do primeiro bem, enquanto o segundo país focaria todos os seus insumos para a produção do segundo bem. Porém não é isto o ótimo, visto que a especialização no primeiro bem não utilizaria do segundo insumo, o que não esgotaria o excedente de oferta

5.20 Soluções dos preços relativos no ótimo

O vetor de preços obedecerá a seguinte relação no ótimo

$$\frac{p_{22}}{p_{21}} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{x_{21}}{x_{22}} \quad . \tag{68}$$

5.21 Solução da taxa de câmbio no ótimo

Não se pode usar de (31b) para derivar a taxa de câmbio em especialização. Porém, os produtos ainda se movem livremente entre países – que é o incentivo de trocas– portanto, (31) e (31a) ainda são válidos. Dessa forma, em (29) considere $X_{21} = 0$, usa-se (5a), (12), (14), (17), (19), (21) até (24) e (31) para chegar na solução do câmbio

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha_2}{1} \frac{B_1}{A_2} \frac{A_2 + B_2}{A_1 + B_1} \frac{x_{11}}{x_{21}} \frac{p_{11}}{p_{21}}. \tag{69}$$

Portanto, em completa especialização, a taxa de câmbio não será somente a razão entre os dois numerários, mas também dependerá da estrutura de produção do primeiro bem ser mais insumo intensiva para o primeiro insumo, da estrutura de produção do segundo bem ser mais insumo intensiva para o segundo insumo, do quão intenso é a preferência do segundo bem no primeiro país, do quão intenso é a preferência do primeiro bem no segundo país, do quão dotado de primeiro insumo é o primeiro país e do quão dotado de primeiro insumo é o segundo país.

5.22 Preços relativos dos insumos e produtos no ótimo

Tem-se os seguintes preços relativos

$$\frac{p_{11}}{P_{11}} = 1 \qquad , \tag{70}$$

$$\frac{p_{12}}{P_{11}} = \left(\frac{x_{11}}{x_{12}}\right) \qquad , \tag{71}$$

$$\frac{p_{21}}{P_{22}} = M_2 \alpha_2 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} \qquad , \tag{72}$$

$$\frac{p_{22}}{P_{22}} = M_2 \beta_2 \left(\frac{x_{21}}{x_{22}}\right)^{\alpha_2} \qquad . \tag{73}$$

5.23 Soluções dos produtos e suas alocações no ótimo

Para obter a alocação dos produtos entre os consumidores, usa-se de (21) até (24), (31), (31a) para encontrar

$$C_{111} = \frac{A_1}{A_1+B_1} x_{11}, \tag{74}$$

$$C_{121} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_2 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} x_{21}, \tag{75}$$

$$C_{112} = 0, \tag{76}$$

$$C_{122} = \frac{A_2}{A_2+B_2} M_2 \beta_1 \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right)^{\beta_2} x_{21}, \tag{77}$$

$$C_{211} = \frac{B_1}{A_1+B_1} \alpha_2 x_{11}, \tag{78}$$

$$C_{221} = 0\ , \tag{79}$$

$$C_{212} = \frac{B_1}{A_1+B_1} \beta_2 x_{11}\ , \tag{80}$$

$$C_{222} = \frac{B_2}{A_2+B_2} M_2 \beta_2 \left(\frac{x_{21}}{x_{22}}\right)^{\alpha_2} x_{22}. \tag{81}$$

5.24 Solução das rendas pessoais no ótimo

Ao inserir (75) e (76) em (21) até (24), pode-se resolver as rendas pessoais e suas parcelas distributivas. Parcelas distributivas especialmente terão interpretação fácil, pois α_1 e β_1 serão as parcelas do país 1 e α_2 e β_2 serão as parcelas do país 2, como é de se esperar quando a função e produção é Cobb-Douglas.

6. CONCLUSÃO

A modelagem matemática tem por utilidade proporcionar interpretações de como os agentes se interagem as quais não seriam perceptíveis só pelo empiricismo e observação da realidade. Ao refinar os modelos já existentes para compreender o impacto de um produto intermediário, foi possível determinar como tal influenciará o equilíbrio resultante.

Com base do modelo ricardiano do comércio internacional e do modelo Menger/Wieser, derivou-se um novo modelo composto por dois consumidores dentro de um Estado isolado; em seguida foi encontrado as proporções de insumos alocados na produção dos dois bens finais e das cestas de consumo. Sabe-se que este equilíbrio é real por a Lei de Walras ser obedecida, o que significa que não houve excesso de oferta de insumos ou bens ao final do processo de produção e de trocas.

Ao mudar a estrutura do plano de produção de forma que um dos insumos pudesse ser também um dos produtos, criou-se um bem intermediário, onde o primeiro insumo ora pode ser consumido *in natura* ora usado no processo produtivo do segundo produto. Adicionar um bem como este dentro do modelo se mostra importante por conseguir desta forma comparar uma cadeia de produção, algo presente no comércio internacional, mas pouco modelado até hoje. Bens intermediários, como peças eletrônicas, combustível, eletricidade, grãos, entre outros, são muito comuns no cotidiano dos consumidores e firmas, mas pouco enfoque houve até agora sobre como eles se comportam em um modelo de equilíbrio geral.

Na segunda parte do trabalho, foi adaptado o modelo do Estado autárquico para um ambiente internacional composto por dois países, ou também como um modelo entre um país e o resto do mundo. A introdução do comércio internacional se faz importante pois países realizam trocas e usam bases monetárias diferentes. Foi mostrado que seguindo as hipóteses básicas haverá especialização de produção no ótimo de acordo com o princípio das vantagens comparativas de Ricardo. A teoria de Heckscher-Ohlin para o comércio internacional também se mostrará válida; ou seja, países, mesmo possuindo os mesmos planos de produção, se especializarão na produção em que se usa relativamente mais do insumo com maior abundância na localidade. Ademais o teorema de equalização dos preços de Samuelson se mostrará presente.

Por fim, adaptou-se o modelo de comércio internacional ao inserir um produto intermediário no processo produtivo do segundo produto. Assim, o ótimo de equilíbrio não se dará com a especialização completa, pôr a lei de Walras ser violada no país que se especializaria no bem intermediário percebe-se que neste país o segundo insumo não seria alocado em nenhum processo produtivo, e consequentemente não seria remunerado.

Proponha-se então refinar os três teoremas básicos do comércio internacional, considerando a existência de cadeias de produção. Uma consequência de política pública seria que um país que se especializa em insumos produtivos para longas cadeias de produção teriam ineficiências econômicas de alocação de insumos intersetoriais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

STOKEY, Nancy L; ROBERT, E. Lucas Jr. **Recursive methods in Economic Dynamics**. 5ª ed. Estados Unidos: Harvard University Press, 1999.

LJUNGQVIST, Lars; SARGENT, Thomas J. **Recursive macroeconomic theory**. 2ª ed. Estados Unidos: Massachusetts Institute of Technology Press, 2004.

MAS-COLELL, Andreu; D. WHINSTON, Michael; R. GREEN, Jerry. **Microeconomic Theory,** 1ª ed. Estados Unidos: Oxford University Press, 1995

IRWIN, Douglas A. **The Welfare Cost Of Autarky: Evidence From The Jeffersonian Trade Embargo, 1807-09**, Review of International Economics, 2005, v13(4, Sep), 631-645.

RICARDO, David. **Princípios de economia política e de tributação.** 4. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

MILL, John Stuart. **Princípios de economia política: com algumas de suas aplicações à filosofia social.** São Paulo, SP: Abril Cultural, 1983

RUDIGER; DORNSBUSCH; SAMUELSON, Paul **Comparative Advantage, Trade, and Payments in a Ricardian Model with a Continuum of Goods**, American Economic Review 67, 1967

PARETO, Vilfredo. **Manual de economia política.** 3. ed. São Paulo, SP: Nova Cultural, 1988.

WALRAS, Léon. **Compêndio dos elementos de economia política pura.** São Paulo: Nova Cultural, 1996

ARAÚJO, Aloísio. **Introdução à economia matemática.** Rio de Janeiro: Impa, 2011.

Heckscher, E. **The Effect of Foreign Trade on the Distribution of Income.** Ekonomisk Tidskrift, 497-512, 1919, Reprinted as Chapter 13 in A.E.A. (1949).

OHLIN, B. **Utrikeshandelsteorin: Ett försök till "Ehrenrettung". (The Theory of International Trade: An Attempt to "Ehrenrettung")**, Ekonomisk Tidskrift, 1961

OHLIN, B. **Interregional and International Trade**¸ Cambridge, Massachusetts, 1933

SAMUELSON, P. A., **International Trade and Equalization of Factor Prices,** Econ. Jour. 58, 163-184 (06/1948).

SAMUELSON, P. A., **International Factor Price Equalization Once Again,** Econ. Jour. 59, 181-197 (06/1949).

KRUGMAN, Paul R.; OBSTFELD, Maurice; MELITZ, Marc J. **Economia internacional.** 10. ed. São Paulo: Pearson, 2015

DAVIS, Donald, **Intraindustry Trade: A Heckscher-Ohlin-Ricardo Approach** Journal of international Economics 39, 201-226 (11/1995)

JONES, Jones W. **The structure of Simple General Equilibrium Models** Journal of Political Economy 73, 1-10 (1956)