



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**MODELAGEM DO ESCOAMENTO DE UMA  
CASCATA UNIFORME PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Gustavo Carreiro Matias**

**Brasília, Maio de 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**MODELAGEM DO ESCOAMENTO DE UMA  
CASCATA UNIFORME PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Gustavo Carreiro Matias**

*Projeto de Graduação 2 submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico*

Banca Examinadora

Prof. André von Borries Lopes, FT/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Braulio Gutierrez Pimenta, FT/UnB  
*Examinador Interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Yuri Dumaresq Sobral, MAT/UnB  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Ivan Rosa de Siqueira, Rice University  
*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho à memória de Maria Domingas, minha querida segunda mãe.*

*Gustavo Carreiro Matias*

## **Agradecimentos**

*Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por ter me permitido alcançar tudo o que tenho.*

*Também agradeço aos meus pais, Ryvo e Natália, por estarem sempre presentes, por terem me ensinado a lutar pelo que desejo e me mostrado que a recompensa é fruto de esforço. Agradeço aos meus irmãos, Jéssica e Marcelo, por serem excelentes exemplos e mostrarem que não há limites para o que podemos alcançar.*

*Agradeço à Universidade de Brasília, que me permitiu crescer tanto e, em especial ao professor André Lopes, que, além de grande amigo e professor, é um exemplo de como bons docentes têm a capacidade de orientar e engrandecer tantas pessoas.*

*Agradeço também a todos os meus amigos, que sempre estiveram ao meu lado para desabafos e risadas. Por último, agradeço à minha namorada Rafaela, que me acompanhou durante todo o percurso da minha graduação e me faz ser melhor sempre que possível.*

*Gustavo Carreiro Matias*

---

## RESUMO

Neste trabalho, é estudado o escoamento em cascata uniforme unidirecional e bidimensional de um fluido newtoniano incompressível sobre uma parede inclinada. Este problema está presente na natureza no escoamento de lava ou geleiras, por exemplo, e, devido a sua abrangência, é bastante explorado em pesquisas. A maioria dos estudos, porém, analisa o problema analiticamente e desenvolve soluções aproximadas, frequentemente usando a aproximação por lubrificação. No presente estudo, será obtida, numericamente, a solução completa deste escoamento com auxílio da biblioteca PDE Toolbox do MATLAB, que resolve equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos. Com isto, busca-se complementar a literatura já existente. O problema será formulado considerando-se ângulos de contato entre o fluido e a parede entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , abrangendo-se, assim, os casos nos quais ocorre e nos quais não ocorre o molhamento da superfície. Também será analisado o escoamento em paredes com diferentes inclinações, verificando o efeito desta variação no escoamento. Para o cálculo do fluxo, será desenvolvido um código próprio de integração numérica utilizando o método da quadratura Gaussiana. As soluções exatas para a distribuição de velocidades e para o fluxo são apresentadas, validadas e discutidas.

---

## ABSTRACT

In this work, the unidirectional and two-dimensional flow of a uniform rivulet of an incompressible newtonian fluid down an inclined wall is studied. This problem can be found in nature, for example, in the flow of lava or glaciers and, due to its ubiquity, it is widely explored in research. Most studies, however, analyze the problem analytically and develop approximate solutions, often by means of lubrication theory. In the present study, the complete solution of this flow is obtained numerically using the PDE Toolbox library from MATLAB, which solves partial differential equations using the finite element method. With this, we seek to complement the existing literature. The problem is formulated considering contact angles between  $0^\circ$  and  $180^\circ$ , thus covering the cases in which the surface wetting occurs and does not occur. It will also be analyzed the flow in walls with different inclinations, verifying the effect of this variation in the properties of the flow. To calculate the flux, a numerical integration code is developed using the Gaussian quadrature method. The exact solutions for velocity distribution and flux are presented, validated and discussed.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	5
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	<b>6</b>
2.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	7
2.1.1	CONDIÇÃO DE NÃO DESLIZAMENTO .....	7
2.1.2	CONDIÇÃO DINÂMICA .....	8
2.2	EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA A PRESSÃO .....	10
2.3	EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA A VELOCIDADE .....	10
2.4	DETERMINAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE .....	10
2.4.1	CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS .....	11
2.4.2	CÁLCULO DO PERFIL DA SUPERFÍCIE LIVRE .....	11
2.5	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES .....	21
2.6	FLUXO .....	22
2.7	RESULTADOS ANALÍTICOS .....	22
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA NUMÉRICA</b> .....	<b>25</b>
3.1	MÉTODO DE NEWTON .....	25
3.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	26
3.3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	32
3.4	SOFTWARE MATLAB .....	33
3.5	TESTES NUMÉRICOS .....	34
3.5.1	COMPARAÇÃO PARA O ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE .....	35
3.5.2	COMPARAÇÃO PARA O ESCOAMENTO EM TUBO EM FORMATO DE ANEL ..	38
3.5.3	COMPARAÇÃO PARA O ESCOAMENTO EM UM CILINDRO VERTICAL SOB AÇÃO DA GRAVIDADE .....	41
3.5.4	ESCOAMENTO TORCIONAL .....	44
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>48</b>
4.1	DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES COMPUTACIONAIS .....	48
4.2	COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA .....	49
4.3	ESPECIFICAÇÃO DA MALHA .....	52
4.4	PERFIL DE VELOCIDADES NA SEÇÃO TRANSVERSAL .....	54
4.4.1	PAREDE VERTICAL .....	55
4.4.2	PAREDE INCLINADA: $\lambda = 0,1$ .....	55
4.4.3	PAREDE INCLINADA: $\lambda = 0,5$ .....	56
4.4.4	PAREDE INCLINADA: $\lambda = 0,9$ .....	57

4.5	PROPRIEDADES DO ESCOAMENTO EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE CONTATO	58
4.5.1	PAREDE VERTICAL .....	58
4.5.2	PAREDE INCLINADA .....	60
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>63</b>
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	64
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>66</b>
	<b>APÊNDICES</b> .....	<b>68</b>
<b>I</b>	<b>FORMA ALTERNATIVA DO TEOREMA DE STOKES</b> .....	<b>69</b>
I.1	IDENTIDADES VETORIAIS ÚTEIS .....	69
I.2	DESCRIÇÃO DA FORMA ALTERNATIVA .....	70
<b>II</b>	<b>CONDIÇÃO DINÂMICA</b> .....	<b>72</b>
<b>III</b>	<b>ESCOAMENTOS AXISSIMÉTRICOS</b> .....	<b>77</b>
III.1	ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO RETILÍNEO .....	77
III.1.1	ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE .....	79
III.1.2	ESCOAMENTO EM TUBO EM FORMATO DE ANEL .....	80
III.1.3	ESCOAMENTO DE UM FILME SOBRE UM CILINDRO DEVIDO À GRAVIDADE	83
III.2	ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO TORCIONAL .....	86
III.2.1	ESCOAMENTO DE COUETTE CIRCULAR .....	87
III.3	ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO RADIAL .....	91
III.4	ESCOAMENTO ESFÉRICO PERMANENTE COM SIMETRIA RADIAL .....	92

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos comuns do escoamento em cascata: tinta escorrendo <sup>1</sup> (à esquerda) e escoamento de lava <sup>2</sup> (à direita). .....	1
1.2	Escoamento de um fluido não newtoniano em torno de um cilindro em um substrato inclinado. Imagem retirada de Hinton, Hogg e Huppert (2020). .....	2
1.3	Resultado obtido por Alekseenko et al. (2015). .....	4
1.4	Esquema do escoamento em cascata sob um cilindro. Imagem retirada de Aktershev, Alekseenko e Bobylev (2021). .....	4
2.1	Representação esquemática do escoamento a ser estudado vista de dois planos distintos. ....	6
2.2	Exemplo do uso do plano auxiliar. ....	12
2.3	Perfis da superfície livre para diferentes valores de $\beta$ com $\lambda = 0, 1$ . ....	18
2.4	Perfis da superfície livre para diferentes valores de $\beta$ com $\lambda = 0, 5$ . ....	18
2.5	Perfis da superfície livre para diferentes valores de $\beta$ com $\lambda = 0, 9$ . ....	18
2.6	Representação esquemática do escoamento para a parede vertical. ....	19
2.7	Formato da superfície livre. ....	20
2.8	Perfil da superfície livre para os ângulos de contato $30^\circ$ , $90^\circ$ e $150^\circ$ em uma parede vertical. ....	22
3.1	Malha de elementos finitos utilizada. ....	36
3.2	Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita). ....	36
3.3	Erro numérico absoluto obtido. ....	37
3.4	Malha de elementos finitos utilizada. ....	38
3.5	Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita). ....	39
3.6	Módulo do erro numérico resultante para o escoamento em um tubo em formato de anel. ....	40
3.7	Fluxo como função da razão de raios obtido analítica e numericamente. ....	41
3.8	Resultado numérico (esquerda) e resultado analítico (direita) obtidos. ....	42
3.9	Módulo do erro numérico resultante para o escoamento em um cilindro sob ação da gravidade. ....	43
3.10	Nova malha de elementos finitos. ....	44
3.11	Malha de elementos finitos resultante. ....	45
3.12	Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita). ....	46
3.13	Erro absoluto numérico obtido. ....	46
3.14	Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita). ....	47
4.1	Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para a área da seção transversal. ....	50

4.2	Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para o fluxo pela seção transversal. ....	50
4.3	Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para a velocidade média. ....	51
4.4	Erro numérico obtido como função do número de pontos. ....	52
4.5	Logaritmo do erro numérico como função do logaritmo do tamanho característico. ....	53
4.6	À esquerda, há a malha obtida para tamanho máximo de elemento de 0,1. Foram obtidos 1570 elementos. À direita, está mostrada a malha com tamanho máximo de 0,05. Nesta malha há 3382 elementos. ....	54
4.7	Malha resultante de uma discretização com tamanho máximo de elemento de 0,01 (esquerda). Nesta figura, há 65011 elementos. Esta foi a malha usada no estudo. À direita, está uma visão aproximada do quadrado representado mostrado. ....	54
4.8	Perfil da velocidade para os ângulos de 30° (superior esquerdo), 90° (superior direito) e 150° (inferior). ....	55
4.9	Perfil da velocidade para os ângulos de 30° (superior esquerdo), 90° (superior direito) e 150° (inferior) para $\lambda = 0, 1$ . ....	56
4.10	Perfil da velocidade para os ângulos de 30° (superior esquerdo), 90° (superior direito) e 150° (inferior) para uma parede com $\lambda = 0, 5$ . ....	57
4.11	Perfil da velocidade para os ângulos de 30° (superior esquerdo), 90° (superior direito) e 150° (inferior) para uma parede com $\lambda = 0, 9$ . ....	57
4.12	Fluxo obtido em função do ângulo de molhamento. ....	59
4.13	Área da seção transversal em função do ângulo de contato. ....	59
4.14	Velocidade média em função do ângulo de molhamento. ....	59
4.15	Velocidade máxima em função do ângulo de contato. ....	60
4.16	Fluxo obtido em função do ângulo de molhamento para as paredes inclinadas. ....	61
4.17	Área da seção transversal em função do ângulo de contato para as paredes inclinadas. ....	61
4.18	Velocidade média em função do ângulo de molhamento para as paredes inclinadas. ....	61
4.19	Velocidade máxima em função do ângulo de contato para as paredes inclinadas. ....	62
II.1	Esquema de uma curva fechada simples $C$ superfície que é bordo de uma superfície interfacial arbitrária $S$ no espaço tridimensional. ....	72
II.2	Volume de controle $V$ que compreende a interface $S$ . ....	73
III.1	Esquema do problema proposto e solução obtida. ....	79
III.2	Exemplificação e solução do problema do escoamento em um anel. ....	80
III.3	Perfil de velocidades adimensional obtido para $\kappa = 0$ (azul), $\kappa = 0.25$ (verde), $\kappa = 0.5$ (vermelho) e $\kappa = 0.75$ (roxo). ....	82
III.4	Fluxo adimensional como função da razão entre os raios externo e interno. ....	83
III.5	Esquema do problema e solução obtida para o escoamento na lateral de um cilindro sob ação da gravidade. ....	84
III.6	Esquema do problema proposto. ....	88

III.7	Esquema do problema e solução obtida para o caso em que o cilindro interno é estacionário. ....	90
III.8	Exemplificação do problema e solução quando os cilindros possuem mesma velocidade angular.....	91
III.9	Representação esquemática do escoamento axissimétrico radial. ....	92

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$a$	Metade da largura da cascata
$A$	Área
$E$	Integral elíptica de segunda ordem
$F$	Integral elíptica de primeira ordem
$g$	Aceleração da gravidade
$h$	Perfil da superfície livre
$H$	Altura do perfil da superfície livre modificado
$L$	Comprimento
$\mathbf{n}$	Vetor normal
$p$	Pressão
$p_0$	Pressão atmosférica
$Q$	Fluxo
$q$	Fluxo adimensional
$r$	Direção radial
$R$	Raio
$s$	Área adimensional
$t$	Tempo
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade
$u$	Componente em $x$ da velocidade
$v$	Componente em $y$ da velocidade
$w$	Componente em $z$ da velocidade

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Ângulo de inclinação parede
$\beta$	Ângulo de contato
$\gamma$	Tensão superficial
$\kappa$	Curvatura
$\delta$	Altura do fluido
$\theta$	Direção angular
$\mu$	Viscosidade de um fluido
$\rho$	Massa específica do fluido
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensões viscosas
$\phi$	Direção azimutal
$\Omega$	Velocidade angular

## Subscritos

$\max$	Máximo
$r$	Componente radial
$\theta$	Componente angular
$z$	Componente na direção $z$
$p$	Relativo ao plano de referência

## Sobrescritos

$\bar{\quad}$	Valor médio
$\prime$	Derivada
$*$	Adimensional

# 1 INTRODUÇÃO

O escoamento sob a ação da gravidade em superfícies inclinadas é uma configuração de escoamento presente em diversos fenômenos da natureza e em muitas aplicações cotidianas de grande relevância. Desta forma, estudos sobre este tipo de escoamento são imprescindíveis para uma melhor compreensão destas ocorrências. Alguns exemplos de locais em que se pode encontrar o escoamento sob ação da gravidade são o escoamento de lava, o derretimento de geleiras, tinta escorrendo sobre uma tela e a condensação de vapor em um dispositivo de transferência de calor. Alguns destes exemplos podem ser vistos na Figura 1.1.



Figura 1.1: Exemplos comuns do escoamento em cascata: tinta escorrendo<sup>1</sup> (à esquerda) e escoamento de lava<sup>2</sup> (à direita).

Diversos artigos também vêm estudando aplicações menos intuitivas deste tipo de escoamento. Um primeiro exemplo é o artigo desenvolvido por Herrada et al. (2015), em que é estudado o surgimento de microbolhas em um tubo pelo qual escoava um líquido. Neste caso, as bolhas geradas podem ser modeladas como um escoamento vertical sob ação da gravidade, semelhante ao que neste trabalho será estudado. Já Robertson et al. (2010) estudaram a vibração de cabos sustentadores de pontes por ação da chuva e do vento, em que assume-se que a água proveniente da chuva gera cascatas. Assim, os efeitos destes escoamentos são usados para estimar os esforços exigidos nos cabos de sustentação. Outro exemplo pode ser encontrado no artigo de Labib et al. (2011), onde estuda-se o escoamento bifásico em capilaridades estreitas. Neste artigo, percebe-se que surgem cascatas e subcascatas dentro do tubo, sendo que estas determinam e caracterizam o escoamento estudado. Outro problema interessante, estudado por Hinton, Hogg e Huppert (2020), é o escoamento com superfície livre em torno de cilindros, mostrado na Figura 1.2. O artigo propõe que este escoamento pode ser interessante para dimensionar um anteparo que proteja uma região de interesse em um fluxo, como uma cidade em meio a um escoamento

<sup>1</sup>Disponível em: <<https://mistertem.com.br/wp-content/uploads/2017/06/tinta-escorrendo.png>> Acesso em 8 de junho de 2021.

<sup>2</sup>Disponível em: <<https://fhox.com.br/wp-content/uploads/2017/11/j-kilauea-lava-flows-7-10-2017-30-1-745x513.jpg>> Acesso em 8 de junho de 2021.

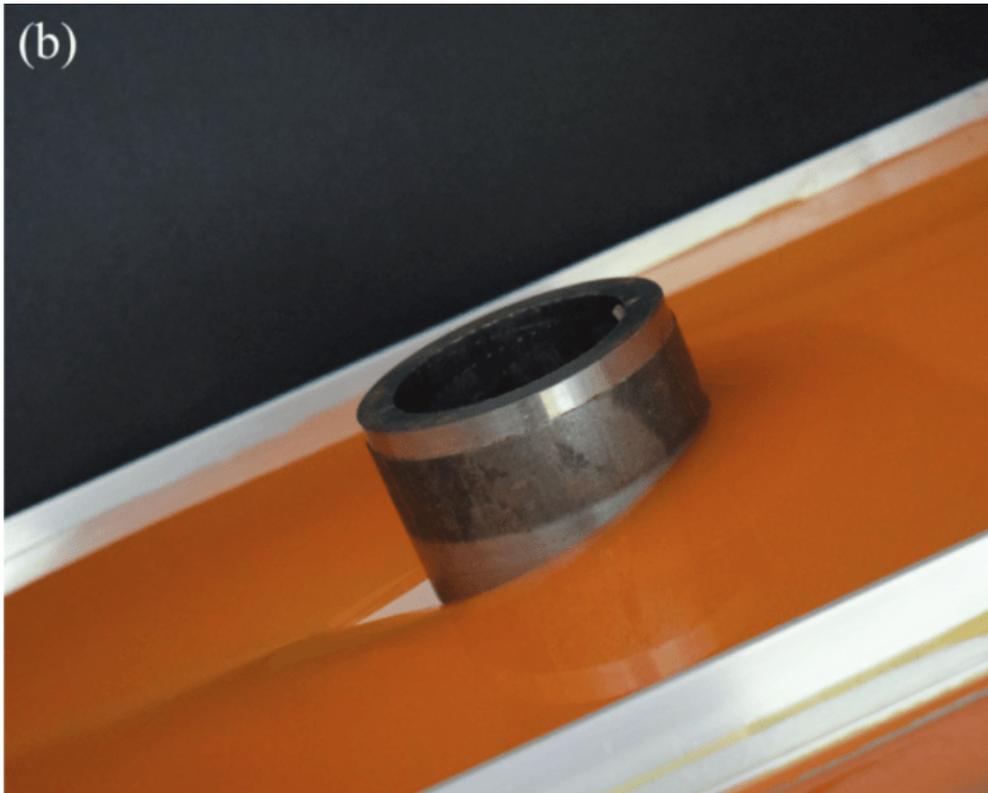


Figura 1.2: Escoamento de um fluido não newtoniano em torno de um cilindro em um substrato inclinado. Imagem retirada de Hinton, Hogg e Huppert (2020).

de lava proveniente de uma erupção vulcânica.

O primeiro trabalho nesta área foi desenvolvido por Towell e Rothfeld (1966), que estudaram o escoamento permanente de um fluido newtoniano devido à gravidade em uma superfície inclinada plana. Neste trabalho, as equações que regem o escoamento do fluido foram desenvolvidas utilizando a teoria da lubrificação. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais para diferentes ângulos de contato e diferentes fluxos, sendo satisfatórios apenas para baixos ângulos.

Baseados neste artigo, Allen e Biggin (1974) estudaram numericamente o problema do escoamento em cascata sob ação da gravidade. Desta forma, foram obtidas uma solução numérica completa pelo método dos elementos finitos, uma solução de primeira ordem e uma solução de ordem dominante utilizando métodos de perturbação. Os resultados aproximados, entretanto, são válidos apenas para escoamentos com baixa razão entre a altura e a largura do escoamento. Estes dois trabalhos, assim como a maioria dos trabalhos nesta área, utilizam a teoria de lubrificação para obter soluções reduzidas para o problema. Esta hipótese, porém, é válida apenas para valores de ângulo de contato muito baixos, de forma que a maioria dos resultados da literatura possui um intervalo de aplicabilidade bastante restrito.

Em seguida, Bentwich et al. (1976) obtiveram uma solução analítica para o caso do escoamento em uma parede vertical utilizando um somatório infinito de integrais. Para planos inclinados, foi obtida uma aproximação polinomial utilizando o método de Ritz-Galerkin. Este trabalho

se diferencia de muitos outros na literatura por não utilizar a hipótese de lubrificação e, consequentemente, não estar sujeito às mesmas limitações. Desta forma, o resultado obtido é válido para qualquer ângulo de contato entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Mais recentemente, Perazzo e Gratton (2004) concluíram que, além do perfil da superfície livre, o campo de velocidades também pode ser obtido independentemente da reologia do fluido. Assim, é possível determinar tanto o perfil do escoamento quanto o campo de velocidades partindo apenas das condições físicas do problema, com o resultado obtido sendo válido para qualquer fluido. Foi possível, então, obter uma expressão que explicitasse o perfil da superfície livre para qualquer ângulo de contato entre a parede e o fluido e para qualquer fluido. Este trabalho também foi capaz de obter uma solução analítica para o perfil de velocidades para uma parede vertical com ângulo de contato de  $90^\circ$  ou  $180^\circ$ . Por fim, este trabalho comparou brevemente os resultados obtidos com os resultados provenientes da hipótese da lubrificação de forma bem rasa, ressaltando, assim, as limitações deste tipo de análise.

Diversas variações deste problema vêm sendo estudadas nos últimos anos. Uma destas é a inclusão de uma diferença de temperatura entre o substrato e o fluido. Nesta área, Holland, Duffy e Wilson (2001) estudaram o problema considerando que a tensão superficial na interface varia linearmente com a temperatura, enquanto no trabalho de Wilson e Duffy (2003) considerou-se que a temperatura afeta apenas a viscosidade do fluido, sendo estudados três modelos para a relação entre a viscosidade e a temperatura.

Um segundo grupo de artigos estuda o escoamento em cascata com molhamento perfeito, isto é, ângulo de contato entre o fluido e a parede igual a zero. O artigo de Duffy e Wilson (2003) compara o escoamento com e sem molhamento perfeito em uma parede com variação de temperatura, considerando apenas a viscosidade termodependente. Já o trabalho de Sullivan, Wilson e Duffy (2008) estuda o escoamento com molhamento perfeito para o caso em que há uma tensão cisalhante superficial e busca analisar a estabilidade deste fenômeno.

Outra linha de trabalhos estuda a propagação de ondas na superfície livre dos escoamentos em cascata. Alekseenko et al. (2015) realizaram uma simulação numérica tridimensional do escoamento em uma parede vertical para diferentes perfis de ondas forçadas lineares e não lineares. Um dos resultados obtidos pode ser visto na Figura 1.3. O trabalho de Aktershev, Alekseenko e Bobylev (2021) estuda a propagação de ondas na superfície de um escoamento em cascata na superfície de um cilindro. O esquema do escoamento estudado pode ser visto na Figura 1.4.

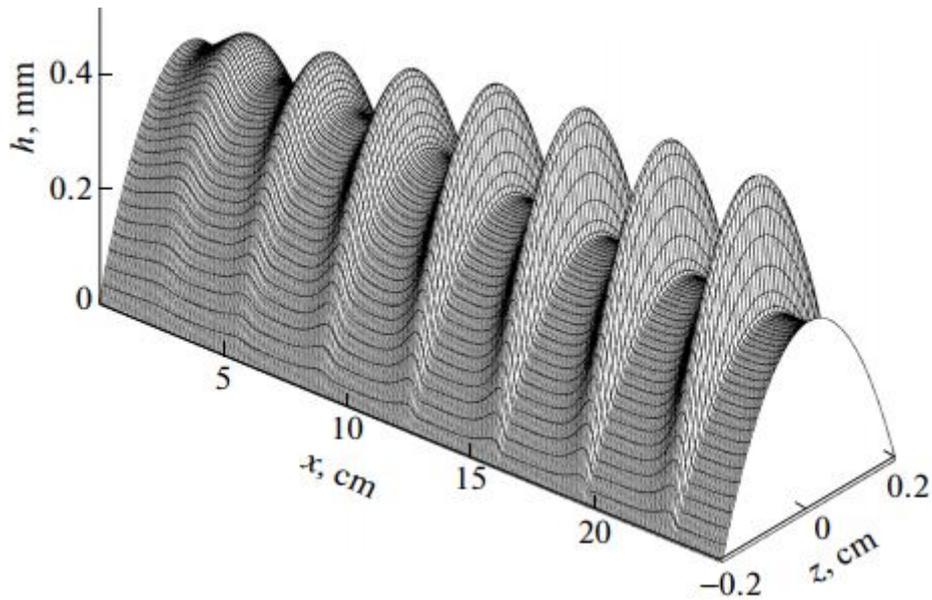


Figura 1.3: Resultado obtido por Alekseenko et al. (2015).

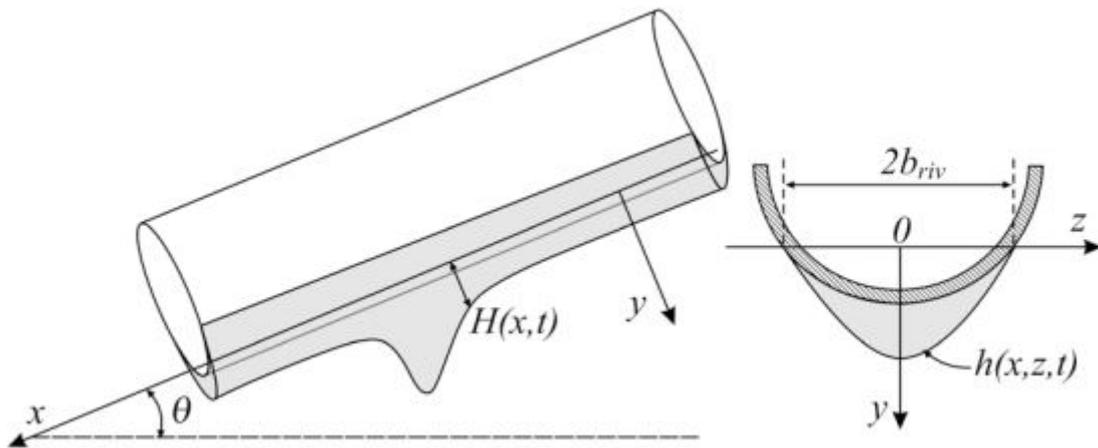


Figura 1.4: Esquema do escoamento em cascata sob um cilindro. Imagem retirada de Aktershev, Alekseenko e Bobylev (2021).

Mais recentemente, o artigo de Mukahal, Duffy e Wilson (2018) analisou o escoamento de um fluido não newtoniano. Neste trabalho, obteve-se uma solução paramétrica para fluidos newtonianos generalizados cuja viscosidade pode ser expressa como função da taxa de cisalhamento, como os fluidos de Carreau e de Ellis. Em outro artigo recente, Alshaikhi, Wilson e Duffy (2020) estudaram o escoamento em uma superfície escorregadia.

## 1.1 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste trabalho, analisar-se-á o escoamento sob ação da gravidade de um fluido newtoniano incompressível em uma parede inclinada. Também será considerado que o escoamento é unidirecional, bidimensional e que o regime é permanente. Será avaliado o efeito do ângulo de contato e do ângulo da parede no escoamento. Para isto, serão comparados o fluxo, a área da seção transversal, a velocidade máxima e a velocidade média de cada um dos casos, com o objetivo de uma melhor compreensão do que ocorre em cada um deles. Como o estudo será feito numericamente, é possível analisar o problema completo, sem necessitar da hipótese de lubrificação. Desta forma, o resultado possuirá validade para quaisquer ângulos de contato, não precisando se limitar a valores baixos deste.

A análise numérica será feita utilizando o método dos elementos finitos. Para isto, será usado o software MATLAB (MATrix LABoratory) e o método da quadratura de Gauss. Para o uso do método da quadratura de Gauss, será desenvolvido um código computacional próprio, sem o uso de nenhuma biblioteca preexistente. Para a validação do método numérico, estudaremos uma classe de problemas simples com solução analítica, os escoamentos axissimétricos. Em seguida, serão comparados os resultados numéricos com as soluções analíticas obtidas, de forma a validar o funcionamento adequado do código computacional desenvolvido.

O trabalho terá cinco capítulos. Neste primeiro capítulo foi introduzido o problema, contextualizando este com situações relevantes, além de uma revisão da literatura existente sobre este tema. No segundo capítulo será feita a formulação matemática do problema, apresentando as equações governantes e as condições do contorno do problema, bem como o formato da superfície livre deste escoamento. No terceiro capítulo, serão apresentados os princípios matemáticos necessários para a análise do problema. Desta forma, será exposto o método dos elementos finitos e o método da quadratura de Gauss. Em seguida, serão estabelecidas as principais características do MATLAB, software utilizado na resolução. Neste capítulo, ainda validaremos os resultados numéricos, comparando as soluções obtidas por meio do código com resultados analíticos de uma classe de escoamentos bastante conhecida, os escoamentos axissimétricos. No capítulo seguinte, será resolvido o escoamento em cascata para diferentes casos de ângulo da parede e de contato, obtendo o perfil de velocidades resultante para alguns casos representativos. Além disso, será estudado o comportamento das propriedades citadas para diferentes casos, buscando obter o efeito destas no escoamento. Por fim, no último capítulo será feito um breve resumo do que foi realizado no trabalho, bem como as principais conclusões obtidas por meio dos resultados.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Uma representação esquemática do problema a ser resolvido pode ser vista na Figura 2.1.

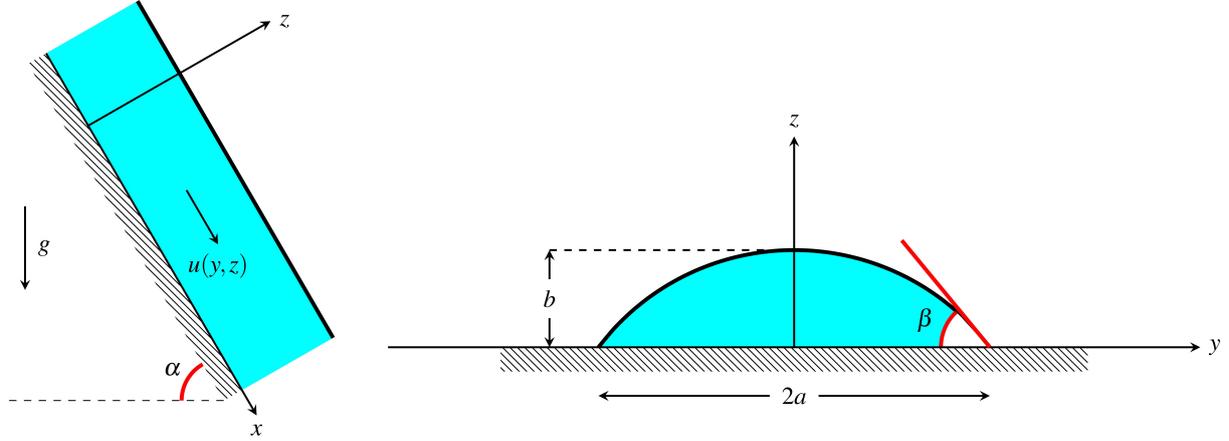


Figura 2.1: Representação esquemática do escoamento a ser estudado vista de dois planos distintos.

Na Figura 2.1, vê-se um fluido newtoniano e incompressível escoando em uma parede de inclinação  $\alpha$ . Esta inclinação pode assumir valores entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . O plano  $xy$  é coincidente com a parede, enquanto o escoamento se desenvolve na direção  $x$ . O eixo  $z$  é ortogonal à parede. A região de contato entre o fluido e a superfície da parede possui largura  $2a$ , enquanto o ângulo de contato do fluido é suposto fixo e igual a  $\beta$ .

Fisicamente, este ângulo de contato, também chamado de ângulo de molhamento, depende das condições físico-químicas do escoamento. Desta forma, este depende do fluido que está escoando, do material do escoante e do meio em que este fenômeno está imerso. Além disso, a interface pode ser classificada em função do ângulo de molhamento. Assim, se o ângulo de contato é menor do que  $90^\circ$ , diz-se que o fluido molha o sólido em que está ocorrendo o escoamento. Para  $\beta > 90^\circ$ , diz-se que o fluido não molha o sólido.

A primeira equação governante deste problema é a equação de Navier-Stokes, que rege o movimento de fluidos viscosos. Esta equação, em suas três componentes cartesianas, é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y, \quad (2.2)$$

e

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z, \quad (2.3)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $t$  é a variável relativa ao tempo,  $\mu$  é sua viscosidade

dinâmica,  $g_x$ ,  $g_y$  e  $g_z$  são as três componentes da gravidade,  $p$  é a pressão e  $u$ ,  $v$  e  $w$  são, respectivamente, as componentes da velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As componentes da gravidade dependem da inclinação do plano  $\alpha$  e são calculadas por  $g_x = g \sin \alpha$ ,  $g_y = 0$  e  $g_z = -g \cos \alpha$ .

A segunda equação governante é a equação da continuidade, que, já considerando o fluido estudado como incompressível, é

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Consideraremos o escoamento estudado como permanente, de forma que todas as derivadas parciais com relação ao tempo serão nulas. Além disso, o escoamento é unidirecional e bidimensional, de forma que a única componente não nula da velocidade será  $u$  e esta será uma função de  $y$  e  $z$ . Isto é,  $u = u(y, z)$  e  $v = w = 0$ .

Aplicando estas simplificações, as equações governantes se resumem a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha \quad (2.6)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin \alpha. \quad (2.7)$$

Como o escoamento possui apenas a componente de velocidade  $u$  não nula e esta componente não depende de  $x$ , a equação da continuidade é automaticamente satisfeita.

Para que o problema seja completamente formulado é necessário, em seguida, definir as condições de contorno.

## 2.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Neste problema, haverá dois tipos de condição de contorno para o perfil de velocidades: a condição de não deslizamento e a condição dinâmica. Cada uma destas será analisada individualmente em seguida.

### 2.1.1 Condição de Não Deslizamento

A primeira condição de contorno é a condição de não deslizamento na parede. Como a parede está em repouso, o fluido em contato com esta, obrigatoriamente, também o estará. Matematicamente, temos que

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0. \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Condição Dinâmica

Já a condição dinâmica está relacionada com o equilíbrio de tensões na superfície livre. Foi deduzido no Anexo II que, para que as tensões se equilibrem, tem-se que

$$(p_0 - p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n} \quad \text{em} \quad z = h(y). \quad (2.9)$$

Aqui,  $p_0$  é a pressão atmosférica,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície,  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor de tensões viscosas,  $\gamma$  é a tensão superficial na interface e  $\kappa$  é a curvatura da superfície livre. Neste problema, tanto a tensão superficial quanto a pressão atmosférica são constantes. Será necessário, então, analisar alguns destes fatores para determinar o formato final desta equação.

O tensor de tensões viscosas de um fluido newtoniano, segundo White (2008), é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Entretanto, o escoamento estudado é unidirecional e bidimensional. Como estabelecido anteriormente, a única componente de velocidade não nula é a componente  $u$ , que dependerá apenas de  $y$  e  $z$ . O tensor de tensões viscosas é, então, reduzido para

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Em seguida, buscaremos determinar o vetor normal à superfície livre. Para isto, definimos, primeiro, o formato da superfície livre. Este formato é uma função apenas de  $y$  pois o escoamento é uniforme. Desta forma, podemos definir a equação da superfície livre implicitamente como

$$F(y, z) = z - h(y). \quad (2.12)$$

O vetor normal a esta superfície, por sua vez, pode ser calculado por

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}, \quad (2.13)$$

Partindo da função da superfície livre obtida em (2.12), temos que

$$\nabla F = -h' \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{e} \quad \|\nabla F\| = \sqrt{1 + h'^2}, \quad (2.14)$$

onde  $\hat{e}_y$  é o vetor unitário na direção  $y$  e  $\hat{e}_z$  é o vetor unitário na direção  $z$ . Substituindo em (2.13), obtém-se a seguinte expressão para o vetor normal

$$\mathbf{n} = \frac{-h' \hat{e}_y}{\sqrt{1+h'^2}} + \frac{\hat{e}_z}{\sqrt{1+h'^2}}. \quad (2.15)$$

Já a curvatura  $\kappa$  é calculada por

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (2.16)$$

Aplicando o resultado obtido em (2.15) na equação (2.16), tem-se que

$$\kappa = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \right). \quad (2.17)$$

Desta forma,

$$\kappa = \frac{h''}{(1+h'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.18)$$

Finalmente, é possível aplicar as expressões obtidas em (2.11), (2.15) e (2.16) na equação (2.9), resultando em

$$\frac{(p_0 - p)}{\sqrt{1+h'^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{\sqrt{1+h'^2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma \kappa}{\sqrt{1+h'^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Resolvendo esta equação, chegamos em três condições de contorno para a superfície livre, mostradas na equação (2.20).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial y} h' + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ -\frac{(p_0 - p)}{\sqrt{1+h'^2}} h' = -\frac{\gamma \kappa}{\sqrt{1+h'^2}} h', \\ \frac{(p_0 - p)}{\sqrt{1+h'^2}} = \frac{\gamma \kappa}{\sqrt{1+h'^2}}. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Percebe-se, porém, que as últimas duas condições de contorno são iguais, de forma que restam apenas duas condições. Reescrevendo as duas condições obtidas, tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h \quad (2.21)$$

e

$$p = p_0 - \gamma \kappa \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.22)$$

## 2.2 EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA A PRESSÃO

Com as condições de contorno definidas, determinou-se uma expressão para a pressão. Para isto, integrou-se a equação (2.6) da seguinte forma

$$\int_z^h dp = - \int_z^h \rho g \cos \alpha dz. \quad (2.23)$$

Calculando a integral e usando a condição de contorno mostrada em (2.22), chegamos a

$$p_0 - \gamma\kappa - p = -\rho g \cos \alpha (h - z). \quad (2.24)$$

Isolando a pressão, obtém-se a seguinte expressão para esta

$$p = \rho g \cos \alpha (h - z) + p_0 - \gamma\kappa. \quad (2.25)$$

## 2.3 EQUAÇÃO GOVERNANTE PARA A VELOCIDADE

Finalmente, com o resultado obtido de que a pressão não varia ao longo do eixo  $x$ , a equação governante do problema, mostrada em (2.7) é reduzida a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}. \quad (2.26)$$

As condições de contorno a que esta equação está submetida são

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (2.27)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.28)$$

## 2.4 DETERMINAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE

O passo seguinte é determinar o perfil da superfície livre. Para isto, porém, é necessário, antes, definir as condições geométricas que a superfície livre deve respeitar.

### 2.4.1 Condições Geométricas

Da Figura 2.1, é fácil ver que

$$h = 0 \quad \text{em} \quad y = \pm a. \quad (2.29)$$

Além disso, temos que o perfil deve ser simétrico com relação ao eixo  $z$ , de forma que

$$h' = 0 \quad \text{em} \quad y = 0. \quad (2.30)$$

A última condição geométrica vem do ângulo de contato entre o fluido e a parede vertical. Tem-se, então, que

$$h' = \mp \tan \beta \quad \text{em} \quad y = \pm a. \quad (2.31)$$

Como já foi definido que o escoamento é simétrico com relação ao eixo  $z$ , podemos usar apenas as condições de contorno para  $y = a$ . Assim, será usado apenas o sinal superior nas equações (2.29) e (2.31).

### 2.4.2 Cálculo do Perfil da Superfície Livre

Para a dedução do perfil da superfície livre, seguiremos o desenvolvimento apresentado por Perazzo e Gratton (2004). Os cálculos aqui desenvolvidos não serão válidos para o ângulo específico  $\alpha = \pi/2$ , que será avaliado posteriormente.

O primeiro passo é derivar a expressão obtida para a pressão em (2.25) e aplicar a equação (2.5), chegando a

$$\rho g h' \cos \alpha = \gamma \kappa'. \quad (2.32)$$

Substituindo estes valores na equação (2.18), obtemos que

$$\frac{\rho g \cos \alpha}{\gamma} h' = \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]'. \quad (2.33)$$

Para simplificar as equações subsequentes, definiremos a seguinte constante

$$K = \frac{\rho g \cos \alpha}{\gamma}, \quad (2.34)$$

de forma que a equação (2.33) se torna

$$K h' = \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]'. \quad (2.35)$$

Em seguida, foi feita uma mudança de coordenadas que translada o eixo  $z$  para a reta em

que o perfil prolongado da superfície livre é ortogonal ao eixo  $z$ , como mostrado na Figura 2.2. Assim, a nova coordenada, que será chamada de  $Z$ , pode ser calculada por  $Z = z + H_p$ , onde  $H_p$  é a coordenada da parede. Vale ressaltar que  $H_p$  será positivo para o caso em que o ângulo de molhamento é menor que  $90^\circ$  e, conseqüentemente, a parede está acima do plano de referência, de forma que  $H_p$  será negativo. Por fim,  $H_p$  será nulo para um ângulo de  $90^\circ$ .

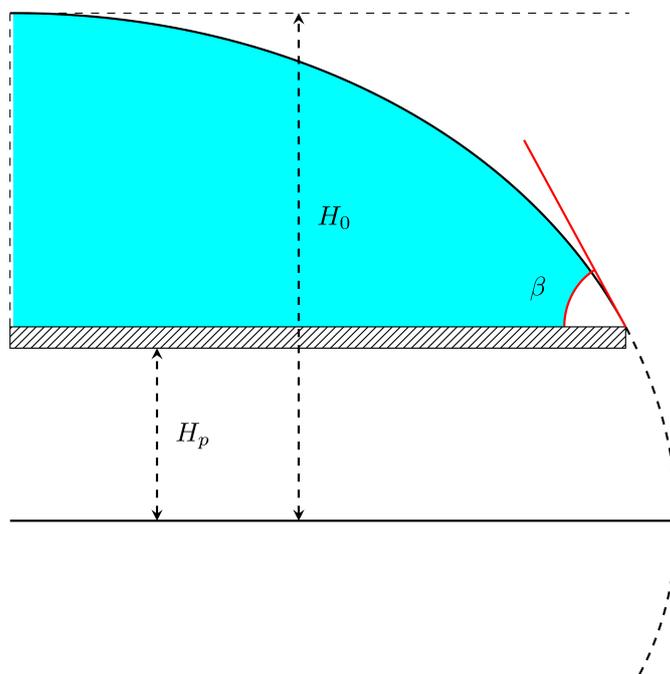


Figura 2.2: Exemplo do uso do plano auxiliar.

O perfil da superfície livre é, então,

$$H = h + H_p. \quad (2.36)$$

Como ao perfil da superfície livre foi apenas somada uma constante, a equação (2.35) pode ser reescrita como

$$KH' = \left[ \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]'. \quad (2.37)$$

Já as condições de contorno se tornam

$$H(a) = 0, \quad H'(0) = 0 \quad \text{e} \quad H'(a) = -\tan \beta. \quad (2.38)$$

Em seguida, integrou-se a equação (2.37) de 0 a  $y$ ,

$$\int_0^y KH' dy = \int_0^y \left[ \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' dy \quad (2.39)$$

ou seja,

$$\int_{H_0}^H K \, dH = \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^y, \quad (2.40)$$

onde  $H_0$  é a altura do perfil da superfície livre em  $y = 0$ . Aplicando a segunda condição de contorno mostrada na equação (2.38) em (2.40), temos que

$$K(H - H_0) = \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} - H''(0). \quad (2.41)$$

Em seguida, multiplicou-se ambos os lados por  $H'$  e integrou-se novamente a equação, de forma que

$$\int_0^y K(H - H_0)H' \, dy = \int_0^y \frac{H''H'}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \, dy - \int_0^y H''(0)H' \, dy. \quad (2.42)$$

Reescrevendo, temos que a equação resultante é

$$\int_{H_0}^H K(H - H_0) \, dH = \int_0^y \frac{H''H'}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \, dy - \int_{H_0}^H H''(0) \, dH. \quad (2.43)$$

Resolvendo as integrais, chegamos a

$$\frac{K}{2} H^2 \Big|_{H_0}^H - K H H_0 \Big|_{H_0}^H = - \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} \Big|_0^y - H H''(0) \Big|_{H_0}^H. \quad (2.44)$$

Desta forma,

$$\frac{K}{2} (H - H_0)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} - (H - H_0)H''(0). \quad (2.45)$$

Chamaremos o ponto em que a superfície livre encontra o plano de referência de  $m$ . Neste ponto sabemos que

$$H(y_m) = 0 \quad \text{e} \quad H'(y_m) = \infty. \quad (2.46)$$

Aplicando estes valores na equação (2.45), conclui-se que a curvatura em  $y = 0$  é dada por

$$H''(0) = \frac{K}{2} H_0 - \frac{1}{H_0}. \quad (2.47)$$

Como sabemos que a concavidade da superfície livre deve ser negativa e que tanto  $K$  quanto  $H_0$  são constantes positivas, podemos afirmar que

$$0 \leq \frac{K}{2} H_0 \leq \frac{1}{H_0}. \quad (2.48)$$

Agora é conveniente definir uma nova constante  $\lambda$  tal que

$$\lambda = \frac{K}{2} H_0^2, \quad (2.49)$$

em que  $\lambda$  está no intervalo

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.50)$$

Substituindo a expressão obtida em (2.47) na equação (2.45), chegamos a

$$\frac{K}{2}(H - H_0)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} - (H - H_0) \left( \frac{K}{2}H_0 - \frac{1}{H_0} \right), \quad (2.51)$$

Reescrevendo estas equações, temos que

$$\frac{H}{H_0} + \frac{K}{2}H(H_0 - H) = \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}}. \quad (2.52)$$

Em seguida, é possível adimensionalizar a equação (2.52). Para isto, definiremos as seguintes variáveis adimensionais

$$\zeta = \frac{H}{H_0} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{y}{H_0}. \quad (2.53)$$

É importante notar que

$$\frac{dH}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta}. \quad (2.54)$$

Fazendo a transformação proposta na equação (2.52), chegamos a

$$\zeta[1 + \lambda(1 - \zeta)] = \frac{1}{\sqrt{1 + (d\zeta/d\eta)^2}}. \quad (2.55)$$

Aplicando as expressões definidas em (2.53) na condição geométrica relativa à derivada, mostrada em (2.31) obtemos que

$$\frac{d\zeta}{d\eta}(a) = -\tan \beta. \quad (2.56)$$

Desta forma, é conveniente definir uma variável  $\theta$  tal que

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{d\eta}, \quad (2.57)$$

para que a condição estabelecida na equação (2.56) seja simplificada para

$$\theta(a) = -\beta. \quad (2.58)$$

Assim, a equação (2.55) se torna

$$\zeta + \lambda\zeta - \lambda\zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}. \quad (2.59)$$

Sabendo que  $\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sec \theta$ , podemos reescrever a equação (2.59) como

$$\lambda\zeta^2 - (1 + \lambda)\zeta + \cos \theta = 0. \quad (2.60)$$

Resolvendo esta equação quadrática, obtemos a seguinte expressão para  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda \pm \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right). \quad (2.61)$$

Apesar de aparecerem o sinal positivo e o negativo, o perfil da superfície livre não pode comportar ambas as possibilidades. Com o sinal positivo, verifica-se que o perfil obtido não respeita a condição de contorno obtida em (2.56). Desta forma, a expressão para  $\zeta$  deve ser

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda - \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right). \quad (2.62)$$

Partindo da equação (2.57), podemos escrever que

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\theta}{d\eta}. \quad (2.63)$$

Derivando a equação (2.62), chega-se a

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = - \frac{\sin \theta}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta}}. \quad (2.64)$$

Substituindo este resultado na equação (2.63), tem-se que

$$\tan \theta = - \frac{\sin \theta}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta}} \frac{d\theta}{d\eta}. \quad (2.65)$$

Reescrevendo, chega-se a

$$d\eta = - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4\lambda \cos \theta}} d\theta. \quad (2.66)$$

Sabe-se, da trigonometria que

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Usando essa relação em (2.66), tem-se que

$$d\eta = - \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 8\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \quad (2.67)$$

Rearranjando os termos resultantes,

$$d\eta = - \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{(1 - \lambda)^2 + 8\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (2.68)$$

Colocando em evidência  $(1 - \lambda)^2$  nos termos dentro da raiz quadrada, de forma que seja possível retirar este termo da raiz, chegamos a

$$d\eta = -\frac{1}{(1 - \lambda)} \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (2.69)$$

Podemos, então, reescrever da seguinte forma:

$$d\eta = -\frac{1}{1 - \lambda} \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \right) d\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.70)$$

Por simplicidade, definiu-se que

$$\Theta = \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad C^2 = -\frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2}, \quad (2.71)$$

de forma que a equação (2.70) se torna

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \Theta}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right) d\Theta. \quad (2.72)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da equação direita por  $C^2$  e somando e subtraindo 1 ao numerador, chegamos a

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} + \frac{-1 + 1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}{C^2 \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right) d\Theta. \quad (2.73)$$

Rearranjando esta equação, temos que

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{C^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} + \frac{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}{C^2 \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right] d\Theta. \quad (2.74)$$

Simplificando, obtemos que

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left[ \frac{C^2 - 2}{2C^2} \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} + \frac{1}{C^2} \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta} \right] d\Theta. \quad (2.75)$$

Substituindo a definição de  $C$  estabelecida na equação (2.71) na equação (2.75), tem-se que

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left[ \frac{(1 + \lambda)^2}{8\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} - \frac{(1 - \lambda)^2}{8\lambda} \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta} \right] d\Theta. \quad (2.76)$$

Rearrmando os termos e simplificando onde possível, obtém-se que

$$d\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} - (1+\lambda)^2 \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} \right] d\Theta. \quad (2.77)$$

Finalmente, é possível integrar esta equação, donde tem-se que

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 \int_0^\Theta \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} d\Theta - (1+\lambda)^2 \int_0^\Theta \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} d\Theta \right]. \quad (2.78)$$

As duas integrais resultantes são chamadas de integrais elípticas de segunda e primeira ordem respectivamente. A notação comumente utilizada para estas integrais (Hancock, 2010), é

$$F(x, k^2) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \quad (2.79)$$

e

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt. \quad (2.80)$$

Desta forma, é possível reescrever a equação (2.78) como

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 E(\Theta, C^2) - (1+\lambda)^2 F(\Theta, C^2) \right]. \quad (2.81)$$

Usando as definições de (2.71),  $\eta$  pode ser escrito como

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 E\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) - (1+\lambda)^2 F\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) \right]. \quad (2.82)$$

Finalmente, obtivemos uma expressão tanto para  $\eta$  quanto para  $\zeta$  como função de  $\lambda$  e  $\theta$ , mostradas, respectivamente, nas equações (2.82) e (2.62). Para uma melhor compreensão do perfil do resultado obtido, calculou-se o perfil da superfície livre para os ângulos de contato de  $\pi/6$ ,  $\pi/2$  e  $5\pi/6$  e para  $\lambda$  igual a 0,1, 0,5 e 0,9. Todas as integrais elípticas foram avaliadas usando uma biblioteca preexistente do software MATLAB. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5.

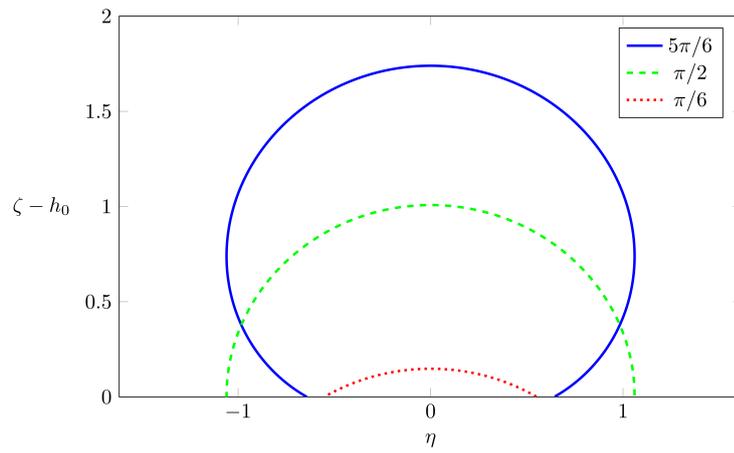


Figura 2.3: Perfis da superfície livre para diferentes valores de  $\beta$  com  $\lambda = 0, 1$ .

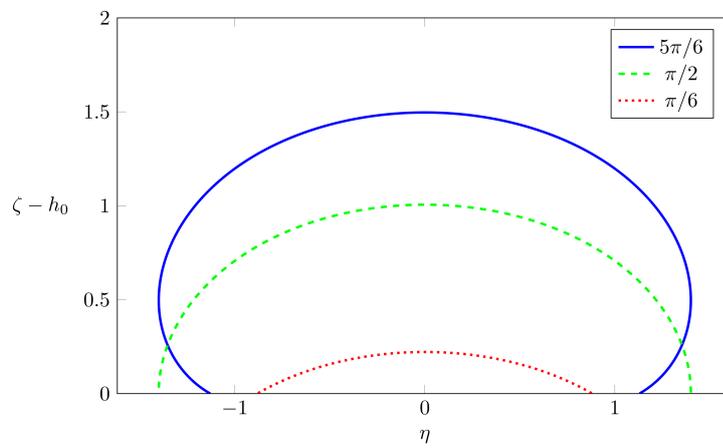


Figura 2.4: Perfis da superfície livre para diferentes valores de  $\beta$  com  $\lambda = 0, 5$ .

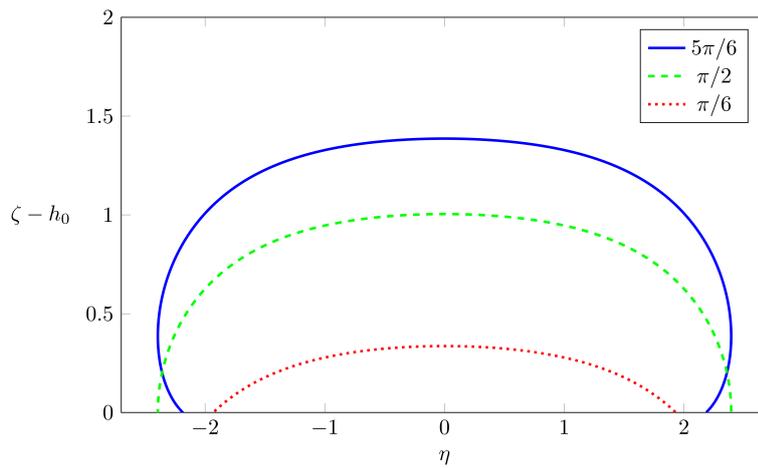


Figura 2.5: Perfis da superfície livre para diferentes valores de  $\beta$  com  $\lambda = 0, 9$ .

Percebe-se que, com um aumento de  $\lambda$  e, conseqüentemente, uma diminuição do ângulo da

parede estudada, o perfil passa de um semelhante a um circunferência, que será obtido na próxima seção como o resultado para uma parede vertical, para um cada vez mais achatado, devido à crescente influência da gravidade na direção  $z$ .

#### 2.4.2.1 Caso específico de $90^\circ$

Todo o desenvolvimento feito não é válido, porém, para uma parede vertical. Isto ocorre pois, de acordo com a equação (2.34), caso o ângulo da parede seja de  $90^\circ$ ,  $K$  é igual a 0, impossibilitando as manipulações subsequentes.

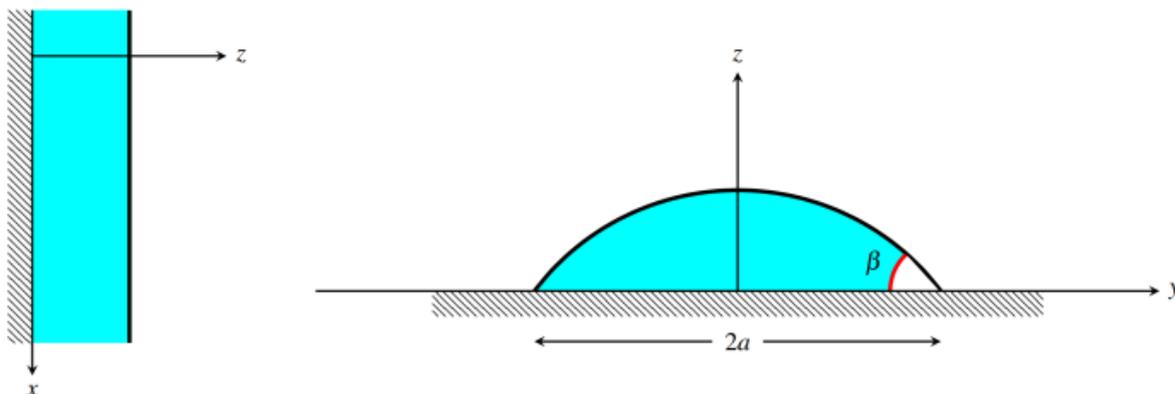


Figura 2.6: Representação esquemática do escoamento para a parede vertical.

Deduzir o perfil da superfície livre para este caso, porém, é simples. Primeiro, concluímos que a equação (2.6), para este caso, pode ser simplificada para

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.83)$$

Usando este resultado e a equação (2.5), concluímos que a pressão deve ser uma função apenas de  $x$ . Por outro lado, a equação (2.25), é simplificada para

$$p = p_0 - \gamma\kappa. \quad (2.84)$$

Desta forma, concluiu-se que a pressão é uma função de  $x$ , de forma que o lado esquerdo da equação (2.84) é uma função apenas de  $x$ . Entretanto, a tensão superficial e a pressão atmosférica são constantes e a curvatura é uma função apenas de  $y$ , de forma que o lado direito é uma função de  $y$ . Como o lado esquerdo é uma função apenas de  $x$  e o lado direito é uma função apenas de  $y$ , estes dois devem ser constantes. Desta forma, concluímos que tanto a pressão quanto a curvatura devem ser constantes.

É possível demonstrar, a partir da geometria diferencial, que os únicos formatos que satisfazem esta condição são a reta e o círculo. Das condições geométricas obtidas em (2.29), (2.30) e (2.31), porém, concluímos que a superfície poderia ser uma reta apenas no caso em que  $\beta = 0$ .

Como estudaremos o problemas para quaisquer ângulos no intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , o formato do perfil deverá ser um arco de circunferência.

Aplicando as condições geométricas, obtemos que a superfície livre terá um formato semelhante ao da Figura 2.7.

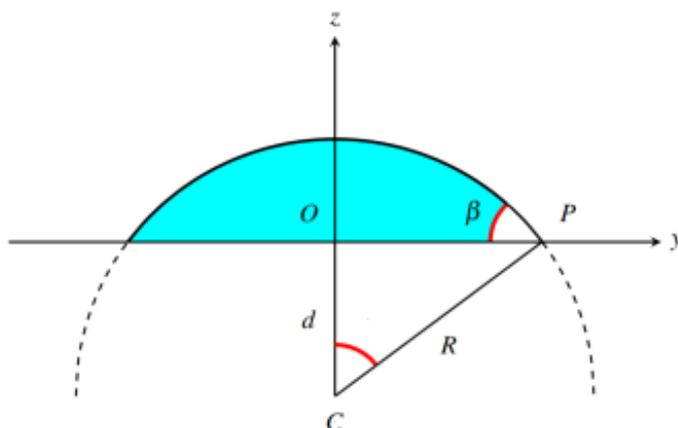


Figura 2.7: Formato da superfície livre.

Pra definir completamente esta circunferência, resta, então, definir a posição do centro e o raio desta.

Analisando os ângulos, conclui-se que

$$\angle OCP = \beta. \quad (2.85)$$

Como o segmento de reta  $\overline{OP}$  possui tamanho  $a$ , concluímos que o raio  $R$  e a distância  $d$  são calculados pelas expressões

$$R = \frac{a}{\text{sen } \beta} \quad (2.86)$$

e

$$d = \frac{a}{\tan \beta}. \quad (2.87)$$

A equação geral do círculo com centro em  $(0, -d)$  e raio igual a  $R$  é

$$y^2 + (z + d)^2 = R^2. \quad (2.88)$$

Como esta circunferência coincide com a superfície livre,  $z$  deve ser igual a  $h$ . Substituindo os valores obtidos em (2.86) e (2.87), chegamos a

$$y^2 + \left( h + \frac{a}{\tan \beta} \right)^2 = \left( \frac{a}{\text{sen } \beta} \right)^2. \quad (2.89)$$

A superfície livre é, então, a região positiva em  $y$  que satisfaz a equação (2.89).

## 2.5 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para resolver este problema é conveniente, antes, adimensionalizar a equação governante e as condições de contorno. Para isto, serão usadas as seguintes variáveis adimensionais identificadas pelo asterisco:

$$y = ay^*, \quad z = az^*, \quad u = \frac{\rho g a^2}{\mu} u^* \quad \text{e} \quad h = ah^*. \quad (2.90)$$

Aplicando estes valores na equação (2.26), chegamos a

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = -1. \quad (2.91)$$

Já as condições de contorno se tornam

$$u^* = 0 \quad \text{em} \quad z^* = 0, \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = h^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad \text{em} \quad z^* = h^* \quad (2.93)$$

e

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em} \quad y^* = 0. \quad (2.94)$$

Usando as variáveis adimensionais é possível adimensionalizar, também, o perfil da superfície livre obtido em (2.89). Define-se, então, esta superfície adimensionalmente com o sistema

$$\begin{cases} y^{*2} + \left( h^* + \frac{1}{\tan \beta} \right)^2 = \left( \frac{1}{\sin \beta} \right)^2, \\ y^* \geq 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Na Figura 2.8, vê-se a superfície livre correspondente aos ângulos de contato de 30°, 90° e 150°. Vale ressaltar que a superfície livre para paredes inclinadas já foi adimensionalizada em sua formulação.

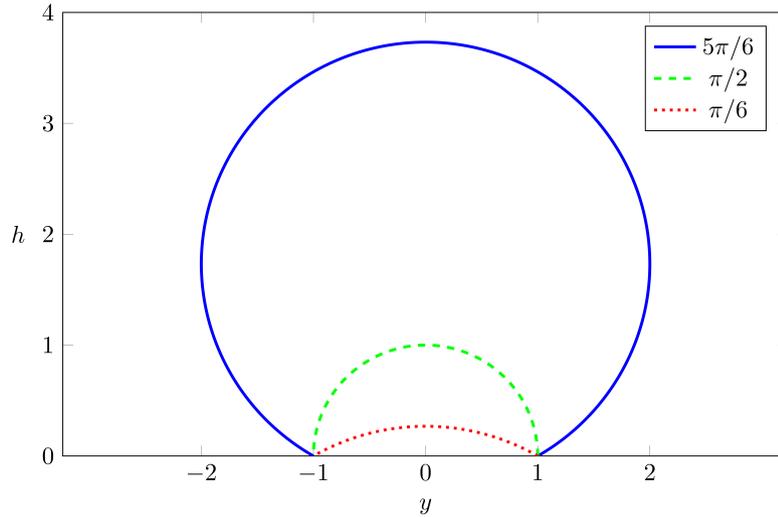


Figura 2.8: Perfil da superfície livre para os ângulos de contato  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $150^\circ$  em uma parede vertical.

É possível perceber aqui que o caso vertical e o caso inclinado foram formulados de maneiras distintas, seguindo os trabalhos de Towell e Rothfeld (1966) e Perazzo e Gratton (2004), respectivamente. O primeiro considera a região de contato como constante para os diferentes ângulos de contato analisados. Por outro lado, o trabalho posterior mantém a altura do perfil em relação ao plano de referência estipulado na formulação deste como constante. O segundo caso, em geral, é melhor pois o perfil da superfície livre é limitado por uma circunferência de raio unitário, enquanto o outro alcança uma circunferência de raio infinito, impedindo os cálculos desejados.

## 2.6 FLUXO

Por fim, é conveniente definir o fluxo neste problema, dado que este será utilizado para comparar modelos analíticos e numéricos. O fluxo através do perfil do escoamento pode ser calculado por

$$Q = \iint_A u(y, z) \, dA, \quad (2.96)$$

em que  $A$  é a região delimitada pela superfície livre e a parede.

## 2.7 RESULTADOS ANALÍTICOS

O trabalho desenvolvido por Perazzo e Gratton (2004) foi capaz de desenvolver, no caso específico em que a parede é vertical, soluções analíticas para o perfil de velocidade para os ângulos de  $90^\circ$  e  $180^\circ$ .

Para dedução do caso em que o ângulo é de  $90^\circ$ , parte-se da equação (2.91). Os asteriscos

serão suprimidos por uma questão de simplicidade. Propõe-se, então, a seguinte mudança de variáveis

$$u = \tilde{u} - \frac{z^2}{2}. \quad (2.97)$$

Substituindo esta expressão na equação (2.91), a equação a ser resolvida passa a ser

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0. \quad (2.98)$$

Já as condições de contorno se tornam mostradas nas equações (2.92) e (2.93) se tornam

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (2.99)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - z = h' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.100)$$

A condição de simetria, por sua vez será desprezada pois, como a solução será analítica, a diminuição do domínio não trará nenhuma vantagem de cálculo. Para isto, entretanto, será necessário utilizar as duas condições de contorno estipuladas na equação (2.29).

Da equação (2.95), é fácil concluir que, para o caso de uma parede vertical com ângulo de contato de  $90^\circ$ , o perfil da superfície será um semicírculo. Desta forma, é conveniente o uso de coordenadas polares para este estudo. Foi feita, então, a seguinte mudança de variáveis:

$$y = r \cos \theta \quad \text{e} \quad z = r \sin \theta. \quad (2.101)$$

Com esta mudança, a equação governante mostrada em (2.98) se torna

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.102)$$

para  $r$  e  $\theta$  variando no intervalos  $0 < \theta < \pi$  e  $0 < r < 1$ . Já as condições de contorno obtidas nas equações (2.99) e (2.100) se tornam, respectivamente,

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi \quad (2.103)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \sin^2 \theta \quad \text{em} \quad r = 1. \quad (2.104)$$

Em seguida, a equação (2.102) foi resolvida por meio de separação de variáveis. Verificou-se quais soluções não tinham singularidades em  $r = 0$  e satisfaziam a condição estipulada em (2.103). As soluções resultantes podem ser escritas por

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m r^m \sin m\theta. \quad (2.105)$$

Usando a condição de contorno da equação (2.104), conclui-se que os coeficientes  $A_m$  desta série são dados por

$$A_m = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ é par} \\ -\frac{8}{\pi m^2(m^2 - 4)}, & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.106)$$

Substituindo estes coeficientes na equação (2.105), obtém-se que

$$\tilde{u}(r, \theta) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1} \text{sen}[(2n+1)\theta]}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}. \quad (2.107)$$

Finalmente, da equação (2.97), temos que a velocidade é dada por

$$u = \tilde{u} - \frac{z^2}{2}, \quad (2.108)$$

com o valor de  $\tilde{u}$  calculado.

Em seguida, determinaremos analiticamente a velocidade máxima. Para isto, basta notar que a velocidade máxima estará localizada no ponto mais alto do perfil, isto é em  $r = 1$  e  $\theta = \pi/2$ . Substituindo estes valores na expressão obtida para a velocidade, obtém-se uma velocidade máxima de

$$u\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 0,401432\dots \quad (2.109)$$

Para obter o fluxo, integra-se a equação (2.108) em todo o domínio. O resultado obtido para o fluxo adimensional é

$$q = 0,361663\dots \quad (2.110)$$

Já para o caso que o ângulo de contato é de  $180^\circ$ , a expressão obtida para a velocidade que satisfaz (2.98) e respeita as condições de contorno impostas em (2.99) e (2.100) é

$$u = k - \frac{1}{4}(2 + r^2) + \frac{1}{2} \ln(1 + r^2 + 2r \sin \theta), \quad (2.111)$$

onde  $k$  é uma constante que deve ser escolhida para satisfazer as condições mostradas em (2.99) e (2.100). É fácil perceber que esta solução diverge analisando o perfil de velocidades no ponto em que o raio é igual a 1 e o ângulo  $\theta$  é igual a  $3\pi/2$ , que corresponde ao ponto de contato da parede e do fluido. Ali, o termo dentro do logaritmo anula-se, de forma que o resultado seja infinito. Percebe-se, então, que este escoamento é fisicamente impossível.

## 3 METODOLOGIA NUMÉRICA

Nesta seção, faremos uma breve análise de alguns métodos matemáticos necessários para a resolução dos problemas propostos. Primeiro, abordaremos o método de Newton, um método de resolução numérica de sistemas não lineares que será utilizado na explicação do método dos elementos finitos, que virá em seguida. O método dos elementos finitos será apresentado e derivado em sua forma mais simples, por uma questão de praticidade. Deduções mais completas e gerais podem ser encontradas em Becker, Carey e Oden (1981). Em seguida, será apresentado o método de integração numérica a ser usado no problema. Por fim, será apresentado o software MATLAB, que será a plataforma para a implementação dos métodos supracitados.

### 3.1 MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton é um método de resolução numérica de sistemas não lineares. Este método se baseia em uma expansão em série de Taylor multinomial. Assim, supondo que temos um sistema com formato  $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}) = 0$ , em que  $\mathbf{F}$  representa um sistema de equações e  $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_N)$  são variáveis independentes, podemos expandir este sistema como

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{J}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)})^T \cdot \mathbf{H}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)})^2 + \dots \quad (3.1)$$

Nesta função,  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  é um ponto de referência onde o valor da função é conhecida,  $\underline{\mathbf{x}}$  é o ponto em que se deseja obter o valor da função,  $\mathbf{J}$  representa a matriz Jacobiana e  $\mathbf{H}$  o tensor Hessiano. Truncando após o segundo termo, temos que

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{J}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \cdot (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}). \quad (3.2)$$

Assim, partindo de um palpite inicial  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ , obtém-se um segundo palpite  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ , buscando o ponto em que esta função  $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}})$  se anula. Desta forma, chega-se na equação abaixo.

$$\mathbf{J}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \cdot (\underline{\mathbf{x}}^{(1)} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = -\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}). \quad (3.3)$$

Resolvendo para  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ , obtemos um segundo palpite. Em seguida, repetimos o processo até que  $(\underline{\mathbf{x}}^{(1)} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  seja suficientemente pequeno, fazendo com que a solução já esteja próxima o suficiente da solução real.

Generalizando para o k-ésimo passo, temos que

$$\mathbf{J}(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) \cdot (\underline{\mathbf{x}}^{(k+1)} - \underline{\mathbf{x}}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}). \quad (3.4)$$

Assim, este método reduz um sistema não linear para um linear.

Analisando cada um dos termos, temos que  $\mathbf{J}$  é uma matriz  $N \times N$ , onde a componente  $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ , enquanto tanto  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)}$  quanto  $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})$  são vetores de dimensão  $N$ .

O método de Newton, porém, depende fortemente do palpite inicial. Para um palpite adequado, o método converge quadraticamente. Para um palpite inadequado, porém, o método diverge ou converge para uma solução distinta, caso esta exista. Assim, é necessário o estudo do primeiro palpite, de forma a garantir que o método retorne a solução desejada.

### 3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é um método de resolução de equações diferenciais em que substitui-se o domínio por um domínio discretizado e aproxima-se as equações diferenciais parciais por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Com estas equações, usa-se o método de Newton para se obter uma estimativa do valor da função nos pontos discretizados.

O primeiro passo do método dos elementos finitos é, então, discretizar o domínio. Para isto, substitui-se o domínio original por um conjunto de formas geométricas mais simples, geralmente segmentos de reta, para problemas unidimensionais, triângulos, para problemas bidimensionais, ou tetraedros, para problemas tridimensionais. Cada um destes triângulos ou tetraedros são chamados de elementos e seus vértices são chamados de nós.

Em seguida, assume-se que a solução em cada um destes elementos é uma solução simples, geralmente polinomial, dado que polinômios são fáceis de se avaliar e possuem boas propriedades de aproximação em domínios pequenos. O mais interessante é, portanto, definir o polinômio mais simples com o qual é possível resolver o problema com boa aproximação. Desta forma, a primeira ideia é assumir que a resposta é constante em cada elemento. Entretanto, esta proposta gera problemas físicos pois é necessário que dois triângulos (ou tetraedros) adjacentes possuam valor igual nas suas arestas compartilhadas, o que não é possível para uma solução constante em cada elemento, salvo se a resposta é constante em todo o domínio. A segunda maneira mais simples é assumir que a resposta em cada elemento possui formato linear. Usando esta proposição, resolve-se o problema relativo às arestas, mas, ainda assim, a derivada será diferente na aresta comum de dois elementos adjacentes. Apesar de descontínuas, as derivadas desta função são integráveis através da fronteira, evitando problemas numéricos. Assim, a solução linear satisfaz os critérios preestipulados. Os erros oriundos desta aproximação podem ser reduzidos utilizando polinômios de ordem maior ou refinando a discretização.

A equação geral a ser resolvida com o método de elementos finitos é

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f, \quad (3.5)$$

em que  $m$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $a$  e  $f$  são coeficientes do problema. Vale ressaltar que esta é uma versão simplificada e a forma mais geral desta equação, escrita vetorialmente, será abordada posteriormente

neste trabalho. Para problemas permanentes e unidimensionais, a equação (3.5) se resume a

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au = f. \quad (3.6)$$

Reescrevendo a equação com todos os termos no lado esquerdo, obtemos esta na forma residual. Logo, para que uma função  $u(x)$  seja solução do problema, ela deve satisfazer

$$R(x, u(x)) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au - f = 0, \quad (3.7)$$

onde  $R$  é chamado de resíduo desta função. Qualquer função que satisfaça a relação (3.7) em qualquer ponto do domínio e obedeça às condições de contorno é chamada de uma solução forte do problema. Para a resolução pelo método dos elementos finitos, porém, será necessário relaxar ligeiramente esses critérios. Uma solução é chamada de fraca se, além de obedecer as condições de contorno, satisfizer a seguinte condição

$$\int_{\Omega} R(x, u(x)) v \, dx = 0, \quad (3.8)$$

onde  $\Omega$  é o domínio e  $v$  é uma função qualquer. Como as condições de contorno de Dirichlet impõem um valor para a função nas bordas do domínio, a equação (3.8) pode apresentar um problema nestes pontos. Para resolver isto, definimos que a função  $v$  deve ser nula no bordo do domínio, isto é,

$$v \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.9)$$

Sendo assim, enquanto para uma solução forte o resíduo deve ser nulo em todo o domínio, para uma solução fraca basta que uma média ponderada dessa função seja nula no domínio, com seus pesos ditados pela função  $v$ . Vale ressaltar que se uma solução do problema é forte, ela também será uma solução fraca e vice-versa. A escolha do uso da equação na forma fraca ajuda apenas na formulação desejada do problema.

Juntando as equações (3.7) e (3.8), obtemos a seguinte equação para a solução fraca do problema:

$$\int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au - f \right] v \, dx = 0. \quad (3.10)$$

Reescrevendo, chegamos a

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{\partial u}{\partial x} \right) v \, dx + \int_{\Omega} auv \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx = 0. \quad (3.11)$$

Para a primeira integral, deve-se aplicar o método da integração por partes, de forma que

$$-c \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx + \int_{\Omega} auv \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx = 0, \quad (3.12)$$

em que  $x_0$  e  $x_1$  são os limites do domínio. Porém, como obtido na equação (3.9), a função  $v$  é nula nas bordas do domínio. Desta forma, o primeiro termo da equação (3.12) também é nulo. Finalmente, temos que

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{\Omega} auv dx - \int_{\Omega} fv dx = 0. \quad (3.13)$$

Reescrevendo na forma da equação (3.8), temos que a nova função resíduo é

$$R(x, u(x)) = c \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + auv - fv. \quad (3.14)$$

Esta equação será usada na resolução do problema associada às condições de contorno. Tais condições serão consideradas do tipo de Dirichlet, isto é, podem ser escritas na forma  $u(x) = g(x)$  no bordo do problema, com  $g(x)$  conhecida.

Em seguida, usamos o método de Galerkin. Para isto, primeiro dividiremos a solução em duas partes, uma função  $u_p(x)$  responsável por satisfazer as condições de contorno e outra função  $u_h(x)$  que obedeça às equações impostas no interior do domínio e seja nula no bordo, de forma a continuar satisfazendo as condições necessárias. Assim, temos que

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x), \quad (3.15)$$

em que

$$u_p(x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x) \quad \text{e} \quad u_h(x) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.16)$$

Para que seja possível utilizar todas estas propriedades e manipulações citadas, porém, é necessário que as funções  $u(x)$  e  $v(x)$  se comportem adequadamente. Isto significa que, para as duas funções, a função em si e sua derivada devem ser de quadrado integrável. As funções serem de quadrado integrável garante que a integral de seu quadrado será menor que infinito, de forma que não haverá problemas na integração por partes e também podemos garantir a existência de cada uma das integrais de (3.13), assegurando o funcionamento do método proposto. Estas restrições definem um conjunto de funções ao qual estas devem pertencer. Desta forma, se acharmos um grupo de funções  $\phi_i(x)$  que seja uma base completa deste conjunto, conseguimos escrever a equação (3.15) como

$$u(x) = u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x), \quad (3.17)$$

em que  $U_i$  é um coeficiente para a função  $\phi_i(x)$ . Agora, o problema inicial de resolver a equação em todo o domínio se resume a descobrir o conjunto de coeficientes  $U_1, U_2, \dots$ .

Substituindo a equação (3.17) em (3.14), temos que

$$\int_{\Omega} \left( c \frac{\partial}{\partial x} \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \frac{\partial v}{\partial x} + a \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) v - f v \right) dx = 0. \quad (3.18)$$

Como dito anteriormente, a função  $v(x)$  deve ser do mesmo conjunto de equações que  $u(x)$ . Assim, podemos expandir a função  $v(x)$  em termos das funções de base do espaço desejado, como feito com  $u(x)$ , isto é,

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k, \quad (3.19)$$

em que  $\phi_k$  são as funções base e  $V_k$  são os coeficientes de cada uma das funções. Agora, todas as funções  $v$  podem ser representadas por diferentes conjuntos dos coeficientes  $V_1, V_2, \dots$ . Substituindo em (3.18), chegamos a

$$\int_{\Omega} \left[ c \frac{\partial}{\partial x} \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k \right) + a \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k \right) - f \left( \sum_{k=1}^{\infty} V_k \phi_k \right) \right] dx = 0. \quad (3.20)$$

Lembrando que  $V_k$  não depende de  $x$ , podemos reescrever a equação acima como

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \int_{\Omega} \left( c \frac{\partial}{\partial x} \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + a \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \phi_k - f \phi_k \right) dx = 0. \quad (3.21)$$

Como esta relação deve ser válida para qualquer conjunto de coeficientes  $V_k$ , a equação (3.21) se resume a

$$r_k = \int_{\Omega} \left( c \frac{\partial}{\partial x} \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + a \left( u_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i(x) \right) \phi_k - f \phi_k \right) dx = 0 \quad (3.22)$$

para qualquer valor de  $k$ .

Desta forma, substituindo todos os possíveis  $k$ , teoricamente seria possível obter todos os coeficientes  $U_i$  e obter a solução exata para o problema desejado. Como são infinitos valores de  $k$ , porém, isto é impossível. Para obter uma solução aproximada, então, truncamos os somatórios de (3.17) e (3.19) após  $M$  termos, obtendo as seguintes aproximações:

$$\tilde{u}(x) = u_p(x) + \sum_{i=1}^M U_i \phi_i(x), \quad \text{e} \quad \tilde{v}(x) = \sum_{k=1}^M V_k \phi_k(x). \quad (3.23)$$

Agora, podemos, usando apenas  $M$  funções  $\phi(x)$ , conseguir um sistema de  $M$  equações. Resolvendo este sistema, obtemos todos os coeficientes  $U_i$ , com  $i = 1, \dots, M$ , o que representa uma solução aproximada para o problema.

A resolução do problema inicial, envolvendo uma equação diferencial parcial, agora resume-se, apenas, a resolver um sistema de equações. O sistema obtido, porém, pode ser altamente não linear, envolvendo diversas integrais caso a equação original seja não linear. Desta forma, é necessário o uso de algum método de resolução de sistemas não lineares. O mais frequentemente empregado neste tipo de problema é o método de Newton, que foi explicado na seção anterior e consiste em expandir o sistema de equações em uma série de Taylor multinomial, para, com o auxílio do Jacobiano desta matriz, chegar a um sistema de equações mais simples de ser resolvido. Uma das grandes vantagens deste método é que, para um bom palpite inicial, o método converge rapidamente (Chapra e Canale, 2016).

Desta forma, resta apenas achar uma função que satisfaça as condições de contorno e definir o conjunto de funções base que será utilizado. Este conjunto deve satisfazer as condições estipuladas anteriormente, isto é, ele deve ser uma base completa do espaço de funções desejado, ser nulo no bordo do domínio e é desejável que leve a uma matriz Jacobiana esparsa, o que facilita a resolução pelo método de Newton.

Para que as integrais do sistema obtido existam, todas as funções  $\phi_j$  e suas primeiras derivadas também devem ser de quadrado integrável. Dentre as funções que satisfazem esta condição, estão as funções lineares em cada elemento.

Assim, para o método dos elementos finitos, o conjunto de funções  $\phi_j$  usado é chamado de *função chapéu*. Supondo um domínio  $x \in [0, 1]$  com  $N$  nós igualmente espaçados, onde nó  $X_j$  está localizado em  $X_j = \frac{(j-1)}{N}$ , a função  $\phi_j$  é dada por

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < X_{j-1} \\ \frac{x - X_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}, & \text{se } X_{j-1} < x < X_j \\ \frac{X_{j+1} - x}{X_{j+1} - X_j}, & \text{se } X_j < x < X_{j+1} \\ 0, & \text{se } x > X_{j+1}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Podemos ressaltar algumas propriedades interessantes que esta função possui. Primeiro, a função  $\phi_j$  só é não nula nas vizinhanças do ponto  $j$ . Além disso, a função varia linearmente entre 0 e 1. Por último, temos que

$$\phi_j(X_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (3.25)$$

Com o uso desta função, os coeficientes  $U_j$  da expansão de  $u(x)$  ganham um significado bem claro: estes representam o valor da função em  $j$  e  $\tilde{u}(x)$  é a interpolação destes pontos.

É importante verificar se esta função proposta satisfaz os critérios estabelecidos. Primeiro, é

muito fácil achar uma função que satisfaça as condições de contorno da seguinte forma

$$u_p = g_0\phi_1(x) + g_1\phi_N(x). \quad (3.26)$$

Todas as funções  $\phi_j(x)$ , por serem não nulas em apenas um ponto, onde valem 1, e variarem de 0 a 1 linearmente nesta região, são quadrado integráveis, assim como suas derivadas. Além disso, todas as funções  $\phi_2, \dots, \phi_{N-1}$  são nulas no bordo do domínio. Resta verificar se a matriz Jacobiana é esparsa. Temos que, partindo da equação (3.22), chegamos a seguinte expressão para a matriz Jacobiana, escrita em notação indicial

$$J_{ki} = \frac{\partial r_k}{\partial U_i} = \int_0^1 \frac{d}{dx} \phi_i(x) \frac{d}{dx} \phi_k(x) dx. \quad (3.27)$$

Para que  $J_{ki}$  seja diferente de zero, temos que tanto  $\phi_j(x)$  quanto  $\phi_k(x)$  devem ser diferentes de zero. Pela propriedade obtida em (3.25), temos que isto ocorre apenas se  $k = i - 1, i, i + 1$ , resultando em uma matriz Jacobiana tridiagonal.

A função proposta satisfaz todos os critérios estipulados, sendo então apropriada para o uso no método dos elementos finitos.

Resumindo, a resolução pelo método dos elementos finitos consiste na seguinte sequência de passos:

- Determinar o sistema e discretizar o domínio, obtendo os pontos e estipulando todas as funções  $\phi_j(x)$ ;
- Definir que  $u_p(x) = g_0\phi_1(x) + g_1\phi_N(x)$  e  $u_h = \sum_{j=2}^{N-1} U_j\phi_j$ ;
- Escolher um palpite inicial  $U_2, \dots, U_{N-1}$ ;
- Determinar os resíduos  $r_k$  e calcular a matriz Jacobiana;
- Aplicar o método de Newton, seguido da resolução de um sistema linear da forma

$$\sum_{i=2}^{N-1} J_{ki} \delta U_i = -r_k^{(0)}, \quad (3.28)$$

para  $k = 2, \dots, N - 1$ .

- Corrigir o palpite inicial da seguinte maneira

$$U_i^{(1)} = U_i^{(0)} + \delta U_i; \quad (3.29)$$

- Repetir até que os resíduos sejam suficientemente pequenos;

- Assim, a solução final é da forma

$$u(x) = g_0\phi_1(x) + g_1\phi_N(x) + \sum_{i=2}^{N-1} U_i\phi_i. \quad (3.30)$$

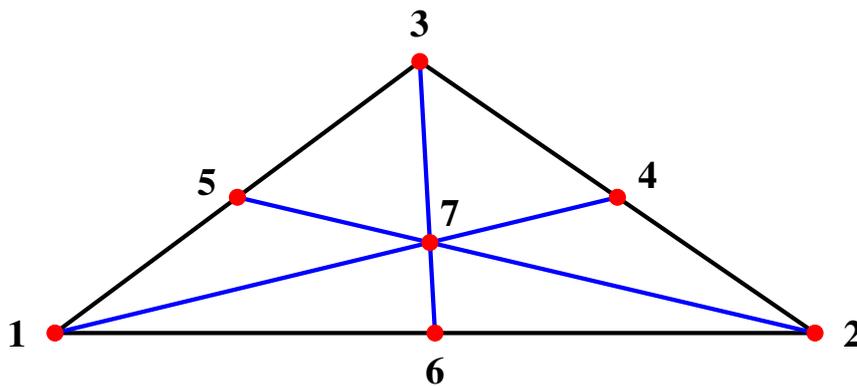
### 3.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A partir do resultado dos elementos finitos, muitas vezes deseja-se integrar o resultado obtido. Para isto, é necessário utilizar algum método apropriado de integração numérica. Neste trabalho, optou-se pelo uso do regra da quadratura (Kahaner, Moler e Nash, 1989), aplicada em cada um dos triângulos provenientes da discretização da malha em elementos finitos. Assim, aproxima-se a integral em cada um dos triângulos pela média ponderada do valor da função em alguns dos pontos deste domínio. Existem várias ordens do método, cada uma usando uma série de pontos e pesos pré-definidas. De forma geral, o método aproxima a integral da seguinte forma

$$I = \iint_A f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i, y_i) A, \quad (3.31)$$

onde  $f$  é a função a ser integrada,  $N$  é o número de pontos a ser utilizado,  $\omega_i$  é o peso de cada um dos pontos na média ponderada,  $x_i$  e  $y_i$  são dois pontos pertencentes ao domínio e  $A$  é a área do triângulo a ser integrado.

Neste trabalho será utilizado o método de terceira ordem, em que são usados 7 pontos: os três vértices, o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e seu baricentro. Os pontos usados podem ser vistos na Figura 3.3.



No caso de terceira ordem, os pesos são  $27/60$  para o valor da função no baricentro,  $8/60$  no ponto médio de cada um dos lados e  $3/60$  nos vértices (Rao, 2017).

### 3.4 SOFTWARE MATLAB

Para a resolução da classe de problemas propostos, equações diferenciais parciais e ordinárias, foi utilizado o software MATLAB (MATrix LABoratory), com auxílio da biblioteca Partial Differential Equation Toolbox (The MathWorks, Inc., 2012). Esta biblioteca resolve problemas de equações diferenciais parciais, comuns em áreas como transferência de calor e fluidos, utilizando o método dos elementos finitos. De forma geral, esta biblioteca resolve sistemas de  $N$  equações da forma

$$\mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{a}$  são matrizes de dimensão  $N \times N$  e representam os coeficientes do problema. Já  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  são vetores de dimensão  $N \times 1$  e representam a variável de interesse e um coeficiente do problema, respectivamente. O termo  $\mathbf{c}$  representa um tensor  $2N \times 2N$ , para um problema bidimensional, ou um tensor  $3N \times 3N$  para o caso tridimensional. Todos os coeficientes  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{c}$  podem ser função do espaço e da solução em si ou de seu gradiente.

A biblioteca ainda resolve um caso específico deste tipo de equação, a equação de autovalor. Esta possui uma das seguintes formas

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{d} \mathbf{u} \quad (3.33)$$

ou

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{m} \mathbf{u}, \quad (3.34)$$

onde  $\lambda$  é o valor referente a um autovalor desconhecido e  $\mathbf{a}$  é, assim como no caso anterior, uma matriz de dimensão  $N \times N$  que representa os coeficientes do problema. Para a resolução da equação de autovalor, porém, os coeficientes não podem depender da solução ou de seu gradiente.

Outro caso específico da equação (3.32) é quando  $N$  é igual a 1 e o problema a ser resolvido deixa de ser um sistema de equações e passa a ser apenas uma equação diferencial parcial. A forma geral desta equação reduzida é

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f, \quad (3.35)$$

onde  $m$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $a$  e  $f$  são coeficientes do problema. Todos estes coeficientes são escalares com exceção de  $c$ , que é uma matriz de dimensão  $2 \times 2$ , para um problema 2-D, ou  $3 \times 3$ , para um problema 3-D. Já  $u$  é um escalar e representa a variável de interesse.

Para resolver este tipo de problema são necessárias condições de contorno. Estas podem ser de dois tipos: Dirichlet ou Neumann. Nas condições de Dirichlet, define-se o valor da variável de interesse no contorno por meio de uma função ou de um escalar. Desta forma, este tipo de

condição de contorno pode ser definida, para a resolução de apenas uma equação, como

$$hu = r, \quad (3.36)$$

onde  $h$  e  $r$  são funções apropriadas, que podem ser funções do espaço, do tempo e da solução  $u$  em si e de seu gradiente.

Já nas condições de contorno do tipo Neumann, define-se o gradiente da solução na borda do domínio. De forma geral, a solução para uma equação é dada por

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}\nabla u) + qu = g, \quad (3.37)$$

onde  $q$  e  $g$  são funções dependendo do espaço, tempo e da solução  $u$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário exterior.

O número de condições de contorno necessárias varia com a geometria e o número de equações do sistema. Para cada borda, seja ela uma aresta, para o caso 2-D, ou uma face, para o caso 3-D, são necessárias  $N$  condições de contorno, uma para cada equação. Além disso, é possível que, em um único problema, haja condições de contorno dos dois tipos.

### 3.5 TESTES NUMÉRICOS

O passo seguinte foi utilizar a biblioteca Partial Differential Equation Toolbox do MATLAB para resolver alguns problemas de escoamentos axissimétricos, cuja formulação matemática foi desenvolvida no Anexo III. Este tipo de problema é simples e geralmente possui solução analítica. Desta forma, é possível validar o código computacional, comparando-o com os resultados analíticos obtidos para alguns tipos de escoamentos axissimétricos. Além disso, foi desenvolvido um código próprio para integração numérica na malha de elementos finitos, usando a regra da quadratura.

A validação será feita comparando, primeiramente, o campo de velocidades para cada um dos casos. Em seguida, o fluxo numérico será conferido usando o resultado analítico, garantindo, assim, que tanto o perfil de velocidades obtido computacionalmente quanto seu módulo possuam valores fisicamente coerentes. Também compararemos a velocidade média e a velocidade máxima dos resultados analítico e numérico.

Serão comparados, inicialmente, os três resultados obtidos para o escoamento axissimétrico retilíneo. Em seguida, será analisado um caso de escoamento torcional, de forma a validar o programa para diversos casos distintos. O caso radial não será usado, dado que sua equação governante não se adequa a equação geral da biblioteca utilizada. Para todos estes problemas, a equação governante que será implementada computacionalmente é a equação (3.35)

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{c}\nabla u) + au = f. \quad (3.38)$$

No caso analisado, temos que  $m$ ,  $d$  e  $a$  são nulos, enquanto  $c$  vale 1 e  $f$  depende das propriedades do problema, como a viscosidade e o gradiente de pressão. Desta forma, a equação governante se resume a

$$\nabla^2 u = -f. \quad (3.39)$$

O primeiro caso analisado será o do escoamento de Hagen-Poiseuille.

### 3.5.1 Comparação para o escoamento de Hagen-Poiseuille

A distribuição do campo de velocidade foi obtida na equação (III.16). Por simplicidade, consideraremos

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

e

$$R = 1 \text{ m},$$

de forma que o coeficiente  $f$ , na equação (3.38), seja igual a  $-1$ . Além disso, com estas considerações, o perfil de velocidades analítico resultante é apenas

$$u_z = \frac{1 - r^2}{4} \text{ m/s}. \quad (3.40)$$

O fluxo por uma seção circular, obtido analiticamente na equação (III.18), com as considerações explicitadas é igual a

$$Q = \frac{\pi}{8} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Já a velocidade média e a velocidade máxima foram obtidas nas equações (III.21) e (III.17) respectivamente. Com os valores citados anteriormente, obtemos que as velocidades máxima analítica e média analítica valem

$$u_{z,\text{máx}} = 0,25 \text{ m/s}$$

e

$$\bar{u}_z = 0,125 \text{ m/s}.$$

Para resolver o problema computacionalmente, inicialmente, definiu-se as condições de contorno. Neste caso, a condição de contorno é, simplesmente, que a velocidade na parede seja nula, devido a condição de não deslizamento, isto é

$$u = 0 \quad \text{em} \quad r = 1 \text{ m}. \quad (3.41)$$

Em seguida, foi desenvolvida a malha de elementos finitos com tamanho máximo de elemento igual a 0,1 m. O resultado obtido pode ser visto na Figura 3.1.

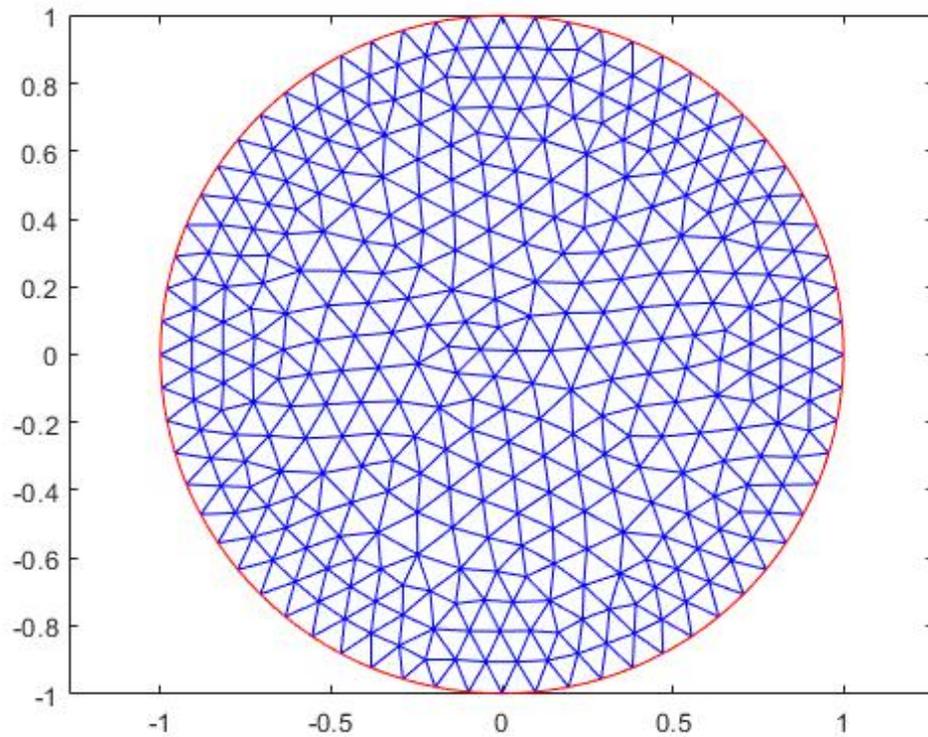


Figura 3.1: Malha de elementos finitos utilizada.

Com a malha definida, foram escritas a equação governante e as condições de contorno do problema. Com todos estes valores definidos, resolveu-se o problema. Em seguida, foi feito um mapa de calor para visualização das soluções numérica e analítica, com o objetivo de facilitar a comparação visual entre as duas soluções.

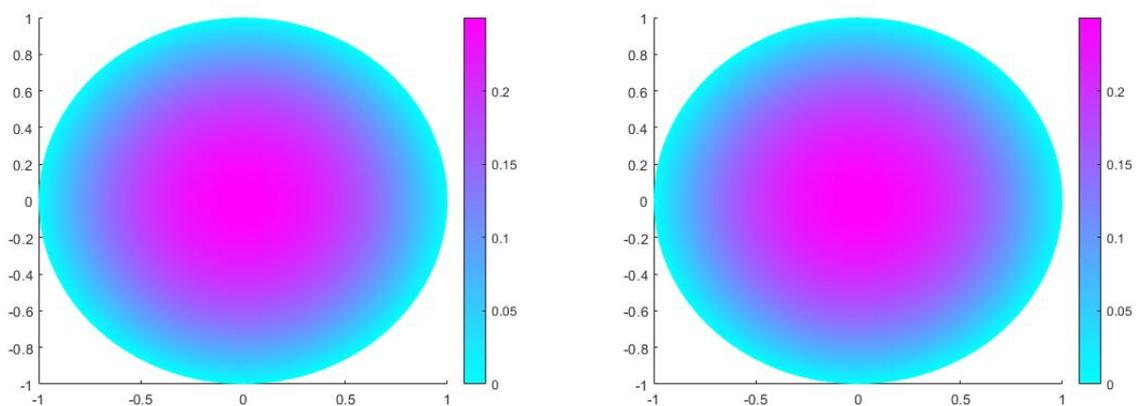


Figura 3.2: Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita).

Os dois resultados são visualmente muito semelhantes. É possível perceber que tanto o formato das duas soluções quanto a escala de velocidades são muito parecidas, o que indica que a

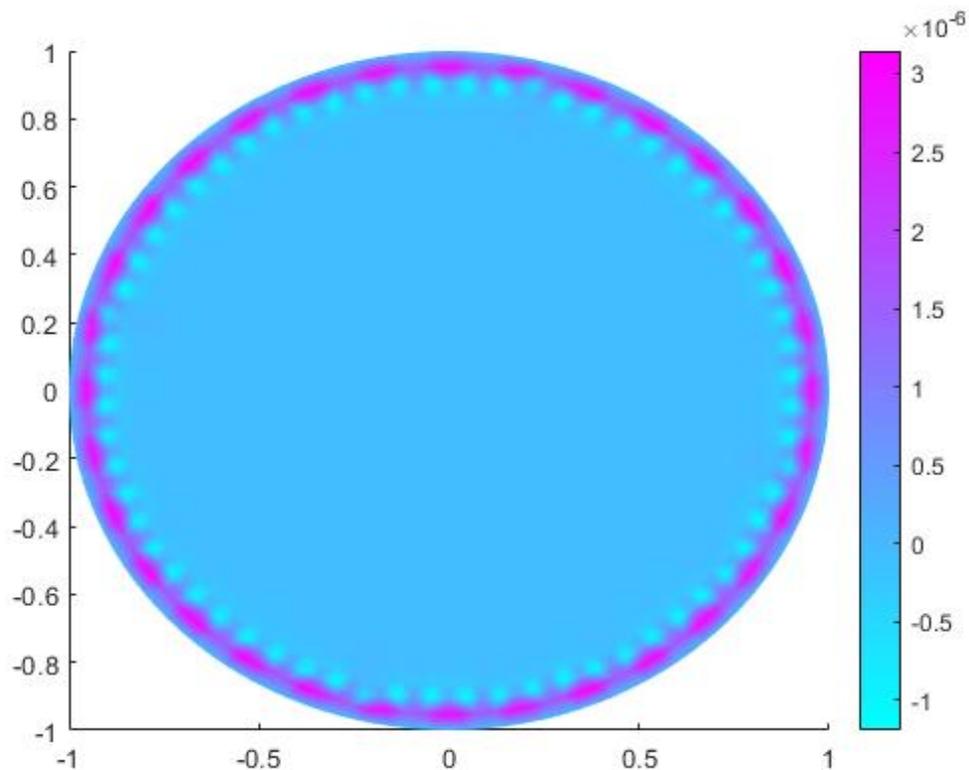


Figura 3.3: Erro numérico absoluto obtido.

solução numérica é muito coerente. Para verificar as regiões com maior erro, assim como a ordem de grandeza do erro absoluto associado à solução numérica, foi feito um gráfico de calor com a diferença entre as soluções obtidas. Este gráfico está na Figura 3.3.

Desta forma, percebe-se que o erro absoluto é maior nas regiões próximas à borda do domínio e, mesmo nesta região, este é da ordem de  $10^{-6}$ , o que é muito baixo.

Verificou-se, então, os valores de fluxo numérico e analítico. Como dito, o valor analítico do fluxo para as condições estipuladas é de  $\pi/8 \text{ m}^3/\text{s}$ , o que vale aproximadamente  $0,3927 \text{ m}^3/\text{s}$ . Usando os resultados numéricos e o código desenvolvido para integração por quadratura de Gauss, chegou-se a um valor de fluxo igual a  $0,3924 \text{ m}^3/\text{s}$ . A diferença entre o fluxo analítico e o numérico é, então, de  $0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Por fim, foram comparadas as velocidades média e máxima. A velocidade média numérica foi calculada dividindo o fluxo obtido pela área da seção circular do tubo. Desta forma, chegou-se a uma velocidade média numérica de  $0,1249 \text{ m/s}$ , enquanto a velocidade média analítica é de  $0,125 \text{ m/s}$ . Já a velocidade máxima numérica foi de  $0,2499 \text{ m/s}$ , comparado à velocidade máxima analítica de  $0,25 \text{ m/s}$ .

Desta forma, a metodologia numérica possui todos os valores analisados muito próximos àqueles obtidos analiticamente, garantindo seu funcionamento adequado.

### 3.5.2 Comparação para o escoamento em tubo em formato de anel

Em seguida, foram comparados os resultados analítico e numérico para o escoamento em um tubo em formato de anel. O campo de velocidades analítico pode ser visto na equação (III.29), enquanto o fluxo foi determinado na equação (III.34). Novamente, será considerado que

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

e

$$R = 1 \text{ m},$$

pois estes valores fazem com que o coeficiente  $f$  da equação governante computacional seja  $-1$ , além de simplificar o resultado final. O caso analisado será, inicialmente, aquele em que o raio interno é metade do raio externo, ou seja,

$$\kappa = 0,5.$$

A malha para este segundo caso respeitou a mesma restrição de tamanho máximo de 0,1 m por elemento. A malha resultante pode ser vista na Figura 3.4.

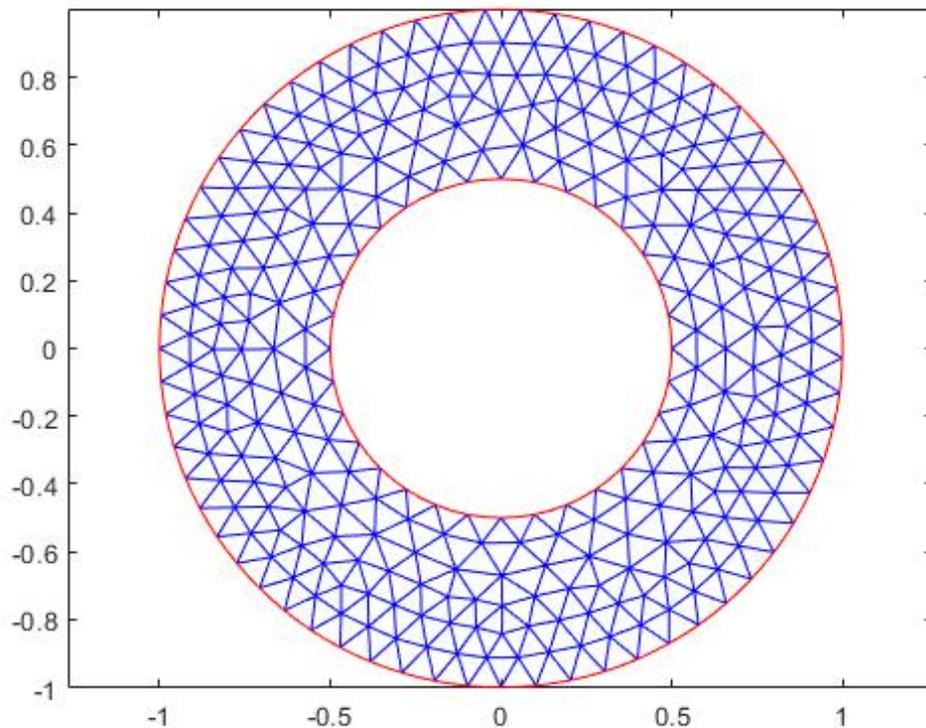


Figura 3.4: Malha de elementos finitos utilizada.

Com a malha estabelecida, definiu-se as condições de contorno. Pela condição de não desli-

zamento nas paredes interna e externa, temos que as condições de contorno são

$$u = 0 \quad \text{em} \quad r = 0,5 \text{ m} \quad \text{e} \quad r = 1 \text{ m}. \quad (3.42)$$

Em seguida, foi usado o método de elementos finitos para resolver o problema proposto. Depois, foram feitos gráficos para a solução numérica e para a solução analítica. Os dois gráficos podem ser vistos na Figura 3.5.

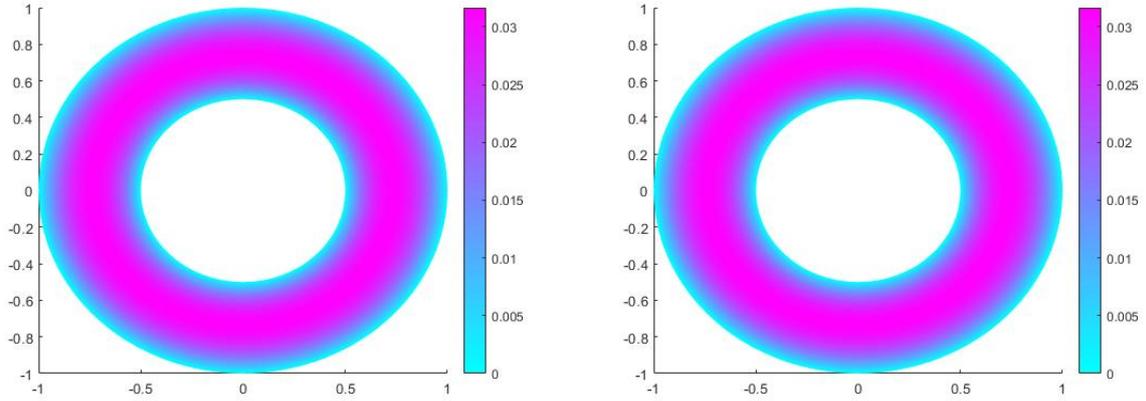


Figura 3.5: Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita).

Novamente, os dois resultados são visualmente muito parecidos, com o formato do perfil de velocidades e a ordem de grandeza das velocidades muito próximos. Em seguida, foi feito o gráfico da diferença entre a solução analítica e numérica.

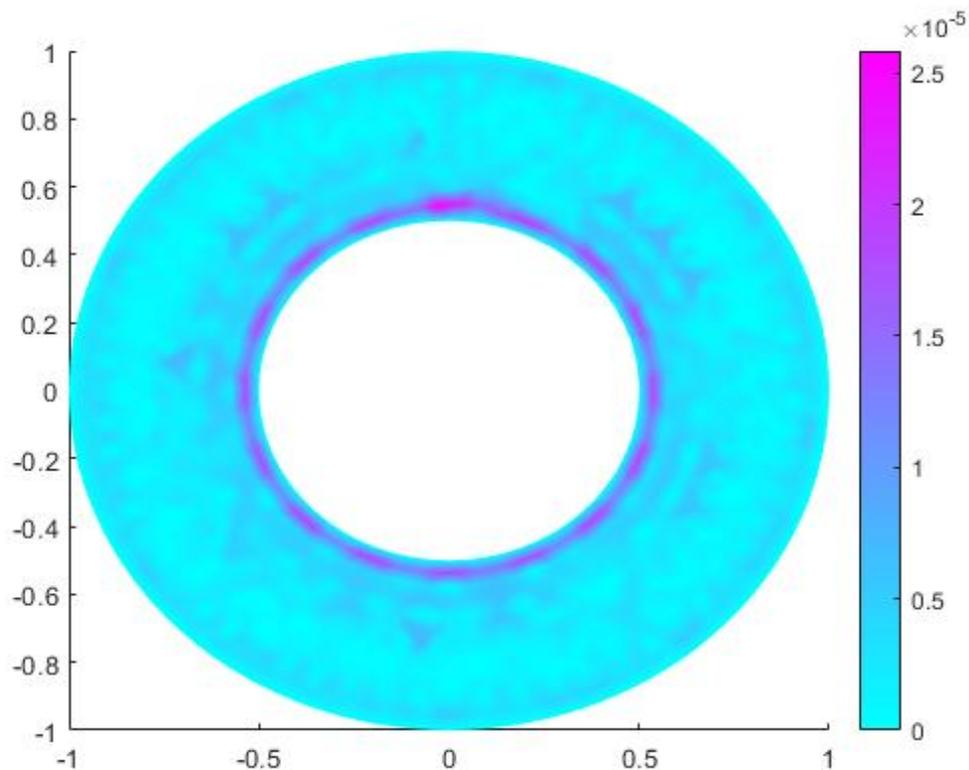


Figura 3.6: Módulo do erro numérico resultante para o escoamento em um tubo em formato de anel.

Deste gráfico, é possível concluir que o erro absoluto é muito baixo, da ordem de  $10^{-5}$  m/s. Além disso, este erro é maior na região próxima à parede interior e menor perto da parede externa.

Por fim, comparou-se o fluxo para cada um dos casos. O fluxo analítico é calculado com a expressão citada anteriormente e vale  $0,0495 \text{ m}^3/\text{s}$ . Usando a integração numérica desenvolvida, foi obtido um fluxo numérico de  $0,0493 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Este resultado obtido garante apenas o funcionamento adequado do programa e da integral para o caso específico em que a razão de raios é igual a 0,5. Buscando validar o resultado para qualquer razão de raios, decidiu-se comparar, numericamente, a solução analítica, obtida no gráfico III.4 e comparar o resultado numérico aqui desenvolvido. O gráfico resultante pode ser visto na Figura 3.7.

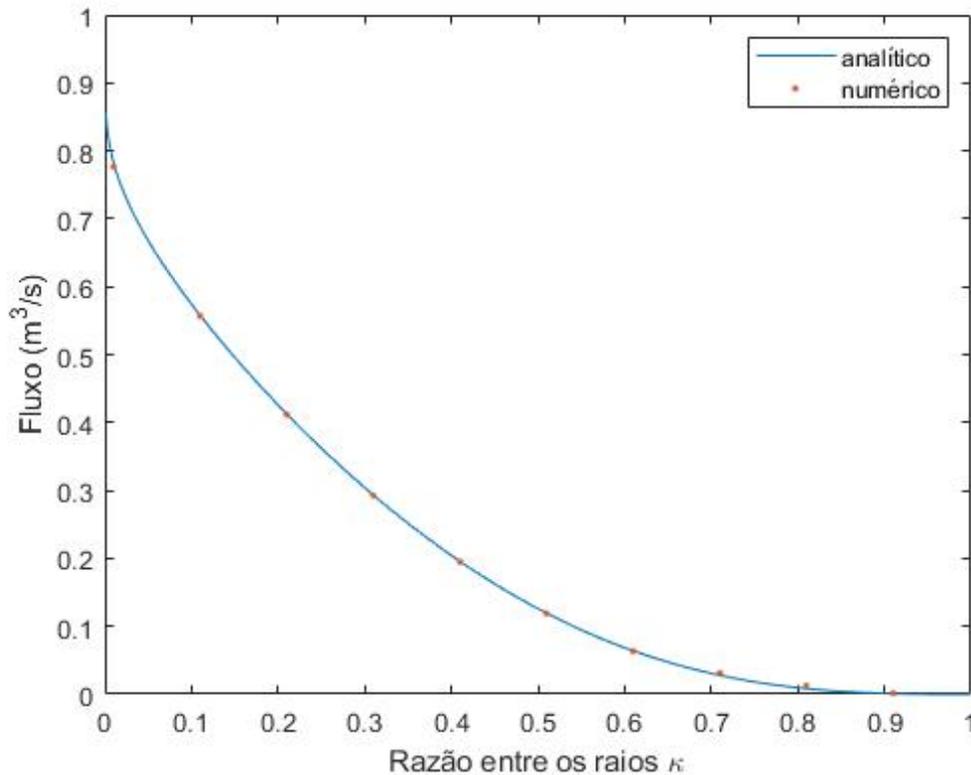


Figura 3.7: Fluxo como função da razão de raios obtido analítica e numericamente.

Conclui-se, então, que tanto o método dos elementos finitos quanto a integração pelo método da quadratura de Gauss funcionam para o problema proposto, retornando resultados numéricos muito próximos dos analíticos para uma malha pouco refinada.

A velocidade máxima analítica foi obtida na equação (III.33). Para o caso que está sendo analisado, então, o resultado analítico vale 0,0317 m/s. Já o resultado numérico retornado pelo programa foi igual ao anterior, valendo 0,0317 m/s. A velocidade média analítica, por sua vez, foi determinada na equação (III.36). Com os valores estipulados nesta seção, obtém-se uma velocidade média analítica de 0,0210 m/s. O resultado numérico obtido para a mesma propriedade foi de 0,0209 m/s. Para estes dois casos, a solução analítica e a numérica são muito próximas.

### 3.5.3 Comparação para o escoamento em um cilindro vertical sob ação da gravidade

Comparou-se, agora, os resultados numérico e analítico para um cilindro vertical sob ação da gravidade. Este caso foi estudado no anexo de escoamentos axissimétricos e o perfil de velocidade e o fluxo obtidos estão mostrados nas equações (III.44) e (III.47) respectivamente. Consideraremos, para esta análise, que

$$\frac{\rho g_z}{\mu} = 1 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

$$R = 0,5 \text{ m}$$

e

$$\delta = R,$$

fazendo, mais uma vez, que  $f$ , na equação (3.38) seja  $-1$ .

A primeira etapa da resolução numérica é, novamente, estipular as condições de contorno. Pela condição de não deslizamento na parede do cilindro, temos que

$$u = 0 \quad \text{em} \quad r = 1 \text{ m.} \quad (3.43)$$

Como a tensão cisalhante no contato entre o fluido e o ar deve ser nula, temos que

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0. \quad (3.44)$$

Em seguida, discretizou-se o domínio em elementos finitos, obtendo uma malha computacional. A malha para este último caso, porém, é muito semelhante àquela obtida para o escoamento em um tubo em formato de anel, dado que a parede externa naquele caso é equivalente ao limite do fluido, enquanto a parede interna no caso anterior e o limite do cilindro, neste caso, são equivalentes. Também foi usado o mesmo valor de tamanho máximo do elemento de  $0,1 \text{ m}$ .

Com a malha definida, resolveu-se o problema numérico. Em seguida, foi feito um mapa de calor para a solução computacional e para a solução analítica. Estes dois gráficos podem ser vistos na Figura 3.8.

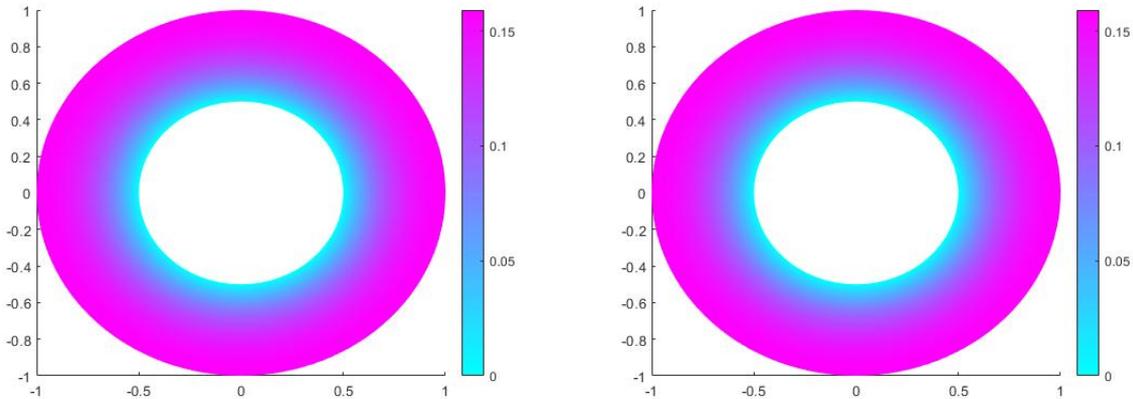


Figura 3.8: Resultado numérico (esquerda) e resultado analítico (direita) obtidos.

Conclui-se que a distribuição das velocidades nos dois casos possui um perfil semelhante. Subtraindo a solução exata da solução computacional, obtém-se um gráfico do erro absoluto associado à solução numérica. Este pode ser visto na Figura 3.9.

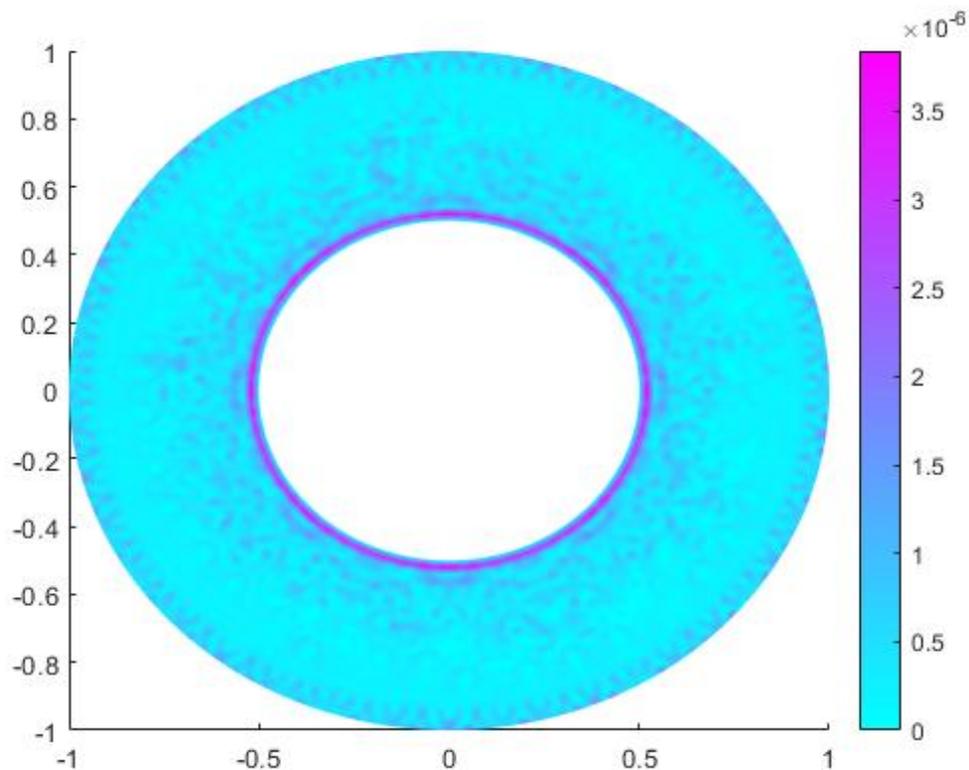


Figura 3.9: Módulo do erro numérico resultante para o escoamento em um cilindro sob ação da gravidade.

O perfil do erro absoluto para este caso também é bem similar ao obtido para o escoamento em um tubo com formato de anel. Para o cilindro sobre ação da gravidade, porém, o erro absoluto é um pouco maior, atingindo um máximo de cerca de  $4,5 \times 10^{-5}$  m/s. Este valor ainda é muito baixo, de forma que o resultado é satisfatório.

A velocidade máxima analítica na seção foi determinada na equação (III.45). Com os valores estabelecidos para esta análise, foi obtido uma velocidade máxima de 0,1591 m/s. O valor obtido numericamente foi igual, também de 0,1591 m/s. Já a velocidade média analítica, obtida em (III.48), vale, nesse caso, 0,1183 m/s. A solução numérica, obtida computacionalmente foi de 0,1179 m/s. Assim, as velocidades analítica e numérica ficaram muito próximas tanto para o caso analítico quanto para o caso numérico.

Aplicando as considerações feitas para a solução analítica, chegou-se a um fluxo de 0,2789 m<sup>3</sup>/s. Utilizando o resultado em elementos finitos e o método da quadratura de Gauss, porém, foi obtido um fluxo total de 0,2778 m<sup>3</sup>/s. Este erro é o maior dos três casos analisados e, mesmo assim, equivale a apenas 0,4% da solução real. Como este foi o caso com o erro mais elevado, decidiu-se por refinar a malha, diminuindo o tamanho máximo do elemento pela metade. A malha resultante pode ser vista na Figura (3.10).

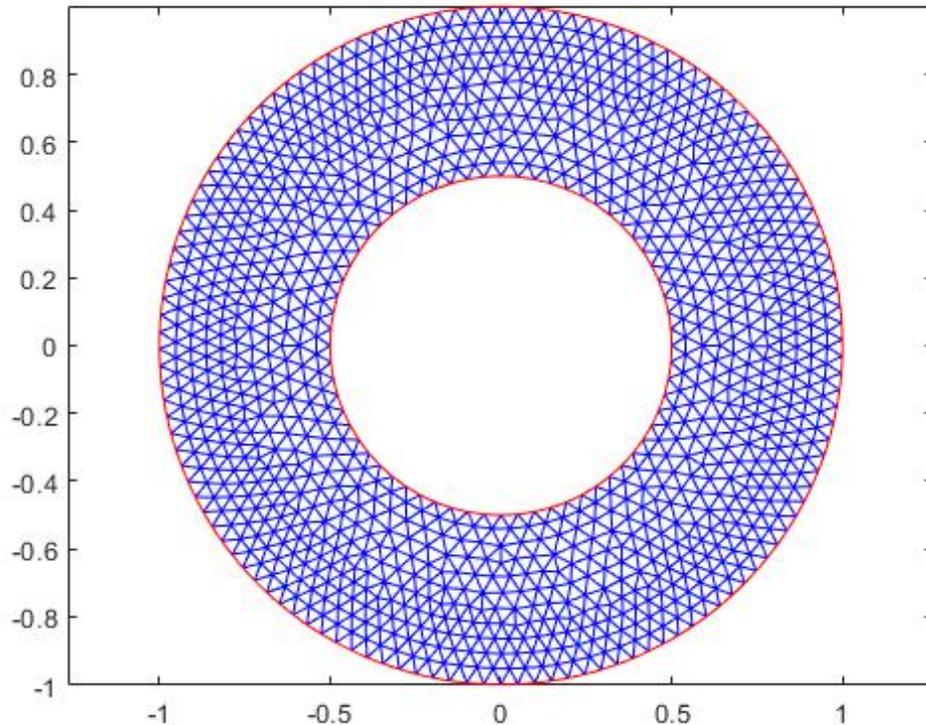


Figura 3.10: Nova malha de elementos finitos.

Para esta nova malha, o fluxo obtido foi de  $0,2786 \text{ m}^3/\text{s}$ . Desta forma, diminuindo o tamanho máximo do elemento pela metade, o erro absoluto no fluxo caiu de  $0,0011 \text{ m}^3/\text{s}$  para  $0,0003 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Em todos os casos, os resultados numéricos foram muito próximos dos analíticos, assegurando o funcionamento da ferramenta de elementos finitos. Além disso, todos os resultados foram obtidos para malhas pouco refinadas e, com um pouco mais de esforço computacional, foi possível refinar as soluções para que estas ficassem ainda mais próximas das soluções analíticas.

### 3.5.4 Escoamento Torcional

#### 3.5.4.1 Cilindro Interior Parado

O próximo caso analisado será o escoamento torcional entre dois cilindros. Estudaremos, primeiro, o caso específico em que o cilindro externo possui uma velocidade não nula, enquanto o cilindro interno está em repouso. A equação que rege o movimento do fluido pode ser vista na equação (III.69). Desta forma, o coeficiente  $f$  da equação (3.39), que varia em cada caso, será nulo.

Para esta comparação, consideraremos o raio externo igual a 1 m e o raio interno com metade do tamanho. Além disso, o cilindro externo possuirá uma velocidade linear de 10 m/s. As condições de contorno serão o não deslizamento nas paredes externa e interna. Matematicamente,

temos que

$$u = 0 \quad \text{em} \quad r = 0,5 \text{ m} \quad (3.45)$$

e

$$u = 10 \text{ m/s} \quad \text{em} \quad r = 1 \text{ m}. \quad (3.46)$$

Para a resolução computacional, usaremos uma malha com tamanho menor que as anteriores, de forma a verificar que o programa também funciona adequadamente para outros tamanhos de elementos. O tamanho máximo de elemento será, então, de 0,05 m. A malha resultante obtida pode ser vista na Figura 3.11.

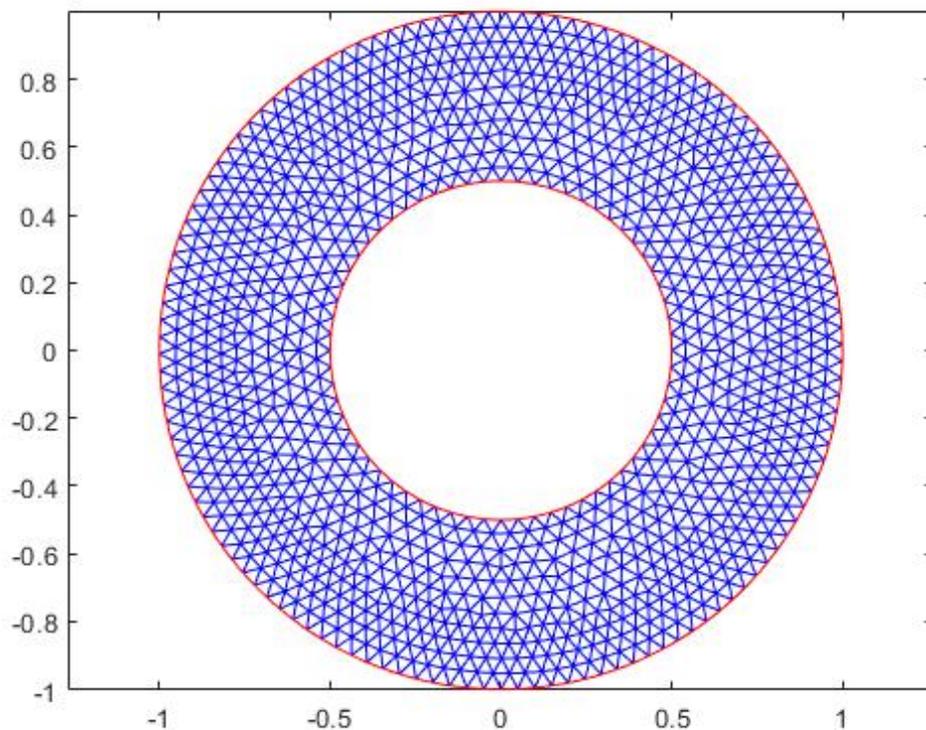


Figura 3.11: Malha de elementos finitos resultante.

Resolveu-se, então, as equações governantes computacionalmente e o resultado obtido foi comparado com o resultado analítico obtido anteriormente. Os gráficos podem ser vistos na Figura (3.12).

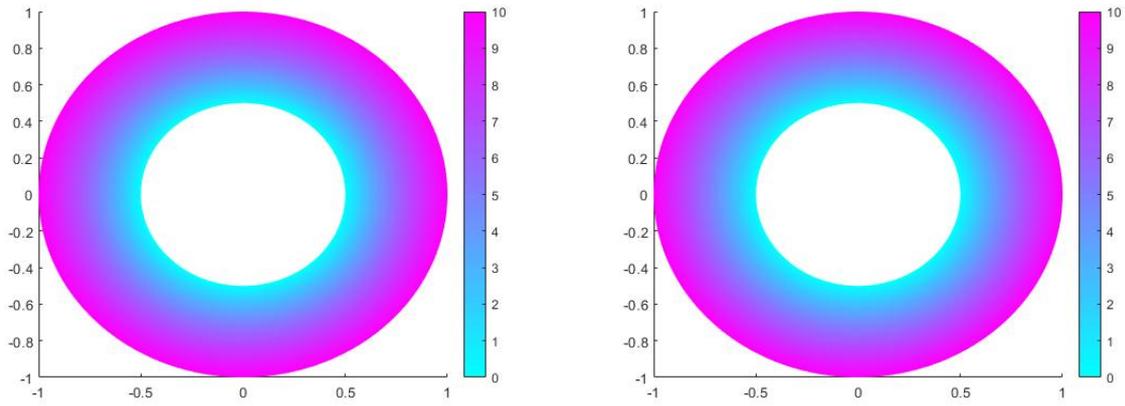


Figura 3.12: Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita).

Mais uma vez, a diferença visual entre os dois casos é imperceptível. Em seguida, foi feito um gráfico do erro, com o objetivo de analisar a ordem de grandeza deste, assim como sua localização. Este gráfico pode ser visto na Figura 3.13.

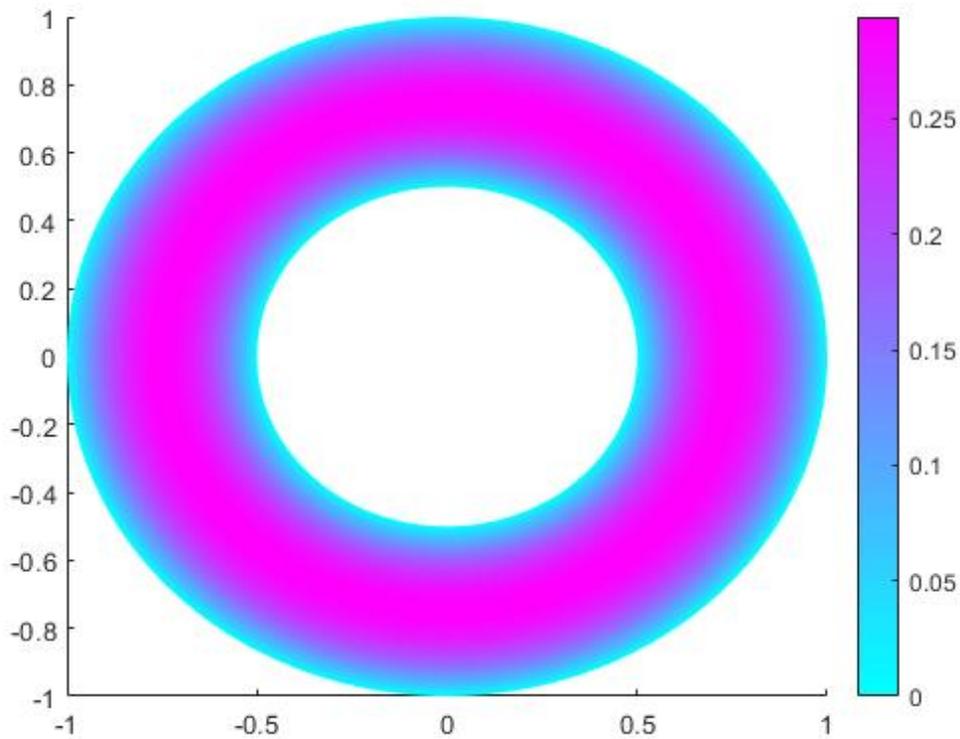


Figura 3.13: Erro absoluto numérico obtido.

Desta forma, conclui-se que o erro absoluto é maior na região central e, ainda assim seu valor é de cerca de 0,25 m/s, que é um valor baixo comparado à velocidade máxima de 10 m/s.

### 3.5.4.2 Cilindros com Mesma Velocidade

Em seguida, foi analisado o caso em que os cilindros interno e externo possuem a mesma velocidade angular de 10 rad/s. A expressão analítica para o perfil de velocidades foi determinada na equação (III.72). Usou-se uma malha exatamente igual à usada no caso anterior, dado que a geometria é idêntica. Os gráficos para os perfis de velocidade analítico e numérico podem ser vistos na Figura 3.14.

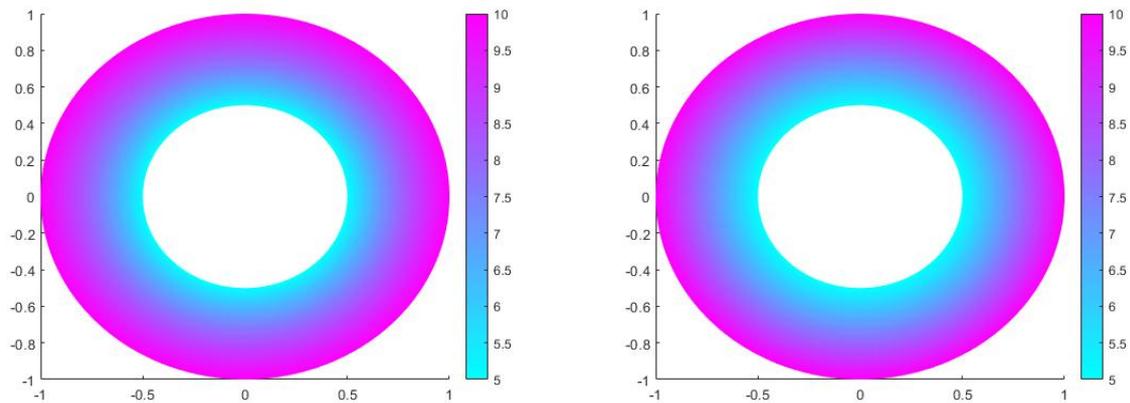


Figura 3.14: Resultado numérico obtido (esquerda) e resultado analítico (direita).

Os perfis de velocidade são, mais uma vez, bem parecidos visualmente. Percebe-se, também, que as velocidades máxima e mínima estão localizadas na mesma região, além da distribuição de velocidades ser praticamente linear, que foi exatamente o resultado obtido para a solução analítica.

## 4 RESULTADOS

Com o funcionamento do código desenvolvido validado foi possível obter os resultados desejados. Como foi estipulado, resolveremos o escoamento em uma cascata em uma parede inclinada sob ação da gravidade para diferentes ângulos de contato entre o fluido e a parede e diferentes inclinações do substrato. A equação governante do problema foi obtida em (2.26) e é

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = -1. \quad (4.1)$$

As condições de contorno, definidas em (2.27) e (2.28) são

$$u^* = 0 \quad \text{em} \quad z^* = 0 \quad (4.2)$$

e

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = h^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad \text{em} \quad z^* = h^*, \quad (4.3)$$

além da condição de simetria, que pode ser expressa por

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em} \quad y^* = 0. \quad (4.4)$$

### 4.1 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES COMPUTACIONAIS

Em seguida, será necessário definir os coeficientes apropriados para a equação geral do método numérico. Esta equação, mostrada em (3.35), é

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f. \quad (4.5)$$

Comparando com a equação obtida em (4.1), conclui-se que os coeficientes apropriados serão  $m = d = a = 0$  e  $c = f = 1$ .

Os coeficientes de cada uma das condições de contorno serão analisadas individualmente. Primeiro, temos que a condição de não deslizamento é uma condição do tipo Dirichlet. A equação geral para este tipo de condição de contorno é

$$hu = r. \quad (4.6)$$

Comparando com a equação (4.2), conclui-se que os coeficientes valem  $h = 1$  e  $r = 0$ . Já as condições de simetria e dinâmica são do tipo Neumann. A equação geral para este tipo de

condição de contorno é

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u) + qu = g. \quad (4.7)$$

Em  $y = 0$ , onde há a condição de simetria, o vetor normal unitário é, simplesmente,

$$\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{e}}_y. \quad (4.8)$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{n} \cdot \nabla u = 0. \quad (4.9)$$

Desta forma, os coeficientes apropriados para a equação (4.7) são  $q = g = 0$  e  $c = 1$ .

A condição dinâmica, por outro lado, é válida na superfície livre  $z = h$ . Na equação (2.15), foi obtido que o vetor normal, nesta superfície, é

$$\mathbf{n} = \frac{-h' \hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{1 + h'^2}} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{1 + h'^2}}. \quad (4.10)$$

Fazendo o produto escalar deste vetor normal com o gradiente da velocidade, chegamos a

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = \frac{-h'}{\sqrt{1 + h'^2}} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\sqrt{1 + h'^2}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}. \quad (4.11)$$

Comparando as equações (4.3) e (4.11), conclui-se que esta equação também pode ser escrita por

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = 0. \quad (4.12)$$

Os coeficientes para a condição dinâmica são, então, idênticos aos obtidos para a equação de simetria, isto é,  $q = g = 0$  e  $c = 1$ .

## 4.2 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

O perfil da superfície livre para uma parede inclinada foi obtido, de forma paramétrica, nas equações (2.62) e (2.82). Foi desenvolvido, então, um código que calcula o perfil da superfície livre para diferentes valores do ângulo de contato  $\beta$  e da constante  $\lambda$ , que depende das propriedades do fluido, da inclinação da parede e do local onde está ocorrendo o escoamento. O código tem como entrada o ângulo de contato entre o fluido e a parede e o parâmetro  $\lambda$ . Em seguida, este cria um vetor contendo diversos ângulos entre 0, local onde há o eixo de simetria, e o ângulo de contato, onde está localizada a parede. Aplica-se, então, cada um destes valores nas equações (2.62) e (2.82) e, usando a função preexistente para as duas integrais elípticas, o código obtém as coordenadas  $\eta$  e  $\zeta$  da superfície livre.

Para validar os resultados obtidos, foi usado o resultado obtido por Perazzo e Gratton (2004), em que avaliou-se a área da seção transversal, o fluxo e a velocidade média do fluido para diferen-

tes valores de ângulo de contato e de  $\lambda$ . Para esta análise, assim como as posteriores nesta seção de comparação com os resultados da literatura, será usada uma malha de elementos finitos com especificação do tamanho máximo do elemento igual a 0,01. Os resultados obtidos neste trabalho e na literatura podem ser vistos nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

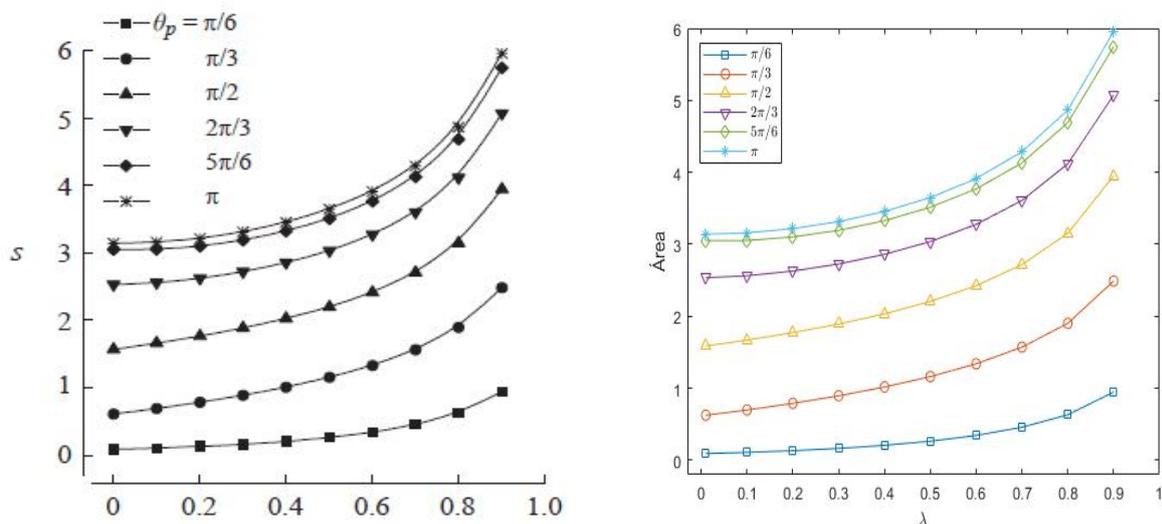


Figura 4.1: Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para a área da seção transversal.

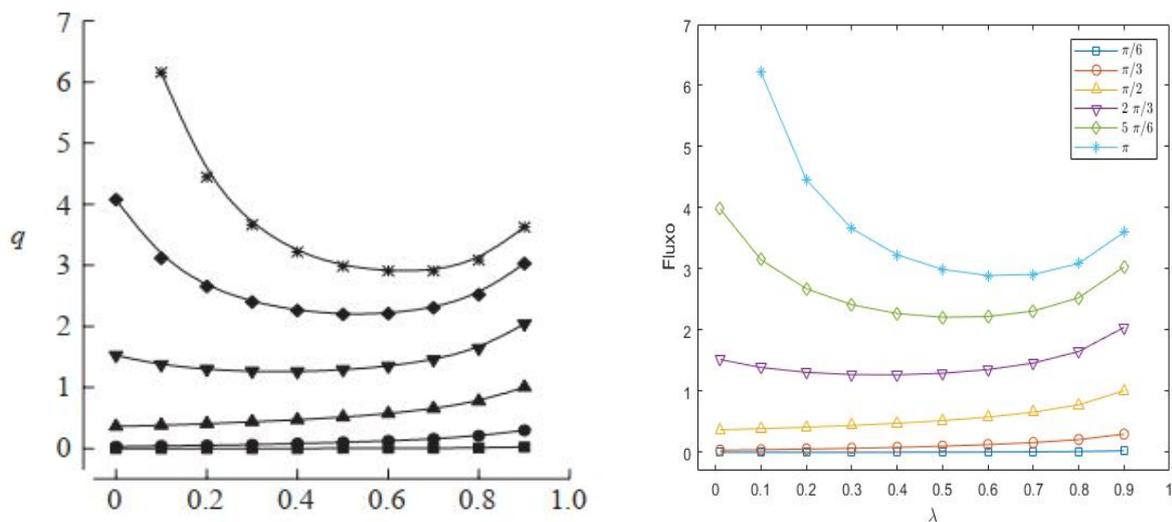


Figura 4.2: Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para o fluxo pela seção transversal.

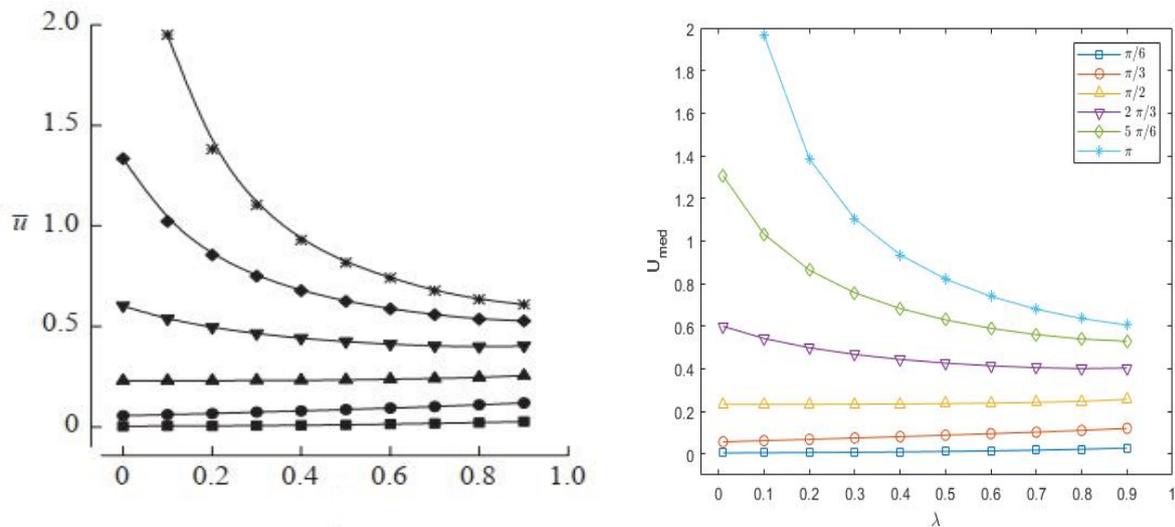


Figura 4.3: Resultado obtido por Perazzo e Gratton (esquerda) e resultado obtido no programa desenvolvido (direita) para a velocidade média.

Percebe-se que todos os resultados obtidos são bastante parecidos com aqueles desenvolvidos na literatura, de forma que o programa desenvolvido é capaz de realizar os cálculos desejados apropriadamente.

Foi possível também conferir os resultados obtidos comparando os valores numéricos com valores do fluxo e da velocidade máxima analíticos obtidos por Perazzo e Gratton (2004) para o ângulo de  $90^\circ$ . Estes valores foram mostrados na seção de resultados analíticos da formulação matemática. O fluxo obtido foi de aproximadamente 0,3616, enquanto a velocidade máxima adimensional foi de 0,4014. Numericamente, nosso trabalho obteve um fluxo de 0,1806 para metade da seção, o que equivale a um fluxo total de 0,3612. O erro absoluto é, então, de apenas 0,0004, enquanto o relativo vale 0,1%. Para a velocidade máxima, temos que o resultado obtido numericamente foi de 0,4012. O erro absoluto neste caso é de 0,0002, enquanto o relativo é de 0,04%. Novamente, o resultado numérico é bastante semelhante ao resultado analítico.

Uma última comparação foi feita avaliando o fluxo e a velocidade média para o  $\lambda = 0,8$  e  $\beta = 30^\circ$ . Os resultados obtidos de forma exata e os obtidos a partir do código desenvolvido para diferentes números de elementos podem ser vistos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação entre o resultado exato obtido da literatura e os resultados numéricos para diferentes malhas.

	Tamanho máximo de elemento	Número de elementos	$s$	$q$	$\bar{u}$
Solução Exata			0,6314	0,0136	0,0216
Soluções Numéricas	0,5	64	0,6315	0,0132	0,0209
	0,1	150	0,6315	0,0136	0,0215
	0,05	359	0,6315	0,0136	0,0216
	0,01	7281	0,6315	0,0136	0,0216

É possível perceber que, até para uma malha com baixo número de elementos, os resultados já são consideravelmente próximos da solução exata. O refinamento da malha, porém, continua a melhorar os resultados. Para uma malha de tamanho máximo de 0,05, a velocidade média já possui seu erro na quinta casa decimal, o que é muito baixo para este problema.

### 4.3 ESPECIFICAÇÃO DA MALHA

O passo seguinte foi definir o tamanho da malha apropriado para resolver o problema desejado. Para isto, foi feito um estudo de convergência de malha. Este estudo foi desenvolvido resolvendo o perfil de velocidades e, em seguida, o fluxo para o caso simples em que a parede é vertical e o ângulo de contato entre esta e o fluido é igual a  $90^\circ$ . O perfil de velocidades para este caso é simplesmente um semicírculo, facilitando a resolução do problema.

O tamanho máximo do elemento, parâmetro que define o refinamento da malha, foi variado entre 0,1 e 0,0045 em intervalos de 0,0005. Como, para este caso, há uma solução analítica obtida por Perazzo e Gratton (2004), é possível avaliar o erro absoluto da solução numérica. Foi feito, então, um gráfico do erro obtido como função do número de elementos da malha. Este gráfico pode ser visto na Figura 4.4.

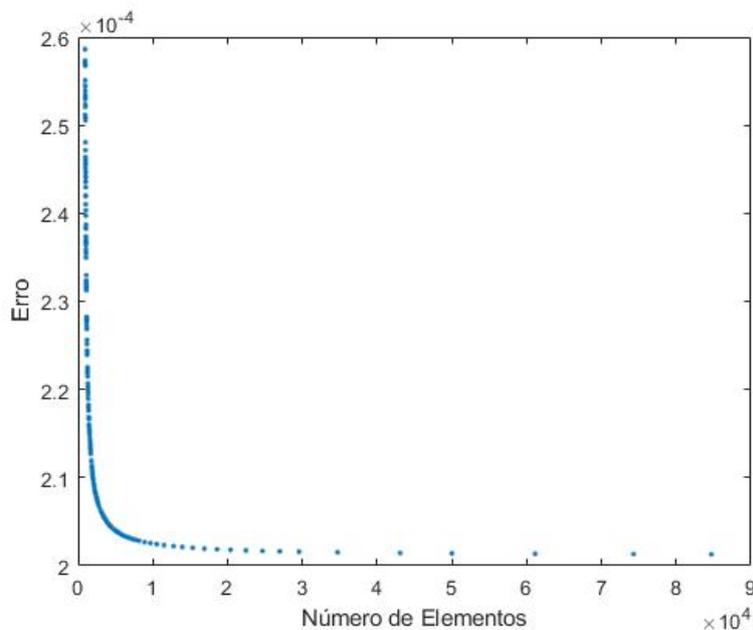


Figura 4.4: Erro numérico obtido como função do número de pontos

Para todos os valores avaliados o erro é suficientemente baixo, da ordem de  $10^{-4}$ . Escolheu-se, então, um tamanho máximo de elemento de 0,01, que gera uma malha de 18600 elementos. É possível perceber que este valor já está na região de convergência do método, de forma que não haverá problemas relativos à malha.

Avaliou-se, também, a ordem de convergência do método. Para isto, primeiramente, tomou-se o inverso do número de elementos, que equivale a um tamanho característico da malha. Em seguida, foi feito um gráfico do erro em função do tamanho característico com ambos os eixos logarítmicos.

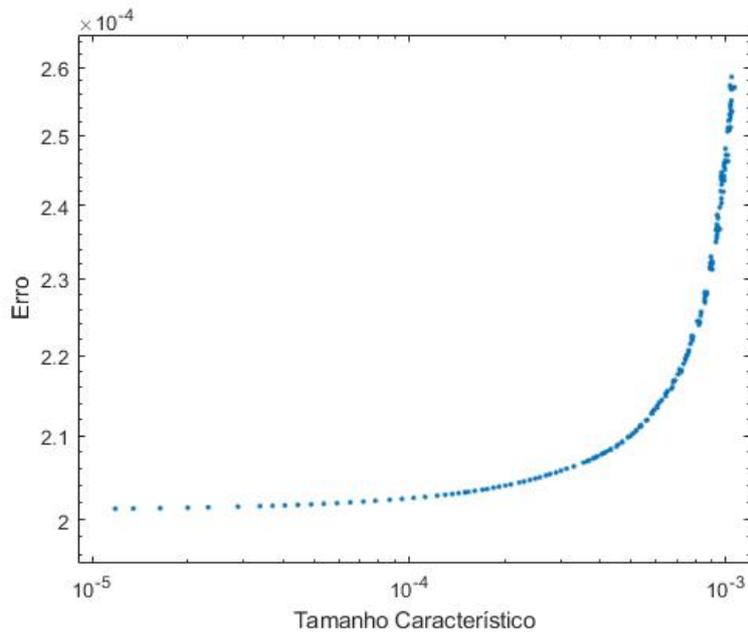


Figura 4.5: Logaritmo do erro numérico como função do logaritmo do tamanho característico.

Por fim, foi feita uma regressão linear pelo método dos mínimos quadrados na região aproximadamente linear do gráfico logarítmico, que ocorre para baixos tamanhos característicos. O coeficiente angular obtido foi de 1,00, ou seja, a convergência do método é de primeira ordem.

Com o objetivo de comparar visualmente malhas com diferentes tamanhos máximos de elemento, foi criada a malha para três tamanhos distintos: 0,01, 0,05 e 0,1. O caso analisado será aquele em que o ângulo de contato é de  $150^\circ$  e o parâmetro  $\lambda$  vale 0,9. Todas as malhas serão geradas usando uma biblioteca pronta do MATLAB. As malhas podem ser vistas nas figuras (4.6) e (4.7).

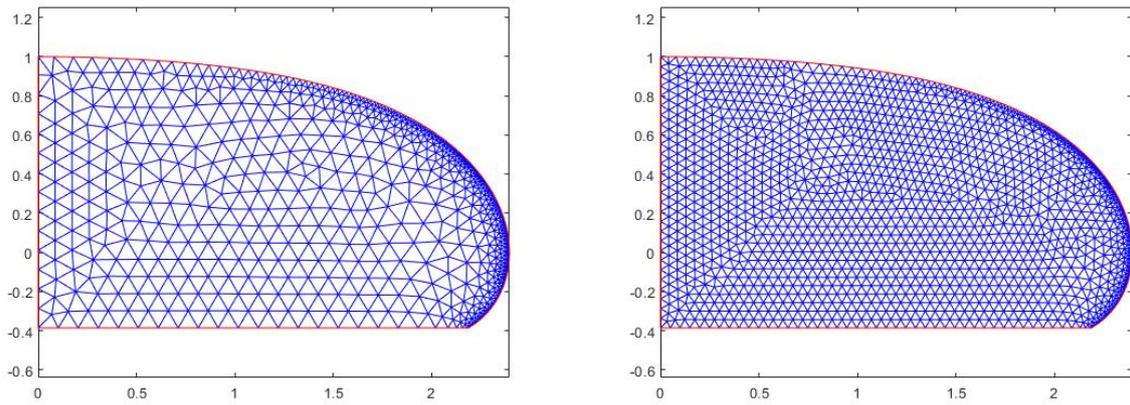


Figura 4.6: À esquerda, há a malha obtida para tamanho máximo de elemento de 0,1. Foram obtidos 1570 elementos. À direita, está mostrada a malha com tamanho máximo de 0,05. Nesta malha há 3382 elementos.

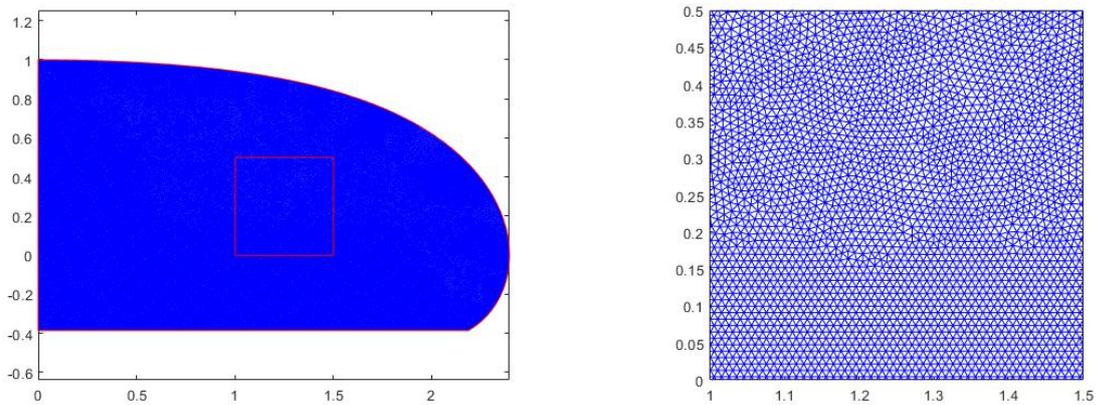


Figura 4.7: Malha resultante de uma discretização com tamanho máximo de elemento de 0,01 (esquerda). Nesta figura, há 65011 elementos. Esta foi a malha usada no estudo. À direita, está uma visão aproximada do quadrado representado mostrado.

#### 4.4 PERFIL DE VELOCIDADES NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Com as equações, condições de contorno e tamanho de malha definidos, optou-se por calcular o perfil de velocidades resultante para alguns ângulos de molhamento e ângulos da parede específicos. Para uma visualização completa do problema, escolheu-se usar um ângulo de  $30^\circ$ , em que o fluido molha a parede, um ângulo de  $150^\circ$ , em que o fluido não molha a parede, e um ângulo  $90^\circ$ , que representa um caso intermediário. Cada caso será avaliado para  $\lambda = 0, 1$ ,  $\lambda = 0, 5$  e  $\lambda = 0, 9$ .

#### 4.4.1 Parede Vertical

Os perfil de velocidades obtido para uma parede vertical podem ser vistos na Figura 4.8. Vale ressaltar que, para a análise dos perfis em uma parede vertical manteve-se a região de contato entre o fluido e a parede constante para os três casos.

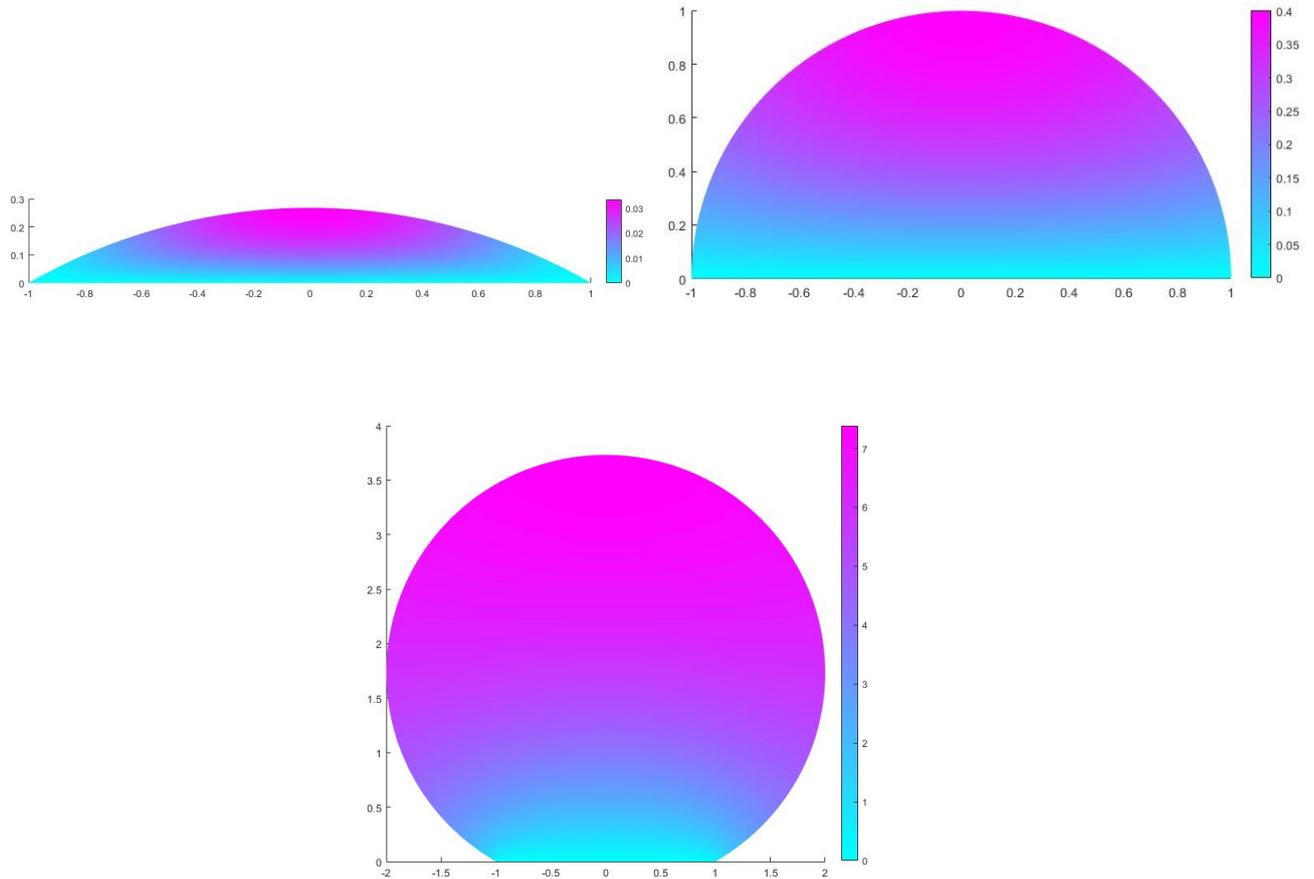


Figura 4.8: Perfil da velocidade para os ângulos de 30° (superior esquerdo), 90° (superior direito) e 150° (inferior).

Nesta imagem, é possível visualizar a distribuição de velocidade ao longo desta seção transversal para cada um dos casos. É possível perceber que nos três casos a velocidade é máxima no ponto de maior altura e mínima na parede, devido à condição de não deslizamento.

Percebe-se que o aumento do ângulo de contato permite um aumento da velocidade máxima do escoamento. Isto ocorre devido à maior distância da região em que há o não deslizamento, permitindo que haja um aumento nas velocidades.

#### 4.4.2 Parede inclinada: $\lambda = 0, 1$

Em seguida, foi feita uma análise semelhante para a parede inclinada com  $\lambda = 0, 1$ . Para todas as análises em paredes inclinadas, diferentemente do caso anterior, será mantida a distância entre

o plano de referência e o ponto de máxima altura sendo unitária. O perfil de velocidades obtido pode ser visto na Figura 4.9.

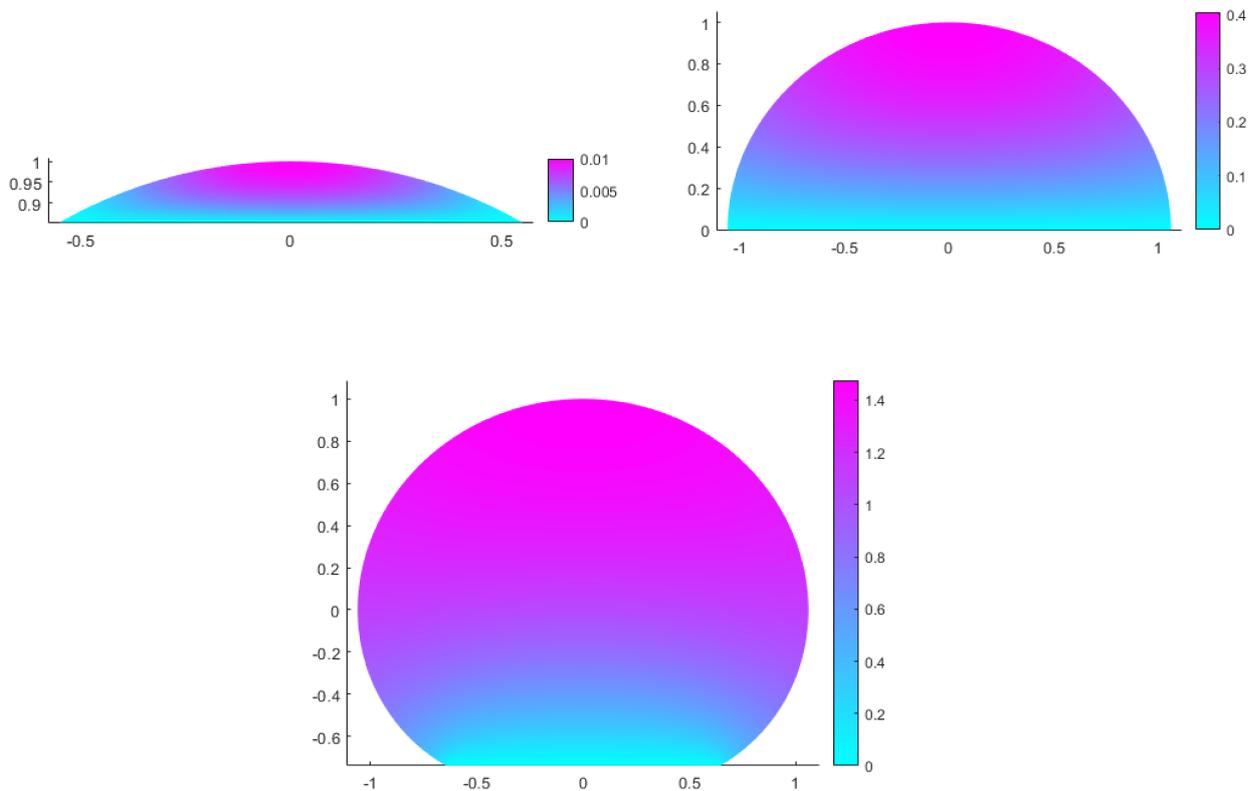


Figura 4.9: Perfil da velocidade para os ângulos de  $30^\circ$  (superior esquerdo),  $90^\circ$  (superior direito) e  $150^\circ$  (inferior) para  $\lambda = 0, 1$ .

O resultado obtido é muito semelhante àquele obtido para uma parede vertical, exceto pela escala de velocidades. Há uma discrepância muito significativa para esta devido ao diferente parâmetro escolhido constante em cada caso.

Novamente, o aumento do ângulo de contato causou um crescimento do valor da velocidade máxima, que está novamente localizada no ponto de maior altura.

#### 4.4.3 Parede inclinada: $\lambda = 0, 5$

Repetiu-se a análise para  $\lambda = 0, 5$ . O perfil de velocidades obtido pode ser visto na Figura 4.10.

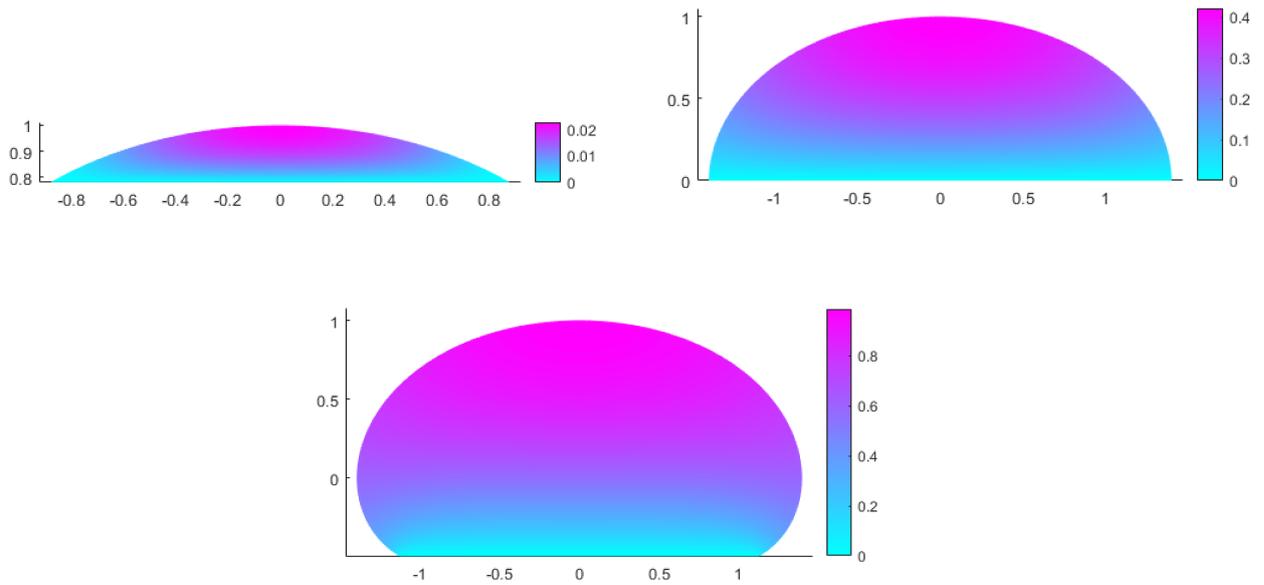


Figura 4.10: Perfil da velocidade para os ângulos de  $30^\circ$  (superior esquerdo),  $90^\circ$  (superior direito) e  $150^\circ$  (inferior) para uma parede com  $\lambda = 0,5$ .

Para este caso, em comparação com o resultado obtido para  $\lambda = 0,1$ , percebe-se que, para o ângulo de contato de  $30^\circ$ , a escala de velocidades é maior para este caso. Para o ângulo de contato de  $90^\circ$ , a escala é semelhante para ambos os casos. Por fim, para o maior ângulo estudado, este caso atual possui uma menor escala que a do caso anterior. Além disso, neste caso o perfil da superfície livre já é visualmente bem diferente de um círculo.

#### 4.4.4 Parede inclinada: $\lambda = 0,9$

O último caso analisado foi para uma parede com  $\lambda = 0,9$ . O perfil de velocidades resultante está mostrado na Figura 4.11.

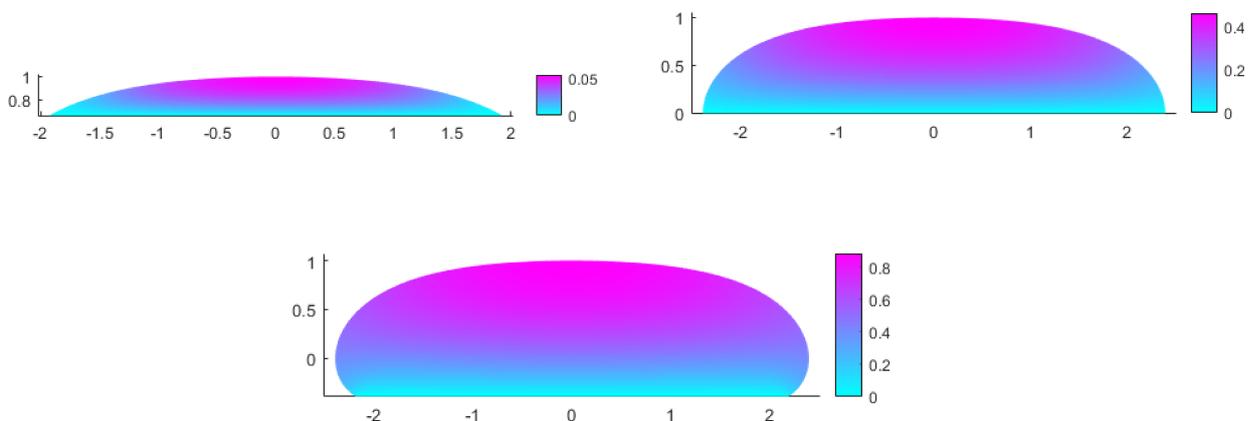


Figura 4.11: Perfil da velocidade para os ângulos de  $30^\circ$  (superior esquerdo),  $90^\circ$  (superior direito) e  $150^\circ$  (inferior) para uma parede com  $\lambda = 0,9$ .

Neste caso, o perfil da superfície livre é consideravelmente mais achatado. Percebe-se, novamente, que a escala de velocidades, em comparação com os casos anteriores é maior para o menor ângulo, semelhante para o ângulo intermediário e menor para o ângulo mais alto.

## **4.5 PROPRIEDADES DO ESCOAMENTO EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE CONTATO**

Por fim, buscaremos o efeito do ângulo de contato em algumas propriedades do escoamento. A primeira propriedade escolhida para se obter foi o fluxo pela seção transversal. Este fluxo foi calculado por uma integração numérica pelo método da quadratura de Gauss, já explicado anteriormente. O fluxo é de grande interesse pois determina a vazão de fluido necessária para que o escoamento seja possível. A segunda propriedade de interesse é a área da seção transversal, que é definida pelo perfil da superfície livre. Também determinou-se a velocidade média, que pode ser calculada simplesmente pela razão entre o fluxo e a área de seção transversal, ambos já determinados. A última propriedade é a velocidade máxima da seção, que pode ser determinada diretamente a partir do perfil de velocidades resultante.

### **4.5.1 Parede vertical**

Para fazer estes cálculos, definiu-se um ângulo de molhamento inicial muito baixo, de  $1^\circ$ , e, para este valor, resolveu-se o escoamento. Com os valores obtidos, foram calculadas as propriedades de interesse. Em seguida, aumentou-se o ângulo de contato em  $3^\circ$  e repetiu-se o processo. Foi preciso, porém, estipular um valor máximo para o fluxo após o qual o programa seria interrompido, dado que o fluxo diverge para um ângulo de contato de  $180^\circ$ . Desta forma, à medida que o ângulo aumenta, o fluxo cresce cada vez mais até que ocorra uma falha computacional. Optou-se então por repetir esta análise até que o fluxo ultrapassasse 10. O ângulo para o qual o fluxo obtido ultrapassou o limite foi o de  $140,97^\circ$ . Para se ter uma ideia do rápido crescimento do fluxo, para um ângulo de  $156,7^\circ$ , o fluxo cresce para 101,24. Aumentando o ângulo para  $160^\circ$ , o fluxo alcança o valor de 201,78. Vale notar que, como a condição de simetria está sendo usada, a área e o fluxo são apenas para metade do perfil, de forma que, para obter os valores para o perfil completo, seria necessário multiplicar os resultados obtidos por 2. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15.

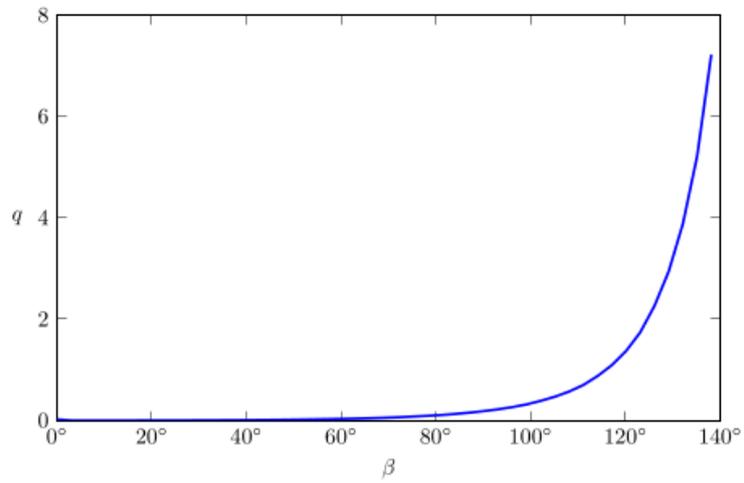


Figura 4.12: Fluxo obtido em função do ângulo de molhamento.

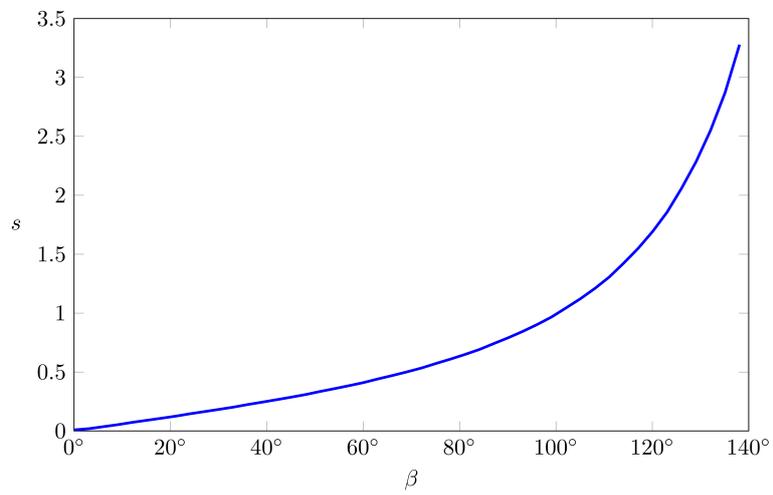


Figura 4.13: Área da seção transversal em função do ângulo de contato.

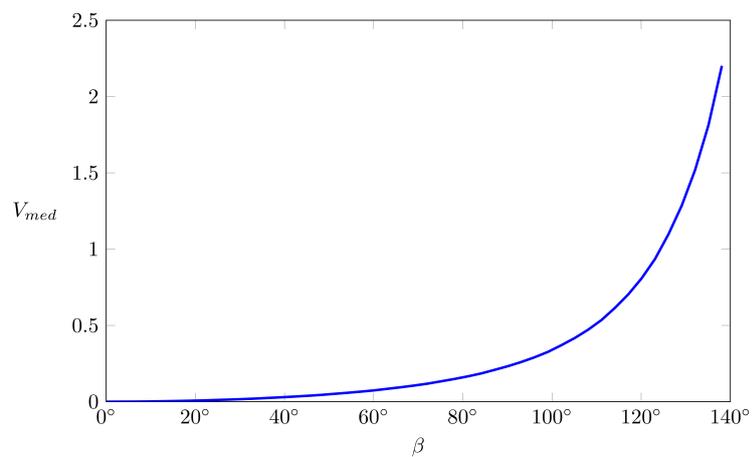


Figura 4.14: Velocidade média em função do ângulo de molhamento.

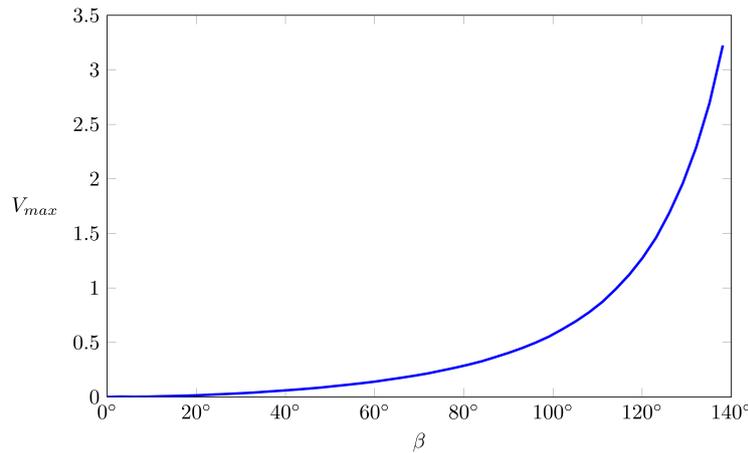


Figura 4.15: Velocidade máxima em função do ângulo de contato.

Verifica-se que, como esperado, todos os valores crescem com o aumento do ângulo de molhamento. O fluxo, porém, é o que cresce mais rapidamente, atingindo valores muito mais altos que as outras propriedades. A área possui o crescimento menos acentuado de todas as propriedades, com a região de baixos ângulos podendo ser aproximada por uma reta. A velocidade média e a velocidade máxima possuem perfis razoavelmente similares. A velocidade máxima, como é de se esperar para um perfil de velocidades não uniforme, é sempre maior que a velocidade média.

Vale ressaltar, por fim, que todas estas propriedades divergiriam para um ângulo de contato de  $180^\circ$ , o que é fisicamente coerente devido à formulação do problema. Para a parede vertical, estipulou-se que o comprimento de contato entre o fluido e a parede era constante independente do ângulo de contato. Desta forma, a medida que o ângulo de contato cresce, cresce também o raio da seção circular que representa a superfície livre. Para o ângulo de contato de  $180^\circ$ , a região de contato seria apenas pontual mas, como foi estipulado que a região de contato deveria ter um comprimento não nulo, a superfície livre deveria ter um raio infinito. Desta forma, apesar de todas as propriedades divergirem para este ângulo, o resultado é fisicamente coerente.

#### 4.5.2 Parede inclinada

Em seguida, verificou-se o efeito do ângulo de contato nas propriedades do escoamento para três paredes com diferentes inclinações. Serão analisadas as paredes com  $\lambda = 0,1$ ,  $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 0,9$ . Aqui há uma mudança no parâmetro que será mantido constante. Nesta e nas análises subsequentes a distância entre o ponto de máxima altura e o eixo de referência será fixada em 1. Isto impede que ocorram problemas para altos ângulos de contato, dado que a superfície livre está limitada por um círculo de raio unitário. Os gráficos para as propriedades escolhidas podem ser vistos nas Figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19.

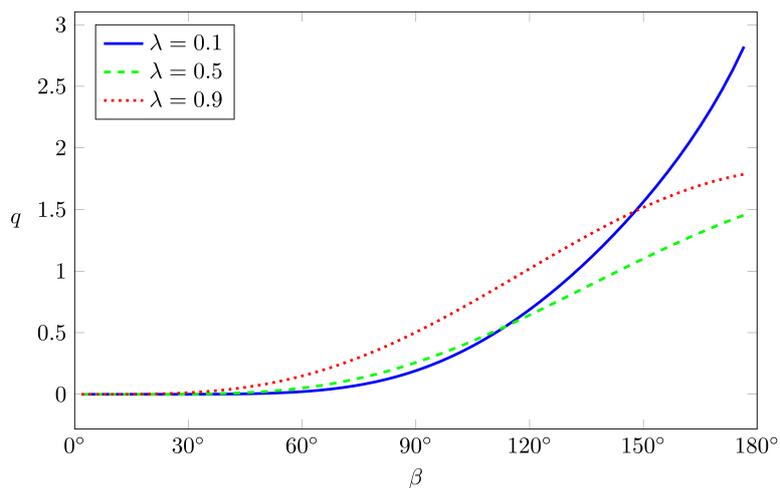


Figura 4.16: Fluxo obtido em função do ângulo de molhamento para as paredes inclinadas.

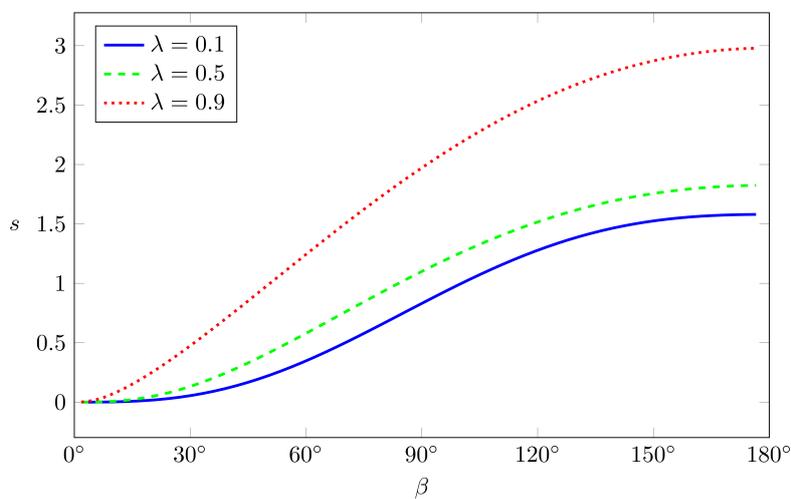


Figura 4.17: Área da seção transversal em função do ângulo de contato para as paredes inclinadas.

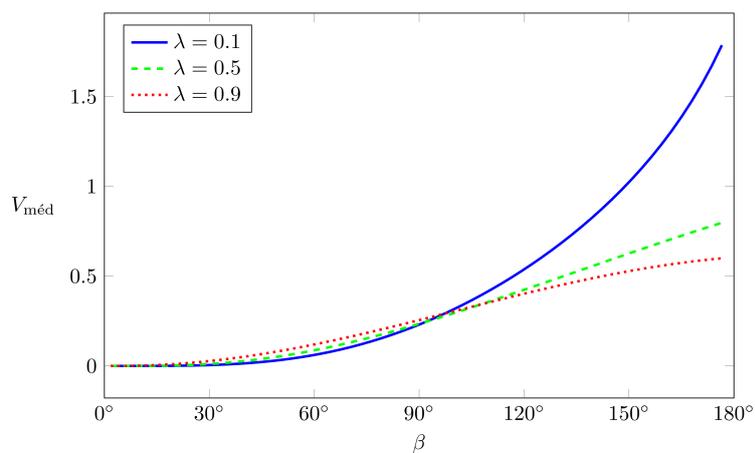


Figura 4.18: Velocidade média em função do ângulo de molhamento para as paredes inclinadas.

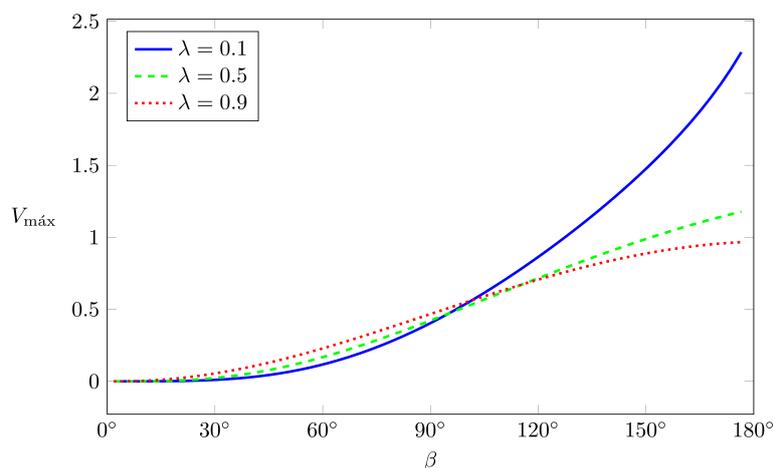


Figura 4.19: Velocidade máxima em função do ângulo de contato para as paredes inclinadas.

Os resultados, principalmente para o fluxo, são inicialmente contraintuitivos. Afinal, esperaria-se que o fluxo fosse menor para algum dos casos extremos ( $\lambda = 0, 1$  ou  $\lambda = 0, 9$ ). Entretanto, o que se verifica é que o menor fluxo para ângulos acima de aproximadamente  $120^\circ$  é o caso em que  $\lambda = 0, 5$ . Além disso, os fluxos se cruzam diversas vezes, dificultando a compreensão do fenômeno. Este gráfico pode ser explicado, porém, considerando que o fluxo pode ser calculado como um produto entre a área e a velocidade média.

A área é sempre maior para  $\lambda$  maior. A velocidade média, porém, começa maior para altos valores de  $\lambda$  mas, para ângulos de contato acima de cerca de  $95^\circ$ , este padrão se inverte, com menores  $\lambda$  alcançando maiores velocidades. Isto ocorre pois, como dito, os casos com baixo  $\lambda$  tem uma área menor, dificultando o desenvolvimento da velocidade e diminuindo a média desta. Para estes casos, porém, a componente da gravidade que atua na direção do escoamento é maior, de forma que, em algum ponto, a gravidade adicional compensa a menor área, permitindo um aumento da velocidade para altos ângulos.

Assim, o gráfico do fluxo representa a junção destes fatores: a área é sempre maior para maiores  $\lambda$  e a velocidade média tem diferentes perfis dependendo do ângulo de contato. Para baixos ângulos, a velocidade média também aumenta com o aumento de  $\lambda$ . Para altos ângulos, o padrão se inverte e o caso com  $\lambda$  alto alcança uma velocidade média muito maior, alcançando, também, o maior fluxo.

Já a velocidade máxima, única propriedade ainda não analisada, possui um comportamento muito semelhante ao da velocidade média, dado que estes dois estão intrinsecamente ligados.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou resolver numericamente o escoamento em cascata em paredes inclinadas sob ação da gravidade para diferentes ângulos de contato. Este fenômeno físico possui aplicações muito comuns ao dia a dia, como o escoamento de uma gota sobre um vidro e o escoamento de tintas em uma tela. Este tipo de trabalho também pode ser usado para modelar o escoamento de lava em uma montanha, de forma que seja possível projetar um anteparo que proteja uma região específica contendo uma cidade, por exemplo. Outras aplicações mostradas incluem escoamentos multifásicos em tubo, vibração de cabos sustentadores por ação do vento e da chuva e o surgimento de microbolhas em tubos.

Para realizar este estudo, optou-se por utilizar o software MATLAB, e, em específico, a biblioteca Partial Differential Equation Toolbox. Esta biblioteca resolve equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos. Ela abrange todos os tipos de problema que se desejava estudar, de forma que seu uso trouxe muitos benefícios ao trabalho. O primeiro passo para utilizar esta biblioteca, porém, foi fazer um estudo do funcionamento desta, validando os resultados retornados. Para isto, foi usada uma classe de problemas com solução analítica conhecida, os escoamentos axissimétricos em tubos.

Diversas variações dos escoamentos axissimétricos foram resolvidas numericamente utilizando a biblioteca citada. Os resultados numérico e analítico foram, então, comparados. Concluiu-se que a solução numérica e a analítica são muito semelhantes para todos os casos estudados. Uma das propriedades comparadas foi o fluxo, que é uma propriedade integral e, para isso, foi desenvolvido um código próprio que realizava uma integração numérica pelo método da quadratura de Gauss. Buscando complementar a validação, foi resolvido numericamente um escoamento em cascata com solução analítica desenvolvida por Perazzo e Gratton (2004). Mais uma vez, o resultado numérico foi significativamente próximo do resultado exato.

Com o programa devidamente validado, partiu-se para os resultados dos escoamentos em paredes inclinadas sobre ação da gravidade, que era o objetivo principal do trabalho. Inicialmente, estudou-se a malha, de forma a obter um tamanho de malha adequado para o estudo desejado. Também verificou-se que a ordem do método é igual a 1. Com o programa validado e a malha especificada, resolveu-se o perfil de velocidade da superfície livre para ângulos de molhamento de 30°, 90° e 150°. Cada um destes casos foi analisado para uma parede vertical e para substratos com três inclinações distintas. Verificou-se, então, os efeitos dos diferentes formatos de superfície livre no escoamento. Além disso, verificou-se as diferentes escalas de velocidade, que foram melhor analisadas posteriormente.

Por fim, verificou-se os efeitos da inclinação da parede e do ângulo de contato do fluido em algumas propriedades características do escoamento. Assim, analisou-se o fluxo, a área da seção transversal, a velocidade média e a velocidade máxima para as paredes com as mesmas

inclinações estudadas na parte sobre o perfil de velocidade. Percebeu-se que paredes com maiores inclinações têm maiores áreas da seção transversal. A velocidade média, assim como a máxima são maiores para paredes com maiores inclinações para baixos ângulos, padrão este que se inverte para altos ângulos. Este fenômeno ocorre devido ao aumento da componente da gravidade na direção do escoamento, acelerando-o. Já o fluxo, por ser uma função da velocidade média e da área possui um comportamento mais complexo.

## 5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho foi capaz de fornecer um melhor entendimento da solução completa para o escoamento em paredes inclinadas de fluidos newtonianos de alta molhabilidade e baixa molhabilidade. Assim, os resultados obtidos podem ser utilizados como base para diferentes estudos sobre o escoamento em cascata.

Primeiramente, sugere-se o estudo de um escoamento semelhante para diferentes tipos de fluidos. Fluidos newtonianos ou magnéticos são relativamente comuns e já foram estudados, por exemplo, nos artigos de Rosenblat (1983), que analisa o escoamento em cascata de um fluido viscoelástico, Mukahal, Duffy e Wilson (2015), que estudam este problema para um fluido que segue uma lei de potência, e Mukahal, Duffy e Wilson (2018), que analisam a cascata para fluidos newtonianos generalizados como os de Carreau ou de Ellis. Já o trabalho de Reed e Molokov (2000) estuda o escoamento de um fluido magnético com diferentes campos magnéticos aplicados. A maioria destes trabalhos, porém, estuda o problema utilizando hipóteses simplificadoras. Além disso, é raro que estes trabalhos estudem casos que não há molhamento do substrato, ambos tópicos que foram abordados neste trabalho. Para aplicar estes fluidos no código desenvolvido é necessário alterar a condição de contorno dinâmica, considerando o tensor de tensões apropriado para o fluido estudado.

Trabalhos que estudam simplificações, como a hipótese da lubrificação ou resolvem o problema por similaridade também são sequências lógicas para este trabalho. Este tipo de estudo precisa de uma solução completa do problema, a fim de avaliar a acurácia dos modelos. Utilizando a solução numérica completa desenvolvida, esta comparação é simplificada. Alguns trabalhos nesta área foram desenvolvidos por Wilson e Burgess (1998), onde foi desenvolvida uma solução por similaridade para este escoamento, e Duffy e Moffatt (1995), que avaliaram o escoamento em cascata por meio da hipótese da lubrificação.

Uma última classe de trabalhos que poderia suceder este é a de estudos com pequenas alterações na formulação do problema. O trabalho de Alshaihi, Wilson e Duffy (2020), por exemplo, analisa o escoamento em um substrato escorregadio. Para analisar este caso a partir do código desenvolvido neste trabalho, basta trocar a condição de não deslizamento na parede por uma condição de deslizamento de Navier. Já o estudo desenvolvido por Duffy e Wilson (2003) adiciona um fluido cuja viscosidade depende da temperatura, associado a uma parede com uma diferença

de temperatura. Para este caso, seria necessário adicionar a equação da energia, de forma a deduzir a distribuição de temperaturas e resolver o escoamento. O trabalho de Sullivan, Wilson e Duffy (2008) estuda um escoamento com molhamento perfeito e sujeito a uma tensão cisalhante. Este último caso também consiste em uma alteração nas condições de contorno dinâmica devido ao efeito da tensão cisalhante no equilíbrio de tensões na superfície. Todos estes casos se beneficiariam de uma solução completa para validação e comparação. Esta solução pode ser facilmente obtida utilizando a biblioteca e os estudos apresentados neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKTERSHEV, S.; ALEKSEENKO, S.; BOBYLEV, A. Waves in a rivulet falling down an inclined cylinder. *AIChE J.*, Wiley Online Library, v. 67, n. 1, p. e17002, 2021.
- ALEKSEENKO, S.; AKTERSHEV, S.; BOBYLEV, A.; KHARLAMOV, S.; MARKOVICH, D. Nonlinear forced waves in a vertical rivulet flow. *J. Fluid Mech.*, Cambridge University Press, v. 770, p. 350, 2015.
- ALLEN, R. F.; BIGGIN, C. M. Longitudinal flow of a lenticular liquid filament down an inclined plane. *Phys. Fluids*, AIP, v. 17, n. 2, p. 287–291, 1974.
- ALSHAIKHI, A. S.; WILSON, S. K.; DUFFY, B. R. Rivulet flow down a slippery substrate. *Phys. Fluids*, AIP Publishing LLC, v. 32, n. 7, p. 072011, 2020.
- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. Finite elements, an introduction: Volume i. ., 258, p. 1981, 1981.
- BENTWICH, M.; GLASSER, D.; KERN, J.; WILLIAMS, D. Analysis of rectilinear rivulet flow. *AIChE J.*, Wiley Online Library, v. 22, n. 4, p. 772–779, 1976.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016.
- DUFFY, B.; MOFFATT, H. Flow of a viscous trickle on a slowly varying incline. *Chem. Eng. J.*, Elsevier, v. 60, n. 1-3, p. 141–146, 1995.
- DUFFY, B. R.; WILSON, S. K. A rivulet of perfectly wetting fluid with temperature-dependent viscosity draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 10, p. 3236–3239, 2003.
- HANCOCK, H. *Elliptic integrals*. 1. ed. Nabu Press, 2010. ISBN 9781177660815,1177660814. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=659447E80D334EEAD27B5EB073624134>>.
- HERRADA, M. A.; MOHAMED, A. S.; MONTANERO, J. M.; GAÑÁN-CALVO, A. Stability of a rivulet flowing in a microchannel. *Int. J. Multiph. Flow*, Elsevier, v. 69, p. 1–7, 2015.
- HINTON, E. M.; HOGG, A. J.; HUPPERT, H. E. Viscous free-surface flows past cylinders. *Phys. Rev. Fluids*, APS, v. 5, n. 8, p. 084101, 2020.
- HOLLAND, D.; DUFFY, B.; WILSON, S. Thermocapillary effects on a thin viscous rivulet draining steadily down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *J. Fluid Mech.*, v. 441, p. 195–221, 2001.
- KAHANER, D.; MOLER, C.; NASH, S. Numerical methods and software. *nms*, 1989.
- LABIB, M. E.; DUKHIN, S.; MURAWSKI, J.; TABANI, Y.; LAI, R. Surfactant influence on rivulet droplet flow in minitubes and capillaries and its downstream evolution. *Adv. Colloid Interface Sci.*, Elsevier, v. 166, n. 1-2, p. 60–86, 2011.
- MUKAHAL, F. A.; DUFFY, B.; WILSON, S. A rivulet of a power-law fluid with constant contact angle draining down a slowly varying substrate. *Phys. Fluids*, AIP Publishing LLC, v. 27, n. 5, p. 052101, 2015.
- MUKAHAL, F. H. H. A.; DUFFY, B. R.; WILSON, S. K. Rivulet flow of generalized newtonian fluids. *Phys. Rev. Fluids*, APS, v. 3, n. 8, p. 083302, 2018.

- PERAZZO, C. A.; GRATTON, J. Navier–Stokes solutions for parallel flow in rivulets on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, v. 507, p. 367–379, 2004.
- RAO, S. S. *The finite element method in engineering*. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2017.
- REED, C.; MOLOKOV, S. *Fully developed magnetohydrodynamic flow in a rivulet*. [S.l.], 2000.
- ROBERTSON, A.; TAYLOR, I.; WILSON, S.; DUFFY, B.; SULLIVAN, J. Numerical simulation of rivulet evolution on a horizontal cable subject to an external aerodynamic field. *J. Fluids Struct.*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 50–73, 2010.
- ROSENBLAT, S. Rivulet flow of a viscoelastic liquid. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 259–277, 1983.
- SULLIVAN, J. M.; WILSON, S. K.; DUFFY, B. R. A thin rivulet of perfectly wetting fluid subject to a longitudinal surface shear stress. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, OUP, v. 61, n. 1, p. 25–61, 2008.
- THE MATHWORKS, INC. *MATLAB and Statistics Toolbox Release 2012b*. Natick, Massachusetts, United States., 2012.
- TOWELL, G. D.; ROTHFELD, L. B. Hydrodynamics of rivulet flow. *AIChE J.*, Wiley Online Library, v. 12, n. 5, p. 972–980, 1966.
- WHITE, F. *Mecânica de Fluidos, 6ª edição, 2008*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008.
- WILSON, S.; BURGESS, S. The steady, spreading flow of a rivulet of mud. *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, Elsevier, v. 79, n. 1, p. 77–85, 1998.
- WILSON, S.; DUFFY, B. Strong temperature-dependent-viscosity effects on a rivulet draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 4, p. 827–840, 2003.

## APÊNDICES

# I. FORMA ALTERNATIVA DO TEOREMA DE STOKES

Deseja-se demonstrar a forma alternativa do teorema de Stokes

$$\oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) d\ell = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n}] dS, \quad (\text{I.1})$$

em que  $S$  é uma superfície no espaço tridimensional cujo bordo é a curva fechada  $C$ . Além disso,  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a  $S$  que aponta para o exterior,  $\mathbf{t}$  é o vetor unitário tangente a  $C$  positivamente orientado e  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  é um vetor definido em  $S$  e em  $C$ . Este teorema será necessário para o desenvolvimento da condição de contorno dinâmica utilizada na formulação matemática do problema da cascata.

Antes de fazer a demonstração é interessante apresentar algumas identidades vetoriais comuns que serão úteis.

## I.1 IDENTIDADES VETORIAIS ÚTEIS

Sejam  $\phi$  um escalar,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  três vetores quaisquer e  $\mathbf{A}$  um tensor qualquer. São verdadeiras as seguintes identidades:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad (\text{I.3})$$

$$(\nabla \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} \quad (\text{I.4})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \nabla \phi \cdot \mathbf{a} \quad (\text{I.6})$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b})^T \mathbf{a} \quad (\text{I.7})$$

## I.2 DESCRIÇÃO DA FORMA ALTERNATIVA

Seja  $\mathbf{a}$  um vetor arbitrário constante. Tem-se que

$$\left\{ \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) \, d\ell \right\} \cdot \mathbf{a} = \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{a} \, d\ell, \quad (\text{I.8})$$

isto é, pela identidade (I.2),

$$\left\{ \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) \, d\ell \right\} \cdot \mathbf{a} = \oint_C (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t} \, d\ell. \quad (\text{I.9})$$

Uma vez que  $\mathbf{a} \times \mathbf{u}$  é um vetor, pode-se aplicar o teorema de Stokes, de forma que

$$\oint_C (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t} \, d\ell = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (\text{I.10})$$

Utilizando a identidade (I.3), a equação (I.10) se torna

$$\iint_S [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{a})] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (\text{I.11})$$

Como o vetor  $\mathbf{a}$  é constante, a equação acima é simplificada para

$$\iint_S [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (\text{I.12})$$

Aplicando a identidade (I.4), tem-se

$$\iint_S [\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a}] \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (\text{I.13})$$

que, por (I.5), se torna

$$\iint_S [\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}] \, dS. \quad (\text{I.14})$$

Porém, é possível notar que

$$\iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}] \, dS = \left\{ \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n}] \, dS \right\} \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{I.15})$$

de modo que

$$\left\{ \oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) \, d\ell \right\} \cdot \mathbf{a} = \left\{ \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n}] \, dS \right\} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{I.16})$$

Como  $\mathbf{a}$  é um vetor arbitrário, então

$$\oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) \, d\ell = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{n}] \, dS, \quad (\text{I.17})$$

que é a forma alternativa do teorema de Stokes.

## II. CONDIÇÃO DINÂMICA

A condição de contorno dinâmica é a expressão matemática para o fato físico de que o salto de tensão na interface que separa dois fluidos é equilibrado pelas forças devido à tensão superficial. Seja  $S$  uma superfície no espaço tridimensional que é a interface entre dois fluidos e cujo bordo é a curva fechada  $C$ , conforme mostrado na figura II.1. Se  $\mathbf{t}^{(1)}$  é o vetor unitário tangente a  $C$  positivamente orientado e  $\mathbf{n}^{(1)}$  é o vetor unitário normal à superfície  $S$  que aponta do fluido 2 para o fluido 1, pode-se definir o vetor unitário binormal a  $C$  positivamente orientado como

$$\mathbf{b}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{t}^{(1)}. \quad (\text{II.1})$$

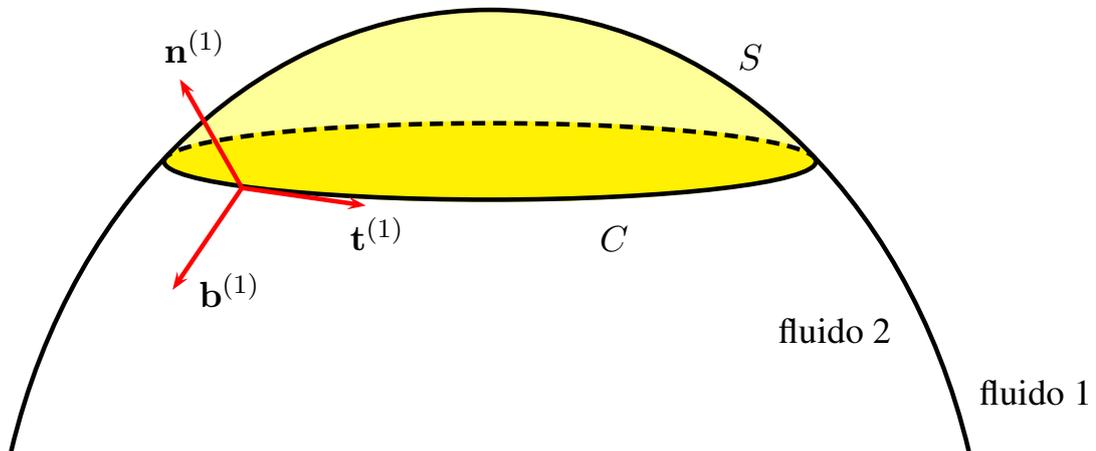


Figura II.1: Esquema de uma curva fechada simples  $C$  superfície que é bordo de uma superfície interfacial arbitrária  $S$  no espaço tridimensional.

Definindo, agora,  $V$  como um volume de controle de altura característica  $\epsilon$  e raio característico  $R$  que compreende a superfície interfacial  $S$  delimitada por  $C$  (figura II.2). No fluido neste volume de controle, atuam três forças: a força de campo total  $\mathbf{f}_V$  em  $V$ , a força de superfície total  $\mathbf{f}_S$  em  $S$  e a força total devido à tensão superficial  $\mathbf{f}_C$  na curva  $C$ . Pelo balanço de forças no volume de controle, tem-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_V + \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_C, \quad (\text{II.2})$$

em que  $\mathbf{f}$  é a força resultante no fluido em  $V$ .

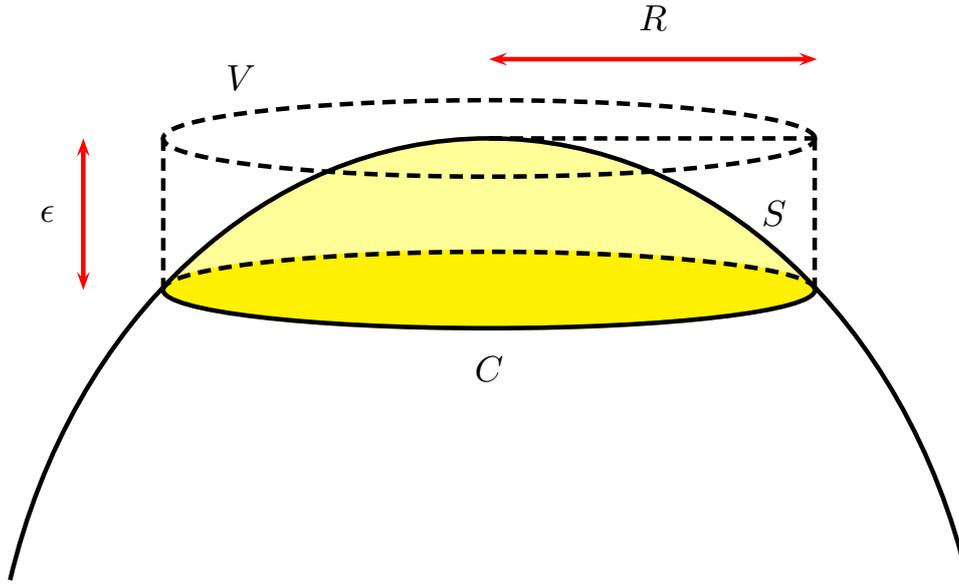


Figura II.2: Volume de controle  $V$  que compreende a interface  $S$ .

Primeiramente, pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{f} = \iiint_V \rho^{(1)} \frac{D\mathbf{u}^{(1)}}{Dt} dV. \quad (\text{II.3})$$

Em seguida, a força de campo total atuando no fluido em  $V$  pode ser expressa como

$$\mathbf{f}_V = \iiint_V \rho^{(1)} \mathbf{g} dV, \quad (\text{II.4})$$

em que  $\mathbf{g}$  representa a força de campo por unidade de massa.

Somando as forças hidrodinâmicas exercidas pelos fluidos 1 e 2 na interface, a força de superfície total atuando em  $S$  é

$$\mathbf{f}_S = \iint_S \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} dS + \iint_S \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} dS, \quad (\text{II.5})$$

ou seja,

$$\mathbf{f}_S = \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)}) dS. \quad (\text{II.6})$$

Como

$$\mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{n}^{(1)}, \quad (\text{II.7})$$

a equação (II.6) se torna

$$\mathbf{f}_S = \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS. \quad (\text{II.8})$$

A força total devido à tensão superficial, por fim, é

$$\mathbf{f}_C = \oint_C \gamma \mathbf{b}^{(1)} d\ell, \quad (\text{II.9})$$

em que  $\gamma$  é a tensão superficial na interface e  $d\ell$  denota o incremento de comprimento ao longo da curva  $C$ .

Substituindo as equações (II.4), (II.8) e (II.9) em (II.3), obtém-se

$$\iiint_V \rho^{(1)} \frac{D\mathbf{u}^{(1)}}{Dt} dV = \iiint_V \rho^{(1)} \mathbf{g} dV + \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS + \oint_C \gamma \mathbf{b}^{(1)} d\ell. \quad (\text{II.10})$$

A altura característica do volume de controle  $V$  é  $\epsilon$  e o raio característico é  $R$ . Sendo assim, as integrais em  $V$  tem a escala de  $\epsilon R^2$  e a integral em  $S$  tem a escala de  $R^2$ . Portanto, no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ , o balanço de forças é

$$\iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS + \oint_C \gamma \mathbf{b}^{(1)} d\ell = 0. \quad (\text{II.11})$$

Pela equação (II.1), a força devido à tensão superficial (II.9) pode ser convenientemente escrita como

$$\mathbf{f}_C = - \oint_C \gamma (\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{t}^{(1)}) d\ell, \quad (\text{II.12})$$

ou, ainda,

$$\mathbf{f}_C = - \oint_C [(\gamma \mathbf{n}^{(1)}) \times \mathbf{t}^{(1)}] d\ell. \quad (\text{II.13})$$

Aplicando, a forma alternativa do teorema de Stokes (I.17), a equação (II.13) é se torna

$$\mathbf{f}_C = - \iint_S \left\{ [\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)})] \mathbf{n}^{(1)} - [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)} \right\} dS. \quad (\text{II.14})$$

Pela identidade vetorial (I.6), tem-se que

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)} + \nabla \gamma \cdot \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{II.15})$$

Como  $\nabla \gamma$  é tangente à interface  $S$ , tem-se que a equação (II.15) é simplificada para

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{II.16})$$

É possível escrever

$$\nabla \gamma = \nabla [\gamma (\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)})], \quad (\text{II.17})$$

ou seja,

$$\nabla \gamma = \nabla [(\gamma \mathbf{n}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)}]. \quad (\text{II.18})$$

Pela identidade vetorial (I.7), tem-se que

$$\nabla \gamma = \gamma (\nabla \mathbf{n}^{(1)})^T \mathbf{n}^{(1)} + [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{II.19})$$

Mas pode-se notar que

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{n}^{(1)})^T \mathbf{n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

visto que,

$$(\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)}) = 1. \quad (\text{II.21})$$

Desta forma, analisando as equações (II.18), (II.19) e (II.20), obtém-se

$$\nabla \gamma = [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{II.22})$$

Substituindo as equações (II.16) e (II.22) em (II.14), obtém-se,

$$\mathbf{f}_C = - \iint_S [\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma] dS. \quad (\text{II.23})$$

Finalmente, a equação (II.11) se torna

$$\iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS = \iint_S [\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma] dS. \quad (\text{II.24})$$

Como a superfície  $S$  é arbitrária, o integrando deve ser idênticos dos dois lados da equação acima. Assim,

$$(\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} = \gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma \quad (\text{II.25})$$

é a condição de contorno dinâmica, que expressa o equilíbrio de tensões em uma superfície livre.

Para chegar em uma expressão final para a condição de contorno dinâmica, definiremos os tensores de tensões de cada um dos fluidos, a curvatura e o gradiente da tensão superficial. Para o caso estudado, o tensor de tensões pode ser definido em termos da pressão fluida local e do campo de velocidades, de forma que

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{II.26})$$

Aqui,  $p$  é a pressão local,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor de tensões viscosas. Assim, a equação (II.26), se resume a

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}. \quad (\text{II.27})$$

Definimos, também, que as pressões nos fluidos 1 e 2 são, respectivamente,

$$p^{(1)} = p_0 \quad \text{e} \quad p^{(2)} = p. \quad (\text{II.28})$$

Já o tensor de tensões viscosas do fluido 2 é

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{II.29})$$

Consideraremos, também, que o fluido 1 possui viscosidade nula, de forma que

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = 0. \quad (\text{II.30})$$

Por fim, como a tensão superficial é constante na interface estudada, temos que

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = 0. \quad (\text{II.31})$$

Já a curvatura da superfície livre  $\kappa$  pode ser calculada por

$$\kappa = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{II.32})$$

Aplicando todas estas considerações na equação (II.25), chegamos a seguinte expressão

$$(p_0 - p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n}. \quad (\text{II.33})$$

Este é o formato da condição dinâmica que será efetivamente usado na resolução do problema.

### III. ESCOAMENTOS AXISSIMÉTRICOS

Considere um escoamento estudado em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , onde  $z$  é um eixo de simetria do problema. Neste contexto, o escoamento é chamado de axissimétrico se a velocidade  $\mathbf{u}$  não depender do ângulo  $\theta$ , isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{III.1})$$

Assumindo que o escoamento estudado também é unidirecional, ou seja, apenas uma das componentes de velocidade é não nula, temos que o escoamento deverá se enquadrar em um dos seguintes casos:

- **Escoamento axissimétrico retilíneo:** Apenas a componente  $u_z$  é diferente de zero. Neste caso, as linhas de corrente serão retas. Um exemplo deste tipo é o escoamento devido à pressão completamente desenvolvido em um tubo cilíndrico ou anular.
- **Escoamento axissimétrico torcional:** Neste caso, a componente  $u_\theta$  é diferente de zero e as linhas de corrente serão círcunferências. Um exemplo é o escoamento em um redemoinho.
- **Escoamento axissimétrico radial:** A componente não-nula é  $u_r$ . Neste caso, as linhas de corrente serão retas apontando na direção radial. Um exemplo deste caso é o escoamento em um cilindro poroso.

#### III.1 ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO RETILÍNEO

Vamos, agora, analisar com maior profundidade o caso de um escoamento axissimétrico retilíneo. Primeiramente, temos que a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.2})$$

Como o escoamento é unidirecional, porém, temos que  $u_\theta = 0$  e  $u_r = 0$ . Desta forma, a equação da continuidade se resume a

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.3})$$

Por outro lado, pela definição de escoamento axissimétrico, temos que  $\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0$ . Desta forma, concluímos que  $u_z = u_z(r, t)$ .

Em seguida, analisaremos a equação de Navier-Stokes. A componente em  $z$  da equação é

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + \rho g_z, \quad (\text{III.4})$$

onde

$$\nabla^2 u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}.$$

Usando as definições de escoamento unidirecional, escoamento axissimétrico e a equação (III.3), a equação anterior se resume a

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z. \quad (\text{III.5})$$

Semelhantemente, as componentes em  $r$  e  $\theta$  assumem a seguinte forma

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{III.7})$$

Temos, então, que  $p$  deve ser uma função apenas de  $z$  e do tempo. Também já foi concluído que  $u_z$  é função apenas de  $r$  e do tempo. Desta forma, da equação (III.5), temos que o lado esquerdo é função de  $r$  e do tempo, enquanto o lado direito é função de  $r$ , de  $z$  e do tempo. Assim, é possível afirmar que o lado direito não pode ser função de  $z$ , ou seja,  $p$  é uma função apenas do tempo. Logo, é conveniente estudar o problema permanente, pois isto faz com que  $\frac{\partial p}{\partial z}$  seja constante. Além disso, a equação a ser resolvida, que anteriormente era uma equação diferencial parcial, se reduz a uma equação diferencial ordinária, facilitando consideravelmente sua resolução. Com estas considerações, partindo da equação (III.5), chegamos a

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z. \quad (\text{III.8})$$

Integrando os dois lados, temos que

$$r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r^2 + C_1, \quad (\text{III.9})$$

ou seja,

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r + \frac{C_1}{R}. \quad (\text{III.10})$$

Integrando os dois lados novamente, chegamos a

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad (\text{III.11})$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes definidas a partir das condições de contorno.

### III.1.1 Escoamento de Hagen-Poiseuille

Analisando o caso anterior em um tubo cilíndrico (Figura III.1), temos que, pela condição de não deslizamento, a velocidade deve ser nula na borda do tubo, isto é,

$$u_z = 0 \quad \text{em} \quad r = R. \quad (\text{III.12})$$

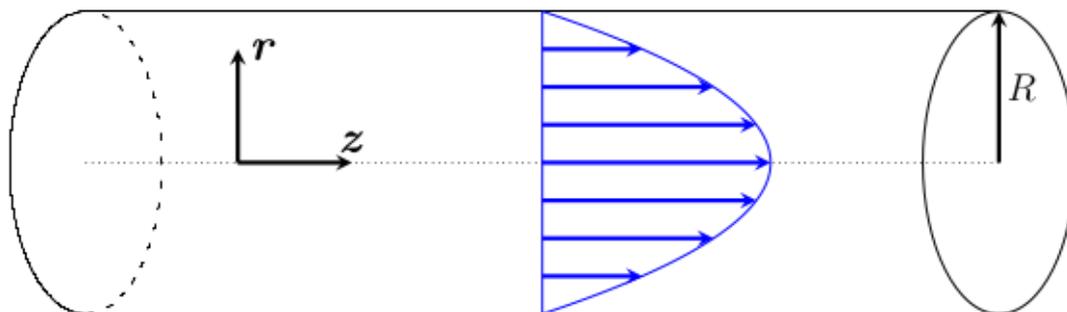


Figura III.1: Esquema do problema proposto e solução obtida.

Por outro lado, sabemos que a velocidade deve ser finita no centro do tubo, ou seja,

$$u_z \quad \text{finito em} \quad r = 0. \quad (\text{III.13})$$

Desconsiderando os efeitos gravitacionais e aplicando esta segunda condição de contorno em (III.11), chegamos a

$$C_1 = 0. \quad (\text{III.14})$$

Usando, agora, a condição de não deslizamento, temos que

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2. \quad (\text{III.15})$$

Desta forma, o perfil de velocidades nesta seção é

$$u_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2). \quad (\text{III.16})$$

Analisando o perfil obtido, é possível perceber que este escoamento é movido por um gradiente de pressão aplicado no problema. Assim, caso o gradiente de pressão seja nulo, não haverá escoamento. Além disso, o perfil do escoamento é um parabolóide com máximo no centro do tubo e velocidade nula na parede do tubo.

Partindo do perfil de velocidade, podemos calcular a velocidade máxima. Este valor é atingido pela velocidade quando  $\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$ . Neste caso, então, a velocidade é máxima em  $r = 0$ . Aplicando

na equação para a velocidade, obtemos que

$$u_{z,\text{máx}} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2. \quad (\text{III.17})$$

Para calcular a vazão neste tubo, integramos a velocidade em todo o perfil, isto é

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} u_z r \, d\theta \, dr. \quad (\text{III.18})$$

Substituindo a velocidade obtida e resolvendo a equação (III.18), obtemos que o fluxo é dado por

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^4. \quad (\text{III.19})$$

É importante notar que o fluxo sempre será positivo já que, para que este escoamento ocorra, é necessário que  $\frac{\partial p}{\partial z}$  seja negativo. Este resultado é conhecido como lei de Hagen-Poiseuille e ajuda a descrever o escoamento em tubulações em geral, além de auxiliar em estudos do sangue nas veias, por exemplo. A partir da vazão, podemos obter a velocidade média no perfil.

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{A}. \quad (\text{III.20})$$

Usando o resultado obtido para o fluxo e lembrando que a seção transversal é circular, a velocidade média é dada por

$$\bar{u}_z = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2. \quad (\text{III.21})$$

### III.1.2 Escoamento em tubo em formato de anel

Analisaremos, agora, o escoamento em um tubo com formato de anel com raios interno e externo iguais a  $\kappa R$  e  $R$  respectivamente, como na Figura III.2. Novamente será desconsiderada a gravidade.

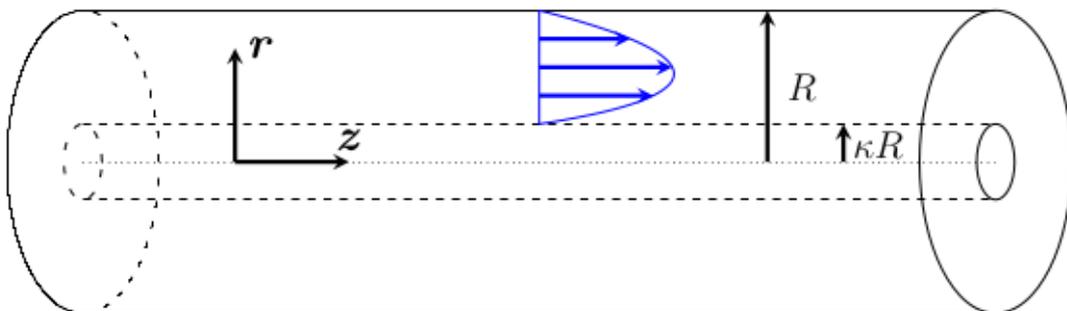


Figura III.2: Exemplificação e solução do problema do escoamento em um anel.

Neste caso, a condição de não deslizamento nas paredes interna e externa do tubo implica que

$$u_z = 0 \quad \text{em} \quad r = \kappa R, \quad (\text{III.22})$$

$$u_z = 0 \quad \text{em} \quad r = R. \quad (\text{III.23})$$

Aplicando estas duas condições na equação (III.11), chegamos ao seguinte sistema de equações

$$\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \kappa R^2 + C_1 \ln \kappa R + C_2 = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 + C_1 \ln R + C_2 = 0. \quad (\text{III.25})$$

Subtraindo a equação (III.25) pela (III.24), temos que

$$\frac{1}{4\mu} R^2 \frac{\partial p}{\partial z} (1 - \kappa) - C_1 \ln \kappa = 0. \quad (\text{III.26})$$

Desta forma,

$$C_1 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa}. \quad (\text{III.27})$$

Substituindo  $C_1$  em (III.24), obtemos o seguinte valor para  $C_2$ :

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ \kappa + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \ln R \right]. \quad (\text{III.28})$$

Daí, substituindo as constantes em (III.11), obtemos a equação para o perfil de velocidades em um tubo em formato de anel

$$u_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \ln \frac{r}{R} \right]. \quad (\text{III.29})$$

Para comparar o efeito da razão entre os raios  $\kappa$  na velocidade, fez-se um gráfico com os perfis de velocidades para diferentes valores de  $\kappa$ . Este gráfico pode ser visto na Figura III.3.

A partir deste gráfico percebemos que o perfil para  $\kappa = 0$  é metade de uma parábola. Os outros três perfis, porém, não são parabólicos. Estes perfis também não são simétricos, de forma que a velocidade máxima não ocorre no centro do tubo. O ponto onde a velocidade é máxima e seu valor serão calculados abaixo.

Podemos, agora, verificar o que ocorre com a velocidade quando o raio interno tende a zero. Calculando este limite, chegamos a

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} u_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2). \quad (\text{III.30})$$

Esta é exatamente igual à fórmula obtida para o caso do escoamento Hagen-Poiseuille em um cilindro completo, obtido na equação (III.16). Isto é esperado, já que um anel com raio interno

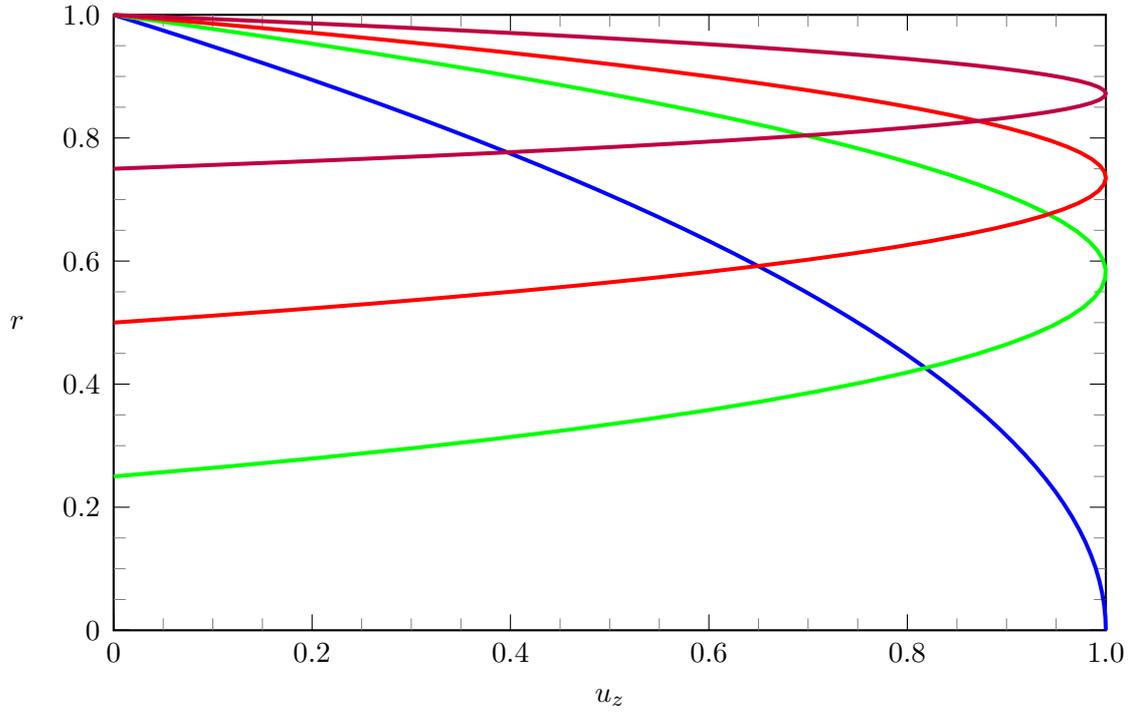


Figura III.3: Perfil de velocidades adimensional obtido para  $\kappa = 0$  (azul),  $\kappa = 0.25$  (verde),  $\kappa = 0.5$  (vermelho) e  $\kappa = 0.75$  (roxo).

nulo é equivalente a um cilindro não vazado.

Semelhantemente ao caso anterior, buscaremos, agora, a velocidade máxima. Neste caso, o ponto em que a velocidade é máxima ainda é desconhecido. Desta forma, precisamos inicialmente calcular  $\frac{\partial u_z}{\partial r}$  e descobrir onde esta função se anula. Assim,

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ -\frac{2r}{R^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \frac{1}{r} \right]. \quad (\text{III.31})$$

Fazendo  $\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$ , chegamos a

$$r = R \sqrt{\frac{1 - \kappa^2}{-2 \ln \kappa}}. \quad (\text{III.32})$$

Substituindo este valor na equação (III.29), descobrimos que a velocidade máxima no tubo é

$$u_{z,\text{máx}} = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left\{ 1 + \frac{1 - \kappa^2}{2 \ln \kappa} \left[ 1 - \ln \left( \frac{1 - \kappa^2}{-2 \ln \kappa} \right) \right] \right\}. \quad (\text{III.33})$$

Agora, calcularemos a vazão. A expressão para a vazão é

$$Q = \int_{\kappa R}^R \int_0^{2\pi} u_z r \, d\theta \, dr = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \int_{\kappa R}^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \ln \frac{r}{R} \right] r \, dr. \quad (\text{III.34})$$

Substituindo a equação para a velocidade obtida para o perfil, temos que

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^4 (1 - \kappa^2) \left( 1 + \kappa^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \right). \quad (\text{III.35})$$

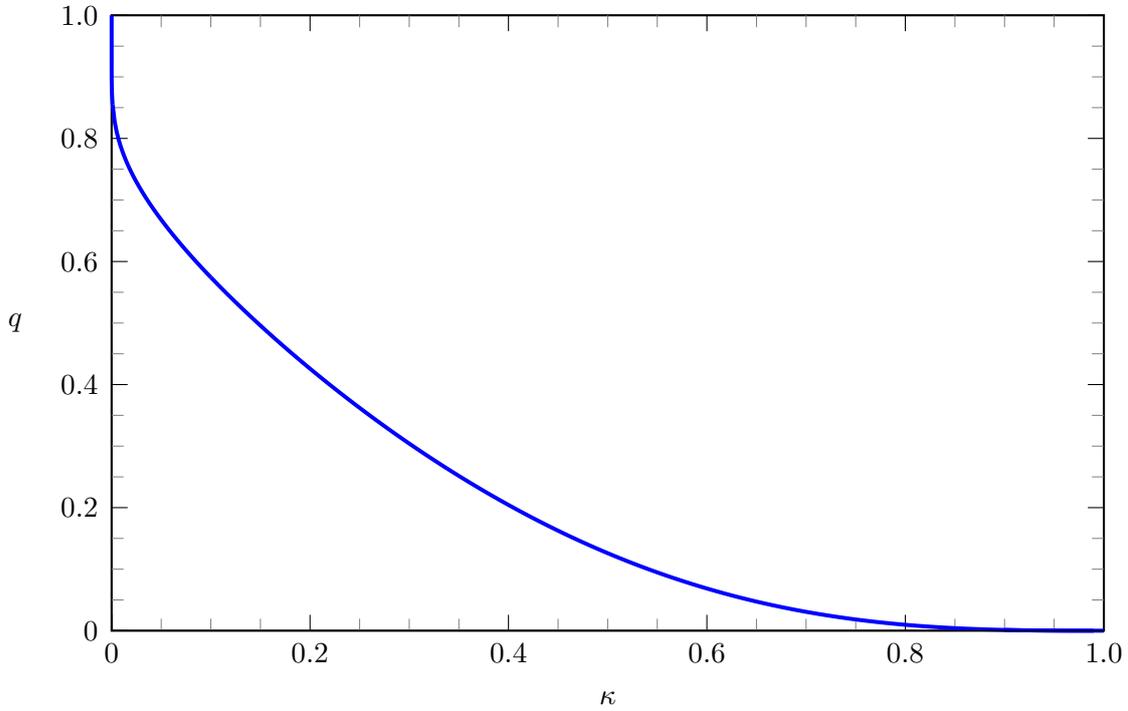


Figura III.4: Fluxo adimensional como função da razão entre os raios externo e interno.

Com esta expressão obtida, fez-se um gráfico da vazão adimensional, normalizada com a velocidade máxima, em função da razão entre os raios  $\kappa$ . O resultado obtido pode ser visto na Figura III.4. Deste gráfico é possível extrair alguns resultados interessantes. Primeiramente, percebemos que o aumento da razão entre os raios acarreta em uma diminuição no fluxo de maneira não linear. Assim, a vazão será máxima quando o raio interno for muito menor que o externo, equivalendo ao fluxo para um caso de um cilindro não vazado. O outro extremo do gráfico nos mostra que, quando  $\kappa = 1$ , a vazão é igual a zero. Este é um resultado esperado já que, se os raios são iguais, não há espaço para o escoamento do fluido.

Para calcular a velocidade média, dividimos a vazão pela área da seção transversal, como mostrado em (III.20). Assim, a velocidade média é dada por

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{\pi R^2 (1 - \kappa^2)} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 + \kappa^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \right]. \quad (\text{III.36})$$

### III.1.3 Escoamento de um filme sobre um cilindro devido à gravidade

Agora será analisado o escoamento na superfície externa de um cilindro infinitamente longo de raio  $R$ , conforme a Figura III.5. O fluido esco verticalmente no formato de um filme fino e uniforme em contato com o ar estacionário.

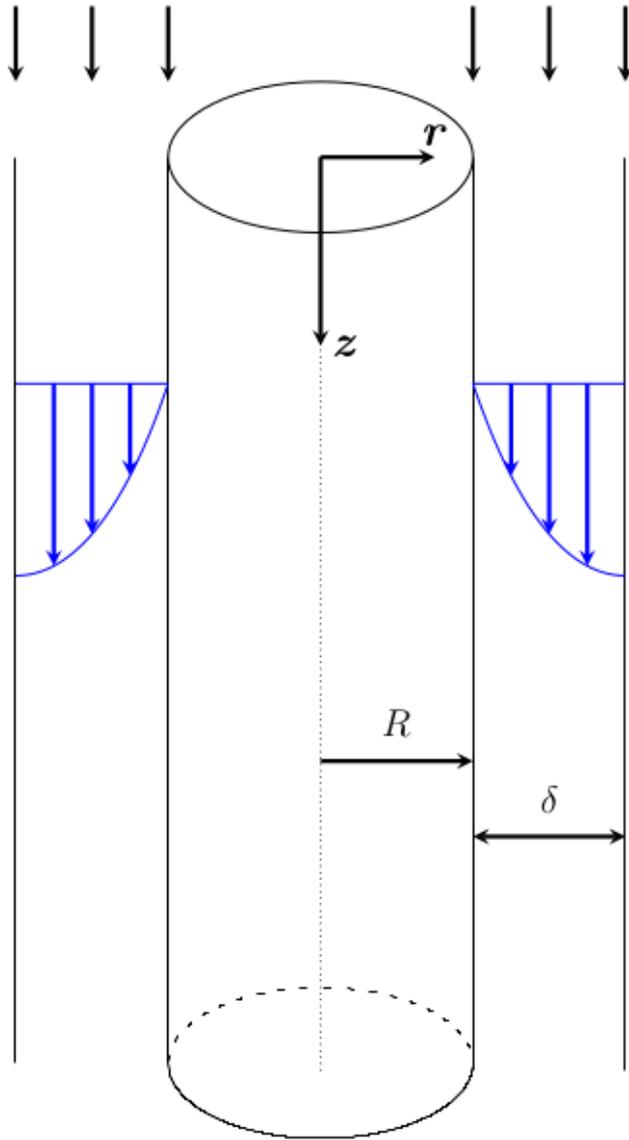


Figura III.5: Esquema do problema e solução obtida para o escoamento na lateral de um cilindro sob ação da gravidade.

Novamente partiremos da equação (III.11). Neste caso, será considerado que a pressão independe de  $z$ . Os efeitos gravitacionais, porém, serão considerados. Assim, a solução terá o seguinte formato

$$u_z = -\frac{1}{4\mu}\rho g_z r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (\text{III.37})$$

Como o ar possui viscosidade desprezível quando comparada ao líquido, a tensão cisalhante na superfície de contato entre o fluido e o ar deve ser nula. Assim,

$$\tau_{rz} = \mu \frac{du_z}{dr} = 0 \quad \text{em} \quad r = R + \delta. \quad (\text{III.38})$$

Aplicando esta condição na equação para  $u_z$ , temos que

$$-\frac{1}{2\mu}\rho g_z(R + \delta) + \frac{C_1}{R + \delta} = 0. \quad (\text{III.39})$$

Logo,

$$C_1 = \frac{1}{2\mu}\rho g_z(R + \delta)^2. \quad (\text{III.40})$$

Pela condição de não deslizamento na parede temos que

$$u_z = 0 \quad \text{em} \quad r = R, \quad (\text{III.41})$$

ou seja,

$$-\frac{1}{4\mu}\rho g_z [R^2 - 2(R + \delta)^2 \ln R] + C_2 = 0. \quad (\text{III.42})$$

Desta forma,

$$C_2 = \frac{1}{4\mu}\rho g_z [R^2 - 2(R + \delta)^2 \ln R]. \quad (\text{III.43})$$

Substituindo as constantes em (III.37), o perfil de velocidades obtido é

$$u_z = \frac{1}{4\mu}\rho g_z \left[ R^2 - r^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right]. \quad (\text{III.44})$$

Com o perfil de velocidades, é possível calcular a velocidade máxima. Neste caso, como na face de contato com o ar a derivada da velocidade é nula, este deve ser o ponto de máxima velocidade. Ou seja, a velocidade é máxima em  $r = R + \delta$ . Substituindo este valor na equação acima para o perfil de velocidades, temos que

$$u_{z,max} = \frac{1}{4\mu}\rho g_z \left[ \delta^2 + 2\delta R - 2(R + \delta)^2 \ln \frac{R + \delta}{R} \right]. \quad (\text{III.45})$$

Em seguida, calculamos a vazão. Neste caso, ela pode ser calculada por

$$Q = \int_R^{R+\delta} \int_0^{2\pi} u_z r \, d\theta \, dr. \quad (\text{III.46})$$

Substituindo a equação (III.45) na expressão de (III.46), temos

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\rho g_z R^4 \left\{ 4 \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right)^4 \ln \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right) - \frac{\delta}{R} \left( 2 + \frac{\delta}{R} \right) \left[ 3 \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \quad (\text{III.47})$$

Agora encontraremos a velocidade média para este caso. Para isso, novamente usaremos a equação (III.20). Lembrando que a seção transversal deste escoamento é semelhante ao caso

anterior, chegamos a

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{\pi(2R\delta + \delta^2)},$$

ou seja,

$$\bar{u}_z = \frac{1}{8\mu\delta(2R + \delta)} \left\{ 4 \left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^4 \ln \left(1 + \frac{\delta}{R}\right) - \frac{\delta}{R} \left(2 + \frac{\delta}{R}\right) \left[ 3 \left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2 - 1 \right] \right\}. \quad (\text{III.48})$$

### III.2 ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO TORCIONAL

Nesta seção, será estudado o escoamento axissimétrico torcional. Pela definição de escoamento axissimétrico, temos que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = 0$ . Como o escoamento é unidirecional e torcional, deve-se ter que  $u_r = u_z = 0$ . Neste caso, devido as considerações do problema, a equação da continuidade (III.2) é automaticamente satisfeita.

A equação governante deste problema é a equação de Navier-Stokes. Será considerado que a gravidade é da forma  $\mathbf{g} = g_z \hat{\mathbf{e}}_z$ . A componente em  $z$  desta equação é dada por (III.4). Para este caso específico, esta equação se reduz a

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z = 0. \quad (\text{III.49})$$

A componente  $r$  da equação, por outro lado, é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\theta^2}{r}. \quad (\text{III.50})$$

Integrando (III.49), temos que

$$p = \rho g_z z + c(r, \theta, t), \quad (\text{III.51})$$

em que  $c$  é uma função de  $r$ ,  $\theta$  e  $t$ . Assumiremos, também, que  $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ . Assim,

$$p = \rho g_z z + c(r, t). \quad (\text{III.52})$$

Derivando ambos os lados com relação ao raio, temos que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = c'(r, t). \quad (\text{III.53})$$

Aqui,  $c'$  é uma função de  $r$  e  $t$ , obtida a partir da derivação de  $c$ .

Utilizando este resultado em (III.50), deduzimos que

$$u_\theta = u_\theta(r, t). \quad (\text{III.54})$$

Agora é possível resolver a componente em  $\theta$  da equação de Navier-Stokes. A equação é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \nabla^2 u_\theta, \quad (\text{III.55})$$

onde

$$\nabla^2 u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

Utilizando as considerações do escoamento axissimétrico torcional e o resultado obtido em (III.54), a equação acima é simplificada para

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right]. \quad (\text{III.56})$$

Considerando, também, um regime permanente, temos que

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] = 0. \quad (\text{III.57})$$

Agora, temos que resolver esta equação. Integrando, chegamos a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) = C_1. \quad (\text{III.58})$$

Integrando mais uma vez, obtemos a solução geral para este problema.

$$u_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (\text{III.59})$$

Aqui  $C_1$  e  $C_2$  são constantes do problema definidas a partir das condições de contorno.

### III.2.1 Escoamento de Couette Circular

O escoamento de Couette circular, também conhecido como escoamento de Taylor-Couette, consiste em analisar o escoamento entre dois cilindros rotativos. Este tipo de problema aparece, por exemplo, em reômetros rotativos. De forma geral, o problema a ser estudado consiste em dois cilindros concêntricos de raios  $R_1$  e  $R_2$  e comprimento infinito girando com velocidades angulares  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  com relação ao seu centro. Considera-se que o escoamento é permanente, que o fluido é incompressível e que não há influência da gravidade. Um exemplo deste escoamento pode ser visto na Figura III.6.

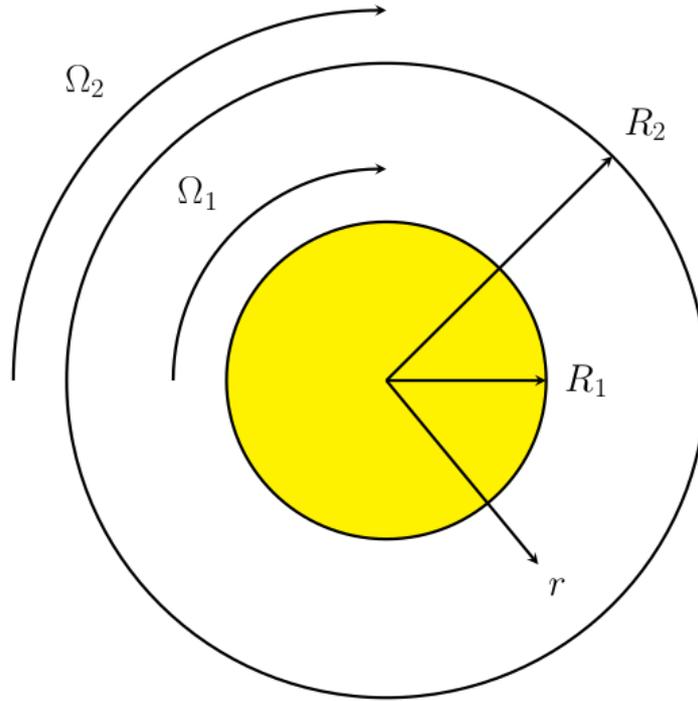


Figura III.6: Esquema do problema proposto.

Sabemos que a solução possui o formato obtido em (III.59),

$$u_{\theta} = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (\text{III.60})$$

Para resolver esta equação necessitamos de duas condições de contorno. Assim, temos que, pela condição de não-deslizamento, as velocidades na parede devem respeitar

$$u_{\theta} = \Omega_1 R_1 \quad \text{em} \quad r = R_1, \quad (\text{III.61})$$

$$u_{\theta} = \Omega_2 R_2 \quad \text{em} \quad r = R_2. \quad (\text{III.62})$$

Aplicando as condições de contorno na forma geral da solução, chegamos ao seguinte sistema de equações

$$C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} = \Omega_1 R_1 \quad (\text{III.63})$$

$$C_1 R_2 + \frac{C_2}{R_2} = \Omega_2 R_2. \quad (\text{III.64})$$

Da equação (III.63), temos que

$$C_2 = -C_1 R_1^2 + \Omega_1 R_1^2. \quad (\text{III.65})$$

Substituindo na equação (III.64), calculamos  $C_1$  como

$$C_1 = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (\text{III.66})$$

Consequentemente,  $C_2$  é dado por

$$C_2 = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (\text{III.67})$$

Substituindo as constantes na equação geral, chegamos ao seguinte resultado

$$u_\theta = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) r + \frac{1}{r} (\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2 \right]. \quad (\text{III.68})$$

Aqui podemos analisar alguns casos específicos que representam situações de interesse: o caso em que o cilindro interno está parado e o em que ambos os cilindros possuem mesma velocidade angular.

#### III.2.1.1 Cilindro Interno Parado

Neste caso, como o cilindro interno possui velocidade nula, temos que  $\Omega_1 = 0$ . Com esta consideração, temos que a equação geral para a velocidade, mostrada em (III.68), se resume a

$$u_\theta = \frac{\Omega_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right). \quad (\text{III.69})$$

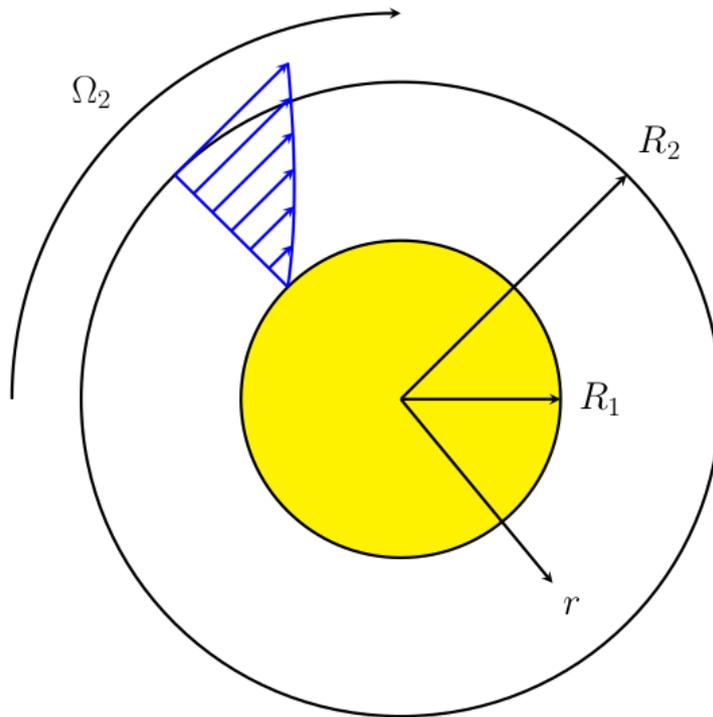


Figura III.7: Esquema do problema e solução obtida para o caso em que o cilindro interno é estacionário.

A representação deste problema, já com sua solução, pode ser vista na Figura III.7. Em seguida, calcularemos a velocidade média. Esta pode ser calculada por

$$\bar{u}_\theta = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} u_\theta \, dr. \quad (\text{III.70})$$

Usando a expressão obtida para a velocidade neste caso específico, chegamos a

$$\bar{u}_\theta = \frac{\Omega_2 R_1^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)(R_2^2 - R_1^2)} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1^2} + \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right). \quad (\text{III.71})$$

### III.2.1.2 Cilindros com Velocidades Angulares Iguais

No segundo caso analisado, os dois cilindros possuem velocidade angular igual, isto é,  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Assim, temos que a equação (III.68) se torna

$$u_\theta = \Omega r. \quad (\text{III.72})$$

O esquema do problema e da solução podem ser vistos na Figura III.8. É interessante notar que este é o caso da rotação de um corpo rígido, pois não há deslizamento entre as camadas de fluido, já que a tensão cisalhante é nula.

A velocidade média é calculada como no caso anterior, mostrado em (III.70). Substituindo o

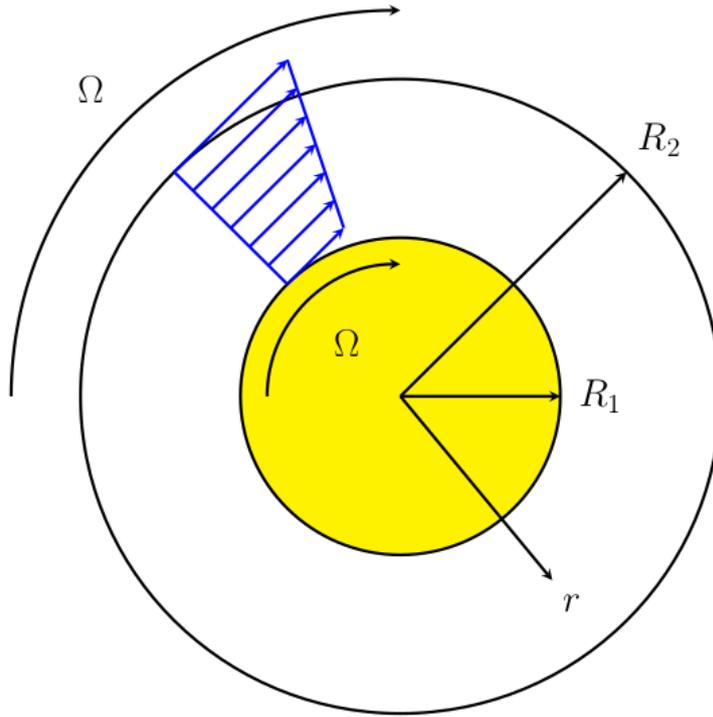


Figura III.8: Exemplificação do problema e solução quando os cilindros possuem mesma velocidade angular.

valor apropriado de velocidade angular, temos que

$$\bar{u}_\theta = \frac{\Omega(R_2 + R_1)}{2} \quad (\text{III.73})$$

Neste caso, é fácil perceber que, como o perfil é linear, a velocidade média será igual à velocidade no ponto médio deste segmento.

### III.3 ESCOAMENTO AXISSIMÉTRICO RADIAL

Agora será estudado o escoamento axissimétrico radial. Como o escoamento é unidirecional e radial, temos que  $u_\theta = u_z = 0$ . Devido às considerações de escoamento axissimétrico e escoamento permanente, temos que  $u_r$  uma função apenas de  $r$  e  $z$ . Por uma questão de simplicidade na resolução, também será considerado que a velocidade não varia com  $z$ , de forma que  $u_r = u_r(r)$ . Neste caso, as linhas de corrente serão apenas retas na direção radial partindo do centro do escoamento, como na Figura III.9. Para os escoamentos axissimétricos radiais, diferentemente dos casos anteriores, é possível determinar o perfil de velocidade usando apenas a equação da continuidade. Esta, em coordenadas cilíndricas, é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.74})$$

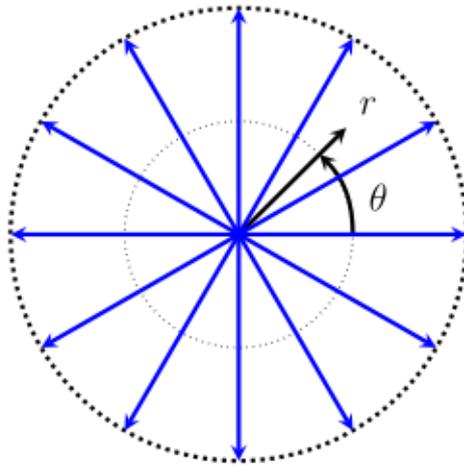


Figura III.9: Representação esquemática do escoamento axissimétrico radial.

Aplicando as considerações anteriores, porém, esta equação se resume a

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0. \quad (\text{III.75})$$

Integrando os dois lados, temos que

$$u_r = \frac{c}{r}, \quad (\text{III.76})$$

onde  $c$  é uma constante a ser determinada pelas condições de contorno.

Uma outra forma de se deduzir esta mesma equação é a partir de uma análise macroscópica. Temos que a vazão  $Q$  nesta seção é dada por

$$Q = u_r(2\pi rL), \quad (\text{III.77})$$

onde  $L$  é o comprimento do cilindro. Rearranjando esta fórmula, chegamos a

$$u_r = \frac{Q}{2\pi rL}. \quad (\text{III.78})$$

Esta equação é exatamente igual a (III.76), onde a constante  $c$  vale  $\frac{Q}{2\pi L}$ .

### III.4 ESCOAMENTO ESFÉRICO PERMANENTE COM SIMETRIA RADIAL

Nesta seção será analisado o escoamento esférico e permanente com simetria radial. Neste tipo de escoamento o fluido move-se em direção ao centro de uma esfera ou na direção oposta. Um exemplo comum é o de uma bolha se expandindo até o colapso.

A análise para este caso é muito semelhante àquela feita para o escoamento axissimétrico radial. Neste caso, porém, é recomendável o uso de coordenadas esféricas. Além disso, por uma

questão de praticidade, serão desconsiderados os efeitos da gravidade.

Como o escoamento é simétrico radialmente, temos que as componentes em  $\theta$  e  $\phi$  devem ser nulas, isto é,  $u_\theta = u_\phi = 0$ . Além disso, como o escoamento é permanente a velocidade só deve depender de  $r$ , de forma que  $u_r = u_r(r)$ .

A equação da continuidade, em coordenadas esféricas é dada por

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi) = 0. \quad (\text{III.79})$$

Aplicando as considerações da análise, esta equação é reduzida para

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0. \quad (\text{III.80})$$

Resolvendo, chegamos a seguinte relação para a velocidade  $u_r$

$$u_r = \frac{c}{r^2}, \quad (\text{III.81})$$

onde  $c$  é uma constante, que será definida a partir das condições de contorno.

Assim como no caso do escoamento axissimétrico radial, a fórmula acima pode ser determinadas apenas a partir de uma análise macroscópica do problema. A vazão em cada casca esférica é dada por

$$Q = u_r (4\pi r^2). \quad (\text{III.82})$$

Rearranjando, temos que

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (\text{III.83})$$

Como  $Q$  é uma constante, esta relação é a mesma que a mostrada na equação (III.81), com  $c$  igual a  $\frac{Q}{4\pi}$ .

A componente em  $r$  da equação de Navier-Stokes, em coordenadas esféricas, é

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \nabla^2 u_r, \quad (\text{III.84})$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{2}{r^2} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \cot \theta \right) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned}$$