



# PROJETO DE GRADUAÇÃO

## Avaliação de Modos Não-Lineares a partir de Seções de Poincaré em Diferentes Não-Linearidades

Por,

**Filipe Eduard Leite Ossege**

Brasília, DF, 26 de maio de 2021

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# Avaliação de Modos Não-Lineares a partir de Seções de Poincaré em Diferentes Não-Linearidades

Por,

**Filipe Eduard Leite Ossege**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Profa. Aline Souza de Paula (orientadora) \_\_\_\_\_

Prof. Alberto Carlos G. C. Diniz (convidado) \_\_\_\_\_

Profa. Marcela Rodrigues Machado (convidada) \_\_\_\_\_

Brasília, DF, 26 de maio de 2021

# Agradecimentos

Para minha mãe, Albany, que me ensinou disciplina e responsabilidade.

Para meu pai, Franz, que me ensinou humildade e simplicidade.

Para minha irmã, Carolina, que me ensinou companheirismo e amizade.

Um agradecimento a toda equipe do Grupo de Dinâmica de Sistemas (GDS) da UnB, que me disponibilizou um lugar de estudo durante toda minha pesquisa de iniciação científica. Uma pena não poder usufruir do laboratório na realização deste estudo, devido ao isolamento da pandemia. Imensas saudades dos amigos, que me apoiaram tanto emocionalmente quanto academicamente nessa jornada na faculdade. Obrigado ao Arthur, Davi, Grazielle, Nathália, Felipe, Yago, Wytorhugo, Filipe Azis, Tomé, Juliana, Emerson, entre outros.

Um agradecimento especial à minha professora Aline Souza de Paula pela melhor orientação que eu poderia ter pedido. Obrigado pela paciência, pela compreensão, pelo tempo disponibilizado para melhorar este documento e por todo o apoio. É uma inspiração ter uma orientadora tão dedicada e atenciosa, que manteve a qualidade de suas orientações mesmo virtualmente durante uma pandemia.

Obrigado a todos os professores que me inspiraram durante minha jornada.

Filipe Eduard Leite Ossege

# Resumo

Este trabalho utiliza uma metodologia qualitativa, baseada no mapa de Poincaré, para a identificação de modos não-lineares de sistemas dinâmicos, a avaliação de suas estabilidades e a indicação de possíveis comportamentos caóticos. Este estudo apresenta uma revisão de literatura sobre a definição de um modo e como detectá-los através da seção de Poincaré. Inicialmente, o método é aplicado a um sistema massa-mola linear de 2 graus de liberdade. Em seguida, analisa-se um sistema massa-mola não-linear discreto e com 2 graus de liberdade. Neste caso, faz-se uma análise paramétrica, ao quantificar o número de modos, estáveis e instáveis, para diferentes valores de energia do sistema. Por último, a metodologia é aplicada em um sistema biela-manivela não-linear, característico de motores, semi-definido, com 2 graus de liberdade e inércia variável. Para esse sistema, o método foi capaz de detectar modos, no entanto, a análise para diferentes níveis de energia ficou limitada, graças à dificuldade de determinar as condições iniciais de ocorrência de cada modo. Conclui-se que a metodologia possibilita a indicação dos modos e suas estabilidades, sem o custoso cálculo de uma solução analítica.

**Palavras-chaves:** Não-linear. Não-linearidades. Modos Não-Lineares. Seção de Poincaré. Mapa de Poincaré. Sistemas Dinâmicos.

# Abstract

This work shows a qualitative method, based on the Poincaré section, for evaluating nonlinear modes and their stability. Through this technique, one may obtain a possible indication for chaotic motion. This study begins with a literature review, in order to define a mode and explaining how to acquire them by means of the Poincaré map. Initially, the method is applied to a linear discrete spring-mass dynamical system with 2 degrees-of-freedom. Next, a nonlinear discrete spring-mass dynamical system with 2 degrees-of-freedom and nonlinear springs is analyzed. For this case, a parametric analysis is made, as both the nonlinear stiffness and the energy change and the number of modes is calculated in every circumstance. Lastly, this routine is applied in a motor shaft engine, represented by a 2 degree-of-freedom semi-definitive system with non-constant inertia. For this system, the method was able to detect the modes, however, the analysis for different values of energy could not be completed, due to the difficulty of determining the initial conditions associated with each mode. In conclusion, this technique is able to identify modes and their stability without the need to calculate the analytical solution of a nonlinear system.

**Key-words:** Nonlinear. Nonlinearities. Nonlinear Modes. Poincaré Section. Poincaré Map. Dynamical Systems.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Solução temporal de um sistema dinâmico. (a) Solução analítica; (b) Solução numérica. . . . .	6
Figura 2 – Resposta periódica de um sistema não-linear. (a) Evolução temporal; (b) Espaço de fase (SAVI, 2006). . . . .	9
Figura 3 – Resposta caótica de um sistema não-linear. (a) Evolução temporal; (b) Espaço de fase (SAVI, 2006). . . . .	10
Figura 4 – Diferentes tipos de estabilidade (SAVI, 2006). . . . .	11
Figura 5 – Relação entre os deslocamentos de um sistema não-linear de 2 GDLs sujeito a diferentes MNLs. (a) Modo Similar; (b) Modo Não-Similar. . . . .	18
Figura 6 – Definições principais de modos de vibrar e os deslocamentos dos GDLs correspondentes (ALBU-SCHAEFFER; SANTINA, 2020). . . . .	19
Figura 7 – Espaço de fase de uma solução periódica e seu cruzamento com a superfície de Poincaré, $\Sigma$ , adaptado de Savi (2006). . . . .	21
Figura 8 – Representação da trajetória cruzando a superfície de corte (VAKAKIS; RAND, 1992a). . . . .	22
Figura 9 – Esboços da evolução de mapas de Poincaré a partir da variação de determinado parâmetro (MONTH; RAND, 1980). . . . .	23
Figura 10 – Sistema linear discreto de 2 GDLs. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos dos GDLs. . . . .	25
Figura 11 – DCLs de um sistema linear: (a) corpo da esquerda e (b) corpo da direita. . . . .	25
Figura 12 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola linear para $h = 1$ . . . . .	29
Figura 13 – Sistema massa-mola não-linear discreto de 2 GDLs. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos dos GDLs. . . . .	30
Figura 14 – DCLs de um sistema não-linear: (a) corpo da esquerda e (b) corpo da direita. . . . .	30
Figura 15 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para baixas energias ( $h = 0.4$ ). As variáveis $c_1$ e $c_2$ são analisadas de 0 a 0.4. a) $K_{22} = 0.01$ , b) $K_{22} = 0.1$ , c) $K_{22} = 1$ e a) $K_{22} = 10$ . . . . .	33

Figura 16 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para valores intermediários de energia ( $h = 50$ ). As variáveis $c_1$ e $c_2$ são analisadas de 0 a 50. a) $K_{22} = 0.01$ , b) $K_{22} = 0.1$ , c) $K_{22} = 1$ e d) $K_{22} = 10$ . . . . .	34
Figura 17 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para altas energias ( $h = 150$ ). As variáveis $c_1$ e $c_2$ são analisadas de 0 a 150. a) $K_{22} = 0.01$ , b) $K_{22} = 0.1$ , c) $K_{22} = 1$ e d) $K_{22} = 10$ . . . . .	35
Figura 18 – Relação entre os deslocamentos do sistema massa-mola não-linear com $K_{22} = 10$ respondendo em cada MNL estável isoladamente. a) 1º MNL estável, com $c_2 = 0$ . b) 2º MNL estável, com $c_1 = h$ . c) 3º MNL estável, com $c_1 = 24.4917$ (curva azul) e $c_1 = 76.3925$ (curva roxa) e d) 4º MNL estável, com $c_2 = 76.3925$ (curva roxa). . . . .	37
Figura 19 – Esboço do virabrequim. (a) Sistema real. (b) Sistema com inércia equivalente. (GENTA, 2012). . . . .	39
Figura 20 – Esboço da manivela (circunferência), da biela (linha azul) e do mecanismo de pistão (à direita). As linhas vermelhas representam o referencial adotado e as linhas cinzas representam o sistema de coordenadas cartesiano. . . . .	40
Figura 21 – Representação esquemática de um sistema biela-manivela de 2 GDLs. O motor está representado à esquerda e a carga movida à direita. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos angulares dos GDLs. . . . .	42
Figura 22 – DCL do motor. Os momentos angulares estão representadas em azul e os referenciais adotados em vermelho. . . . .	43
Figura 23 – Mapa de Poincaré do sistema não-linear com inércia variável para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) Mapa completo, as variáveis $\ell_1$ e $\ell_2$ são analisadas de 0 a $\sqrt{2h[I_E(0) + I_L]}$ . b) Ampliação do mapeamento de $\ell_2 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$ . . . . .	49
Figura 24 – Evolução temporal da diferença dos deslocamentos de cada GDL, $\eta$ , e sua respectiva velocidade, $\dot{\eta}$ , para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) Primeiro MNL ( $\ell_2 = 0 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). b) Na vizinhança do segundo MNL ( $\ell_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). c) Na vizinhança do terceiro MNL ( $\ell_1 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). d) Na vizinhança do quarto MNL ( $\ell_1 = 1.99599 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). . .	51
Figura 25 – Relação entre os deslocamentos do sistema não-linear com inércia variável sujeitos a MNLs estáveis para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) MNL fora de fase (inclinação negativa). b) Respostas próximas a um MNL em fase (inclinação positiva). . . . .	52
Figura 26 – Mapa de Poincaré do sistema não-linear com inércia variável para altas energias ( $h = 150 \text{ J}$ ). As variáveis $\ell_1$ e $\ell_2$ são analisadas de 0 a $\sqrt{2h[I_E(0) + I_L]}$ . . . . .	53

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Hipóteses e propriedades válidas e não válidas para as principais definições de um modo de vibrar. . . . .	17
Tabela 2 – Resultados da quantidade e estabilidade dos MNLs para diferentes valores de $h$ e $K_{22}$ . . . . .	36
Tabela 3 – Constantes usadas para a obtenção dos mapas de Poincaré do sistema de inércia variável. . . . .	47

# Lista de abreviaturas e siglas

CI	Condição Inicial;
DCL	Diagrama de Corpo Livre;
EDO	Equação Diferencial Ordinária;
EDP	Equação Diferencial Parcial;
EG	Equação Governante;
GDL	Grau de Liberdade;
ML	Modo Linear;
MS	Modo Similar;
MNL	Modo Não-Linear;
MNS	Modo Não-Similar.

# Lista de símbolos

## Símbolos Latinos

$\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$	Função que multiplica o termo de $\mathcal{N}$ -ésima ordem de uma EDO linear;
$a$	Distância do centro de massa da biela até o pino da manivela;
$B$	Ponto do pino da manivela com a biela;
$b$	Distância do centro de massa da biela até o pistão;
$\mathcal{C}_z$	Constante que multiplica o $z$ -ésimo termo da combinação linear que caracteriza a solução exata de uma EDO linear;
$C$	Conservação de energia presente no modo em fase;
$C^*$	Energia do modo em fase modificada;
$C_{int}$	Constante de integração arbitrária;
$c$	Curva de nível da energia presente do modo em fase;
$c_1$	Primeira possibilidade de se limitar o sistema a um determinado valor de energia do modo em fase;
$c_2$	Segunda possibilidade de se limitar o sistema a um determinado valor de energia do modo em fase;
$c_E$	Amortecimento viscoso torsional do motor (“engine”);
$c_L$	Amortecimento viscoso torsional da carga movida (“load”);
$c_0$	Amortecimento viscoso torsional do eixo;
$d$	Número inteiro constante, usado para indicar um múltiplo de $2\pi$ ;
$F$	Discretização do vetor da função transformadora das variáveis de estado;
$\mathcal{F}$	Função que caracteriza se uma EDO é homogênea ou não;

$\mathcal{F}$	Força resultante de um elemento de inércia;
$f$	Vetor das funções transformadoras das variáveis de estado;
$f_i$	$i$ -ésimo componente do vetor das funções transformadoras das variáveis de estado;
$G$	Ponto representativo do centro de massa da biela;
$g$	Integral primeira de um determinado sistema dinâmico;
$H$	Hamiltoniano de um sistema dinâmico;
$h$	Curva de nível da função Hamiltoniano ou energia total de um sistema conservativo;
$I_b$	Momento de inércia da biela;
$I_d$	Momento de inércia do disco que caracteriza a manivela;
$I_E$	Momento de inércia equivalente do motor (“engine”);
$I_L$	Momento de inércia da carga movida (“load”);
$I_0$	Momento de inércia de um sistema equivalente ao de uma biela;
$K_{qs}$	$s$ -ésimo termo da $q$ -ésima mola não linear;
$k_q$	Rigidez linear da $q$ -ésima mola;
$k_0$	Rigidez do eixo;
$L_b$	Comprimento da biela;
$L$	Momento angular total do sistema;
$\ell$	Curva de nível do momento angular total do sistema;
$\ell_1$	Primeira possibilidade de se limitar o sistema a um determinado valor de momento angular;
$\ell_2$	Segunda possibilidade de se limitar o sistema a um determinado valor de momento angular;
$\mathcal{L}$	Lagrangeano de um sistema físico;
$M_j$	momento resultante proveniente de fontes não conservativas aplicado no $j$ -ésimo GDL;
$m_j$	Massa do $j$ -ésimo elemento de inércia;
$m_b$	Massa da biela;

$m_d$	Massa da manivela ou do disco;
$m_p$	Massa do pistão;
$m_{b1}$	Primeira componente da massa da biela;
$m_{b2}$	Segunda componente da massa da biela;
$N$	Número dos graus de liberdade de um sistema;
$\mathcal{N}$	Número de termos totais de uma combinação linear que caracteriza a solução exata de uma EDO linear;
$n$	Dimensão do campo vetorial das variáveis de estado;
$O$	Centro do disco representativo da manivela;
$P$	Ponto característico do pistão ou alfinete de pulso;
$p_1$	Função proveniente do efeito das duas massas da biela em um mecanismo biela-manivela;
$p_2$	Função proveniente do efeito do momento de inércia equivalente, $I_0$ , em um mecanismo biela-manivela;
$p_3$	Função auxiliar para o cálculo da variação da inércia;
$p_u$	Momento generalizado em relação à coordenada $u$ ;
$R$	Raio da manivela;
$S_q$	Força de restauração fornecida pela $q$ -ésima mola;
$T$	Período de uma resposta periódica de um sistema dinâmico;
$t$	Tempo;
$t_0$	Condição inicial temporal de um sistema;
$u_j$	Deslocamento do $j$ -ésimo GDL de um sistema;
$u_{j0}$	Condição inicial de deslocamento do $j$ -ésimo GDL;
$V$	Volume contido dentro do espaço de fase;
$v_j$	Velocidade do $j$ -ésimo GDL de um sistema;
$v_{j0}$	Condição inicial de velocidade do $j$ -ésimo GDL;
$w$	Deflexão da mola;
$X$	Discretização do campo vetorial das variáveis de estado;
$x$	Campo vetorial representativo das variáveis de estado;
$x_0$	Condição inicial de um sistema no espaço de fase.

## Símbolos Gregos

$\alpha_j$	Constante que indica a razão do deslocamento do $j$ -ésimo GDL com o deslocamento do primeiro GDL;
$\gamma$	Deslocamento angular da biela em relação ao pistão;
$\eta$	Diferença entre o deslocamento angular do motor e o deslocamento angular da carga movida;
$\theta$	Deslocamento angular do disco representativo da manivela ou deslocamento angular do motor;
$\lambda$	Razão de aspecto entre os comprimentos da manivela e da biela;
$\mu$	Constante que auxilia na definição de um sistema linear;
$\xi_j$	Deslocamento do $j$ -ésimo GDL de um sistema quando este responde em um modo linear ou não-linear;
$\Sigma$	Superfície de Poincaré;
$\phi$	Solução exata ou analítica ou resposta temporal de um sistema dinâmico;
$\phi_e$	Solução discreta ou numérica de um sistema dinâmico;
$\phi_h$	Solução homogênea de um sistema dinâmico;
$\phi_p$	Solução particular de um sistema dinâmico;
$\varphi$	Deslocamento angular da carga movida;
$\psi_c$	Energia cinética de um sistema;
$\psi_p$	Energia potencial de um sistema;

## Subscritos

$e$	Subíndice de iteração do método numérico;
$i$	Subíndice representativo de cada variável de estado;
$j$	Subíndice representativo de cada GDL;
$q$	Subíndice representativo de cada elemento de rigidez presente em um sistema dinâmico;

$s$	Subíndice representativo de cada termo polinomial presente na rigidez de uma única mola;
$z$	Subíndice representativo de cada termo da solução analítica de uma EDO linear.

## Sobrescritos

$\cdot$	Derivada em relação ao tempo;
$'$	Derivada de uma função de uma única variável;
$\sim$	Derivada parcial em relação ao espaço.

## Símbolos matemáticos

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiro;
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais;
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\nabla$	Operador nabra em relação às coordenadas do espaço de fase;
$\frac{d}{dt}$	Operador derivada em relação a variável $t$ ;
$\frac{\partial}{\partial t}$	Operador derivada parcial em relação a variável $t$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação do Tema	1
1.2	Objetivo	2
1.3	Metodologia	3
1.4	Organização do Texto	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA E CONCEITOS TEÓRICOS</b>	<b>5</b>
2.1	Sistemas Dinâmicos	5
2.1.1	Sistemas Lineares	7
2.1.2	Sistemas Não-Lineares	8
2.2	Soluções Periódicas	9
2.3	Soluções Caóticas	10
2.4	Estabilidade	10
2.5	Sistemas Conservativos	11
2.5.1	Sistemas Hamiltonianos	12
2.6	Integral Primeira	13
2.7	Modos Lineares	13
2.8	Modos Não-Lineares	15
2.8.1	Definição de Rosenberg	16
2.8.2	Definição de Shaw e Pierre	16
2.9	Modos Similares e Não-Similares	18
2.10	Seção de Poincaré	19
2.10.1	Escolha da Seção de Poincaré	21
2.11	Obtenção dos Modos pela Seção de Poincaré	22
2.12	Considerações Finais	23
<b>3</b>	<b>SISTEMA MASSA-MOLA LINEAR</b>	<b>25</b>
3.1	Obtenção das Equações Governantes	25
3.2	Cálculo das Integrais Primeiras	27
3.3	Resultados - Sistema Massa-Mola Linear	28

	<b>4 SISTEMA MASSA-MOLA NÃO-LINEAR . . . . .</b>	<b>30</b>
4.1	Obtenção das Equações Governantes . . . . .	30
4.2	Cálculo das Integrais Primeiras . . . . .	31
4.3	Resultados - Sistema Massa-Mola Não-Linear . . . . .	32
	<b>5 SISTEMA TORSIONAL DE UM MOTOR NÃO-LINEAR . . . . .</b>	<b>39</b>
5.1	Obtenção de um Sistema Equivalente . . . . .	39
5.2	Obtenção das Equações Governantes . . . . .	42
5.3	Cálculo das Integrais Primeiras . . . . .	45
5.4	Resultados - Sistema Torsional de um Motor Não-Linear . . . . .	47
	<b>6 CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>58</b>
	<b>APÊNDICE A – ENERGIA TOTAL DE UM SISTEMA DINÂMICO</b>	<b>59</b>
A.1	Sistema Massa-Mola Linear . . . . .	59
A.2	Sistema Massa-Mola Não-Linear . . . . .	61
	<b>APÊNDICE B – VERIFICAÇÃO DAS INTEGRAIS PRIMEIRAS . . . . .</b>	<b>63</b>
B.1	Sistema Massa-Mola Linear . . . . .	63
B.1.1	Hamiltoniano . . . . .	63
B.1.2	Energia do Modo em Fase . . . . .	63
B.2	Sistema Massa-Mola Não-Linear . . . . .	64
B.2.1	Hamiltoniano . . . . .	64
B.2.2	Energia do Modo em Fase . . . . .	65
B.3	Sistema Torsional Não-Linear . . . . .	66
B.3.1	Hamiltoniano . . . . .	66
B.3.2	Momento Angular Total . . . . .	67
	<b>APÊNDICE C – CÁLCULO DAS CONDIÇÕES INICIAIS . . . . .</b>	<b>69</b>
C.1	Sistema Massa-Mola Linear . . . . .	69
C.2	Sistema Torsional Não-Linear . . . . .	70
	<b>APÊNDICE D – MÉTODO ALTERNATIVO PARA A OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES . . . . .</b>	<b>73</b>
D.1	Sistema Massa-Mola Linear . . . . .	73
D.2	Sistema Massa-Mola Não-Linear . . . . .	73
	<b>APÊNDICE E – CÁLCULOS DO MOTOR NÃO-LINEAR . . . . .</b>	<b>75</b>

<b>E.1</b>	<b>Cálculo Analítico da Derivada da Inércia</b>	<b>75</b>
E.1.1	Imposição $I'_E(\theta) = 0$	77
<b>E.2</b>	<b>Dedução das Equações Governantes</b>	<b>78</b>
E.2.1	Método de Lagrange (resultado errôneo)	78
E.2.2	Correção pelo Método de Newton	80

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação do Tema

O comportamento de sistemas não-lineares intriga cientistas até hoje. Uma grande parte dos fenômenos físicos da natureza possui não-linearidades. Alguns exemplos são: movimento de corpos celestes, como o problema dos três corpos (KRISHNASWAMI; SENAPATI, 2019), previsão meteorológica (BENGTSSON; GHIL; KÄLLÉN, 1981), crescimento populacional de insetos (COSTANTINO et al., 1997) e simulações do sistema imunológico do corpo humano a nível molecular (DINICOLA et al., 2011). A complexidade desses fenômenos é notável, uma vez que, usualmente, não existem soluções analíticas.

Sistemas não-lineares podem apresentar respostas regulares ou irregulares, incluindo respostas caóticas. Nesse aspecto, o comportamento oriundo do caos contém uma grande sensibilidade às Condições Iniciais (CIs), isto é, pequenas perturbações têm efeitos consideráveis na evolução temporal do fenômeno físico. Esta característica foi popularizada pelo nome de efeito borboleta.

Em um contexto histórico, a análise de problemas não-lineares foi evitada, dado o êxito da mecânica linear. Por causa disso, instaurou-se, na comunidade científica, uma percepção de que pequenas causas acarretam pequenos efeitos. Contudo, a crescente demanda da sociedade em descrever e simular de maneira mais realista os problemas físicos motivou a fundamentação teórica de sistemas não-lineares. Como consequência, a fenomenologia não-linear quebra os preceitos adquiridos em sistemas lineares, isto é, algumas propriedades bem conhecidas de modelos lineares não são mais válidas, como o princípio da superposição.

A abordagem modal é uma metodologia de resolução utilizada tanto em sistemas lineares discretos quanto em sistemas lineares contínuos. Sua importância consiste na aquisição da resposta livre de um sistema linear, com ou sem dissipação de energia. A obtenção dos modos, para um caso linear e conservativo, baseia-se nas hipóteses de movimentos sincronizados e de separação de variáveis. Com isso, obtém-se os modos normais ou modos naturais do problema. Neste trabalho, denominam-se os modos normais como Modos Lineares (MLs). Tais variáveis, obtidas a partir de uma mudança de coordenadas, permitem o desacoplamento do sistema, o que facilita a sua resolução analítica.

Em suma, um ML descreve propriedades espaciais de um sistema dinâmico. Deve-se atentar para a diferença entre a solução normal, nome dado às variáveis obtidas na mudança de coordenadas que facilita a resolução do sistema dinâmico, e o ML, atributo espacial do sistema, que pode ser descrito tanto por vetor (autovetor) quanto por uma função contínua (autofunção). Para sistemas sem forçamento, as soluções de um sistema linear podem ser obtidas pela combinação linear de suas coordenadas normais.

O conceito de Modos Não-Lineares (MNLs) teve como base a extensão do conceito de modo natural, isto é, tentou-se generalizar o problema, de que o ML fosse um caso específico de um MNL. Na literatura, há duas principais definições distintas para um MNL: uma estabelecida por Rosenberg (1962), que descreveu o fenômeno como um movimento síncrono e periódico de todos os Graus de Liberdade (GDLs), e uma determinada por Shaw e Pierre (1993), baseada em argumentos geométricos do sistema (variedades invariantes) e que não depende mais de sua sincronicidade. A nomenclatura de soluções normais passa a ser soluções modais, em sistemas não-lineares. Mais informações podem ser encontradas em Savi (2006), Kerschen et al. (2009), Gonçalves (2012) e Savi e Paula (2017).

A teoria de fenômenos não-lineares é essencial em diversas áreas da engenharia mecânica, por exemplo, a dinâmica de motores. Esses resultados são aplicados em projetos práticos de engenharia, como na investigação de causas de falha de ignição do motor. Alguns exemplos são ilustrados por Metallidis e Natsiavas (2003) e Genta (2012).

## 1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo geral obter os modos não-lineares de 2 sistemas não-lineares de 2 GDLs através de um mapa de Poincaré. Diante do exposto, os objetivos específicos são:

- Determinar o sistema equivalente conservativo;
- Deduzir expressões para duas integrais primeiras desse sistema, parâmetros que influenciam na construção do mapa de Poincaré. Usualmente, uma das integrais primeiras é a energia total;
- Plotar o mapa de Poincaré pela utilização de métodos numéricos para diferentes valores das integrais primeiras;
- Identificar quais valores das integrais primeiras correspondem aos modos mediante o formato do mapa.
- Inferir a estabilidade orbital dos modos obtidos pela geometria do mapa;

Assim, analisam-se 1 sistema linear e 2 sistemas não-lineares. Primeiro, considera-se um sistema massa-mola linear de 2 GDLs cujo resultado é conhecido: o número de MLs é

igual ao número de GDLs. Dessa forma, visa-se ao aprendizado conceitual do método com um sistema mais simples e à validação da implementação computacional. Segundo, estuda-se um sistema massa-mola não-linear de 2 GDLs, descrito por uma rigidez não-linear. Uma análise paramétrica é feita: estuda-se como a quantidade de modos é influenciada pela variação da rigidez não-linear e do nível de energia. Como o sistema é não-linear, o número de MNLs pode diferir do número de GDLs. Por fim, aplica-se a técnica descrita num exemplo prático de dinâmica de motores, um sistema biela-manivela não-linear de 2 GDLs com inércia variável. O sistema é semi-definido, isto é, contém uma frequência natural nula. São considerados um caso para baixa energia e um para alta energia.

Os artigos usados para validar os resultados deste trabalho são Month e Rand (1980), para o massa-mola sistema linear, e Vakakis e Rand (1992a) e Vakakis e Rand (1992b), para o sistema massa-mola não-linear.

### 1.3 Metodologia

Em suma, o estudo de sistemas não-lineares apresenta duas principais abordagens: uma qualitativa, que procura entender o comportamento global do sistema, e uma quantitativa, que analisa a sua evolução temporal. A análise quantitativa normalmente aborda métodos numéricos e híbridos para a obtenção da resposta temporal, já que, usualmente, não existem soluções analíticas. Os métodos qualitativos, por sua vez, comumente utilizam técnicas geométricas, de difícil aplicação em sistemas com muitos GDLs. O fundamento dessa análise geométrica provém da topologia, cuja base teórica foi fundada por Poincaré (1899).

O procedimento usual para obter os MNLs de um sistema dinâmico e analisar a estabilidade de cada um deles baseia-se no método da perturbação (teoria de Floquet), seguido pela linearização do problema. A literatura enfatiza que essa metodologia, além de complexa, não é geral, isto é, para alguns casos, ela não funciona. Por esta razão, neste documento, um método alternativo e qualitativo é apresentado, baseado na seção de Poincaré. Nesse assunto, indicam-se os trabalhos de Month e Rand (1980), Vakakis e Rand (1992a) e Vakakis e Rand (1992b).

Assim, utiliza-se o método numérico de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem para obter a solução do sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que descreve o fenômeno não-linear. Com isso, a partir das integrais primeiras do sistema, plota-se o mapa de Poincaré em regime permanente e obtêm-se informações sobre os MNLs através do formato da seção.

## 1.4 Organização do Texto

Este trabalho é composto por 6 capítulos. O capítulo 2 apresenta a revisão de literatura e os conceitos principais utilizados no trabalho, como integral primeira, seção de Poincaré e modos não-lineares. No capítulo 3, descreve-se um sistema massa-mola linear com 2 GDLs e aplica-se a metodologia descrita nesse problema. No capítulo 4, estuda-se um sistema massa-mola não-linear com 2 GDLs, ou seja, mais complexo, e o mesmo método é aplicado. O capítulo 5 aborda a descrição de um sistema não-linear, composto por um mecanismo biela-manivela característico de motores, a obtenção de suas equações governantes e os seus modos não-lineares. O capítulo 6 contém a conclusão do trabalho. Por fim, apresentam-se os apêndices, onde são mostrados algumas demonstrações matemáticas utilizadas no trabalho.

# 2 Revisão de literatura e conceitos teóricos

Este capítulo é dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentam-se as definições necessárias para a compreensão do funcionamento de um sistema não-linear, visando ao aprofundamento do tema e do método utilizado. Por fim, no final do capítulo, mostra-se onde este trabalho se insere na literatura.

## 2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser representado por um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), ou seja,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

em que  $x$  é um campo vetorial representativo das variáveis de estado, que são transformadas de maneira contínua pela função  $f$ , e  $n \in \mathbb{N}$  é a dimensão do espaço de fase.

O espaço de fase atrelado a um sistema dinâmico é o espaço formado pelas variáveis de estado,  $x$ , constituindo um conjunto aberto no  $\mathbb{R}^n$ , ilustrado pela equação (2.1). O estado de um sistema é inteiramente definido pelos valores de todas as variáveis  $x$  em um determinado instante. Por essa razão,  $x$  recebeu o nome de variáveis de estado. Nesse espaço, a solução temporal de um sistema dinâmico forma uma figura, denominada órbita.

Características espaciais de um sistema dinâmico podem ser incluídas ao transformar a equação (2.1) em uma Equação Diferencial Parcial (EDP), de forma que a função transformadora dependa das derivadas espaciais, *i.e.*,  $\dot{x} = f(x, \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}, \dots)$ . O conjunto de EDOs ou EDPs descrito pela equação (2.1) é chamado de Equações Governantes (EGs) de um sistema dinâmico.

Um sistema dinâmico pode também ser retratado de forma discreta por

$$X_{e+1} = F(X_e), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

em que  $X$  e  $F$  são, respectivamente, a discretização do campo vetorial  $x$  e da função transformadora,  $f$ . O subíndice  $e$  indica um método iterativo para a obtenção do valor de  $X$ . A equação (2.2) representa um mapeamento ou mapa.

A Figura 1 mostra a comparação entre as equações (2.1) e (2.2). Na Figura 1a, mostra-se a solução exata da equação (2.1), denotada por  $\phi$ . Já a Figura 1b ilustra a solução da equação (2.2), denotada por  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_9$ , que busca aproximar, via um método numérico, a solução exata.

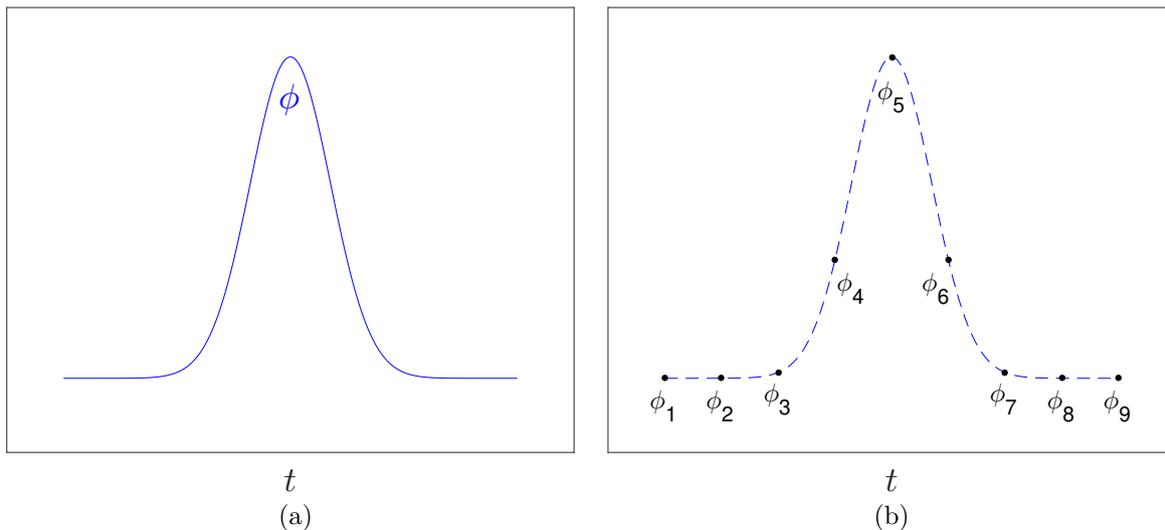


Figura 1 – Solução temporal de um sistema dinâmico. (a) Solução analítica; (b) Solução numérica.

Métodos numéricos podem ser usados para simplificar o problema, na medida em que transforma o sistema de EDOs em um sistema de equações algébricas, *i.e.*, transforma a equação em domínio contínuo de (2.1) em um mapeamento descrito por (2.2). Com isso, obtém-se a solução do sistema dinâmico,  $\phi(t)$ , em um domínio discreto.

Um sistema físico pode ser contínuo ou discreto. Um sistema discreto está associado a um número finito de Graus de Liberdade (GDL), enquanto um sistema contínuo contém infinitos GDLs. Define-se GDL como o número mínimo de coordenadas utilizadas para formular completamente o problema. Usualmente, o deslocamento e a velocidade de cada GDL do sistema é representativo de todas as variáveis de estado. Nesse caso, tem-se

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N), \quad (2.3)$$

em que  $u_j$  é o deslocamento do  $j$ -ésimo de liberdade,  $v_j$  é a velocidade do  $j$ -ésimo grau de liberdade e  $N$  denota o número total de GDLs de um sistema. Nessa circunstância, indicada pela fórmula (2.3), a dimensão do espaço de fase deve estar associada a um número par, ou seja,  $n = 2N$ .

Um sistema é denominado autônomo se a função transformadora,  $f(x)$ , não depende do tempo. Essa condição é indicada pela equação (2.1). No entanto, um sistema não-autônomo apresenta uma função transformadora,  $f(x, t)$ , que depende explicitamente do tempo,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Logo, um sistema não-autônomo pode ser representado como

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Assim, um sistema não-autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo adaptando a dimensão do espaço. Para explicar isso, a equação (2.4) será expandida. Seja um sistema não-autônomo descrito da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x, t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

É possível torná-lo autônomo pela introdução da variável  $x_{n+1} = t$ . Assim, da expressão (2.5), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x), \\ \dot{x}_{n+1} &= 1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ou, de uma forma compacta,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.7)$$

Assim, é possível atribuir características a sistemas dinâmicos baseado apenas na definição de um sistema autônomo.

### 2.1.1 Sistemas Lineares

Savi (2006) define um sistema dinâmico linear como um conjunto de EDOs da equação (2.1) que atendem às condições

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

$$f(\mu x) = \mu f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

em que  $\mu$  é uma constante qualquer.

De maneira análoga, Gershenfeld (1999) define uma EDO linear de acordo com

$$\frac{d^{\mathcal{N}}\phi}{dt^{\mathcal{N}}} + A_1(t)\frac{d^{\mathcal{N}-1}\phi}{dt^{\mathcal{N}-1}} + \cdots + A_{\mathcal{N}-1}(t)\frac{d\phi}{dt} + A_{\mathcal{N}}(t)\phi = \mathcal{F}(t), \quad (2.10)$$

em que  $t$  é a variável independente,  $\phi$  é a variável dependente e a solução da EDO,  $\mathcal{N}$  é a ordem da EDO e  $A_1(t), A_2(t), \dots, A_{\mathcal{N}}(t), \mathcal{F}(t)$  são funções quaisquer. Uma equação diferencial é dita homogênea se  $\mathcal{F}(t) = 0$ . Caso contrário, ela é dita não-homogênea.

Uma EDO homogênea de ordem  $\mathcal{N}$  terá  $\mathcal{N}$  soluções linearmente independentes. Pelo princípio da superposição, uma combinação linear dessas soluções também será uma solução, denominada solução geral e descrita por

$$\phi_h(t) = \sum_{z=1}^{\mathcal{N}} C_z \phi_z, \quad (2.11)$$

em que  $\phi_h(t)$  é a solução homogênea e  $C_z$  são constantes. Se uma solução particular da EDO não-homogênea, denominada  $\phi_p$ , pode ser encontrada, então a solução completa será a soma da homogênea com a particular, isto é,  $\phi(t) = \phi_h(t) + \phi_p(t)$ . A solução homogênea representa a resposta transiente do sistema às CIs, enquanto a solução particular indica a resposta do sistema proveniente do termo não-homogêneo,  $\mathcal{F}(t)$ .

## 2.1.2 Sistemas Não-Lineares

Qualquer sistema dinâmico que não atenda às equações (2.8) e (2.9) ou, equivalentemente, à fórmula (2.10), será dito não-linear. Como consequência, o princípio da superposição, usado na seção 2.1.1, não é mais válido.

A maioria dos fenômenos da natureza são descritos por EDOs não-lineares. Tais sistemas comumente não apresentam soluções analíticas, sendo necessário métodos alternativos para avaliar suas respostas. Nesse quesito, o fenômeno vibratório pode apresentar uma grande variedade de soluções. Uma delas é o caos, marcado pela imprevisibilidade e grande sensibilidade às CIs.

Um sistema dinâmico autônomo não-linear necessita de, pelo menos, 3 dimensões para responder de maneira caótica. Assim, da equação (2.1), deve-se ter  $n \geq 3$ , se a função transformadora for independente do tempo, ou, da equação (2.7), deve-se ter  $n \geq 2$ , caso o sistema dependa explicitamente do tempo. Ademais, um fenômeno não-linear pode

apresentar vários pontos de equilíbrio, enquanto um sistema linear apresenta um ponto de equilíbrio para cada GDL.

Além disso, sistemas não-lineares podem apresentar comportamentos extremamente complexos, como saltos dinâmicos, bifurcações, ressonâncias internas e interações modais. Sistemas lineares são mais bem comportados e não apresentam tais características.

Segundo Rosenberg (1966), o estudo de sistemas não-lineares com muitos GDLs tem como objetivo determinar algumas ou, se possível, todas as soluções periódicas oriundas de EDOs não-lineares. Como esse campo não é unificado, diferentes abordagens matemáticas tentam obter resultados parciais desse problema. Essas informações são comumente classificadas de duas formas: provenientes de sistemas fracamente não-lineares ou de sistemas fortemente não-lineares. A primeira categoria contém uma quantidade razoável de pesquisas. Contudo, a última não detém a mesma base teórica, isto é, a preocupação maior são as questões de existência, unicidade, fronteira e estabilidade das soluções.

## 2.2 Soluções Periódicas

Soluções periódicas são definidas como uma resposta previsível e bem comportada de um sistema dinâmico que se repete após determinado intervalo de tempo,  $T$ , chamado de período. A solução periódica está associada a uma curva fechada no espaço de fase, obtida ao se plotar o deslocamento e a velocidade de cada GDL.

A Figura 2 ilustra um exemplo de uma resposta periódica de um sistema não-linear de 1 GDL. Já a Figura 2b mostra a curva fechada nas variáveis de estado, característico de uma solução periódica.

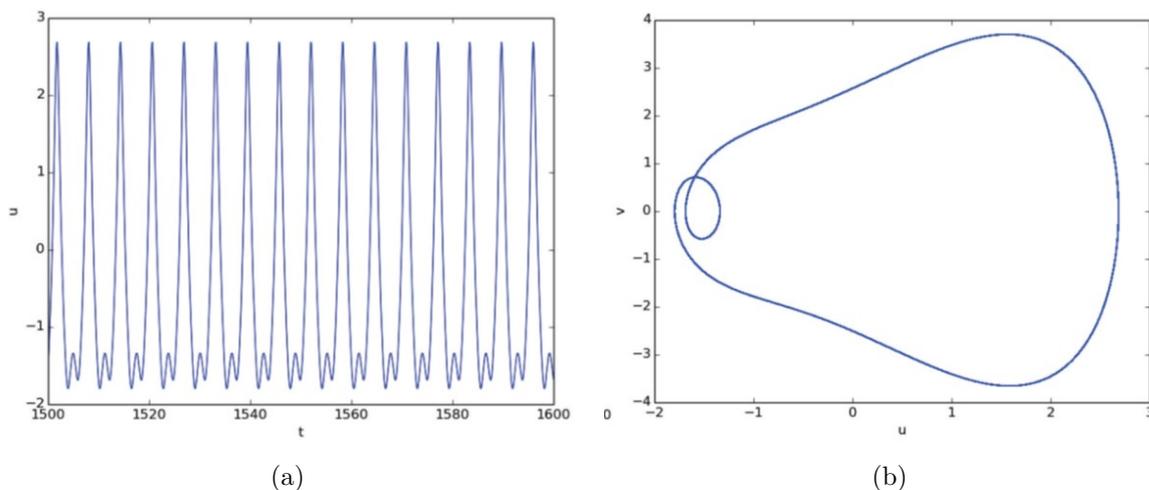


Figura 2 – Resposta periódica de um sistema não-linear. (a) Evolução temporal; (b) Espaço de fase (SAVI, 2006).

## 2.3 Soluções Caóticas

O caos está presente somente em fenômenos não-lineares. Em uma resposta caótica, o sistema se comporta de maneira não-periódica e praticamente imprevisível. A Figura 3 apresenta um exemplo de uma solução caótica de um sistema não-linear de 1 GDL. A não-periodicidade e imprevisibilidade são representadas no espaço de fase, mostrado na Figura 3b, através de uma curva que nunca se fecha.

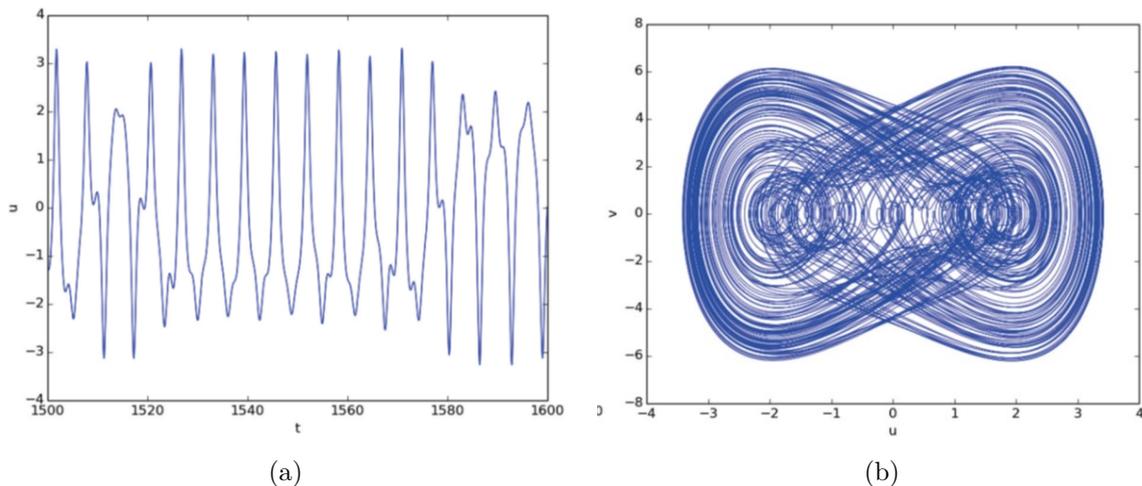


Figura 3 – Resposta caótica de um sistema não-linear. (a) Evolução temporal; (b) Espaço de fase (SAVI, 2006).

## 2.4 Estabilidade

Estabilidade é um conceito usado para caracterizar uma solução de um sistema dinâmico. Consiste em observar como o sistema responde a uma determinada perturbação. A solução é chamada estável, se não for afetada de maneira significativa pela perturbação. Caso contrário, a solução é instável.

De maneira geral, existem quatros casos mais comuns de estabilidade, ilustrados pela Figura 4.

1. *Equilíbrio meta-instável* - Após a perturbação, a solução retorna ao ponto inicial. Porém, há uma posição de equilíbrio mais estável que pode ser atingida para uma maior perturbação (ponto 1 da Figura 4);
2. *Equilíbrio instável* - Após a perturbação, a solução não retorna ao ponto inicial e se desloca para uma posição distante da original (ponto 2 da Figura 4);
3. *Equilíbrio estável* - Após a perturbação, a solução retorna ao seu ponto inicial (ponto 3 da Figura 4);

4. *Equilíbrio neutro ou indiferente* - Após a perturbação, a solução permanece em seu novo estado (ponto 4 da Figura 4);

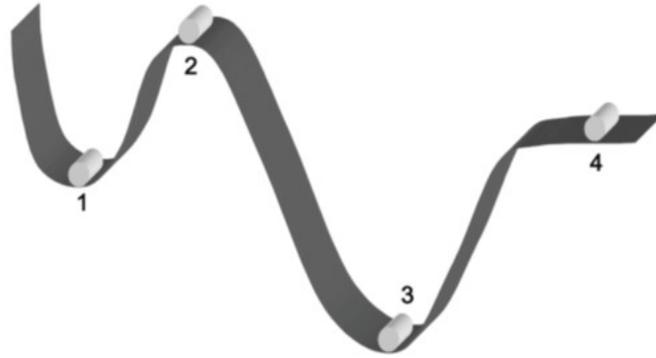


Figura 4 – Diferentes tipos de estabilidade (SAVI, 2006).

A literatura fornece diversas definições de estabilidade, cada uma caracterizada por sua própria equação, como indicado por Coddington e Levinson (1955) e Cesari (2012). Alguns exemplos são: estabilidade assintótica, estabilidade de Lyapunov e estabilidade orbital. Neste documento, apenas a definição de estabilidade orbital é utilizada.

## 2.5 Sistemas Conservativos

Um sistema é classificado como conservativo quando um volume no espaço de fase é preservado com a evolução do tempo. Seja  $V(t)$  o volume de um sistema com  $n$  variáveis de estado descrito por

$$V(t) = \int_V dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n. \quad (2.12)$$

Toma-se a derivada temporal da equação (2.12). Assim, pela regra do produto, obtém-se

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dx_1 \dots dx_n = \int_V d\dot{x}_1 \dots dx_n + \dots + \int_V dx_1 \dots d\dot{x}_n. \quad (2.13)$$

Como, da definição de sistemas dinâmicos,

$$d\dot{x}_i = df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i, \quad (2.14)$$

substitui-se a equação (2.14) em (2.13),

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.15)$$

Define-se o operador nabla,  $\nabla$ , como um vetor cujas componentes indicam a derivada parcial em relação a cada variável de estado, isto é,

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (2.16)$$

Dessa forma, simplifica-se a equação (2.15),

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \nabla \cdot f \, dV. \quad (2.17)$$

Assim, para um sistema ser conservativo, deve-se ter

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

Como consequência, substituindo a equação (2.18) em (2.17), obtém-se

$$\nabla \cdot f = 0. \quad (2.19)$$

Se  $\nabla \cdot f < 0$ , há um sistema dissipativo. Caso  $\nabla \cdot f > 0$ , ocorre um aumento de energia no sistema.

### 2.5.1 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas Hamiltonianos caracterizam importantes fenômenos naturais, por exemplo, a mistura de fluidos e os sistemas mecânicos conservativos. São descritos por uma única função,  $H(u, v)$ , em que  $u, v \in \mathbb{R}^N$ . Dessa forma, a dimensão do espaço de fase é um número par, pois  $n = 2N$ , conforme a equação (2.3).

Segundo Marion (2013), o operador Hamiltoniano,  $H$ , pode ser considerado como a energia total de um sistema sob determinadas circunstâncias, as quais garantem que

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.20)$$

As componentes da energia total são a energia potencial,  $\psi_p(u)$ , e a energia cinética,  $\psi_c(v) = \psi_c(\dot{u})$ . Pelo princípio da conservação de energia, tem-se

$$H(u, v) = \psi_p(u) + \psi_c(v) = h, \quad (2.21)$$

em que  $h$  é uma constante, definida como a curva de nível da função  $H(u, v)$ . A equação governante de um sistema Hamiltoniano de dimensão  $2N$  é dada por

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \frac{\partial H}{\partial v_i} \\ \dot{v}_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i} \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}^N. \quad (2.22)$$

Assim, pode-se obter diversas órbitas no espaço de fase a partir da variação da curva de nível,  $h$ .

## 2.6 Integral Primeira

Sastry (2013) define que uma função não constante  $g$  é denominada uma integral primeira de um sistema dinâmico se ela for uma grandeza conservada com o decorrer do tempo, isto é,

$$\frac{d}{dt}g(u_i, v_i, t) = 0. \quad (2.23)$$

Nota-se que a equação (2.23) está representada para um sistema não-autônomo. Pela regra da cadeia, de (2.23), chega-se em

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Percebe-se, pelas equações (2.20) e (2.23), que o Hamiltoniano de um sistema dinâmico conservativo é uma integral primeira. No entanto, outras funções podem atender à equação (2.23). É necessário determinar outras integrais primeiras do sistema dinâmico para quantificar a distribuição de energia. Com isso, dado um nível fixo de energia  $h$ , é possível avaliar diferentes casos possíveis.

## 2.7 Modos Lineares

Gonçalves (2012) descreve a história da busca científica do conceito de modo de vibração. Esse fenômeno tem como origem a resposta específica de sistemas lineares. Primeiro, caracterizou-se um Modo Linear (ML), descrito como um movimento sincronizado e periódico de todos os GDLs e representado por um problema de autovalores e autovetores (sistema discreto) ou autovalores e autofunções (sistema contínuo).

A comunidade científica empenhou-se em encontrar uma definição de um ML, a qual descreva unicamente e corretamente essa entidade para sistemas lineares e que seja possível estendê-la para sistemas não-lineares.

Os MLs desempenham um papel essencial na resolução de sistemas lineares, pois a resposta analítica é sempre passível de ser encontrada, através da combinação linear de todos os MLs do sistema. Para fenômenos lineares, há uma equivalência entre o número de GDLs e a quantidade de MLs, *i.e.*, são iguais. Além disso, é possível definir uma ortogonalidade entre esses MLs. Conseqüentemente, em sistemas lineares, os modos são também denominados modos normais (ortogonais) ou modos naturais.

Um ML desempenha um papel crucial na teoria de sistemas lineares. As respostas modais podem ser usadas para desacoplar as equações governantes, isto é, qualquer fenômeno linear vibra como se existissem osciladores independentes, cada um governado por seu autovalor. Os MLs apresentam propriedades matemáticas notáveis, provenientes do desacoplamento, como:

1. *Invariância* - Se o movimento de um sistema se inicia em um ML específico, os MLs restantes permanecem em repouso durante todo o tempo;
2. *Superposição modal* - Vibrações livres e forçadas podem ser expressas através de combinações lineares do movimento de cada ML.

A propriedade de invariância indica que, se um sistema linear tiver uma CI igual ou proporcional a um de seus MLs, o sistema irá responder nesse determinado modo durante todo o movimento. Já a propriedade de superposição modal provém do princípio da superposição de EDOs, descrito na seção 2.1.1.

Seja  $\xi$  o vetor de deslocamento dos GDLs de um sistema enquanto este se locomove em um modo, linear ou não-linear. Isso significa que  $\xi$  obedece a equação (2.1), na medida em que

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_N). \quad (2.25)$$

Porém, apenas as soluções que respondem em um determinado modo são consideradas. Para sistemas lineares, isso significa que  $\xi$  é uma resposta temporal cuja CI é proporcional a um determinado ML, de forma a garantir a invariância do movimento.

A definição de um ML começa pelas equações

$$\xi_j(t) = \xi_j(t + T), \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (2.26)$$

$$\frac{\xi_j(t)}{\xi_1(t)} \equiv \alpha_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (2.27)$$

em que  $t$  é o tempo,  $N$  é o número de graus de liberdade do sistema,  $\xi_j(t)$  é o deslocamento do  $j$ -ésimo GDL em determinado modo,  $T$  é o período compartilhado por todas as soluções periódicas e síncronas e  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  é uma constante.

A equação (2.26) mostra que as soluções de um sistema linear que vibra em um ML são todas periódicas de mesmo período, enquanto a equação (2.27) indica que a razão do deslocamento de qualquer um dos GDLs com o deslocamento de outro GDL é identicamente igual a uma constante que não depende do tempo. Na equação (2.27), escolheu-se a coordenada  $\xi_1(t)$  por simplicidade, isto é, outra coordenada poderia ter sido escolhida em seu lugar.

Da equação (2.27), obtém-se

$$\xi_j(t) = \alpha_j \xi_1(t), \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2.28)$$

Suponha que exista um instante  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi_1(t_0) = 0$ . Com isso, pela substituição  $t = t_0$  na equação (2.28), chega-se em

$$\xi_j(t_0) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2.29)$$

A equação (2.29) mostra que todos os GDL passam por suas respectivas posições de equilíbrio no mesmo instante quando o sistema vibra em um ML, o que determina um movimento síncrono.

Portanto, duas propriedades caracterizam um sistema em ML: todos os GDLs vibram na mesma frequência, pela equação (2.26), e a posição de equilíbrio de cada uma das coordenadas é atingida no mesmo instante de tempo, pela equação (2.29).

Algumas aplicações importantes de MLs são o monitoramento de saúde de estruturas e a atualização de modelo de elementos finitos, ambos utilizados pela indústria, como apontado por Kerschen et al. (2009).

## 2.8 Modos Não-Lineares

Ao longo do século XX, buscou-se expandir a definição de MLs para um sistema não-linear, isto é, procurou-se definir um Modo Não-Linear (MNL).

O conceito de modos está bem definido para sistemas lineares somente. Nesse caso específico, sabe-se que a combinação linear das coordenadas normais fornece todas as respostas temporais do sistema. Para sistemas não-lineares, mesmo se for possível isolar soluções equivalentes aos MLs, tais respostas não poderiam ser usadas para obter novas soluções, uma vez que o princípio da superposição não é mais válido. Por causa disso, não é mais possível fazer uma combinação linear das soluções, sequer estabelecer uma equivalência geral entre o número de GDLs e o número de MNLs.

Ademais, perde-se a perpendicularidade entre esses modos. Por esse motivo, conforme Gonçalves (2012), a denominação modos normais não deveria ser mais aplicada em

sistemas não-lineares, já que os modos não são mais ortogonais. Porém, algumas bibliografias ainda citam uma definição de modos normais não-lineares, pelo costume adquirido por sistemas lineares. Dessa forma, neste trabalho, evita-se a denominação normal para variáveis provenientes de fenômenos não-lineares. Em alguns casos, é possível que um sistema dinâmico não contenha nenhum MNL.

Mesmo com essas limitações, o conceito de MNLs permanece útil, tendo em vista que, tanto para casos lineares quanto não-lineares, a ressonância do sistema ocorre na vizinhança de um MNL.

A literatura fornece duas principais definições de MNLs: uma de Rosenberg (1962) e outra de Shaw e Pierre (1993).

### 2.8.1 Definição de Rosenberg

Rosenberg (1962) considera as mesmas definições para MLs. Contudo, o autor generaliza a equação (2.28) para sistemas não-lineares de acordo com

$$\xi_j = \xi_j(\xi_1), \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2.30)$$

A equação (2.30) mostra que todos os deslocamentos podem ser considerados como uma função de um deslocamento do sistema em um MNL. Para se chegar no caso de um ML, basta considerar que todas as  $N$  funções descritas por  $\xi_j$  na expressão (2.30) são lineares.

Portanto, para Rosenberg, um MNL é uma vibração em uníssono do sistema, isto é, uma oscilação síncrona. Essa definição requer que todos os GDLs passem pelos seus pontos de deslocamento nulo e por suas amplitudes máximas simultaneamente. Isso permite que os deslocamentos de todos os GDLs sejam descritos em função do deslocamento de um único GDL, tido como referencial do movimento.

### 2.8.2 Definição de Shaw e Pierre

Shaw e Pierre (1993) propuseram uma extensão da definição de Rosenberg que permite aplicar um MNL a sistemas com amortecimento, *i.e.*, não conservativos. Shaw e Pierre definem um MNL como uma variedade invariante bidimensional no espaço de fase. Isso significa que órbitas que se iniciam nessa superfície permanecem nela durante todo o tempo, isto é, a propriedade de invariância permanece válida. Para parametrizar essa variedade, um par de coordenadas mestras (deslocamento e velocidade) é escolhido, enquanto as outras coordenadas permanecem em função das mestras. Dessa forma, o sistema se comporta como um oscilador de 1 GDL quando o movimento se inicia nessa variedade.

Geometricamente, MLs são representados como planos no espaço de fase e MNLs são representados por superfícies bidimensionais, tangentes aos planos de um ML no ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico.

À primeira vista, a definição de Rosenberg pode apresentar duas desvantagens:

- Ela não pode ser estendida ou aplicada a sistemas não conservativos;
- Na presença de ressonância interna (definida como a interação entre dois MNLs), alguns GDLs podem vibrar em frequências maiores do que outros, mesmo vibrando em um modo. Isso significa que o sistema não pode ser mais caracterizado como síncrono.

Apesar disso, essas duas limitações podem ser contornadas. Primeiro, a indústria usualmente se baseia em sistemas conservativos, isto é, tal hipótese não é um problema. Segundo, nota-se que, durante a ressonância interna, a resposta temporal de um MNL permanece periódica. Com isso, Kerschen et al. (2009) redefinem o MNL de Rosenberg apenas como um movimento periódico de um sistema conservativo, isto é, sem a sincronidade dos GDLs.

A tabela 1 mostra um resumo das propriedades e características dos modos de vibração (ML e MNL) de acordo com suas definições.

	ML	MNL (Rosenberg)	MNL (Shaw e Pierre)
Ortogonalidade	Válida	Não válida	Não válida
Superposição Modal	Válida	Não válida	Não válida
Sincronismo	Válido	Válido	Não válido
Periodicidade	Válida	Válida	Válida
Invariância	Válida	Válida	Válida
Sistemas Não Conservativos	Não válido	Não válido	Válido

Tabela 1 – Hipóteses e propriedades válidas e não válidas para as principais definições de um modo de vibrar.

Neste trabalho, usou-se a definição de um MNL feita por Rosenberg (1962).

## 2.9 Modos Similares e Não-Similares

Até mesmo um sistema não-linear pode possuir alguns modos que apresentem comportamento linear, detalhado pela equação (2.28). Para classificar essa característica, usa-se a denominação Modos Similares (MSs), ou seja, modos que, independente de terem como origem sistemas lineares ou não-lineares, apresentam uma relação linear entre seus deslocamentos. Em contrapartida, Modos Não-Similares (MNSs) são modos cujos deslocamentos são estritamente descritos por funções não-lineares no espaço de fase.

Em suma, todo ML é um MS, enquanto um MNL pode ser ou um MS ou um MNS. Só é possível observar MNSs em sistemas não-lineares, enquanto MSs estão presentes tanto em sistemas lineares quanto não-lineares. Em outras palavras, um MNL é dito MS quando seu comportamento é similar ao de um sistema linear. Para detalhes sobre essa definição, recomendam-se os artigos de Vakakis (1997) e Albu-Schaeffer e Santina (2020).

Uma maneira intuitiva de identificar um modo é através dos deslocamentos dos GDLs do sistema. A Figura 5 ilustra um exemplo de um sistema não-linear de 2 GDLs, passível de responder ou em um MS (Figura 5a) ou em um MNS (Figura 5b).

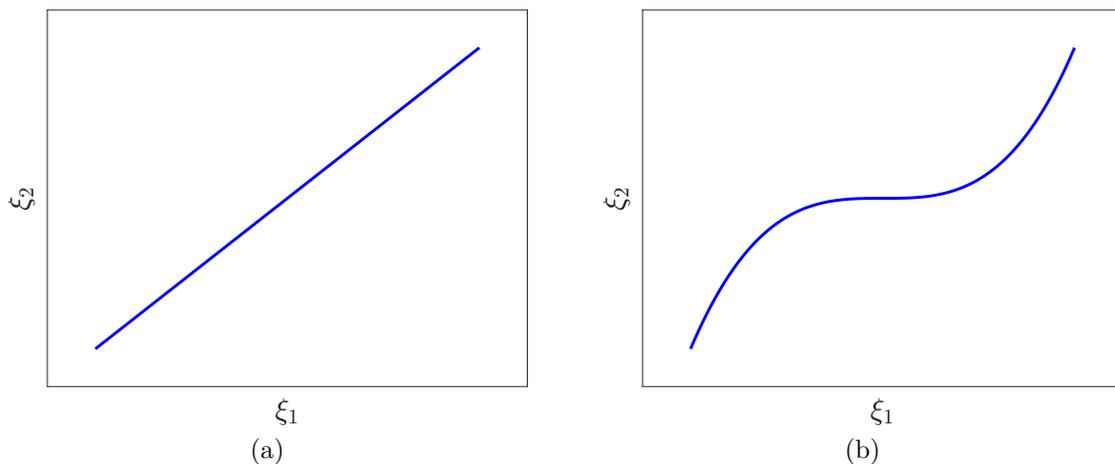


Figura 5 – Relação entre os deslocamentos de um sistema não-linear de 2 GDLs sujeito a diferentes MNLs. (a) Modo Similar; (b) Modo Não-Similar.

Nesse sentido, é possível analisar como cada definição de MNL afeta os deslocamentos dos GDLs no espaço de fase. Tal procedimento é mostrado na Figura 6, onde ilustram-se algumas das principais definições. Da esquerda para a direita, obtém-se uma definição mais abrangente de um MNL. Da direita pra esquerda, é necessário restringir o sistema para que a definição de MNL seja válida.

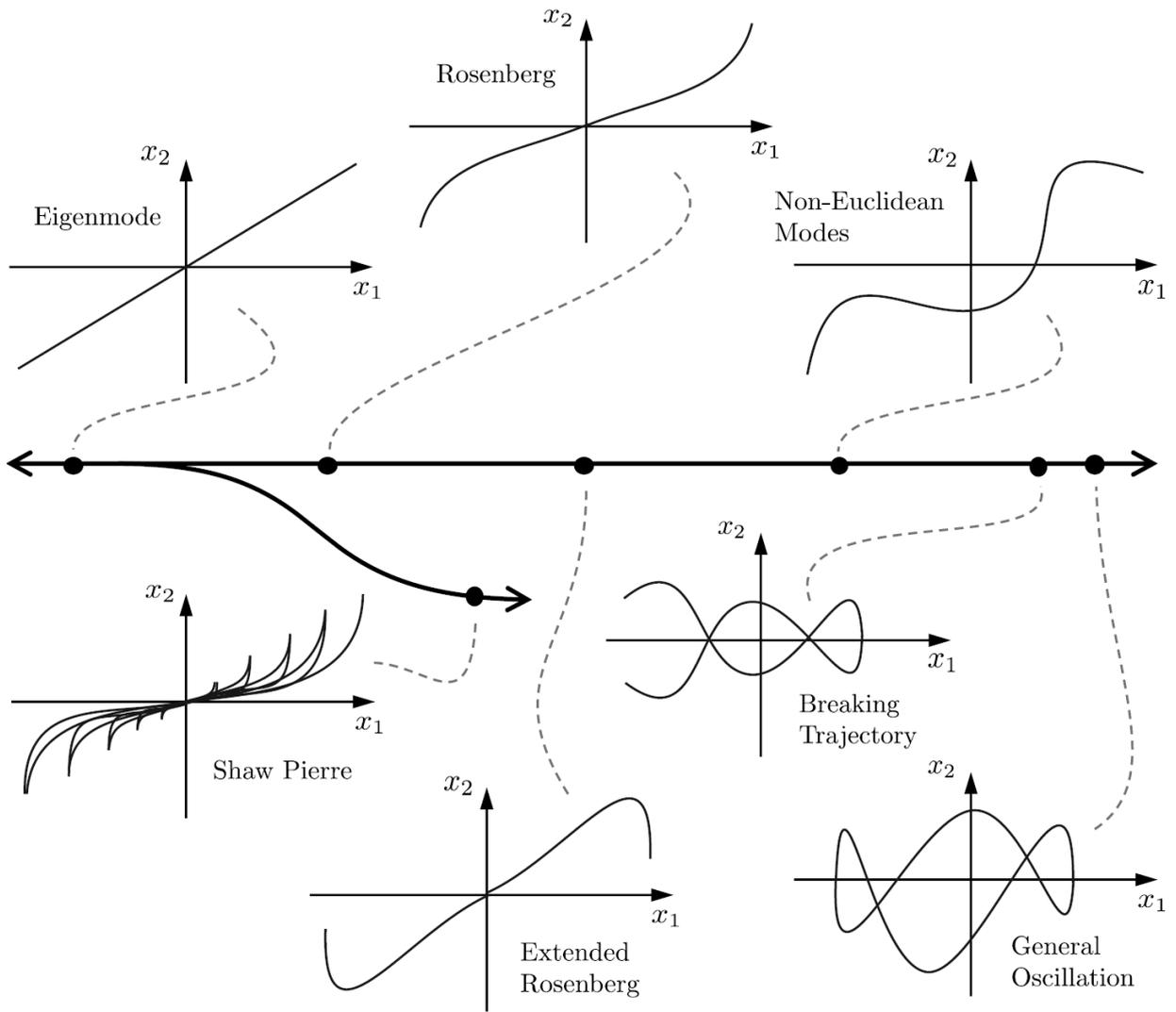


Figura 6 – Definições principais de modos de vibrar e os deslocamentos dos GDLs correspondentes (ALBU-SCHAEFFER; SANTINA, 2020).

A ramificação do gráfico da Figura 6 se deve à presença de amortecimento, considerada por Shaw e Pierre. Nesse caso, nota-se a diminuição da amplitude no movimento modal. As demais definições do gráfico foram feitas para sistemas conservativos.

## 2.10 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é um método que possibilita transformar um sistema dinâmico contínuo e dependente do tempo em um mapa discreto. A partir dessa abordagem, pelo menos uma das variáveis do sistema é eliminada. Como consequência, é possível obter um melhor entendimento da dinâmica global do problema.

Mais especificamente, a seção é definida como uma superfície,  $\Sigma$ , que é transversa ao campo vetorial das variáveis de estado. Com isso, na medida que a solução evolui com o tempo, ela cruza a área definida e registra-se o valor de solução nessa superfície. Por

fim, quando uma quantidade suficiente de pontos foram marcados nesse plano, tem-se um mapa de Poincaré. Em outras palavras, o mapa consiste em um retrato do espaço de fase a cada vez que a solução numérica atinge um determinado valor. Deve-se atentar para a diferença entre seção e mapa de Poincaré: a seção consiste no plano de corte adotado, enquanto o mapa é definido como a seção de Poincaré já preenchida pelo cruzamento da solução.

Segundo Wiggins (2003), a ideia de reduzir o estudo de sistemas contínuos em relação ao tempo a sistemas discretos foi primeiro introduzida por Poincaré, que utilizou essa técnica para resolver o problema dos 3 corpos da mecânica celeste. As principais vantagens do mapa de Poincaré são:

1. *Redução da dimensão.* O mapeamento de Poincaré confere ao sistema a redução de pelo menos uma de suas variáveis. Portanto, diminui-se a dimensão do sistema analisado;
2. *Dinâmica Global.* Em problemas cuja dimensão são menores ou iguais a 4, os mapas de Poincaré construídos numericamente fornecem informações sobre a dinâmica global de um sistema;
3. *Clareza conceitual.* Diversos conceitos de difícil entendimento de EDOs podem ser definidos de maneira sucinta em um mapa de Poincaré, como a questão de estabilidade orbital de uma órbita periódica de uma EDO.

Não existe um método geral para a construção da seção de Poincaré para uma EDO arbitrária. Isso ocorre pois é necessário um conhecimento *a priori* da estrutura geométrica do espaço de fase da EDO. O mapa de Poincaré é usualmente utilizado no estudo de um sistema Hamiltoniano de 2 GDLs, que são os casos retratados neste trabalho.

A Figura 7 exemplifica o mapa de Poincaré obtido para uma resposta com forçamento periódico. Tomam-se apenas os pontos discretos, obtidos de maneira estroboscópica, na superfície transversal. Deve-se avaliar os pontos em que a solução temporal, no espaço de fase, intercepta  $\Sigma$ . Uma resposta é dita periódica de período- $k$  quando ela percorre  $k$  pontos distintos no mapa de Poincaré.

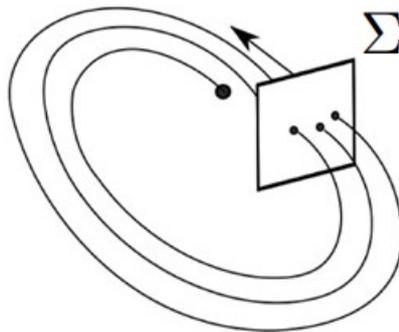


Figura 7 – Espaço de fase de uma solução periódica e seu cruzamento com a superfície de Poincaré,  $\Sigma$ , adaptado de Savi (2006).

Durante a construção da seção, podem haver erros de arredondamento, oriundos da discretização da solução numérica, exemplificada pela Figura 1 da Seção 2.1. Assim, percebe-se que o plano de corte pode estar definido entre dois pontos discretos, o que impede a formação correta da superfície de Poincaré. Uma possível solução para esse problema é aplicar uma interpolação entre os pontos imediatamente após e antes da seção escolhida. Caso não haja esse procedimento e apenas o ponto mais próximo da superfície é selecionado, pequenas perturbações podem ser geradas nos mapas avaliados.

### 2.10.1 Escolha da Seção de Poincaré

Neste trabalho, foram escolhidas duas seções de Poincaré distintas. Para os sistemas dos capítulos 3 e 4, usou-se a mesma superfície escolhida por Vakakis e Rand (1992a) e Vakakis e Rand (1992b). Para o sistema do capítulo 5, foi necessário alterar a escolha da seção.

Para a primeira escolha da superfície de Poincaré, foi utilizado como plano de corte a restrição  $u_1 = 0$ , em que  $u_1$  é o deslocamento do primeiro GDL. Além disso, o mapa de Poincaré deve preservar a orientação, ou seja, a seção deve ser preenchida somente quando a solução intercepta a parte frontal do plano de corte. Se a trajetória temporal cruzar a parte posterior da superfície, o mapa não deve registrar essa intersecção. Por essa razão, em conjunto com  $u_1 = 0$ , adotou-se a restrição  $v_1 > 0$ , em que  $v_1 = \dot{u}_1$  é a velocidade do primeiro GDL.

A Figura 8 mostra o cruzamento da trajetória ou solução temporal com a superfície de Poincaré. Os pontos A e A' devem ser marcados na seção de Poincaré, enquanto o ponto B não deve ser retratado, pois esse último intercepta o plano num sentido contrário.

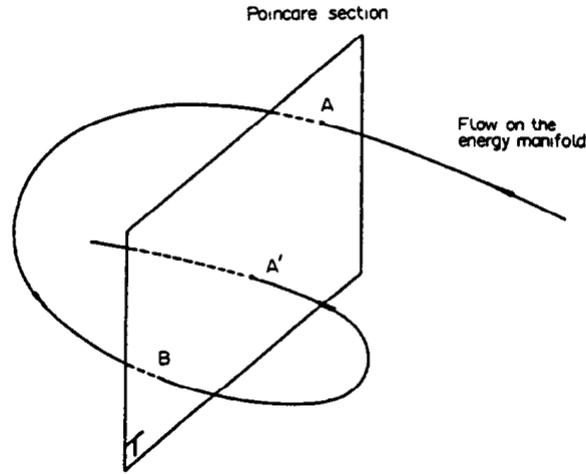


Figura 8 – Representação da trajetória cruzando a superfície de corte (VAKAKIS; RAND, 1992a).

Ademais, considera-se um sistema conservativo, cuja energia é dada pela curva de nível  $H = h$ . Por essas razões, a superfície,  $\Sigma$ , para os capítulos 3 e 4, é definida como a intersecção de dois conjuntos, dado por

$$\Sigma = \{u_1 = 0, v_1 > 0\} \cap \{H = h\}. \quad (2.31)$$

Como o sistema descrito no capítulo 5 é semi-definido, é necessário alterar a escolha da superfície de Poincaré. Para tal fim, modifica-se a equação (2.31). Seja  $\eta$  a diferença dos deslocamentos do primeiro e do segundo GDL, ou seja,

$$\eta = u_1 - u_2. \quad (2.32)$$

Dessa forma, para o capítulo 5, usou-se como plano de corte a equação

$$\Sigma = \{\eta = 2\pi d, v_1 > 0\} \cap \{H = h\}, \quad (2.33)$$

em que  $d \in \mathbb{Z}$ , isto é, neste caso, o mapa é obtido quando a diferença entre os deslocamentos dos 2 GDLs é um múltiplo de  $2\pi$  e, concomitantemente, a velocidade do primeiro GDL é positiva.

## 2.11 Obtenção dos Modos pela Seção de Poincaré

Com o mapa de Poincaré obtido, utiliza-se um método qualitativo para avaliar o comportamento de um sistema de 2 graus de liberdade, descrito por Month e Rand (1980).

A análise qualitativa se dá pelo formato do mapa: identifica-se, ao mesmo tempo, os MNLs e suas estabilidades orbitais pelo esboço obtido, já que um ponto fixo representa um MNL estável e um ponto de sela ilustra um MNL instável.

Além disso, é possível obter uma indicação de um possível comportamento caótico ou quasi-periódico da solução, caso exista um conjunto de pontos sem ordem aparente no mapa de Poincaré, chamado de mar de estocasticidade. A principal desvantagem de um método qualitativo é que não se pode assegurar o tipo de comportamento do sistema (caótico, quasi-periódico ou periódico). Para ratificar essa informação, é necessário averiguá-la através de uma ferramenta quantitativa.

A Figura 9 ilustra um exemplo da identificação de modos. No esboço à esquerda, há quatro MNLs: três estáveis, caracterizados por um ponto fixo, e um instável, marcado pela intersecção de duas curvas. No esboço central, há dois MNLs, isto é, o MNL instável do mapa anterior tornou-se estável e dois estáveis deixaram de existir. No esboço à direita, há quatro MNLs novamente: três estáveis e um instável, devido à bifurcação do MNL estável inferior.

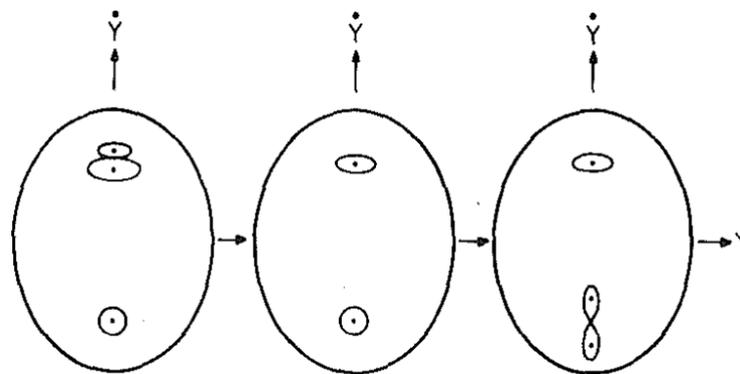


Figura 9 – Esboços da evolução de mapas de Poincaré a partir da variação de determinado parâmetro (MONTH; RAND, 1980).

## 2.12 Considerações Finais

Nesta subseção, posiciona-se o trabalho na literatura.

Month e Rand (1980) estabeleceram um método analítico e numérico, isto é, híbrido, para determinar o mapa de Poincaré a partir de integrais primeiras de um determinado sistema. Com isso, avaliam-se seus modos e suas estabilidades orbitais. Como exemplo, os autores aplicam a metodologia em um sistema linear de 2 GDLs, de forma a obter uma representação gráfica dos MLs presentes em tal sistema.

Vakakis e Rand (1992a) apresentam o mapa de Poincaré de um sistema não-linear de 2 GDLs, com uma rigidez não-linear, para determinados valores de energia total e energia do modo em fase, ambas integrais primeiras. Os autores separam os resultados

em dois trabalhos: um para baixas energias (VAKAKIS; RAND, 1992a) e um para altas energias (VAKAKIS; RAND, 1992b).

Este trabalho utiliza apenas métodos numéricos para a obtenção do mapa de Poincaré, isto é, métodos analíticos não são aplicados. Autores como Albu-Schaeffer e Santina (2020) citam a relação entre as CIs de um sistema e as suas respostas modais. Porém, um método das obtenções dos modos de acordo com as CIs não é explicitamente apresentado. Assim, este trabalho contribui com um método de obtenção das CIs em função das integrais primeiras. A partir disso, é possível deduzir os modos.

Os resultados obtidos no capítulo 3 são coerentes com o trabalho de Month e Rand (1980) e os resultados do capítulo 4 estão de acordo com os artigos de Vakakis e Rand (1992a) e Vakakis e Rand (1992b), o que valida o programa computacional usado.

No que se refere ao sistema do capítulo 4, a contribuição deste trabalho na literatura consiste na obtenção de novas seções de Poincaré para diferentes valores de rigidez não-linear. No que tange ao sistema do capítulo 5, a contribuição se dá pela análise de um sistema não-conservativo com inércia variável. Embora a definição de MNL considerada seja apenas para sistemas conservativos, é possível interpretar o sistema como conservativo a cada deslocamento de  $2\pi$  radianos percorrido pelo primeiro GDL.

### 3 Sistema Massa-Mola Linear

Neste capítulo, aplica-se a metodologia de identificação de modos em um sistema discreto linear. A Figura 10 mostra a representação esquemática de um sistema linear, em que  $k_q$  representa a rigidez linear da  $q$ -ésima mola e  $m_j$  é a massa do  $j$ -ésimo elemento de inércia.

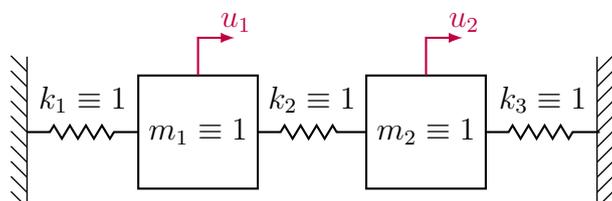


Figura 10 – Sistema linear discreto de 2 GDLs. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos dos GDLs.

Foram utilizados valores adimensionais para as variáveis, com base no trabalho de Month e Rand (1980).

#### 3.1 Obtenção das Equações Governantes

Para a obtenção das EGs, usa-se o método de Newton. A Figura 11 mostra os Diagramas de Corpo Livre (DCLs) das massas da esquerda e da direita, respectivamente.



Figura 11 – DCLs de um sistema linear: (a) corpo da esquerda e (b) corpo da direita.

Assim, pelo equilíbrio das forças, chega-se nas EGs da Figura 11 dadas por

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 + k_2(u_1 - u_2) = 0 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_3u_2 + k_2(u_2 - u_1) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

O apêndice D.1 aponta um método alternativo para a obtenção das EGs. Comparando as equações (2.10) e (3.1), percebe-se que o sistema descrito é linear. Assim, buscam-se os seus MLs.

Verifica-se se o sistema é conservativo. Rearranja-se a equação (3.1) de forma análoga à equação (2.5). Logo,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \ddot{u}_1 = -\frac{k_1}{m_1}u_1 - \frac{k_2}{m_1}(u_1 - u_2) \\ \ddot{u}_2 = -\frac{k_3}{m_2}u_2 - \frac{k_2}{m_2}(u_2 - u_1), \end{cases} \quad (3.2)$$

Adotando  $x_1 = u_1$ ,  $x_2 = u_2$ ,  $x_3 = v_1$  e  $x_4 = v_2$ , chega-se em

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 = f_1 \\ \dot{x}_2 = x_4 = f_2 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) = f_3 \\ \dot{x}_4 = -\frac{k_3}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = f_4. \end{cases} \quad (3.3)$$

Com isso, calcula-se o divergente da função transformadora, visando comparar com a equação (2.19),

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 0. \quad (3.4)$$

Como  $\nabla \cdot f = 0$ , o sistema é conservativo, independentemente dos valores de massa ou rigidez escolhidos. Portanto, a definição de MLs pode ser utilizada.

Adotam-se  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  como valores de rigidez e  $m_1 = m_2 = 1$  como valores de massa. Logo, as EGs usadas para o cálculo dos MLs são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + u_1 + (u_1 - u_2) = 0 \\ \ddot{u}_2 + u_2 - (u_1 - u_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{u}_1 + 2u_1 - u_2 = 0 \\ \ddot{u}_2 + 2u_2 - u_1 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

## 3.2 Cálculo das Integrais Primeiras

As integrais primeiras do sistema são de interesse para a implementação. Como são medidas conservadas durante todo o movimento, elas permitem estabelecer uma equivalência entre seus valores e as CIs. Usualmente, a energia de um sistema é uma integral primeira, se este for conservativo. Com isso, é possível determinar qual nível de energia o sistema estará restrito e, ainda, como essa energia vai se distribuir entre os elementos de inércia.

Primeiro, calcula-se a energia total do sistema linear, expressa pelo operador Hamiltoniano. Assim, após alguns cálculos descritos no apêndice A.1, chega-se em

$$H(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2 = h, \quad (3.6)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (3.7)$$

em que  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos do primeiro e do segundo GDL e  $v_1$  e  $v_2$  são as suas respectivas velocidades. A partir da variável  $h$  da equação (3.6), é possível avaliar o comportamento do sistema para níveis elevados ou baixos de energia, conforme aumentasse ou diminuísse o seu valor.

Month e Rand (1980) apontam outra integral primeira do sistema, a função  $C$ , que corresponde à conservação de energia do modo em fase e é descrita por

$$C(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{4}(v_1 + v_2)^2 + \frac{1}{4}(u_1 + u_2)^2 = c, \quad (3.8)$$

$$\frac{dC}{dt} = 0. \quad (3.9)$$

De maneira análoga ao Hamiltoniano, a variável  $c$  representa as curvas de nível da função  $C$ . A demonstração da conservação de  $H$  e  $C$  é indicada no apêndice B.1.

Assim, para um sistema dinâmico conservativo, isto é, sem forçamento e sem amortecimento, as variáveis  $h$  e  $c$  são conservadas ao longo do tempo para qualquer CI escolhida. Dessa maneira, enquanto  $h$  determina a energia total do sistema, a variável  $c$  determina como essa energia é distribuída ao longo das massas.

Se um sistema responde livremente, sua energia é completamente definida por suas CIs. Sejam  $t_0 = 0$ ,  $u_{10} = u_1(t = t_0)$ ,  $u_{20} = u_2(t = t_0)$ ,  $v_{10} = v_1(t = t_0)$ ,  $v_{20} = v_2(t = t_0)$  constantes que definem as CIs do problema físico. Adotam-se os valores  $u_{10} = 0$  e  $u_{20} = 0$ , a fim de simplificar o cálculo da energia. Com isso, resta determinar os valores de  $v_{10}$  e  $v_{20}$  que atendam os níveis de energia.

Para as CIs adotadas, tem-se que  $c$  está restrito ao intervalo  $0 \leq c \leq h$  e que existem duas possibilidades para o seu valor, chamadas de  $c_1$  e  $c_2$ . Para a primeira resposta,

usa-se  $c_1$ , de forma que

$$\begin{cases} v_{10} = \sqrt{c_1} + \sqrt{h - c_1} \\ v_{20} = \sqrt{c_1} - \sqrt{h - c_1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Para a segunda resposta, usa-se a variável  $c_2$ , definida por

$$\begin{cases} v_{10} = \sqrt{c_2} - \sqrt{h - c_2} \\ v_{20} = \sqrt{c_2} + \sqrt{h - c_2}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Desse modo, estabelece-se uma equivalência entre as CIs de deslocamento e velocidade e as variáveis  $h$  e  $c$ . Mais detalhes da dedução das CIs são apresentados no apêndice C.1.

### 3.3 Resultados - Sistema Massa-Mola Linear

A Figura 12 mostra o mapa de Poincaré obtido pela equação (2.31) para as EGs (3.5) com as CIs das fórmulas (3.10) e (3.11). Para a obtenção da seção, é necessário considerar apenas o regime permanente da resposta temporal. Assim, admitiu-se apenas a metade final dos dados obtidos para avaliar o mapa. Como o plano de corte adotado impõe limitações às variáveis  $u_1$  e  $v_1$ , expressadas pela equação (2.31), a seção de Poincaré deve ser feita com as coordenadas  $u_2$  e  $v_2$ . Considerou-se um nível de energia total  $h = 1$ . A linha preta e fina ilustra o limite do mapa de Poincaré, ou seja, a região onde o gráfico ficará contido para quaisquer CIs. Para representar essa curva, usou-se

$$2h = u_2^4 + u_2^2 + \dot{u}_2^2, \quad (3.12)$$

tendo como base o artigo de Vakakis e Rand (1992a).

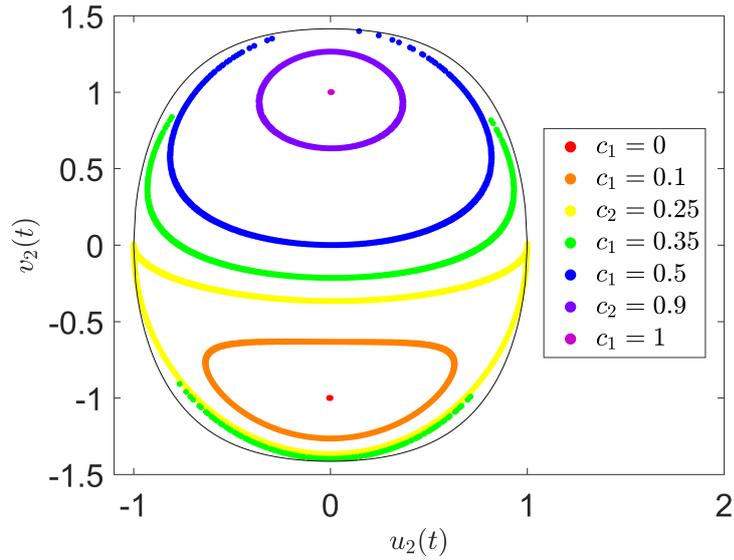


Figura 12 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola linear para  $h = 1$ .

A resposta de um sistema em um ML ou MNL é, pela definição de Rosenberg, síncrona. Por essa razão, todos os GDLs passam pelo ponto de equilíbrio no mesmo instante. Como consequência, tendo em vista que a seção de Poincaré adotada contém a restrição  $u_1 = 0$ , uma resposta síncrona num ML ou MNL deve conter a abscissa  $u_2 = 0$  na Figura 12.

Pela Figura 12, percebe-se a presença de dois MLs estáveis, um caracterizado por  $c_1 = 0$  e outro marcado por  $c_1 = 1$ . Como previsto na teoria de sistemas lineares, há apenas dois MLs estáveis, devido à presença de apenas dois GDLs. Dado o bom comportamento de fenômenos lineares, a quantidade de MLs não muda com o aumento ou diminuição da energia. Por isso, não é necessário fazer uma análise de outros valores de  $h$ .

Na construção numérica do mapa de Poincaré, deve-se atentar em limpar os dados da seção no início de uma nova iteração. Isso ocorre porque alguns mapas de Poincaré são maiores do que outros. Assim, caso a variável que representa o mapa de Poincaré não seja redefinida para um novo valor de  $c_1$  ou  $c_2$ , o próximo mapa pode ter resquícios do mapa anterior. Por isso, na linguagem de programação, deve-se redefinir a variável do mapa de Poincaré ao início de cada ciclo.

## 4 Sistema Massa-Mola Não-Linear

A não-linearidade de um fenômeno vibratório pode ser incluída pela rigidez das molas. A Figura 13 mostra a representação esquemática do sistema não-linear, em que  $K_{22}$  representa a rigidez não-linear da mola intermediária.

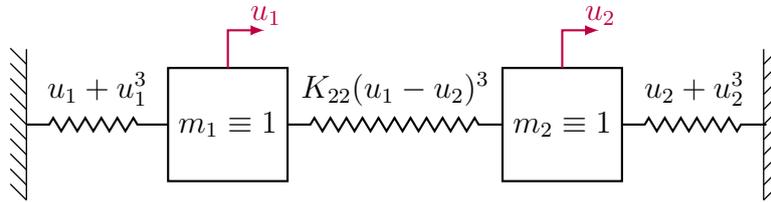


Figura 13 – Sistema massa-mola não-linear discreto de 2 GDLs. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos dos GDLs.

Foram utilizados valores adimensionais para as variáveis, com base no trabalho de Vakakis e Rand (1992a) e Vakakis e Rand (1992b).

### 4.1 Obtenção das Equações Governantes

Para a obtenção das EGs, usa-se o mesmo método da seção 3, isto é, a abordagem newtoniana. A Figura 14 ilustra os DCLs de cada massa submetida a forças não-lineares.



Figura 14 – DCLs de um sistema não-linear: (a) corpo da esquerda e (b) corpo da direita.

Assim, as EGs são dadas por

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3 = 0 \\ \ddot{u}_2 + u_2 + u_2^3 + K_{22}(u_2 - u_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Um método alternativo para a obtenção das EGs é ilustrado no apêndice D.2. O sistema descrito pela fórmula (4.1) é não-linear, tendo em vista os termos ao cubo presentes em ambas as EGs. Verifica-se se o sistema é conservativo. Da equação (4.1), adotando  $x_1 = u_1$ ,  $x_2 = u_2$ ,  $x_3 = v_1$  e  $x_4 = v_2$ , chega-se em

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 = f_1 \\ \dot{x}_2 = x_4 = f_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_1^3 - K_{22}(x_1 - x_2)^3 = f_3 \\ \dot{x}_4 = -x_2 - x_2^3 - K_{22}(x_2 - x_1)^3 = f_4. \end{cases} \quad (4.2)$$

Pela equação (2.19), obtém-se

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 0. \quad (4.3)$$

Logo, como  $\nabla \cdot f = 0$ , o sistema é conservativo. Dessa forma, a definição de MNLs adotada por Rosenberg (1962) pode ser utilizada.

## 4.2 Cálculo das Integrais Primeiras

Busca-se encontrar as medidas conservadas no sistema, isto é, as integrais primeiras. Após alguns cálculos localizados no apêndice A.2, conclui-se que o Hamiltoniano é uma integral primeira, já que

$$H(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_1^4}{4} + K_{22} \frac{(u_1 - u_2)^4}{4} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_2^4}{4} = h, \quad (4.4)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (4.5)$$

em que  $H$  é o Hamiltoniano.

Com isso, parte-se para a energia do modo em fase. Usa-se a mesma expressão do sistema linear, descrita pela equação (3.8). No entanto, conclui-se que

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(-u_1^3 - u_2^3) \neq 0. \quad (4.6)$$

Pela equação (4.6), nota-se que  $C$  não é uma integral primeira desse sistema não-linear, já que  $\frac{dC}{dt} \neq 0$ .

A demonstração da equação (4.6) está localizada no apêndice B.2, junto com a conservação de  $H$  em relação ao tempo. Nesse apêndice, fez-se a proposição de uma

nova função,  $C^*$ , descrita como uma energia do modo em fase modificada, para tentar determinar uma expressão, análoga a variável  $C$  do sistema linear, que se conserve no novo sistema não-linear. No entanto, pelo Teorema das Derivadas Mistas, tal função  $C^*$  não pode existir.

Dessa forma, tem-se apenas 1 integral primeira,  $H$ , que define o nível de energia do sistema. É necessário uma segunda integral primeira para determinar, a partir de uma constante, como essa energia é distribuída ao longo dos elementos do sistema, através de suas CIs.

Assim, neste trabalho, optou-se por adotar a mesma função  $C$  usada no sistema linear, descrita pela equação (3.8), embora essa expressão não seja conservada ao longo do tempo para o presente sistema. Foram consideradas as CIs  $u_{10} = u_{20} = 0$ , com a hipótese de que, com deslocamentos nulos, a rigidez não-linear não altere o cálculo dos modos e o sistema se comporte de maneira análoga a um sistema linear com deslocamentos nulos.

Portanto, pelo mesmo procedimento adotado na seção 3, assumindo que  $C$  é uma medida que se conserva, chega-se às mesmas CIs do sistema linear, isto é,

$$\begin{cases} u_{10} = 0 \\ u_{20} = 0 \\ v_{10} = \sqrt{c_1} + \sqrt{h - c_1} \\ v_{20} = \sqrt{c_1} - \sqrt{h - c_1}, \end{cases} \quad (4.7)$$

ou

$$\begin{cases} u_{10} = 0 \\ u_{20} = 0 \\ v_{10} = \sqrt{c_2} - \sqrt{h - c_2} \\ v_{20} = \sqrt{c_2} + \sqrt{h - c_2}, \end{cases} \quad (4.8)$$

em que ambos  $c_1$  e  $c_2$  variam de 0 a  $h$ .

### 4.3 Resultados - Sistema Massa-Mola Não-Linear

Para a obtenção do contorno da seção de Poincaré, representado nos gráficos por uma linha contínua preta, utilizou-se

$$2h = \frac{1}{2} (1 + K_{22}) u_2^4 + u_2^2 + \dot{u}_2^2, \quad (4.9)$$

baseado, novamente, no trabalho de Vakakis e Rand (1992a).

A Figura 15 mostra o mapa de Poincaré obtido pela equação (2.31) para as EG (4.1), em regime permanente, com as CIs das fórmulas (3.10) e (3.11) para  $h = 0.4$ .

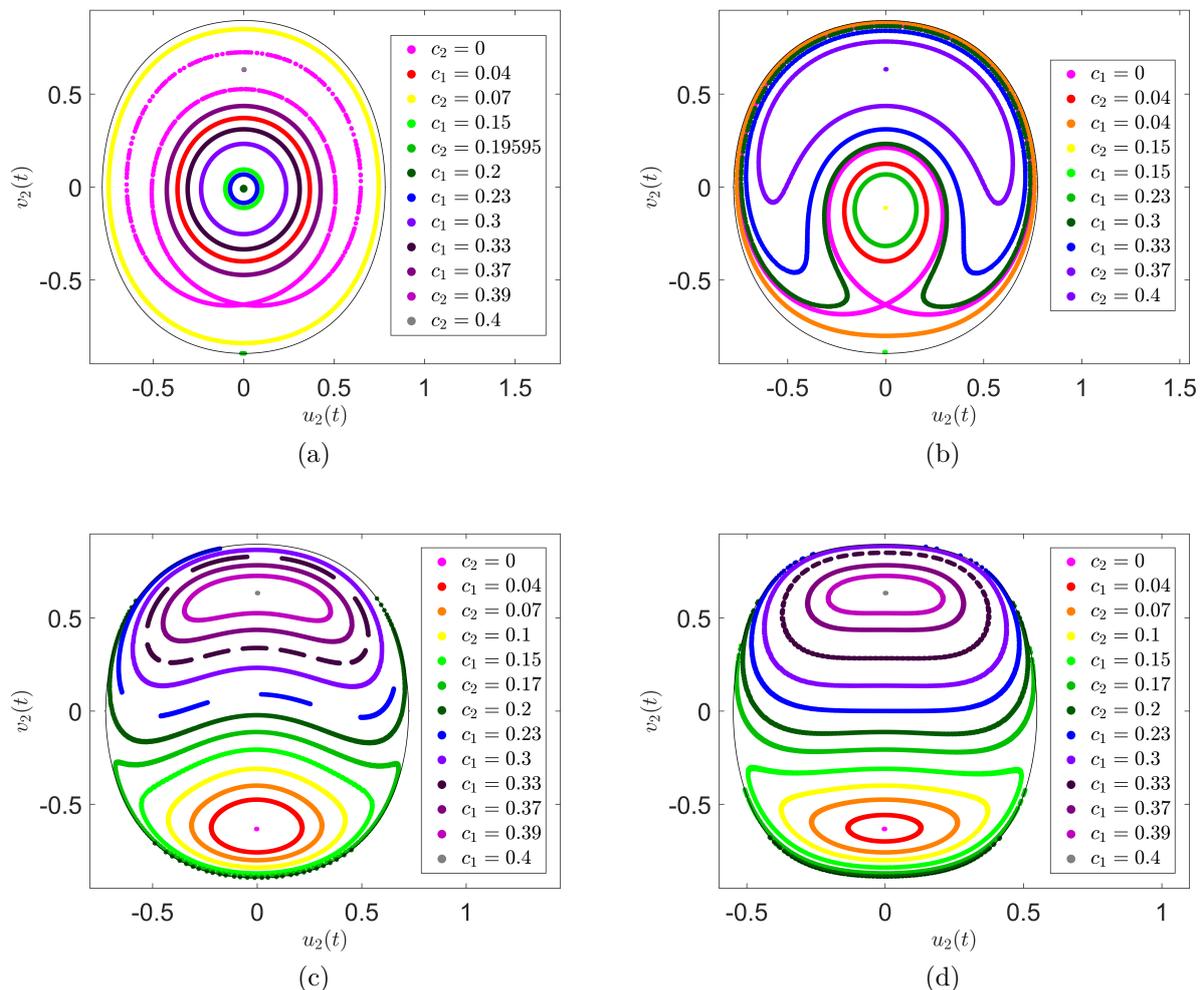


Figura 15 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para baixas energias ( $h = 0.4$ ). As variáveis  $c_1$  e  $c_2$  são analisadas de 0 a 0.4. a)  $K_{22} = 0.01$ , b)  $K_{22} = 0.1$ , c)  $K_{22} = 1$  e a)  $K_{22} = 10$ .

Pela Figura 15a, observa-se a presença de três MNLs estáveis ( $c_2 = 0.19595$ ,  $c_1 = 0.2$  e  $c_2 = 0.4$ ) e um MNL instável ( $c_2 = 0$ ) para  $K_{22} = 0.01$ . Na Figura 15b, aumenta-se a rigidez para  $K_{22} = 0.1$  e o sistema permanece com quatro MNLs. Contudo, em comparação com o mapa anterior, dois MNLs estáveis alteraram seu valor de energia e estão, agora, localizados em  $c_1 = 0.15$  e  $c_2 = 0.15$ . O resultado obtido na Figura 15b é condizente com o de Vakakis e Rand (1992a). Na Figura 15c, eleva-se a rigidez para  $K_{22} = 1$  e ocorre uma bifurcação, pois dois MNLs estáveis desapareceram e o MNL instável tornou-se estável. Com isso, restam apenas dois MNLs estáveis, correspondentes a  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 0.4$ . Por fim, na Figura 15d, a rigidez é amplificada novamente, de forma que  $K_{22} = 10$ . Com consequência, não há alteração dos MNLs em comparação com a Figura 15c.

A Figura 16 mostra o mapa de Poincaré obtido para  $h = 50$  em regime permanente.

Devido às equações (4.1), (3.10) e (3.11), há diferentes CIs para um mesmo  $h$ . Por essa razão, aparecem diferentes respostas para o mesmo valor de  $c$ , separadas aqui em  $c_1$  e  $c_2$ .

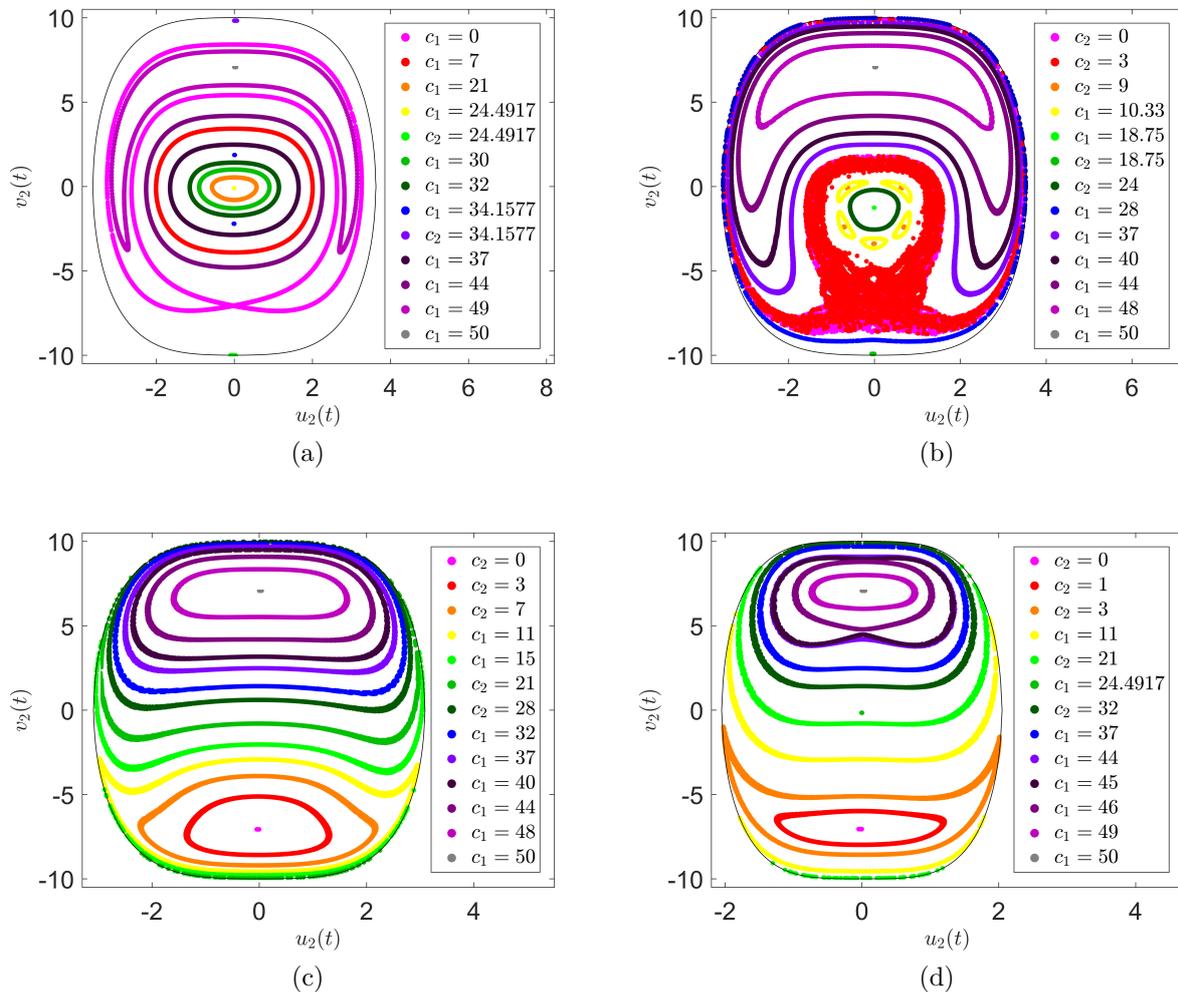


Figura 16 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para valores intermediários de energia ( $h = 50$ ). As variáveis  $c_1$  e  $c_2$  são analisadas de 0 a 50. a)  $K_{22} = 0.01$ , b)  $K_{22} = 0.1$ , c)  $K_{22} = 1$  e d)  $K_{22} = 10$ .

Na Figura 16a, tem-se  $K_{22} = 0.01$  e observa-se a presença de quatro MNLs estáveis ( $c_1 = 24.4917$ ,  $c_2 = 24.4917$ ,  $c_2 = 34.1577$  e  $c_1 = 50$ ) e um MNL instável ( $c_1 = 0$ ). O mapa de Poincaré de  $c_1 = 34.1577$  é uma resposta periódica de período-2, ilustrada em azul. Pela definição de MNL feita por Rosenberg (1962), ela não é uma resposta modal, pois o primeiro GDL não vibra com a mesma frequência do segundo GDL. Como o mapa de Poincaré foi obtido para  $u_1 = 0, v_1 > 0$ , uma resposta periódica de período-2 indica que, a cada ciclo do primeiro GDL, o segundo GDL realiza dois ciclos. Por conseguinte, a resposta deixa de ser síncrona. Portanto, apenas repostas periódicas de período-1 e que cruzam o eixo  $u_2 = 0$  podem ser caracterizadas como MNLs estáveis. Na Figura 16b, tem-se  $K_{22} = 0.1$  e três MNLs estáveis ( $c_1 = 18.75$ ,  $c_2 = 18.75$  e  $c_1 = 50$ ). Percebe-se que o MNL instável desapareceu e, em seu lugar, formou-se uma região sem ordem em  $c_2 = 0$ . Isto é um indicativo da presença de caos, isto é, com esses parâmetros, o sistema pode

responder de maneira caótica. A resposta laranja, identificada por  $c_2 = 9$ , não caracteriza um modo, pois, além de ser periódica de período-5, alguns dos seus pontos não cruzam a linha de  $u_2 = 0$ . Na Figura 16c, aumenta-se a rigidez para  $K_{22} = 1$  e percebe-se que o comportamento caótico e dois MNLs estáveis desapareceram. Isto indica que o sistema voltou a responder de maneira previsível, com dois MNLs estáveis periódicos, descritos por  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 50$ . Por fim, pela Figura 16d, para  $K_{22} = 10$ , nota-se a formação de um MNL instável ( $c_1 = 45$ ) e de um MNL estável ( $c_1 = 24.4917$ ), além dos dois MNLs estáveis já existentes ( $c_2 = 0$  e  $c_1 = 50$ ).

A Figura 17 mostra o mapa de Poincaré, em regime permanente, para  $h = 150$  a partir das equações (4.1), (3.10) e (3.11).

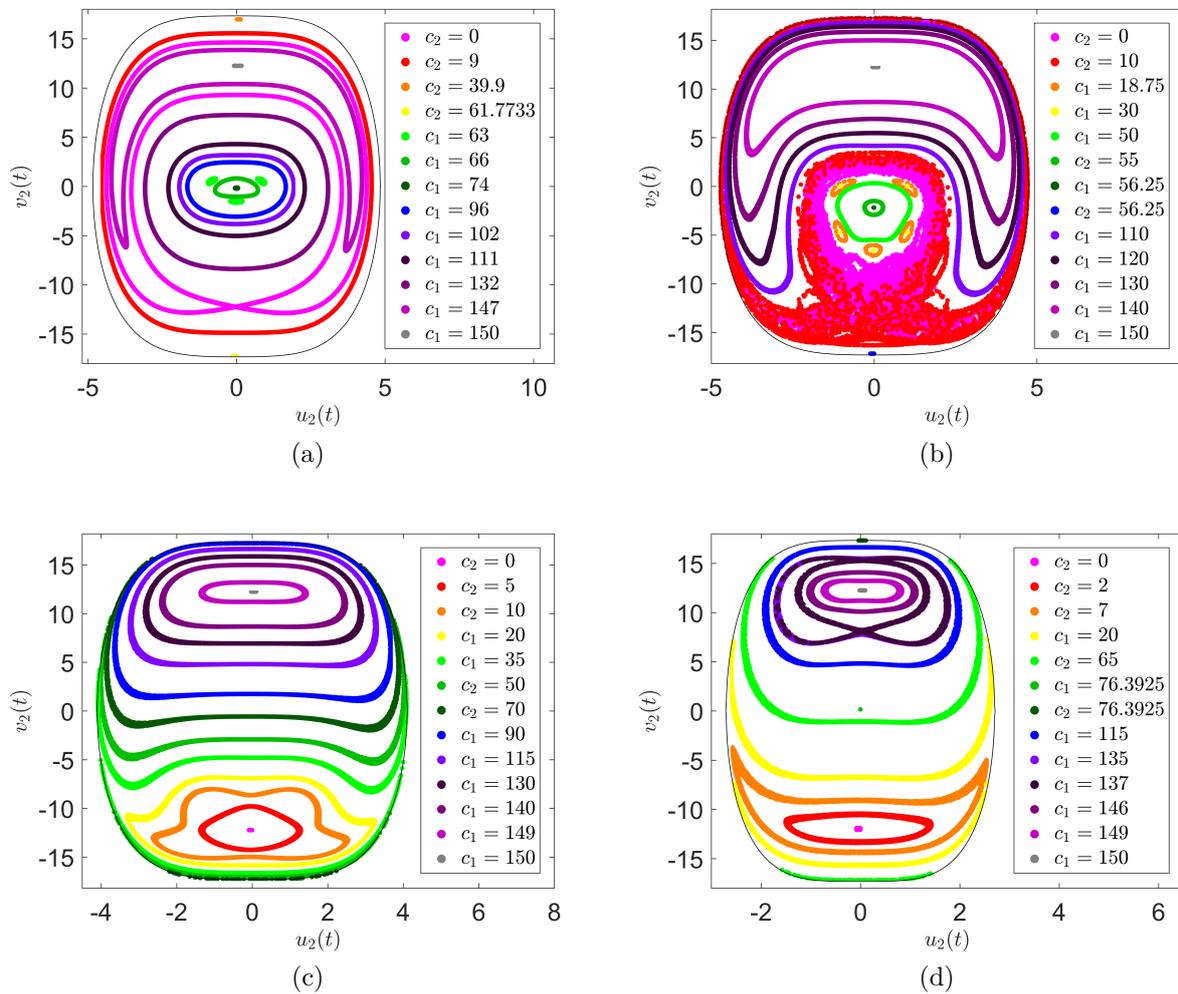


Figura 17 – Mapa de Poincaré do sistema massa-mola não-linear para altas energias ( $h = 150$ ). As variáveis  $c_1$  e  $c_2$  são analisadas de 0 a 150. a)  $K_{22} = 0.01$ , b)  $K_{22} = 0.1$ , c)  $K_{22} = 1$  e d)  $K_{22} = 10$ .

Na Figura 17a, tem-se que  $K_{22} = 0.01$ . Percebe-se a presença de quatro MNLs estáveis ( $c_2 = 39.9$ ,  $c_2 = 61.7733$ ,  $c_1 = 74$  e  $c_1 = 150$ ) e um MNL instável ( $c_2 = 0$ ), isto é, há cinco MNLs no total. Na Figura 17b, há  $K_{22} = 0.1$  e um indicio qualitativo de um

comportamento caótico em  $c_2 = 0$  e  $c_2 = 10$ . Vakakis e Rand (1992b) descreveram essa possível resposta caótica como um *mar de estocasticidade*. Essa denominação é utilizada pela descrição do caos como um comportamento, à primeira vista, aleatório. Contudo, não há efeitos randômicos no sistema, isto é, ele é determinístico. Além disso, existem três MNLs estáveis ( $c_1 = 56.25$ ,  $c_2 = 56.25$  e  $c_1 = 150$ ). Na Figura 17c, incrementa-se a rigidez para  $K_{22} = 1$  e percebe-se a ausência de uma região caótica, bem como o desaparecimento de dois MNLs estáveis. No lugar da área caótica, formou-se um MNL estável ( $c_2 = 0$ ). Por último, na Figura 17d, com  $K_{22} = 10$ , percebe-se a formação de um MNL instável ( $c_1 = 137$ ), de dois MNLs estáveis ( $c_1 = 76.3925$  e  $c_2 = 76.3925$ ) e a presença de mais dois MNLs estáveis ( $c_2 = 0$  e  $c_1 = 150$ ).

Um resumo do comportamento apresentado pelo sistema não-linear é apresentado na tabela 2.

	$h = 0.4$	$h = 50$	$h = 150$
$K_{22} = 0.01$	3 modos estáveis 1 modo instável	4 modos estáveis 1 modo instável	4 modos estáveis 1 modo instável
$K_{22} = 0.1$	3 modos estáveis 1 modo instável	3 modos estáveis região caótica	3 modos estáveis região caótica
$K_{22} = 1$	2 modos estáveis	2 modos estáveis	2 modos estáveis
$K_{22} = 10$	2 modos estáveis	3 modos estáveis 1 modo instável	4 modos estáveis 1 modo instável

Tabela 2 – Resultados da quantidade e estabilidade dos MNLs para diferentes valores de  $h$  e  $K_{22}$

Percebe-se que, para  $K_{22} = 1$ , o sistema contém dois MNLs estáveis para todos os valores de energia analisados, de maneira análoga a um sistema linear de dois GDLs. Porém, este resultado não pode ser generalizado para todos os valores possíveis de energia.

A Figura 18 mostra a relação entre os deslocamentos de cada MNL estável presente no sistema massa-mola com rigidez não-linear  $K_{22} = 10$  para diferentes níveis de energia. Os mapas de Poincaré associados a esse sistema estão descritos pelas Figuras 15d, 16d e 17d.

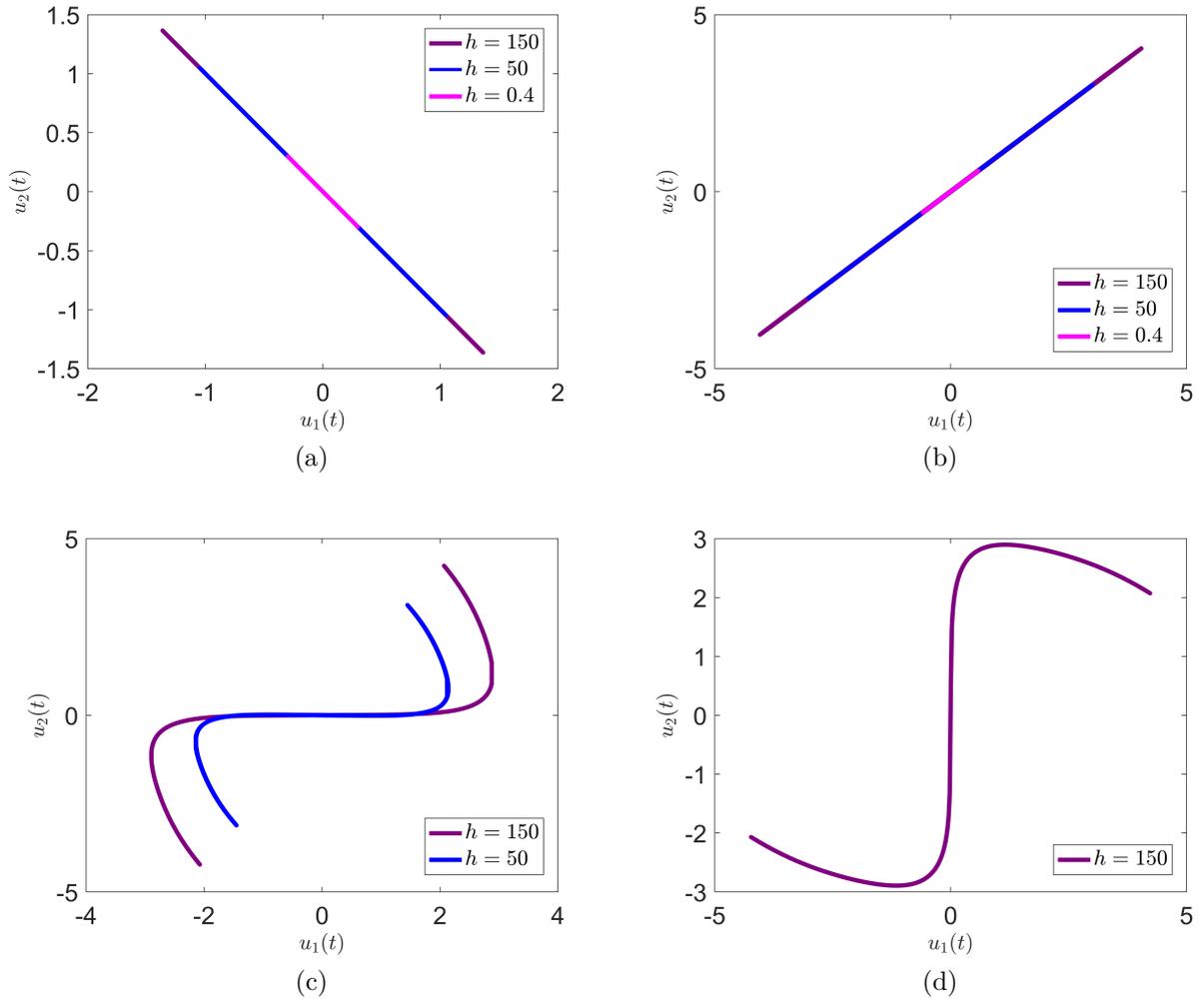


Figura 18 – Relação entre os deslocamentos do sistema massa-mola não-linear com  $K_{22} = 10$  respondendo em cada MNL estável isoladamente. a) 1º MNL estável, com  $c_2 = 0$ . b) 2º MNL estável, com  $c_1 = h$ . c) 3º MNL estável, com  $c_1 = 24.4917$  (curva azul) e  $c_1 = 76.3925$  (curva roxa) e d) 4º MNL estável, com  $c_2 = 76.3925$  (curva roxa).

Nos gráficos da Figura 18, mostra-se quais níveis de energia possibilitaram identificar alguns MNLs. As Figuras 18a e 18b ilustram os MNLs do sistema que são Modos Similares (MSs), visto o comportamento linear. Em ambas as figuras, nota-se que o aumento de energia proporciona um aumento da amplitude dos GDLs do sistema, já que a curva roxa ( $h = 150$ ) apresenta um comprimento maior do que a curva rosa ( $h = 0.4$ ).

A Figura 18c mostra a deformação causada em um modo devido às não-linearidades, ou seja, os Modos Não-Similares (MNSs) do sistema. Percebe-se que o aumento de energia causa tanto um aumento da amplitude de vibração quanto uma deformação no caminho percorrido pelo MNL no espaço de fase, isto é, as curvas azul e roxa não se sobrepõem totalmente. A não-linearidade permite uma alteração do formato de um MNL com a variação de energia, comportamento que não é presente em sistemas lineares. Nota-se que o 3º MNL não é identificável em baixas energias ( $h = 0.4$ ). De maneira análoga, a Figura

18d ilustra o 4º MNL, que só pode ser detectado para altas energias ( $h = 150$ ).

Na Figura 18d, tentou-se identificar o 4º MNL para o nível de energia  $h = 50$ . Contudo, apesar de ter sido encontrada uma curva similar ao gráfico de  $h = 150$ , encontrou-se, no mapa de Poincaré, uma resposta periódica de período-3. Como consequência, o sistema não está em um estado síncrono, isto é, a solução não se encaixa em um MNL de Rosenberg e, por isso, não foi representada no gráfico. No entanto, se uma definição de MNL de Shaw e Pierre fosse utilizada, essa resposta seria considerada um MNL.

Além disso, na Figura 18a, tem-se um MNL fora de fase, já que o 1º GDL atinge deslocamentos positivos, enquanto o 2º GDL atinge deslocamentos negativos no mesmo instante. Por outro lado, nas Figuras 18b, 18c e 18d, há um MNL em fase, pois os deslocamentos do 1º e 2º GDLs contêm sempre o mesmo sinal em todo o movimento.

# 5 Sistema Torsional de um Motor Não-Linear

Neste capítulo, busca-se deduzir as EGs de um sistema torsional não-linear, cuja não-linearidade provém de um elemento de inércia variável.

## 5.1 Obtenção de um Sistema Equivalente

O método para estudar vibrações torsionais de motores consiste em reduzir o sistema composto por eixos, virabrequins e elementos recíprocos em um sistema equivalente com um eixo reto. A Figura 19 ilustra o procedimento de obtenção de um sistema equivalente de um virabrequim.

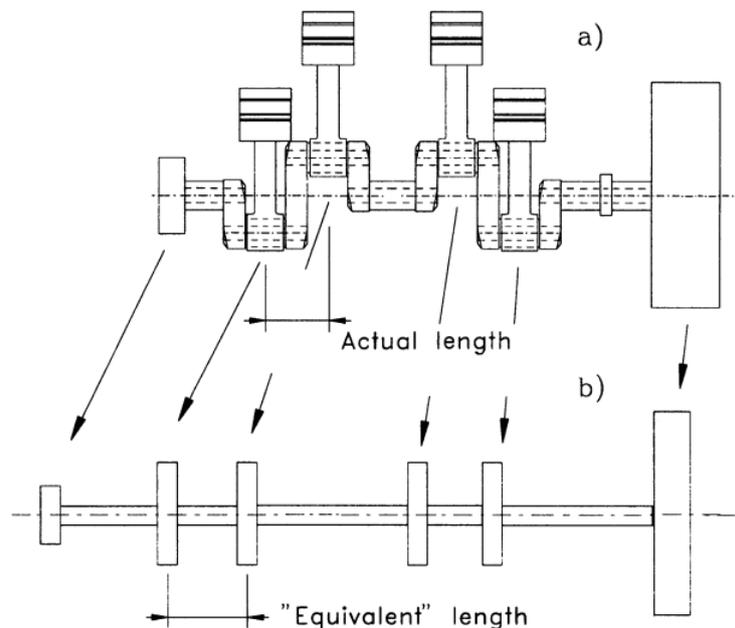


Figura 19 – Esboço do virabrequim. (a) Sistema real. (b) Sistema com inércia equivalente. (GENTA, 2012).

Para modelar o motor, é necessário analisar o mecanismo biela-manivela. A Figura 20 mostra a trigonometria presente nesse mecanismo. Neste trabalho, adotou-se que o eixo do cilindro é coincidente com o eixo do pistão.

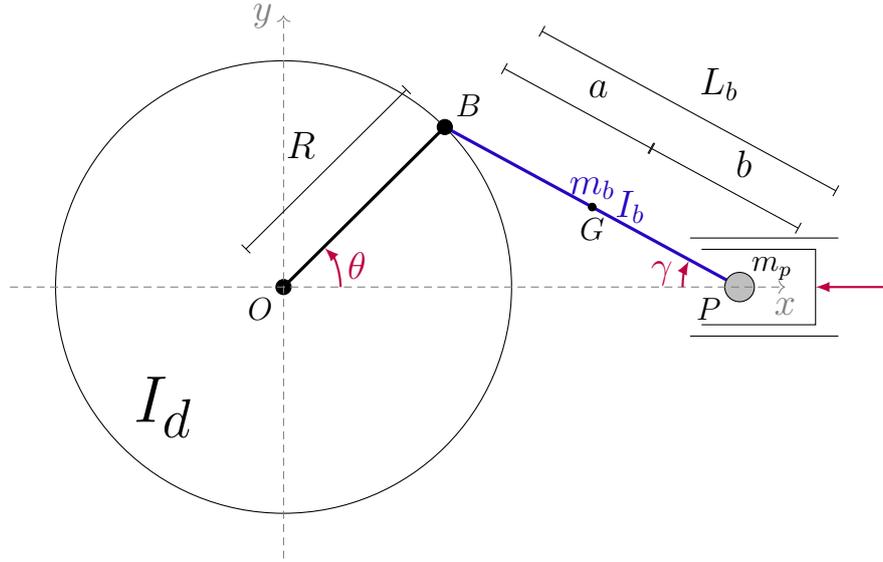


Figura 20 – Esboço da manivela (circunferência), da biela (linha azul) e do mecanismo de pistão (à direita). As linhas vermelhas representam o referencial adotado e as linhas cinzas representam o sistema de coordenadas cartesiano.

Na Figura 20, a manivela é representada por um disco, cujo centro, raio, momento de inércia e deslocamento angular são, respectivamente,  $O$ ,  $R$ ,  $I_d$  e  $\theta$ . O pistão, por sua vez, contém uma massa  $m_p$  e é representado pelo ponto  $P$ , o qual se locomove apenas horizontalmente. A linha azul entre os pontos  $P$  e  $B$  retrata a biela, cujos momento de inércia, massa, centro de gravidade e comprimento são dados, respectivamente, por  $I_b$ ,  $m_b$ ,  $G$  e  $L_b$ . O ponto do pino de manivela que conecta a biela ao disco é destacado pela letra  $B$ . O deslocamento angular da biela em relação ao pistão é descrito por  $\gamma$ . As distâncias  $a$  e  $b$  denotam a distância do centro de gravidade da biela ( $G$ ) em relação ao pino de biela ( $B$ ) e ao pistão ( $P$ ).

A fim de se computar a energia proveniente da biela (linha azul da Figura 20), normalmente substitui-se esse componente por um sistema de duas massas,  $m_{b1}$  e  $m_{b2}$ , com um momento de inércia,  $I_0$ . Isso é feito para controlar a posição do centro de gravidade da biela,  $G$ . Dessa maneira, o sistema substituído deve ter a mesma massa,  $m_b$ , o mesmo momento de inércia,  $I_b$ , e o mesmo centro de gravidade,  $G$ , da biela real. Assim,

$$m_{b1} = \frac{a}{L_b} m_b, \quad m_{b2} = \frac{b}{L_b} m_b, \quad (5.1)$$

$$I_0 = I_b - (m_{b1} a^2 + m_{b2} b^2), \quad (5.2)$$

em que  $m_{b1}$  e  $m_{b2}$  são a primeira e a segunda componente da massa da biela simulada e  $I_0$  é o momento de inércia do sistema equivalente a uma biela.

Algumas relações geométricas presentes na Figura 20 são dadas por

$$\begin{aligned}
(\overline{B-O}) &= \begin{Bmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \end{Bmatrix}, & (\overline{G-O}) &= \begin{Bmatrix} R \cos(\theta) + a \cos(\gamma) \\ R \sin(\theta) - a \sin(\gamma) \end{Bmatrix}, \\
(\overline{P-O}) &= \begin{Bmatrix} R \cos(\theta) + L_b \cos(\gamma) \\ 0 \end{Bmatrix}, & (\overline{P-B}) &= \begin{Bmatrix} L_b \cos(\gamma) \\ -L_b \sin(\gamma) \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

em que  $(\overline{B-O})$  indica o vetor que parte do ponto  $O$  e que termina no ponto  $B$ , em coordenadas cartesianas, isto é, a posição do ponto  $B$  menos a posição do ponto  $O$ , tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$ .

Como

$$(\overline{P-O}) = (\overline{B-O}) + (\overline{P-B}), \tag{5.4}$$

obtém-se, pela substituição das equações (5.3) na direção  $y$ ,

$$0 = R \sin(\theta) + (-L_b \sin(\gamma)), \tag{5.5}$$

$$\implies L_b \sin(\gamma) = R \sin(\theta), \tag{5.6}$$

$$\implies \sin(\gamma) = \lambda \sin(\theta), \tag{5.7}$$

em que  $\lambda = \frac{R}{L_b}$  é a razão de aspecto entre os comprimentos da manivela e da biela. Neste trabalho, considera-se  $\theta$  como a coordenada generalizada e  $\gamma$  como a coordenada secundária.

Com isso, pela equação (5.7), obtém-se a relação entre  $\gamma$  e  $\theta$ ,

$$\sin^2(\gamma) = \lambda \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\gamma), \tag{5.8}$$

$$\implies \cos^2(\gamma) = 1 - \lambda^2 \sin^2(\theta), \tag{5.9}$$

$$\implies \cos(\gamma) = \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\theta)}. \tag{5.10}$$

Assim, a inércia equivalente do sistema inteiro descrito pela Figura 20 é dada por

$$I_E(\theta) = I_d + m_{b1}R^2 + (m_{b2} + m_p)R^2 p_1(\theta) + I_0 p_2(\theta), \tag{5.11}$$

em que  $I_E(\theta)$  é a inércia equivalente do motor (*engine*), que depende do deslocamento angular da manivela,  $\theta$ , e  $p_1(\theta)$  e  $p_2(\theta)$  são funções provenientes do efeito das massas,  $m_{b1}$  e  $m_{b2}$ , e do momento de inércia,  $I_0$ .

As funções  $p_1(\theta)$  e  $p_2(\theta)$  são descritas por Genta (2012) como

$$p_1(\theta) = \left[ \text{sen}(\theta) + \lambda \frac{\text{sen}(2\theta)}{2 \cos(\gamma)} \right]^2 \quad (5.12)$$

e

$$p_2(\theta) = \left[ \lambda \frac{\cos(\theta)}{\cos(\gamma)} \right]^2. \quad (5.13)$$

Pela equação (5.11), obtém-se a expressão da inércia variável utilizada neste trabalho.

## 5.2 Obtenção das Equações Governantes

Para simular a dinâmica de máquinas recíprocas, usou-se um modelo simplificado, de 2 GDLs, em que há um motor e uma carga movida, ambos conectados por um eixo. Considera-se que o motor contém apenas um único cilindro.

A Figura 21 mostra a representação esquemática do sistema dinâmico. Tem-se que  $\theta$  é o deslocamento angular do motor ou da manivela,  $\varphi$  é o deslocamento angular da carga movida,  $I_E$  é a inércia equivalente do motor (*engine*),  $I_L$  é a inércia da carga movida (*load*),  $k_0$  é a rigidez do eixo que interconecta o motor e a carga movida e  $c_E$ ,  $c_L$  e  $c_0$  são, respectivamente, o amortecimento viscoso torsional do motor, da carga movida e do eixo. O sistema é semi-definido, já que uma de suas frequências naturais é nula.

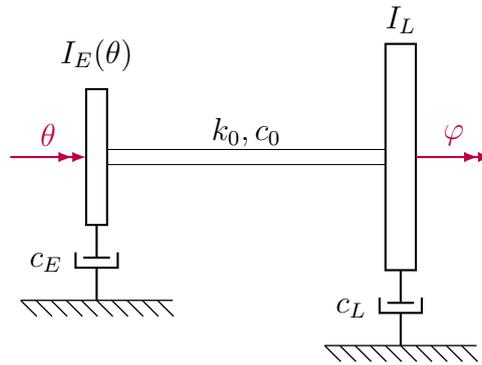


Figura 21 – Representação esquemática de um sistema biela-manivela de 2 GDLs. O motor está representado à esquerda e a carga movida à direita. As linhas vermelhas indicam o referencial adotado para os deslocamentos angulares dos GDLs.

Considera-se que o deslocamento angular do motor da Figura 21 é o mesmo deslocamento angular da manivela da Figura 20. Por essa razão, ambos são representados pela variável  $\theta$ . Os GDLs da Figura 21 são  $\theta$  e  $\varphi$ . O deslocamento angular da biela,  $\gamma$ ,

é caracterizado unicamente pelo deslocamento angular da manivela,  $\theta$ . Por essa razão, considerou-se que  $\gamma$  não é um GDL.

Na Figura 21, o mecanismo biela-manivela está representado apenas no momento de inércia do motor, ou seja, no termo  $I_E(\theta)$ . O momento de inércia da carga movida,  $I_L$ , é considerado como uma constante. Isto é, a equação (5.11) é aplicada somente ao primeiro GDL,  $\theta$ . É possível interpretar que mecanismo da Figura 20 está presente na Figura 21, na medida em que biela, manivela e pistão são observados lateralmente no elemento de inércia do motor,  $I_E(\theta)$ .

Para a obtenção das EGs, pode-se usar o método de Lagrange ou o de Newton. Utilizando o método de Lagrange, chega-se erroneamente em

$$\begin{cases} I_E(\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E\dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0 & (5.14) \\ I_L\ddot{\varphi} + c_0(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) + c_L\dot{\varphi} + k_0(\varphi - \theta) = 0. & (5.15) \end{cases}$$

As equações (5.14) e (5.15) são iguais às equações encontradas por Metallidis e Natsiavas (2003). Porém, Pesce, Tannuri e Casetta (2006) afirmam que a EG (5.14) está errada. Segundo os autores, a variação do elemento de inércia gera um momento não-conservativo nas coordenadas generalizadas. Por isso, a abordagem lagrangeana não é recomendada para um sistema com inércia variável, devido a sua complexidade. Mais detalhes do cálculo realizado são mostrados no apêndice E.2.

Assim, corrige-se a equação (5.14) utilizando o método de Newton. A Figura 22 mostra o DCL do motor presente na Figura 21.

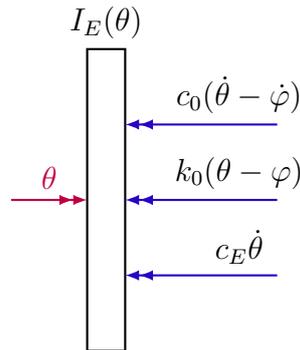


Figura 22 – DCL do motor. Os momentos angulares estão representadas em azul e os referenciais adotados em vermelho.

Dessa forma, a EG correta do primeiro GDL se dá por

$$I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E\dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0. \quad (5.16)$$

Nota-se que a única diferença entre as expressões (5.14) e (5.16) é a constante  $1/2$ , que multiplica o termo da derivada da inércia.

Portanto, o sistema motor-carga movida é descrito corretamente por

$$\begin{cases} I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E\dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0 \\ I_L\ddot{\varphi} + c_0(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) + c_L\dot{\varphi} + k_0(\varphi - \theta) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Sabe-se que as EGs de (5.17) são não-conservativas, pela presença dos termos de amortecimento viscoso. Porém, chega-se ao questionamento se o termo  $I'_E(\theta)\dot{\theta}^2$  promove adição ou dissipação de energia. Por isso, assume-se  $c_E = c_L = c_0 = 0$ , de forma que

$$\begin{cases} I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + k_0(\theta - \varphi) = 0 \\ I_L\ddot{\varphi} + k_0(\varphi - \theta) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Assim, confere-se se o sistema é conservativo. Das equações (5.18), como  $u_1 = \theta$ ,  $u_2 = \varphi$ ,  $v_1 = \dot{\theta}$  e  $v_2 = \dot{\varphi}$ , tem-se

$$\begin{cases} I_E(u_1)\dot{v}_1 + I'_E(u_1)v_1^2 + k_0(u_1 - u_2) = 0 \\ I_L\dot{v}_2 + k_0(u_2 - u_1) = 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Como  $v_1 = \dot{u}_1$  e  $v_2 = \dot{u}_2$ , chega-se em

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = \frac{1}{I_E(u_1)} \left[ -I'_E(u_1)v_1^2 - k_0(u_1 - u_2) \right] \\ \dot{v}_2 = -\frac{k_0}{I_L}(u_2 - u_1). \end{cases} \quad (5.20)$$

Adotando  $x_1 = u_1$ ,  $x_2 = u_2$ ,  $x_3 = v_1$  e  $x_4 = v_2$ , obtém-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 = f_1 \\ \dot{x}_2 = x_4 = f_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{I_E(x_1)} \left[ -I'_E(x_1)x_3^2 - k_0(x_1 - x_2) \right] = f_3 \\ \dot{x}_4 = -\frac{k_0}{I_L}(x_2 - x_1) = f_4. \end{cases} \quad (5.21)$$

Pela equação (2.19), conclui-se que o sistema não é conservativo, pois

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{I'_E(x_1)2x_3}{I_E(x_1)}, \quad (5.23)$$

$$\implies \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{2I'_E(x_1)x_3}{I_E(x_1)}, \quad (5.24)$$

$$\implies \nabla \cdot f \neq 0. \quad (5.25)$$

Da equação (5.24), para que  $\nabla \cdot f = 0$ , deve-se ter  $I'_E(x_1)x_3 = 0$ . Como  $x_3$  é uma variável de estado continuamente transformada, não é razoável impor uma restrição em seu valor. Por isso, adota-se que  $I'_E(\theta) = 0$ . Além disso, da equação (5.24), é necessário garantir que  $I_E(x_1) \neq 0$ , isto é, a função escolhida para representar a inércia do motor não deve atingir o valor zero. Percebe-se que o termo de inércia pode provocar tanto um aumento quanto diminuição de energia do sistema, a depender dos sinais de  $I'_E(x_1)$  e  $x_3$ . Se  $I'_E(x_1)x_3 > 0$ , tem-se  $\nabla \cdot f < 0$  e dissipação de energia. Caso  $I'_E(x_1)x_3 < 0$ , há  $\nabla \cdot f > 0$  e aumento de energia no sistema. O denominador da equação (5.24),  $I_E(x_1)$ , permanece sempre como positivo, pela definição de inércia.

Aplicando a condição  $I'_E(\theta) = 0$  na equação (5.11), chega-se à restrição  $\theta = k\pi$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ . Mais detalhes são encontrados no apêndice E.1. Isso significa que o sistema não é rigorosamente conservativo para todos os valores de  $\theta$ . Contudo, se o sistema for analisado a cada volta percorrida pelo motor, ele pode ser considerado conservativo.

Portanto, usa-se, neste capítulo, as EGs (5.18), consideradas conservativas para a função  $I_E(\theta)$  escolhida, que é bem comportada. O sistema descrito contém 2 termos não-lineares:  $I'_E(\theta)\dot{\theta}^2$  e  $I_E(\theta)\ddot{\theta}$ . O segundo termo é não-linear devido à dependência da inércia do motor em relação a variável dependente,  $\theta$ . Caso a inércia dependesse apenas da variável independente,  $t$ , o termo  $I_E(t)\ddot{\theta}$  seria linear, conforme a definição de uma EDO linear, dada pela equação (2.10).

### 5.3 Cálculo das Integrais Primeiras

Como candidatos a integrais primeiras, selecionam-se a energia total e o momento angular do sistema. O Hamiltoniano do sistema é calculado por

$$H(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \psi_c(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) + \psi_p(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}I_E(\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_L\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}k_0(\theta - \varphi)^2. \quad (5.26)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^3 \neq 0. \quad (5.27)$$

Nota-se, na equação (5.26), que a energia cinética não depende somente das velocidades dos 2 GDLs, mas também depende do deslocamento de um dos GDLs. Além

disso, percebe-se através da equação (5.27) que o Hamiltoniano não é rigorosamente uma integral primeira do sistema, pois sua derivada temporal não é sempre nula. No entanto, é possível interpretar que, em determinados períodos de tempo não uniformemente espaçados, o sistema atinge o valor  $I'_E(\theta) = 0$ , tendo em vista que a função  $I_E(\theta)$  utilizada é limitada. Isso indica uma conservação da energia total do sistema.

Investiga-se se momento angular é uma integral primeira. Conforme Cline (2017), o momento generalizado associado a uma coordenada  $u$  é calculado por

$$p_u \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}, \quad (5.28)$$

em que  $p_u$  é o momento generalizado em relação à coordenada  $u$  e  $\mathcal{L}$  é o Lagrangeano do sistema.

Como há apenas coordenadas angulares no sistema, o momento generalizado equivale ao momento angular. Portanto, o momento angular total é calculado como a soma da contribuição de cada coordenada, isto é,

$$L = p_\theta + p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (5.29)$$

em que  $L$  é o momento angular total do sistema.

Dessa forma, chega-se em

$$L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = I_E(\theta)\dot{\theta} + I_L\dot{\varphi} = \ell, \quad (5.30)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0. \quad (5.31)$$

em que  $\ell$  é a curva de nível da função  $L$ . Assim, o momento angular é uma integral primeira do sistema. A demonstração das equações (5.27) e (5.31) estão descritas no apêndice B.3.

Portando, assumindo que as variáveis  $h$  e  $\ell$  são medidas conservadas ao longo do tempo para qualquer CI escolhida, é possível escolher CIs equivalentes aos níveis de energia total e momento angular.

Nesse sentido, sejam  $t_0 = 0$ ,  $u_{10} = \theta(t = t_0)$ ,  $v_{10} = \dot{\theta}(t = t_0)$ ,  $u_{20} = \varphi(t = t_0)$ ,  $v_{20} = \dot{\varphi}(t = t_0)$  as CIs do sistema dinâmico. De maneira análoga aos sistemas dos capítulos 3 e 4, são adotados os valores  $u_{10} = 0$  e  $u_{20} = 0$ . Assim, basta determinar os valores de  $v_{10}$  e  $v_{20}$  que atendam os níveis de energia e momento angular. São obtidas duas possibilidades. Para o primeiro caso, denomina-se  $\ell_1$ , definido por

$$\begin{cases} v_{10} = \frac{1}{I_E(0)} \left\{ \ell_1 - \frac{\ell_1 I_L + \sqrt{\ell_1^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell_1^2 - 2h I_E(0)]}}{I_L + I_E(0)} \right\} \\ v_{20} = \frac{\ell_1 I_L + \sqrt{\ell_1^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell_1^2 - 2h I_E(0)]}}{I_L [I_L + I_E(0)]}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Para a segunda possibilidade, denominada  $\ell_2$ , tem-se

$$\begin{cases} v_{10} = \frac{1}{I_E(0)} \left\{ \ell_2 - \frac{\ell_2 I_L - \sqrt{\ell_2^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell_2^2 - 2hI_E(0)]}}{I_L + I_E(0)} \right\} \\ v_{20} = \frac{\ell_2 I_L - \sqrt{\ell_2^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell_2^2 - 2hI_E(0)]}}{I_L [I_L + I_E(0)]}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Com isso, as variáveis  $\ell_1$  e  $\ell_2$  estão restritas ao domínio:

$$0 \leq \ell \leq \sqrt{2h[I_L + I_E(0)]}. \quad (5.34)$$

A dedução da expressão correspondente às CIs é disponibilizada no apêndice C.2.

## 5.4 Resultados - Sistema Torsional de um Motor Não-Linear

Para as constantes do sistema, foram utilizados os valores indicados na tabela 3. Todas as medidas apresentam unidade segundo o sistema internacional. Destaca-se a necessidade de atender à desigualdade  $L_b > R$ , a fim de que não haja divisão por zero nas definições de  $p_1(\theta)$  e  $p_2(\theta)$ , ilustradas pelas equações (5.12) e (5.13). Essa desigualdade também pode ser interpretada pela Figura 20, pois, caso  $L_b \ll R$ , a biela tentará deslocar o pistão (ponto  $P$ ) verticalmente, sendo que ele está restrito à deslocamentos horizontais. Como consequência, o mecanismo trava.

Constante	Valor Numérico
$I_L$	2 kg m <sup>2</sup>
$I_c$	1 kg m <sup>2</sup>
$I_b$	1 kg m <sup>2</sup>
$m_b$	2 kg
$m_p$	3 kg
$a$	0,5 m
$L_b$	5 m
$R$	1 m
$k_0$	1 N/m

Tabela 3 – Constantes usadas para a obtenção dos mapas de Poincaré do sistema de inércia variável.

Para o valor de  $b$ , usou-se  $b = L_b - a$ . Em relação ao cálculo de  $I_0$ , utilizou-se a equação (5.2). Para a determinação da inércia do disco, aplicou-se

$$I_d = \frac{m_b R^2}{2}. \quad (5.35)$$

Seja  $\eta$  a diferença dos deslocamentos do 1º e do 2º GDL,

$$\eta = \theta - \varphi. \quad (5.36)$$

Como o sistema é semi-definido, a escolha da superfície para a construção do mapa de Poincaré é a seleção dos pontos, obtidos pela integração numérica, que atendam  $\dot{\theta} > 0$  e, concomitantemente,  $\eta = \theta - \varphi = 2\pi d$ , onde  $d \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\eta$  é um múltiplo de  $2\pi$ . O mapa, em si, é obtido pela plotagem das variáveis  $\eta$  e  $\dot{\eta}$ .

Durante a construção do mapeamento de Poincaré, notou-se que os pontos selecionados atendiam à condição  $I'_E(\theta) = 0$ , embora as EGs contenham o termo da derivada da inércia. É possível que isso ilustre a conservatividade do sistema. Para o cálculo das variáveis do sistema no mapa de Poincaré, foi utilizado interpolação.

A Figura 23 ilustra o mapa de Poincaré obtido pela equação (2.33), em regime permanente, para as EGs (5.18) com as CIs das fórmulas (5.32) e (5.33) para  $h = 0,4$  J, isto é, baixas energias.

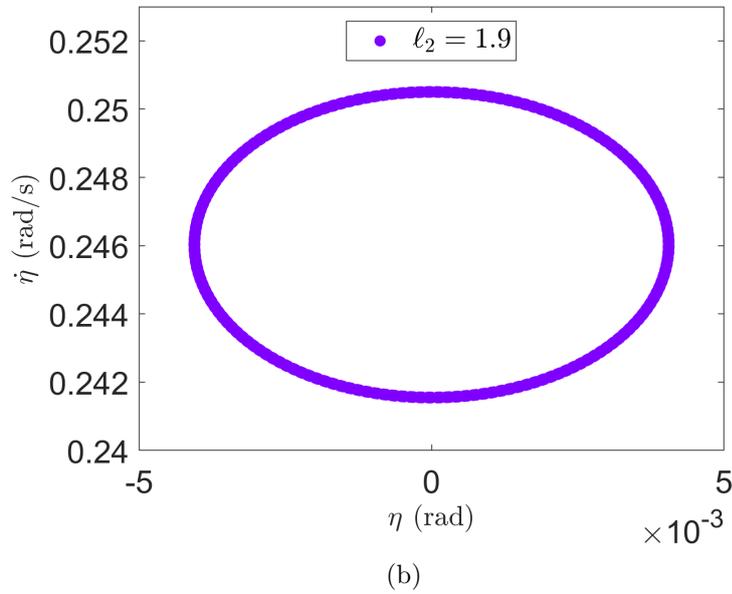
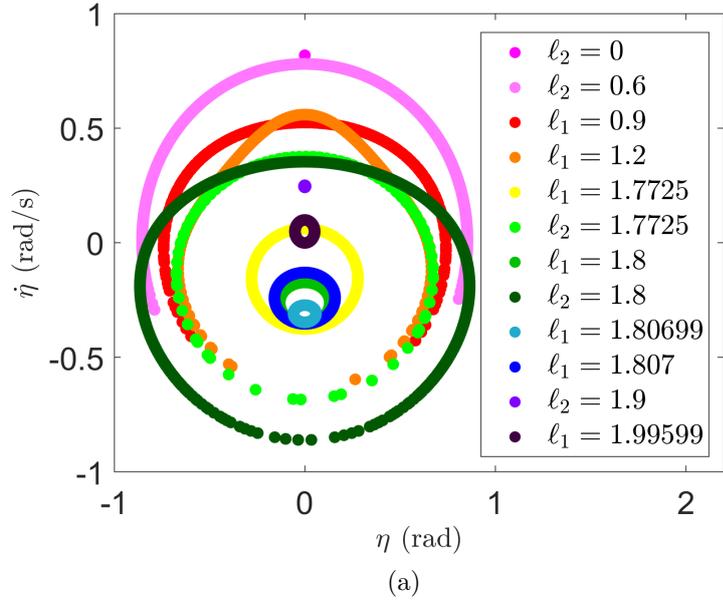


Figura 23 – Mapa de Poincaré do sistema não-linear com inércia variável para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) Mapa completo, as variáveis  $l_1$  e  $l_2$  são analisadas de 0 a  $\sqrt{2h[I_E(0) + I_L]}$ . b) Ampliação do mapeamento de  $l_2 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$ .

Na Figura 23a, observa-se, à primeira vista, a indicação de 4 MNLs estáveis. Um único ponto é mostrado para os valores  $l_2 = 0 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $l_2 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$ . Contudo, ao ampliar o mapa do último, percebe-se que não há exatamente um MNL, mas sim uma resposta próxima a um modo, conforme mostrado na Figura 23b. Analogamente, os mapas de  $l_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $l_1 = 1.99599 \text{ kg m}^2/\text{s}$  indicam comportamentos na vizinhança de MNLs. O mapa de  $l_2 = 0 \text{ kg m}^2/\text{s}$  permanece como um ponto mesmo após ampliação, o que configura exatamente um MNL do sistema.

Não há indicações de MNLs instáveis na Figura 23a, porque as intersecções do

mapa de Poincaré ocorrem em curvas diferentes. Para que um MNL instável seja sinalizado, é necessário que haja intersecção em um mesmo valor de  $\ell$ .

Acredita-se que um dos MNLs não detectados está numa transição contínua entre os valores  $\ell_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\ell_1 = 1.807 \text{ kg m}^2/\text{s}$ , na medida em que o gráfico do mapa, representado por uma elipse, diminuiria de tamanho com a variação de  $\ell_1$  até atingir o aspecto de um ponto. Observa-se que, entre os valores  $\ell_1 = 1.8 \text{ kg m}^2/\text{s}$  e  $\ell_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$ , o formato do mapa se aproxima ao de um MNL, enquanto, para a transição de  $\ell_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$  a  $\ell_1 = 1.807 \text{ kg m}^2/\text{s}$ , a geometria do mapeamento se distancia de um ponto. No entanto, após considerar 17 casas decimais da dízima periódica  $1.80699\dots$ , não foi possível isolar o MNL no mapa de Poincaré. É possível que esse comportamento ocorra porque há infinitos pontos entre 1.80699 e 1.807. Portanto, mesmo empregando uma alta precisão, pode-se não ser possível isolar o MNL.

Investiga-se a resposta temporal de  $\eta$  na vizinhança dos MNLs. Na Figura 24, mostra-se a evolução temporal de  $\eta$  e  $\dot{\eta}$ , para cada valor de  $\ell$  em um MNL ou em sua vizinhança.

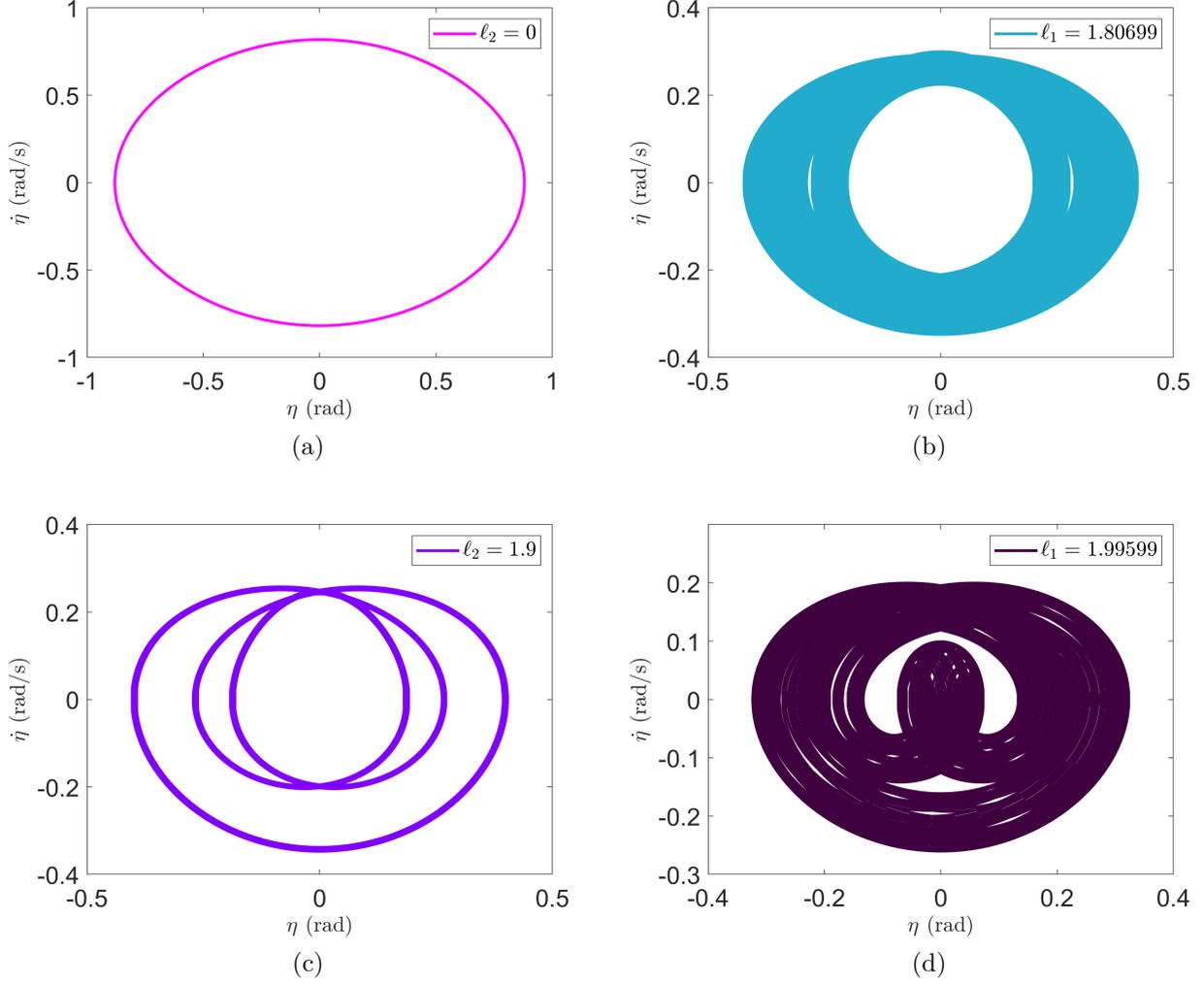


Figura 24 – Evolução temporal da diferença dos deslocamentos de cada GDL,  $\eta$ , e sua respectiva velocidade,  $\dot{\eta}$ , para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) Primeiro MNL ( $\ell_2 = 0 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). b) Na vizinhança do segundo MNL ( $\ell_1 = 1.80699 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). c) Na vizinhança do terceiro MNL ( $\ell_1 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ). d) Na vizinhança do quarto MNL ( $\ell_1 = 1.99599 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ).

Faz-se uma análise qualitativa do espaço de fase. Uma curva fechada nesse espaço pode ser representativa tanto de uma resposta periódica quanto de uma quase-periódica em regime permanente. Outras respostas, como a caótica, podem apresentar curvas abertas nesse espaço. Assim, a análise do comportamento no espaço de fase não é certa, é apenas uma indicação qualitativa, de maneira análoga ao mapa de Poincaré.

Na Figura 24a, tem-se uma provável indicação de que a resposta temporal é periódica e permanente, por ser retratada por uma curva fechada, o que está de acordo com a definição de sincronidade de MNL feita por Rosenberg e com o mapa de Poincaré da Figura 23a. Observa-se, na Figura 24c, um contorno que se aproxima bastante com uma curva fechada e periódica. Contudo, há uma pequena variação representada pela linha grossa do gráfico. Das 3 curvas na vizinhança de um MNL, mostradas pelas Figuras 24b, 24c e 24d, a resposta temporal de  $\ell_1 = 1.9 \text{ kg m}^2/\text{s}$  é a que mais se aproxima de um MNL.

A Figura 24a representa um MNL exatamente.

Com isso em mente, analisam-se apenas os deslocamentos do sistema,  $\theta$  e  $\varphi$ , sem a aplicação da restrição do mapa de Poincaré, nas condições exatas ou próximas de cada MNL, na Figura 25.

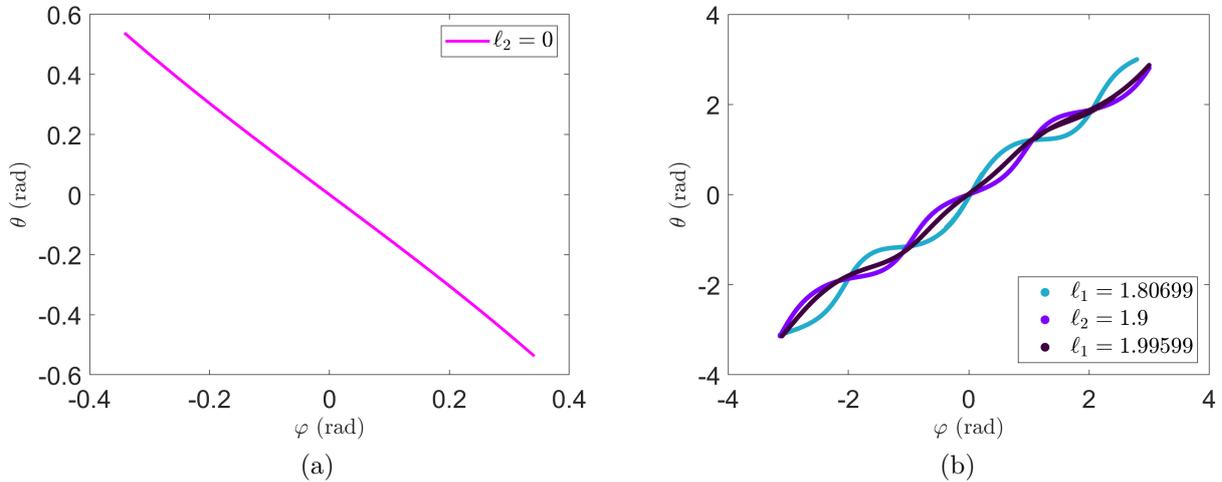


Figura 25 – Relação entre os deslocamentos do sistema não-linear com inércia variável sujeitos a MNLs estáveis para baixas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ). a) MNL fora de fase (inclinação negativa). b) Respostas próximas a um MNL em fase (inclinação positiva).

Na Figura 25b, os deslocamentos de cada GDL, em regime permanente, foram restritos ao intervalo de  $-\pi$  a  $\pi$  e apenas a parte final da resposta foi considerada, a fim de facilitar a comparação entre as respostas temporais.

Na Figura 25a, observa-se um MNL que é um MS, tendo em vista o comportamento análogo ao de um sistema linear. A resposta temporal descrita por  $\ell_2 = 0 \text{ kg m}^2/\text{s}$  é, de fato, um MNL fora de fase. Na Figura 25b, percebe-se curvas que se assemelham a um MNL em fase.

Portanto, conclui-se que as 3 curvas mostradas na Figura 25b situam-se na vizinhança do mesmo MNL, que ocorre quando a curva se transforma em uma linha reta com inclinação positiva (MS em fase). Mesmo que o mapa de Poincaré da Figura 23a indique 3 pontos distintos para esse MNL, no espaço de fase, as 3 curvas oscilam em torno de uma mesma reta. Acredita-se que esse comportamento se deve ao estado semi-definido do sistema.

Dessa forma, para pequenas energias ( $h = 0.4 \text{ J}$ ), infere-se que o sistema analisado contém apenas 2 MNLs: um MS em fora de fase e um MS em fase, sendo o último representado por diferentes curvas que oscilam em torno de uma mesma solução. Observa-se que o sistema, para uma baixa energia, se comporta de maneira análoga ao sistema linear do capítulo 3.

Seguidamente, analisa-se o sistema para altas energias. A Figura 23a ilustra o mapa de Poincaré pela equação (2.33), em regime permanente, para as EGs (5.18), com  $h = 150$  J.

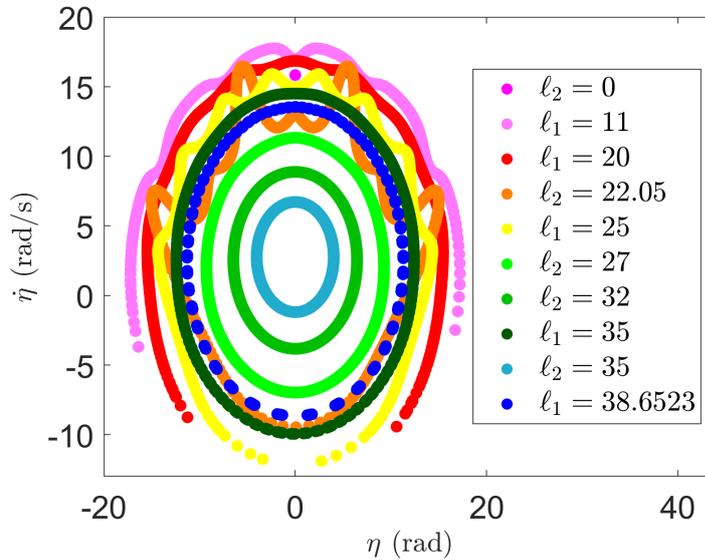


Figura 26 – Mapa de Poincaré do sistema não-linear com inércia variável para altas energias ( $h = 150$  J). As variáveis  $l_1$  e  $l_2$  são analisadas de 0 a  $\sqrt{2h[I_E(0) + I_L]}$ .

Nota-se, na Figura 26, a indicação de um MNL em  $l_2 = 0$  kg m<sup>2</sup>/s. É possível deduzir a existência de outro MNL pelas linhas contínuas obtidas nos mapas. As circunferências de  $l_2 = 32$  kg m<sup>2</sup>/s e  $l_2 = 35$  kg m<sup>2</sup>/s, por exemplo, apontam um provável MNL localizados no centro dessas curvas. Seriam necessários muitos testes de comparação para se descobrir o valor exato de  $l_2$  que define o segundo MNL do sistema.

Assim, para uma alta energia, foi possível identificar um MNL e a vizinhança de outro MNL. É possível que existam mais modos, mas é necessário descobrir os valores adequados do momento angular que correspondem a eles. De maneira análoga ao sistema do capítulo 4, a alteração das constantes do sistema pode influenciar no número de MNLs do sistema, isto é, uma análise paramétrica pode ser realizada.

## 6 Conclusão

Neste trabalho, foi possível identificar os modos de vibrar de um sistema linear, de um sistema não-linear com rigidez não-linear e de um sistema não-linear com inércia variável. Para sistemas não-lineares, constatou-se quais MNLs são similares aos modos de um sistemas linear. Além disso, distingui-se a estabilidade de cada um dos modos.

Tanto para o sistema massa-mola linear quanto para o sistema massa-mola não-linear, ambos com 2 GDLs, foram obtidos os mesmos mapas fornecidos pela literatura. Com esses resultados, a implementação do programa utilizado foi validada.

Em relação ao sistema massa-mola linear de 2 GDLs, identificou-se 2 MLs estáveis. Para o sistema massa-mola de 2 GDLs não-linear, notou-se uma alteração da quantidade de MNLs para distintos valores da rigidez não-linear,  $K_{22}$ , e foram apontados quais níveis de energia permitem a detecção de determinados MNLs. Nesse sistema, percebeu-se a existência de MNLs instáveis. Ademais, conseguiu-se indicar a coexistência de comportamento periódico e caótico, visto que, na seção de Poincaré, formou-se uma região densa e sem ordem aparente.

Ainda para o sistema massa-mola não-linear, fez-se uma análise paramétrica: diferentes valores de rigidez foram considerados e seus resultados analisados. Verificou-se que um aumento no valor de energia e uma diminuição no valor da rigidez levou a um aumento na quantidade de modos. Para um valor intermediário de rigidez ( $K_{22} = 1$ ), o sistema se comportou de maneira análoga a um sistema linear, pois apresentou dois modos estáveis para qualquer valor de energia. Portanto, infere-se que, nesse caso, o sistema é mais previsível e mais fácil de ser controlado e aplicado em um projeto de engenharia. Além disso, para determinado valor de rigidez ( $K_{22} = 0.1$ ), a partir de uma energia suficientemente alta, percebeu-se a indicação de um comportamento caótico. Dessa forma, conclui-se que o aparecimento de caos está atrelada a grandes quantidades de energia.

Por fim, um sistema biela-manivela de 2 GDLs com inércia variável, representativo de um motor, foi considerado. Analisou-se um caso com baixa energia e outro com alta energia. Concluiu-se que há, pelo menos, 1 MNL e a vizinhança de outro MNL, ambos similares. Diferentes pontos no mapa de Poincaré indicavam o mesmo modo, devido ao fato de o sistema ser semi-definido. É possível que haja mais MNLs do sistema, caso seja feita uma análise paramétrica do sistema ou novos valores de energia sejam considerados.

Em suma, foram detectados:

- 2 MNLs para o sistema linear;
- uma quantidade de MNLs que depende do nível de energia, com a presença de, pelo menos, 2 MSs, para o sistema não-linear com rigidez não-linear;
- 1 MNL e a vizinhança de outro MNL, ambos similares, para o sistema semi-definido não-linear com inércia variável. Podem existir mais MNLs no sistema.

Nota-se que o procedimento apresentado permite a identificação da estabilidade de MNLs sem a necessidade do custoso cálculo de uma solução analítica. Porém, é necessário um conhecimento *a priori* sobre quais valores das integrais primeiras (energia do modo em fase ou momento angular do sistema) fornecem a resposta que corresponde exatamente a um modo de vibrar.

Para trabalhos futuros, sugere-se a implementação de um método computacional que forneça os valores exatos das integrais primeiras correspondentes a cada modo do sistema. Para este fim, recomenda-se, no programa, a execução de um ciclo de iterações, o qual calcule o mapa de Poincaré para cada incremento do valor de uma das integrais primeiras. Com isso, pode-se comparar o tamanho do mapa obtido com o do mapa da iteração anterior. Se o mapa, após sofrer uma diminuição de tamanho, passa a ter um aumento abrupto em uma determinada iteração, armazena-se a resposta do mapa da iteração anterior, pois esta se caracteriza como um ponto de mínimo local e, conseqüentemente, um possível MNL do sistema. Alternativamente, pode-se arbitrar uma tolerância para o tamanho do mapa. Assim, caso o tamanho seja menor do que a tolerância, guarda-se o resultado, que é um candidato a um MNL do sistema. Caso contrário, o resultado é descartado e parte-se para a análise do próximo valor da integral primeira. Após isso, deve-se analisar o espaço de fase e o mapa de Poincaré dos candidatos a MNL, a fim de que se comprove seu comportamento modal.

Além disso, para o sistema com inércia variável, sugere-se uma análise paramétrica, a fim de que se investigue o número de MNLs com diferentes valores das constantes do sistema.

# Referências

- ALBU-SCHAEFFER, A.; SANTINA, C. D. A review on nonlinear modes in conservative mechanical systems. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, 2020. Citado 4 vezes nas páginas v, 18, 19 e 24.
- BENGTSSON, L.; GHIL, M.; KÄLLÉN, E. *Dynamic meteorology: data assimilation methods*. [S.l.]: Springer, 1981. v. 330. Citado na página 1.
- CESARI, L. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 16. Citado na página 11.
- CLINE, D. *Variational principles in classical mechanics*. [S.l.]: University of Rochester River Campus Librarie, 2017. Citado na página 46.
- CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 1955. Citado na página 11.
- COSTANTINO, R. F. et al. Chaotic dynamics in an insect population. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 275, n. 5298, p. 389–391, 1997. Citado na página 1.
- DINICOLA, S. et al. A systems biology approach to cancer: fractals, attractors, and nonlinear dynamics. *Omics: a journal of integrative biology*, Mary Ann Liebert, Inc. 140 Huguenot Street, 3rd Floor New Rochelle, NY 10801 USA, v. 15, n. 3, p. 93–104, 2011. Citado na página 1.
- GENTA, G. *Vibration of structures and machines: practical aspects*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 4 vezes nas páginas vi, 2, 39 e 41.
- GERSHENFELD, N. A. *The nature of mathematical modeling*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado na página 8.
- GONÇALVES, P. B. *Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 2, 13 e 15.
- KERSCHEN, G. et al. Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical systems and signal processing*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 170–194, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 2, 15 e 17.
- KRISHNASWAMI, G. S.; SENAPATI, H. An introduction to the classical three-body problem. *Resonance*, Springer, v. 24, n. 1, p. 87–114, 2019. Citado na página 1.
- MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Academic Press, 2013. Citado na página 12.

- METALLIDIS, P.; NATSIAVAS, S. Linear and nonlinear dynamics of reciprocating engines. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 38, n. 5, p. 723–738, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 2, 43, 78 e 79.
- MONTH, L. A.; RAND, R. H. An application of the poincaré map to the stability of nonlinear normal modes. 1980. Citado 7 vezes nas páginas v, 3, 22, 23, 24, 25 e 27.
- PESCE, C. P.; TANNURI, E. A.; CASETTA, L. The lagrange equations for systems with mass varying explicitly with position: some applications to offshore engineering. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 28, n. 4, p. 496–504, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 79.
- POINCARÉ, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1899. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 20.
- ROSENBERG, R. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. In: *Advances in applied mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 1966. v. 9, p. 155–242. Citado na página 9.
- ROSENBERG, R. M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. 1962. Citado 8 vezes nas páginas 2, 16, 17, 29, 31, 34, 38 e 51.
- SASTRY, S. *Nonlinear systems: analysis, stability, and control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 10. Citado na página 13.
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado 7 vezes nas páginas v, 2, 7, 9, 10, 11 e 21.
- SAVI, M. A.; PAULA, A. S. de. Vibrações mecânicas. *Rio de Janeiro: LTC*, p. 22, 2017. Citado na página 2.
- SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 164, n. 1, p. 85–124, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 2, 16, 19 e 38.
- THOMAS, G. B. et al. *Cálculo. 2 v.* [S.l.]: São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. Citado na página 66.
- VAKAKIS, A. Non-linear normal modes (nnms) and their applications in vibration theory: an overview. *Mechanical systems and signal processing*, v. 11, n. 1, p. 3–22, 1997. Citado na página 18.
- VAKAKIS, A. F.; RAND, R. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system—i. low energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 861–874, 1992. Citado 10 vezes nas páginas v, 3, 21, 22, 23, 24, 28, 30, 32 e 33.
- VAKAKIS, A. F.; RAND, R. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system—ii. high energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 875–888, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 3, 21, 24, 30 e 36.
- WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2. Citado na página 20.

# Apêndices

# A Energia Total de um Sistema Dinâmico

Seja  $\psi_p(u_1, u_2)$  a energia potencial do sistema. Assume-se que ela depende apenas dos deslocamentos das variáveis de estado,  $u_1$  e  $u_2$  e não de suas respectivas velocidades. A fórmula da energia potencial da  $q$ -ésima mola,  $\psi_{pkq}$ , é dada por

$$\psi_{pkq} = \int S_q(w) dw, \quad (\text{A.1})$$

em que  $S_q(w)$  representa a força de restituição da  $q$ -ésima mola, que é uma função de  $w$ , isto é, da deflexão sofrida pelo elemento elástico. Para sistemas lineares, a função  $S_q(w)$  é linear. A resolução da equação (A.1) fornece uma constante de integração arbitrária,  $C_{int}$ , que indica a dependência da energia potencial em relação ao referencial. Adota-se que o ponto com deflexão nula fornece uma energia potencial nula. Desta maneira, tem-se convenientemente que  $C_{int} = 0$ .

## A.1 Sistema Massa-Mola Linear

Na Figura 10, percebe-se que a deflexão da primeira mola é  $w_1 = u_1$ , a deflexão da segunda mola é  $w_2 = u_1 - u_2$  e a deflexão da terceira mola é  $w_3 = u_2$ . Com isso, considerando a energia das três molas presentes no sistema, pela equação (A.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \psi_p(u_1, u_2) &= \sum_{q=1}^3 \psi_{pkq} = \psi_{pk1} + \psi_{pk2} + \psi_{pk3} \\ &= \int S_1(w_1) dw_1 + \int S_2(w_2) d(w_2) + \int S_3(w_3) dw_3 \\ &= \int S_1(u_1) du_1 + \int S_2(u_1 - u_2) d(u_1 - u_2) + \int S_3(u_2) du_2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Como o sistema é linear e a rigidez é unitária, a expressão da força elástica dos três elementos é  $S(w) = kw = w$ . Assim, da fórmula (A.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
\psi_p(u_1, u_2) &= \int u_1 \, du_1 + \int (u_1 - u_2) \, d(u_1 - u_2) + \int u_2 \, du_2 \\
&= \frac{u_1^2}{2} + \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + u_2^2) = \frac{1}{2}(2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2) \\
&= u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A energia cinética do sistema,  $\psi_c(v_1, v_2)$ , também é calculada. Por sua vez, a energia cinética depende apenas das velocidades das variáveis de estado,  $v_1$  e  $v_2$ , e não de seus respectivos deslocamentos. Seja  $\psi_{cm}$  a energia cinética de cada elemento de inércia, isto é, de cada massa. Da definição de energia, tem-se

$$\psi_{cm} = \int \mathcal{F} \, du. \tag{A.4}$$

em que  $\mathcal{F}$  é a força resultante do elemento de inércia.

Pela substituição da Segunda Lei de Newton para massa constante, ou seja,  $\mathcal{F} = m\ddot{u}$ , obtém-se

$$\psi_{cm} = \int m\ddot{u} \, du. \tag{A.5}$$

Pela substituição  $v = \frac{du}{dt} \implies du = v \, dt$ ,

$$\psi_{cm} = m \int \frac{dv}{dt} v \, dt = m \int v \, dv = \frac{mv^2}{2}. \tag{A.6}$$

Assim, para as duas massas unitárias da Figura 11, a energia cinética do sistema é descrita por

$$\psi_c(v_1, v_2) = \psi_{cm1} + \psi_{cm2} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}. \tag{A.7}$$

Dessa maneira, calcula-se o Hamiltoniano,  $H(u_1, u_2, v_1, v_2)$ , do sistema, entendido como a sua energia total, ou seja, a soma da energia cinética e potencial. Pelas equações (2.21), (A.3) e (A.7), tem-se

$$H(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2 = h. \tag{A.8}$$

## A.2 Sistema Massa-Mola Não-Linear

De maneira geral, a força de restauração de cada elemento de rigidez deve ser uma função ímpar em relação à deflexão de cada mola. Em outras palavras, se  $w_q$  é a deflexão de um elemento de rigidez, a força elástica,  $S_q$ , necessita atender à igualdade  $S_q(-w_q) = -S_q(w_q)$ . Após isso, o autor esclarece que a força  $S_q$  pode ser descrita, de forma geral, como um somatório de  $n_k$  termos de polinômios de grau ímpar, de acordo com

$$S_q(u) = \sum_{r=1}^{n_k} K_{qr} u_q^{2r-1} = K_{q1} u_q + K_{q2} u_q^3 + K_{q3} u_q^5 + K_{q4} u_q^7 + \dots + K_{qn_k} u_q^{2n_k-1}, \quad (\text{A.9})$$

em que  $q \in \mathbb{N}$  é o subíndice de cada mola presente no sistema,  $r \in \mathbb{N}$  é o subíndice que caracteriza o  $r$ -ésimo termo não-linear de uma única mola,  $n_k \in \mathbb{N}$  é o número máximo de termos não-lineares presentes nesse elemento rígido,  $u_q$  é a deflexão da  $q$ -ésima mola,  $S_q$  é a sua respectiva força elástica e  $K_{qr}$  é o  $r$ -ésimo termo de rigidez (linear, se  $r = 1$ , ou não linear, se  $r > 1$ ) associados a  $q$ -ésima mola. É possível que um elemento de rigidez não-linear tenha infinitos coeficientes de rigidez, já que não há restrição para a variação de  $r$ , isto é,  $n_k$  pode possuir qualquer valor, dependendo da mola não-linear escolhida.

Pode-se associar a força  $S_q$  a um sistema linear pelas igualdades  $K_{q1} = k_q$  e  $K_{q2} = K_{q3} = \dots = K_{qn} = 0$ . Com isso, volta-se ao caso da seção 3.

No sistema ilustrado pela Figura 13, tem-se que  $q = 1, 2, 3$ , isto é, há três elementos de rigidez no problema físico, e que  $r = 1, 2$ , ou seja, só são considerados polinômios de primeiro e terceiro grau nas forças elásticas.

Os três elementos rígidos contidos na Figura 13 são não-lineares, pois todos contêm um termo à terceira potência. Porém, as molas das extremidades apresentam também o termo à primeira potência, isto é, um termo linear, enquanto a mola que conecta as massas  $m_1$  e  $m_2$  possui apenas o termo polinomial de terceiro grau. Em outras palavras, isso pode ser matematicamente descrito pelas constantes  $K_{11} = K_{12} = 1$ ,  $K_{21} = 0$  e  $K_{31} = K_{32} = 1$ . A variável  $K_{22}$  permanece como incógnita, que será variada para analisar o comportamento do sistema.

Interessa-se pela energia total do sistema, candidata a uma integral primeira. Na Figura 13, percebe-se que os elementos de inércia permanecem os mesmos no caso linear. Por essa razão, a energia cinética do sistema é descrita pela equação (A.7). No entanto, graças à presença de rigidez não-linear, o cálculo da energia potencial muda, em comparação ao sistema linear. De maneira análoga a seção 3, tem-se, da equação (A.2),

$$\begin{aligned}
\psi_p(u_1, u_2) &= \int S_1(u_1) du_1 + \int S_2(u_1 - u_2) d(u_1 - u_2) + \int S_3(u_2) du_2 \\
&= \int (u_1 + u_1^3) du_1 + \int K_{22}(u_1 - u_2)^3 d(u_1 - u_2) + \int (u_2 + u_2^3) du_2 \\
&= \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_1^4}{4} + K_{22} \frac{(u_1 - u_2)^4}{4} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_2^4}{4}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Assim, determina-se o Hamiltoniano, pela soma da energia cinética,  $\psi_c$ , com a energia potencial,  $\psi_p$ ,

$$\begin{aligned}
H(u_1, u_2, v_1, v_2) &= \psi_c(v_1, v_2) + \psi_p(u_1, u_2) \\
&= \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_1^4}{4} + K_{22} \frac{(u_1 - u_2)^4}{4} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_2^4}{4}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

# B Verificação das Integrais Primeiras

Neste capítulo, apresentam-se os cálculos das medidas conservadas no movimento de cada sistema.

## B.1 Sistema Massa-Mola Linear

Da equação (2.24), a integral primeira nesse sistema é dada por

$$0 + \frac{\partial g}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v_2} \frac{dv_2}{dt} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo a equação (3.5) em (B.1), obtém-se a EDP linear

$$\frac{\partial g}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} v_2 + \frac{\partial g}{\partial v_1} (u_2 - 2u_1) + \frac{\partial g}{\partial v_2} (u_1 - 2u_2) = 0. \quad (\text{B.2})$$

### B.1.1 Hamiltoniano

Verifica-se se o Hamiltoniano é uma medida conservada no sistema massa-mola linear. Pela substituição  $g = H(u_1, u_2, v_1, v_2)$  em (B.2), conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left( \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) v_1 + \left( \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) v_2 + \left( \frac{\partial H}{\partial v_1} \right) (u_2 - 2u_1) + \left( \frac{\partial H}{\partial v_2} \right) (u_1 - 2u_2) = \\ &= (2u_1 - u_2)v_1 + (-u_1 + 2u_2)v_2 + v_1(u_2 - 2u_1) + v_2(u_1 - 2u_2) \\ &= [(2u_1 - u_2) - (2u_1 - u_2)]v_1 + [(2u_2 - u_1) - (2u_2 - u_1)]v_2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

### B.1.2 Energia do Modo em Fase

De fato,  $C$  é uma integral primeira, porque, pela substituição de (3.8) em (B.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \left(\frac{\partial C}{\partial u_1}\right) v_1 + \left(\frac{\partial C}{\partial u_2}\right) v_2 + \left(\frac{\partial C}{\partial v_1}\right) (u_2 - 2u_1) + \left(\frac{\partial C}{\partial v_2}\right) (u_1 - 2u_2) = \\
&= \frac{1}{2}(u_1 + u_2)v_1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)v_2 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(u_2 - 2u_1) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(u_1 - 2u_2) \\
&= \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(u_2 - 2u_1 + u_1 - 2u_2) \\
&= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)[u_1 + u_2 - u_1 - u_2] = 0.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

## B.2 Sistema Massa-Mola Não-Linear

Como o problema da Figura 13 é autônomo com 2 GDLs, vale a equação (B.1). Pela substituição da equação (4.1) em (B.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} v_2 + \frac{\partial g}{\partial v_1} [-u_1 - u_1^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] + \\
+ \frac{\partial g}{\partial v_2} [-u_2 - u_2^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3] = 0.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

### B.2.1 Hamiltoniano

Verifica-se se o Hamiltoniano é uma integral primeira do sistema. Pela substituição  $g = H$  na equação (B.5), chega-se em

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial H}{\partial u_2} v_2 + \frac{\partial H}{\partial v_1} [-u_1 - u_1^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] + \\
+ \frac{\partial H}{\partial v_2} [-u_2 - u_2^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3].
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Como, da equação (4.4), vale

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_1} = u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3 \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} = K_{22}(u_2 - u_1)^3 + u_2 + u_2^3 \\ \frac{\partial H}{\partial v_1} = v_1 \\ \frac{\partial H}{\partial v_2} = v_2, \end{cases} \tag{B.7}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= [u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3]v_1 + [K_{22}(u_2 - u_1)^3 + u_2 + u_2^3]v_2 + \\
&+ v_1[-u_1 - u_1^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] + v_2[-u_2 - u_2^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3] \\
&= [u_1 - u_1 + u_1^3 - u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3]v_1 + \\
&+ [u_2 - u_2 + u_2^3 - u_2^3 + K_{22}(u_2 - u_1)^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3]v_2 = 0v_1 + 0v_2 = 0. \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

Logo, o Hamiltoniano é uma integral primeira.

## B.2.2 Energia do Modo em Fase

Verifica-se se energia do modo em fase dada pela equação (3.8) é uma integral primeira. Substituindo  $g = C$  na equação (B.5), chega-se em

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial u_1}v_1 + \frac{\partial C}{\partial u_2}v_2 + \frac{\partial C}{\partial v_1}[-u_1 - u_1^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] + \\
&+ \frac{\partial C}{\partial v_2}[-u_2 - u_2^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3]. \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

Da equação (3.8), tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial u_1} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{\partial C}{\partial u_2} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{\partial C}{\partial v_1} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ \frac{\partial C}{\partial v_2} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2)v_1 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)v_2 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)[-u_1 - u_1^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] + \\
&+ \frac{1}{2}(v_1 + v_2)[-u_2 - u_2^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3] \\
&= \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + \\
&+ \frac{1}{2}(v_1 + v_2)[-u_1 - u_1^3 - u_2 - u_2^3 + K_{22}(u_2 - u_1)^3 - K_{22}(u_2 - u_1)^3] \\
&= \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)[-u_1 - u_1^3 - u_2 - u_2^3] \\
&= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(u_1 + u_2 - u_1 - u_1^3 - u_2 - u_2^3) \\
&= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(-u_1^3 - u_2^3) \neq 0. \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Logo,  $C$  não é uma integral primeira do sistema.

Pensou-se em modificar a equação (3.8), de forma a criar uma nova função,  $C^*$ , que atendesse as derivadas parciais

$$\frac{\partial C^*}{\partial u_1} = \frac{\partial C^*}{\partial u_2} = \frac{1}{2}(u_1 + u_1^3 + u_2 + u_2^3). \quad (\text{B.12})$$

Com isso, a função  $C^*$ , pela equação (4.6), seria uma integral primeira. Contudo, tem-se que

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial u_1 \partial u_2} \neq \frac{\partial^2 C^*}{\partial u_2 \partial u_1}, \quad (\text{B.13})$$

isto é, as derivadas parciais mistas são diferentes. Pelo Teorema das Derivadas Mistadas, isso implica que  $C^*$  não é contínua. Como consequência, a equação (B.13) garante que não existe função  $C^*$  bem comportada que contenha as derivadas parciais desejadas (THOMAS et al., 2009).

### B.3 Sistema Torsional Não-Linear

Tendo em vista que o sistema é autônomo, a integral primeira é obtida através da substituição da equação (5.20) em (B.1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{I_E(\theta)} \left[ -I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \left[ -\frac{k_0}{I_L}(\varphi - \theta) \right] = 0. \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

#### B.3.1 Hamiltoniano

Verifica-se se o Hamiltoniano é uma integral primeira. Pela substituição  $g = H$  na equação (B.14), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{I_E(\theta)} \left[ -I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \left[ -\frac{k_0}{I_L}(\varphi - \theta) \right]. \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Pela equação (5.26), vale

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + k_0(\theta - \varphi) \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -k_0(\theta - \varphi) \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = I_E(\theta)\dot{\theta} \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = I_L\dot{\varphi}. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left[ \frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + k_0(\theta - \varphi) \right] \dot{\theta} + [-k_0(\theta - \varphi)]\dot{\varphi} + \\ &+ I_E(\theta)\dot{\theta} \left\{ \frac{1}{I_E(\theta)} \left[ -I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] \right\} + I_L\dot{\varphi} \left[ -\frac{k_0}{I_L}(\varphi - \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^3 + k_0(\theta - \varphi)\dot{\theta} - k_0(\theta - \varphi)\dot{\varphi} + \\ &+ \left[ -I'_E(\theta)\dot{\theta}^3 \right] - k_0(\theta - \varphi)\dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi)\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$= -\frac{1}{2}I'_E(\theta)\dot{\theta}^3 \neq 0. \quad (\text{B.19})$$

Logo,  $H$  não é uma integral primeira do sistema. Para que o Hamiltoniano seja uma medida conservada, é necessária a condição  $I'_E(\theta) = 0$ .

### B.3.2 Momento Angular Total

Faz-se a verificação se o momento angular total é uma integral primeira. Assim, substitui-se  $g = L$  na equação (B.14),

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \left\{ \frac{1}{I_E(\theta)} \left[ -I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] \right\} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \left[ -\frac{k_0}{I_L}(\varphi - \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Pela equação (5.30), obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = I'_E(\theta)\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_E(\theta) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_L. \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Assim, chega-se em

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= [I'_E(\theta)\dot{\theta}] \dot{\theta} + (0)\dot{\varphi} + I_E(\theta) \left\{ \frac{1}{I_E(\theta)} \left[ -I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] \right\} + \\ &+ I_L \left[ -\frac{k_0}{I_L}(\varphi - \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$= I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 - I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) + k_0(\theta - \varphi) = 0. \quad (\text{B.23})$$

Logo,  $L$  é uma integral primeira do sistema.

# C Cálculo das Condições Iniciais

Neste apêndice, mostra-se a equivalência entre as CIs de um sistema de 2 GDLs e as curvas de nível de suas respectivas integrais primeira.

## C.1 Sistema Massa-Mola Linear

Demonstram-se as expressões das CIs para restringir um sistema a um determinado nível de energia total e energia do modo em fase. Essa formulação é usada em ambos os sistemas massa-mola linear e não-linear.

Adotando  $u_{10} = 0$  e  $u_{20} = 0$ , como  $h$  e  $c$  são constantes, chega-se a um sistema algébrico não-linear de duas equações com duas incógnitas,  $v_{10}$  e  $v_{20}$ , ou seja,

$$\begin{cases} H(0, 0, v_{10}, v_{20}) = \frac{1}{2}(v_{10}^2 + v_{20}^2) = h \\ C(0, 0, v_{10}, v_{20}) = \frac{1}{4}(v_{10} + v_{20})^2 = c \end{cases} \implies \begin{cases} v_{10}^2 + v_{20}^2 = 2h \\ (v_{10} + v_{20})^2 = 4c. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Manipula-se a equação da energia do modo em fase de (C.1). Dado que, por definição de energia,  $c \geq 0$ , tem-se

$$v_{10} + v_{20} = 2\sqrt{c} \implies v_{20} = 2\sqrt{c} - v_{10}. \quad (\text{C.2})$$

Com  $v_{20}$  determinado, substitui-se a equação (C.2) na equação da energia total de (C.1). Assim,

$$\begin{aligned} v_{10}^2 + (2\sqrt{c} - v_{10})^2 &= 2h \implies v_{10}^2 + 4c - 4\sqrt{c}v_{10} + v_{10}^2 = 2h \\ \implies 2v_{10}^2 - 4\sqrt{c}v_{10} + 4c - 2h &= 0 \\ \implies v_{10}^2 - 2\sqrt{c}v_{10} + (2c - h) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Utiliza-se Bháskara para resolver a equação (C.3),

$$v_{10} = \frac{2\sqrt{c} \pm \sqrt{4c - 4(2c - h)}}{2} = \sqrt{c} \pm \sqrt{c - (2c - h)} \quad (\text{C.4})$$

$$\implies v_{10} = \sqrt{c} \pm \sqrt{h - c} \implies v_{20} = \sqrt{c} \mp \sqrt{h - c}. \quad (\text{C.5})$$

Como  $v_{10}$  representa uma grandeza física, tem-se que  $v_{10} \in \mathbb{R}$ . Logo, para que  $v_{10}$  não seja um número complexo, da equação (C.5), deve-se ter  $c \leq h$ . Assim, determina-se o domínio da variável  $c$ , isto é,

$$0 \leq c \leq h. \quad (\text{C.6})$$

Da equação (C.5), nota-se que há duas respostas possível para as CIs. Por isso, separa-se a variável  $c$  em dois possíveis casos. Para a primeira resposta, usa-se  $c_1$ , de forma que

$$\begin{cases} v_{10} = \sqrt{c_1} + \sqrt{h - c_1} \\ v_{20} = \sqrt{c_1} - \sqrt{h - c_1}. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Para a segunda resposta, usa-se a variável  $c_2$ , definida por

$$\begin{cases} v_{10} = \sqrt{c_2} - \sqrt{h - c_2} \\ v_{20} = \sqrt{c_2} + \sqrt{h - c_2}. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Sistema Torsional Não-Linear

Demonstra-se a equivalência entre as CIs e os níveis de energia total e momento angular. Novamente, aplica-se a condição  $u_{10} = 0$  e  $u_{20} = 0$ . Assim, chega-se em um sistema algébrico não-linear com duas equações e duas incógnitas,  $v_{10}$  e  $v_{20}$ ,

$$\begin{cases} H(0, 0, v_{10}, v_{20}) = \frac{1}{2}(I_E(0)v_{10}^2 + I_L v_{20}^2) = h \\ L(0, 0, v_{10}, v_{20}) = I_E(0)v_{10} + I_L v_{20} = \ell \end{cases} \implies \begin{cases} I_E(0)v_{10}^2 + I_L v_{20}^2 = 2h \\ I_E(0)v_{10} + I_L v_{20} = \ell \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Assim, o sistema depende do valor inicial da inércia, no caso,  $I_E(0)$ . Logo, isola-se a variável  $v_{10}$ ,

$$I_E(0)v_{10} + I_L v_{20} = \ell \implies v_{10} = \frac{1}{I_E(0)} (\ell - I_L v_{20}). \quad (\text{C.10})$$

Substitui-se a equação (C.10) na primeira expressão de (C.9),

$$\begin{aligned}
I_E(0) \left[ \frac{1}{I_E(0)} (\ell - I_L v_{20}) \right]^2 + I_L v_{20}^2 &= 2h \\
\implies \frac{1}{I_E(0)} (\ell^2 - 2\ell I_L v_{20} + I_L^2 v_{20}^2) + I_L v_{20}^2 &= 2h \\
\implies \ell^2 - 2\ell I_L v_{20} + I_L^2 v_{20}^2 + I_E(0) I_L v_{20}^2 &= 2h I_E(0) \\
\implies [I_L^2 + I_E(0) I_L] v_{20}^2 - 2\ell I_L v_{20} + &= 0
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Aplicando Bháskara, obtém-se

$$\begin{aligned}
v_{20} &= \frac{2\ell I_L \pm \sqrt{[2\ell I_L]^2 - 4[I_L^2 + I_E(0) I_L][\ell^2 - 2h I_E(0)]}}{2[I_L^2 + I_E(0) I_L]} \\
&= \frac{\ell I_L \pm \sqrt{\ell^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)]}}{I_L [I_L + I_E(0)]}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Assim, para  $v_{10}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
v_{10} &= \frac{1}{I_E(0)} \{ \ell - I_L v_{20} \} \\
&= \frac{1}{I_E(0)} \left\{ \ell - I_L \frac{\ell I_L \pm \sqrt{\ell^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)]}}{I_L [I_L + I_E(0)]} \right\} \\
&= \frac{1}{I_E(0)} \left\{ \ell + \frac{-\ell I_L \mp \sqrt{\ell^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)]}}{I_L + I_E(0)} \right\}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Como  $v_{10}, v_{20} \in \mathbb{R}$ , é necessário que o argumento da raiz quadrada da equação (C.13) seja positiva. Assim,

$$\begin{aligned}
\ell^2 I_L^2 - I_L [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)] &\geq 0 \\
\implies \ell^2 I_L^2 &\geq I_L [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)] \\
\implies \ell^2 I_L &\geq [I_L + I_E(0)] [\ell^2 - 2h I_E(0)] \\
\implies \ell^2 I_L &\geq \ell^2 I_L - 2h I_E(0) I_L + \ell^2 I_E(0) - 2h I_E(0)^2 \\
\implies 2h I_E(0) I_L + 2h I_E(0)^2 &\geq \ell^2 I_E(0) \\
\implies 2h I_L + 2h I_E(0) &\geq \ell^2 \\
\implies \ell^2 &\leq 2h [I_L + I_E(0)]
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Como o momento angular pode assumir valores negativos, obtém-se

$$-\sqrt{2h [I_L + I_E(0)]} \leq \ell \leq \sqrt{2h [I_L + I_E(0)]}. \tag{C.15}$$

No entanto, valores negativos do momento angular só são selecionados no mapa de Poincaré se este estiver definido para  $v_1 < 0$ . Como este trabalho considera apenas seções com  $v_1 > 0$ , o domínio de  $\ell$  é

$$0 \leq \ell \leq \sqrt{2h[I_L + I_E(0)]}. \quad (\text{C.16})$$

# D Método Alternativo para a Obtenção das Equações Governantes

Neste apêndice, obtém-se as EGs de uma maneira alternativa. Para tal, usa-se o Hamiltoniano do sistema e a equação (2.22).

## D.1 Sistema Massa-Mola Linear

Pela equação (3.6), chega-se em

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial v_1} \\ \dot{u}_2 = \frac{\partial H}{\partial v_2} \\ \dot{v}_1 = -\frac{\partial H}{\partial u_1} \\ \dot{v}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u_2} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = u_2 - 2u_1 \\ \dot{v}_2 = u_1 - 2u_2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1 = u_2 - 2u_1 \\ \ddot{u}_2 = u_1 - 2u_2. \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

A equação (D.1) é igual à equação (3.5), como esperado.

## D.2 Sistema Massa-Mola Não-Linear

Pela equação (4.4), obtém-se

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial v_1} \\ \dot{u}_2 = \frac{\partial H}{\partial v_2} \\ \dot{v}_1 = -\frac{\partial H}{\partial u_1} \\ \dot{v}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2 \\ \dot{v}_1 = -[u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3] \\ \dot{v}_2 = -[u_2 + u_2^3 - K_{22}(u_1 - u_2)^3] \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

$$\implies \begin{cases} \ddot{u}_1 = -[u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3] \\ \ddot{u}_2 = -[u_2 + u_2^3 + K_{22}(u_2 - u_1)^3] \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

$$\implies \begin{cases} \ddot{u}_1 + u_1 + u_1^3 + K_{22}(u_1 - u_2)^3 = 0 \\ \ddot{u}_2 + u_2 + u_2^3 + K_{22}(u_2 - u_1)^3 = 0. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

A equação (D.4) é igual à equação (4.1), de acordo com a teoria.

# E Cálculos do Motor Não-Linear

Neste capítulo, apresentam-se os cálculos feitos para a análise do sistema torsional de 2 GDLs equivalente a um motor caracterizado por um mecanismo biela-manivela.

## E.1 Cálculo Analítico da Derivada da Inércia

Interessa-se pela taxa de variação de  $I_E(\theta)$ . Da equação (5.11), percebe-se que a derivada de  $I_E$  depende das taxas de variações de  $p_1$  e  $p_2$ . Contudo, as funções  $p_1$  e  $p_2$  dependem de  $\theta$  e de  $\gamma$ . Para calcular as derivadas de  $p_1$  e  $p_2$ , deve-se, primeiro, chegar em uma expressão que dependa apenas de  $\theta$  e, então, derivá-la. Desse modo, os cálculos são feitos separadamente.

- Para  $p_1$ , substitui-se a equação (5.7) em (5.12),

$$\begin{aligned}
 p_1(\theta) &= \left[ \text{sen}(\theta) + \lambda \frac{\text{sen}(2\theta)}{2 \left( \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)} \right)} \right]^2 = \left[ \text{sen}(\theta) \pm \lambda \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 \\
 &= \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 = \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} (1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta))}} \right]^2 \\
 &= \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 = \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2. \quad (\text{E.1})
 \end{aligned}$$

- Para  $p_2$ , substitui-se a equação (5.7) em (5.13),

$$\begin{aligned}
 p_2(\theta) &= \left[ \lambda \frac{\cos(\theta)}{\left( \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)} \right)} \right]^2 = \left[ \pm \lambda \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 = \left[ \frac{\cos(\theta)}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 \\
 &= \left[ \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} [1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)]}} \right]^2 = \left[ \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right]^2 = \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}. \quad (\text{E.2})
 \end{aligned}$$

Assim, calculam-se as derivadas de  $p_1$  e  $p_2$ .

\* Para  $p'_1$ , define-se a função auxiliar  $p_3$ , para facilitar a aplicação da regra da cadeia,

$$p_3(\theta) = \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}, \quad (\text{E.3})$$

$$\Rightarrow p_1(\theta) = \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2p_3(\theta)} \right]^2 = \left[ \text{sen}(\theta) + \frac{\pm \text{sen}(2\theta)}{2p_3(\theta)} \right]^2. \quad (\text{E.4})$$

A derivada de  $p_3$  se dá, portanto, por

$$p'_3(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}} [-2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)] = \frac{-\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}}. \quad (\text{E.5})$$

Como consequência, pela regra da cadeia e do quociente, deriva-se a equação (E.1) em relação à  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} p'_1(\theta) &= 2 \left\{ \text{sen}(\theta) + \frac{\pm \text{sen}(2\theta)}{2p_3} \right\} \left\{ \cos(\theta) + \frac{1}{2} \frac{[\pm 2 \cos(2\theta)p_3] - [\pm \text{sen}(2\theta)]p'_3}{p_3^2} \right\} \\ &= 2 \left[ \text{sen}(\theta) \pm \frac{\text{sen}(2\theta)}{2p_3} \right] \left[ \cos(\theta) \pm \frac{2 \cos(2\theta)p_3 - \text{sen}(2\theta)p'_3}{2p_3^2} \right] \\ &= 2 \left[ \frac{2p_3 \text{sen}(\theta) \pm \text{sen}(2\theta)}{2p_3} \right] \left[ \frac{2p_3^2 \cos(\theta) \pm [2 \cos(2\theta)p_3 - \text{sen}(2\theta)p'_3]}{2p_3^2} \right] \\ &= \frac{1}{2p_3^3} [2p_3 \text{sen}(\theta) \pm \text{sen}(2\theta)] \left\{ 2p_3^2 \cos(\theta) \pm [2 \cos(2\theta)p_3 - \text{sen}(2\theta)p'_3] \right\}. \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

Pela substituição de  $p_3$  e  $p'_3$ , obtém-se a expressão de  $p'_1$ ,

$$\begin{aligned} p'_1(\theta) &= \frac{1}{2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^{3/2}} \left[ 2 \text{sen}(\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm \text{sen}(2\theta) \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)] \cos(\theta) \pm \left[ 2 \cos(2\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} - \text{sen}(2\theta) \frac{-\text{sen}(2\theta)}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^{3/2}} \left[ 2 \text{sen}(\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm \text{sen}(2\theta) \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)] \cos(\theta) + \right. \\ &\left. \pm \left[ 2 \cos(2\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} + \frac{\text{sen}^2(2\theta)}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right] \right\}. \quad (\text{E.7}) \end{aligned}$$

\* Para  $p'_2$ , deriva-se a equação (E.2) em relação à  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} p'_2(\theta) &= \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta) [\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)] - \cos^2(\theta) [-2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta)]}{[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^2} \\ &= \frac{2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) [\lambda^{-2} + \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)]}{[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^2} \\ &= \text{sen}(2\theta) \frac{\lambda^{-2} + \cos(2\theta)}{[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^2}. \quad (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Assim, a partir das equações (E.7) e (E.8), é possível calcular a derivada da equação (5.11),

$$I'_E(\theta) = (m_{b2} + m_p)R^2 p'_1(\theta) + I_0 p'_2(\theta). \quad (\text{E.9})$$

### E.1.1 Imposição $I'_E(\theta) = 0$

Nesta seção, apresenta-se a metodologia feita para descobrir quais valores de  $\theta$  atendem à restrição  $I'_E(\theta) = 0$ .

Pela equação (E.9), aplica-se  $I'_E(\theta) = 0$ ,

$$I'_E(\theta) = (m_{b2} + m_p)R^2 p'_1(\theta) + I_0 p'_2(\theta) = 0, \quad (\text{E.10})$$

$$\implies (m_{b2} + m_p)R^2 p'_1(\theta) = -I_0 p'_2(\theta). \quad (\text{E.11})$$

Chama-se  $\varepsilon = \frac{(m_{b2} + m_p)R^2}{2I_0} \implies -2\varepsilon = -\frac{(m_{b2} + m_p)R^2}{I_0}$ . Logo,

$$-2\varepsilon p'_1(\theta) = p'_2(\theta). \quad (\text{E.12})$$

Substituindo as equações (E.7) e (E.8), chega-se em

$$\begin{aligned} & -\frac{2\varepsilon}{2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^{3/2}} \left[ 2 \text{sen}(\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm \text{sen}(2\theta) \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ 2[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)] \cos(\theta) \pm \left[ 2 \cos(2\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} + \frac{\text{sen}^2(2\theta)}{2\sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)}} \right] \right\} = \\ & \text{sen}(2\theta) \frac{\lambda^{-2} + \cos(2\theta)}{[\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)]^2}. \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

A equação (E.13) indica a restrição que deve ser obedecida para que o sistema descrito pela Figura 21 seja conservativo. Nota-se que alguns valores de  $\theta$  satisfazem a expressão (E.13), como  $\theta = k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , uma vez que, para o lado esquerdo da equação, tem-se

$$\begin{aligned} \left[ 2 \text{sen}(\theta) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm \text{sen}(2\theta) \right] &= \left[ 2 \text{sen}(k\pi) \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm \text{sen}(2k\pi) \right] \\ &= \left[ 0 \sqrt{\lambda^{-2} - \text{sen}^2(\theta)} \pm 0 \right] = 0 \quad (\text{E.14}) \end{aligned}$$

e, para o lado direito da equação (E.13), tem-se o termo

$$\text{sen}(2\theta) = \text{sen}(2k\pi) = 0. \quad (\text{E.15})$$

Embora o sistema não seja rigorosamente conservativo, é possível interpretar que ele é conservativo em determinados instantes de tempo, os quais atendem  $\theta = k\pi$ , tendo em vista que foi utilizada uma função  $I_E(\theta)$  limitada.

## E.2 Dedução das Equações Governantes

Apresentam-se os cálculos das EGs do motor. Usa-se o método de Lagrange e faz-se o passo a passo que levou a um resultado errôneo encontrado por Metallidis e Natsiavas. Após isso, corrige-se o erro pelo método de Newton.

### E.2.1 Método de Lagrange (resultado errôneo)

Como a inércia do motor pode ser considerada como uma função de  $\theta$ , é possível definir a energia cinética total do sistema da Figura 21,

$$\psi_c(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}I_E(\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_L\dot{\varphi}^2. \quad (\text{E.16})$$

A energia potencial, por sua vez, é dada apenas pela rigidez do eixo,

$$\psi_p(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}k_0(\theta - \varphi)^2. \quad (\text{E.17})$$

Portanto, o Lagrangeano,  $\mathcal{L}$ , é definido como a diferença entre a energia cinética e a potencial de um sistema,

$$\mathcal{L} = \psi_c - \psi_p = \frac{1}{2}I_E(\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_L\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k_0(\theta - \varphi)^2. \quad (\text{E.18})$$

A fórmula de Lagrange é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = M_j, \quad (\text{E.19})$$

em que  $M_j$  são as forças ou os momentos não conservativos do sistema.

Nesse caso,  $j = 1, 2$ ,  $u_1 = \theta$ ,  $v_1 = \dot{\theta}$ ,  $u_2 = \varphi$  e  $v_2 = \dot{\varphi}$ . À primeira vista, percebe-se 3 fontes de momentos não conservativos no sistema, uma proveniente de cada amortecimento viscoso. Como o momento é não conservativo, ele é aplicado na direção oposta ao referencial adotado para  $\theta$  e  $\varphi$ . Com isso, chega-se às equações

$$M_1 = -c_E \dot{\theta} - c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}), \quad (\text{E.20})$$

$$M_2 = -c_L \dot{\varphi} - c_0(\dot{\varphi} - \dot{\theta}). \quad (\text{E.21})$$

O erro cometido está na equação (E.20). Segundo Pesce, Tannuri e Casetta (2006), a variação da inércia causa um momento não conservativo no sistema. Tal efeito foi ignorado pelos autores Metallidis e Natsiavas. Assim, apenas a EG do primeiro GDL foi comprometida.

Calculam-se os termos das derivadas parciais da equação (E.19),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\partial I_E(\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{2} k_0 2(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} I_E(\theta) 2\dot{\theta} = I_E(\theta) \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_E(\theta) \ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{d}{dt} I_E(\theta(t)) \\ \implies \frac{d}{dt} I_E(\theta(t)) = \frac{d}{d\theta} I_E(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = I'_E(\theta) \dot{\theta} \\ \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_E(\theta) \ddot{\theta} + I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} k_0 2(\theta - \varphi)(-1) = k_0(\varphi - \theta) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} I_L 2\dot{\varphi} = I_L \dot{\varphi} \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_L \ddot{\varphi}. \end{array} \right. \quad (\text{E.22})$$

Substituindo as equações (E.20), (E.21) e (E.22) em (E.19), obtém-se as EGs encontradas por Metallidis e Natsiavas. Para o primeiro GDL, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = M_1, \quad (\text{E.23})$$

$$I_E(\theta) \ddot{\theta} + I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - \left[ \frac{1}{2} I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - k_0(\theta - \varphi) \right] = -c_E \dot{\theta} - c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}), \quad (\text{E.24})$$

$$I_E(\theta) \ddot{\theta} + I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E \dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0, \quad (\text{E.25})$$

$$I_E(\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} I'_E(\theta) \dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E \dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0. \quad (\text{E.26})$$

A equação (E.26) deve ser corrigida. Para o segundo GDL, chega-se em

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = M_2, \quad (\text{E.27})$$

$$I_L \ddot{\varphi} - \left[ -k_0(\varphi - \theta) \right] = -c_L \dot{\varphi} - c_0(\dot{\varphi} - \dot{\theta}), \quad (\text{E.28})$$

$$I_L \ddot{\varphi} + c_0(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) + c_L \dot{\varphi} + k_0(\varphi - \theta) = 0. \quad (\text{E.29})$$

A equação (E.29) não precisa ser corrigida.

## E.2.2 Correção pelo Método de Newton

Corrige-se a EG (E.26) pelo método newtoniano. Pela Figura 22, aplica-se a Segunda Lei de Newton. O somatório de momentos atuantes no corpo,  $\mathcal{M}$ , é igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular, isto é,

$$\sum \mathcal{M} = \frac{d}{dt}(I_E(\theta)\dot{\theta}). \quad (\text{E.30})$$

Pela regra do produto, tem-se

$$\frac{d}{dt}(I_E(\theta)\dot{\theta}) = I_E(\theta)\frac{d}{dt}\dot{\theta} + \dot{\theta}\frac{d}{dt}I_E(\theta). \quad (\text{E.31})$$

Pela regra da cadeia, obtém-se a expressão da derivada temporal da inércia,

$$\frac{d}{dt}I_E(\theta) = \frac{d}{d\theta}I_E(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = I'_E(\theta)\dot{\theta}. \quad (\text{E.32})$$

Logo, pela Segunda Lei de Newton, chega-se em

$$\sum \mathcal{M} = I_E(\theta)\ddot{\theta} + \dot{\theta}I'_E(\theta)\dot{\theta} = I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2. \quad (\text{E.33})$$

Substituindo os momentos encontrados no DCL da Figura 22, obtém-se

$$-c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) - c_E\dot{\theta} - k_0(\theta - \varphi) = I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2. \quad (\text{E.34})$$

Assim, encontra-se a EG correta para o primeiro GDL,

$$I_E(\theta)\ddot{\theta} + I'_E(\theta)\dot{\theta}^2 + c_0(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) + c_E\dot{\theta} + k_0(\theta - \varphi) = 0. \quad (\text{E.35})$$