

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA INSTITUTO DE FÍSICA PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU ASTROFÍSICA GRAVITACIONAL E FÍSICA ESPACIAL

Reflexões sobre a natureza do tempo a partir de fenômenos relativísticos

TARIC DE OLIVEIRA SOUSA

BRASÍLIA – DF 2022

TARIC DE OLIVEIRA SOUSA

Reflexões sobre a natureza do tempo a partir de fenômenos relativísticos

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Pós-Graduação Lato Sensu da Universidade de Brasília de Astrofísica Gravitacional e Física Espacial, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Especialização.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Nadja Simão Magalhães

BRASÍLIA – DF 2022

Sousa, Taric de Oliveira.

Reflexão sobre a natureza do tempo a partir de fenômenos relativísticos / Taric de Oliveira Sousa. – Brasília, 2022.

78 fl.

Monografia (Especialização) – Universidade de Brasília, Programa de Pós-Graduação Lato Sensu.

Orientadora: Prof. Dra. Nadja Simão Magalhães, IF/UnB e UNIFESP

Por: Taric de Oliveira Sousa

Comissão avaliadora composta por:

Prof. Dra. Nadja Simão Magalhães IF-UnB e UNIFESP Orientadora
Prof. Dra. Vanessa Carvalho Andrade IF-UnB Examinadora
Prof. Dr. Marcos Duarte Maia IF-UNB Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradecer é poder apontar a grandeza de não saber e ser guiado para o entendimento. Também é ter junto a você pessoas que te apoiam para que um objetivo seja alcançado. Agradecer talvez seja o maior ato de humildade que uma pessoa pode ter pela oportunidade de poder aprender. Neste sentido é impossível não agradecer à queridíssima Prof^a. Dr^a. Nadja Simão Magalhães e sua visão tão ampla da física e seu entusiasmo em dividir seu conhecimento comigo.

Também é impossível não agradecer a todo o corpo docente deste curso que abriu as portas para que os apaixonados por astronomia, astrofísica e relatividade pudessem ter acesso aos conhecimentos gigantescos que esses professores disponibilizaram. Aqui eu preciso agradecer particularmente ao Prof. Dr. José Leonardo Ferreira que lá em 2007, quando ministrou o Curso Introdução à Astronomia e Astrofísica, momento em que eu pude olhar pela primeira vez por um telescópio e sentir uma paz inexplicável, já falava de um curso de Pós-Graduação em astronomia na Universidade de Brasília e que se concretizou neste Curso Lato Sensu que eu tive o prazer de poder participar. Neste ponto, ainda, agradeço à Prof^a. Dr^a Vanessa Carvalho Andrade por ter feito este curso possível.

Realizar uma Pós-graduação num momento tão ímpar da nossa história (no meio da pandemia de COVID19) não foi uma tarefa fácil, principalmente quando você fica internado uma semana, e ter o apoio do grupo que se formou para superarmos esse desafio foi fundamental. Fernando, Gilson, José Ricardo, Luiz, Marcus, Petrus, Sidney e Thiago e os demais que, por diversas razões, ficaram pelo caminho, vocês são pessoas incríveis e que estarão sempre no meu coração. Sem vocês acredito que o caminho seria muito mais pesado.

Ainda preciso agradecer à minha família que sempre me deu apoio e, mesmo nos momentos mais difíceis deste curso, me motivou a continuar pois estudar a maioria dos temas me motivam a continuar aprendendo. Agradeço enormemente às pessoas que não entendem nada do que eu falo ou que me chamam de doido, Nanci, Mario, Kate, Érica, Tairo e Tales (*in memoriam*). Minha vida é melhor com o incentivo de vocês ou com as lembranças que sempre estarão aqui.

Agradeço também a um grandíssimo amigo que me incentivou sempre a continuar. Muito Obrigado, Mestre Raphael dos Santos Lapa. Se uma coisa foi boa na graduação foi ter feito um amigo como você.

Mas o agradecimento mais especial vai para os meus dois pequenos cosmonautas, Lucas e Catarina. Os maiores amores da minha vida e que adoram escutar as minhas ideias mirabolantes sobre o tempo. Minha vida não é nada sem vocês aqui perto de mim. Eu amo ser pai de vocês.

		VII

"O grande Cronos de mente distorcida que aos filhos devorou."

Teogonia – Hesíodo

VIII

RESUMO

O trabalho pretende refletir sobre a natureza do tempo a partir dos conceitos

elencados por Newton e dentro da dinâmica para referenciais em movimento

abordados na relatividade especial de Einstein. Para tal, exploramos todos os

experimentos mentais propostos em seu trabalho original de 1905. Uma vez que

Einstein usa o relógio como ferramenta fundamental de sua análise, procuramos

trazer a origem do relógio para entender o que é registrado como tempo e por fim

analisamos este registro para entendermos como a dilação do tempo pode nos guiar

no que é entendido como tempo em si.

Palavras-chave: Tempo. Relatividade Especial.

IX

ABSTRACT

This work intends to reflect on the nature of time from the concepts listed by Newton

and within the dynamics for moving references addressed in Einstein's special

relativity. To this end, we explored all the thought experiments proposed in his original

work from 1905. Since Einstein uses the clock as a fundamental tool in his analysis,

we seek to bring the origin of the clock to understand what is recorded as time and

finally we analyze this record. to understand how the dilation of time can guide us in

what is understood as time itself.

Keywords: Time. Special Relativity.

PREFÁCIO

O que é o tempo? Essa é a pergunta que todos sabem a resposta se não for feita a indagação. Mas quando nos questionamos sobre o que o tempo é, não sabemos responder.

Entender a natureza do tempo é fascinante e escrever este trabalho me fez voltar a pensar sobre este tema que me intriga desde sempre.

Estudamos muito na física as ideias massificadas e bem entendidas, mas deixamos de lado, muitas vezes, a origem dos fenômenos. Ficamos bons em resolver questões, mas não ficamos bons em questionar o que efetivamente está por trás do entendimento que a física dá para o mundo que a gente observa pelas diversas lentes que precisamos usar neste Universo complexo onde estamos.

O tempo é uma dessas peças pouco compreendidas neste quebra-cabeça cósmico. Como ele funciona? Para que ele serve? Qual a sua origem? Como ele se relaciona com diversas frentes de conhecimento, dentro da física, que não se comunicam muito bem?

Neste trabalho tive que ler os textos clássicos de Newton e Einstein para procurar entender o que cada um, na sua visão ampla do mundo, entendia desse ente físico.

Newton se mostrou gigante na sua falta de capacidade de definir o tempo. Einstein se mostrou igualmente gigante quando propôs que o tempo não passa do mesmo modo para todos os observadores. O tempo e o espaço são relativos e o que une essa relatividade é a velocidade da luz.

Quando Newton definiu o tempo absoluto, ele pôde ter deixado uma dica de que talvez não haja esse tal tempo, mas podemos medir algo e isso é o que chamamos de tempo. Como ele próprio diz: "Tempo relativo (...) é algo sensível (observável pelos sentidos¹) e externo (seja preciso ou não). Mensura a duração pelo significado do movimento que é comumente usado em vez do tempo verdadeiro".

Não conhecemos nada que não tenha uma passagem de tempo. Nós envelhecemos e associamos essa passagem de tempo aos anos (movimento da Terra ao redor do Sol), nós acordamos ao amanhecer e dormimos ao anoitecer e dessa noção construímos as horas (que vêm da rotação da Terra ao redor de seu próprio

_

¹ Nature of time essay. Barbour, J. (2008)

eixo), esperamos um trem às 7 horas da manhã na estação e precisamos que ele não se atrase nenhum minuto. Vivemos dentro desse tempo relativo que Newton definiu e fico muito feliz por ter lido as ideias dele.

Mas Einstein me intrigou ainda mais com a relatividade. Ele próprio diz que o "tempo de um evento é o que é dado simultaneamente com o evento do relógio estacionário localizado no local do evento". Não há a necessidade, em relatividade, de definir o tempo, mas há a necessidade de definir o relógio. O tempo que o relógio marca depende, dentre outras coisas, da velocidade relativa entre os observadores. E daí vem uma pergunta: como pode alguém envelhecer mais rápido do que outra pessoa só por conta da sua velocidade relativa?

Os trabalhos, especialmente desses dois grandes físicos, são encantadores e intrigantes por si só, mas eu venho buscando a resposta para o que é de fato o tempo. Talvez Einstein também tenha deixado uma dica sobre esse ente físico dentro da relatividade.

Acho, e só acho mesmo, que o presente é um intervalo aberto, que o futuro é uma gama de possibilidades que se abre quanto mais distante for a projeção do evento e o passado é algo imutável que pode ter gerado, ou não, um registro. Certa vez coloquei esta concepção de tempo num diagrama e me impressionei como ele é semelhante ao diagrama de Minkowski (eu não conhecia o Diagrama de Minkowski).

Lógico que achar não é suficiente, e que bom que não é. Pensar sobre um tema tão obscuro me motiva pelo simples fato de poder aprender e descobrir.

Ler esses clássicos, os quais eu julgo terem feito falta na minha formação, me faz pensar a física que vai além do calculável e é bem mais didático do que resolver milhares de questões de um tema. Aprofundar a educação científica de forma a podermos experimentar as nossas hipóteses e tirarmos nossas conclusões faz falta e precisamos construir este caminho. Hipoteticamente, Newton teve a sua maçã e Einstein teve seu raio de luz. Eu tive o prazer de aprender com eles e outros grandes pensadores para poder abstrair neste Universo fascinante.

Índice

AGRADECIMENTOS	5
RESUMO	8
ABSTRACT	9
PREFÁCIO	10
INTRODUÇÃO	14
Capítulo 1 – As perspectivas de Newton e de Einstein	15
1.1 – As definições de Newton	15
1.2 – A dinâmica fundamental	15
1.3 – Os tempos de Newton	16
1.4 – Simultaneidade local de Einstein	17
1.5 – Sincronia em relógios estacionários	17
1.6 – Definição da velocidade da informação	18
1.7 – Haste fixa e definição da passagem do tempo para diferentes observadores	20
Capítulo 2 – Construindo a Relatividade Especial	23
2.1 – Definindo as equações em $\xi \mid\mid x, \eta \mid\mid y \mid e \mid \zeta \mid\mid z$	23
2.2 – O espaço corrigido	27
2.3 – O tempo corrigido	28
2.4 – Determinando $oldsymbol{\phi}(oldsymbol{v})$	29
2.5 – A régua	33
2.5.1 – Movimento nos eixos do espaço	34
2.6 – O relógio	36
2.6.1 – Movimentos nos eixos de tempo	38
2.7 – Quando v = c	39
2.8 – O tempo	39
Capítulo 3 – O Paradoxo dos gêmeos e questões modernas do tempo	41
3.1 – Referenciais na relatividade	41
3.2 – Construindo a Linha de mundo	42
3.3 – O Paradoxo dos gêmeos dentro do diagrama de Minkowski	46
3.4 – Medição do tempo próprio do múon	49
3.5 – Relógio de luz	50
3.6 – Relógios super precisos com registro em ${f 10^{-18} s}$	52
3.7 – Tempo na quântica	53
Considerações Finais	
APÊNDICE A: Determinando as derivadas apresentadas nas transformações de variáveis	55

APÊNDICE B: Calculando $ au$ como função linear	57
APÊNDICE C: Cálculo de $ au$ para a transformação de coordenadas	58
APÊNDICE D Combinando as equações (19), (20) e (21) do texto	61
APÊNDICE E: transformando de ${\cal D}$ para ${\cal B}$	62
APÊNDICE F: Olhando para o que acontece na direção do eixo x	65
APÊNDICE G: Olhando para o que acontece na direção do eixo t	66
APÊNDICE H: Dilatação do tempo com relação à latitude da Terra	68
APÊNDICE I: O relógio de luz	71
APÊNDICE J: Translação da Terra e translação do Telescópio James Webb	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

INTRODUÇÃO

Este trabalho concentra-se, inicialmente, na análise e interpretação de fenômenos introduzidos pela relatividade especial, proposta por Albert Einstein no seu trabalho original publicado em 1905, *Zur Elektrodynamik bewegter Körpe*, na resvista *Annalen der Physik*, que trata sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. Especificamente, a análise é feita sobre a natureza do tempo, observando-o tanto em referenciais estacionários quanto em referencias em movimento relativístico.

Porém, a base deste pensamento exige o entendimento da física explicada por Isaac Newton no seu trabalho *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1686) onde temos o alicerce da mecânica.

Após a análise de como o tempo em relatividade é alterado, partimos para refletir como os efeitos desta dissincronia podem dar respostas sobre o que é o tempo. Nem Newton nem Einstein explicam o que é o tempo e por isso compreender o relógio de sol como a origem da marcação do tempo pode nos ajudar a entender o tempo na física. Entender a construção do relógio e a evolução desse mecanismo nos permite achar respostas dentro de diversas vertentes da física que precisam de altíssima precisão no tempo para desenvolver seus estudos.

Capítulo 1 – As perspectivas de Newton e de Einstein

1.1 – As definições de Newton

Quando estudamos os textos clássicos de Isaac Newton sobre mecânica temos a percepção imediata de que o movimento rege aquela base fundamental da física, não à toa é a primeira vertente de ensino nos cursos básicos.

Newton (1686) define a quantidade de matéria, quantidade de movimento, força inata da matéria, força imprimida, força centrípeta, dentre outras. As explicações de várias formas de movimentos e suas aplicações constroem leis que regem a mecânica clássica e suas aplicações, porém, temos o tempo como uma entidade que sempre existiu no mundo físico.

Pelas próprias palavras de Newton:

Ha&enus voces minus notas, quo fenfu in fequentibus accipiendae fint, explicare vifum eft. Tempus, fpatium, locus & motus, funt omnibus notiflima. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hafce non aliter quam ex relatione ad fenfibilia concipiat. Et inde oriuntur praejudicia quaedam, quibus tollendis convenit eafdem in abfolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diflingui. NEWTON (1686, p. 6)

I do not define time, space, place and motion as being well known to all. Only I must observe, that the common people conceive those quantities under no Other notions but from the relation They bear to sensible objects. And thence arise certain prejudices, for the removing of which it will be conveniente to distinguish them into absolute and relative, true and apparent, mathematical and common. NEWTON (1686, p. 6) Tradução por Florian Cajori (1966).

Eu não defino tempo, espaço, lugar e movimento, sendo bem conhecidos por todos. Eu apenas posso observar o que pessoas comuns podem conceber dessas quantidades sob nenhuma outra noção a não ser da relação com que eles têm com os objetos sensíveis. Daí surgem certos preconceitos para cuja remoção será conveniente distingui-los em absolutos e relativos, verdadeiros e aparentes, matemáticos e comuns. NEWTON (1686, p. 6) Tradução do autor.

1.2 – A dinâmica fundamental

O movimento consiste numa mudança de posição de um corpo ou de um sistema, em relação ao tempo, quando medido por um dado observador num referencial determinado. É a base da dinâmica, que determina que a força é a derivada da quantidade de movimento $(\vec{p}=m\vec{v})$ com relação ao tempo, ou seja:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
 (1)

Assim, pela segunda Lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \ . \tag{2}$$

Sabemos que velocidade é dada pela derivada do espaço com relação ao tempo.

$$v = \frac{ds}{dt}. (3)$$

Ou pela variação do espaço e pela variação do tempo quando temos os valores definidos para essas grandezas como dado pela expressão abaixo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$
 (4)

A expressão (3) traz relação mais fundamental do movimento de uma partícula sensível, onde sensível deve ser entendido como observável, como disse Barbour (2008). Para que haja movimento (deslocamento desde um ponto s_1 para um ponto s_2), temos associada a passagem do tempo (marcando o início do movimento no instante t_1 e o final no instante t_2). Todo movimento associa-se intrinsecamente nessa relação de percurso de espaço num dado intervalo de tempo.

1.3 – Os tempos de Newton

Aqui temos a base fundamental da mecânica newtoniana tendo o espaço e o tempo como grandezas físicas inerentes ao universo e existentes por si só. Ou seja:

Tempus abfolutum, verum, & mathematicum, in fe & natura fua fine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio: Relativum, apparens, & vulgare ell fen- fibilis & externa quaevis durationis per motum menfura (feu accurata feu inaequabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut hora, dies, menfis, annus. (NEWTON, 1686, p. 6). Texto original

Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably without relation to anything external, and by another name is called duration; Relative, apparent and common time, is some sensible and external (whether accurate or unequable) measure of duration by the means of motion, which ir commonly used instead of true time; such as na hour, a day, a month, a year. (NEWTON, 1686, p. 6) Tradução por Florian Cajori (1966).

Tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si só, é detentor da sua própria natureza, flui igualmente sem relação com nada externo e é por outro nome chamado: Duração. Tempo relativo, aparente e comum é algo sensível e externo (seja preciso ou não). Mensura a duração pelo significado do movimento que é comumente usado em vez do tempo verdadeiro como hora, dia, mês ou ano. (NEWTON, 1686, p. 6) Tradução do autor.

Para Newton o tempo não é apenas absoluto, verdadeiro e matemático. Esse tempo é o tempo que flui independente de algo externo e sua natureza não é compreendida. O que julgamos compreender em nosso entendimento comum é o tempo relativo, aparente e comum. O que vemos no relógio é a própria mensuração da duração do movimento, porém não é o tempo verdadeiro, mas sim, a duração associada a algum movimento.

1.4 - Simultaneidade local de Einstein

Albert Einstein (1905) construiu uma estrutura para a análise dos fenômenos que envolvem o tempo partindo do referencial do relógio (tempo comum) de um observador. Einstein precisou definir, fisicamente, o sistema de mensuração do tempo e para isso ele delimitou que o tempo medido é o tempo observado nos ponteiros do relógio do observador.

Assim, os eventos locais são simultâneos, pois ocorrem no mesmo instante de todos os relógios sincronizados. Por exemplo, a chegada de um trem à estação às 7 horas. Este evento - chegada do trem na estação às 7 horas - é simultâneo ao ponteiro do relógio marcando 7 horas na estação. Dessa forma definimos, objetivamente, os eventos de chegada do trem à estação e a observação da marcação do relógio. Esses eventos são simultâneos localmente.

Notamos que a física newtoniana se remete a eventos observados dentro da simultaneidade local e compreendidos no tempo comum.

Eventos que ocorram em pontos diferentes da Terra também poderão ter simultaneidade para relógios que estão em repouso entre si, mas será necessário sincronizá-los.

1.5 - Sincronia em relógios estacionários

O tempo de um evento é o que é dado simultaneamente com o evento do relógio estacionário localizado no local do evento, esse relógio sendo síncrono e de fato síncrono por todas as determinações de tempo, especificado com o relógio estacionário. Einstein (1905, p. 3) Tradução do autor.

Quando colocamos relógios em locais distintos do espaço e que estão em repouso entre si, será necessário sincronizá-los. Um evento x' que ocorram na vizinhança do observador $\mathcal A$ será coincidente e simultâneo com a vizinhança de $\mathcal A$, o que define a simultaneidade local, porém, no geral, não será simultâneo com o tempo marcado em outro ponto do espaço. Imaginemos que este evento x' seja observado desde a origem do sistema coordenado $\mathcal B$ e que este possua um relógio sincronizado com o relógio de $\mathcal A$. A observação do evento x'em $\mathcal A$ a partir da origem de $\mathcal B$ demanda o percurso da luz do ponto x' até a origem de $\mathcal B$. Esse exemplo mostra a necessidade de uma trama de relógios para a marcação do tempo em sistemas distintos no espaço.

Uma vez que os relógios estão sincronizados eles registram uma passagem de tempo similar, levando-se em consideração que os mecanismos foram construídos da mesma forma e com a mesma escala de marcação.

Porém, registrar o evento no relógio em \mathcal{A} não é simultâneo com o registrar em \mathcal{B} . A informação precisará viajar desde o local do evento até aquele outro ponto do espaço para que haja o registro do evento.

Seguindo o exemplo do trem, no instante da sua chegada à plataforma em $\mathcal A$ será marcado o instante de tempo $t_{\mathcal A}$. Assim que ocorrido esse evento, será enviada a informação para o observador em $\mathcal B$ que marcará, olhando em seu relógio, o instante que a informação chegar como o instante $t_{\mathcal B}$. Cada observação será registrada no relógio próprio de cada observador. Para que o observador em $\mathcal A$ tenha nota de que o evento foi observado em $\mathcal B$, a informação precisa ser enviada de volta de $\mathcal B$ para $\mathcal A$, e este observador em $\mathcal A$, ao receber a informação registrará o instante $t'_{\mathcal A}$.

Para que haja a sincronia dos relógios, Einstein propõe:

$$t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{A}}' - t_{\mathcal{B}} \,. \tag{5}$$

Partindo dessa expressão podemos criar uma trama de relógios sincronizados em vários pontos do espaço.

1.6 – Definição da velocidade da informação

Dois postulados vão fundamentar a relatividade de Einstein:

1 – Princípio da Relatividade: As leis pelas quais os estados dos sistemas físicos sofrem mudanças não são afetadas, sejam essas mudanças de estado referidas a um ou outro de dois sistemas de coordenadas em movimento translacional uniforme. Einstein (1905, p. 4) Tradução do autor.

2 – Princípio da constância da velocidade da luz: Qualquer raio de luz se move no sistema "estacionário" de coordenadas com a velocidade c determinada, seja o raio emitido por um aparelho estacionário ou por um corpo em movimento. Einstein (1905, p. 4) Tradução do autor.

Por isso, velocidade é igual ao caminho da luz dividido pelo intervalo de tempo.

Partindo da sequência de eventos para a sincronia dos relógios e tendo c como a velocidade da luz, podemos usar a função horária dos espaços uma vez que c é constante no vácuo:

$$S - S_0 = vt, \tag{6}$$

Então, imaginemos o evento x' ocorra em \mathcal{A} no ponto S_0 . O feixe de luz viaja até o ponto S que coincide com a origem de \mathcal{B} . Assim, $S - S_0 = S_{\mathcal{AB}}$.

Cada evento de emissão e recepção será registrado no relógio do espaço coordenado \mathcal{A} ou \mathcal{B} que estarão previamente sincronizados pela expressão (5).

Os momentos da saída da informação de \mathcal{A} e da chegada da informação a \mathcal{B} (Figura 1) têm como intervalo de tempo o termo da esquerda da equação (5). Assim:

$$S_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = c(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}}),\tag{7}$$

Para o momento da saída da informação de $\mathcal B$ e retorno para $\mathcal A$ utilizaremos o termo da direita da equação (5). Assim, temos:

$$S_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = c(t_{\mathcal{A}}' - t_{\mathcal{B}}), \tag{8}$$

Somando (7) e (8):

$$2S_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = c\{(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}}) + (t_{\mathcal{A}}' - t_{\mathcal{B}})\},\tag{9}$$

Assim:

$$c = \frac{2S_{\mathcal{A}\mathcal{B}}}{t_{\mathcal{A}}' - t_{\mathcal{A}}}. (10)$$

Onde a expressão (10) define a constante universal da velocidade da luz no espaço vazio.

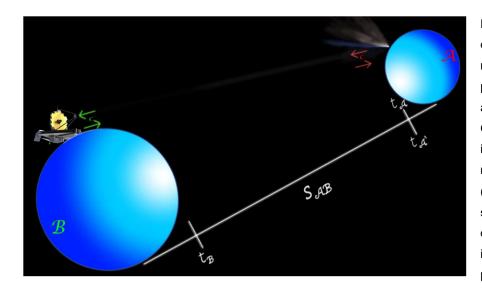


Figura 1: Emissão: envio da informação do cometa registrando t_a . A luz percorre a S_{AB} e chega ao satélite e registra t_b . satélite reenvia a informação para O referencial (registrando t'_a para que seja registrado que em ${\mathcal B}$ ocorreu a recepção da informação. Figura produzida pelo autor.

Temos, portanto, que o evento registrado tem sincronicidade de relógios nos pontos \mathcal{A} e \mathcal{B} , a definição de c como a velocidade da informação e que essa velocidade está associada à distância $S_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ e dividida pela diferença de tempo $(t'_{\mathcal{A}}-t_{\mathcal{A}})$.

Einstein aponta que:

(...) é imprescindível ter o tempo definido por meio de relógios estacionários em sistemas estacionários e o tempo sendo definido e apropriado para este sistema, o que será chamado de "o tempo do sistema estacionário. EINSTEIN, (1905, p. 3)

1.7 – Haste fixa e definição da passagem do tempo para diferentes observadores

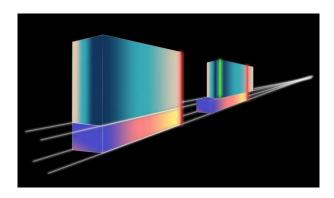
Tendo como base os postulados da relatividade especial, colocaremos uma haste rígida ao longo da superfície de um trem e em cada extremidade colocaremos um relógio, tendo o cuidado de fazer com que esses relógios estejam sincronizados localmente com o relógio na estação. Teremos um observador na plataforma e outro viajando junto com a haste no trem. Quando esse trem estiver em movimento uniforme e o ponto a extremidade frontal, \mathcal{A} , passar pelo observador na plataforma, um feixe de luz será emitido para a extremidade traseira, \mathcal{B} , e que logo após refletirá o feixe de luz de volta para a extremidade frontal.

É simples observar que o feixe de luz percorrerá o comprimento da haste em $\overline{\mathcal{AB}}$ e em $\overline{\mathcal{BA}}$. Assim como na sincronia dos relógios, no momento da emissão do feixe, o relógio na extremidade \mathcal{A} registrará um tempo $t_{\mathcal{A}}$, no instante que o feixe

atingir a extremidade \mathcal{B} será registrado um tempo $t_{\mathcal{B}}$ e no retorno da informação para a extremidade \mathcal{A} teremos $t'_{\mathcal{A}}$. A haste terá um comprimento fixo, que suporemos, como Newton, não variar com o movimento e que chamaremos de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$

Aplicando a função horária dos espaços, associando $S-S_0=\mathcal{L}_{\mathcal{AB}}$, tendo o trem velocidade v no sentido positivo de eixo x e que a extremidade \mathcal{A} está na frente (Figura 2a).

Analisando as Figuras 2a e 2b, vemos que o trem se desloca no sentido positivo do eixo x, porém a emissão de $\mathcal A$ para $\mathcal B$ vai no sentido oposto. Supondo um observador na plataforma, este verá que a velocidade da luz será c menos a velocidade v do trem.



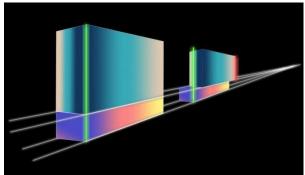


Figura 2a: emissão de um feixe de luz na parte frontal do bloco (barra vermelha) em movimento e recepção da luz na parte traseira. (barra verde). A barra vermelha no segundo corresponde ao local da emissão. Figura produzida pelo autor.

Figura 2b: Reflexão da luz na parte traseira (barra verde) e recepção na parte frontal do bloco (barra vermelha). A barra verde no segundo bloco corresponde ao evento de reflexão. Figura produzida pelo autor.

Consequentemente, para os eventos emissão em $\mathcal A$ e chegada a $\mathcal B$ temos, classicamente:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = (c - v)(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}}), \tag{11}$$

ou

$$(t_{\mathcal{B}} - t_{\mathcal{A}}) = \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}}{(c - v)}.$$
 (12)

O divisor (c-v) corresponde a dizer que a luz percorreu $\mathcal{L}_{\mathcal{AB}}$ mais rápido que a velocidade da luz, se pensarmos de forma clássica.

Ao chegar a \mathcal{B} , o feixe de luz é refletido de volta para \mathcal{A} (Figura 2b) que registra o evento do retorno em t_a' . Como o trem continua em movimento o observador na plataforma observa que os valores de c e v estão indo no sentido positivo do eixo x. Dessa forma, para esse trecho, temos:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = (c+v)(t'_{\mathcal{A}} - t_{\mathcal{B}}),\tag{13}$$

ou

$$(t'_{\mathcal{A}} - t_{\mathcal{B}}) = \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}}{(c+v)}.$$
 (14)

Aqui o divisor (c+v) corresponde a dizer que a luz precisa percorrer o comprimento $\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ mais a distância que o trem percorreu por conta da sua velocidade. Nesse trecho, uma vez que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, classicamente, é imutável, o tempo do percurso da luz é maior.

É importante trazer a definição clássica de Newton para o espaço:

Espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com nada externo, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é algo móvel, dimensional e mensurável do espaço absoluto (...). Newton (1686, p. 6) Tradução do autor.

Porém, a equação (12) mostra que o feixe de luz viajou até a extremidade traseira numa velocidade maior que a da luz e, pela equação (14), ao voltar para a extremidade frontal a velocidade da luz foi menor. Temos uma contradição com o que diz o postulado do princípio da velocidade da luz, que anuncia que a luz se desloca sempre com velocidade c independente da velocidade da fonte emissora.

Se os postulados estão certos, então é necessário entender o que ocorre com os tempos e os espaços das equações (12) e (14). Classicamente esperaríamos que os eventos (emissão da luz na frontal, reflexão traseira e retorno para a parte frontal) fossem simultâneos e síncronos, porém, segundo a relatividade especial, a luz é definida como a entidade física com a velocidade limite e nada poderia viajar mais rápido. Então uma correção é necessária.

Capítulo 2 – Construindo a Relatividade Especial

2.1 – Definindo as equações em $\xi || x, \eta || y e \zeta || z$

Entendemos na equação (5) como se dá a sincronia de relógios em sistemas estacionários e podemos associar esses sistemas com o tempo relativo de Newton. Porém, ao considerarmos o tempo absoluto como algo que flui igualmente dentro da sua própria natureza, incorremos numa inconsistência com os postulados einstenianos. Se o tempo flui igualmente para todos os observadores em todas as condições de movimento, então a luz pode se mover mais rápido do que o valor determinado para c, o que, pelo postulado da constância da velocidade da luz é absurdo.

Então, partindo do pressuposto de que c é a velocidade limite, as componentes de espaço e tempo precisam ser reavaliadas. Einstein propõe uma análise mais aprofundada na experiência da haste rígida:

Dois sistemas de coordenadas, cada uma com uma régua na direção do eixo x. Um estacionário chamado de \mathcal{A} e outro com velocidade de módulo v constante e em direção ao sentido positivo do eixo x do sistema estacionário, chamado de \mathcal{B} . O sistema \mathcal{B} possui uma fonte luminosa que emite um raio de luz. Essa emissão será registrada em \mathcal{B} no seu relógio local. Como exposto nas expressões (12) e (14), é aqui que precisamos nos atentar para a inconsistência entre as visões de Newton e Einstein.

Os registros de tempo em $\mathcal B$ serão relacionados à letra grega tau (τ) . O instante da emissão do feixe de luz será registrado como τ_0 . Um feixe de luz viajará até o ponto x' determinado como um ponto qualquer sobre uma régua no eixo x do sistema $\mathcal A$ e esse evento será registrado como τ_1 . O feixe de luz será refletido para a origem da emissão e, ao retornar, será registrado o momento da chegada como τ_2 . Até aqui a construção de emissão, reflexão e retorno do feixe são idênticos aos exemplos que foram construídos no capítulo anterior.

Os eixos ortogonais do sistema \mathcal{B} serão nomeados como csi (ξ) , eta (η) e zeta (ζ) No sistema \mathcal{A} os eixos ortogonais serão x, y, z. Desta forma, $\xi \mid\mid x, \eta \mid\mid y \in \zeta \mid\mid z$ e:

$$\mathcal{A}(t, x, y, z), \qquad \mathcal{B}(\tau, \xi, \eta, \zeta).$$

Os sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} devem respeitar a homogeneidade do espaço e do tempo, como diz o postulado 1 e, por isso, as funções expressas para qualquer um dos sistemas deve ser linear.

Como foi identificado x' como um ponto qualquer sobre a régua, para que esse seja o nosso ponto de referência no sistema estacionário, então esse ponto será x' = x - vt que é a transformada de Galileu. Isso, pois a régua em \mathcal{B} se afasta com velocidade constante ao sentido positivo do eixo x. O sinal negativo representa que a origem de \mathcal{B} se afasta da origem de \mathcal{A} .

Ao assumir x' = x - vt, temos que um ponto em repouso no sistema \mathcal{B} terá valores $x', y \ e \ z$ independentes do tempo. Precisamos, também, definir τ em função de $x', y, z \ e \ t$. Para isso τ não deve ser nada mais que um resumo, expressão (16), dos dados dos relógios em repouso no sistema \mathcal{B} que foram sincronizados como dado pela expressão (5).

Na Figura 3 temos a representação dessa experiência mental.

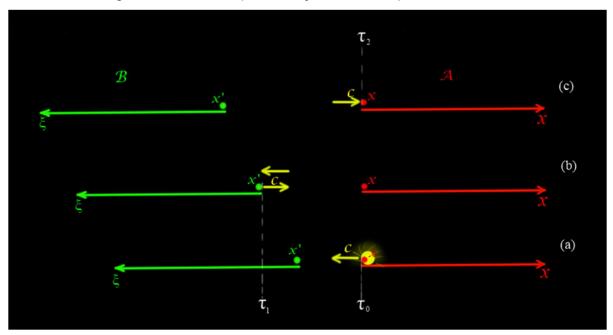


Figura 3: a) emissão de um feixe de luz na origem de um sistema estacionário (registro de τ_0); b) recepção e reflexão do feixe de luz no sistema em movimento (registro de τ_1); c) recepção no sistema estacionário (registro de τ_2). Figura produzida pelo autor.

Podemos definir os tempos registrados em \mathcal{B} como:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1. \tag{15}$$

Assim, com a constância da velocidade da luz no sistema estacionários, admitindo $\tau(x', y, z, t)$ e aplicando na expressão (15), temos:

$$\frac{1}{2} \left[\tau_0(0,0,0,t) + \tau_2 \left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v} \right) \right] = \tau_1 \left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-v} \right). \tag{16}$$

Na expressão (16), indicamos que um evento ocorre na origem espacial de \mathcal{A} e registra τ_0 , viaja até \mathcal{B} e registra τ_1 e retorna para a origem onde registra τ_2 .

Notamos que temos a mesma condição de a luz viajar mais rápido do que o limite determinado pelo postulado da constância da velocidade da luz.

Com x' infinitesimal, podemos escolher qualquer ponto para a reflexão do feixe de luz, e ainda assim a função $\tau(x',y,z,t)$ continuará válida. A expressão (17) mostra esta relação com a solução no apêndice A.

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \tag{17}$$

Uma vez que não há deslocamentos na direção de y e z, temos que

$$\frac{\partial \tau}{\partial \nu} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

Sabendo-se que τ é uma função linear (Apêndice B), (17) e (18) conduzem à solução:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right),\tag{19}$$

onde a é o coeficiente angular constante associado à função afim.

Para um raio de luz emitido em $\tau = 0$ na direção crescente de ξ , temos que:

$$\xi = \tau c. \tag{20}$$

Tendo em vista que o raio de luz é emitido de x' em \mathcal{A} e que se move na direção de \mathcal{B} , a medida feita por \mathcal{A} para esta velocidade é dada por c-v. Assim:

$$t = \frac{x'}{c - v'},\tag{21}$$

Então, combinando (19), (20) e (21) (Apêndice E), temos:

$$\xi = a \frac{c^2}{c^2 - v^2} x'. \tag{22}$$

Analogamente, resolvemos para η e ζ ; porém, como a medida das velocidades nessas coordenadas são dadas por $\sqrt{c^2-v^2}$ e admitimos x'=0, resulta:

$$\eta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} y, \qquad \zeta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} z.$$
(23)

Ou seja:

$$\eta = \phi(v)y, \qquad \qquad \zeta = \phi(v)z.$$
(24)

Ao observar as expressões em (23), vemos um termo que chamaremos de $\phi(v)$ e que devemos definir qual a sua função. Porém, devemos achar esse mesmo termo nas expressões τ e ξ pois estamos realizando a mudança de coordenadas do sistema $\mathcal B$ inteiro.

Realizando a álgebra necessária, (Apêndice C), temos que:

$$\tau = \phi(v)\gamma(t - vx/c^2),$$

$$\xi = \phi(v)\gamma(x - vt).$$

$$\eta = \phi(v)y,$$

$$\zeta = \phi(v)z.$$
(25)

onde a expressão abaixo é chamada de Fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. (26)$$

Com a expressão (25) fica claro que existe uma alteração importante no comportamento do espaço e do tempo que está associada a esta função γ . As concepções de espaço e tempo de Newton onde o "tempo absoluto (...) flui igualmente" ou "espaço absoluto (...) permanece sempre similar e imóvel" não são observadas na mecânica relativística.

Dependendo da velocidade entre os observadores em \mathcal{A} e \mathcal{B} , existe uma correção γ que deve ser considerada por conta de uma velocidade relativa entre os dois, o que impactará as medidas que \mathcal{A} fizer de duração e distância medidas pelo viajante no plano coordenado \mathcal{B} .

2.2 - O espaço corrigido

Einstein (1905, p. 8) propõe um outro experimento mental com o objetivo de interpretar o que ocorre com o espaço para cada observador em cada referencial.

Como foi definido que um raio de luz vindo do sistema em movimento \mathcal{B} se propaga com velocidade c e que esta velocidade é um limite e que independe do valor da velocidade relativa entre os referenciais \mathcal{A} e \mathcal{B} , v, precisamos provar que o princípio da constância da velocidade da luz é compatível com o princípio da relatividade.

Para tal, usando a equação (25) e fazendo $t=\tau=0$, nesse instante, uma onda esférica parte da origem de $\mathcal B$ com velocidade de propagação c.Podemos definir que essa esfera no sistema $\mathcal A$ tem forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. (27)$$

Uma onda esférica também ocorrerá no sistema \mathcal{B} , após um rearranjo algébrico simples da equação (25) ficará:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2. \tag{28}$$

Cada um desses sistemas terá um observador fixo. Em $\mathcal A$ estará Catarina e em $\mathcal B$ estará Lucas. Como Catarina está localmente em repouso com a esfera em $\mathcal A$, ela verá uma esfera como a dada pela equação (27). Porém, ao olhar para referencial $\mathcal B$, onde está Lucas, Catarina verá a esfera com a correção espacial. Essas expressões se relacionam, uma vez que a expressão (25) mostra como as variáveis ξ , η e ζ se comportam quando submetidas a uma velocidade. Pelo princípio da relatividade as expressões (27) e (28) demonstram que as esferas são compatíveis e estão impostas às leis físicas.

Porém, como Catarina observará a esfera dada pela equação (28)?

Se "as leis pelas quais os estados dos sistemas físicos sofrem mudanças não são afetadas (...)", Einstein (1905, p. 4), então a física que acontece no eixo coordenado de Catarina e que define a esfera com a equação (27) é a mesma física que acontece no sistema coordenado de Lucas e que define a esfera com a expressão (28). O que temos de alteração para cada observador se dá pela correção que ocorre na transformação em ξ , mas a física nos dois sistemas é a mesma.

Catarina verá a esfera contraída no sentido de ξ e já que é a única direção no espaço que teve correção pela equação (25), a esfera se achata ao longo desse eixo deixando os eixos η e ζ inalterados.

Newton (1868, p. 6) disse que o "espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com nada externo, permanece sempre similar e imóvel" e que "Espaço relativo é algo móvel, dimensional e mensurável do espaço absoluto", mas Catarina, ao mensurar e observar a esfera em movimento determinou que esta não possui a mesma medida que a esfera em repouso, relativo a ela. Logo, o espaço não pode ser absoluto pelos princípios da relatividade.

Na equação (25) também temos uma correção para o tempo como discutimos a seguir.

2.3 - O tempo corrigido

Na seção 1.7 vimos que a equação (12) possui uma incompatibilidade com os postulados da relatividade. Já que foram colocados relógios nas extremidades da régua no trem, podemos usar esse experimento mental de Einstein para corrigir o

tempo. Colocaremos Lucas na extremidade frontal da haste e Catarina sobre a plataforma.

A expressão (25) traz que $\tau = \phi(v)\gamma(t-vx/c^2)$. Ainda não sabemos o que significa $\phi(v)$, mas como os termos estão todos em razão da velocidade não impactará na análise.

Considerando $\tau = t_{\mathcal{B}}$ e $t = t_{\mathcal{A}}$, teremos que para cada instante registrado em t, uma correção $\phi(v)\gamma$ se dará em τ . Resolvendo a expressão (25) vemos que o registro do tempo em τ é menor do que o marcado em t.

Assim, Catarina ao observar o relógio na extremidade traseira, verá que o relógio perde sincronia com o da extremidade frontal que teve uma passagem de tempo maior, mas para Lucas, que está viajando junto dentro do trem, não é observada nenhuma alteração na passagem do tempo. Para ele, os relógios continuam síncronos.

Novamente há incompatibilidade com as definições newtonianas pois se o "tempo absoluto (...) flui igualmente sem relação com nada externo," este não deveria ser alterado com a velocidade, pois o observador mede o tempo por meio de relógios, este é relativo e "(...) mensura a duração pelo significado do movimento."

Quando o relógio atrasa, o que vemos é o tempo relativo de Newton atrasar. Newton não define o tempo absoluto, apenas apresenta seus sinônimos e seu modo de fluir. O que podemos dizer a partir dos experimentos mentais relativísticos é que o tempo absoluto de Newton não pode fluir igualmente para todos os observadores, pois existe uma correção que deve ser feita dependendo dos fatores relativísticos de Einstein. Precisamos ter cuidado com a passagem de tempo na relatividade pois quando Einstein usa relógios, ele não está usando o tempo absoluto de Newton. Ele está usando o tempo relativo que "(...) é comumente usado em vez do tempo absoluto." Newton (1686, p. 6).

2.4 – Determinando $\phi(v)$

O valor para $\phi(v)$ precisa ser definido, pois está em função de v e tem impacto na análise matemática que segue das equações (25). Para tal, Einstein constrói a observação de um terceiro sistema em movimento relativo ao sistema \mathcal{B} .

Esse sistema coordenado viajará com velocidade (-v) relativa a \mathcal{B} . Esse novo sistema será chamado de \mathcal{D} . (Figura 4)

É importante definir as coordenadas deste sistema $\mathcal B$ independente da análise anterior, onde este move-se com relação ao sistema coordenado $\mathcal A$, e para isso é anunciada uma outra nomenclatura para as coordenadas deste sistema $\mathcal B$ conforme visto por $\mathcal D$.

O eixo equivalente ao x no sistema $\mathcal B$ visto por $\mathcal D$ será denominado $\mathcal E$ (csi) e o mesmo deve ocorrer para os demais eixos que serão renomeados para $\mathcal E$ (eta) e $\mathcal E$ (zeta), que são equivalentes a $\mathcal E$ e, respectivamente. O terceiro sistema terá eixos $\mathcal D$ = (t', x', y', z')

Na seção anterior, colocamos \mathcal{B} em movimento relativo a \mathcal{A} de forma a construir as transformações dadas pelas equações (25) como segue na Figura 5.

Pelas Figuras 4 e 5 fica claro que \mathcal{D} se afasta de \mathcal{B} e este se aproxima de \mathcal{A} . Por ser o mesmo sistema \mathcal{B} temos que $\xi = \Xi$, $\eta = H$ e $\zeta = Z$ de modo que os sistemas propostos nas Figuras 4 e 5 podem ser reinterpretados como a Figura 6.

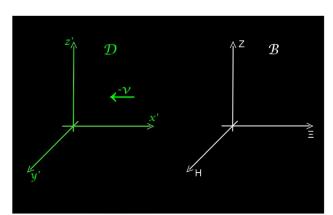


Figura 4: representação dos sistemas $\mathcal{D}e\ \mathcal{B}$. Figura produzida pelo autor.

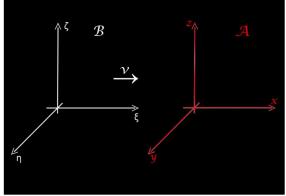


Figura 5: representação dos sistemas $\mathcal{A}e\ \mathcal{B}.$ Figura produzida pelo autor.

Dessa forma conclui-se que o sistema $\mathcal B$ continua sendo o sistema em movimento enquanto $\mathcal D$ e $\mathcal A$ estão em repouso entre si (Figura 6).

Para realizar as transformações desse novo sistema de coordenadas, faremos as origens dos sistemas coincidirem na origem temporal em $t=\tau=t'=0$. É importante observar que podemos fazer a transformação do sistema $\mathcal D$ com relação a $\mathcal A$ de modo a ter uma percepção completa do movimento relativo entre os três eixos.

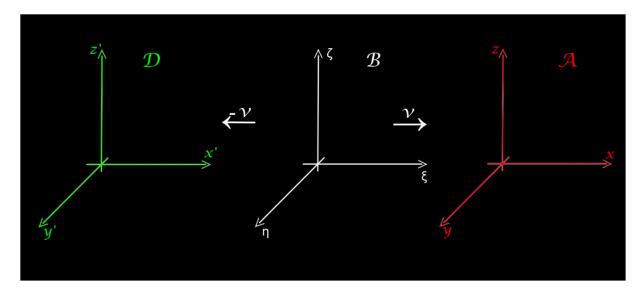


Figura 6: relação entre os sistemas \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{D} . Figura produzida pelo autor.

As expressões abaixo possuem as mesmas estruturas das expressões (25), porém com o sinal determinando o sentido oposto do movimento de \mathcal{D} com relação a \mathcal{B} (Apêndice D).

$$t' = \phi(-v)\gamma(-v)(\tau + v\xi/c^2) = \phi(-v)\phi(v)t,$$

$$x' = \phi(-v)\gamma(-v)(\xi + v\tau) = \phi(-v)\phi(v)x,$$

$$y' = \phi(-v)\eta = \phi(-v)\phi(v)y,$$

$$z' = \phi(-v)\zeta = \phi(-v)\phi(v)z.$$
(29)

As transformadas sendo observadas do sistema \mathcal{A} possuem a estrutura das expressões mais à direita do quadro (29). Assim notamos que como t=t'=0 e x',y',z' estão em repouso com relação a x,y,z, ou seja, os sistemas \mathcal{A} e \mathcal{D} devem ter a transformação idêntica, então a relação de (29) que é dada por:

$$x' = \phi(-v)\phi(v)x,\tag{30}$$

exige a condição de que:

$$\phi(-v)\phi(v) = 1. \tag{31}$$

Porém, esse resultado ainda não define a função $\phi(v)$.Para tal, Einstein (1905) define mais uma observação, agora usando o eixo η , e introduz uma régua de comprimento l neste eixo do sistema \mathcal{B} . Assim, podemos definir as extremidades da régua em \mathcal{B} pelos pontos $\xi_1=0$, $\eta_1=l$ e $\zeta_1=0$ e $\xi_2=0$, $\eta_2=0$ e $\zeta_2=0$.

Como observamos nas expressões (24), $\eta = y\phi(v)$, temos que:

$$\eta_1 = y_1 \phi(v), \qquad \qquad \eta_2 = y_2 \phi(v).$$
(32)

Substituindo os valores para η_1 e η_2 temos as coordenadas das extremidades da régua, que está em repouso com relação a \mathcal{B} , dadas em \mathcal{A} por:

$$x_1 = vt, y_1 = \frac{l}{\phi(v)}, z_1 = 0.$$
 (33)

Ε

$$x_2 = vt, y_2 = 0, z_2 = 0. (34)$$

É claro observar que no sentido do eixo x o movimento se dá como foi definido em (33) e (34) ($x_1 = x_2 = vt$), ou seja, um observador na origem de $\mathcal A$ vê o movimento da régua como um objeto extenso parado no eixo y que se move inteiro na direção de x à velocidade constante.

Definido o movimento em x, precisamos analisar o comportamento da régua no eixo y e é obvio que a régua, ao longo deste eixo não é medida por $\mathcal A$ nem por $\mathcal B$ com comprimento alterado (a régua não é vista encolhida), ou seja, a régua continua medindo l ao longo do movimento.

Isso posto, simetricamente um observador em \mathcal{A} ou \mathcal{D} verá que a régua não varia no seu comprimento ao longo dos eixos y e y'. Assim, é evidente que o comprimento da régua perpendicular ao sentido do movimento realizado em x medido no sistema estacionário poderia depender apenas da velocidade e não da direção ou do sentido do eixo y. O comprimento da régua em movimento medido pelo sistema

estacionário não muda e podemos aferir a velocidade no sentido positivo ou negativo de v como dado pela figura 6:

$$\frac{l}{\phi(v)} = \frac{l}{\phi(-v)},\tag{35}$$

O que mostra que:

$$\phi(v) = \phi(-v). \tag{36}$$

Os resultados em (31) e (36) provam que:

$$\phi(v) = 1. \tag{37}$$

Então, o conjunto de expressões de (25) fica na forma:

$$\tau = \gamma(t - vx/c^{2}),$$

$$\xi = \gamma(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z.$$
(38)

Realizar esta análise de $\phi(v)$, além de simplificar as equações, explica que os fenômenos relativísticos estão compreendidos apenas na direção do movimento. Os comprimentos medidos ao longo dos eixos y e z se mantêm inalterados. Os fenômenos relativísticos se mantêm apenas no eixo que se dá o movimento.

A construção do pensamento relativístico é delimitada pelas ferramentas que Einstein usa para determinar as suas equações.

2.5 - A régua

A régua é definida como uma escala numérica com marcação para medir o comprimento de um objeto ou de uma distância. Uma vez definida a escala, as medidas de comprimento podem ser feitas em quaisquer dois pontos com similaridade de escala, ou seja, as medidas feitas sobre a superfície da Terra com a mesma latitude terão a escala extremamente próxima.

Em relatividade especial, Einstein usou réguas para observar como o espaço se comportaria a uma velocidade significativamente alta.

Como apresentado na equação (38), a velocidade relativa entre observadores altera a escala de comprimento por fator de γ , conhecido como fator de Lorentz, o que corresponde, do ponto de vista do observador estacionário, a uma contração do espaço do observador em movimento, enquanto essa velocidade se mantiver.

2.5.1 – Movimento nos eixos do espaço

Ao interpretarmos as equações através da observação de corpos rígidos, temos o significado físico do fenômeno relativístico bem evidenciado. Por exemplo, consideremos uma esfera de raio R no espaço, parada com relação a $\mathcal B$ (sistema em movimento relativo onde Lucas está), segundo a qual ela terá, como expressão de superfície:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2, \tag{39}$$

A equação da esfera quando observada por ${\mathcal A}$ (sistema parado onde Catarina está) fica:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2. \tag{40}$$

Ou seja, uma esfera que esteja parada para Catarina terá forma de esfera, porém, essa esfera parada para Lucas quando vista do sistema estacionário, terá a forma de uma elipse com semieixos (Apêndice F):

$$R\sqrt{1-v^2/c^2}$$
, R, R. (41)

Na Figura 8 temos que, visto por Catarina, os semieixos da elipse ficam nas direções dos eixos η e ζ não possuem alteração, porém o semieixo ξ se achata na razão de $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$. Como os únicos valores que não são passíveis de alteração são R e v quanto maior o valor de v, maior será o achatamento do raio em no eixo $x \parallel \xi$. Mas quando Lucas, no sistema em movimento, olha para a esfera que está parada no seu referencial, ele verá:

$$R_{\xi} = R_{\eta} = R_{\zeta} = R. \tag{42}$$

Onde R_{ξ} , R_{η} e R_{ζ} são os raios da esfera vistos do referencial em movimento

Esta relação que se remete à alteração do comprimento do espaço pode ser associada com as sombras projetadas na origem dos relógios solares. Sistemas em movimento, observado por um sistema estacionário medem comprimentos distintos e isto afetaria o comprimento medido na projeção da sombra de um relógio solar, assunto da próxima seção.

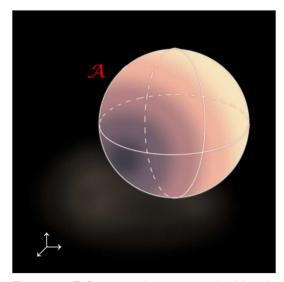


Figura 7: Esfera no sistema estacionário vista por Catarina. Figura produzida pelo autor.

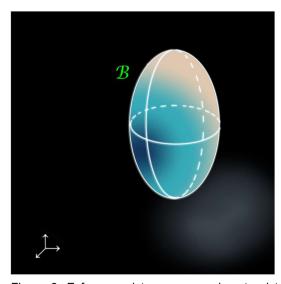


Figura 8: Esfera no sistema em movimento vista por Catarina. Figura produzida pelo autor.

2.6 – O relógio

O relógio é originalmente um mecanismo derivado da observação de fenômenos repetitivos, como a passagem do Sol no céu. Dessa forma, a humanidade associou a passagem do tempo com, por exemplo, o movimento de rotação da Terra, o que definiu o dia e a noite. O movimento de translação da Terra definiu os momentos para a plantação e colheita, as estações, e este ciclo compreende o ano.

Ao observar a passagem do Sol no céu determinamos a duração do dia e, assim, os povos antigos mensuraram o que viria a ser chamado de tempo. Por exemplo, o relógio solar, Figura 9, é, originalmente, uma haste (gnômon) fincada na superfície da Terra e que projeta uma sombra de acordo com a posição da Terra em relação ao Sol. Essa marcação varia, pois a Terra possui uma inclinação de 23,5º no seu eixo com relação à órbita em torno do Sol, o que faz com que o dia tenha diferentes medidas a depender da época do ano.

Esse fenômeno também marca a diferença da posição de nascimento do Sol ao longo do ano.

O movimento da Terra ao redor do seu próprio eixo e a observação das sombras do gnômon (Figura 9) no decorrer do dia são observações que derivam da mecânica celeste. Esse tema foi amplamente abordado por Calil



Figura 9: O relógio de Sol. Parque da Cidade de Brasília².

(2008). A humanidade construiu a nossa noção de passagem de tempo, dias, horas e anos, em relação ao movimento de rotação e translação da Terra.

A mecânica relativística adota a forma de medir o tempo, mecanicamente, construído a partir, por exemplo, de relógios solares. Assim, quando falamos que um objeto relativístico possui um relógio a bordo, estamos falando de um mecanismo que poderia ter como escala as sombras projetadas pela haste fincada no chão, se tal

-

² Figura disponível em https://gpslifetime.com.br/conteudo/republica/brasilia/96/na-hora-certa-relogio-de-sol-do-parque-da-cidade-e-restaurado

precisão bastasse. Notemos o importante detalhe de que este tempo é uma derivação de medidas de distâncias uma vez que a alteração do comprimento das sombras é o que aprendemos a registrar como passagem de tempo. Isto é válido para qualquer outro tipo de relógio: o tempo medido deriva, em última análise, de medidas de distâncias.

Assim, o relógio funciona como uma régua que tem sua escala definida localmente e ele determina a hora local a qual é aceita socialmente como tempo. Novamente lembrando de Newton, ele não define "tempo, (...) como não sendo bem conhecido" e pondera sobre o tempo relativo, pois este "mensura a duração pelo significado do movimento que é comumente usado em vez do tempo verdadeiro"

Einstein (1905) define o tempo como sendo existente e marcado pelo relógio. Para todos, localmente, o tempo passará de forma igual. Essa é a definição de tempo usada na relatividade.

Ao adotarmos essa definição podemos estabelecer a ideia de rede de relógios sincronizados numa grande trama. Relógios sincronizados em locais distintos demandam referenciais parados entre si. No entanto esses relógios precisam ser sincronizados de acordo com a equação (5) e a luz é o que permite enviar e receber essa informação. A equação (10) demonstra esta possibilidade de sincronização usando a luz

A evolução da marcação do tempo traz a subdivisão de segundos, próximo ao tic — tac do relógio comum. Quando falamos que um corpo tem velocidade relativística obtemos que o tempo no referencial comóvel (que se move junto com o observador) passa diferente com relação ao outro referencial. Estamos falando exatamente deste tic — tac passando de forma diferente. Ou seja, Catarina, parada em \mathcal{A} , observando uma espaçonave contendo seu irmão Lucas (parado em \mathcal{B}) movendose com uma velocidade v consideravelmente alta (da ordem de c) verá o tempo de Lucas passar de forma diferente. Para ela, o tempo de Lucas passa mais devagar.

Ao medir o tempo que Lucas utiliza, Catarina nota que a marcação mecânica que ele faz do tempo tem um atraso com relação à marcação do relógio dela, o que está relacionado com a velocidade do referencial \mathcal{B} . O tempo marcado no relógio em \mathcal{A} é diferente do tempo marcado em \mathcal{B} pelo fator $1-\sqrt{1-v^2/c^2}$ como

apresentado no Apêndice G. Porém em \mathcal{B} , Lucas observa que a passagem do tempo não tem alteração. Para ele, um segundo continua valendo um segundo. A diferença se dá na comparação dos relógios em movimento relativo.

Quando esses relógios voltam a estar localmente próximos, ou seja, quando a nave de Lucas volta para a Terra, observamos que as marcações nos relógios voltam a ter a mesma constância de passagem de tempo, os relógios, em $\mathcal A$ e em $\mathcal B$, voltam a ter o mesmo ritmo, porém há uma diferença no tempo registrado, na comparação do relógio em $\mathcal A$ com relação ao relógio em $\mathcal B$. O relógio que estava em $\mathcal B$ terá e manterá uma defasagem com relação ao relógio em $\mathcal A$.

Os relógios marcam essa diferença da passagem do tempo que está associada com o nosso processo de envelhecimento. Ou seja, na hipótese do tempo relativo de Newton, o evento relativístico com uma velocidade consideravelmente alta alterou a passagem do tempo para Lucas e esse tempo não se repôs por conta do retorno à Terra. O viajante, em \mathcal{B} , é mais novo agora comparado à observadora em \mathcal{A} , mas isso não significa falar que este viajante viajou para o futuro. Ele apenas teve os movimentos, dos quais a medida do tempo é uma consequência, realizados de forma mais lenta quando comparado com o referencial de Catarina.

2.6.1 – Movimentos nos eixos de tempo

Quando Einstein anunciou suas considerações sobre a relatividade, uma das primeiras providências foi definir como medir o tempo. A fundamentação se dá na observação do seu relógio, em cujo local todos os objetos e pessoas possuem sincronicidade. Quando em repouso no referencial do observador, todos os outros relógios se movimentam com a mesma cadência que o relógio localizado comóvel com o observador. Este é o tempo t nas equações (27), o tempo comóvel com o observador.

A expressão para τ determinada em (38) mostra que:

$$\tau = \gamma(t - vx/c^2). \tag{43}$$

O tempo de Lucas observado por Catarina como τ , tem uma correção em função de v, a velocidade relativa dele com relação a ela. Se fizermos x=vt que é a distância que ela vê Lucas percorrer no intervalo de tempo que ela mede t, teremos:

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}. (44)$$

2.7 - Quando v = c

Segundo Einstein (1905, p. 10) objetos com velocidade v tendendo a c teriam largura apenas nas direções perpendiculares ao movimento, e tendendo a zero na direção do movimento quando observadas pelo referencial parado.

O mesmo efeito ocorre na equação (44). Um corpo com velocidade $v \to c$, terá $\tau \to 0$ com relação ao referencial parado. É como se, da perspectiva do sistema estacionário, o tempo não passasse para algo viajando a esta velocidade. É importante ter em mente que o objeto móvel vê seu relógio comóvel continuar funcionando no ritmo normal, marcando o tempo no compasso esperado.

Fisicamente apenas a luz e outras partículas sem massa viajam à velocidade c, de modo que, se elas forem o referencial \mathcal{B} , do ponto de vista de \mathcal{A} , as distâncias e os intervalos de tempo medidos por \mathcal{B} são nulos dentro desta concepção algébrica.

Ao considerarmos que a luz não tem massa e que os resultados das equações (41) e (44) são zero para v=c, há de se considerar que dentro do nosso entendimento algébrico, para que se tenha uma conceituação mais aprofundada da natureza do tempo e do espaço pode ser útil, por exemplo, olhar com outras lentes matemáticas para as equações.

Quais respostas podemos obter usando outras variáveis? Amorim et al (2018), por exemplo, exploraram uma abordagem dentro dos números perplexos.

2.8 – O tempo

Compreender o relógio como o marcador do tempo não o traduz exatamente nem o define. O exemplo do relógio de sol ou de qualquer outro relógio rústico que a humanidade tenha criado mostra o movimento como o arcabouço do

tempo. A projeção da sombra de um gnômon ou o fluir do líquido um relógio de água são mecânicos. Como expressa na equação (4), tempo e espaço se associam ao movimento, logo, num universo estático, não há concepção de tempo, pois não há registros de eventos em momentos diferentes.

Estritamente, o tempo está associado ao movimento e se dá dentro de um espaço possível onde a mecânica *newtoniana* é uma ferramenta para estudar os fenômenos no espaço e no tempo. e que passa a ser um caso particular da mecânica *einsteiniana*. Newton estudou a velocidade, o espaço e o tempo para todo o cosmos como se fosse uma aproximação local. Einstein concebeu que quando tratamos da velocidade limite c observada, o espaço e o tempo de um referencial em movimento se moldam quando medidos pelo referencial parado, resultando na contração do espaço relativo e na dilatação do tempo relativo de Newton.

Capítulo 3 – O Paradoxo dos gêmeos e questões modernas do tempo

3.1 - Referenciais na relatividade

Dentro da teoria da relatividade restrita, a forma de medir o tempo precisou ser definida com precisão para que pudéssemos analisar a cinemática; no processo foi evidenciado o fenômeno da dilatação do tempo. Trazendo novamente a concepção de Newton, o relógio mede o tempo relativo. Assim, é importante construir uma outra abordagem que não seja apenas na visão da defasagem dos relógios para que possamos tentar compreender a natureza do tempo.

Para um melhor entendimento sobre a medida da passagem do tempo para cada observador, autores como Martins (2012) ou Schutz (2009) explicam o fenômeno de como um irmão gêmeo observa a passagem do tempo comparando o seu com o de seu irmão.

É importante fundamentar essa construção, pois se entende que, como mostrado pelas equações de Einstein, um dos irmãos envelhecerá mais rapidamente que o outro. Porém, uma vez que não há referenciais preferenciais na relatividade, não há de se falar que um gêmeo observará o outro envelhecendo mais rápido enquanto ele se observar envelhecer no ritmo normal.

Desta forma, imaginemos que Lucas e Catarina resolvem que Lucas realizará uma viagem para observarem este fenômeno relativístico. Ele entra em um foguete e viaja a 0.6c.

Cada irmão está em um referencial inercial com sistema rígido de eixos. Para Catarina, Lucas está viajando com a velocidade determinada, mas isto vale para Lucas da mesma forma. Para ele é Catarina que está viajando a uma velocidade de 0,6c em sentido oposto. Cada um dos irmãos ao olhar para o irmão viajante tem a observação de que o tempo está passando mais lentamente para este, ou seja, uma vez que algo viaja a uma velocidade significativamente alta, ocorrerá esta percepção de passagem de tempo mais lenta num fator de $1-\sqrt{1-v^2/c^2}$. Vide Apêndice G. Isso implica que quando Lucas olha para Catarina a partir do referencial onde ele está parado, ele observa que o tempo passou mais devagar para ela do que o tempo que ele marcou em seu relógio.

Já quando Catarina mede o tempo que passa para Lucas, ela observa que o tempo para ele é que passou mais devagar.

Aqui observamos o paradoxo. Para qual irmão, efetivamente, o tempo passou mais devagar?

A viagem do gêmeo demonstra que o tempo passa de forma particular para cada indivíduo. A essa particularidade, podemos associar a de *linha de mundo* que é o nome comumente dado ao eixo temporal do sistema de referência de qualquer sistema sendo observado.

3.2 - Construindo a Linha de mundo

Quando analisamos à luz da mecânica *newtoniana*, observamos o movimento de um corpo num gráfico de espaço percorrido no tempo.

Classicamente, quando se trata de movimento uniforme, temos uma reta com crescimento constante. (Figura 10)



Figura 10a: Gráfico da posição x tempo. O coeficiente linear corresponde à velocidade. Figura produzida pelo autor.



Figura 10b: Eventos simultâneos no instante t=10s representados por bolas coloridas. Cada evento ocorreu num local diferente do espaço. A simultaneidade é uma reta paralela ao eixo da posição. Figura produzida pelo autor.

Analisando o gráfico, teremos que a inclinação da reta corresponde à velocidade deste corpo ao longo desta trajetória. Se tivermos um movimento acelerado, observaremos mudanças gráficas que se remeterão às alterações da velocidade deste corpo ao longo do percurso. Sabemos, também, que a derivada da

posição com relação ao tempo, expressão (3), determina a velocidade instantânea $v_{ins}=\frac{ds}{dt}$. Essa função representa uma reta tangente ao gráfico $x\ vs\ t$ e determina a velocidade naquele instante de tempo específico que será dado pelo coeficiente angular da reta tangente.

No caso relativístico, observamos que este mesmo gráfico tem uma importância significativa na análise do fenômeno.

Um corpo com velocidade baixa, com relação a c, terá o gráfico da função horária com uma inclinação mais próxima ao eixo t. O inverso também ocorre, ou seja, um corpo com velocidade alta terá a inclinação do gráfico mais próxima do eixo do espaço.

Ao considerarmos que esse gráfico é de um corpo com velocidade constante, teremos uma reta e a inclinação desta com relação ao eixo horizontal será o próprio coeficiente angular.

Em relatividade chamamos c de velocidade limite e, por essa razão, podemos determinar que c=1. Com esta construção em mente, a maior inclinação que esse gráfico da função horária poderá ter será a de 45°, pois o coeficiente angular da reta tangente terá valor 1. Nas equações em (38), com c=1, qualquer valor de c=10 será uma fração da velocidade da luz. A análise gráfica de uma velocidade alta ou baixa estará limitada num cone com limite máximo de angulação em 45°. Então teremos c=10 que será o limite máximo de velocidade fisicamente conhecida.

É fundamental observar que, como x=vt, uma vez que v=c=1, o tempo passa a ter dimensão de espaço.

Como a velocidade máxima que um corpo pode ter é a velocidade da luz, a reta v=c passa a ser a bissetriz do quadrante no plano cartesiano e em observância às equações (38), um corpo com velocidade v constante tem esse valor como percentual da velocidade da luz, de modo que sua trajetória estará registrada dentro deste cone. A inclinação dessa reta que representa a trajetória, com relação ao eixo coordenado t, terá ângulo que determinará a velocidade deste corpo, lembrando que estamos tratando de velocidades constantes.

Essa reta com inclinação φ com relação a t (o eixo temporal do observador parado) é chamada de **linha de mundo**, onde essa é a curva dentro do cone de luz, e que não necessariamente é uma reta constante. Em caso de acelerações esta reta apresentará variações na velocidade registrada pelo corpo. Ela

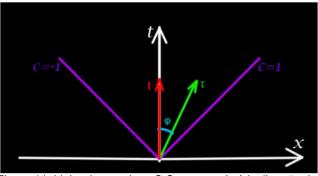


Figura 11: Linha de mundo τ . C Corresponde à inclinação de 45°. Figura produzida pelo autor.

é uma ilustração gráfica do corpo em \mathcal{B} que se movimenta e com relação ao sistema de coordenadas \mathcal{A} (Figura 11).

Em Relatividade Restrita, a convenção utilizar o eixo x na abcissa e o eixo do tempo na ordenada, o oposto do que se faz comumente nas análises gráficas de mecânica.

Pela equação (44), observamos que, à medida que v é alta, a passagem do tempo para o observador em movimento, com relação ao observador parado, tem um espaçamento maior a cada segundo medido. A velocidades baixas observamos o limite da mecânica *newtoniana* como mostrado na Figura 12. As porcentagens da velocidade da luz estão demonstradas na Tabela 1.

Como a inclinação da reta determina o coeficiente angular e uma vez que o corpo em movimento uniforme cria um ângulo na representação gráfica, precisamos analisar com atenção como se dão os eventos observados por \mathcal{A} e \mathcal{B} , dentro deste diagrama.

Schutz (2009) explica as relações de emissão e reflexão da luz para entendermos as relações de simultaneidade de eventos. Porém, vale ressaltar que eventos simultâneos e síncronos são distintos em relatividade. A simultaneidade se remete a eventos que acontecem no mesmo instante de tempo em locais distintos.

Estando no mesmo referencial, a ocorrência do evento será vista por qualquer observador no mesmo instante, desde que estejam a mesma distância do evento de emissão.

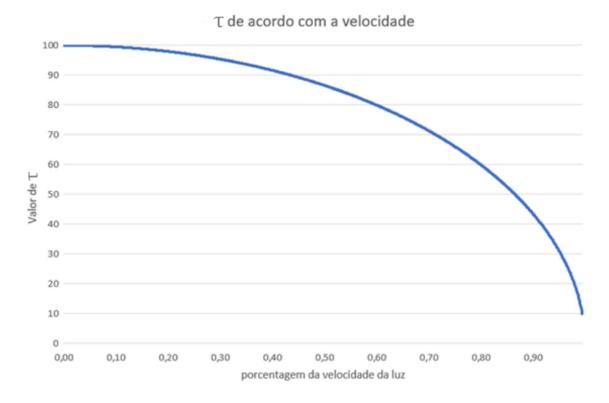


Figura 12: Relação entre a velocidade e o valor de τ (tempo marcado no referencial em movimento). Figura produzida pelo autor.

Podemos fazer um paralelo com a descarga elétrica de um raio. A visão do raio é simultânea para os observadores, respeitada a distância do evento, porém, o som do trovão não é. Outro exemplo é a emissão de um fóton vindo do sol. A emissão não é simultânea

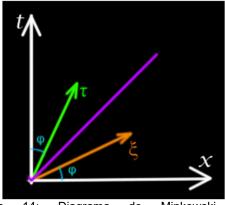
com a chegada à Terra.

Tabela 1: Porcentagem da velocidade da luz.		
Velocidade (c)	Velocidade (m/s)	τ para t=100 (s)
0,1	299.792.45,8	99,50
0,2	599.584.91,6	98,00
0,3	899.377.37,4	95,40
0,4	119.916.983,2	91,65
0,5	149.896.229	86,60
0,6	179.875.474,8	80,00
0,7	209.854.720,6	71,41
0,8	239.833.966,4	59,99
0,9	269.813.212,2	43,59
0,999	299.492.665,5	4,471

O matemático Hermann Minkowski desenvolveu um diagrama de espaçotempo que sobrepõe um quadro em movimento e um quadro estacionário para representar as transformações de Lorentz em um modelo geométrico.

A simultaneidade em um gráfico x vs t é uma reta paralela ao eixo do espaço e isso será igual no diagrama de Minkowski.

Apenas o eixo do tempo do sistema em movimento ${\mathcal B}$ foi ilustrada exemplificado na Figura 11. Schutz (2009) mostra como ocorre a construção do eixo



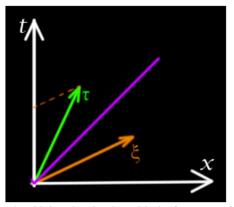


Figura 14: Diagrama de Minkowski espelhamento. Figura produzida pelo autor.

Figura 15: Linha de simultaneidade (reta tracejada). Figura produzida pelo autor.

espacial de $\mathcal{B}\left(\xi\right)$ no diagrama de Minkowski e ele é um espelhamento do eixo τ com relação à bissetriz (Figura 14).

com

Então, a simultaneidade do ponto de vista de \mathcal{B} , em relatividade, ocorre, no diagrama de Minkowski, como uma reta paralela ao eixo ξ (Figura 15).

3.3 – O Paradoxo dos gêmeos dentro do diagrama de Minkowski

Reconstruindo o paradoxo dos gêmeos dentro do diagrama de Minkowski, precisamos definir o sentido do movimento de cada um dos irmãos. Assim, definimos que Lucas está se deslocando no sentido positivo de \vec{c} . Desta forma, a velocidade de Lucas é positiva. Catarina observa Lucas deslocar-se afastando da origem, do referencial parado com velocidade positiva.

Para esse exemplo, consideraremos que Catarina, no instante t=0, terá 4 anos. Lucas, neste mesmo instante, mas no seu referencial $\tau=0$ terá 8 anos.

No diagrama (Figura 16), temos que o ângulo entre t e τ define a velocidade com que Lucas se desloca em relação à Catarina. A escala da passagem de tempo em τ não corresponde à mesma escala no referencial parado. Isso quer dizer que para cada velocidade teremos uma alteração na escala de tempo em τ que será definida pela equação (44).

Já na Figura 17 invertermos a observação, ou seja, para Lucas é Catarina quem está se movendo, neste caso, Lucas verá Catarina se deslocando no sentido negativo de \vec{c} (v=-c). Essa nova configuração altera a estrutura do diagrama.

Pelo diagrama temos a noção de como se dá a passagem do tempo relativo de Newton para cada um dos gêmeos no decorrer da viagem e temos a visão de que o paradoxo está no fato de que quando um irmão olha para o referencial do outro não

saberemos quem envelheceu mais pois a reta de simultaneidade é que indicará o que o irmão viajante vê do outro. Neste ponto o diagrama auxilia no entendimento.

Pelas expressões (38) temos a impressão de que quem está se movendo é quem tem a passagem de tempo alterada, mas todos estamos nos movendo em alguma medida. Desta forma, uma vez que é Lucas quem se move, é ele quem terá envelhecido menos, com relação à Catarina. Se Lucas viajar 8 anos na velocidade de 0,6c, para Catarina terão passado 10 anos. Porém, quando Lucas, 8 anos depois de sua partida, olha para Catarina (Figura 16), ele observará que ela envelheceu algo em torno de 6 anos. Para Catarina, após a passagem de 10 anos, ela observará que, para Lucas, passou-se algo em torno de 5 anos (Figura 17). Para cada irmão, foi o outro que envelheceu menos.

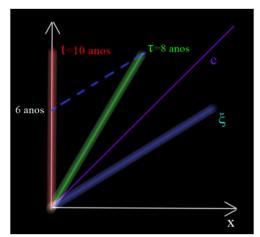


Figura 16: diagrama Catarina: Neste diagrama, quando Lucas olha para Catarina ele verá que para ela passaram 6 anos. Figura produzida pelo autor.

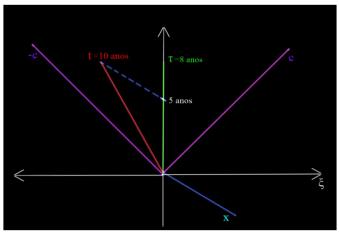


Figura 17 diagrama Lucas: Neste diagrama, quando Catarina olha para Lucas ela verá que para ele passaram 5 anos. Figura produzida pelo autor.

Essa construção da passagem do tempo demonstra que observar e medir são ações diferentes.

Vale notar que nenhum dos irmãos observa de fato a passagem do tempo que realmente ocorreu para o outro. Como apontado por Martins (2012) um outro viajante é necessário para poder ter uma melhor mensuração sobre como o tempo passa para cada um dos viajantes. Os irmãos apenas saberão quem envelheceu mais quando o Lucas voltar para o referencial de sua irmã. A Figura 18 mostra o trajeto completo de Lucas. Após 8 anos de viagem, ele começa seu caminho de volta para encontrar sua irmã. Instantaneamente ele mudará o sentido do seu movimento para que não tenhamos que lidar com acelerações.

No momento de mudança de sentido, para Lucas, existe um apagão de informação que vem de Catarina. Ele só voltará a observá-la quando fizer 14 anos da sua partida no referencial dela. À medida com que ele se aproxima do referencial parado, sempre observa uma pequena passagem de tempo, porém a informação entre os 6 e 14 anos no referencial de Catarina se perde.

Ela também terá um apagão de informação vinda dele. Quando Lucas mudar o sentido do seu movimento, Catarina passará a observar que seu irmão passou a ter 11 anos marcado no relógio dele.

Quando Lucas finalmente retornar para 0 referencial de sua irmã, comparação dos relógios eles verão que Catarina envelheceu 20 anos (estando com 24 agora) e Lucas envelheceu 16 anos (estando com 24 anos agora). Nesse exemplo eles se tornarão gêmeos no retorno (Figura 18) e os relógios passam a funcionar no mesmo ritmo.

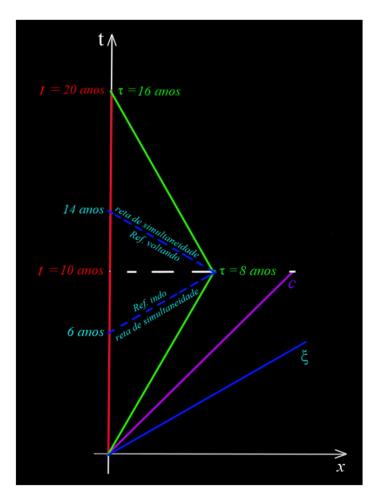


Figura 18: A viagem completa dos irmãos. Catarina envelheceu 20 anos e Lucas, 16 anos. Figura produzida pelo autor.

O fato de vermos tempos diferentes sendo marcados para cada um dos observadores não contradiz o tempo absoluto de Newton pois o que sabemos marcar é o que Newton definiu como tempo relativo, aparente e comum. O tempo absoluto soa como uma caracterização matemática abstrativa e que não é observado dentro da nossa limitação humana. Mesmo usando como relógio o envelhecimento de pessoas, não fica claro para este autor o que é que caracteriza, de uma maneira fundamental, a passagem do tempo para cada indivíduo dentro da sua linha de mundo.

Um outro exemplo clássico é a observação do tempo de vida de um múon parado ou em movimento relativístico.

3.4 - Medição do tempo próprio do múon

O paradoxo dos gêmeos é uma experiência mental que se remete a observar eventos relativísticos dentro de uma concepção macroscópica e que utiliza o tempo de envelhecimento como o relógio. É importante frisar que, independentemente de usarmos pessoas ou relógios, estes são tempos relativos e mensuram "(...) a duração pelo significado do movimento", como disse Newton (1686, p. 6).

As equações (38) de Einstein permitem responder sobre fenômenos que apresentam este caráter de dilatação do tempo e um caso é o do tempo de vida do múon. Bailey et al. (1977) realizaram um experimento para mensurar a dilatação do tempo em múons com velocidade de 0,9994c e o resultado do experimento está de acordo com os dados calculados pelas equações de Einstein.

A tabela 2 demonstra os valores mesurados por Bailey et al. (1977, p. 303)

O experimento demonstra que as equações se

Tabela 2 – Resultados de tempos de vida (μs)			
	μ^+	μ^-	
Tempo de vida do muon em movimento (t)	64,419	64,368	
Tempo de vida do muon em repouso (τ)	2,1966	2,1948	

encaixam em eventos observados na natureza e que a velocidade da partícula altera seu tempo de vida de forma significativa. A velocidade de 0,9994c faz com que a partícula, vista no referencial parado, tenha um tempo de vida 29,33 vezes maior do que a partícula em repouso.

Se tivermos algo que viaja à velocidade da luz, teremos que:

$$\lim_{v \to c} \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \infty. \tag{45}$$

Isso corresponde a dizer que o intervalo entre um evento e outro para luz visto do referencial parado demora um tempo infinito. Neste ponto é possível concluir que o tempo passa para partículas massivas, mas não ocorre o mesmo para a luz.

Ryden (2017, p. 122) explica a concepção de que um universo apenas de radiação teria um formato plano. Segundo Einstein (1905, p. 10), objetos com velocidade v=c teriam formas planas quando observadas do referencial parado.

Na Figura 19 temos o instante em que um múon atravessa um detector.

O múon é o feixe luminoso com velocidade relativística e com o seu tempo, com relação ao referencial parado, dilatado.

3.5 - Relógio de luz

A expressão (47) mostra um resultado importante. No limite da velocidade da luz, um intervalo de tempo



Figura 19: Detector de múons no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF. Fotografia produzida pelo autor.

tende a demorar infinitamente para acontecer. Ou seja, como entendemos que o tempo é uma marcação de intervalos de eventos, então, para a luz é como entendêssemos que houve um evento, por exemplo a sua emissão no instante τ_1 e o instante τ_2 não chegasse nunca. Para a luz não há passagem de tempo.

Imaginemos que Catarina, no seu referencial parado, vê um trem se deslocar com uma velocidade v no sentido positivo do eixo x. Dentro do trem, seu irmão Lucas instala um sistema de laser e espelhos que funcionará como um relógio. A experiência será emitir um feixe de luz do assoalho do trem para o teto e refleti-lo de volta para o assoalho.

Quando Lucas coloca o relógio para funcionar e estando o trem parado com relação à plataforma, tanto ele quanto Catarina verão o feixe de luz se deslocar perpendicularmente entre o assoalho e o teto (Figura 20).

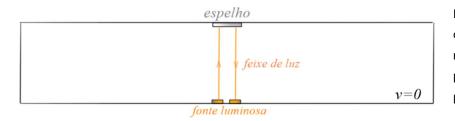


Figura 20: Relógio de luz comóvel ao observador pelo referencial no referencial parado. Figura produzida pelo autor.

Porém se o trem estiver em movimento, Catarina terá outra visão do feixe luz. Como ela está parada na plataforma, verá o feixe de luz inclinado, enquanto Lucas, que está no referencial em movimento, continuará visualizando o feixe com deslocamento perpendicular ao assoalho e teto (Figura 21).

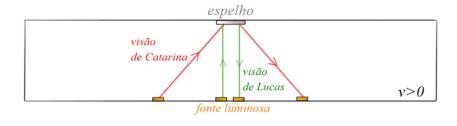
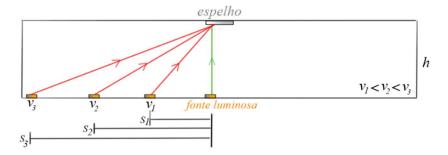


Figura 21: Lucas visualizando o feixe de luz (linhas verdes) e Catarina, parada na plataforma, vendo o feixe de luz ao logo da trajetória do trem (linhas vermelhas). Figura produzida pelo autor.

À medida que a velocidade é aumentada, e considerando que o pulso de luz emitido-refletido corresponde a um intervalo de tempo, a inclinação mensurada por Catarina será igualmente maior. (Apêndice I)



luz.

Figura 22: Medida do feixe de luz por Catarina com o trem a velocidades diferentes. Figura produzida pelo autor.

A Figura 22 mostra que a velocidade altera o tempo de Lucas medido por Catarina na plataforma. Como estamos querendo analisar o limite c da velocidade, veremos que no $\lim_{v \to c} t$, o tempo tende ao infinito no intervalo de emissão-reflexão da

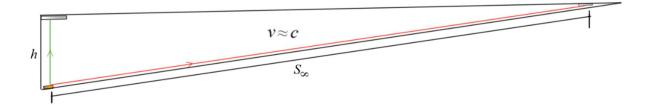


Figura 23: Visão do trem em perspectiva representando uma velocidade próxima de c. Como a linha em vermelho representa a visão de Catarina, vemos que para o referencial parado a linha do assoalho do trem é praticamente paralela ao percurso da luz. A linha verde à esquerda representa a visão de Lucas comóvel com o deslocamento do trem. Figura produzida pelo autor.

Na Figura 23, a altura do trem (h) não se altera, mas a razão entre a altura do trem e a distância S_{∞} diminui à medida que a velocidade do trem é grande. Se a velocidade do trem pudesse ser igual à velocidade da luz e tendo o princípio da constância da velocidade da luz em mente, veríamos que o feixe de luz emitido demoraria um tempo infinito para percorrer todo o seu percurso S_{∞} .

3.6 – Relógios super precisos com registro em $10^{-18}s$

Relógios atômicos de alta precisão (com precisão de 18 casas decimais) são ferramentas que possuem uma ampla gama de aplicações na física. Hinkley et al. (2013) indicam que essa ferramenta pode ser utilizada para cálculo da "geodésica relativística, navegação telescópica na Terra e no espaço e novos testes de física além do modelo padrão."

Um exemplo de navegação telescópica é o telescópio espacial James Webb, que estará posicionado no ponto de Lagrange 2, que fica a 1,5 milhões de quilômetros da Terra. Nesse ponto, o telescópio orbitará o Sol com velocidade de aproximadamente 30.105 m/s. Em comparação com a velocidade de translação da Terra, que é de aproximadamente 29.800 m/s, a diferença de tempo estará na ordem de 10^{-9} , que indica que o tempo τ no telescópio atrasará 1 segundo a cada 31 anos (Apêndice J).

Este relógio seria capaz de detectar a diferença de tempo em pequenas variações de alturas na Terra ou em mudanças de latitudes como foi proposto por Einstein no seu trabalho original, uma vez que alteraria a velocidade linear do corpo.

3.7 – Tempo na quântica

O tempo na física caracteriza a marcação de movimentos que Newton chamou de duração. Porém, segundo Giovannetti (2015), nos limites da mecânica quântica existe a necessidade de criar um relógio que seja capaz de quantizar o tempo. Esse autor descreve que o "tempo em mecânica quântica aparece como um parâmetro clássico na equação de Schördinger. Fisicamente isto representa o tempo mostrado por um relógio clássico no laboratório."

Outra abordagem aparece numa explicação sobre Teoria da Relatividade Geral onde:

"(...) dado um campo gravitacional (...) a dinâmica da teoria não possui variável preferencial de tempo, mas, no entanto, temos uma noção de espaço-tempo para cada solução dada. Mas na teoria quântica não há a configuração de um campo clássico, assim como não há trajetória de uma partícula. Desta forma, na gravitação quântica a noção de espaço-tempo desaparece da mesma maneira que a noção de trajetória desaparece da teoria quântica de partículas." Rovelli (2004, pg. 21) Tradução do autor.

Sendo assim, entender a natureza do tempo poderia dar respostas que podem ajudar a compatibilizar a mecânica quântica com a gravitação.

Considerações Finais

Neste trabalho partimos da definição de tempo relativo, aparente e comum de Newton para estruturar a concepção de tempo que é marcada no relógio. Por essa razão nos remetemos ao relógio solar, que fundamenta a noção mais básica que temos de passagem de tempo.

Concluímos que o tempo só é possível de ser definido num universo dinâmico, e dentro dessa percepção analisamos como o movimento altera a passagem do tempo para os observadores em referenciais distintos, a partir da relatividade restrita.

Posteriormente analisamos, também, a partir da perspectiva da relatividade restrita, uma possibilidade para a reposta do que é o tempo. Pensando estritamente por esse prisma, a expressão (45) leva a crer que o tempo não tem uma natureza em si, mas que emerge de outra entidade física: a matéria.

Por fim, vimos como a criação de relógios extremamente precisos permite medir intervalos de tempo extremamente pequenos, o que poderia ajudar na exploração de fenômenos quânticos e a achar respostas que poderiam auxiliar numa grande unificação na física.

APÊNDICE A: Determinando as derivadas apresentadas nas transformações de variáveis

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t}, \tag{A1}$$

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,\tag{A2}$$

$$\frac{1}{2} \left[\tau_0(0,0,0,t) + \tau_2 \left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v} \right) \right] = \tau_1 \left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-v} \right), \tag{A3}$$

Para τ_0 ;

$$\tau_0(0,0,0,t) = \frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = 0, \tag{A4}$$

Para τ_2

$$\tau_2 \left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v} \right),$$
(A5)

$$\tau_2 = t + \frac{x'}{c - v} + \frac{x'}{c + v'},\tag{A6}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = 0 + \left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t'} \tag{A7}$$

Para τ_1

$$\tau_1\left(x',0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right),\tag{A8}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c - v} \frac{\partial \tau}{\partial t},\tag{A9}$$

Desta forma, (A9) fica:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c - v} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \tag{A10}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c - v} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \tag{A11}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \left(\frac{1}{c-v}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c-v}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c+v}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \quad (A12)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c - v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c + v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \tag{A13}$$

Fazendo o MMC, temos que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(\frac{c + v - c + v}{(c - v)(c + v)} \right) = 0, \tag{A14}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \tag{A15}$$

Podemos notar que, em vez da origem das coordenadas, poderíamos adotar qualquer outro ponto como origem da fonte de luz e, portanto, a equação é válida para qualquer dx' ao longo da régua em \mathcal{A} .

APÊNDICE B: Calculando au como função linear

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0, \tag{B1}$$

Para simplificar

$$\frac{v}{c^2 - v^2} = g,\tag{B2}$$

Será usado um ansatz onde τ está em função de x', t

$$\tau(x',t) = at + bx', \tag{B3}$$

Uma vez que τ é uma função linear, então podemos fazer, em (B1):

$$a\frac{\partial at + bx'}{\partial x'} + g\frac{\partial at + bx'}{\partial t} = 0,$$
(B4)

$$0 + b + g(a+0) = 0, (B5)$$

$$b + ag = 0, (B6)$$

$$b = -ag, (B7)$$

Substituindo o valor de (7) em (3), temos:

$$\tau(x',t) = a(t - gx'), \tag{B8}$$

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right). \tag{B9}$$

APÊNDICE C: Cálculo de au para a transformação de coordenadas

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right), \tag{C1}$$

$$x' = x - vt, \tag{C2}$$

Reescrevendo (C1)

$$\frac{\tau(c^2 - v^2)}{(c^2 - v^2)} = \frac{at(c^2 - v^2)}{(c^2 - v^2)} - \frac{av(x - vt)}{(c^2 - v^2)},\tag{C3}$$

$$\tau(c^2 - v^2) = atc^2 - atv^2 - axv + atv^2,$$
 (C4)

$$\tau = \frac{a(tc^2 - vx)}{c^2 - v^2},\tag{C5}$$

Colocando c^2 em evidência no numerador, temos que:

$$\tau = \frac{ac^2(t - vx/c^2)}{(c^2 - v^2)},$$
 (C6)

Ao realizarmos a análise para η e ς , observamos que essas duas dimensões do plano cartesiano possuem o fator $\phi(v)$, como segue.

$$\eta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} y,\tag{C7}$$

$$\eta = \phi(v)y,\tag{C8}$$

$$\zeta = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} z,\tag{C9}$$

$$\zeta = \phi(v)z,\tag{C10}$$

onde

$$\phi(v) = a \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}},\tag{C11}$$

Ou

$$\phi(v) = \frac{a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (C12)

Uma vez que as funções em η e ζ possuem esta estrutura de $\phi(v)$, devemos encontrar esta correção nesta expressão de transformação de coordenada. Assim, podemos multiplicar dos dois lados da equação τ por $\sqrt{c^2-v^2}$. Desta forma, em (C6) temos:

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \frac{ac^2(t - vx/c^2)}{c^2 - v^2} \sqrt{c^2 - v^2},$$
 (C13)

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \frac{ac^2(t - vx/c^2)}{c^2 - v^2} \frac{1}{(c^2 - v^2)^{-1/2}},$$
 (C14)

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \frac{ac^2(t - vx/c^2)}{[c^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}]},$$
 (C15)

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \frac{ac^2(t - vx/c^2)}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (C16)

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \frac{a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c(t - vx/c^2), \tag{C17}$$

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2} = \phi(v)c(t - vx/c^2),$$
 (C18)

$$\tau \sqrt{c^2 - v^2 c^2 / c^2} = \phi(v) c(t - vx / c^2), \tag{C19}$$

$$\tau \sqrt{c^2(1 - v^2/c^2)} = \phi(v)c(t - vx/c^2), \tag{C20}$$

$$\tau c \sqrt{1 - v^2/c^2} = \phi(v)c(t - vx/c^2),$$
 (C21)

$$\tau = \phi(v)(t - vx/c^2) \frac{c}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (C22)

$$\tau = \phi(v)(t - vx/c^2) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (C23)

$$\tau = \phi(v)\gamma(t - vx/c^2). \tag{C24}$$

onde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (C25)

A mesma ordem de transformação ocorre para a expressão ξ , que fica como segue:

$$\xi = \gamma(x - vt). \tag{C26}$$

APÊNDICE D Combinando as equações (19), (20) e (21) do texto

As equações (19), (20) e (21) são:

$$\tau = a \left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x' \right), \tag{D1}$$

$$\xi = \tau c$$
, (D2)

$$t = \frac{x'}{c - v}. ag{D3}$$

Combinando as expressões, temos:

$$\xi = ax'c\left(\frac{1}{c-v} - \frac{v}{c^2 - v^2}\right),\tag{D4}$$

$$\xi = ax'c \left[\frac{(c^2 - v^2) - v(c - v)}{(c - v)(c^2 - v^2)} \right], \tag{D5}$$

$$\xi = ax'c \left[\frac{c^2 - v^2 - cv + v^2}{(c - v)(c^2 - v^2)} \right],\tag{D6}$$

$$\xi = ax'c \left[\frac{c(c-v)}{(c-v)(c^2-v^2)} \right], \tag{D7}$$

$$\xi = a \frac{c^2}{c^2 - v^2} x', (D8)$$

APÊNDICE E: transformando de \mathcal{D} para \mathcal{B}

$$t' = a\left(\tau - \frac{(-v)}{c^2 - (-v)^2}\xi\right),$$
 (E1)

que fica:

$$t' = a\left(\tau + \frac{v}{c^2 - v^2}\xi\right),\tag{E2}$$

$$\frac{t'[c^2 - (-v)^2]}{c^2 - (-v)^2} = \frac{a\tau(c^2 - (-v)^2)}{c^2 - (-v)^2} - \frac{a(-v)[\xi - (-v)\tau]}{c^2 - (-v)^2},$$
 (E3)

$$\frac{t'(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = \frac{a\tau(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} + \frac{av[\xi + v\tau]}{c^2 - v^2},$$
 (E4)

$$t'(c^2 - v^2) = a\tau c^2 - a\tau v^2 + a\xi v + a\tau v^2,$$
 (E5)

$$t' = \frac{a\tau c^2 + a\xi v}{c^2 - v^2}. ag{E6}$$

Ou

$$t' = \frac{a\tau c^2 + \frac{a\xi vc^2}{c^2}}{c^2 - v^2},$$
 (E7)

$$t' = \frac{ac^2(\tau + \xi v/c^2)}{c^2 - v^2},$$
 (E8)

$$t'\sqrt{c^2 - v^2} = \frac{ac^2(\tau + \xi v/c^2)}{c^2 - v^2}\sqrt{c^2 - v^2},$$
 (E9)

Sendo

$$\phi(-v) = \frac{ac}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (E10)

(E9) resulta em

$$t'c\sqrt{1-v^2/c^2} = \phi(-v)c(\tau + \xi v/c^2),$$
 (E11)

$$t' = \phi(-v) \frac{c(\tau + \xi v/c^2)}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (E12)

$$t' = \phi(-v)\gamma(-v)(\tau + \xi v/c^2).$$
 (E13)

De forma análoga;

$$x' = \phi(-v)\gamma(-v)(\xi + v\tau). \tag{E14}$$

Como $\mathcal D$ foi transformado de $\mathcal B$ e $\mathcal B$ foi transformado de $\mathcal A$, podemos fazer a relação de $\mathcal D$ para $\mathcal A$.

Usando x' e substituindo:

$$\xi = \gamma(x - vt). \tag{E15}$$

Em (14), temos:

$$x' = \phi(-v)\gamma(-v)[\gamma(x - vt) + v\tau], \tag{E16}$$

$$x' = \phi(-v)\gamma(-v)\phi(v)\gamma x - \phi(-v)\gamma(-v)\phi(v)\gamma vt + \phi(-v)\gamma(-v)v\tau.$$
(E17)

Escolhendo:

$$t' = t = \tau = 0, \tag{E18}$$

e como

$$\gamma(-v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
 (E19)

com v = 0, $\gamma = 1$, então a expressão (17) fica:

$$x' = \phi(-v)\phi(v)x. \tag{E20}$$

O que acontece, também, para t' e t, y' e y e z' e z.

APÊNDICE F: Olhando para o que acontece na direção do eixo x

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2, \tag{F1}$$

Aplicando os valores encontrados para ξ , η e ζ , na equação (34) do texto, temos:

$$[\gamma(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
 (F2)

Fazendo t = 0, temos:

$$(\gamma x)^2 + y^2 + z^2 = R^2, (F3)$$

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2,\tag{F4}$$

Olhando individualmente para x, temos que

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^2} = R^2,$$
 (F5)

$$x = R\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$y = R,$$

$$z = R.$$
(F6)

APÊNDICE G: Olhando para o que acontece na direção do eixo t

$$\tau = \gamma(t - vt/c^2),\tag{G1}$$

Fazendo x = vt;

$$\tau = \gamma (t - tv^2/c^2),\tag{G2}$$

$$\tau = \frac{t(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\tag{G3}$$

Fazendo a radiciação;

$$\tau = \frac{t(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
 (G4)

$$\tau = \frac{t(1 - v^2/c^2)\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v^2/c^2)},\tag{G5}$$

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2},\tag{G6}$$

Na sua forma mais habitual:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\tag{G7}$$

Podemos somar e subtrair por t e assim temos:

$$\tau = t - t + t\sqrt{1 - v^2/c^2},\tag{G8}$$

Assim, a expressão fica:

$$\tau = t - \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)t.$$
 (G9)

A equação (45) remete a uma concepção do que a dilatação do tempo significa (Apêndice G). Um observador em $\mathcal B$ terá a passagem de tempo (em segundos) defasada, com relação $\mathcal A$, por um fator $1-\sqrt{1-v^2/c^2}>0$ a cada segundo: o intervalo de tempo para Lucas vai ficando cada vez menor do que o de Catarina à medida que a velocidade dele com relação a ela aumenta, indicando que o relógio dele vai marcando mais lentamente do que o dela. Quando os observadores se encontram no retorno da viagem, essa defasagem está registrada na marcação dos relógios e os eventos para os dois voltam a ser simultâneos e sincronizados.

APÊNDICE H: Dilatação do tempo com relação à latitude da Terra

Em um movimento circular a velocidade angular é diferente da velocidade linear e esta diferença ocorre, tomando como exemplo a Terra em rotação, por conta da distância da crosta ao eixo de rotação, que denotaremos pelo raio R. A expressão abaixo define esta relação:

$$v = \omega R. \tag{46}$$

A partir deste conceito, temos que em latitudes diferentes a crosta terrestre em rotação terá velocidades lineares diferentes. Diante disto, Einstein constrói outro experimento mental (Figura 9) onde, sabendo que a velocidade linear no equador (v_e) é maior que a velocidade linear nas proximidades dos polos terrestres (v_p) , $v_e > v_p$, teríamos a passagem do tempo mais lenta no equador do que no polo, $\tau_e < \tau_p$. São necessários relógios extremamente precisos para detectar esta defasagem.

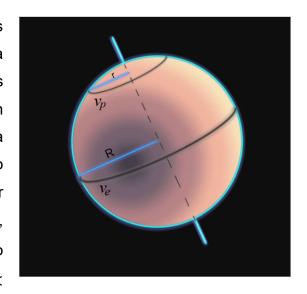


Figura 1H: Representação $v_e \ e \ v_p$

Para este exercício, vamos considerar que a Terra é uma esfera perfeitamente lisa e com raio de seis mil quilômetros. Vamos considerar também a velocidade v_e linear no equador (latitude 0°) de 1600Km/h.

Calculando a velocidade angular desta configuração, teremos:

$$v = \omega R$$
, (H5)

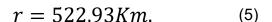
$$1600 = \omega 6000$$
, (H2)

$$\omega = 0.2667 rad/h. \tag{H3}$$

Usando uma latitude de 85°, ou seja, com relação ao eixo de rotação da Terra, estamos lidando com um ângulo de 5° com relação ao eixo de rotação da Terra como vemos na Figura 1H:

Calcular o seno deste ângulo revelará o valor do Raio para a latitude 85°

$$\sin 5 = \frac{r}{6000'} \tag{4}$$



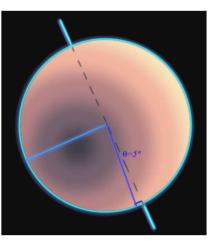


Figura 2H: Dois raios diferentes na rotação da Terra ao redor do seu próprio eixo. O Raio azul claro correspondo ao raio no equador da Terra e o raio azul escuro é raio sobre o polo sul.

Usando o resultado de (5), com o valor da velocidade angular (3) na expressão (1), teremos o valor da velocidade linear v_p (convertendo para metros por segundo) na latitude 85°. Em suma:

$$v_p = 38,74m/s.$$
 (H6)

$$v_e = 444,44m/s.$$
 (H7)

Esta diferença de velocidade dará uma diferença na marcação do tempo em cada latitude.

Usando a expressão da dilatação do tempo:

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}.\tag{H8}$$

Adotando o valor da velocidade da luz:

$$c = 299.792,458m/s.$$
 (H9)

Resolvendo a expressão (7) para o valor de v_e e utilizando o valor de (9) para a velocidade da luz, temos:

Realizando a mesma conta para o valor de v_p , temos:

Um relógio com precisão de 15 casas decimais poderá marcar esta diferença na marcação do tempo entre o polo e o equador da Terra. Os relógios atômicos mais precisos da atualidade possuem uma precisão de 18 casa decimais.

É importante frisar que, no polo, o relógio dilatará um segundo em 31,7 milhões de anos.

APÊNDICE I: O relógio de luz

Lucas instalou um relógio de luz dentro de um trem. Cada emissão/reflexão corresponde a um intervalo de tempo. Para Lucas, a distância que a luz deve percorrer é h e para Catarina, quando o trem estiver com velocidade v, a distância que a luz deverá percorrer será j, como mostra na figura abaixo:

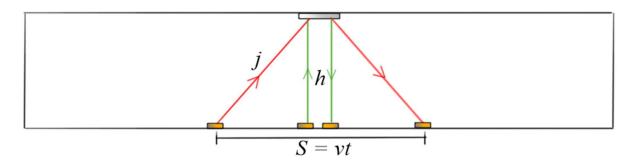


Imagem 11: O relógio de luz com velocidade v

Lucas mede no seu relógio

$$\tau = \frac{2h}{c}.\tag{11}$$

Isolando h, temos:

$$h = \frac{c\tau}{2}. (12)$$

Já Catarina medirá em seu relógio:

$$t = \frac{2j}{c}. ag{13}$$

Mas j é a hipotenusa do triângulo retângulo. Assim, podemos escrever j como:

$$j = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + h^2},\tag{14}$$

Substituindo h, expressão (2), em (4), temos:

$$j = \sqrt{\left(\frac{1}{2}vt\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\tau\right)^2},\tag{15}$$

Simplificando:

$$j = \frac{1}{2}\sqrt{(vt)^2 + (c\tau)^2},\tag{16}$$

Substituindo o valor de j, expressão (6), em (3), ficamos com:

$$t = \frac{2\frac{1}{2}\sqrt{(vt)^2 + (c\tau)^2}}{c},\tag{17}$$

Elevando os termos ao quadrado, temos:

$$t^2 = \frac{(vt)^2 + (c\tau)^2}{c^2},\tag{16}$$

Ou

$$t^2 = t^2 \frac{v^2}{c^2} + \tau^2,\tag{17}$$

Isolando τ :

$$\tau^2 = t^2 - t^2 \frac{v^2}{c^2},\tag{18}$$

Ou

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}.\tag{19}$$

Olhando para o exemplo do relógio de luz, vemos que o princípio da relatividade pode ser expresso na relação pitagórica do triângulo.

Quando vemos o termo j, que neste exemplo corresponde à hipotenusa, temos a percepção imediata de que a velocidade v do trem implicará uma passagem de tempo mais lenta já que determinamos que o evento emissão/reflexão corresponde a um instante de tempo.

Obviamente quando v for grande, j aumentará com velocidade e quanto maior for j menor será a razão entre h e j e esta razão é da ordem de γ (Fator de Lorentz)

APÊNDICE J: Translação da Terra e translação do Telescópio James Webb

Considerando uma unidade astronômica (UA) como:

$$1UA = 1.496x10^{11}m. (J1)$$

E considerando o ponto de Lagrange 2 (L2) em:

$$L2 = 1.492x10^9 m. (J2)$$

A distância entre o telescópio e o Sol será:

$$UA + L2 = 1,496x10^{11} + 1,492x10^{9},$$
 (J3)

$$UA + L2 = 1,511x10^{11}m.$$
 (J4)

Sendo a distância da Terra até o Sol dada por 1 UA, o raio da circunferência será dado por R_{UA} . O perímetro da órbita da Terra é:

$$2\pi R_{UA} \cong 9,400x10^{11}m. \tag{J5}$$

Então, precisamos saber quantos segundos temos em um ano. Para isso, tempos que:

$$1ano = 31.536.000s.$$
 (J6)

Assim, a velocidade linear da Terra é:

$$V_{UA_{linear}} \cong 29.807,20m/s.$$
 (J7)

O raio em L2 será dado pelo valor de UA+L2 e será chamado de R_{L2} . O perímetro em L2 será:

$$2\pi R_{UA+L2} \cong 4,494x10^{11}m. \tag{J8}$$

A Velocidade linear em L2 será:

$$V_{UA+L2_{linear}} \cong 30.104,94m/s. \tag{J9}$$

O valor da velocidade da luz c é

$$c = 299.792.458 m/s.$$
 (J10)

A porcentagem do valor da velocidade linear em cada perímetro será:

$$V_{UA_{linear}} = 9,943x10^{-5}c.$$
 (J11)

$$V_{L2_{linear}} = 1,0042x10^{-4}c.$$
 (J12)

Logo, considerando t=1s como o intervalo de tempo e usando a expressão de Einstein para a dilatação do tempo, temos:

$$\tau_{UA} = 1\sqrt{1 - (9.943x10^{-5})^2},\tag{J13}$$

$$\tau_{UA} = 0.9999999995057s,$$
 (J14)

$$\tau_{L2} = 1\sqrt{1 - (1,0042x10^{-4})^2},\tag{J15}$$

$$\tau_{L2} = 0,99999999999998s.$$
 (J16)

Multiplicando as equações (J48) e (J49) por 109, temos:

$$\tau_{UA} = 999999995,057s,$$
 (J17)

$$\tau_{L2} = 999999994,958s.$$
 (J18)

Como um ano tem 31.536.000s, temos que

$$\frac{99999995,057s}{31.536.000s} = 31,709791827. \tag{J19}$$

$$\frac{99999994,958s}{31.536.000s} = 31,7097918239. \tag{J20}$$

As contas indicam que após 31 anos, 8 meses, 15 dias, 12 horas, 36 minutos e 4 segundos o tempo entre Terra e James Webb terá uma diferença de 1 segundo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, Ronni Geraldo Gomes de. SANTOS, Wytler Codeiro dos. CARVALHO, Lindomar Bonfim. MASSA, Ian Rodrigues. **Uma Abordagem Física dos Números Perplexos**. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2018 vol. 40, nº 3, e3309. Disponível em https://www.scielo.br/j/rbef/a/KvbpK54nscFHNVYsFPSJPQH/?lang=pt

ASHTEKAR, Abhay. PETROK, Vesselin. **Springer Handbook of Spacetime**. 2014, Springer Dordrecht Heidelberg London New York, DOI 10.1007/978-3-642-41992-8.

BAILEY, J.; BORER, K.; COMBLEY, F.; DRUMM, H.; KRIENEN, F.; LANGE, F.; PICASSO, E.; VON RUDEN, W.; FARLEY, F. J. M.; FIELD, J. H. **Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit.** Nature Publishing Group. 1977. Vol 268(5618), 301–305. doi:10.1038/268301a0

BARBOUR, Julian. The End of Time. 2001. Oxford University Press

BARBOUR, Julian. **The Nature of Time**. 2008 Foundational Questions Institute.

BARBOUR, Julian. LOSTAGLIO, Matteo. MERCATI, Flavio. **Scale** anomaly as the origin of time. 2013. Springer.

CALIL, Marcos Rogéio. **Anamela de Vitruvius: dos relógios solares até o relógio de Sol plano horizontal.** São Paulo. 2008. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/13383. Acessado em 07/09/2021.

EINSTEIN, Albert; **On the electrodynamics of moving bodies**. 1905. Tradução de John Walker Disponível em http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Einstein_1905_relativity.pdf. Acessado em 11/07/2021.

EINSTEIN, Albert; **The meaning of relativity.** 1922. Tradução de Edwin Plimpton Adams 2003. Routledge Classics

GIOVANNETTI, Vittorio, LLOYD, Seth, MACCONE, Lorenzo. **Quantum time**, Physical Review. 2015. D 92, 045033.

HAWKING, Stephen, PENROSE, Roger. **The Nature of Space and Time**. 2010. Princiton University Press.

HINKLEY, N., SHERMAN, J. A., PHILLIPS, N. B., SCHIOPPO, M., LEMKE, N. D., BELOY, K., PIZZOCARO, M. OATES, C. W. LUDLOW, A. D. **An Atomic Clock with 10**⁻¹⁸ **Instability**. 2013. Science, vol. 341, pg. 1215 - 1218

MARTINS, Roberto de Andrade. **Teoria da Relatividade Especial**. 2012. São Paulo.

NEWTON, Isaac; **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**. 1868. Tradução para o inglês por Florian Cajori. 1966. Vol. 1. The Motion of the bodies. University of California Press.

NICHOLSON, T., CAMPBELL, S., HUTSON, R. et al. **Systematic** evaluation of an atomic clock at $2x10^{-18}$ total uncertainty. Nat Commun 6, 6896 (2015). Disponível em https://doi.org/10.1038/ncomms7896. Acessado em 09/01/2022

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica Vol. 4**, 1ª edição 1998, 8º reimpressão 2010. Editora Edgard Blücher LTDA

SCHUTZ, Bernard Frederick. **A First Course in General Relativity**. 2009. Cambridge University Press.

RINDLER, Wolfgang. Relativity Special, General and Cosmology Second Edition. 2006. Oxford University Press.

RYDEN, Barbara Sue. **Introduction to Cosmology**. 2017. Cambridge University Press.

ROVELLI, Carlo. **Quantum Gravity**. 2004. Cambridge University Press.

VOLKMER, Guilherme Lorenzatto. **Um Objeto Compacto Exótico na Relatividade Geral Pseudo-Complexa.** 2018. Universidade Federal do Rio Grande Do Sul