



**ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UMA  
TRANSMISSÃO CONTINUAMENTE VARIÁVEL**

**Alex Silva da Purificação  
Lucas Martins Ricardi**

**Projeto de Graduação 2  
Engenharia Mecânica**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UMA  
TRANSMISSÃO CONTINUAMENTE VARIÁVEL**

**Alex Silva da Purificação  
Lucas Martins Ricardi**

**Orientadora: Profa. Dra. Marcela Rodrigues Machado**

**PROJETO DE GRADUAÇÃO 2**

**BRASÍLIA/DF: 31 de maio de 2021**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Análise cinemática e dinâmica de uma transmissão  
continuamente variável

Alex Silva da Purificação  
Lucas Martins Ricardi

PROJETO DE BACHARELADO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARCIAIS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA MECÂNICA.

APROVADA POR:

---

Profa. Dra. Marcela Rodrigues Machado  
(Orientadora)

---

Prof. Dr. Mário Olavo Magno de Carvalho  
(Convidado)

---

Prof. Dr. José Maurício Santos Torres da Motta  
(Convidado)

BRASÍLIA/DF, 31 DE MAIO DE 2021.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Purificação, A. S. e Ricardi, L. M.  
Análise cinemática e dinâmica de uma transmissão continuamente variável  
[Distrito Federal] 2021.  
xvii, 76p. (ENM/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Mecânica, 2021.  
Projeto de Graduação 2 - Universidade de Brasília.  
Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

- |               |              |
|---------------|--------------|
| 1. CVT        | 2. Correia   |
| 3. Algoritmo  | 4. Mecanismo |
| I. ENM/FT/UnB |              |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Purificação, A. S. e Ricardi, L. M.(2021). Análise cinemática e dinâmica de uma transmissão continuamente variável. Projeto de Graduação 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xvii, 76p.

## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DOS AUTORES:** Alex Silva da Purificação, Lucas Martins Ricardi

**PROJETO DE GRADUAÇÃO:** Análise cinemática e dinâmica de uma transmissão continuamente variável.

**GRAU / ANO:** BACHAREL / 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Alex Silva da Purificação

---

Lucas Martins Ricardi



# Agradecimentos

*Agradecemos a nossos pais por todo o apoio emocional, financeiro e paciência durante essa jornada. Criar filhos é uma tarefa árdua, muitos são os desafios e esperamos que este ponto seja mais um motivo de alegria, satisfação, alívio e conquista para aqueles que são os alicerces de nossas vidas. Aos nossos irmãos, exemplos de profissionais e de seres humanos, que possamos ser tão bons quanto aqueles que estão sempre ao nosso lado mostrando que vale a pena o esforço dedicado aquilo que se faz com amor.*

*À todos os colegas criados durante a nossa graduação. Muitos foram os desafios encontrados no caminho, mas sem dúvida eles seriam muito mais difíceis sem os laços criados durante o curso e a companhia para as noites viradas. Em especial àqueles que passaram pela equipe Piratas do Cerrado, todas as experiências vividas foram essenciais para nossa construção como indivíduos e futuros engenheiros.*

*Aos nossos professores e à UnB, por todos os ensinamentos e experiências compartilhadas.*

*E ativamente para o desenvolvimento deste trabalho, gostaríamos de agradecer à professora Marcela pelos inúmeros conselhos e dicas, sempre muito solícita e paciente. Às contribuições externas do professor John Chris Bachman da CallState LA University, do Veer Alakshendra da MathWorks, e Brian Ballew. Ao Gardena, por todas as discussões técnicas, filosóficas, e as desnecessárias. E ao Matheus, pelo auxílio na missão sem fim de fazer a eletrônica funcionar.*

*Alex Silva da Purificação*

*Lucas Martins Ricardi*

# Resumo

## ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UMA TRANSMISSÃO CONTINUAMENTE VARIÁVEL

O presente trabalho tem como objetivo a criação de uma ferramenta para a predição do comportamento de uma transmissão continuamente variável (CVT) de polias expansivas com acionamento mecânico, a partir da análise cinemática e dinâmica do sistema. Para isso, dividiu-se o problema em dois modelos distintos, o primeiro com respeito a correia, que considera a sua discretização e análise em nós, e o segundo para os mecanismos de acionamento, com o desenvolvimento de um balanço de forças em regime estático, acoplando-se os modelos pela força axial que o mecanismo de acionamento aplica sobre a correia. O algoritmo de correia elaborado foi comparado com resultados numéricos e experimentais encontrados em bibliografias, apresentando comportamento semelhante para curvas de força trativa, força de compressão e força de atrito. Para as simulações com força axial constante, verificou-se que o modelo de atrito é capaz de representar a interação entre as polias e a correia com resultados coerentes para análise cinemática e curvas de torque. Por fim, foram apresentados e discutidos os resultados para análise do acoplamento dos mecanismos de controle impondo forças axiais variáveis, e analisou-se a partir de estudos de sensibilidade as influências dos parâmetros de controle de massa do rolete, rigidez das molas e ângulo de came da polia secundária.

**Palavras-chaves:** CVT; Correia; Algoritmo; Mecanismo.

# Abstract

## KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF A CONTINUOUSLY VARIABLE TRANSMISSION

This work aims to create a tool for the prediction of the behavior of a pulley-based continuously variable transmission (CVT) with mechanical drive, based on the kinematic and dynamic analysis of the system. For this, the problem was divided into two distinct models, the first with respect to the belt, which considers its discretization and analysis in nodes, and the second for the drive mechanisms, with the development of a balance of forces in a static regime, coupling the models by the axial force that the drive mechanism applies to the belt. The developed belt algorithm was compared with numerical and experimental results found in bibliographies, showing similar behavior for tractive force, compression force and friction force curves. For simulations with constant axial force, it was found that the friction model is able to represent the interaction between the pulleys and the belt with coherent results for kinematic analysis and torque curves. Finally, the results were presented and discussed for the analysis of the coupling of the control mechanisms imposing variable axial forces, and the sensitivity of the model for the following parameters: flyweight mass, spring stiffness and secondary pulley cam angle.

**Keywords:** CVT; Belt; Mechanism; Algorithm.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos	3
1.2.1	Objetivo geral	3
1.2.2	Objetivos específicos	3
1.3	Organização dos capítulos	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>5</b>
2.1	Transmissões automotivas e a CVT	5
2.2	Histórico CVTs	7
2.3	Tipos de CVT e suas aplicações	9
2.3.1	Polias expansivas	9
2.3.2	Toroidal	10
2.4	Componentes de uma CVT mecânica de polias expansivas	11
2.4.1	Polia primária	11
2.4.2	Polia secundária	14
2.4.3	Correia	16
2.5	Modelos matemáticos de correia	16
2.6	Modelagem do mecanismos de controle	18
<b>3</b>	<b>MODELAGEM CVT</b>	<b>20</b>
3.1	Modelagem da correia	20
3.1.1	Discretização e condições iniciais	21
3.1.2	Forças sobre os nós	22
3.1.3	Torque e aceleração angular	29
3.1.4	Condições de contorno	30
3.1.5	Resolução numérica	31
3.2	Modelagem mecanismos de controle	33
3.2.1	Polia primária	33
3.2.2	Polia secundária	36

3.3	<b>Análise cinemática do mecanismo da CVT Comet 780</b>	37
3.3.1	Polia primária	37
3.3.2	Polia secundária	39
4	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	42
4.1	<b>Comparação e validação do modelo</b>	42
4.2	<b>Simulação com força axial constante sem a atuação do mecanismo de controle</b>	46
4.2.1	Análise de posição, velocidade, velocidade angular e torque	46
4.2.2	Análise de Sensibilidade	50
4.3	<b>Simulação com força axial variável com atuação do mecanismo de controle</b>	56
4.3.1	Polia primária	58
4.3.2	Polia secundária	61
5	<b>CONCLUSÕES</b>	64
5.1	<b>Conclusão</b>	64
5.2	<b>Trabalhos futuros</b>	65
	<b>REFERÊNCIAS</b>	67
	<b>Apêndice A PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO</b>	71
A.1	<b>Simulação 1 - Comparação com literatura</b>	71
A.2	<b>Simulação 2 - Análise de força axial constante</b>	72
A.3	<b>Simulação 3 - Análise de força axial variável</b>	73
	<b>Anexo A DESENHO TÉCNICO POLIA PRIMÁRIA</b>	75
	<b>Anexo B FICHA COMERCIAL COMET 780</b>	76

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Competição Nacional Baja SAE Brasil 2020. . . . .	2
Figura 1.2 – Conjunto motor e transmissão projeto 2020 equipe Piratas do Cerrado. . . . .	2
Figura 2.1 – Velocidade angular do motor em função da velocidade das rodas em uma aceleração de um veículo de quatro marchas. . . . .	6
Figura 2.2 – Velocidade angular do motor em função da velocidade das rodas em uma aceleração de um veículo com CVT. . . . .	7
Figura 2.3 – Representação da variação contínua da relação de transmissão de uma CVT. . . . .	7
Figura 2.4 – CVT Variomatic da empresa DAF. . . . .	8
Figura 2.5 – Conjunto motor e transmissão CVT Honda Fit 2005. . . . .	9
Figura 2.6 – CVT de polias expansivas. . . . .	10
Figura 2.7 – CVT toroidal. . . . .	10
Figura 2.8 – Componentes CVT Comet 780. . . . .	11
Figura 2.9 – Componentes da polia primária Comet 780. . . . .	12
Figura 2.10 – Exemplo da evolução do contato ao longo do funcionamento do sistema de acionamento. . . . .	13
Figura 2.11 – Componentes da polia secundária Comet 780. . . . .	14
Figura 2.12 – Esquema forças atuantes no came da polia secundária. . . . .	15
Figura 2.13 – Montagem do experimento para medição da força de compressão normal. . . . .	18
Figura 2.14 – Esboço das forças atuantes no acionamento do mecanismo da polia primária. . . . .	18
Figura 3.1 – Discretização da correia no plano x-y. . . . .	20
Figura 3.2 – Visualização 3D da polia com a correia discretizada sob ação de força axial. . . . .	21
Figura 3.3 – Exemplo de discretização da correia para condição inicial. . . . .	22
Figura 3.4 – Forças atuantes nos nós discretizados. . . . .	22
Figura 3.5 – Discretização do modelo em nós unidos por molas e amortecedores. . . . .	23
Figura 3.6 – Princípio do sistema de forças equivalentes. . . . .	25
Figura 3.7 – Compressão axial da correia. . . . .	26
Figura 3.8 – Método da bisseção para compressão nodal axial. . . . .	28

Figura 3.9 – Disposição do sistema com condições de contorno. . . . .	30
Figura 3.10–Técnica <i>pinballs</i> para condição de impenetrabilidade. . . . .	31
Figura 3.11–Forças atuantes no mecanismo de controle. . . . .	34
Figura 3.12–Diagrama de forças no sistema de controle da polia primária. . . . .	34
Figura 3.13–Mecanismo de controle da polia secundária. . . . .	36
Figura 3.14–CAD desenvolvido da polia primária Comet 780. . . . .	37
Figura 3.15–Limites de trabalho da polia primária. . . . .	38
Figura 3.16–Deslocamento da polia móvel em função da angulação do rolete. . . . .	38
Figura 3.17–Esboço plano médio da polia primária com as variáveis de análise. . . . .	39
Figura 3.18–Ângulo de contato em função do deslocamento axial. . . . .	39
Figura 3.19–CAD desenvolvido do polia secundária Comet 780. . . . .	40
Figura 3.20–Limites de trabalho polia secundária. . . . .	40
Figura 3.21–Deslocamento da polia móvel em função do ângulo de torção do came. . . . .	41
Figura 4.1 – Força de tração aplicada a um nó ao longo do tempo no modelo imple- mentado. . . . .	43
Figura 4.2 – Força de tração aplicada a um nó ao longo do tempo encontrado em Srivastava e Haque (2008). . . . .	43
Figura 4.3 – Comparação da força de compressão normal aplicada a um nó ao longo do tempo. . . . .	44
Figura 4.4 – Comparação da compressão aplicada a correia ao longo do arco de contato com a polia primária. . . . .	45
Figura 4.5 – Comparação da força de atrito aplicada a um nó ao longo do tempo. . . . .	45
Figura 4.6 – Condição inicial dos nós para simulação com força axial constante. . . . .	46
Figura 4.7 – Posição de um nó ao longo do tempo nas direções $x$ e $y$ para simulação com força axial constante. . . . .	47
Figura 4.8 – Velocidade de um nó ao longo do tempo nas direções $x$ e $y$ para simulação com força axial constante. . . . .	47
Figura 4.9 – Velocidade angular das polias para simulação com força axial constante. . . . .	48
Figura 4.10–Comparação entre relação de transmissão e relação geométrica para simulação com força axial constante. . . . .	48
Figura 4.11–Torque gerado pelo atrito na polia primária ao longo do tempo para simulação com força axial constante. . . . .	49
Figura 4.12–Torque gerado pelo atrito na polia secundária ao longo do tempo para simulação com força axial constante. . . . .	49
Figura 4.13–Velocidade relativa entre nó e polias ao longo do tempo para simulação com força axial constante. . . . .	50
Figura 4.14–Análise de sensibilidade para a velocidade angular da polia secundária em relação ao número de nós em simulação com força axial constante. . . . .	51
Figura 4.15–Análise de sensibilidade da relação de transmissão geométrica em relação ao de nós em simulação com força axial constante. . . . .	52

Figura 4.16–Análise de sensibilidade de torque em relação ao de nós em simulação com força axial constante. . . . .	52
Figura 4.17–Análise de tempo computacional em função do número de nós. . . . .	53
Figura 4.18–Análise de sensibilidade para a velocidade angular da polia secundária em relação a velocidade relativa mínima em simulação com força axial constante. . . . .	54
Figura 4.19–Análise de sensibilidade para a eficiência de transmissão em relação a velocidade relativa mínima em simulação com força axial constante. . . . .	55
Figura 4.20–Análise de sensibilidade de torque em relação a velocidade relativa mínima em simulação com força axial constante. . . . .	56
Figura 4.21–Condição inicial dos nós para simulação com força axial variável. . . . .	57
Figura 4.22–Torque resistivo aplicado ao sistema com força axial variável. . . . .	57
Figura 4.23–Exemplificação da evolução do comportamento cinemático da correia ao longo do tempo. . . . .	58
Figura 4.24–Resultados de sensibilidade do sistema a variação da massa dos roletes. . . . .	59
Figura 4.25–Vetores de força de atrito para diferentes aplicações massa de rolete. . . . .	60
Figura 4.26–Resultados de sensibilidade do sistema a variação da rigidez torcional da mola na polia primária. . . . .	61
Figura 4.27–Resultados de sensibilidade do sistema a variação da rigidez à compressão da mola na polia secundária. . . . .	62
Figura 4.28–Resultados de sensibilidade do sistema a variação do ângulo do came na polia secundária. . . . .	63



# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros para simulação de comparação com a literatura. . . . .	71
Tabela 2 – Parâmetros para simulação com força axial constante. . . . .	72
Tabela 3 – Parâmetros para simulação com força axial variável. . . . .	73

# Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Distribuição de forças axiais nos nós . . . . .	28
---	----

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>CVT</i>	Continuously Variable Transmission
<i>CAD</i>	Computer Aided Design
<i>DAF</i>	Van Doorne´s Automobiel Fabriek
<i>SAE</i>	Sociedade de Engenheiros da Mobilidade

# Lista de Símbolos

$c_{ang}$	Amortecimento angular da correia [ $\frac{Nms}{rad}$ ]
$c_{lin}$	Amortecimento linear da correia [ $\frac{Ns}{m}$ ]
$\gamma_{came}$	Ângulo da rampa do came [ $rad$ ]
$\theta_{Dr}$	Ângulo de abraçamento polia primária [ $rad$ ]
$\theta_{Dn}$	Ângulo de abraçamento polia secundária [ $rad$ ]
$\beta$	Ângulo de contato entre o came e o rolete [ $rad$ ]
$\theta_{fly}$	Ângulo de torção para mola da polia primária [ $rad$ ]
$\alpha_{Dn}$	Ângulo de torção para mola da polia secundária [ $rad$ ]
$\delta_i$	Ângulo deformado entre nós [ $rad$ ]
$\delta_0$	Ângulo inicial entre nós sem carga [ $rad$ ]
$\mu_d$	Coefficiente de atrito dinâmico entre a polia e correia
$\mu_e$	Coefficiente de atrito estático entre a polia e correia
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\vec{V}_{\parallel i+1}$	Componente paralela da velocidade relativa entre nós a jusante [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{V}_{\parallel i-1}$	Componente paralela da velocidade relativa entre nós a montante [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{V}_{\perp i+1}$	Componente perpendicular da velocidade relativa entre nós a jusante [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{V}_{\perp i-1}$	Componente perpendicular da velocidade relativa entre nós a montante [ $\frac{m}{s}$ ]
$C$	Comprimento da correia [ $m$ ]
$D_{Dr}$	Diâmetro externo polia primária [ $m$ ]
$D_{Dn}$	Diâmetro externo polia secundária [ $m$ ]

$\vec{u}_{i+1}$	Direção ao nó a jusante
$\vec{u}_{i-1}$	Direção ao nó a montante
$\vec{u}_r$	Direção radial do nó
$p$	Distância de penetração
$E_{eixos}$	Distância do entre eixos [ $m$ ]
$L_m$	Distância do pivô ao ponto de apoio da mola de torção [ $m$ ]
$L_{fly}$	Distância do rolete ao centro de rotação da polia [ $m$ ]
$l$	Distância entre nós consecutivos [ $m$ ]
$l_0$	Distância inicial entre os nós [ $m$ ]
$\kappa$	Fator limitador de penalização
$\lambda$	Fator penalização
$F_Z$	Força axial [ $N$ ]
$F_{ZDr}$	Força axial polia primária [ $N$ ]
$F_{ZDn}$	Força axial polia secundária [ $N$ ]
$F_{cent}$	Força centrífuga [ $N$ ]
$F_{damp}$	Força de amortecimento linear na correia [ $N$ ]
$f_{Dr}$	Força de atrito na polia primária [ $N$ ]
$f_{Dn}$	Força de atrito na polia secundária [ $N$ ]
$F_n$	Força de compressão normal [ $N$ ]
$F_{cc}$	Força de contato [ $N$ ]
$F_{Mi}$	Força devido à flexão [ $N$ ]
$F_{0Dn}$	Força devido à pré-carga mola da polia secundária [ $N$ ]
$F_k$	Força elástica linear na correia [ $N$ ]
$F_{came}$	Força gerada pelo sistema de came na polia secundária [ $N$ ]
$F_{rDr}$	Força radial devido a compressão na polia primária [ $N$ ]
$F_{rDn}$	Força radial devido a compressão na polia secundária [ $N$ ]
$F_p$	Força reação no pivô do rolete [ $N$ ]

$F_{Rn}$	Força reação normal do rolete com o came de avanço [ $N$ ]
$F_t$	Força resistiva da mola de torção [ $N$ ]
$m_{belt}$	Massa da correia [ $kg$ ]
$m_{fly}$	Massa do rolete [ $kg$ ]
$m_i$	Massa nodal [ $kg$ ]
$\phi$	Meio ângulo do canal da polia [ $rad$ ]
$B$	Módulo de deformação volumétrica [ $MPa$ ]
$Y$	Módulo de elasticidade [ $MPa$ ]
$J$	Momento de inércia angular [ $kgm^2$ ]
$M_i$	Momento fletor nodal [ $Nm$ ]
$n$	Número de nós
$Dr$	Polia primária
$Dn$	Polia secundária
$\theta_{fly}$	Posição angular do rolete [ $rad$ ]
$Z$	Posição axial do prato móvel [ $m$ ]
$P_{DN}$	Posição eixo de rotação polia secundária [ $m$ ]
$\vec{P}_i$	Posição nó $i$ [ $m$ ]
$R$	Posição radial da correia [ $m$ ]
$H_1$	Raio do nó [ $m$ ]
$H_2$	Raio da região de contato dos eixos [ $m$ ]
$r_{came}$	Raio do came [ $m$ ]
$k_{lin}$	Rigidez a tração da correia [ $\frac{N}{m}$ ]
$k_{ang}$	Rigidez angular correia [ $\frac{Nm}{rad}$ ]
$k_{axial}$	Rigidez axial da correia [ $\frac{N}{m}$ ]
$k_{Dn}$	Rigidez axial da mola da polia secundária [ $\frac{N}{m}$ ]
$k_{\alpha Dn}$	Rigidez torcional da mola da polia secundária [ $\frac{Nm}{rad}$ ]
$F_{sum}$	Somatório de força nodais [ $N$ ]

$\dot{\delta}_i$	Taxa de variação do ângulo entre nós [ <i>rad/s</i> ]
$T_{\alpha_{Dn}}$	Torque da mola de torção da polia secundária [ <i>Nm</i> ]
$\tau_{Motor}$	Torque do motor [ <i>Nm</i> ]
$\tau_{Dr}$	Torque gerado pelo atrito na polia primária [ <i>Nm</i> ]
$\tau_{Dn}$	Torque gerado pelo atrito na polia secundária [ <i>Nm</i> ]
$\vec{\tau}_r$	Torque resistivo [ <i>Nm</i> ]
$T_{i+1}$	Tração em relação ao nó a jusante [ <i>N</i> ]
$T_{i-1}$	Tração em relação ao nó a montante [ <i>N</i> ]
$\vec{\vartheta}_i$	Velocidade angular nodal [ $\frac{rad}{s}$ ]
$\omega_{Dr}$	Velocidade angular polia primária [ $\frac{rad}{s}$ ]
$\omega_{Dn}$	Velocidade angular polia secundária [ $\frac{rad}{s}$ ]
$\vec{v}_i$	Velocidade nodal [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{v}_{i+1}$	Velocidade nodal do nó a jusante [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{v}_{i-1}$	Velocidade nodal do nó a montante [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{v}_{rel}$	Velocidade relativa entre o nó e a polia [ $\frac{m}{s}$ ]
$\vec{n}_p$	Vetor de normal da penetração

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

As transmissões continuamente variáveis (CVTs), sejam elas com acionamento mecânico, hidráulico ou elétrico, representam uma concepção de câmbio automotivo capaz de variar a relação transmissão de forma contínua, mantendo a velocidade angular do motor constante com alteração de sua velocidade de saída. Essas transmissões vem ganhando popularidade recentemente, com inovações que permitiram desenvolver sistemas com maior eficiência, pela possibilidade de melhora considerável de economia de combustível e uma aceleração mais suave, quando comparada a caixa de marchas tradicionais.

As aplicações das CVTs vão desde veículos de pequeno porte como *Karts* e *Snowmobiles* até carros comerciais híbridos, com diferentes componentes e configurações. Uma das utilizações mais comuns de CVTs no meio universitário, são as equipes de competição do tipo Baja, categoria mais antiga no Brasil de competições universitárias organizadas pela Sociedade dos Engenheiros da Mobilidade (SAE), que tem o intuito de estimular e desafiar os estudantes na concepção, construção e validação na área de mobilidade.

Para participar das competições Baja SAE as equipes devem projetar, captar recursos e construir um protótipo recreativo, *offroad*, monoposto e robusto para participar de competições regionais, nacionais e mundiais. As competições são divididas em apresentações de projeto, provas estáticas e dinâmicas, figura 1.1, que visam avaliar a performance e qualidade dos projetos. A equipe Piratas do Cerrado é uma das representantes da Universidade de Brasília nas competições Baja SAE, e acumula mais de 20 anos de história, conquistas e evoluções do projeto.





Figura 1.1 – Competição Nacional 2020 Baja SAE Brasil 2020.

Uma das padronizações da categoria para aumentar a competitividade é a obrigatoriedade da utilização de um motor *Briggs Stratton* de 10HP. Com um motor de baixa potência e provas que exigem muito desempenho do protótipo, as equipes precisam desenvolver formas de otimizar a transmissão de potência. Por isso, grande parte das equipes utilizam como configuração uma transmissão continuamente variável (CVT) como redutor primário, pela sua capacidade de substituir a utilização de uma embreagem, massa, ter uma transição contínua de relação de transmissão durante a aceleração e pela sua ampla gama de ajustes possíveis para otimizar o sistema.



Figura 1.2 – Conjunto motor e transmissão projeto 2020 equipe Piratas do Cerrado.

A figura 1.2 ilustra o conjunto motor e transmissão do projeto 2020 da equipe Piratas do Cerrado, em que as duas polias com a correia da CVT estão em conjunto com

uma caixa de transmissão secundária de engrenagens. Essa combinação possibilita o ajuste de componentes da CVT e da relação de transmissão da redução secundária, para otimizar o torque entregue as rodas.

No entanto, o processo de ajuste da CVT normalmente é complexo e exaustivo por necessitar de muitos testes experimentais. Pelo fato de ser um sistema por correia, que possui eficiência de transmissão mais baixa que por engrenagens, e ser utilizado em conjunto com um motor de baixa potência, a escolha correta de rigidez das molas, massa e geometria dos roletes tem papel fundamental na resposta dinâmica do protótipo. Por isso, grande parte dos ajustes é realizado a partir de testes em pista com diferentes combinações de *setup*.

Vendo a importância de se estudar maneiras de otimizar o processo de ajuste para aumentar sua eficiência, e pela falta de ferramentas de predição do comportamento desse sistema, surgiu a necessidade de um estudo para desenvolver um algoritmo capaz de modelar o funcionamento da CVT, dado os seus parâmetros de ajuste. Este estudo não se reduz apenas a CVTs utilizadas em veículos Baja, mas a qualquer utilização da transmissão em que se objetive a alteração dos parâmetros de acionamento mecânico para a análise de sua resposta dinâmica, sem a necessidade de demasiados testes experimentais.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo a criação de uma ferramenta de investigação de uma transmissão continuamente variável (CVT), a fim de auxiliar na tomada de decisões para regulagem dos parâmetros de ajuste de uma transmissão de polias expansivas com acionamento mecânico.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos foram definidos a partir do objetivo geral com a intenção de nortear de maneira mais clara o desenvolvimento do projeto. São eles:

- Realizar uma análise cinemática e dinâmica de uma CVT de polias expansivas com acionamento mecânico;
- Desenvolver um algoritmo para prever o comportamento da transmissão dado seus parâmetros de ajuste como: rigidez de mola, geometria de cames e massa de roletes;
- Comparar resultados do algoritmo com os estudos de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) e [Ide et al. \(2001\)](#), com o intuito de validar o modelo.

Dessa forma, espera-se ao final deste trabalho alcançar um modelo que incorpore a análise dos mecanismos de controle da CVT e suas interações com a correia, criando assim, uma ferramenta que auxilie na otimização dos parâmetros geométricos e de rigidez para a diminuição da necessidade de demasiados testes experimentais.

### 1.3 Organização dos capítulos

O trabalho será dividido em cinco capítulos. No primeiro tem-se a introdução quanto ao assunto a ser desenvolvido com a motivação do estudo e seus objetivos.

O segundo capítulo, consta o levantamento histórico das transmissões automotivas, com a apresentação dos principais tipos de CVTs e os componentes de uma CVT de polias expansivas mecânica. Além disso, é apresentada uma revisão bibliográfica dos principais modelos matemáticos de correia e de mecanismos de controle para essa aplicação.

O terceiro capítulo mostra a modelagem da correia e do sistema de controle, com o desenvolvimento do algoritmo de predição do comportamento da CVT.

No quarto capítulo, é apresentado os resultados e discussões de simulações numéricas com redução fixa e variável, além da comparação do modelo com bibliografias de apoio.

Finalmente, no quinto capítulo apresenta-se as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Transmissões automotivas e a CVT

Desde os primórdios o homem busca através do intelecto e da criatividade manipular e alterar a natureza para atender as suas necessidades e anseios de facilitar seus trabalhos diários. A vontade de manusear objetos e criar movimentos que antes estavam além da sua capacidade física ou que necessitasse demasiado esforço fez com que, através do estudo e experimentação, desenvolvesse uma linguagem capaz de representar o mundo físico para facilitar a compreensão das leis que regem a natureza e utilizá-la para sua transformação. Com a construção dos conhecimentos físicos, matemáticos e da criatividade, começaram a serem desenvolvidas as primeiras máquinas e ferramentas que seriam as precursoras dos equipamentos e mecanismos que hoje utilizamos em nossas tarefas diárias.

O anseio do homem pela a mobilidade foi amplamente impulsionada a partir de 1769 com o motor a vapor para automóveis capazes de transportar pessoas, de Joseph Cugnot. Posteriormente, em 1886, Karl Benz desenvolveu o que hoje é considerado o precursor do carro moderno, um automóvel de três rodas com motor alternativo de dois tempos. Com essa invenção, o automóvel movido a derivados de petróleo se tornou um elemento dominante da sociedade humana, e transformou-se em uma grande fonte de pesquisa e desenvolvimento.

Com a crescente demanda por motores a combustão, à vapor e elétricos, houve a necessidade da criação de mecanismos que pudessem alterar a velocidade angular e transmitir a potência entre eixos, de forma a minimizar a necessidade de muitos motores diferentes para cada aplicação. Esses variadores de velocidade são denominadas transmissões.

De acordo com [Naunheimer et al. \(2011\)](#), a tarefa das transmissões automotivas é converter o torque disponível da unidade de acionamento em torque suficiente para satisfazer os requisitos colocados ao veículo pelo terreno. Além disso, as transmissões tem um papel fundamental na diminuição do consumo de combustível dos motores, já que com a sua utilização é possível aproximar a faixa de trabalho dos motores próximas a condição de máxima eficiência.

Atualmente, existem diferentes tipos de multiplicadores e redutores de velocidade, com várias combinações de mecanismos, como trens de engrenagens, correntes, correias,

rodas de atrito, etc., em que seu acionamento pode ser realizado tanto mecanicamente, quanto de forma automática por meio de sistemas hidráulicos ou elétricos. O sistema de transmissão mais comum em veículos comerciais é a caixa de câmbio manual, que utiliza engrenagens para transmitir a potência e uma embreagem que possibilita a troca dos pares de engrenagens para a mudança da relação de transmissão.

A figura 2.1 ilustra uma curva de velocidade angular do motor por velocidade do veículo para uma caixa de câmbio manual, em que as linhas pontilhadas representam as variações de velocidade angular do motor nas trocas de marcha, enquanto as linhas cheias são a velocidade do motor para relações de transmissão fixas. É possível perceber que a necessidade da troca de marchas gera oscilações, fazendo com que o motor mude a sua faixa de entrega de torque e potência, e assim, diminuindo a eficiência de trabalho do motor, como apresentado em Aaen (1998).

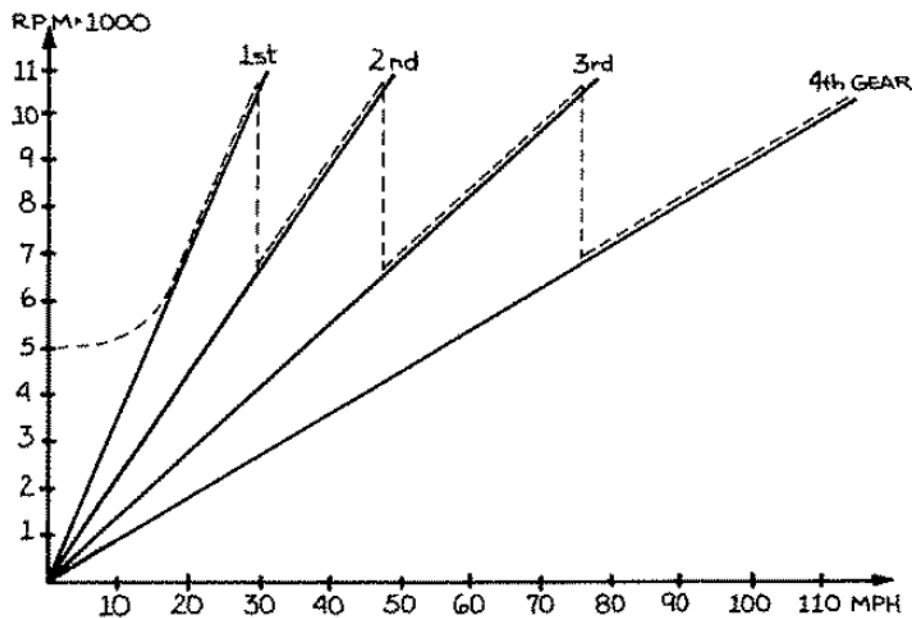


Figura 2.1 – Velocidade angular do motor em função da velocidade das rodas em uma aceleração de um veículo de quatro marchas (AAEN, 1998).

Nesse contexto a CVT é inserida, pois diferentemente dos sistemas mais convencionais, ela não apresenta um escalonamento previamente definido para cada razão de transmissão. O conceito fundamental da CVT é a variação contínua da relação de transmissão, possibilitando que o motor trabalhe em uma faixa constante de velocidade angular, de forma a manter o funcionamento no seu pico de potência, torque ou menor consumo, a depender do que for mais interessante para a aplicação. Além disso, a CVT pode ser combinada com uma caixa de redução fixa, substituindo a necessidade de uma embreagem.

A figura 2.2 ilustra um gráfico de velocidade angular do motor em função da velocidade das rodas de um veículo com CVT, em que é possível verificar a velocidade angular é fixa do motor enquanto ocorre a variação contínua da relação de transmissão,

que garante uma aceleração em geral mais suave. Já a figura 2.3 é uma representação esquemática de uma CVT na sua maior e menor relação geométrica.

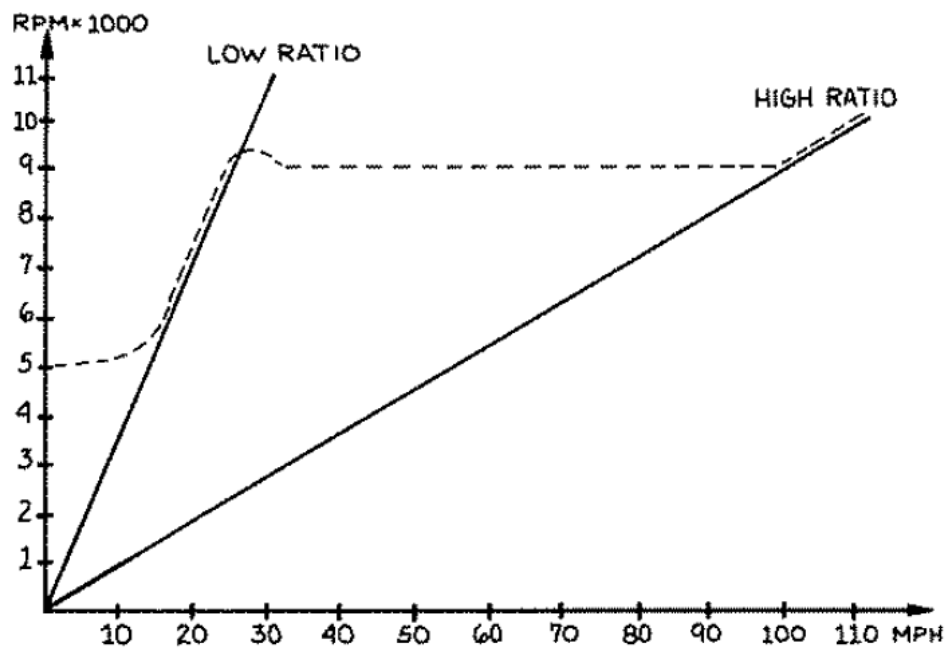


Figura 2.2 – Velocidade angular do motor em função da velocidade das rodas em uma aceleração de um veículo com CVT (AAEN, 1998).

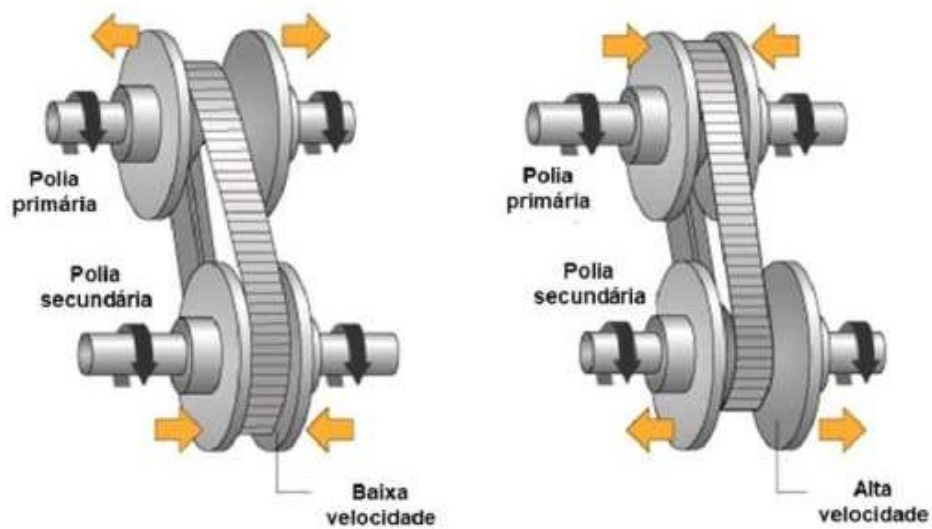


Figura 2.3 – Representação da variação contínua da relação de transmissão de uma CVT (CVTTRANSMISSIONS, 2004).

## 2.2 Histórico CVTs

O primeiro modelo de CVT é atribuído à Leonardo da Vinci no século 15, porém a primeira patente registrada foi apenas em 1886. No final dos anos 50, a empresa Van Dorne's Automobiel Fabriek (DAF) lançou o primeiro modelo para uso em escala



comercial, denominado Variomatic. O sistema com dois conjuntos foi incorporado a um veículo de pequeno porte, posicionado na traseira e acionado por um cardã, que ligado a duas correias de borracha, transmitiam o torque para as rodas. Seu mecanismo de controle era passivo, caracterizados por acionamento dependente da força centrífuga gerada pela velocidade angular do motor, figura 2.4.

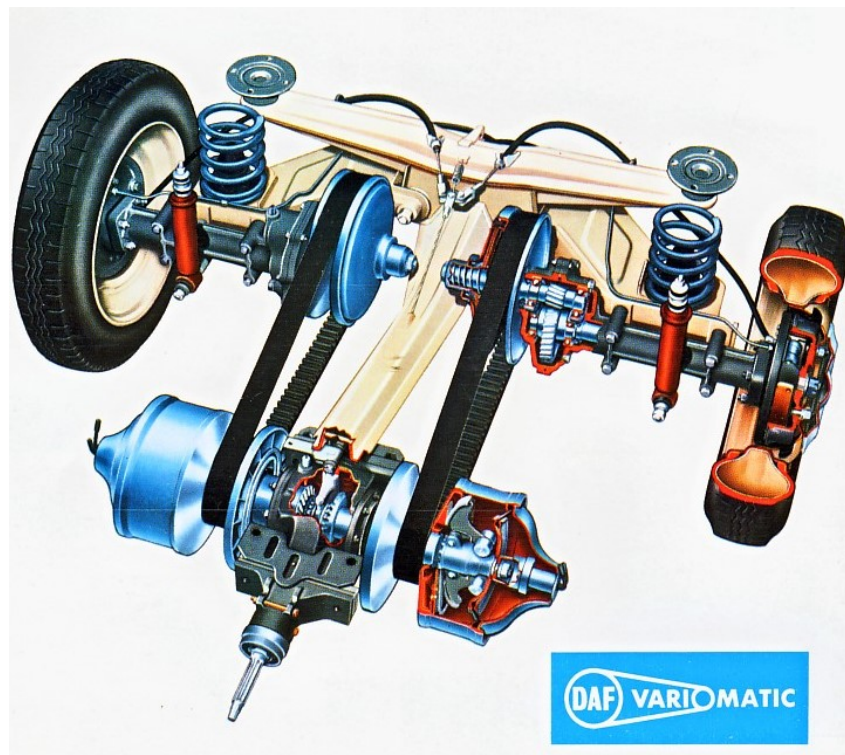


Figura 2.4 – CVT Variomatic da empresa DAF (DAFVARIOMATIC, 1960).

Posteriormente em 1987, o Subaru Justy foi lançado com uma transmissão continuamente variável controlada eletronicamente (ECVT), que permitiu uma maior eficiência no controle das condições de velocidade angular, além de ser equipado com correia de metal, admitindo a utilização em motores com maior torque. Ainda em 1987, foram comercializados os primeiros carros populares europeus com câmbio CVT, o Ford Fiesta e o Fiat Uno, versões que não foram lançados no Brasil.

A partir da década de 90, vários avanços tecnológicos foram sendo alcançados tanto no controle dos mecanismos quanto nos materiais utilizados, permitindo sua ampla utilização em combinação com caixa redutoras para motores mais potentes. Atualmente são encontrados veículos com CVT de várias fabricantes renomadas como Nissan, Audi, Honda, Ford e General Motors. A figura 2.5 mostra o conjunto motor e CVT utilizado no Honda Fit 2005.

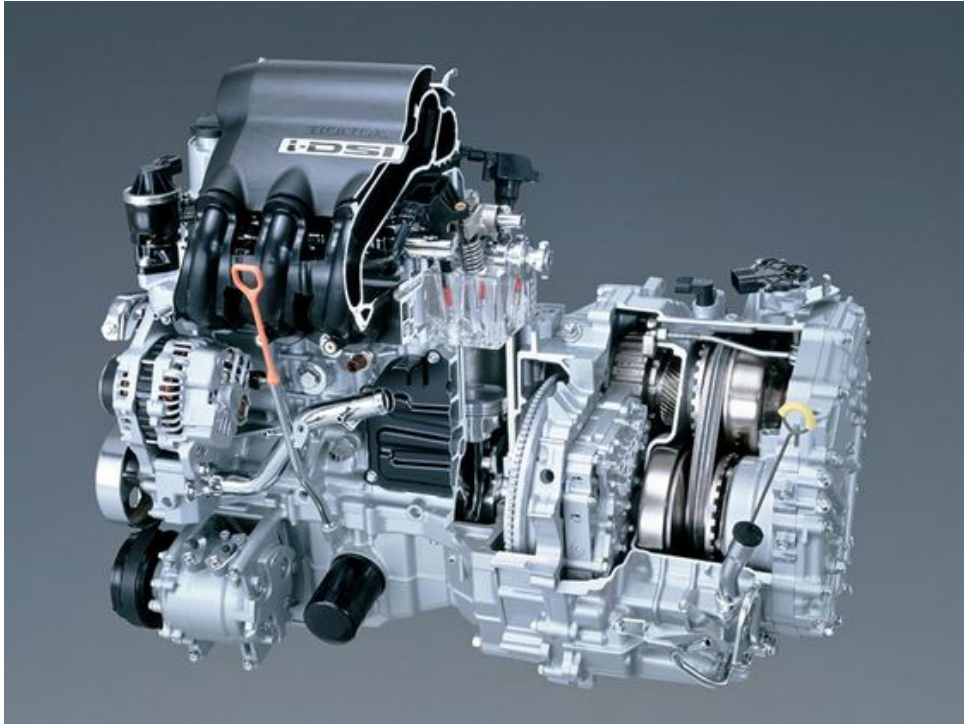


Figura 2.5 – Conjunto motor e transmissão CVT Honda Fit 2005 (HONDA, 2005).

Devido ao fato de alguns consumidores evitarem a utilização de carros com CVT pela experiência de direção proporcionada por câmbios escalonados, CVTs modernos estão sendo programados para simular a sensação de aceleração de transmissões tradicionais, escolhendo relações fixas temporárias seguidas de quedas momentâneas e aumento da velocidade angular.

## 2.3 Tipos de CVT e suas aplicações

Existem diferentes tipos de CVT, com alterações tanto no princípio de funcionamento quanto no mecanismo e sistema de controle, entretanto, dois desses são os mais comuns, o de polias expansivas e o toroidal.

### 2.3.1 Polias expansivas

A CVT por polias expansivas é composta por duas polias cônicas com capacidade de movimento axial, dois atuadores e uma correia em V de borracha ou metal. A polia primária ou motora é acoplada ao eixo do motor, enquanto a polia secundária ou movida é conectada a uma caixa redutora ou diferencial.

Conforme uma das metades da polia primária se aproxima axialmente da outra metade, o diâmetro efetivo da correia aumenta nessa polia, e o consequente movimento axial contrário na polia secundária diminui o diâmetro na polia movida, alterando a relação de transmissão dos eixos, figura 2.6. Como a distância entre eixos e o comprimento da



correia não mudam, as duas polias se ajustam simultaneamente para manter a tensão adequada na correia e garantir a transmissão de torque em relações diferentes.

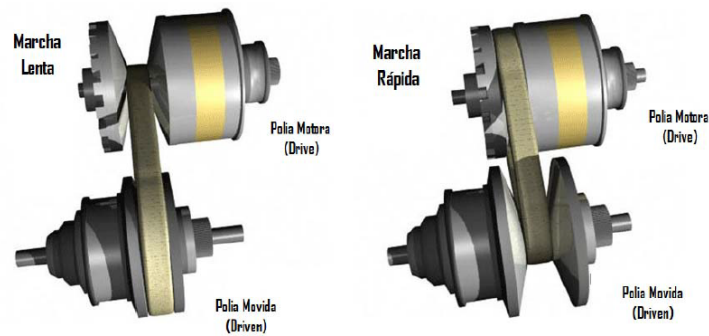


Figura 2.6 – CVT de polias expansivas (HOWSTUFFWORKS, 2005).

Esse tipo de CVT é o mais utilizado entre os seguimentos automotivos, como em veículos de competição leves, comerciais, *scooters* e *snowmobiles*, pela sua facilidade de operação, regulagem e eficiência. Os atuadores podem ser mecânicos, hidráulicos ou elétricos, a depender da sua aplicação e custo.

### 2.3.2 Toroidal

A transmissão toroidal consiste em dois rolos pivotáveis em contato com cones toroidais, um de entrada e outra de saída. O movimento angular dos rolos permite uma variação do ponto de contato, aumentando ou diminuindo a relação de raio de transmissão nos cones. A figura 2.7 ilustra três casos de funcionamento, o de redução, amplificação e manutenção da velocidade angular, onde os rolos pivotáveis são ilustrados em amarelo e os cones toroidais são as entradas e saídas de rotação.

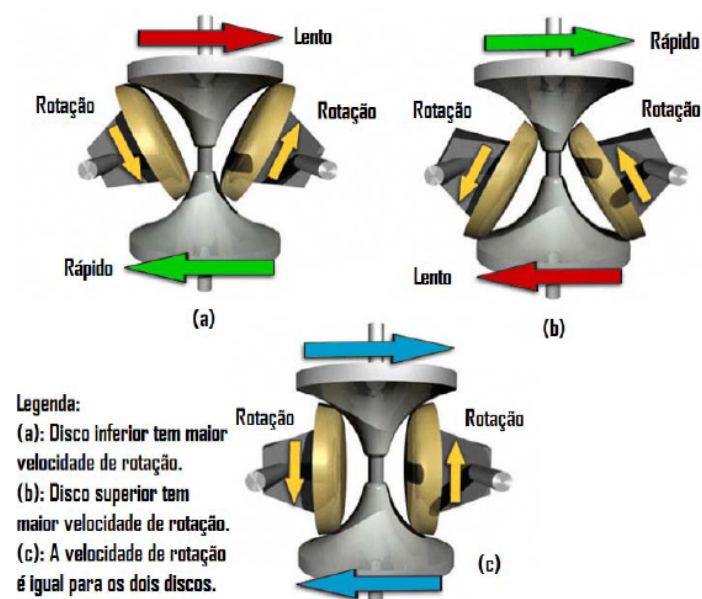


Figura 2.7 – CVT toroidal (HOWSTUFFWORKS, 2005).

Apesar desse sistema poder ser utilizado em aplicações com maiores torques por não apresentar correia, essa configuração precisa possuir alto atrito entre os rolos e cones para funcionar. Essa condição gera elevado desgaste entre os componentes, o que requer materiais e acabamentos superficiais específicos e caros. Por isso, sua utilização na indústria automotiva é pouco relevante.

## 2.4 Componentes de uma CVT mecânica de polias expansivas

O objeto de estudo do presente trabalho consiste na modelagem de uma CVT de polias expansivas com acionamento mecânico. O modelo utilizado nesse estudo para análise e validação do algoritmo é o Comet 780 da marca Comet Industries, disponibilizado pela equipe Piratas do Cerrado. Para se determinar o modelo que represente a dinâmica de trabalho do sistema, é necessário entender quais são seus componentes e como eles atuam em seu funcionamento. A figura 2.8 ilustra os componentes do conjunto da CVT Comet 780, sendo a polia primária à esquerda, a polia secundária à direita e a correia de borracha.



Figura 2.8 – Componentes CVT Comet 780 (OEMOFFHIGHWAY, 2011).

### 2.4.1 Polia primária

A polia primária, também denominada de polia motora ou *driver* (*Dr*), consiste em uma polia com mecanismo centrífugo acionado a partir da variação de velocidade angular do motor. Esse mecanismo, é composto por três braços articulados com pesos em suas extremidades dispostos simetricamente, denominados roletes ou *flyweights*, que pivotam em torno de eixos fixados no prato deslizante por duas molas de torção. A figura 2.9 ilustra os componentes do mecanismo e seus respectivos posicionamentos.

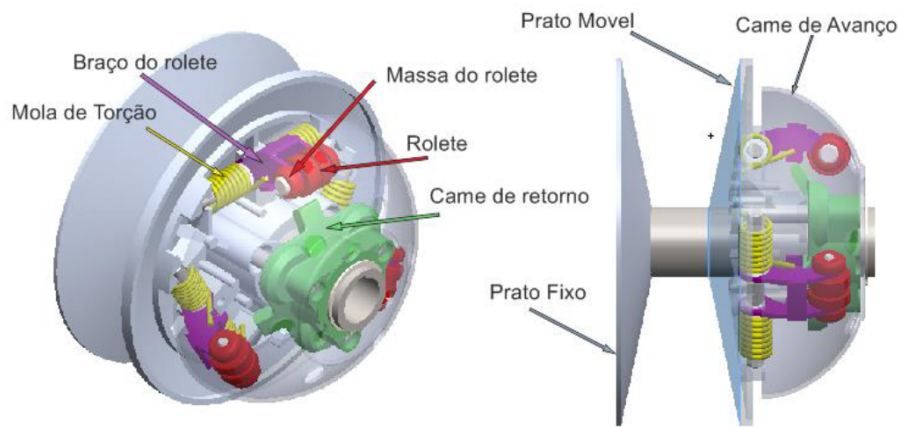


Figura 2.9 – Componentes da polia primária Comet 780 (SILVA; NETO; GUIDETTI, 2016).

A partir do aumento da velocidade angular do motor, a força centrífuga tende a afastar os roletes do eixo central, rolando sobre o came de avanço. Esse movimento, que é balanceado pela resistência das molas de torção, faz com que o prato móvel, no qual os roletes estão conectados, deslize axialmente. O deslocamento axial do prato móvel varia o diâmetro efetivo da polia, alterando a relação de transmissão a partir da compressão da correia.

Dentre as variáveis que influenciam na dinâmica de trabalho do mecanismo, algumas são passíveis de alteração e regulação, afim de se obter melhores desempenhos para cada aplicação da CVT. Esses parâmetros são:

### *Massa do rolete*

O acionamento do mecanismo de controle é dado pela força centrífuga que a velocidade angular do motor induz sobre os roletes. Dessa forma, a massa do rolete está diretamente ligada a qual rotação o mecanismo possui força centrífuga suficiente para superar o momento do tursor das molas. Logo, quanto maior o peso do rolete, menor a velocidade angular de trabalho do motor durante a variação da relação de transmissão e mais rápida é a transição de alteração de diâmetros.

A equação 2.1 ilustra a relação da força centrífuga, velocidade angular e massa do rolete.

$$F_{cent} = m_{fly} \omega_{Dr}^2 L_{fly} \quad (2.1)$$

onde  $m_{fly}$  é a massa do rolete,  $\omega_{Dr}$  a velocidade angular da polia primária e  $L_{fly}$  a distância do centro de rotação da polia ao centro de gravidade dos roletes.

## Geometria do rolete e do came de avanço

A geometria do rolete e do came de avanço são responsáveis por determinar a forma com que a força centrífuga é convertida em força axial que comprime a correia para mudança de relação de transmissão. Ângulos de contato entre o rolete e o came pequenos demandam velocidade angular maior da polia primária para produzir a mesma quantidade de força axial que ângulos maiores produziram em uma velocidade menor. Dessa forma, o perfil de contato determina o modo com que se desenvolve a mudança na relação de transmissão.

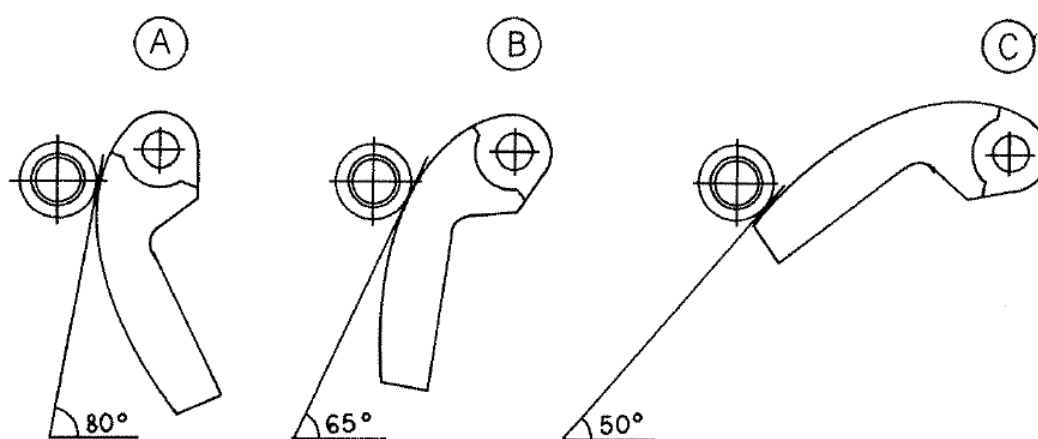


Figura 2.10 – Exemplo da evolução do contato ao longo do funcionamento do sistema de acionamento (AAEN, 1998).

Uma alternativa muito utilizada em CVTs é utilizar geometrias que combinam diferentes angulações com o passar do movimento, como ilustrado na relação de contato entre o rolete e o came de avanço da figura 2.10. Esse tipo de geometria de contato que possui altas angulações no começo e baixas no final, garantem maior força axial no princípio do movimento, gerando maior aceleração no começo da variação da relação de transmissão, e forças axiais menores com o passar do movimento, estabilizando a velocidade final e garantindo uma aceleração mais suave, o que é interessante para ajustes que visam desempenho em provas de aceleração e velocidade.

## Mola de torção

A pré-carga e a rigidez da mola de torção tem influência direta na dinâmica de transição da transmissão. Enquanto a pré-tensão determina a velocidade de engate da correia, a rigidez tem influência nas características da variação da relação de transmissão.

Quanto maior a pré-carga das molas, maior a velocidade angular ou roletes mais pesados são necessários para vencer a força resistiva e o sistema engatar, e assim começar a transmitir torque para a polia secundária. Já a rigidez interfere na variação da relação de transmissão, por isso, o correto ajuste da rigidez das molas dita se a velocidade angular

do motor ficará fixa, aumentará ou irá diminuir enquanto os diâmetros das polias são alterados.

Idealmente, o melhor comportamento da transmissão é manter a velocidade angular do motor fixa no seu pico de potência durante a variação de transmissão, garantindo maior entrega de potência ao sistema. Entretanto, isso apenas é possível com o correto ajuste do balanço entre massa do rolete, pré-tensão e rigidez das molas da polia primária.

## 2.4.2 Polia secundária

A polia secundária também denominada polia movida ou *driven* ( $D_n$ ), é um mecanismo de resposta composto por dois pratos que comprimem a correia e garantem a pressão necessária para transmitir por atrito o movimento da polia primária. O mecanismo consiste em um prato fixo e um prato móvel acoplado a came deslizante, um came fixo, e uma mola de compressão.

Na medida em que a polia primária aumenta o seu diâmetro efetivo pela ação dos roletes na velocidade de engate, a correia força as paredes da polia secundária a se distanciarem. Essa força axial gerada pela correia, induz o came deslizante do prato móvel a deslizar sobre o came fixo, diminuindo o diâmetro da polia e variando a relação geométrica de transmissão. Enquanto a prato móvel se desloca, a mola sofre torção e compressão, garantindo o aperto e o não deslizamento da correia. A figura 2.11 ilustra os componentes do mecanismo.

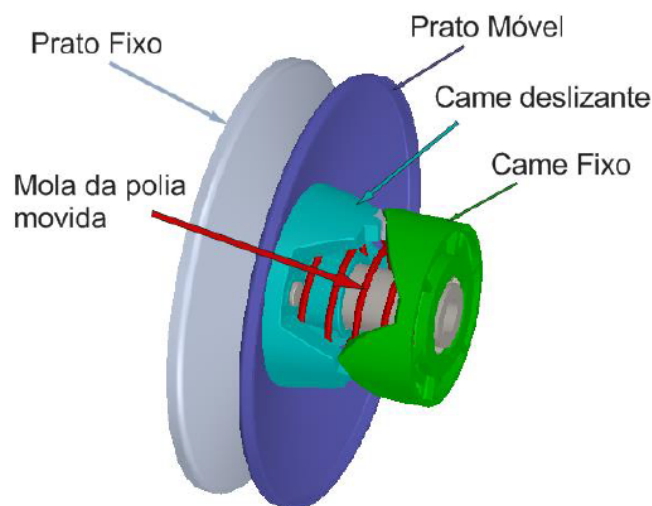


Figura 2.11 – Componentes da polia secundária Comet 780 (SILVA; NETO; GUIDETTI, 2016).

A polia movida tem papel fundamental na regulação da força axial para uma transmissão de potência eficiente entre as polias, pois controla o nível de deslizamento da correia e assim determina a eficiência do sistema. Em relações de transmissão elevadas,

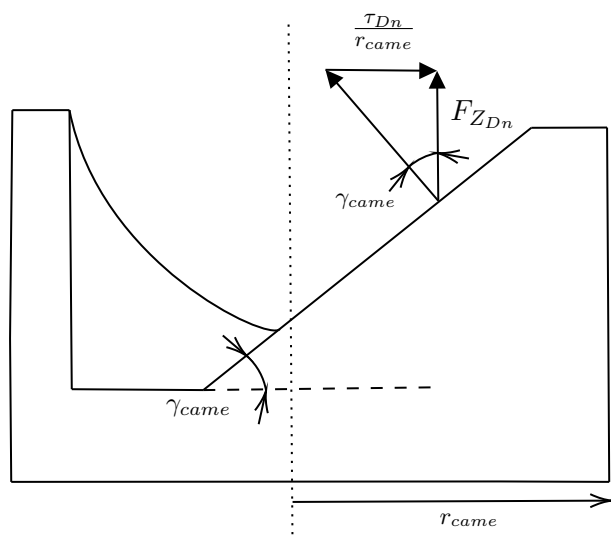


Figura 2.12 – Esquema forças atuantes no came da polia secundária.

necessita-se de força axial menor para garantir a transferência de potência, enquanto que para relações menores essa força deve ser maior para minimizar deslizamentos e perdas de potência. Dessa forma, o ângulo e raio dos cames, a pré-tensão e a rigidez da mola devem ser projetados e regulados de forma a otimizar a entrega de força axial para cada razão de transmissão.

### *Cames fixo e deslizante*

O cames consistem em três rampas espaçadas ao longo da superfície de um cilindro que deslizam um em relação ao outro. Tanto o ângulo das rampas como o raio do cilindro têm influência na quantidade de força axial na polia gerada pelo torque aplicado. A figura 2.12 ilustra a distribuição de forças no mecanismo do came, também denominado como rampa de *feedback*.

A força axial gerada na polia secundária,  $F_{ZDn}$ , está diretamente ligado ao torque transmitido  $\tau_{Dn}$ , ângulo de rampa  $\gamma_{came}$  e raio do came  $r_{came}$  pela equação 2.2. Dessa forma, trabalhando a um mesmo torque, quanto maior o raio do came e o ângulo de rampa, menor será força axial aplicada a correia.

$$F_{ZDn} = \frac{\tau_{Dn}}{r_{came} \tan(\gamma_{came})} \quad (2.2)$$

### *Rigidez e pré-tensão da mola*

Para a correta pressão na correia para a transmissão de potência, é necessário que exista uma mola com rigidez e pré-carga inicial satisfatórias. Quanto maior a pré-tensão dessa mola, mais torque é necessário para começar a variação da relação de transmissão. Já a sua rigidez influencia em como a velocidade angular da polia secundária se desenvolve

ao longo do trabalho da transmissão. Além disso, esses dois parâmetros são importantes para o processo de retorno da relação de transmissão quando o motor desacelera, portanto, quanto maior a tensão da mola, mais rápido é o retorno da polia movida para sua condição inicial de diâmetro efetivo.

### 2.4.3 Correia

A correia tem o papel fundamental de transmitir o torque entre as polias a partir da sua tração e flexão. A Comet 780 utiliza uma correia de borracha em formato V, que devido à sua composição material, apresenta baixa durabilidade ao desgaste, limitando sua utilização para motores de baixo torque. Por isso, CVTs para aplicações de maiores potência utilizam correias metálicas.

Devido as características geométricas da Comet 780, esse sistema CVT possui uma faixa de reduções de 3,71:1 na sua redução inicial, e 0,69:1 na sua máxima abertura de trabalho. Nos anexos [A](#) e [B](#) são apresentados o desenho técnico da polia motora e o catálogo comercial do conjunto com as dimensões relevantes do sistema, respectivamente.

## 2.5 Modelos matemáticos de correia

Um dos maiores desafios para desenvolver um modelo de comportamento dinâmico de uma CVT de polias expansivas consiste na modelagem da correia, que é a responsável pela transmissão de torque de uma polia para a outra, devido as muitas variáveis de materiais, deformações e variações de posições em regime transiente. Por isso, muitos trabalhos têm sido publicados ao longo das últimas décadas para descrever as interações dinâmicas em um sistema CVT. A maioria deles focam no estudo de correias em V de borracha e de metal, e a grande parte dos modelos desenvolvidos se referem a modelos em regime permanente baseados nos princípios de equilíbrio quase-estático.

[Gerbert \(1972\)](#) discute em seus estudos os mecanismos de tração em correias, usando análises de equilíbrio quase-estáticos para desenvolver equações que descrevem o comportamento dinâmico na interação entre a correia e as polias. [Gerbert \(1996\)](#) também estudou a influência da rigidez a flexão e inércia na dinâmica do sistema, considerando apenas os efeitos das forças centrípetas na inércia da correia. A rigidez à flexão tem um influência muito grande nos modelos, já que a variação abrupta da curvatura altera a direção das forças de atrito, que conseqüentemente afetam a capacidade de transmissão de torque da CVT.

[Dolan e Worley \(1985\)](#) formularam soluções usando funções matemáticas aproximadas para descrever resultados numéricos tanto da polia motora quanto movida. Formas hiperbólicas foram desenvolvidas para descrever a distribuição de tensão sobre o arco de contato da correia com as polias. Já [Karam e Play \(2013\)](#) fizeram uma análise discretizada



de uma correia metálica. Foram usadas análises de equilíbrio quase-estáticos e técnicas numéricas para derivar equações globais para equações de cada elemento discretizado. Foi observado que apenas as partes no arco de contato das polias contribuíam efetivamente para a transmissão de torque. Outra abordagem foi a de [Ye e Yi \(2006\)](#) que desenvolveram um modelo multi-corpos dinâmico para calcular as trajetórias de pequenos blocos da correia e encontrar as forças atuantes em diferentes razões de transmissão e torque. Entretanto, foram consideradas apenas condições de regime permanente.

[Pennestri et al. \(2002\)](#), [Sorge \(2004\)](#) e [Carbone et al. \(2007\)](#) desenvolveram modelos parecidos para simular o comportamento transiente. Foram analisados diversas configurações de variação de velocidade com respeito a eficiência e perdas geradas pela fricção entre a correia e os pratos. Os resultados mostraram altas perdas durante as mudanças de redução transientes.

[Carbone et al. \(2007\)](#) ainda utilizaram de dois modelos diferentes para a modelagem do atrito, o modelo de fricção de Coulomb e o modelo de fricção visco-plástico. Os autores concluíram que o modelo de Coulomb é incapaz de prever corretamente a dinâmica de mudança de redução em variações lentas (*creep-mode*), mas se comportou bem para variações rápidas (*slip-mode*). Já o modelo visco-plástico não só foi capaz de prever com precisão o comportamento em *creep-mode* como também em *slip-mode*. Outra modelagem foi a proposta por [Kubas \(2014\)](#) que utiliza o modelo de fricção de Dahl obtendo resultados similares a de outras bibliografias mas sem validação experimental.

[Julio e Plante \(2011\)](#) e [Ballew \(2015\)](#) desenvolveram um modelo de discretização da correia em nós unidos entre si em molas e amortecedores, com rigidez e amortecimento que derivam das propriedades da correia. A partir de um balanço de forças é definido a aceleração de cada elemento e, por integração numérica, o deslocamento de cada nó da correia. Apesar do modelo de atrito utilizado ser o de Karnopp baseado em Coulomb, a comparação entre os resultados numéricos e experimentais foram satisfatórios tanto para regime permanente quanto transiente para cargas resistivas de até 150 Nm.

[Srivastava e Haque \(2008\)](#) também estudaram a influência da fricção no comportamento dinâmico de uma transmissão CVT a partir de uma modelo discretizado de correia metálica, apresentando resultados de curvas de força trativa, força de compressão normal e força de atrito. [Ide et al. \(2001\)](#) apresentam resultados similares para força de compressão normal, mas medidos experimentalmente com base em técnicas de medição por sensores ultrassônicos. A figura 2.13 representa a montagem do experimento com o sensor acoplado a polia para medição da força de compressão.



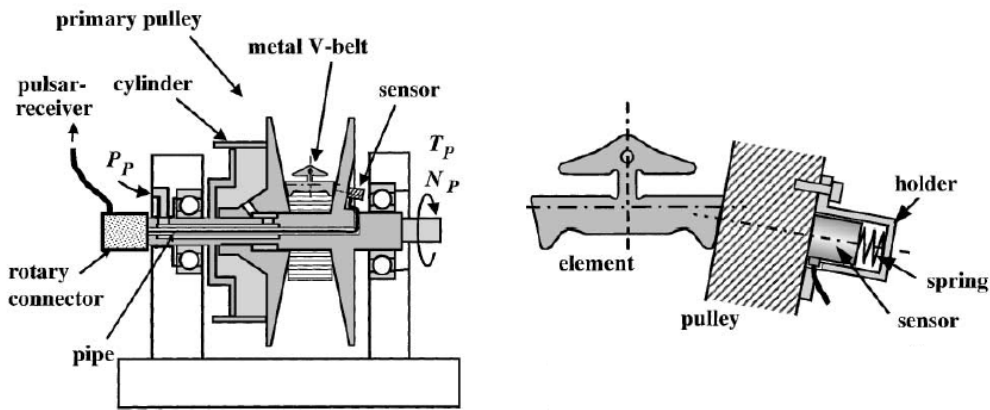


Figura 2.13 – Montagem do experimento para medição da força de compressão normal (IDE et al., 2001) modificado.

## 2.6 Modelagem do mecanismos de controle

A modelagem dos mecanismos de controle podem ser divididos entre o atuador mecânico da polia primária e o sistema de came e mola da polia secundária. Algumas modelagens foram propostas para sistemas similares ao da Comet 780 por diferentes abordagens.

Albuquerque (2003), Ding, Zhu e Liu (2011) e Martins (2018) modelaram a força axial que o prato móvel aplica sobre a correia pelo afastamento dos roletes do eixo central a partir da abordagem Newtoniana. Essa abordagem consiste na resolução das equações de movimento com base no balanço de forças atuantes no sistema. A figura 2.14 exemplifica o esboço do modelo de mecanismo de controle mecânico desenvolvido por Albuquerque (2003).

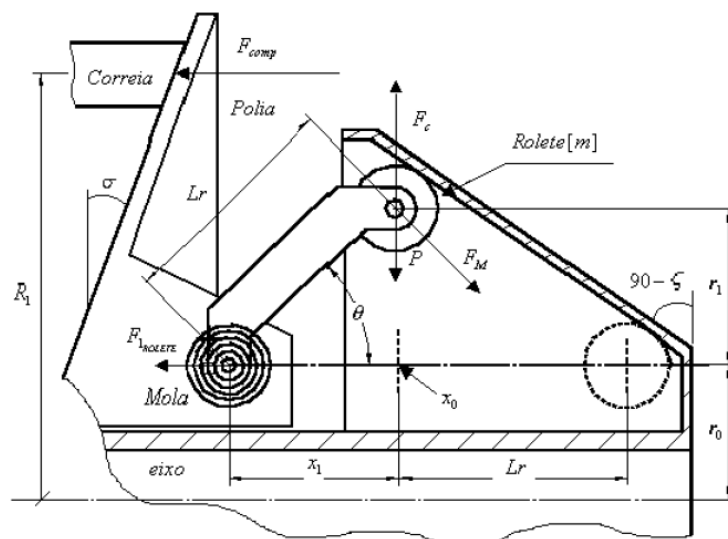


Figura 2.14 – Esboço das forças atuantes no acionamento do mecanismo da polia primária (ALBUQUERQUE, 2003).

Por outro lado, Willis (2006) e Rodrigues (2011) optaram pela modelagem pela abordagem Lagrangeana, que considera o balanço de energia a partir de funções lagrangeanas do sistema e uma força generalizada. A mecânica lagrangeana é baseada num formalismo escalar mais simples e geral, quando comparado ao formalismo de Newton. Com isso, ela é capaz de descrever igualmente bem os fenômenos, e a escolha depende do nível de complexidade do problema.

Já para o mecanismo da polia secundária, Oliver e Henderson (1972) desenvolveram as equações que descrevem as relações entre a força axial aplicada na correia pela angulação entre os cames e a rigidez da mola, a partir das expressões de atrito entre o came deslizante e fixo. Dessa forma, unindo as modelagens da correia com dos mecanismos de controle é possível descrever o comportamento do conjunto CVT durante o regime de trabalho.

## 3 Modelagem CVT

Com base nas pesquisas bibliográficas realizadas, optou-se por seguir o modelo apresentado por [Julio e Plante \(2011\)](#) e [Ballew \(2015\)](#) para modelagem da correia, pela capacidade de descrever o comportamento do sistema em regime transiente e simplicidade de implementação do modelo de atrito quando comparado a outros modelos com resultados validados parecidos. Já para o mecanismo de controle, seguiu-se a abordagem Newtoniana em regime estático como uma simplificação preliminar dos efeitos dinâmicos do mecanismo. Os modelos são apresentados e discutidos nas seções abaixo.

### 3.1 Modelagem da correia

O modelo de discretização da correia é feito no plano  $x - y$  unindo nós por meio de molas e amortecedores, fazendo um balanço de forças para cada nó afim de determinar a aceleração que será integrada ao longo do tempo para solução do problema. As entradas requeridas são: a velocidade angular da polia primária, a força axial aplicada a cada polia e o torque resistivo submetido ao sistema. O modelo retorna a posição e velocidade de cada nó, além da velocidade angular gerada na polia secundária. A figura 3.1 demonstra um esquema geral da discretização do modelo.

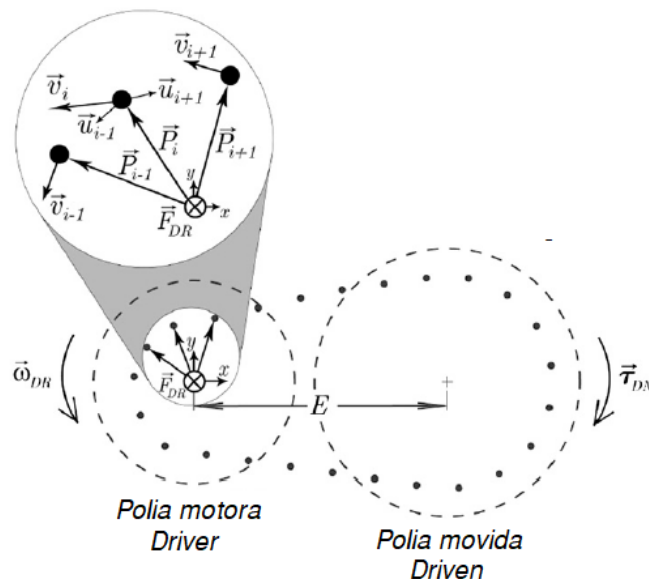


Figura 3.1 – Discretização da correia no plano  $x-y$  ([JULIO; PLANTE, 2011](#)) modificado.

O atrito entre as polias e os eixos, além dos efeitos da gravidade sobre o sistema foram considerados nulos. Além disso, apesar das polias possuírem um perfil cônico, o contato entre as polias e a correia é simplificado para facilitar o cálculo das forças axiais nodais. Por isso, o componente axial de fricção, que é gerado pela distribuição da força axial sobre os nós em contato com a polia, figura 3.2, é desprezado, restando apenas na direção tangencial. Essa aproximação gera erros, mas que de acordo Julio e Plante (2011), está abaixo dos 5%, que foi considerado uma simplificação coerente para a primeira abordagem.

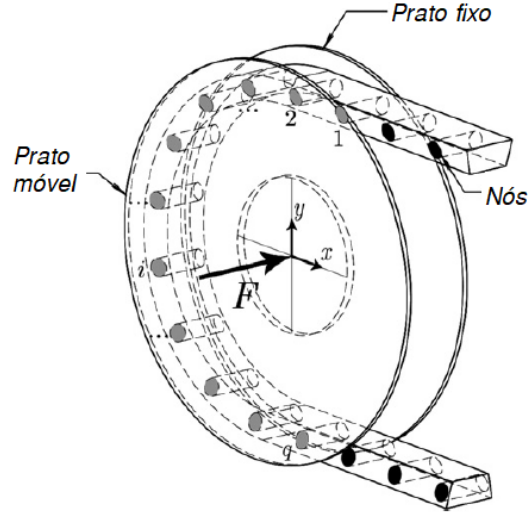


Figura 3.2 – Visualização 3D da polia com a correia discretizada sob ação de força axial (JULIO; PLANTE, 2011) modificado.

### 3.1.1 Discretização e condições iniciais

A discretização da correia é realizada em um número  $n$  de nós, de modo que a massa da correia  $m_{belt}$  é distribuída entre os mesmos igualmente, sendo a massa de cada nó  $m_i = m_{belt}/n$ . Os  $n$  nós são distribuídos equidistantes por todo o comprimento da correia  $C$ , seguindo a distribuição espacial de correia dado pela equação 3.1 de Budynas e Nisbeth (2016), onde a distância entre cada nó, na condição inicial, é  $l_0 = C/n$ , conforme figura 3.3.

$$\begin{aligned}\theta_{Dr} &= \pi - 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{D_{Dn} - D_{Dr}}{2E_{eixos}}\right) \\ \theta_{Dn} &= \pi + 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{D_{Dn} - D_{Dr}}{2E_{eixos}}\right) \\ C &= \sqrt{4E_{eixos}^2 - (D_{Dn} - D_{Dr})^2} + \frac{1}{2}(D_{Dn}\theta_{Dn} + D_{Dr}\theta_{Dr})\end{aligned}\quad (3.1)$$

Onde  $D_{Dr}$  representa o diâmetro da polia primária,  $D_{Dn}$  o diâmetro da polia secundária,  $\theta_{Dr}$  e  $\theta_{Dn}$  seus respectivos ângulos de abraçamento e  $E_{eixos}$  a distância do entre eixos das polias.

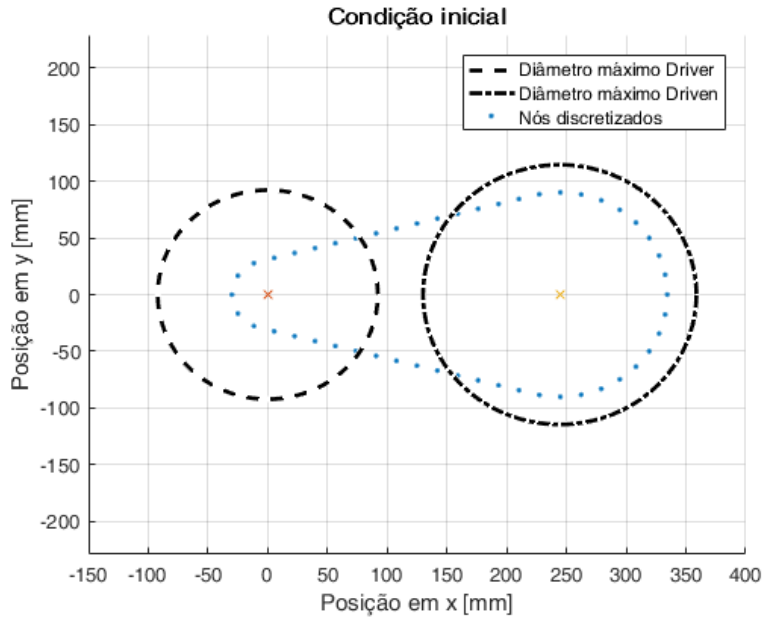


Figura 3.3 – Exemplo de discretização da correia para condição inicial.

### 3.1.2 Forças sobre os nós

A partir da discretização, é feito o somatório das forças sobre os nós. As forças são analisadas separadamente e sobrepostas pelo princípio da superposição, para posterior aplicação na Segunda Lei de Newton e análise para cada instante de tempo. As forças atuantes nos nós, mostrados na figura 3.4 são:

- Tração da correia entre nós adjacentes ( $\vec{T}_{i-1}$  e  $\vec{T}_{i+1}$ );
- Força equivalente resultante da flexão da correia ( $\vec{F}_{M_i}$ );
- Força radial devido a decomposição da força axial na correia ( $\vec{F}_{r_{Dr}}$  e  $\vec{F}_{r_{Dn}}$ );
- Força de atrito com as polias ( $\vec{f}_{Dr}$  e  $\vec{f}_{Dn}$ ).

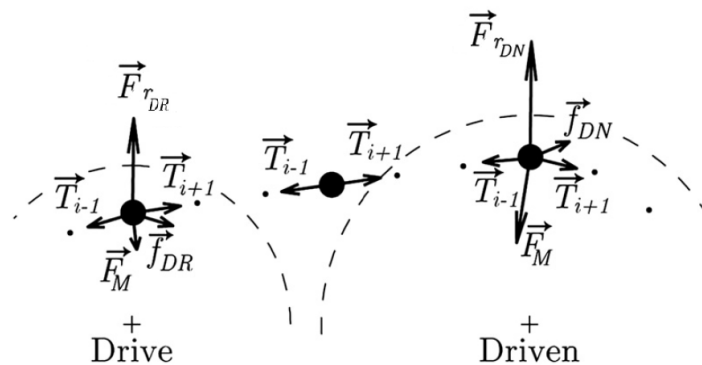


Figura 3.4 – Forças atuantes nos nós discretizados (JULIO; PLANTE, 2011) modificado.

A determinação de cada uma das forças envolvidas serão demonstradas a seguir.

## Força de tração

A figura 3.5 mostra a discretização da correia pela união dos nós por elementos de mola e amortecedor, para cálculo das forças de tração e flexão. Nesse caso, as forças de tração derivam dos componentes lineares do sistema.

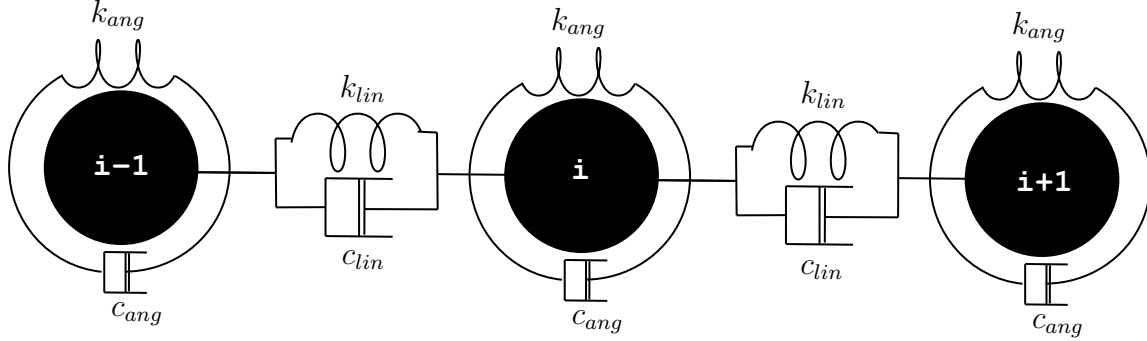


Figura 3.5 – Discretização do modelo em nós unidos por molas e amortecedores.

Dessa forma, a força de tração entre dois nós é dado pela soma da força gerada pelo componente de rigidez e de amortecimento. Considerando que a respectiva posição dos nós  $i - 1, i, i + 1$  são dados por  $\vec{P}_{i-1}, \vec{P}_i, \vec{P}_{i+1}$ , os vetores unitários de direção dos nós adjacentes  $\vec{u}_{i-1}$  e  $\vec{u}_{i+1}$ , são expressos pelas equações:

$$\vec{u}_{i-1} = \frac{\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i}{\|\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i\|} \quad (3.2)$$

$$\vec{u}_{i+1} = \frac{\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i}{\|\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i\|} \quad (3.3)$$

Com isso, o vetor força devido à rigidez da correia pode ser calculado relacionando a rigidez à tração  $k_{lin}$ , a distância entre os nós adjacentes na situação não deformada  $l_0$  e deformada:

$$\vec{F}_{k,i-1} = k_{lin}(\|\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i\| - l_0)\vec{u}_{i-1} \quad (3.4)$$

$$\vec{F}_{k,i+1} = k_{lin}(\|\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i\| - l_0)\vec{u}_{i+1} \quad (3.5)$$

Já o amortecimento, está relacionado com a velocidade relativa entres os nós  $i - 1$  e  $i + 1$  com respeito a  $i$ . Essas velocidades podem ser divididas em duas componentes, uma paralela e outra perpendicular aos vetores unitários. As velocidades paralelas, equações 3.6 e 3.7, contribuem para o amortecimento linear, enquanto as velocidades perpendiculares, equações 3.8 e 3.8, para o amortecimento angular.

$$\vec{V}_{\parallel,i-1} = \|\vec{v}_{i-1} - \vec{v}_i\| \vec{u}_{i-1} \quad (3.6)$$

$$\vec{V}_{\parallel,i+1} = \|\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i\| \vec{u}_{i+1} \quad (3.7)$$

$$\vec{V}_{\perp,i-1} = (\vec{v}_{i-1} - \vec{v}_i) - \vec{V}_{\parallel,i-1} \quad (3.8)$$

$$\vec{V}_{\perp,i+1} = (\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i) - \vec{V}_{\parallel,i+1} \quad (3.9)$$

A partir das velocidades paralelas, a força gerada pelo amortecimento linear  $c_{lin}$  é calculada como:

$$\vec{F}_{damp,i-1} = c_{lin} \vec{V}_{\parallel,i-1} \quad (3.10)$$

$$\vec{F}_{damp,i+1} = c_{lin} \vec{V}_{\parallel,i+1} \quad (3.11)$$

Finalmente, a tração da correia entre nós adjacentes é:

$$\vec{T}_{i-1} = \vec{F}_{k,i-1} + \vec{F}_{damp,i-1} \quad (3.12)$$

$$\vec{T}_{i+1} = \vec{F}_{k,i+1} + \vec{F}_{damp,i+1} \quad (3.13)$$

### *Forças de flexão da correia*

A força gerada pelo momento de flexão da correia é considerada no modelo a partir da introdução de uma rigidez à flexão e um amortecedor em cada nó, conforme figura 3.5. O momento produzido em cada um dos nós é dado por:

$$M_i = k_{ang}(\delta_i - \delta_0) + c_{ang}\dot{\delta}_i \quad (3.14)$$

onde  $k_{ang}$  é a rigidez angular da correia,  $c_{ang}$  o coeficiente de amortecimento angular,  $\delta_0$  o ângulo entre nós na correia sem carga,  $\delta_i$  o ângulo depois de deformado, e  $\dot{\delta}_i$  a taxa de mudança do ângulo entre os vetores unitários  $\vec{u}_{i-1}$  e  $\vec{u}_{i+1}$ , expressos por:

$$\delta_i = \sin^{-1}(-\vec{u}_{i-1} \times \vec{u}_{i+1}) \quad (3.15)$$

$$\dot{\delta}_i = \vec{\vartheta}_{i+1} - \vec{\vartheta}_{i-1} \quad (3.16)$$

Em que a velocidade angular de cada vetor unitário  $\vec{u}_{i-1}$  e  $\vec{u}_{i+1}$  é  $\vec{\vartheta}_{i-1}$  e  $\vec{\vartheta}_{i+1}$ , respectivamente.

As velocidades angulares são calculadas a partir da distância entre nós e da componente perpendicular da velocidade relativa  $\vec{V}_\perp$ , equações 3.8 e 3.9. Dessa forma, as velocidades angulares consistem em:

$$\vec{\vartheta}_{i-1} = \frac{\vec{u}_{i-1} \times \vec{V}_{\perp,i-1}}{\|\vec{P}_{i-1} - \vec{P}_i\|} \quad (3.17)$$

$$\vec{\vartheta}_{i+1} = \frac{\vec{u}_{i+1} \times \vec{V}_{\perp,i+1}}{\|\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i\|} \quad (3.18)$$

Com o intuito de reduzir o tempo computacional para a resolução das equações, o sistema de momentos entre os nós pode ser simplificado a partir da representação cinemática convertendo os momentos em forças equivalentes, usando o princípio do sistema de forças equivalentes apresentado em Beer (2010). Considerando a união entre os dois nós como um corpo longitudinalmente deformável, figura 3.6a, o sistema sujeito aos momentos  $\vec{M}_i$  e  $\vec{M}_{i+1}$  pode ser substituído pelo sistema de forças mostrado na figura 3.6b.

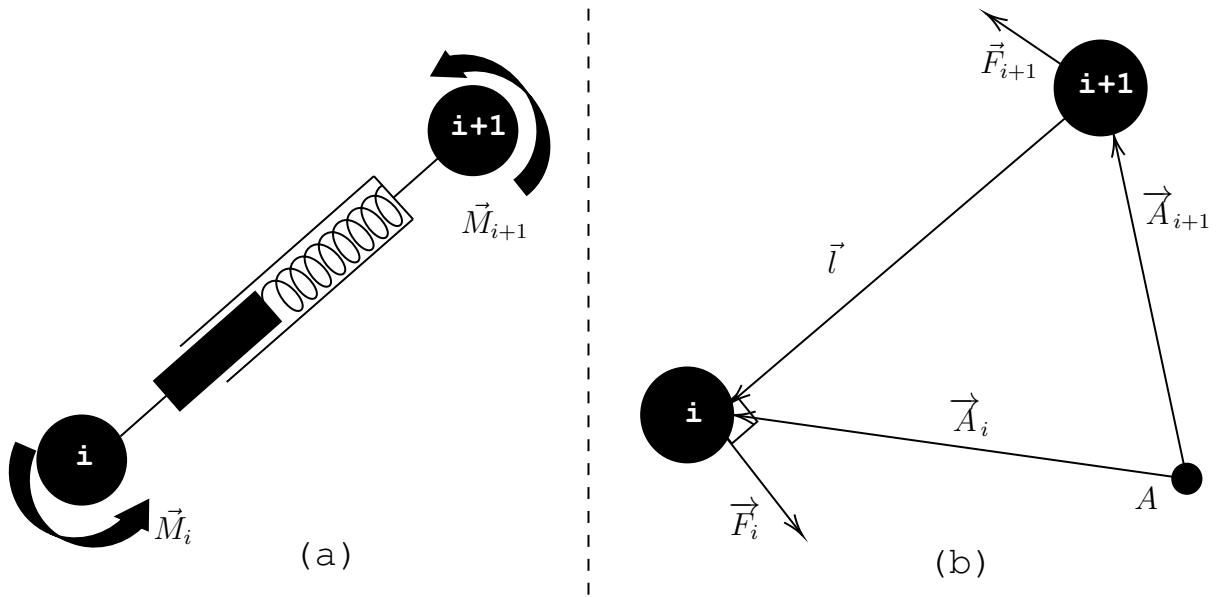


Figura 3.6 – Princípio do sistema de forças equivalentes: (a) Corpo longitudinal deformável sujeito a momentos; (b) Sistema de forças equivalentes.

Considerando  $A$  um ponto arbitrário no espaço, e  $\vec{A}_i$  o vetor distância entre esse ponto  $A$  e o nó  $i$ , faz-se o somatório das forças:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i+1} + \vec{F}_i &= 0 \\ \vec{F}_{i+1} &= -\vec{F}_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

E o equilíbrio de momentos:



$$\begin{aligned}
\vec{A}_i \times \vec{F}_i + \vec{A}_{i+1} \times \vec{F}_{i+1} &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{A}_i \times \vec{F}_i - \vec{A}_{i+1} \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
(\vec{A}_i - \vec{A}_{i+1}) \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{l} \times \vec{F}_i &= \vec{M}_i + \vec{M}_{i+1} \\
\vec{F}_i &= \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i+1}) \times \vec{l}}{\|\vec{l}\|^2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Como  $\vec{l} = \vec{A}_i - \vec{A}_{i+1}$  pode ser substituído pela diferença dos vetores posições ( $\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1}$ ), e repetindo o processo na união entre os nós  $i$  e  $i - 1$ , a força resultante do momento flexão, a partir da somatório das duas forças, em cada um dos nós  $\vec{F}_{M_i}$ , se reduz na equação:

$$\vec{F}_{M_i} = \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i+1}) \times (\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1})}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_{i+1}\|^2} + \frac{(\vec{M}_i + \vec{M}_{i-1}) \times (\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1})}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1}\|^2} \tag{3.21}$$

### Força axial e suas componentes

A força axial  $F_Z$ , aplicada nas polias pelo sistema de controle na polia primária, e pela mola e cames na polia secundária, é responsável pela manutenção da força necessária para a transmissão de torque e geração de uma componente de força radial,  $F_r$ , que induz uma variação radial da posição da correia que altera a relação de transmissão do conjunto. A figura 3.7 demonstra a seção transversal da polia, onde é possível observar a decomposição da força axial em suas componentes radial e normal, em que  $R_i$  é a posição radial inicial, e  $R_f$  a posição em um instante subsequente.

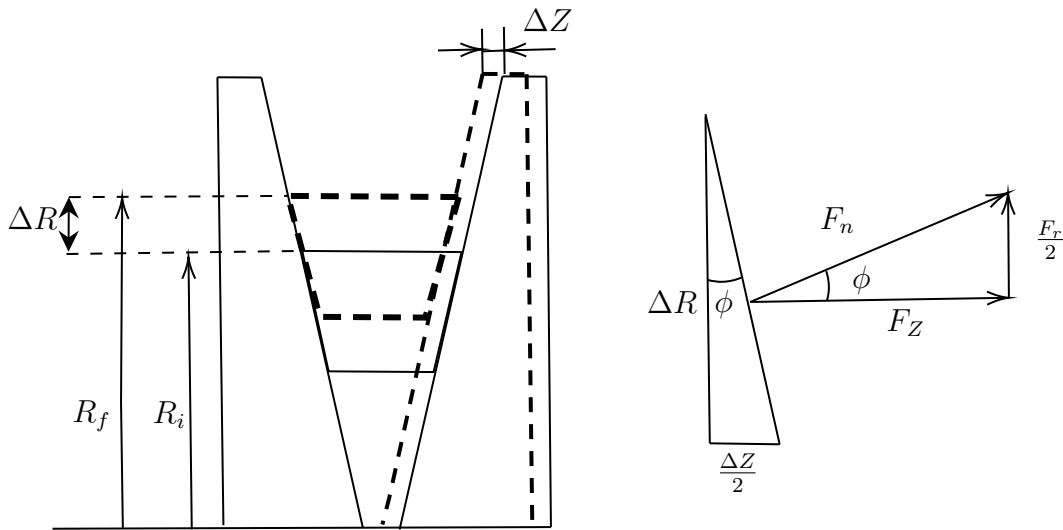


Figura 3.7 – Compressão axial da correia (BALLEW, 2015) modificado.

Considerando  $\Delta R$  como a diferença entre as posições radiais  $R_f$  e  $R_i$ , e  $\phi$  a metade do ângulo do canal da polia, o deslocamento axial  $\Delta Z$  é dado por:

$$\Delta Z = 2\Delta R \tan(\phi) \quad (3.22)$$

Definindo a força axial  $F_Z$  como sendo a rigidez axial da correia multiplicado pelo deslocamento axial:

$$\begin{aligned} F_Z &= k_{axial} \Delta Z \\ F_Z &= 2k_{axial} \Delta R \tan(\phi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

A força radial, dependente da relação geométrica entre as componentes de força axial, é:

$$\begin{aligned} F_r &= 2F_Z \tan(\phi) \\ F_r &= 4k_{axial} \Delta R \tan^2(\phi) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente, as forças radiais para a polia primária  $\vec{F}_{rDR_i}$  e polia secundária  $\vec{F}_{rDN_i}$  são:

$$\vec{F}_{rDR_i} = 4k_{axial} \Delta R \tan^2(\phi) \vec{u}_{rDR_i} \quad (3.25)$$

$$\vec{F}_{rDN_i} = 4k_{axial} \Delta R \tan^2(\phi) \vec{u}_{rDN_i} \quad (3.26)$$

onde  $\vec{u}_{rDR_i}$  e  $\vec{u}_{rDN_i}$  são respectivamente os vetores unitários na direção radial na polia primária e secundária, definidos por:

$$\vec{u}_{rDR_i} = \frac{\vec{P}_i}{\|\vec{P}_i\|} \quad (3.27)$$

$$\vec{u}_{rDN_i} = \frac{\vec{P}_i - \vec{P}_{DN}}{\|\vec{P}_i - \vec{P}_{DN}\|} \quad (3.28)$$

em que  $\vec{P}_{DN}$  é a posição do eixo de rotação da polia secundária, dado pelas coordenadas no plano cartesiano  $\vec{P}_{DN} \equiv [E_{eixos}, 0]$ , com  $E_{eixos}$  sendo o entre eixos da CVT.

A distribuição da força axial ao longo dos nós é feita por meio de uma busca de bisseção. O método busca encontrar um raio médio efetivo que produza um somatório de forças de compressão nos nós igual a força axial aplicada nas polias. O algoritmo de busca apresentado a seguir é baseado em [Ballew \(2015\)](#), e é representado na figura 3.8, em que  $R_i$  é a posição radial do nó,  $R_m$  o raio médio efetivo, e  $R_{min}$  e  $R_{max}$  os limites de busca.

---

**Algoritmo 1** Distribuição de forças axiais nos nós

---

```
 $R_{max} \leftarrow R_{externo}$  ▷ Raio máximo inicial  
 $R_{min} \leftarrow 0$  ▷ Raio mínimo inicial  
 $E \leftarrow 1$  ▷ Erro para início do loop  
while  $|Erro| > Erro_{max}$  do  
   $R_m = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}$  ▷ Raio médio efetivo  
   $F_{axial} = 0$  ▷ Somador da força axial  
  if  $R_i < R_m$  then  
     $F_{z,i} = 2k_{axial}(R_m - R_i) \tan(\phi)$  ▷ Força aplicada ao nó dentro do raio efetivo  
     $F_{axial} = F_{axial} + F_{z,i}$  ▷ Adição ao somador  
  else  
     $F_{z,i} = 0$  ▷ Força axial aplicada ao nó fora do raio efetivo  
  end  
   $Erro \leftarrow \frac{F_{axial} - F_z}{F_{axial}}$  ▷ Atualização do erro  
  if  $Erro > 0$  then  
     $R_{min} \leftarrow R_m;$  ▷ Atualização do raio mínimo caso  $F_{axial} > F_z$   
  else  
     $R_{max} \leftarrow R_m;$  ▷ Atualização do raio máximo caso  $F_{axial} < F_z$   
  end  
end
```

---

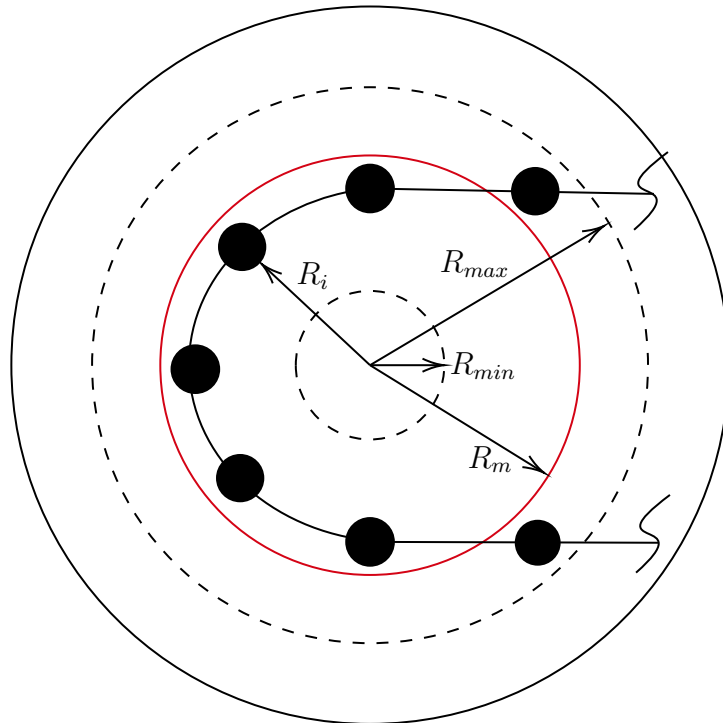


Figura 3.8 – Método da bisseção para compressão nodal axial.

### Forças de atrito

O modelo de fricção adotado neste trabalho foi de [Karnopp \(1985\)](#) que considera o atrito como uma função descontínua da magnitude da velocidade relativa  $\|\vec{v}_{rel_i}\|$  entre os corpos em contato, de forma a caracterizar o atrito para velocidades relativas próximas

de zero. Esse modelo propõe três estados de fricção, *sliding*, *stuck* e *breakaway*, que se diferenciam em termos da velocidade relativa  $\|\vec{v}_{rel_i}\|$  entre o nó e a polia, da força de atrito máximo regido pelo coeficiente de atrito estático  $\mu_e$ , equação 3.29, e do somatório das forças que agem sobre cada nó  $\vec{F}_{sum_i}$ , equação 3.30.

$$f_{max_i} = F_{Z_i} \mu_e \quad (3.29)$$

$$\vec{F}_{sum_i} = \vec{T}_{i+1} + \vec{T}_{i-1} + \vec{F}_{r_i} + \vec{F}_{M_i} + \vec{F}_{cent_i} \quad (3.30)$$

em que  $\vec{F}_{cent_i}$  é a força centrífuga atuante no nó:

$$\vec{F}_{cent_i} = m_i \omega_{Dr/Dn}^2 \|\vec{P}_i\| \vec{u}_r \quad (3.31)$$

e a velocidade relativa,  $\vec{v}_{rel_i}$ , é dada pela diferença entre a velocidade do nó e da polia:

$$\vec{v}_{rel_i} = \vec{v}_i - (\vec{\omega}_{Dr/Dn} \times \vec{P}_i) \quad (3.32)$$

O regime de atrito é de *sliding* se a velocidade relativa for maior que uma velocidade relativa mínima estipulada  $v_{rel_{min}}$ , que indica que o nó está deslizando com relação a polia. Caso a velocidade relativa for menor que  $v_{rel_{min}}$ , os estados de atrito são *stuck* ou *breakaway*. O estado de *stuck* é a condição em que o nó não desliza em relação a polia e não possui força suficiente para induzir um movimento relativo, pois o somatório de forças  $\vec{F}_{sum_i}$  é menor que a força de atrito máximo  $f_{max_i}$ . Já o *breakaway* é a iminência de deslizamento, na hipótese em que o somatório de forças  $\vec{F}_{sum_i}$  é maior que a força de atrito máximo  $f_{max_i}$ . O equacionamento desses três regimes de atrito é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{f}_i &= -F_{Z_i} \mu_d \frac{\vec{v}_{rel_i}}{\|\vec{v}_{rel_i}\|}, & \text{se } (\|\vec{v}_{rel_i}\| \geq v_{rel_{min}}) \\ \vec{f}_i &= -\vec{F}_{sum_i}, & \text{se } (\|\vec{v}_{rel_i}\| < v_{rel_{min}} \text{ e } \|\vec{F}_{sum_i}\| \leq f_{max_i}) \\ \vec{f}_i &= -f_{max_i} \frac{\vec{F}_{sum_i}}{\|\vec{F}_{sum_i}\|}, & \text{se } (\|\vec{v}_{rel_i}\| < v_{rel_{min}} \text{ e } \|\vec{F}_{sum_i}\| > f_{max_i}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.1.3 Torque e aceleração angular

O torque atuante em cada uma das polias é função da posição de cada nó e da força de atrito atuante no nó naquele instante:

$$\vec{\tau} = \sum_1^n (\vec{P}_i \times \vec{f}_i) \quad (3.34)$$

O torque resultante gerado em cada uma das polias são os responsáveis por induzir a aceleração angular nas polias primárias e secundária, e são dadas por:

$$\frac{d\vec{\omega}_{Dr}}{dt} = \frac{1}{J}(\vec{\tau}_{Motor} + \vec{\tau}_{Dr}) \quad (3.35)$$

$$\frac{d\vec{\omega}_{Dn}}{dt} = \frac{1}{J}(\vec{\tau}_{Dn} + \vec{\tau}_r) \quad (3.36)$$

em que  $J$  é o momento de inércia angular do eixo em que a polia se encontra,  $\vec{\tau}_{Motor}$  o torque entregue pelo motor,  $\vec{\tau}_{Dr}$  o torque causado pelo atrito na polia primária,  $\vec{\tau}_{Dn}$  o torque pelo atrito na polia secundária, e  $\vec{\tau}_r$  o torque resistivo aplicado ao sistema gerado pela inércia do conjunto de transmissão após a CVT, resistência a rolagem e arrasto aerodinâmico.

### 3.1.4 Condições de contorno

O movimento da correia durante o funcionamento da transmissão é restringido por dois limites radiais, um externo dado pelo limite de diâmetro das polias, e outro interno relacionado à impenetrabilidade dos eixos. O primeiro limite, é imposto para garantir que nenhum nó que esteja fora dos limites das polias sejam comprimidos, e conseqüentemente contribuam para a transmissão de torque do sistema. Dessa forma, os diâmetros externos das polias são fornecidos ao algoritmo implementado de busca de bisseção apresentado na figura 3.8.

O segundo limite diz respeito à restrição que os eixos das polias impõe sobre a correia. Nesta condição, os nós não podem ultrapassar as zonas de contorno dos eixos, de maneira que ao penetrar na região dos eixos, o nó sofre uma força de reação para se manter dentro dos limites geométricos impostos. A figura 3.9 ilustra as duas condições de contorno, representadas pelos diâmetros externos e pela zona de impenetrabilidade.

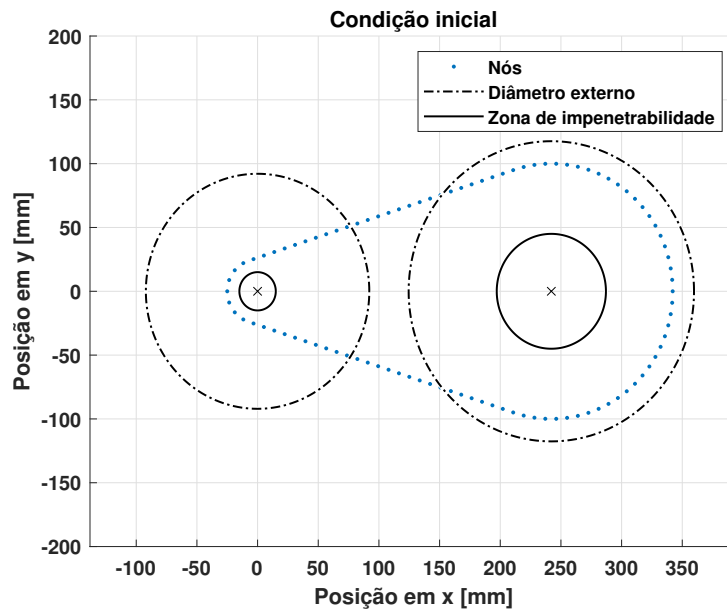


Figura 3.9 – Disposição do sistema com condições de contorno.

O modelo escolhido para modelar a condição de impenetrabilidade dos eixos das polias foi a técnica dos *pinballs* de elementos finitos apresentado em Quaranta (2002).

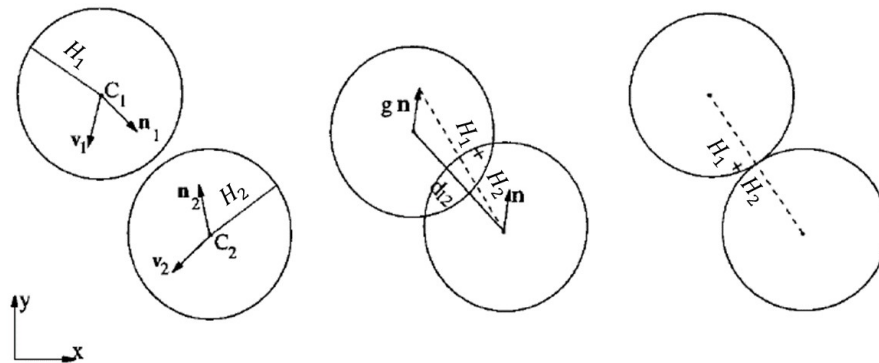


Figura 3.10 – Técnica *pinballs* para condição de impenetrabilidade (QUARANTA, 2002) modificado.

A figura 3.10 demonstra o princípio geral do método, em que  $C_1$  representa o centro de um nó da correia e  $C_2$  o centro da circunferência que delimita um dos eixos. Em cada passo de tempo, o algoritmo busca a existência de penetração entre um nó e as zonas de contorno. Caso essa condição seja satisfeita, uma força de reação é aplicada sobre o nó, que induz o movimento contrário, garantindo a impenetrabilidade.

Dessa forma, força de reação aplicada ao nó em caso de penetração, é dado por:

$$\vec{F}_{cc} = \lambda p \vec{n}_p \quad (3.37)$$

onde é  $p$  a distância de penetração,  $\vec{n}_p$  o vetor normal da penetração e  $\lambda$  é um fator de penalização. O fator de penalização é proposto em Quaranta (2002) como:

$$\lambda = \frac{1}{2} \kappa (B_1 H_1 + B_2 H_2) \quad (3.38)$$

em que  $\kappa$  é um fator limitador do fator de penalização,  $H_1$  e  $H_2$  são os raios das partes em contato e  $B_1$  e  $B_2$  os módulos de deformação volumétricas das esferas em contato expressos por:

$$B = \frac{Y}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.39)$$

em que  $Y$  e  $\nu$  são respectivamente o módulo de Young e coeficiente de Poisson do material.

### 3.1.5 Resolução numérica

Com todas as forças, torques e condições de contorno definidas, é possível montar a equação dinâmica de movimento, a partir do somatório das forças e da massa de cada nó:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m_i} = \frac{\vec{T}_{i+1} + \vec{T}_{i-1} + \vec{F}_{M_i} + \vec{F}_{rDr_i} + \vec{F}_{rDn_i} + \vec{f}_i + \vec{F}_{cc_i}}{m_i} \quad (3.40)$$

Para cada passo de tempo são calculadas as forças sobre os nós, e integrando a equação da aceleração 3.40, determina-se para o próximo incremento as velocidades nodais em  $x$  e  $y$  ( $v^x_i$  e  $v^y_i$ ) e suas respectivas posições ( $p^x_i$  e  $p^y_i$ ). Além disso, a cada *loop* são resolvidas as equações de aceleração angular induzidas pela força de atrito nas polias, conforme apresentado nas equações 3.35 e 3.36. Desse modo, com as variáveis de posição, velocidade e aceleração de todos os nós em  $x$  e  $y$  para cada passo de tempo, a matriz solução é montada:

$$S = \begin{bmatrix} p^x_1 \\ p^x_2 \\ \vdots \\ p^x_n \\ p^y_1 \\ p^y_2 \\ \vdots \\ p^y_n \\ v^x_1 \\ v^x_2 \\ \vdots \\ v^x_n \\ v^y_1 \\ v^y_2 \\ \vdots \\ v^y_n \\ \omega_{Dn} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \begin{bmatrix} v^x_1 \\ v^x_2 \\ \vdots \\ v^x_n \\ v^y_1 \\ v^y_2 \\ \vdots \\ v^y_n \\ \frac{\vec{T}_2^x + \vec{T}_n^x + \vec{F}_{M_1}^x + \vec{F}_{rDr_1}^x + \vec{F}_{rDn_1}^x + \vec{f}_1^x + \vec{F}_{cc_1}^x}{m_i} \\ \frac{\vec{T}_3^x + \vec{T}_1^x + \vec{F}_{M_2}^x + \vec{F}_{rDr_2}^x + \vec{F}_{rDn_2}^x + \vec{f}_2^x + \vec{F}_{cc_2}^x}{m_i} \\ \vdots \\ \frac{\vec{T}_{i+1}^x + \vec{T}_{i-1}^x + \vec{F}_{M_i}^x + \vec{F}_{rDr_i}^x + \vec{F}_{rDn_i}^x + \vec{f}_i^x + \vec{F}_{cc}^x}{m_i} \\ \frac{\vec{T}_2^y + \vec{T}_n^y + \vec{F}_{M_1}^y + \vec{F}_{rDr_1}^y + \vec{F}_{rDn_1}^y + \vec{f}_1^y + \vec{F}_{cc_1}^y}{m_i} \\ \frac{\vec{T}_3^y + \vec{T}_1^y + \vec{F}_{M_2}^y + \vec{F}_{rDr_2}^y + \vec{F}_{rDn_2}^y + \vec{f}_2^y + \vec{F}_{cc_2}^y}{m_i} \\ \vdots \\ \frac{\vec{T}_{i+1}^y + \vec{T}_{i-1}^y + \vec{F}_{M_i}^y + \vec{F}_{rDr_i}^y + \vec{F}_{rDn_i}^y + \vec{f}_i^y + \vec{F}_{cc}^y}{m_i} \\ \frac{\vec{\tau}_r + \vec{\tau}_{Dn}}{J} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Para a resolução deste sistema de equações diferenciais optou-se pela utilização do método numérico de Runge Kutta de quarta ordem, equações 3.42, 3.43, 3.44, 3.45 e 3.46, retiradas de Chapra e Canale (2010), pelo seu baixo grau de erro da aproximação e maior controle dos passos de tempo.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (3.42)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (3.43)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1 \cdot h}{2}\right) \quad (3.44)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2 \cdot h}{2}\right) \quad (3.45)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 \cdot h) \quad (3.46)$$

Devido a dificuldade de controlar os passos de tempo em cada interação na resolução das equações diferenciais utilizando funções ODE existentes em MATLAB, para acelerações altas, o passo de tempo se reduzia a valores muito pequenos, acarretando em tempo demasiado para as simulações. Por conta disso, o método de Runge Kutta de quarta ordem apresentado foi implementado manualmente ao algoritmo.

## 3.2 Modelagem mecanismos de controle

O segundo modelo implementado diz respeito à modelagem dos mecanismos de controle da polia primária e secundária. As equações de força axial apresentadas nessa seção são os elementos de acoplamento entre o modelo de correia e dos mecanismos de controle.

### 3.2.1 Polia primária

A figura 3.11 ilustra as forças envolvidas durante o funcionamento do mecanismo de controle da polia primária. Ao longo da faixa de operação do sistema, a velocidade angular da polia primária  $\omega_{Dr}$  induz aos roletes uma força centrífuga  $F_{cent}$  que tende a afastar as massas dos roletes do eixo de rotação da polia. O movimento imposto pelas massas causam uma torção nas molas acopladas às bases dos roletes, gerando uma força elásticas  $F_t$ , que resiste ao pivotamento dos roletes, e a interação de contato entre o came de avanço e os roletes leva o aparecimento de uma força normal  $F_{Rn}$ . Esse movimento global realizado pelos três roletes gera uma força axial  $F_{ZDr}$  que comprime a correia.



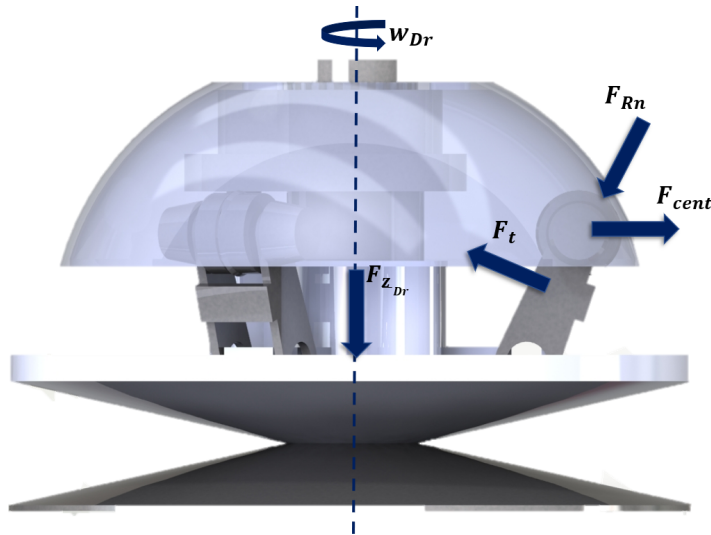


Figura 3.11 – Forças atuantes no mecanismo de controle.

Para a determinação da força axial aplicada a correia, desenvolveu-se um diagrama de corpo livre sob o plano  $x - z$  em um dos roletes, conforme ilustrado na figura 3.12. No diagrama,  $O_g$  é a origem do sistema, localizada no eixo de rotação da polia,  $L_{fly}$  a distância entre o centro da massa do rolete e o eixo de rotação,  $\theta_{fly}$  o ângulo entre o rolete e o eixo  $x$ , e  $\beta$  o ângulo do came de avanço. Neste modelo, é assumido que o rolete e o came de avanço sempre estão em contato, e desconsidera-se os efeitos do atrito nas regiões de contato e da gravidade.

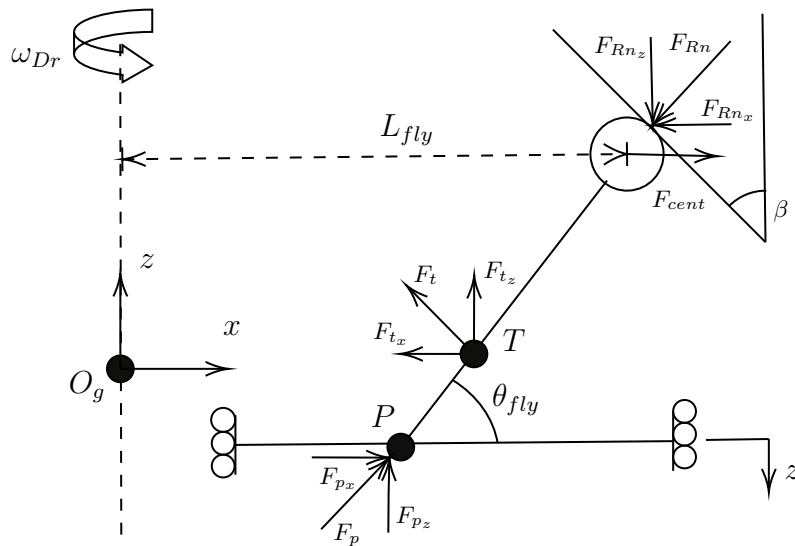


Figura 3.12 – Diagrama de forças no sistema de controle da polia primária.

Pelo diagrama de corpo livre da figura 3.12 podem ser montados os balanços de forças do sistema com relação aos eixos  $x$  e  $z$ :

$$\sum F_x = m_{fly}a_x = F_{cent} + F_{p_x} - F_{t_x} - F_{Rn_x} \quad (3.47)$$

$$\sum F_z = 0 = F_{p_z} + F_{t_z} - F_{Rn_z} \quad (3.48)$$

em são desconsiderados os efeitos da aceleração ao longo de  $z$ , pelo fato da aceleração centrífuga agir na direção radial ao eixo de rotação.

As forças centrífuga e elástica podem ser determinadas por meio das equações:

$$F_{cent} = m_{fly} \omega_{Dr}^2 L_{fly} \quad (3.49)$$

$$F_t = \frac{k_t \theta_{fly}}{L_m} + F_{t_0} \quad (3.50)$$

onde  $L_{fly}$  é a distância do rolete ao eixo de rotação,  $m_{fly}$  a massa do rolete,  $\theta_{fly}$  a angulação do rolete com o eixo horizontal,  $k_t$  a rigidez à torção da mola,  $F_{t_0}$  a pré-carga da mola, e  $L_m$  o braço de momento da mola  $PT$ .

Relacionando as componentes  $x$  e  $y$  da força de reação normal ao came de avanço:

$$\tan \beta = \frac{F_{Rn_z}}{F_{Rn_x}} \quad (3.51)$$

e substituindo  $F_{Rn_z}$  na equação 3.48,  $F_{Rn_x}$  é dado:

$$F_{Rn_x} = \frac{F_{t_z} + F_{p_z}}{\tan \beta} \quad (3.52)$$

Substituindo  $F_{Rn_x}$  na equação 3.47 e isolando  $F_{p_x}$ , tem-se a expressão:

$$F_{p_x} = -m_{fly} \omega_{Dr}^2 L_{fly} + F_{t_x} + \frac{F_{t_z} + F_{p_z}}{\tan \beta} \quad (3.53)$$

Pela relação entre as componentes  $x$  e  $z$  da força de reação no ponto de pivotamento do rolete:

$$\tan \theta_{fly} = \frac{F_{p_z}}{F_{p_x}} \quad (3.54)$$

e isolando o termo  $F_{p_z}$ , a equação 3.53 se resume a:

$$F_{p_z} = \frac{-m_{fly} \omega_{Dr}^2 L_{fly} + F_{t_x} + \frac{F_{t_z}}{\tan \theta_{fly}}}{\frac{1}{\tan \theta_{fly}} - \frac{1}{\tan \beta}} \quad (3.55)$$

Por fim, substituindo as componentes  $x$  e  $z$  da força elástica pela relação geométrica de  $F_t$ , e multiplicando a força  $F_{p_z}$  pelos três roletes do sistema global do mecanismo, a força axial na polia primária é dada por:

$$F_{Z_{Dr}} = -3F_{p_z} = 3 \frac{m_{fly} \omega_{Dr}^2 L_{fly} - 2F_t \cos(\theta_{fly})}{\frac{1}{\tan \theta_{fly}} - \frac{1}{\tan \beta}} \quad (3.56)$$

### 3.2.2 Polia secundária

A modelagem do mecanismo de controle da polia secundária, que tem como função principal garantir pressão suficiente na correia para transmissão de torque, foi baseada no modelo apresentando por [Julio e Plante \(2011\)](#), conforme ilustrado na figura 3.13.

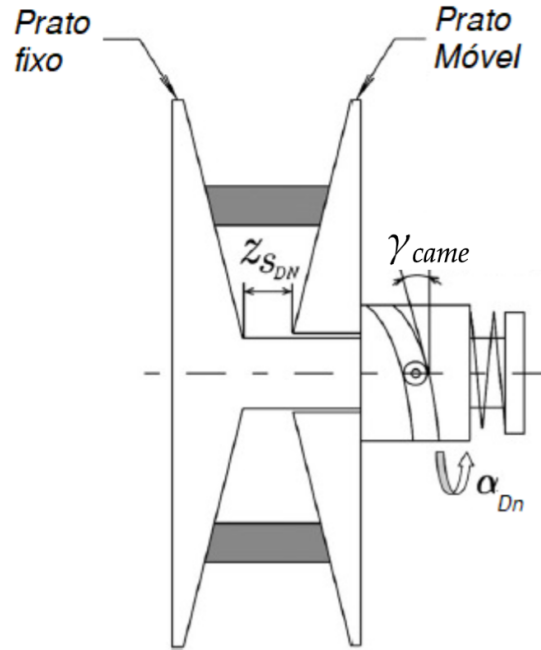


Figura 3.13 – Mecanismo de controle da polia secundária ([JULIO; PLANTE, 2011](#)) modificado.

O mecanismo é composto pela mola de torção e came. Logo, a força axial aplicada a polia secundária  $F_{z_{Dn}}$ , é equacionado em função dos parâmetros de rigidez e pré-carga da mola e ângulo de came, como:

$$F_{Z_{Dn}} = F_{0_{Dn}} + k_{Dn} \cdot Z_{Dn} + F_{came} \quad (3.57)$$

onde  $F_{0_{Dn}}$  a pré-carga da mola,  $k_{Dn}$  a rigidez axial da mola,  $Z_{Dn}$  o deslocamento axial da polia secundária, e  $F_{came}$  a força axial desenvolvida no came, sendo  $F_{came}$  é dado por:

$$F_{cam} = \frac{\frac{\tau_{Dn}}{2} + \tau_{\alpha_{Dn}}}{r_{came} \cdot \tan \gamma_{came}} \quad (3.58)$$

$$\tau_{\alpha_{Dn}} = k_{\alpha_{Dn}} \cdot \alpha_{Dn} \quad (3.59)$$

em que  $\tau_{Dn}$  o torque transmitido no eixo da polia secundária,  $r_{came}$  o raio do came,  $\gamma_{cam}$  o ângulo da rampa do came,  $\tau_{\alpha_{Dn}}$  o torque gerado pela torção da mola,  $k_{\alpha_{Dn}}$  a rigidez torcional da mola e  $\alpha_{Dn}$  o ângulo de torção da mola.

Dessa forma, obtém-se uma expressão que relaciona a força axial gerada com os parâmetros de controle do mecanismo.

### 3.3 Análise cinemática do mecanismo da CVT Comet 780

Com o intuito de relacionar as relações geométricas dos parâmetros da CVT Comet 780 com os modelos de mecanismo de controle apresentados e equacionados, foi realizado um CAD das polias para análise do movimento de trabalho dos mecanismos durante a variação da relação de transmissão. As relações geométricas apresentadas nessa seção, são entradas para o algoritmo desenvolvido.

#### 3.3.1 Polia primária

Para a polia primária, o desenho CAD foi realizado a partir da medição dos componentes, com simplificações dos elementos que não interferiam na análise de movimento, conforme figura 3.14.

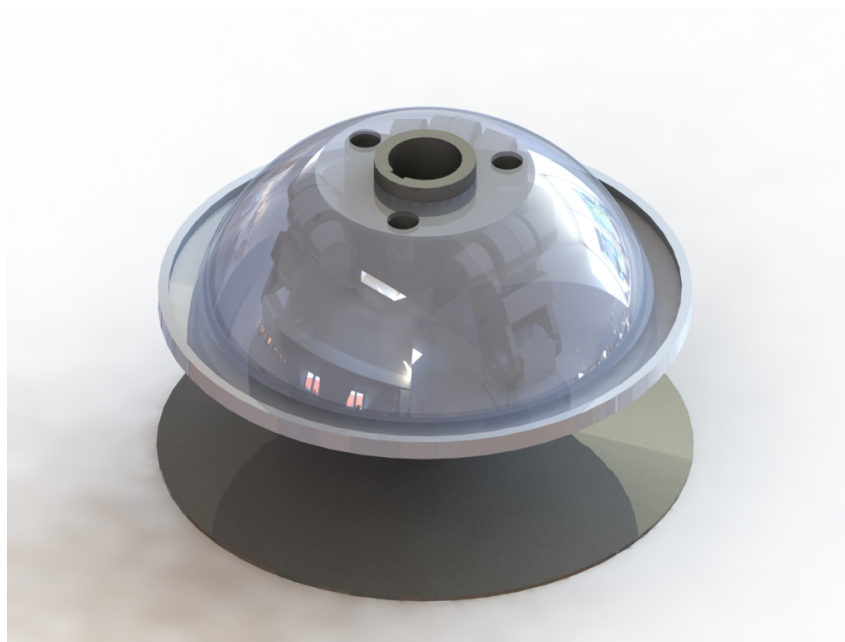


Figura 3.14 – CAD desenvolvido da polia primária Comet 780.

A partir disso, fez-se uma análise cinemática durante o regime de trabalho do mecanismo relacionando o deslocamento axial do prato móvel em função do ângulo de rotação do rolete,  $\theta_{fly}$ , em torno do seu ponto de pivotamento. A figura 3.15 mostra os dois limites da faixa de trabalho da polia motora, sendo 3.15a a posição em repouso, que os pratos estão o mais afastados possíveis, e 3.15b a posição em que o sistema tem sua redução mínima.

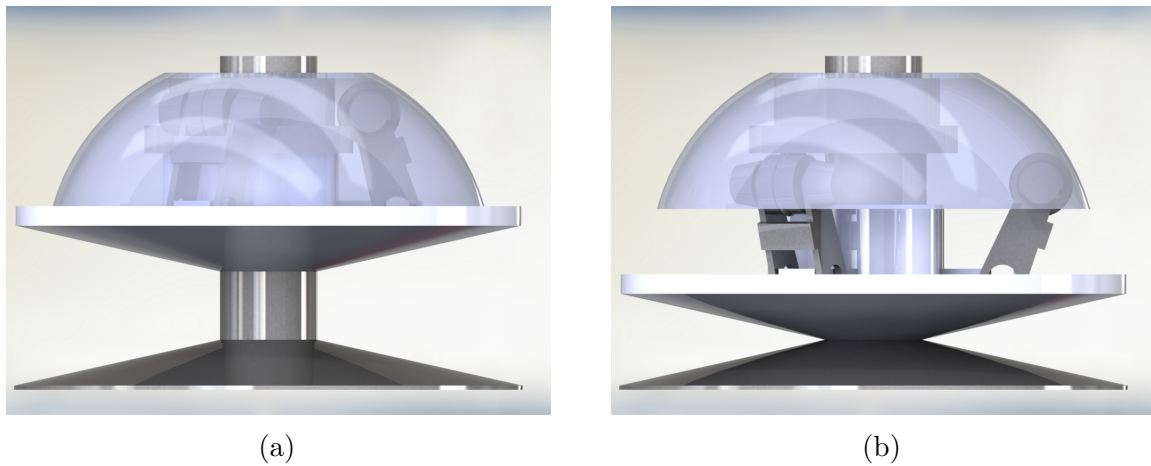


Figura 3.15 – Limites de trabalho da polia primária:(a) Posição inicial; (b) Posição máxima.

Com isso, é possível determinar a dependência do deslocamento axial do prato móvel em função ângulo de rotação do rolete. A figura 3.16 mostra o gráfico e a expressão que relaciona as duas variáveis analisadas. A angulação do rolete é dado em relação ao eixo horizontal da figura 3.15, com ângulo positivo no sentido anti-horário de rotação, e a posição axial zero quando os pratos estão na sua condição inicial.

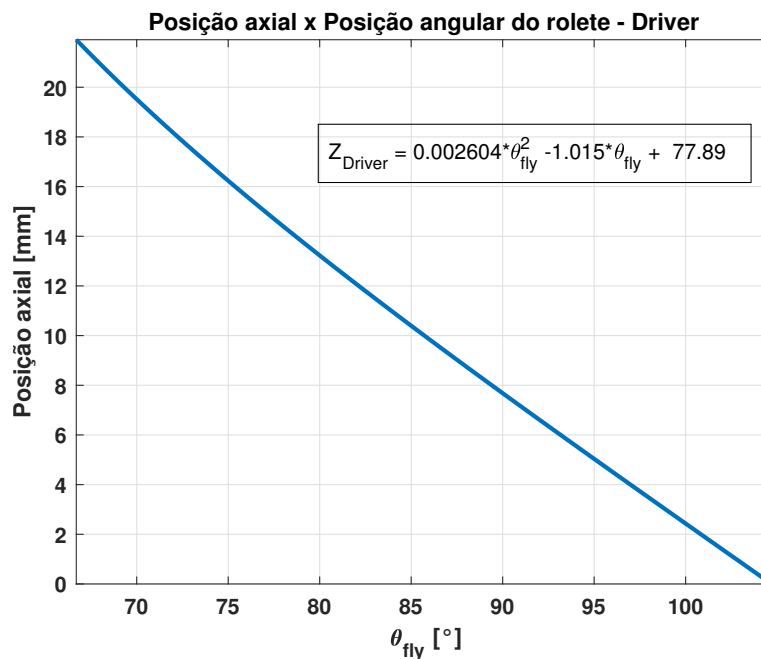


Figura 3.16 – Deslocamento da polia móvel em função da angulação do rolete.

Para a determinação do ângulo de contato entre o rolete e o came de avanço, fez-se uma análise no esboço do plano central da polia primária. A figura 3.17 ilustra o procedimento realizado e as variáveis analisadas, sendo  $\theta_{fly}$  o ângulo de rotação do rolete,  $z$  o deslocamento axial do prato móvel e  $\beta$  o ângulo de contato.

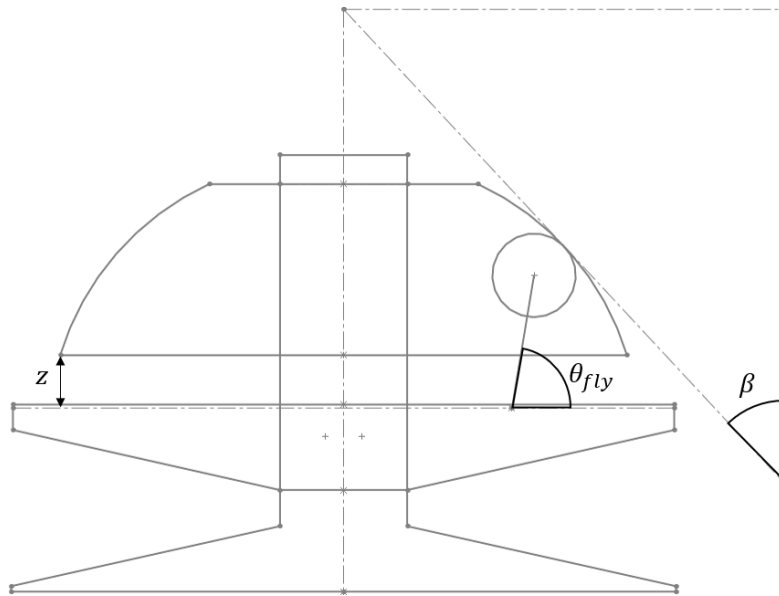


Figura 3.17 – Esboço plano médio da polia primária com as variáveis de análise.

A partir da rotação do rolete, mediu-se o deslocamento axial e o seu respectivo ângulo de contato, e assim plotou-se o gráfico e a equação da figura 3.18, que relaciona essas variáveis.

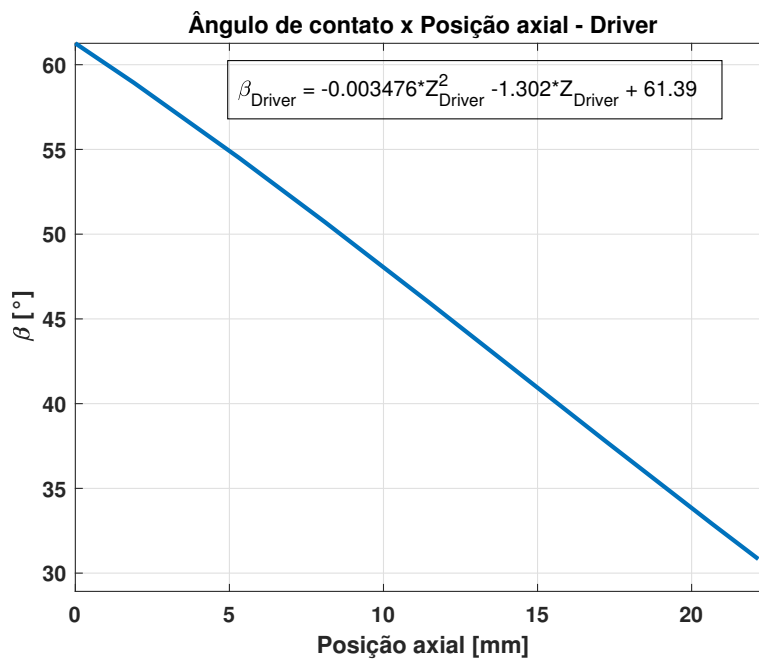


Figura 3.18 – Ângulo de contato em função do deslocamento axial.

### 3.3.2 Polia secundária

O mesmo processo de desenho realizado para a polia primária também foi feita para a polia secundária, vide figura 3.19.

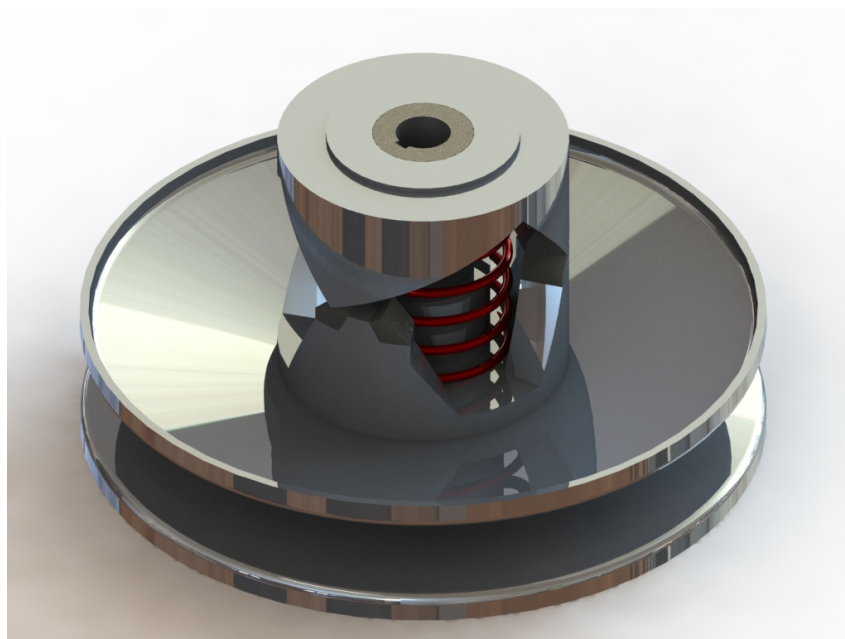
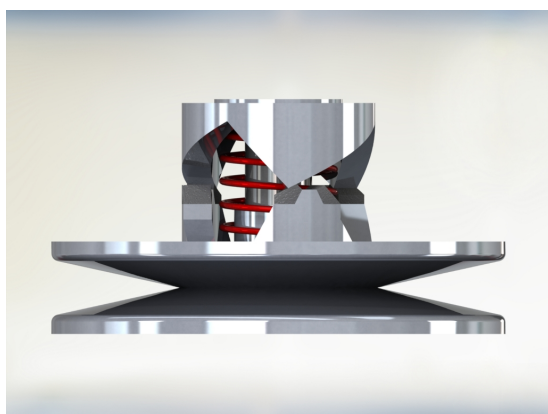
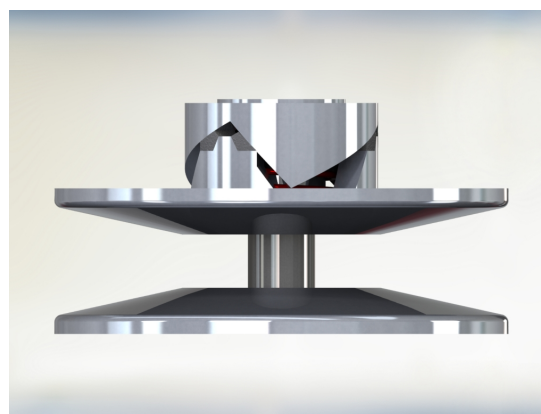


Figura 3.19 – CAD desenvolvido da polia secundária Comet 780.

Durante o regime de trabalho do mecanismo da polia movida, conforme a correia pressiona as paredes da polia, o prato móvel tem a liberdade de deslizar sobre os cames, rotacionando em torno do eixo e assim aumentando a distância entre os pratos. A figura 3.20 mostra os dois limites da faixa de trabalho da polia secundária, sendo 3.20a a posição inicial do mecanismo e 3.20b a condição dos pratos o mais distantes possíveis com a mola totalmente comprimida.



(a)



(b)

Figura 3.20 – Limites de trabalho polia secundária:(a) Posição inicial; (b) Posição máxima.

Com isso, realizou-se a análise cinemática do mecanismo relacionando o ângulo de torção da mola e o afastamento entre os pratos, figura 3.21. No gráfico, o ponto zero é relativo a posição inicial da faixa de trabalho.

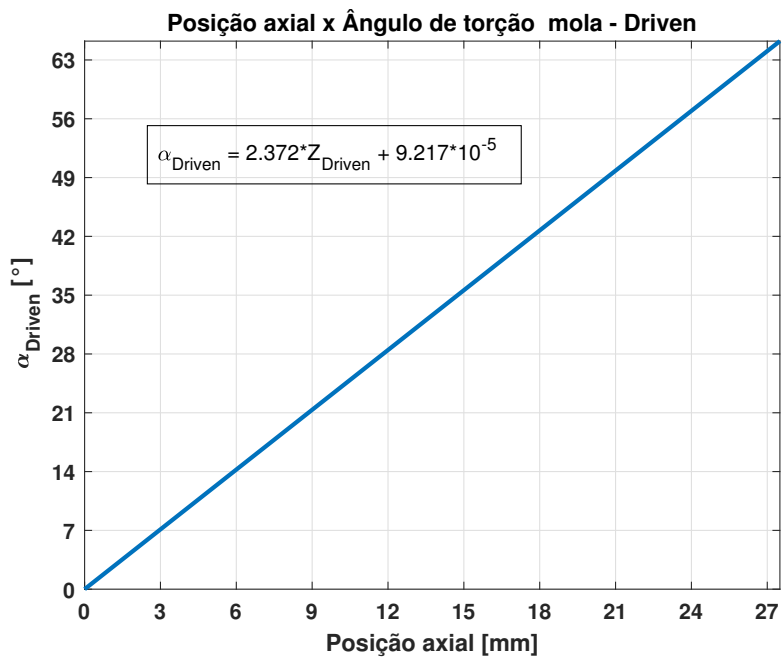


Figura 3.21 – Deslocamento da polia móvel em função do ângulo de torção do came.



## 4 Simulações numéricas

Esta seção tem o intuito de apresentar e analisar os resultados retirados do algoritmo desenvolvido para obtenção do comportamento da correia e do mecanismo de controle da CVT. Para isso, o capítulo é dividido em três partes: comparação e validação do modelo com os trabalhos de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) e [Ide et al. \(2001\)](#), simulação com aplicação de força axial constante, e simulação com força axial variável com atuação do mecanismo de controle.

### 4.1 Comparação e validação do modelo

Com o propósito de realizar uma comparação e validação dos resultados obtidos pelo modelo desenvolvido com outros trabalhos, fez-se uma análise dos resultados de tração na correia, força radial devido a compressão e força de atrito com os resultados numéricos de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) e experimentais [Ide et al. \(2001\)](#).

O trabalho de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) se concentra no desenvolvimento de modelos discretizados de correia, para estudar a influência da fricção no comportamento dinâmico de uma transmissão CVT de correia metálica. Ao longo do estudo os autores apresentam resultados de força trativa, força de compressão normal e força de atrito para os elementos nodais, e serão comparadas nessa seção.

Por outro lado, o trabalho de [Ide et al. \(2001\)](#) é focado na medição experimental do perfil de força de compressão que a polia aplica sobre a correia, a partir de técnicas de medição por sensor ultrassônico. Dessa forma, será comparado a curva de força de compressão obtida pelo algoritmo desenvolvido com os resultados aferidos por [Ide et al. \(2001\)](#).

As comparações têm caráter apenas qualitativo, pois nem todas as entradas dos trabalhos utilizados como referência são fornecidas, por possuir diferentes mecanismo de controle e material de correia. Portanto, as simulações foram realizadas utilizando apenas a mesma relação de transmissão dos trabalhos, que é o parâmetro fornecido. Os dados de entrada para o algoritmo se encontram no apêndice [A.1](#).

A figura [4.1](#) ilustra a primeira curva a ser comparada, de força de tração na correia  $T_{i+1}$  desenvolvida em um nó ao longo do tempo da simulação. No gráfico é possível

observar uma variação periódica da tração no nó, decorrente da passagem do nó pelo ramo tensionado da correia, nos patamares superiores, e ramo frouxo, nos níveis inferiores.

Além disso, na figura 4.1, percebe-se diferenças de tração entre o ramo tenso e frouxo mais significativas na região inicial da curva, decorrentes da aceleração do sistema. Após o período transiente, o movimento entra em regime permanente, em que as velocidade angulares das polias primária e secundária estão próximas, estabilizando as trações.

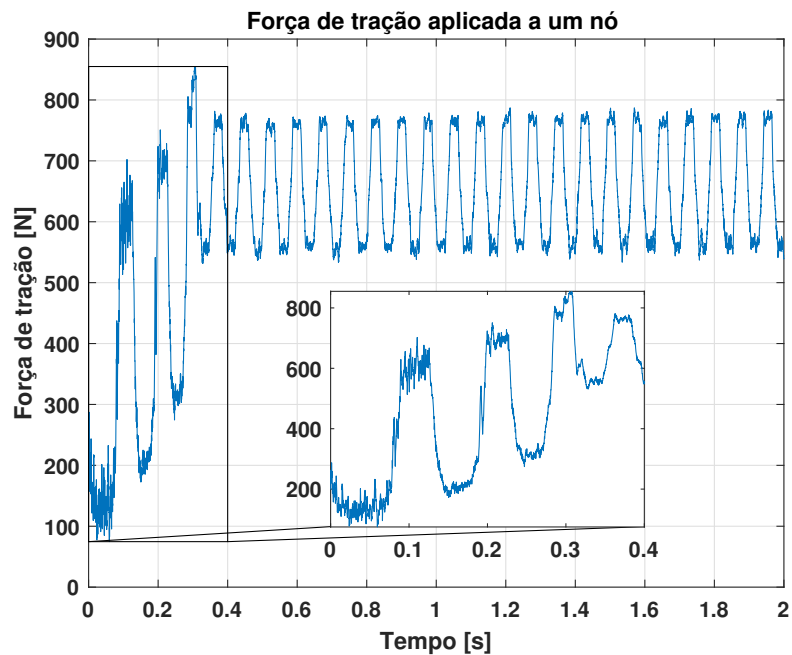


Figura 4.1 – Força de tração aplicada a um nó ao longo do tempo no modelo implementado.

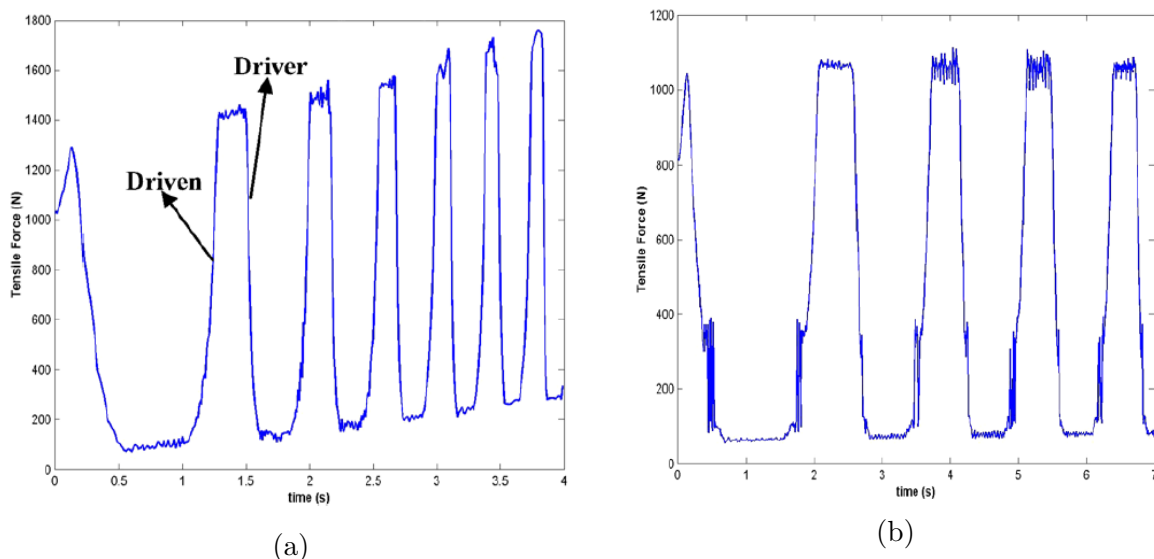


Figura 4.2 – Força de tração aplicada a um nó ao longo do tempo encontrado em [Srivastava e Haque \(2008\)](#):(a) Regime transiente; (b) Regime permanente.

Comparando com os resultados de força trativa de [Srivastava e Haque \(2008\)](#), em que a figura 4.2a ilustra a simulação para altas magnitudes de aceleração e 4.2b para

regime permanente, é possível ver que os perfis são muito próximos aos da figura 4.1. Durante o regime transiente, a força trativa de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) aumenta com o tempo devido a aceleração das polias primária e secundária. Quando o sistema está estabilizado, com velocidades angulares constantes, os perfis das forças de tração seguem uma tendência de patamares de tração estáveis.

Para a análise da força de compressão normal  $\vec{F}_n$ , ilustrados na figura 4.3, onde 4.3a são as forças retiradas do modelo implementado e 4.3b os de [Srivastava e Haque \(2008\)](#), observa-se que os comportamentos são próximos. Como a compressão é aplicada pelas polias à correia, as forças de compressão existem apenas nas regiões em que os nós se encontram em contato com as polias. Além disso, os picos de força localizam-se na entrada da polia primária e na saída da polia secundária, procedentes da maior zona de adesão dos nós com a polia na região do ramo tensão da correia, de forma a concentrar mais nós na zona efetiva de compressão.

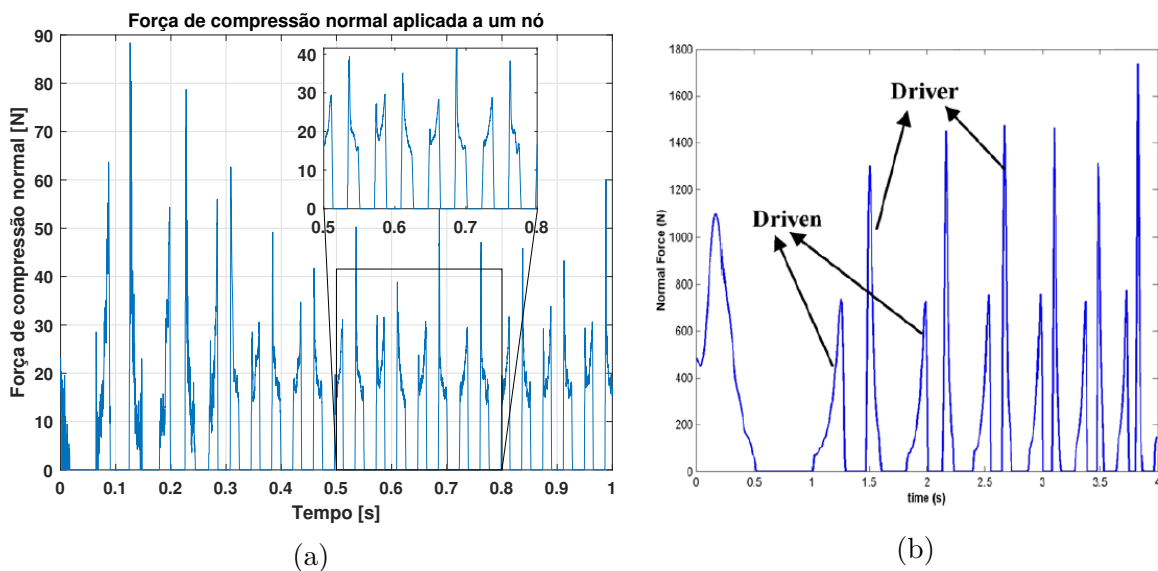
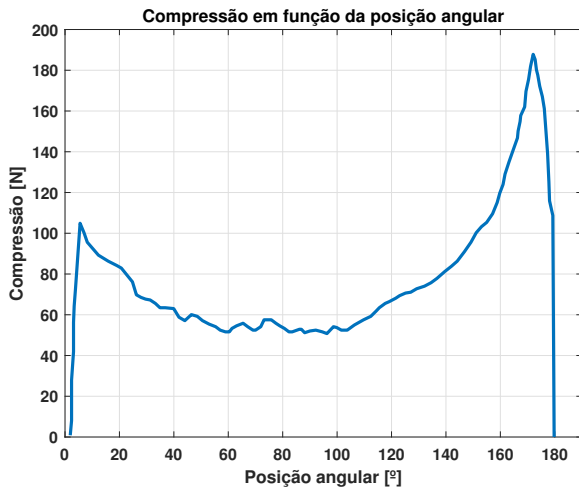
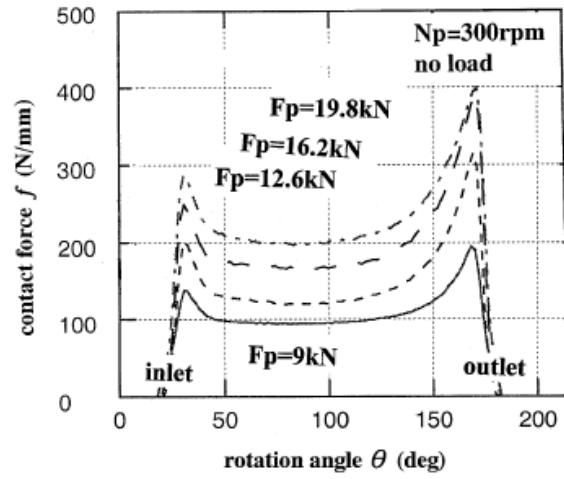


Figura 4.3 – Força de compressão normal aplicada a um nó ao longo do tempo: (a) Resultado obtido com o modelo implementado; (b) Resultado encontrado por [Srivastava e Haque \(2008\)](#).

A figura 4.4 compara a força de compressão normal ao longo do arco de contato da correia com a polia primária, do modelo implementado com o trabalho experimental de [Ide et al. \(2001\)](#). Os resultados obtidos com o algoritmo desenvolvido, figura 4.4a, demonstram perfis de compressão para um nó semelhantes aos apresentados por [Ide et al. \(2001\)](#), figura 4.4b. Observa-se picos de força análogos na entrada e na saída da polia, sendo os picos maiores próximos a  $180^\circ$ , que previne que o elemento de correia não seja expulso da polia com a força radial imposta pela aceleração centrífuga.



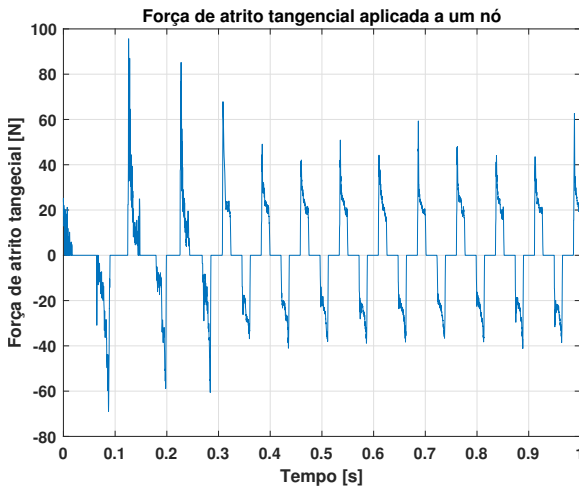
(a)



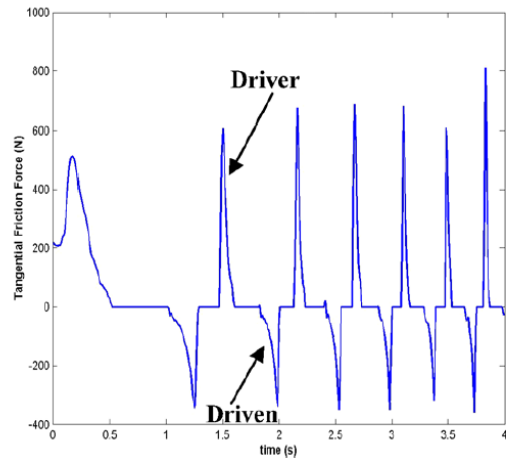
(b)

Figura 4.4 – Compressão aplicada a correia ao longo do arco de contato com a polia primária: (a) Resultados obtidos com o modelo implementado; (b) Resultado experimental encontrado por Ide et al. (2001).

Por fim, a figura 4.5 compara as curvas de força de atrito tangencial do algoritmo desenvolvido e do trabalho de Srivastava e Haque (2008). Os perfis de atrito são semelhantes, e seguem o comportamento apresentado pela força de compressão, em que os valores positivos de atrito se localizam na polia primária e negativos na polia secundária.



(a)



(b)

Figura 4.5 – Força de atrito aplicada a um nó ao longo do tempo: (a) Resultado obtido com o modelo desenvolvido; (b) Resultado encontrado por Srivastava e Haque (2008).

## 4.2 Simulação com força axial constante sem a atuação do mecanismo de controle

Após a comparação do modelo com a literatura, demonstrando que o algoritmo é capaz de representar valores coerentes de comportamento da correia, fez-se a análise dos resultados cinemáticos e dinâmicos do modelo. Para isso, dividiu-se a análise para duas condições: para força axial constante, com intuito de analisar o comportamento do modelo de correia sem a atuação dos mecanismos de controle, e com força axial variável com a inserção das equações de força axial dos mecanismos de controle mecânico, acoplando os dois modelos.

A simulação de força axial constante foi realizada partindo da condição de um sistema com razão de transmissão de 1:1, a fim de verificar a consistência da modelagem da correia, desconsiderando então o mecanismo de controle. Além disso, considerou-se uma velocidade angular fixa para a polia primária, velocidade angular inicial menor para a polia secundária, e torque resistivo constante. A tabela A.2 no apêndice lista os parâmetros de entrada utilizados para essa simulação.

A figura 4.6 ilustra a condição inicial de discretização da correia, em que é possível identificar a posição inicial dos nós, os círculos que definem regiões de diâmetros externos máximos das polias e as restrições de contato dadas pela impenetrabilidade dos eixos.

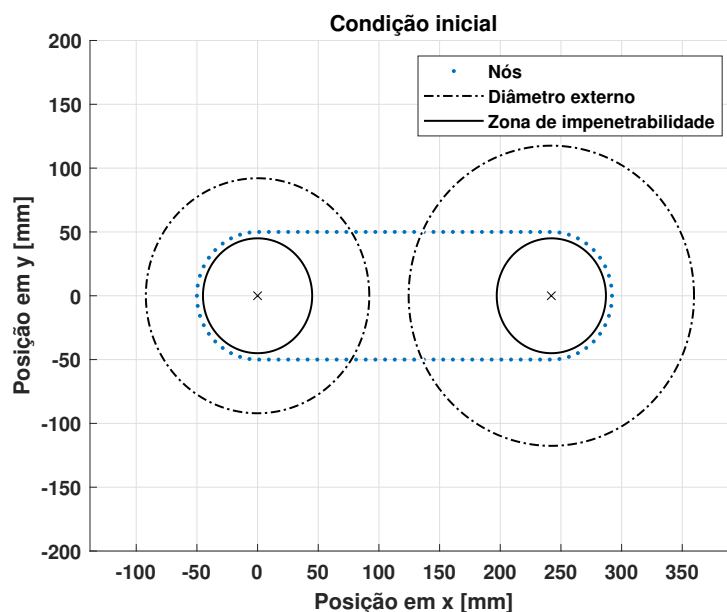


Figura 4.6 – Condição inicial dos nós para simulação com força axial constante.

### 4.2.1 Análise de posição, velocidade, velocidade angular e torque

A partir da análise da posição e velocidade no tempo de um nó, figuras 4.7 e 4.8 respectivamente, é possível verificar o movimento periódico do nó ao longo do tempo, dado

pelos ciclos de rotação da correia. As pequenas oscilações na direção  $y$  da figura 4.7, nos níveis de  $-50$  e  $50$  mm, correspondem as regiões onde o nó transita pelos ramos frouxo e tenso da correia e ficam mais suscetíveis à vibrações, decorrente do ganho de velocidade nesses instantes, mostradas no gráfico das velocidades da figura 4.8.

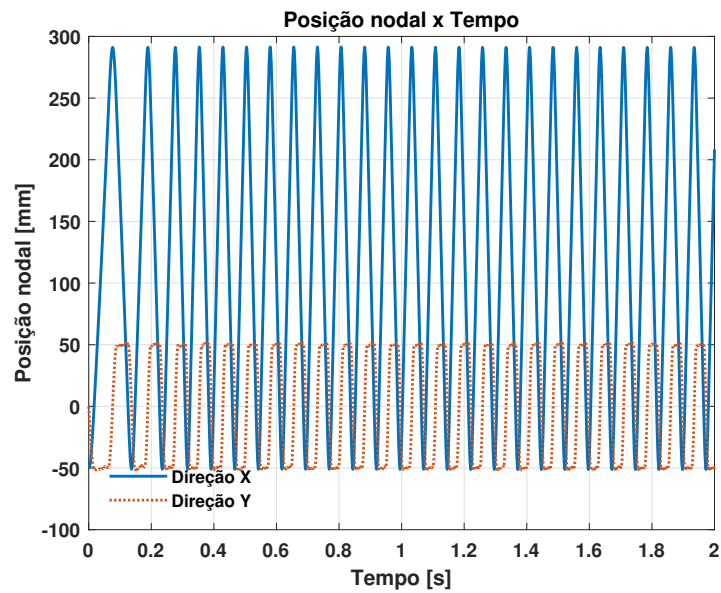


Figura 4.7 – Posição de um nó ao longo do tempo nas direções  $x$  e  $y$  para simulação com força axial constante.

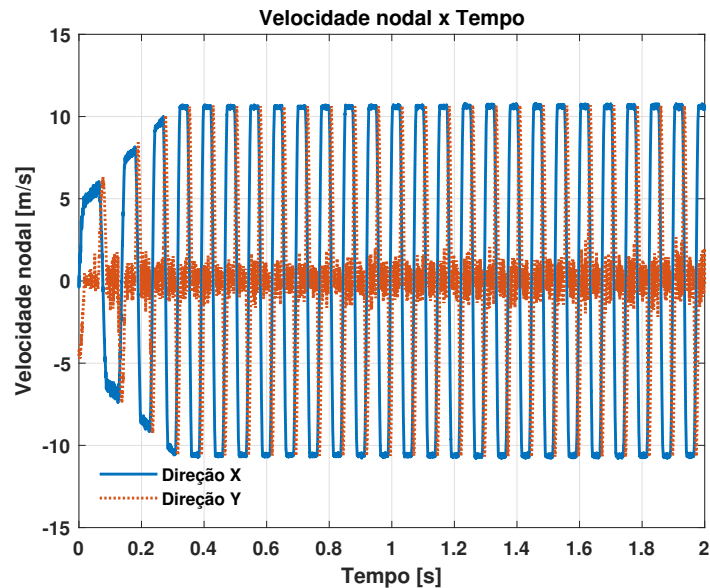


Figura 4.8 – Velocidade de um nó ao longo do tempo nas direções  $x$  e  $y$  para simulação com força axial constante.

Observa-se ainda na figura 4.8, que entre os instantes 0 a 0,3 segundos, a velocidade nodal aumenta até uma estabilização. Isso se deve pelo aumento da velocidade angular da polia secundária, que durante a região transiente acelera até se estabilizar numa velocidade próxima a velocidade angular fixa estabelecida para a polia primária, conforme ilustrado na figura 4.9.

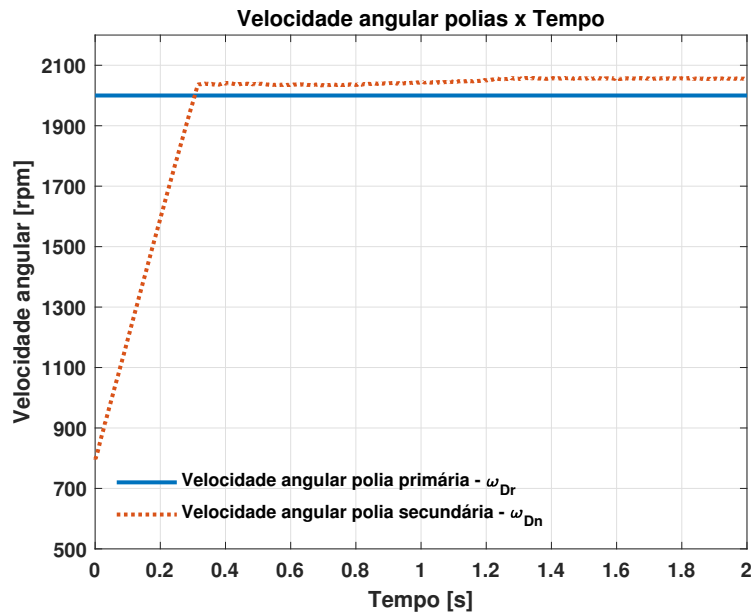


Figura 4.9 – Velocidade angular das polias para simulação com força axial constante.

A velocidade estabilização da polia movida não é idêntica a da polia motora, indicando que a relação de transmissão efetiva é diferente de 1:1. Como a polia primária inicia a simulação com uma velocidade angular maior, a força centrífuga nessa polia induz uma tendência de expulsar a correia, aumentando seu diâmetro efetivo e assim diminuindo o diâmetro na polia secundária. Essa variação na relação de transmissão geométrica é confirmada pela figura 4.10, que ilustra as curvas de relação de transmissão, dado pela razão entre as velocidades das polias, e relação geométrica, referente a razão dos raios efetivos. Apesar disso, a velocidade angular da polia movida apresenta uma estabilidade quando a relação de transmissão se aproxima à relação geométrica, seguindo o comportamento da polia motora.

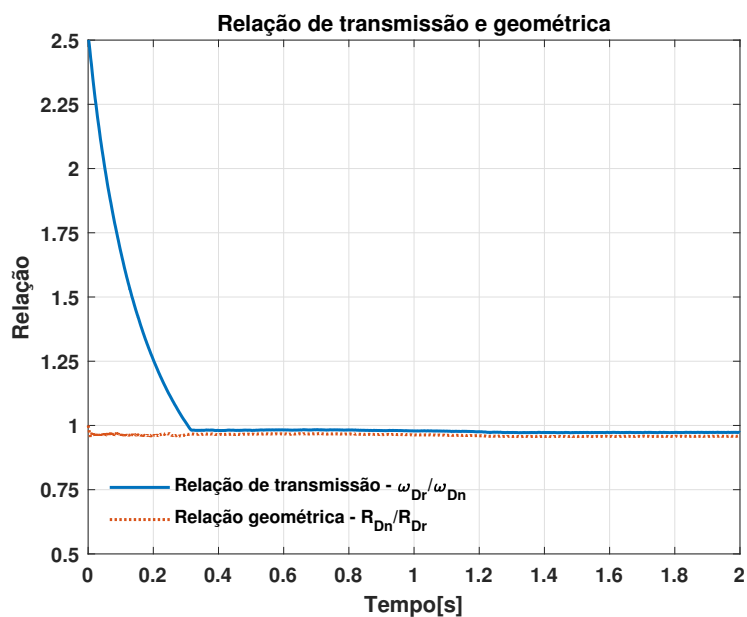


Figura 4.10 – Comparação entre relação de transmissão e relação geométrica para simulação com força axial constante.

As figuras 4.11 e 4.12 ilustram as curvas de torque geradas pela força de atrito na polia primária e na secundária. Devido a discretização da correia e o modelo de atrito aplicado, existe a possibilidade de nós subsequentes estarem em regimes de atrito diferentes no mesmo instante, gerando flutuações nos valores de torque. Como não há amortecimento implementado ao modelo que possivelmente existiria em testes experimental, as curvas mostraram-se com ruído elevado. Por isso, optou-se por realizar um tratamento dos dados por aproximação em média móvel, para analisar a tendência dos comportamentos ao longo do tempo e filtrar ruídos no sinal.

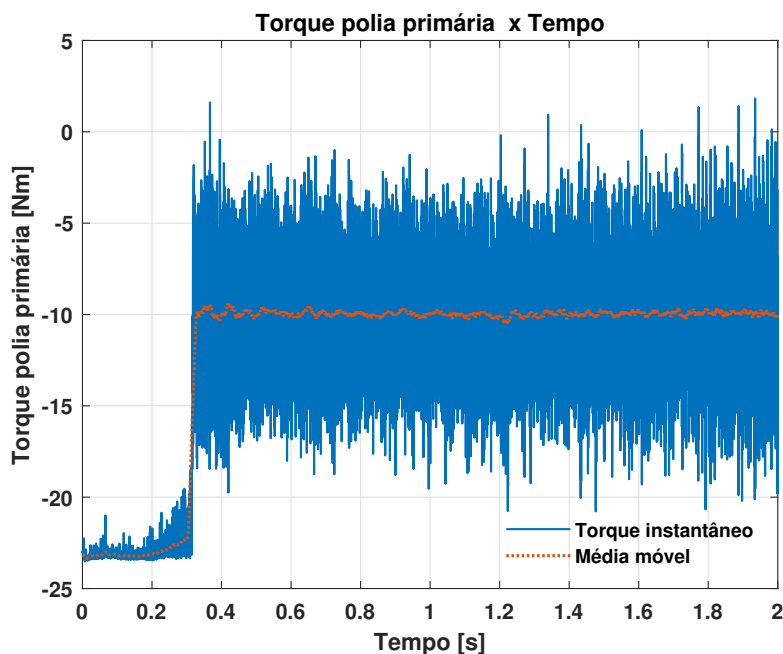


Figura 4.11 – Torque gerado pelo atrito na polia primária ao longo do tempo para simulação com força axial constante.

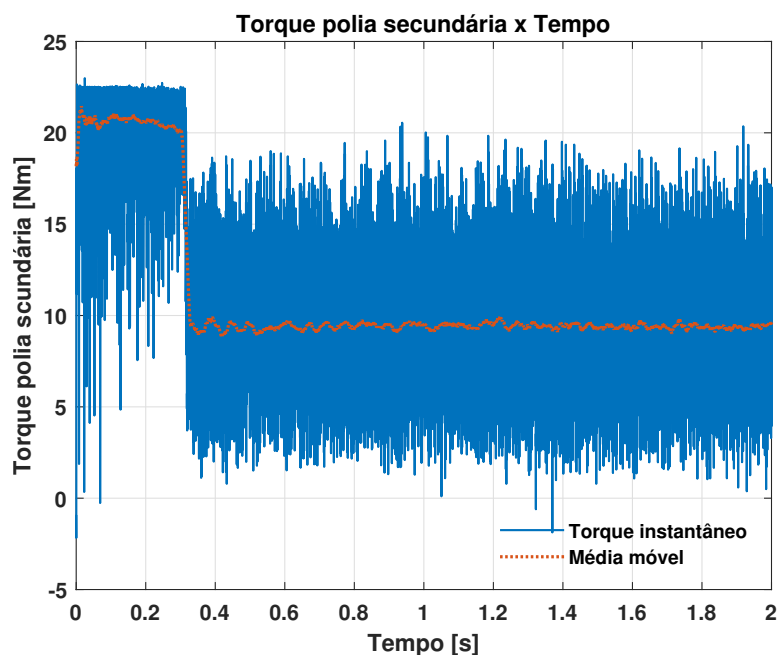


Figura 4.12 – Torque gerado pelo atrito na polia secundária ao longo do tempo para simulação com força axial constante.



Pelos gráficos, é possível perceber duas regiões distintas de torque, uma durante a região transiente, com valores próximas à  $20 \text{ Nm}$ , que corresponde ao torque gerado pela força axial aplicada às polias, e outra na região permanente, com valores próximas à  $10 \text{ Nm}$ , semelhante ao torque resistivo imposto.

Como a velocidade angular da polia primária é superior ao da polia secundária no regime transiente, verifica-se uma velocidade relativa elevada nessa região entre os nós e as polias, como ilustrado na figura 4.13. Essa condição orienta a força de atrito na direção tangencial ao movimento, aumentando a transmissão de torque e induzindo uma aceleração da correia e da polia secundária.

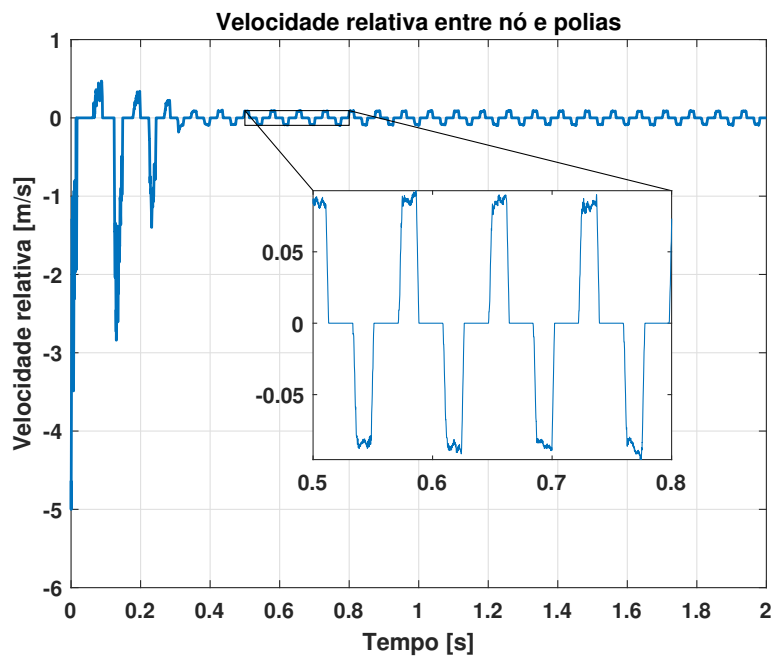


Figura 4.13 – Velocidade relativa entre nó e polias ao longo do tempo para simulação com força axial constante.

Após 0,3 segundos, em que há a estabilização da velocidade angular da polia secundária, a velocidade relativa decai a níveis próximos ao valor de velocidade relativa mínima pré-determinada na entrada do algoritmo. Dessa forma, o modelo entra em equilíbrio dinâmico, e o torque de atrito se reduz ao valor do torque resistivo aplicado de  $10 \text{ Nm}$ .

Observa-se que as curvas de torque possuem sinais contrários. Devido ao torque gerado pelo atrito na polia primária ser contrário ao movimento imposto pelo motor, esse torque é resistivo. Por sua vez, o torque gerado pelo atrito na polia secundária é um atrito motor, responsável por induzir o movimento da polia movida.

#### 4.2.2 Análise de Sensibilidade

Dado o caráter não-linear do modelo de correia e as descontinuidades do modelo de atrito utilizado, os resultados tem grande dependência dos parâmetros de entrada

escolhidos. Por isso, fez-se uma análise de sensibilidade do modelo para a quantidade de nós na discretização da correia e velocidade relativa mínima, para analisar as suas influências.

### Número de nós ( $n$ )

Para o número de nós, a análise de sensibilidade foi realizada com discretizações de 30, 50, 100, 150 e 200 nós, analisando a sua influência nas curvas de velocidade angular da polia secundária, torque gerado pelo atrito e tempo computacional.

Para a velocidade da polia secundária, figura 4.14, observa-se que a partir de 50 nós, há uma diminuição significativa nas oscilações das curvas. No entanto, não há uma convergência para uma velocidade angular com o aumento da discretização. Com 150 nós, a polia secundária estabiliza na mesma velocidade angular da polia primária, para 100 nós, se estabiliza numa velocidade maior, e com 200 nós, tem um comportamento de decréscimo da velocidade angular para valores abaixo de 2000 *rpm*.

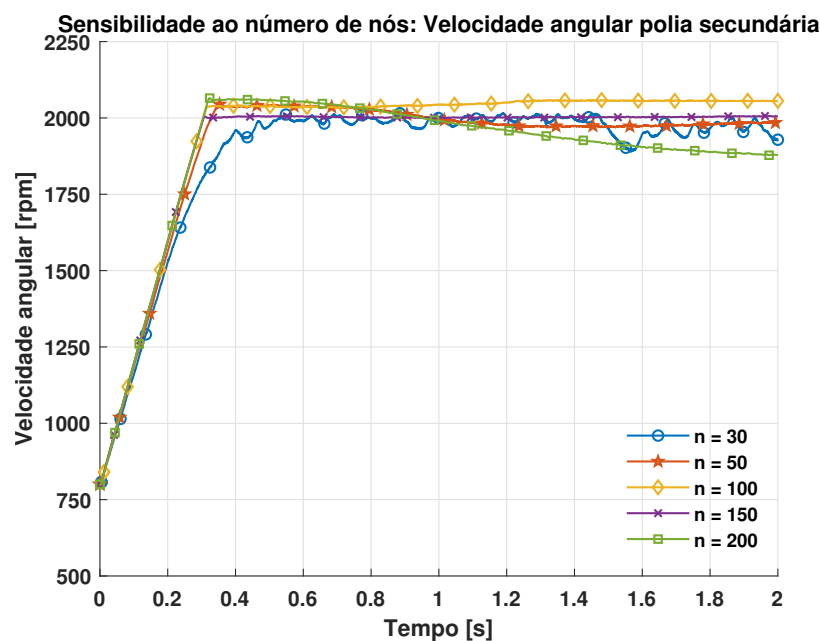


Figura 4.14 – Análise de sensibilidade para a velocidade angular da polia secundária em relação ao número de nós em simulação com força axial constante.

Essa variação de velocidade angular é influenciada pela alteração da relação de transmissão geométrica efetiva ao longo do tempo, ilustrada na figura 4.15, em que se observa uma flutuação das curvas em torno a razão geométrica inicial de 1:1. Este efeito se deve as forças de contato que são gerados na interação entre nós com a condição de impenetrabilidade com os eixos. Como essa força de contato não está precisamente refinada, com o aumento do número de nós, mais nós tendem a se chocar com os eixos, acarretando em perturbações na posição dos nós, gerando assim instabilidades no sistema.

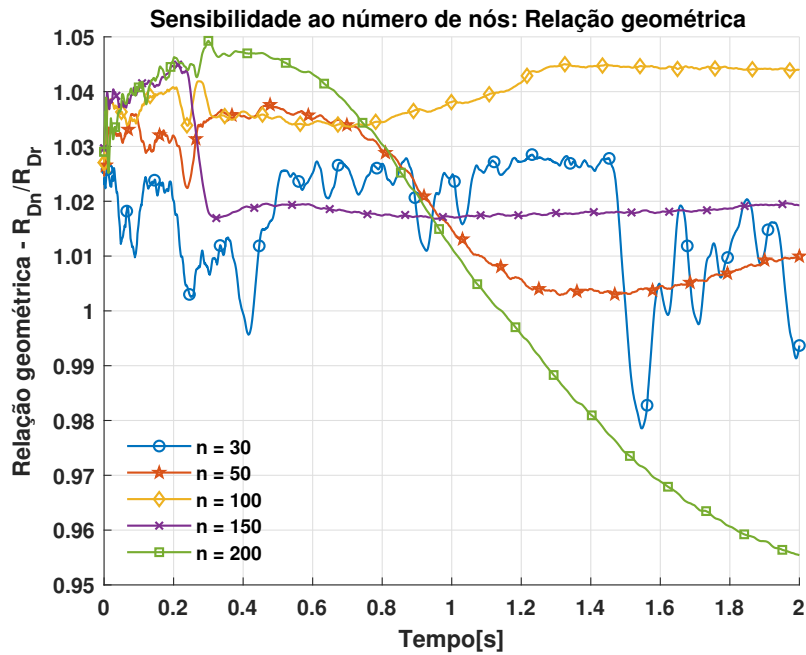


Figura 4.15 – Análise de sensibilidade da relação de transmissão geométrica em relação ao de nós em simulação com força axial constante.

A figura 4.16 apresenta as curvas de torque gerado pelo atrito nas polias primária e secundária. Para 30 nós, verifica-se grandes oscilações nos dados, o que não é constatado nas outras discretizações. O menor número de nós torna mais evidente o efeito das discontinuidades do modelos de atrito, apresentando assim maiores oscilações. Já os diferentes níveis de torque no regime permanente para os 50, 100, 150 e 200 nós, são consequência das diferentes relações geométricas em cada discretização, como explicado na figura 4.15.

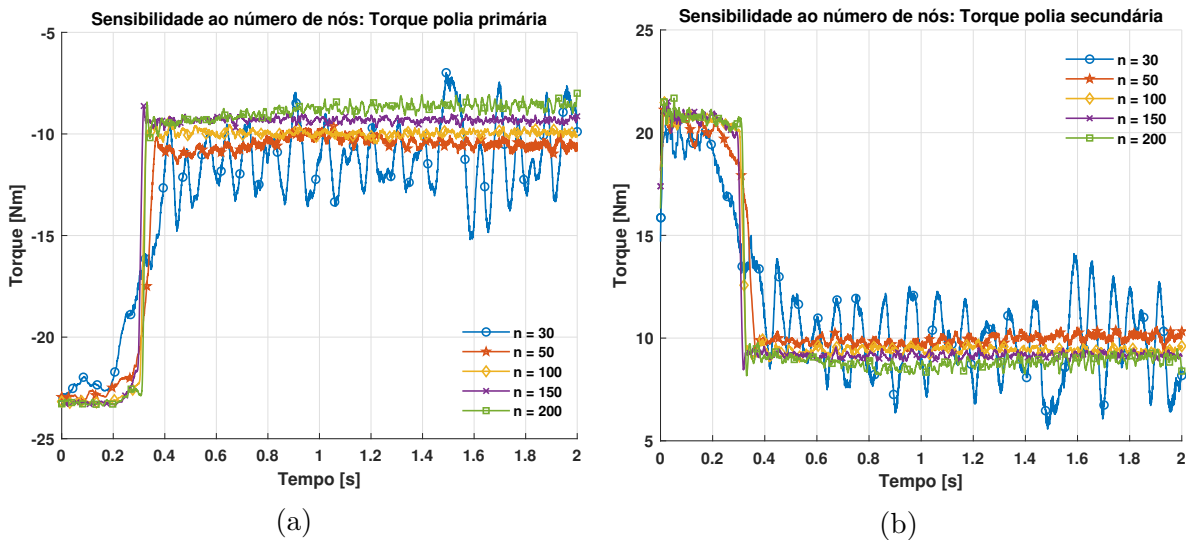


Figura 4.16 – Análise de sensibilidade de torque em relação ao de nós em simulação com força axial constante: (a) Torque na polia primária; (b) Torque na polia secundária.

A última análise realizada para o parâmetro de quantidade de nós foi o de custo

computacional necessário para realizar as simulações. Como observa-se na figura 4.17, o aumento do número de nós amplia significativamente o tempo de simulação, visto que maiores discretizações promovem mais equações a serem resolvidas.

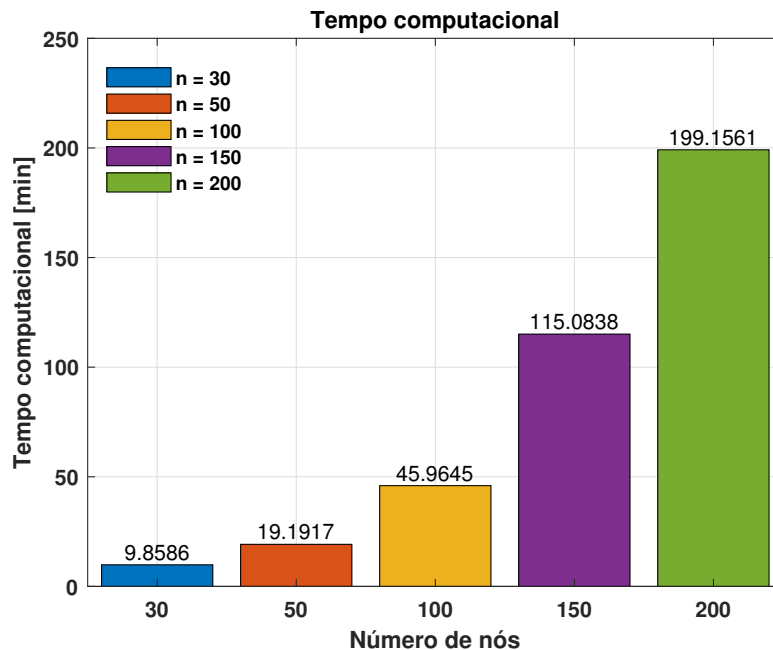


Figura 4.17 – Análise de tempo computacional em função do número de nós.

O tempo computacional foi aferido a partir de simulações realizadas em uma máquina com processador Intel Core i5-8250U com 4 núcleos operando a 1,8GHz, 8GB de memória RAM, placa de vídeo NVIDIA GeForce MX150, e armazenamento de 500GB em SSD.

#### *Velocidade relativa mínima ( $v_{rel_{min}}$ )*

O segundo parâmetro analisado foi o de velocidade relativa mínima  $v_{rel_{min}}$ , que rege a condição para mudança do regime de atrito de *sliding* para *stuck/breakaway*. Foram investigados os resultados de velocidade angular da polia secundária, eficiência de transmissão e torque das polias, para os valores de velocidade relativa mínima de 2, 1, 0,1 e 0,01  $m/s$ .

Pela figura 4.18, verifica-se que o valor da velocidade relativa mínima tem influência direta na velocidade de estabilização da polia secundária no regime permanente. Comparando os valores de 2, 1 e 0,1  $m/s$ , observa-se que o aumento da velocidade relativa mínima diminui a velocidade angular de estabilização. No entanto, esse comportamento não se estende para 0,01  $m/s$ , que apresenta uma queda após 0,3 s, seguida de uma estabilização da curva após 1,4 s em nível abaixo da curva de 0,1  $m/s$ .

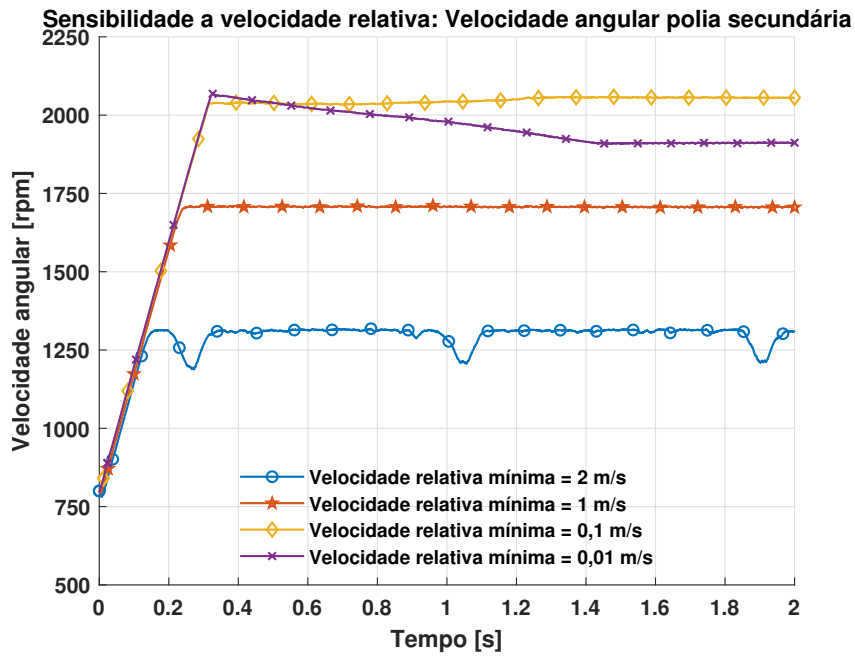


Figura 4.18 – Análise de sensibilidade para a velocidade angular da polia secundária em relação a velocidade relativa mínima em simulação com força axial constante.

Esse comportamento tem relação com a eficiência de transmissão  $\eta$  em cada velocidade relativa mínima, dado pela razão entre o produtos da velocidade angular e raio efetivo da polia primária e secundária:

$$\eta = \frac{\omega_{Dr} R_{Dr}}{\omega_{Dn} R_{Dn}} \quad (4.1)$$

em que  $\omega_{Dr}$  e  $\omega_{Dn}$  são as velocidade angulares e  $R_{Dr}$  e  $R_{Dn}$  os raios efetivos da polia primária e secundária, respectivamente.

Pela figura 4.19, que ilustra a análise de sensibilidade para a eficiência de transmissão, observa-se que para as velocidades de 2 e 1  $m/s$  a eficiência é mais baixa que para as outras velocidades, indicando que há mais deslizamento entre a polia secundária e a correia, e consequentemente transmitindo velocidades angulares menores para a polia movida. As variações abruptas nas curvas de 2  $m/s$  são decorrentes de choques dos nós com as condições de impenetrabilidade dos eixos.

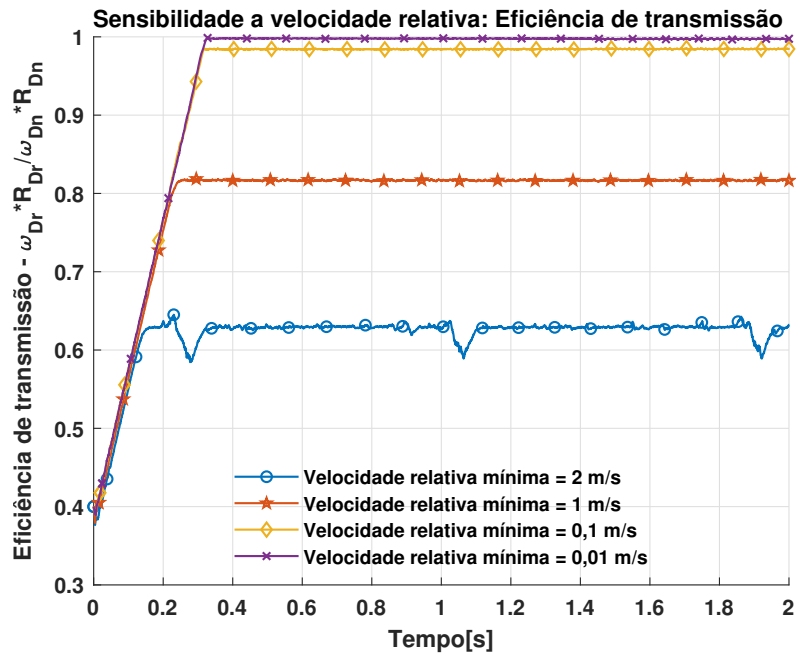


Figura 4.19 – Análise de sensibilidade para a eficiência de transmissão em relação a velocidade relativa mínima em simulação com força axial constante.

Para as velocidades relativas mínimas de 0,1 e 0,01  $m/s$ , o nível de deslizamento entre a correia e as polias diminuem, aumentando a eficiência de transmissão. No entanto, apesar de terem eficiências muito próximas, as velocidades angulares de estabilização são diferentes, como apresentado na figura 4.18. Acredita-se que com velocidades relativas mínimas excessivamente baixas, como 0,01  $m/s$ , a adesão entre os nós com a polia na zona de raio efetivo é tão elevada que os nós tendem a seguir a relação geométrica e conseqüentemente variando a velocidade da polia secundária.

Para as curvas de torque, figura 4.20, verifica-se que para 2  $m/s$  as curvas possuem grandes oscilações, motivado pelo alto nível de deslizamento da correia nessa velocidade. Para 1  $m/s$  e 0,1  $m/s$ , não há variações significativas nas curvas, e o torque se estabiliza próximo aos valores do torque resistivo aplicado. E para 0,01  $m/s$ , constata-se dois níveis de torque após 0,3  $s$ , oriundos da variação da relação de transmissão resultante da maior adesão dos nós com a polia nessa velocidade relativa.



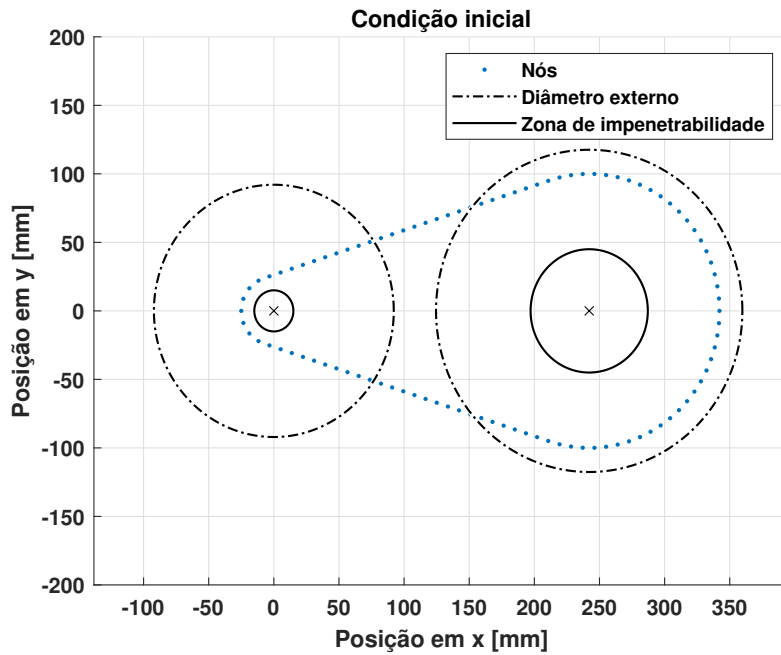


Figura 4.21 – Condição inicial dos nós para simulação com força axial variável.

O torque resistivo aplicado no sistema nessa simulação é variável e dependente da interação do carro com as forças resistivas de rolagem entre o pneu e solo e arrasto aerodinâmico. A figura 4.22 ilustra a curva de torque resistivo aplicada ao modelo em um processo de aceleração saindo do repouso até 100 metros, retirada da análise de dinâmica longitudinal do protótipo 2019 da equipe Piratas do Cerrado. O torque resistivo aumenta ao longo do tempo devido ao arrasto aerodinâmico que é dependente da velocidade, que aumenta durante o processo de aceleração.

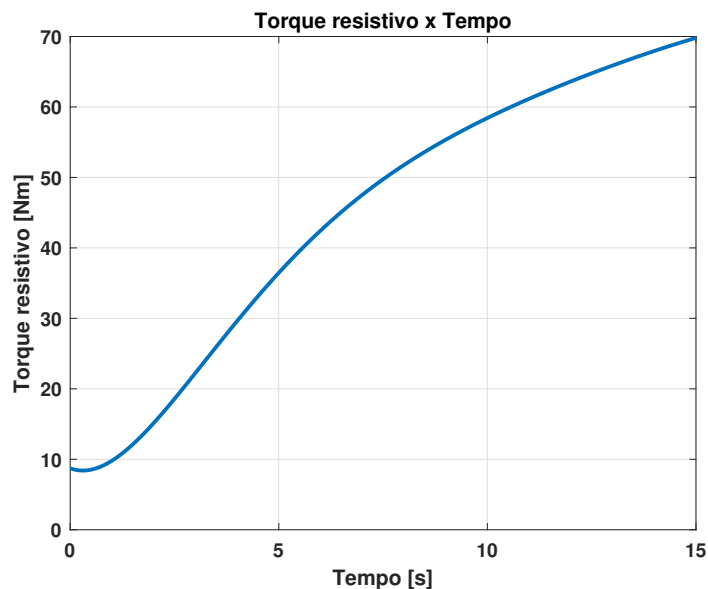


Figura 4.22 – Torque resistivo aplicado ao sistema com força axial variável.

A figura 4.23 exemplifica o comportamento cinemático da correia durante a mudança da relação de transmissão ao longo do tempo, devido a atuação do mecanismo de controle sobre o sistema.



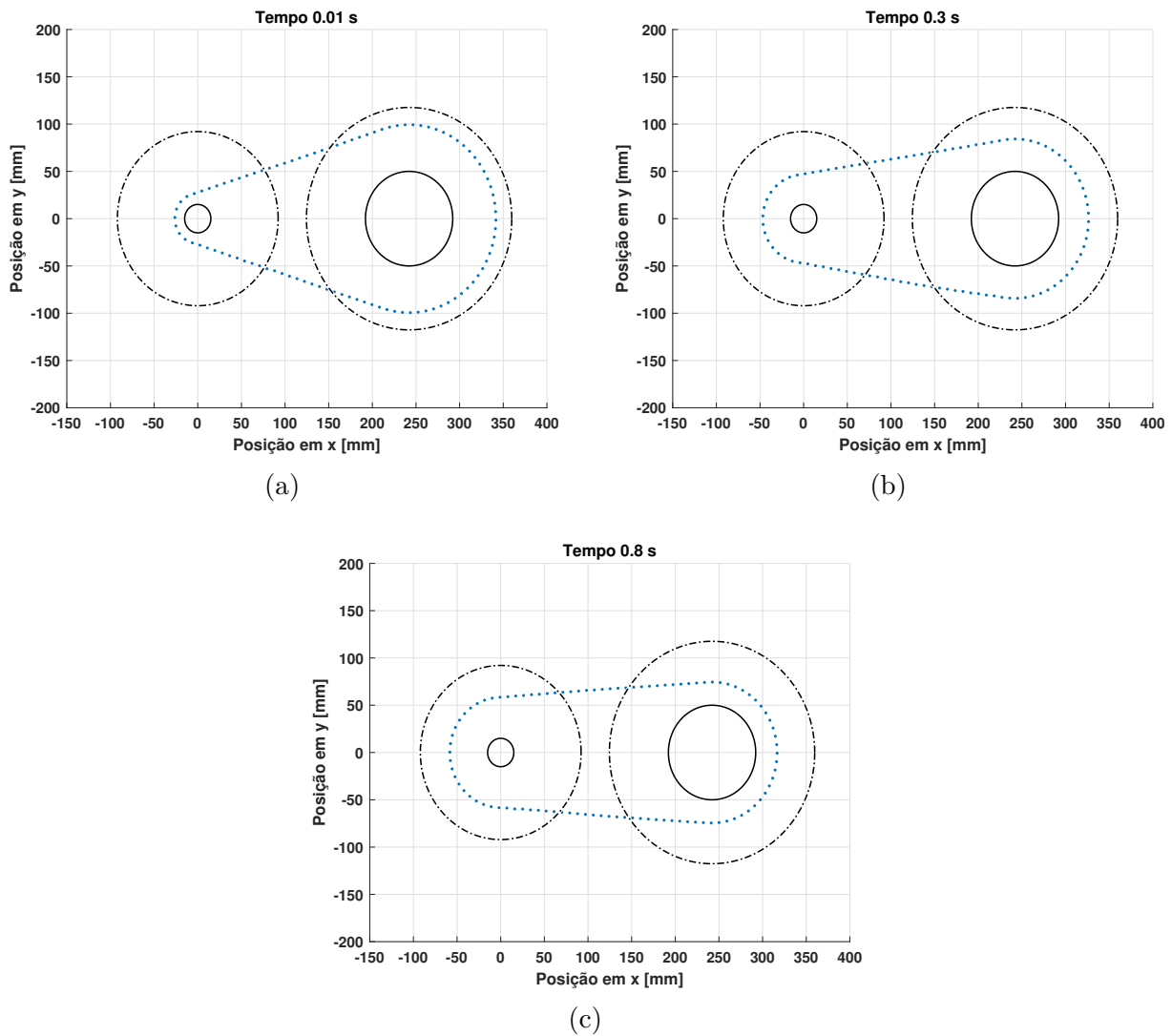


Figura 4.23 – Exemplificação da evolução do comportamento cinemática da correia ao longo do tempo: (a) Tempo 0,01 s; (b) Tempo 0,3 s; (c) Tempo 0,8 s.

### 4.3.1 Polia primária

#### *Massa dos roletes ( $m_{fly}$ )*

Dividiu-se a apresentação dos resultados da análise dos parâmetros de controle em duas partes, uma para os parâmetros da polia primária e outra para a secundária. Começando pela análise de sensibilidade da massa do rolete, observa-se que para 80 g a força axial gerada pela força centrífuga do rolete, figura 4.24a, não é alta o suficiente para induzir a variação de transmissão total do sistema, mantendo a relação de transmissão entre 4 e 3, figura 4.24b. Dessa forma, o torque transmitido se mantém praticamente constante, e conseqüentemente a força axial reativa ao torque gerado pelo atrito na polia secundária, figura 4.24d, também não apresenta grande variação.

Para a massa de 100 g, a força axial que os roletes aplicam sobre a polia primária são maiores, já que a uma mesma velocidade angular, há geração de mais força centrífuga

que para massa de 80 g. Logo, a variação da relação de transmissão é mais rápida, e a queda de torque entregue pela polia secundária é maior, e novamente a força axial tem o mesmo comportamento da curva de torque.

Finalmente, para a maior massa, de 120 g, o comportamento é mais acentuado que das outras massas. A maior massa induz uma força axial maior na polia motora, acelerando o processo de variação da relação de transmissão, e assim gerando maior queda torque e força axial na polia movida.

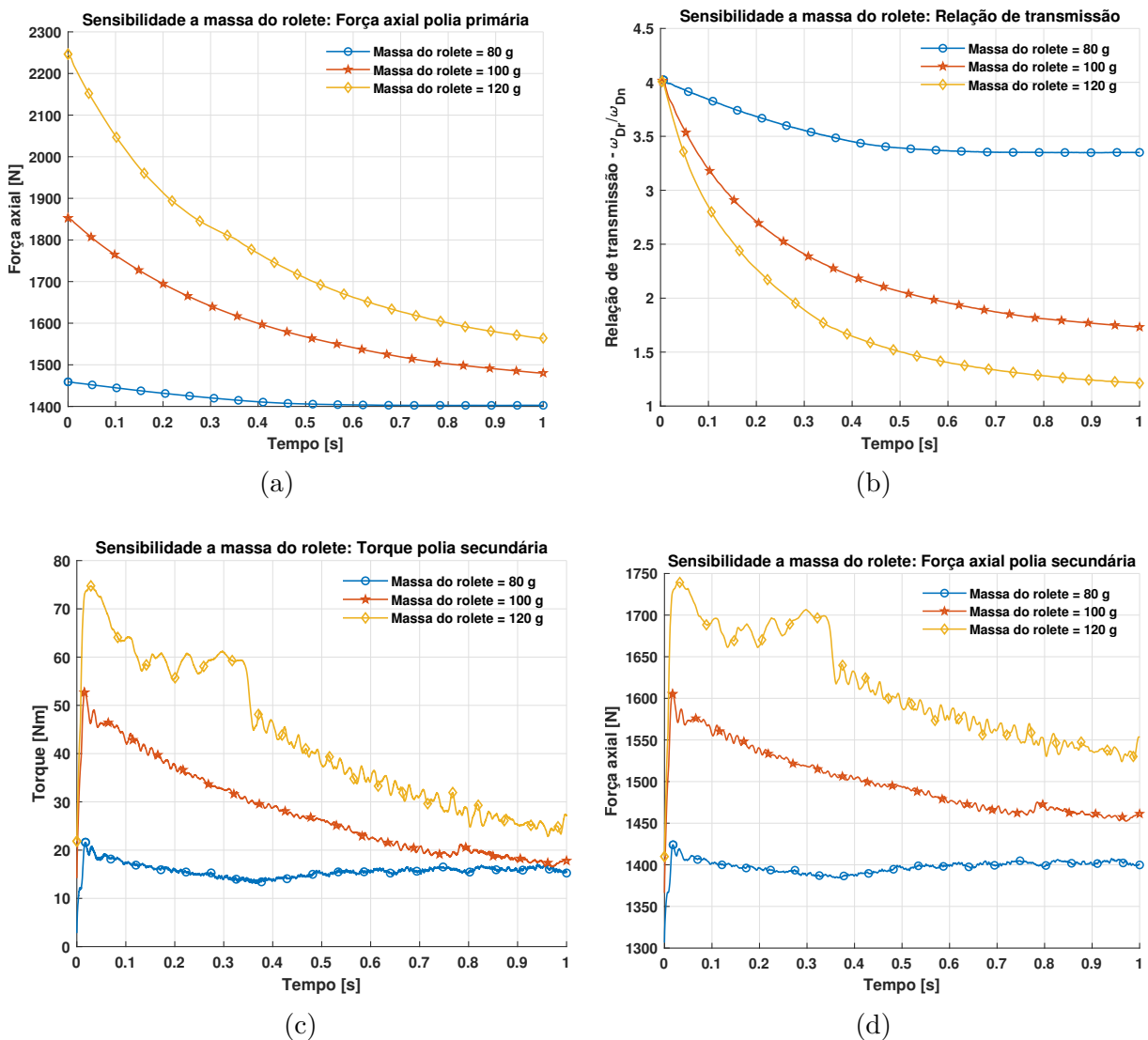


Figura 4.24 – Resultados de sensibilidade do sistema a variação da massa dos roletes, ( $k_t = 8,7 Nmm/^\circ$ ,  $k_{Dn} = 8000 N/m$ ,  $\gamma_{came} = 60^\circ$ ): (a) Força axial polia primária; (b) Relação de transmissão; (c) Torque polia secundária; (d) Força axial polia secundária.

Observa-se que o aumento dos valores de torque com massas maiores observado na figura 4.24c, se deve pela orientação mais tangencial da força de atrito que o aumento da força axial induz. Pela figura 4.25, que ilustra a distribuição dos vetores da força de atrito para as três massas, verifica-se que para a massa de 80 g, figura 4.25a, a direção do vetor de atrito se encontra muito difusa e orientada de maneira desfavorável para a transmissão

de torque. Com o aumento da massa, figuras 4.25b e 4.25c, percebe-se que a orientação do atrito torna-se cada vez mais tangencial ao raio da zona de compressão, favorecendo a transmissão de torque.

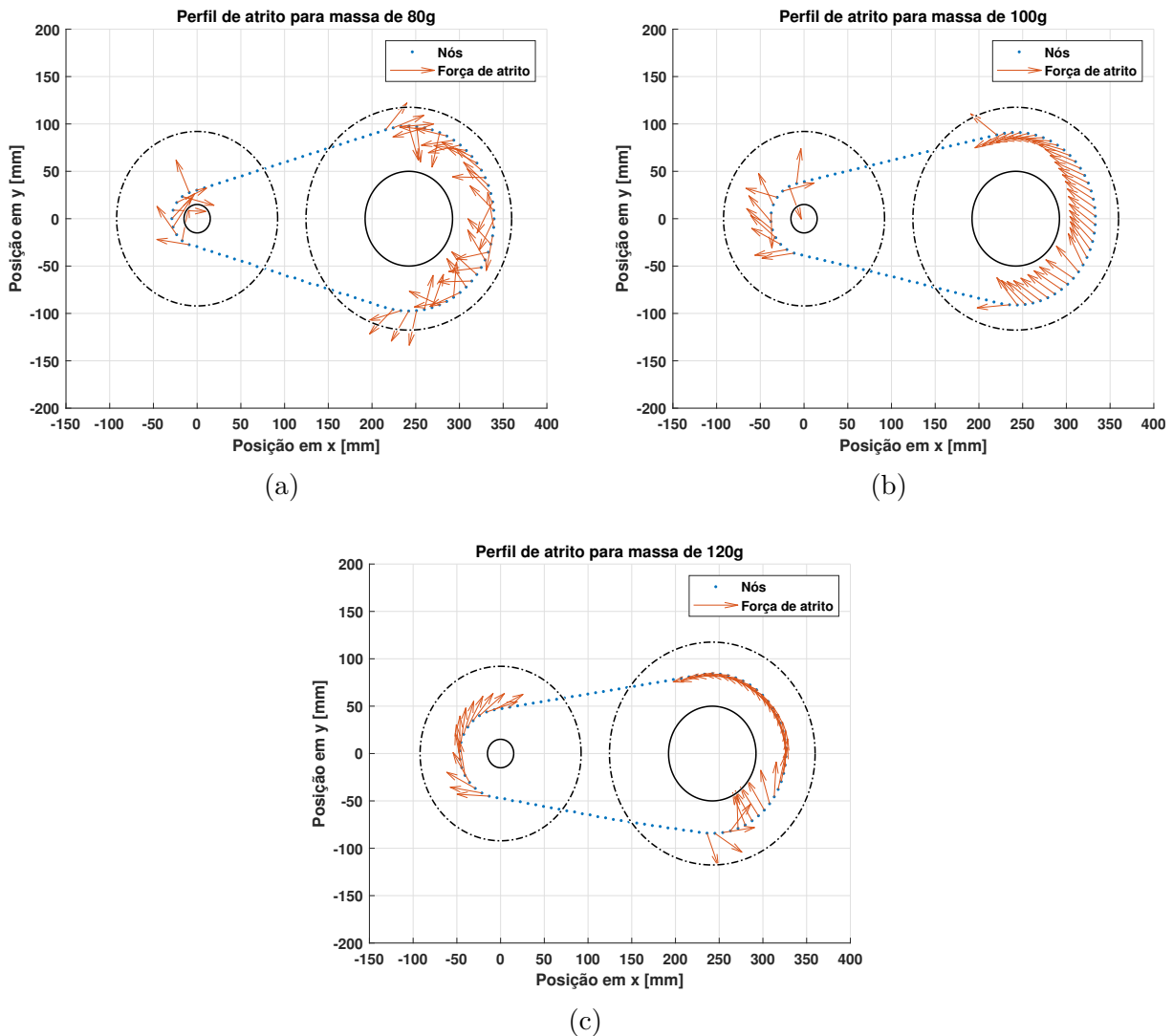


Figura 4.25 – Vetores de força de atrito para diferentes aplicações massa de rolete: (a) Massa 80 g; (b) Massa 100 g; (c) Massa 120 g.

### Rigidez à torção das molas ( $k_t$ )

O segundo parâmetro de controle analisado foi a rigidez à torção das molas na polia primária, que tem a função de contrapor ao movimento induzido pelos roletes. Nessa análise, foram comparados cinco valores de rigidez: 3,5, 8,7, 14, 17,5 e 26,2  $Nmm/^\circ$ .

Dado um mesmo valor de massa de rolete e velocidade angular, com o aumento da rigidez das molas, a resultante de forças entre força centrífuga e resistiva se torna menor, reduzindo a força axial aplicada pela polia primária, conforme ilustra na figura 4.26a. Dessa forma, menores valores de rigidez induzem maiores forças axiais, que acarretam em variação da relação de transmissão mais rápida, figura 4.26b. Já as curvas de torque e força axial possuem comportamento similar aos apresentadas na figura 4.24. Maiores forças

axiais na polia primária, provocam níveis de torque mais elevados, e consequentemente, mais força axial na polia secundária que responde ao torque aplicado.

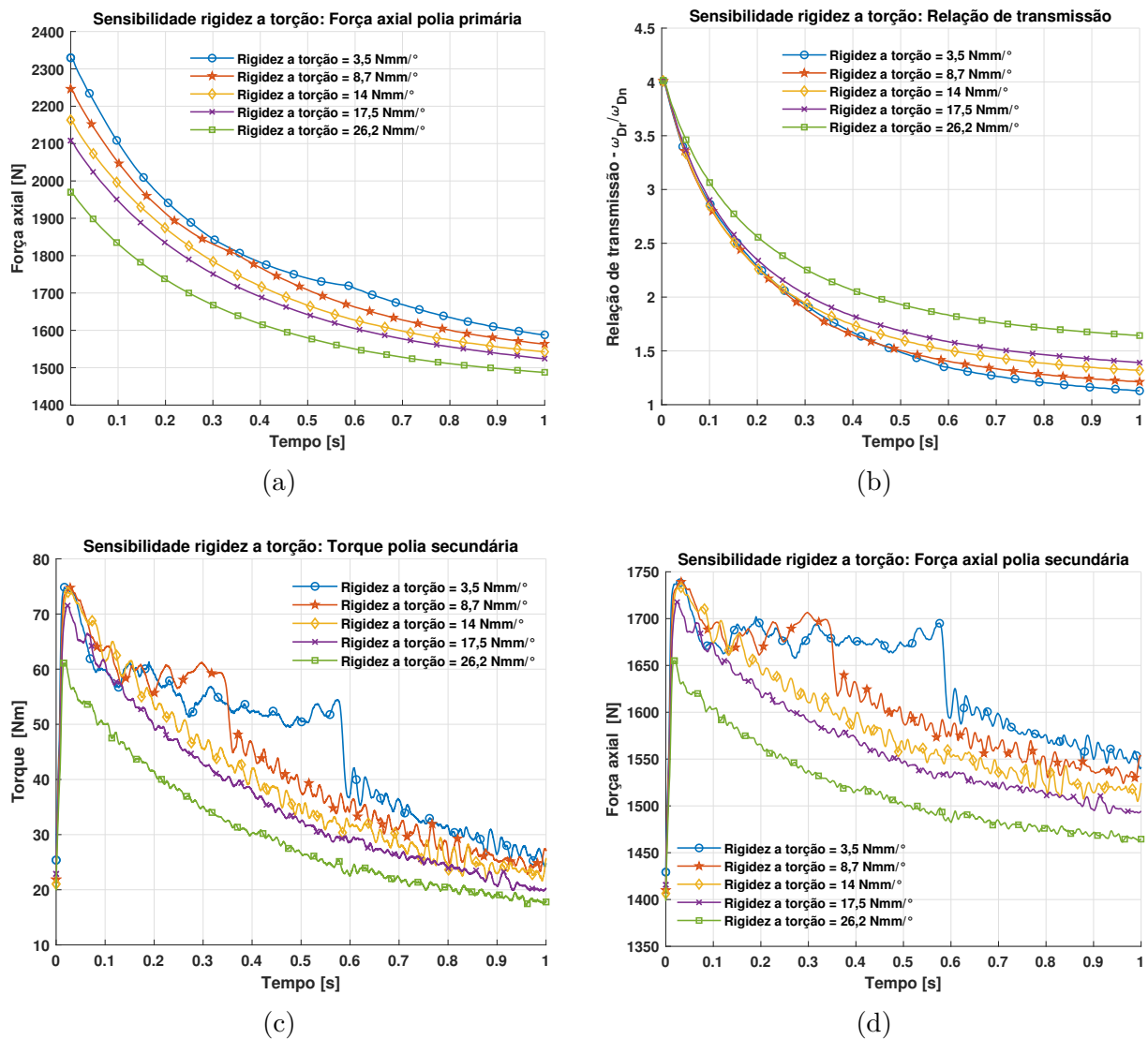


Figura 4.26 – Resultados de sensibilidade do sistema a variação da rigidez à torção da mola na polia primária, ( $m_{fly} = 120g$ ,  $k_{Dn} = 8000N/m$ ,  $\gamma_{came} = 60^\circ$ ): (a) Força axial polia primária; (b) Relação de transmissão; (c) Torque polia secundária; (d) Força axial polia secundária.

### 4.3.2 Polia secundária

A polia secundária, tem como papel principal garantir que a correia possua compressão suficiente para transmitir torque sem deslizamento excessivo. Para isso, o mecanismo de controle tem como principais parâmetros de regulação a rigidez da mola e ângulo de came.

## Rigidez à compressão mola ( $k_{Dn}$ )

Ao analisar a influência da rigidez à compressão da mola da polia secundária, figura 4.27, observa-se que a variação da rigidez não influencia tão significativamente as curvas de força axial, relação de transmissão e torque, quanto os parâmetros da polia primária.

Conforme apresentado por Aaen (1998), a função primordial dessa rigidez é influenciar no nível de deslizamento da correia e movimento de retorno da transmissão quando o motor desacelera (*backshift*). Uma vez que o algoritmo desenvolvido não é capaz de modelar o *backshift*, esse comportamento não foi simulado nessas análises.

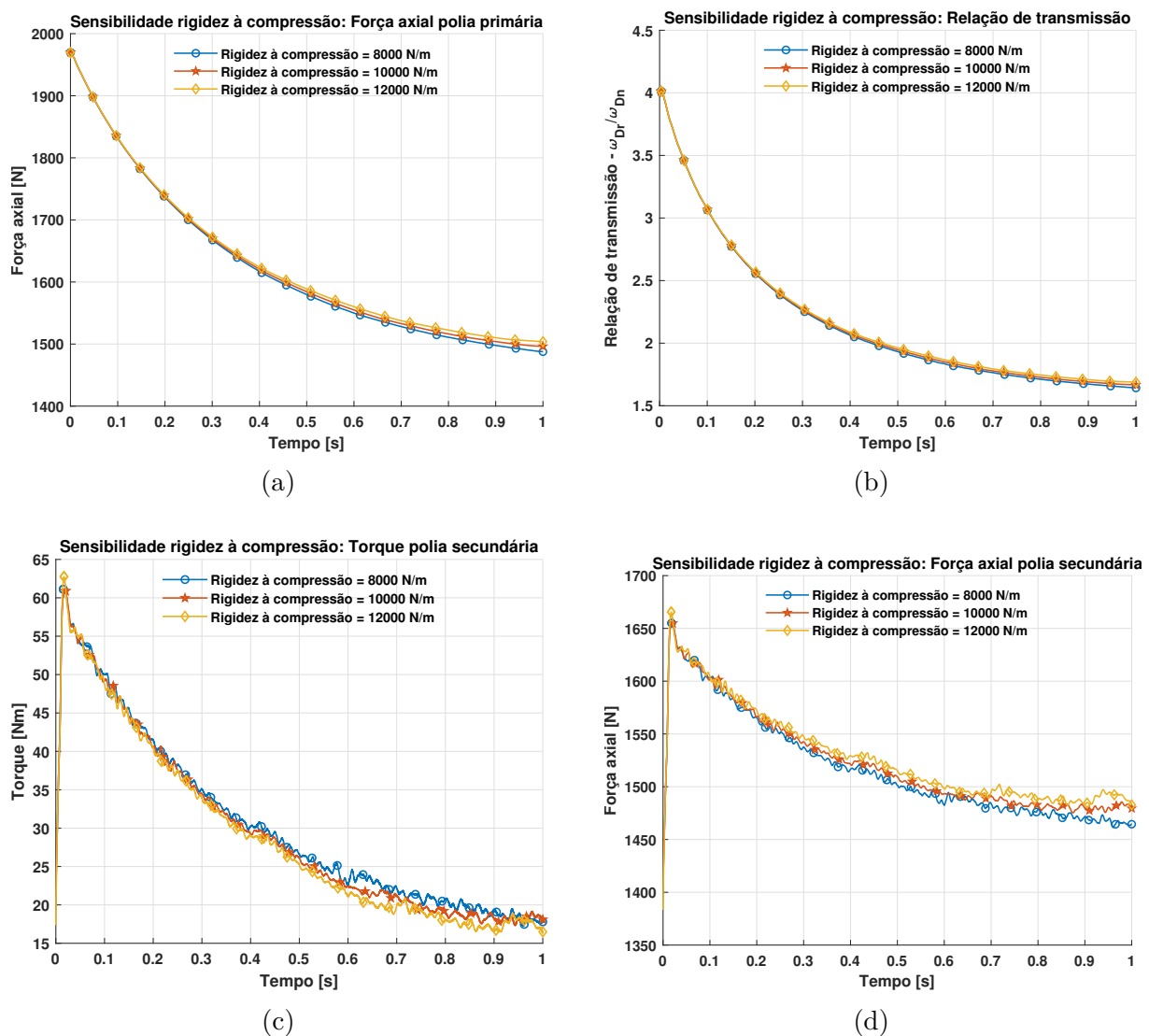


Figura 4.27 – Resultados de sensibilidade do sistema a variação da rigidez à compressão da mola na polia secundária, ( $m_{fly} = 120g$ ,  $k_t = 8,7Nm/^\circ$ ,  $\gamma_{came} = 60^\circ$ ): (a) Força axial polia primária; (b) Relação de transmissão; (c) Torque polia secundária; (d) Força axial polia secundária.

Dessa forma, para as curvas de força axial da polia primária e relação de transmissão, figura 4.27a e 4.27b, não se verificam grandes alterações. Já as curvas de torque possuem diferentes níveis após 0,4 s, figura 4.27c, consequência de uma orientação mais tangencial

dos vetores de força de atrito com a diminuição da força axial na polia secundária, figura 4.27d, que diminui a resistência da variação da relação de transmissão.

### Ângulo de came ( $\gamma_{came}$ )

Por fim, o último parâmetro analisado foi o de ângulo de came da polia secundária, que controla a quantidade de força axial convertida pelo torque aplicado, equação 3.58. Observa-se que o aumento da angulação do came reduz a força axial aplicada à polia secundária, figura 4.28a, diminuindo assim a resistência ao sistema de controle na polia primária, figura 4.28b, e por consequência aumentando a velocidade de transição da relação de transmissão, figura 4.28c. Para as curvas de torque, notam-se instabilidades acentuadas para angulações com valores abaixo de  $40^\circ$ . Esse efeito ocorre devido ao excesso de força axial aplicada à polia secundária, que dificulta a variação da relação de transmissão, causando oscilações entre as zonas de atrito.

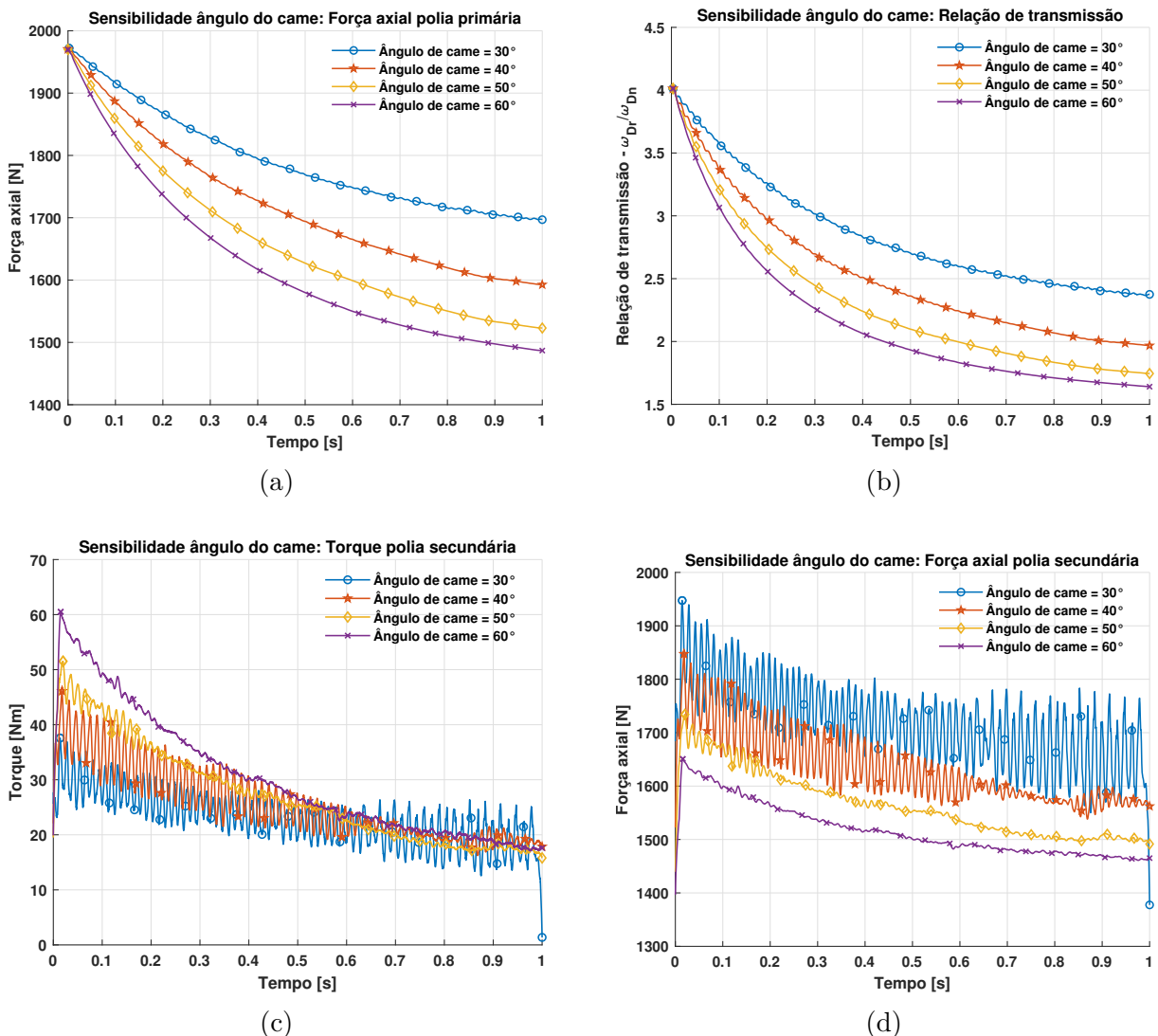


Figura 4.28 – Resultados de sensibilidade do sistema a variação do ângulo do came na polia secundária, ( $m_{fly} = 120g$ ,  $k_t = 8,7Nmm/^\circ$ ,  $k_{Dn} = 8000N/m$ ): (a) Força axial polia primária; (b) Relação de transmissão; (c) Torque polia secundária; (d) Força axial polia secundária.

# 5 Considerações finais

## 5.1 Conclusão

Com base no exposto, o trabalho mostrou que a utilização de transmissões do tipo CVT possuem grande abrangência de aplicações, desde pequenos veículos do tipo Baja, até carros comerciais híbridos. Isso se deve principalmente a sua característica de manter o motor trabalhando em uma faixa de trabalho pré-definida sem necessitar da mudança de marchas manual ou automatizada, e por sua eficiência estar aumentando progressivamente com o desenvolvimento de tecnologias de controle eletrônico e de correias mais resistentes.

Para os modelos de CVT com acionamento mecânico, que são o objeto de estudo desse trabalho, o ajuste adequado dos parâmetros de controle para cada aplicação são essenciais para um bom desempenho do sistema. Dado a dificuldade de encontrar ferramentas numéricas que predizem o comportamento da transmissão para possibilitar o ajuste sem a necessidade de testes experimentais exaustivos, este trabalho possui grande valor para o estudo da influência de parâmetros no desempenho dinâmico da transmissão.

A partir das revisões bibliográficas realizadas, viu-se a necessidade de buscar por diferentes metodologias para a atingir os objetivos propostos. Por isso, dividiu-se o problema global em duas modelagens: a da correia e o dos mecanismos de acionamento. Partindo do modelo de correia proposto por [Julio e Plante \(2011\)](#) e propondo algumas adições de outros métodos de análise como da bisseção para compressão nodal de [Ballew \(2015\)](#) e da técnica dos *pinballs* de [Quaranta \(2002\)](#) para condições de impenetrabilidade dos eixos, desenvolveu-se o modelo de predição do comportamento da correia. Já a análise dos mecanismos de acionamento foi alcançada com base no balanço de forças do mecanismo em um diagrama de corpo livre, com a força axial resultante do equacionamento sendo o elemento de acoplamento entre os modelos.

Com o intuito de comparar os resultados alcançados com o modelo desenvolvido, análises de força trativa, força de compressão e força de atrito foram comparados com os trabalhos de [Srivastava e Haque \(2008\)](#) e [Ide et al. \(2001\)](#). Apesar de não ter acesso a todos os dados de entrada das suas simulações, o modelo apresentou comportamento semelhantes às literaturas, tanto para as comparações entre os resultados numéricos quanto experimentais.



Pelas simulações com força axial constante, verificou-se que o modelo de atrito utilizado é capaz de representar a interação entre as polias e a correia com resultados coerentes para análise cinemática e curvas de torque. Além disso, pelas análises de sensibilidade, constatou-se que o aumento do número nós diminui as instabilidades dos dados apesar de acarretar no aumento de custo computacional, e que o parâmetro de velocidade relativa mínima tem grande influência no nível de deslizamento entre as polias e a correia. Portanto, foi escolhido os parâmetros de 100 nós e 0,1  $m/s$  de velocidade relativa mínima, por essa combinação apresentar resultados estáveis, com eficiência satisfatória e custo computacional relativo baixo.

Finalmente, pelas simulações com força axial variável, constatou-se que o acoplamento entre os modelos de correia e mecanismo de controle foi capaz de representar o comportamento de variação contínua da relação de transmissão, e que a taxa dessa variação influencia no torque transmitido para a polia secundária. Além disso, observou-se que o modelo é altamente sensível as entradas do algoritmo, como o modelo é não-linear e descontínuo, pequenas mudanças nos *inputs*, podem gerar diferenças significativas no comportamento do sistema.

Em vista disso, o trabalho desenvolvido conseguiu atingir os objetivos propostos. Tanto o modelo de correia quanto o dos mecanismos de acionamento foram implementados, apresentando resultados semelhantes com os encontrados nas bibliografias de referência, e capaz de representar o comportamento dinâmico da CVT. Portanto, ao final desse trabalho, foi desenvolvida uma ferramenta de predição do comportamento transiente de um sistema de transmissão continuamente variável com acionamento mecânico.

O trabalho desenvolvido foi reconhecido junto a MathWorks pela relevância do estudo na utilização de abordagens numéricas na análise do comportamento dinâmico da CVT no ramo de competições estudantis, onde usualmente predominam investigações experimentais para regulagem dos parâmetros de controle. Dessa forma, o trabalho foi publicado no [blog da MathWorks](#) pelo destaque na utilização do *software* MATLAB.

## 5.2 Trabalhos futuros

Para os trabalhos futuros recomenda-se a medição dos parâmetros experimentais de rigidez e amortecimento da correia, valores de entrada fundamentais para o bom funcionamento do modelo, e a realização de testes com o sistema de CVT acoplado ao motor em bancada dinamométrica para obter os valores de escorregamento do sistema e validação experimental do modelo. Além disso, realizar o refinamento da condição das zonas de impenetrabilidade, de modo a se obter uma condição mais realista do contato dos nós da correia com os eixos.

Em relação a equipe Piratas do Cerrado recomenda-se a realização de simulações com a dinâmica da curva de torque e potência do motor inclusa ao algoritmo, e o



acoplamento do modelo à análise de dinâmica longitudinal de aceleração e velocidade do protótipo Baja SAE, com a finalidade de se otimizar os parâmetros de ajuste da CVT para condições de operação do veículo. E por fim, aperfeiçoar o sistema de controle por meio da utilização de um controlador hidráulico, com o propósito de se reduzir o número de variáveis na determinação das forças axiais atuantes no sistema e facilitar o controle do mecanismo de atuação.

# Referências

- AAEN, O. *Olav Aaen's Clutch Tuning Handbook*. [S.l.]: Aaen Performance, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 13 e 62.
- ALBUQUERQUE, A. A. Caracterização da resposta dinâmica de uma cvt por polias expansivas. [sn], 2003. Citado na página 18.
- BALLEW, B. G. Investigation of a numerical algorithm for a discretized rubber-belt continuously variable transmission dynamic model and techniques for the measurement of belt material properties. In: . [S.l.: s.n.], 2015. Citado 5 vezes nas páginas 17, 20, 26, 27 e 64.
- BEER, F. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and dynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 2010. (Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics, v. 1-2). ISBN 9780070700307. Citado na página 25.
- BUDYNAS, R.; NISBETH, J. *Elementos de Máquinas de Shigley - 10ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016. ISBN 9788580555554. Citado na página 21.
- CARBONE, G. et al. Cvt dynamics: Theory and experiments. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, v. 42, n. 4, p. 409–428, 2007. Citado na página 17.
- CHAPRA, S.; CANALE, R. *Numerical Methods for Engineers*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2010. ISBN 9780071267595. Citado na página 32.
- CVTTRANSMISSIONS. 2004. Acesso em: 05/11/2020. Disponível em: <<http://www.rapidrepairautocenter.com/cvt-transmissions-the-pros-the-cons/>>. Citado na página 7.
- DAFVARIOMATIC. 1960. Acesso em: 05/11/2020. Disponível em: <<http://www.dafownersclub.co.uk>>. Citado na página 8.
- DING, H. F. et al. Influence of flyweight profile on regulating characteristic of rubber v-belt cvt. In: TRANS TECH PUBL. *Applied Mechanics and Materials*. [S.l.], 2011. v. 86, p. 210–213. Citado na página 18.
- DOLAN, J.; WORLEY, W. Closed-form approximations to the solution of v-belt force and slip equations. 1985. Citado na página 16.
- GERBERT, B. G. Force and slip behaviour in v. belt drives. 1972. Citado na página 16.
- GERBERT, G. Belt slip—a unified approach. 1996. Citado na página 16.
- HONDA. 2005. Acesso em: 04/11/2020. Disponível em: <<https://za.pinterest.com/pin/563161128402478761/>>. Citado na página 9.

- HOWSTUFFWORKS. 2005. Acesso em: 04/11/2020. Disponível em: <<https://auto.howstuffworks.com/cvt.htm>>. Citado na página 10.
- IDE, T. et al. Measurement of contact force between pulley sheave and metal pushing v-belt by means of ultrasonic waves. *JSAE review*, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 163–167, 2001. Citado 7 vezes nas páginas 3, 17, 18, 42, 44, 45 e 64.
- JULIO, G.; PLANTE, J.-S. An experimentally-validated model of rubber-belt cvt mechanics. *Mechanism and Machine Theory - MECH MACH THEOR*, v. 46, p. 1037–1053, 08 2011. Citado 6 vezes nas páginas 17, 20, 21, 22, 36 e 64.
- KARAM, A.; PLAY, D. A discrete analysis of metal-v belt drive. *arXiv preprint arXiv:1301.5595*, 2013. Citado na página 16.
- KARNOPP, D. Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 107, n. 1, p. 100–103, 03 1985. ISSN 0022-0434. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3140698>>. Citado na página 28.
- KUBAS, K. A two-dimensional discrete model for dynamic analysis of belt transmission with dry friction. *Archive of Mechanical Engineering*, v. 61, 12 2014. Citado na página 17.
- MARTINS, L. I. Modelagem da transmissão continuamente variável de um veículo off-road. 2018. Citado na página 18.
- NAUNHEIMER, H. et al. *Automotive transmissions: Fundamentals, selection, design and application*. [S.l.: s.n.], 2011. 1-717 p. ISBN 978-3-642-16213-8. Citado na página 5.
- OEMOFFHIGHWAY. 2011. Acesso em: 05/11/2020. Disponível em: <<https://www.oemoffhighway.com>>. Citado na página 11.
- OLIVER, L. R.; HENDERSON, D. D. Torque sensing variable speed v-belt drive. *SAE Transactions*, JSTOR, p. 2130–2137, 1972. Citado na página 19.
- PENNESTRI, E. et al. Dynamic simulation of a metal belt cvt under transient conditions. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 36533, p. 261–268. Citado na página 17.
- QUARANTA, F. *Modelagem de problemas de contato-impacto empregando formulações penalizadas do método dos elementos finitos*. 2002. Doutorado. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 64.
- RODRIGUES, M. R. Estudo teórico e experimental de uma transmissão continuamente variável para veículo baja sae. *Universidade de São Paulo, Escola Politécnica USP. São Paulo*, 2011. Citado na página 19.
- SILVA, V. D. et al. Longitudinal performance maximizing a bajasae-vehicle through optimization of parameters of a cvt. *SAE Technical Paper Series*, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.
- SORGE, F. *Transient mechanics of V-belt variators*. [S.l.], 2004. Citado na página 17.
- SRIVASTAVA, N.; HAQUE, I. Clearance and friction-induced dynamics of chain cvt drives. *Multibody System Dynamics*, Springer, v. 19, n. 3, p. 255–280, 2008. Citado 8 vezes nas páginas x, 3, 17, 42, 43, 44, 45 e 64.

WILLIS, C. R. *A kinematic analysis and design of a continuously variable transmission*. 2006. Tese (Doutorado) — Virginia Tech. Citado na página [19](#).

YE, S.-H.; YI, S.-J. Dynamic analysis of the metal v-belt cvt. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *ICMIT 2005: Control Systems and Robotics*. [S.l.], 2006. v. 6042, p. 60424E. Citado na página [17](#).

# Apêndices

# A Parâmetros de simulação

## A.1 Simulação 1 - Comparação com literatura

Polia primária		
Parâmetros	Valor	Unidade
Diâmetro inicial	75	<i>mm</i>
Diâmetro externo	184,15	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Velocidade angular	2000	<i>rpm</i>
Polia secundária		
Parâmetro	Valor	Unidade
Diâmetro inicial	100	<i>mm</i>
Diâmetro externo	235,2	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Velocidade angular	800	<i>rpm</i>
Geral		
Parâmetro	Valor	Unidade
Ângulo do canal	24	°
Entre eixos	242,1	<i>mm</i>
Atrito estático	0,55	-
Atrito dinâmico	0,45	-
Número de nós	100	-
Força axial - Polia primária	500	<i>N</i>
Força axial - Polia secundária	500	<i>N</i>
Velocidade relativa mínima	0,1	<i>m/s</i>
Tempo de simulação	2	<i>s</i>
Correia		
Parâmetro	Valor	Unidade
Rigidez à tração	$57,87 * 10^6$	<i>N/m</i>
Rigidez à flexão	-	<i>Nm/rad</i>
Rigidez à compressão	$6,41 * 10^6$	<i>N/m</i>
Amortecimento linear	-	<i>Nms/rad</i>
Amortecimento angular	-	<i>Nms/rad</i>
Massa	1,5	<i>kg</i>

Tabela 1 – Parâmetros para simulação de comparação com a literatura.

## A.2 Simulação 2 - Análise de força axial constante

<b>Polia primária</b>		
<b>Parâmetros</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Diâmetro inicial	100	<i>mm</i>
Diâmetro externo	184,15	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Velocidade angular	2000	<i>rpm</i>
<b>Polia secundária</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Diâmetro inicial	100	<i>mm</i>
Diâmetro externo	235,20	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Velocidade angular	800	<i>rpm</i>
<b>Geral</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Ângulo do canal	24	°
Entre eixos	242,10	<i>mm</i>
Atrito estático	0,55	-
Atrito dinâmico	0,45	-
Número de nós	100	-
Força axial - Polia primária	500	<i>N</i>
Força axial - Polia secundária	500	<i>N</i>
Velocidade relativa mínima	0,1	<i>m/s</i>
Tempo de simulação	2	s
<b>Correia</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Rigidez à tração	$57,87 * 10^6$	<i>N/m</i>
Rigidez à flexão	-	<i>Nm/rad</i>
Rigidez à compressão	$6,41 * 10^6$	<i>N/m</i>
Amortecimento linear	-	<i>Nms/rad</i>
Amortecimento angular	-	<i>Nms/rad</i>
Massa	1,5	<i>kg</i>

Tabela 2 – Parâmetros para simulação com força axial constante.

### A.3 Simulação 3 - Análise de força axial variável

<b>Polia primária</b>		
<b>Parâmetros</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Comprimento braço de torção	20	<i>mm</i>
Comprimento rolete	37	<i>mm</i>
Diâmetro externo	184,15	<i>mm</i>
Diâmetro inicial	50	<i>mm</i>
Distância inicial do eixo de rotação	46,35	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Massa do rolete	120	<i>g</i>
Rigidez mola de torção	0,5	<i>Nm/rad</i>
Velocidade angular	3000	<i>rpm</i>
<b>Polia secundária</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Ângulo do came	60	°
Diâmetro externo	235,2	<i>mm</i>
Diâmetro inicial	200	<i>mm</i>
Inércia	0,0257	<i>kgm<sup>2</sup></i>
Pré-carga	1000	<i>N</i>
Raio do came	50	<i>mm</i>
Rigidez mola compressão	8000	<i>N/m</i>
Rigidez mola de torção	0,2	<i>Nm/rad</i>
Velocidade angular	800	<i>rpm</i>
<b>Geral</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Ângulo do canal	24	°
Atrito dinâmico	0,45	-
Atrito estático	0,55	-
Entre eixos	242,1	<i>mm</i>
Número de nós	100	-
Tempo de simulação	1	<i>s</i>
Velocidade relativa mínima	0,1	<i>m/s</i>
<b>Correia</b>		
<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Amortecimento angular	-	<i>Nms/rad</i>
Amortecimento linear	-	<i>Nms/rad</i>
Rigidez à compressão	$6,41 * 10^6$	<i>N/m</i>
Rigidez à flexão	-	<i>Nm/rad</i>
Rigidez à tração	$57,87 * 10^6$	<i>N/m</i>
Massa	1,5	<i>kg</i>

Tabela 3 – Parâmetros para simulação com força axial variável.



# Anexo



# B Ficha comercial Comet 780

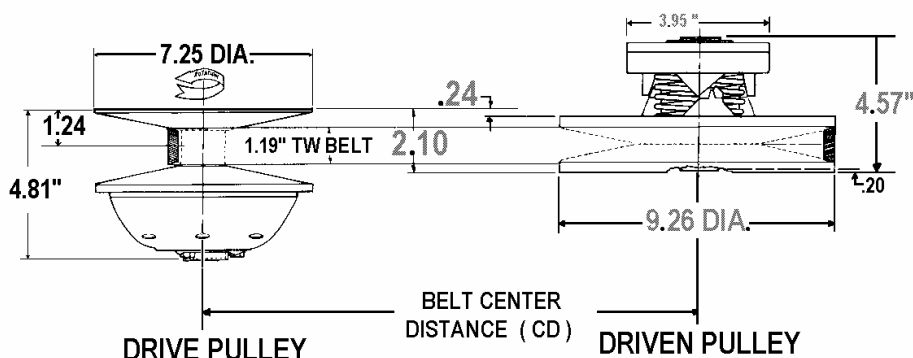
QDS-Mini-Baja "F"

05/01



## MODEL 780 AUTOMATIC TORQUE CONVERTER

### LAYOUT DIMENSIONS:



### SPECIFICATIONS

MAX ENGINE RATING:	MAX RPM:
2-Cycle - 30 H.P.	10,000
4-Cycle - 16 H.P.	5,500

BORE SIZES	SPEC. NO.
DRIVE - 1"	302424C
DRIVEN - 3/4"	302454C

### BELT SELECTION:

PART NUMBER	BELT C.D.
300780C (704054)	8.59"
300634C (704055)	9.62"
300637C (704060)	10.73"
300638C (704061)	11.08"

### PULLEY RATIOS:

LOW - 3.71:1	(SHOWN ABOVE)
HIGH - .69:1	
OVERALL - 5.38:1	

### DISCOUNTED NET APPLIES TO MINI BAJA PROJECT ONLY.

	LIST	NET*
DRIVES :	\$260.00	\$ 155.00
DRIVENS:	225.00	135.00
BELTS :	75.00	45.00

\*SHIPPING : "PREPAID" (UPS OR PARCEL POST) OR "FRT.COLLECT" (AIR FRT).

NOTE: NEVER OPERATE A TORQUE CONVERTER WITHOUT A SUITABLE SAFETY SHIELD.

NOTE: DO NOT RUN AN ENGINE EQUIPPED WITH A DRIVE PULLEY IF THE BELT IS NOT ENGAGED WITH THE DRIVEN PULLEY.

### DISTRIBUTED BY:

QDS P.O. BOX 6910, ALHAMBRA, CALIFORNIA 91802 TEL. (626) 293-5770 / FAX. (626) 281-3392\_