

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL

**UM ESTUDO NUMÉRICO DE PROBLEMAS TÉRMICOS
EM BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE.**

GISELE VILELA ALMEIDA

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. Ing.

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURAS

BRASÍLIA / DF: DEZEMBRO / 2020

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL**

**UM ESTUDO NUMÉRICO DE PROBLEMAS TÉRMICOS
EM BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE.**

GISELE VILELA ALMEIDA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**PROF. LINEU JOSÉ PEDROSO, D.Sc. (ENC-UNB)
(ORIENTADOR)**

**GUILHERME SALES MELO, PhD (ENC-UNB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**PROF. JOSÉ HUMBERTO MATIAS DE PAULA, MSc (ENC-UNB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**DAVIDSON DE OLIVEIRA FRANÇA JÚNIOR, MSc (PECC-UNB)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 08 do Dezembro de 2020.

FICHA CATALOGRÁFICA

ALMEIDA, GISELE VILELA

Um Estudo Numérico de Problemas Térmicos Em Barragem De Concreto Gravidade., 2020.

132p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2020)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Análise Térmica.

2. Barragens.

3. Método Analítico.

4. Método dos Elementos Finitos.

5. Método das Diferenças Finitas.

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Bacharel)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALMEIDA, G.V. (2020). Um Estudo Numérico de Problemas Térmicos Em Barragem De Concreto Gravidade, Publicação G.PF-001/90, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 132 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Gisele Vilela Almeida

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Um Estudo Numérico de Problemas Térmicos Em Barragem De Concreto Gravidade

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2020

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Gisele Vilela Almeida

SEPS 713/913, Lt.B, Bl.B, Apt.217

70390135 - Brasília/DF - Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo cuidado e direção em todos os momentos da minha vida e pelas oportunidades que me conduziram até aqui. Ele que me proporcionou conhecimento, dedicação e discernimento, me fortalecendo nas horas difíceis deste percurso acadêmico.

Agradeço a minha família e em especial aos meus pais, Ana Carla e Henrique, aos meus avós, Silene e Basílio (In Memoriam), aos meus irmãos pelo amor incondicional, pelo incentivo aos estudos e por estarem ao meu lado, sempre torcendo por mim. Ao meu companheiro Guilherme, pela força e compreensão nos momentos difíceis e aos meus bichos Camila e Rocky, meu lindo furão, pela companhia nas noites em claro.

Ao meu orientador e amigo professor Dr. Lineu José Pedroso que tão prontamente aceitou o desafio de me orientar durante a Universidade, transmitindo seus conhecimentos de forma clara e precisa, estando sempre disponível e disposto a fornecer orientações para o desenvolvimento desta pesquisa e meu desenvolvimento pessoal.

Aos colegas do Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura, em especial ao Davidson e a Adriana que não só me incentivaram no desenvolvimento da pesquisa. como se tornaram grandes amigos.

Agradeço aos professores e a UnB pelos ensinamentos ao longo desses anos.

Finalmente, meus sinceros agradecimentos, a todos que de alguma forma fizeram parte da minha vida durante meu período de formação acadêmica. Obrigada!

“Águas são muitas, infinitas... E em tal maneira é grandiosa que, querendo, a aproveitar, dar-se-á nela tudo, por bem das águas que tem.”

(Pero Vaz de Caminha, 1500).

RESUMO

O estudo dos problemas de fluxo de calor é de extrema importância na engenharia, havendo necessidade de se conhecer as temperaturas impostas e geradas, quando apropriado, nas partes estruturais para avaliar as tensões que podem surgir devido às variações térmicas. Essas tensões são formadas devido a restrições impostas, ou seja, os corpos não podem se mover livremente e, conseqüentemente, podem surgir fissuras indesejáveis quando as tensões são maiores do que a capacidade de resistência das partes tensionadas. A determinação das isothermas da estrutura pode ser feita de forma analítica ou numérica com a utilização de métodos matemáticos. Na presente monografia foi realizada a simulação do comportamento térmico de uma Barragem de Concreto Gravidade através dos Métodos Analíticos, das Diferenças Finitas (FDM) e Elementos Finitos (FEM) com auxílio dos programas computacionais MATLAB e ANSYS. A metodologia desenvolvida permitiu determinar o campo de temperatura formado na estrutura analisada adaptando o modelo e as propriedades dos materiais de acordo com a necessidade do estudo. Os resultados foram apresentados na forma de isothermas indicando a relevância da implementação modelos numéricos como forma de prever e monitorar o comportamento térmico de Barragens de Concreto Gravidade.

Palavras-chave: Comportamento Térmico, Barragens, Método Analítico, Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 — Transferência de calor em uma barragem de gravidade.....	15
.....	22
Figura 2 — Barragem de Gravidade de Concreto (EngWhere, 2018)	22
Figura 3 — Usina Hidrelétrica de Ribeirão do Inferno (CEMIG).	24
Figura 5— Trabalhador da construção civil concretando uma fundação	25
Figura 6 — Hidratação do Cimento – microestrutura (Tokudome, 2008).	26
Figura 7 — Influência da retração e da fluência na fissuração do concreto. (Metha e Monteiro, 2008).	27
Figura 8 — Esquema de circulação de água através de tubos no interior do concreto. (Sousa e Silva, 2014).	30
Figura 09 — Interação dos fatores que influenciam a resistência do Concreto. (Metha e Monteiro, 2008)	32
Figura 10 — Malha das Diferenças Finitas (MARTINS e PEDROSO, 2016).	36
Figura 11 — Expressões das derivadas de primeira e segunda ordens em Diferenças Finitas. (MARTINS e PEDROSO, 2016).	36
Figura 12: Condução de calor tridimensional através de um elemento de volume retangular. (Çengel e Ghajar, 2012).	38
Figura 13: Paralelepípedo. (Coelho, 2015).	44
Figura 14: Placa. (Coelho, 2015).	52
Figura 15: Barra com temperatura fixa nas extremidades. (Coelho, 2015).	54
Figura 16: Malha em Diferenças Finitas (Coelho 2016).	65
Figura 17— Etapas do Modelo via ANSYS WORKBENCH.	71
Figura 18 — Solução de Problemas Térmicos através do MEF em Regime Permanente.	72
Figura 19 — Solução de Problemas Térmicos através do MEF em Regime Transiente.	72
Figura 20— Exemplo de distribuição de temperatura (Regime Transiente) via ANSYS – Solução Qualitativa.	73
Figura 22 — Solução Analítica e a Comparação com as Soluções Numéricas via Maple.	75
Figura 23 — Solução Laplace Bidimensional	77
Gráfico 1 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – Método Analítico	78
Gráfico 2 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – Método das Diferenças Finitas.	79
Gráfico 3 — Variação da Temperatura (°C) ao longo da placa – Vista Superior.	79
Figura 24— Elemento PLANE 55. (Alfredo, 2018)	80
Gráfico 4 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – MEF.	80
Gráfico 5 — Variação da Temperatura ao longo do eixo x para y = 0,5m – MEF	81
Gráfico 7 — Temperatura (°C) ao longo do eixo x(m) para y= 0,5m.	82
Gráfico 8 — Temperatura (°C) ao longo do eixo y(m) para x= 0,5m.	82
Gráfico 9 — Temperatura ao longo do eixo x para y=0,5m.	83
Gráfico 10 — Temperatura ao longo do eixo y para x=0,5m.	84

Gráfico 11 — Erro de Convergência Solução Numérica Laplace.....	84
Figura 28 — Solução Fourier Unidimensional.....	85
Tabela 6.1 — Propriedades térmicas do Concreto Massa	86
Gráfico 12 — Solução Equação de Fourier Unidimensional - Método Analítico.....	86
Gráfico 13 — Solução Numérica via MEF - Malha de 0,1m para $t=300000s$	87
Gráfico 14 — Temperatura ao longo do tempo para $x = 0,5m$ - Equação de Fourier.....	88
Gráfico 15 — Temperatura ao longo do eixo x para $t=2$ dias - Equação de Fourier	88
Gráfico 16 — Erro de Convergência Solução Numérica Fourier	89
Figura 25 — Placa Retangular.....	90
Figura 26— Geometria Barragem de Gravidade.....	91
Quadro7.1 — Propriedades Térmicas do Concreto Massa.....	91
Figura 27 — Temperatura atuante como Condição de Contorno - Placa.....	92
Gráfico 17 — Temperatura ao longo do eixo x para $y=5m$ após 2 dias de concretagem – Equação de Fourier.....	93
Gráfico 18 — Temperatura ao longo do eixo y para $x=3m$ após 2 dias de concretagem – Equação de Fourier.....	93
Figura 28— Pontos analisados na placa.	94
Gráfico 19 — Temperatura ao longo do tempo para $P1(2,2,5)$ e $P2(4,2,5)$	95
Gráfico 20 — Temperatura ao longo do tempo para $P3(2,5)$ e $P4(4,5)$	95
Gráfico 21 — Temperatura ao longo do tempo para $P5(2,7,5)$ e $P6(4,7,5)$	96
Gráfico 22 — Isotermas após 3h da Concretagem - $T_{max} = 44,98^{\circ}C$	96
Gráfico 23 — Isotermas após 12h da Concretagem - $T_{max} = 44,30^{\circ}C$	97
Gráfico 24 — Isotermas após 24h da Concretagem - $T_{max} = 41,74^{\circ}C$	97
Gráfico 25 — Isotermas após 36h da Concretagem - $T_{max} = 39,10^{\circ}C$	97
Gráfico 26 — Isotermas após 48h da Concretagem - $T_{max} = 36,81^{\circ}C$	98
Figura 29 — Refinamento da malha aplicada a geometria da Barragem para solução via MDF.	98
Gráfico 27 — Temperatura ao longo do eixo y para $x=0,45m$	99
Gráfico 28 — Comparação da Temperatura ao longo do tempo para $P(2,3,6)$	99
Gráfico 29 — Temperatura ao longo do tempo para o Baricentro da Barragem.	100
Gráfico 30 — Temperatura ao longo do eixo x para o CG da Barragem.....	101
Gráfico 31 — Temperatura ao longo do eixo y para o CG da Barragem.....	101
Gráfico 32 — Barragem: isotermas após 1h de concretagem - $T_{máx} = 45,25^{\circ}C$	102
Gráfico 33 — Barragem: isotermas após 12h de concretagem - $T_{máx} = 44,28^{\circ}C$	102
Gráfico 34 — Barragem: isotermas após 24h de concretagem - $T_{máx} = 41,74^{\circ}C$	102
Gráfico 35 — Barragem: isotermas após 36h de concretagem - $T_{máx} = 39,11^{\circ}C$	103
Gráfico 36 — Barragem: isotermas após 48h de concretagem - $T_{máx} = 36,83^{\circ}C$	103
Gráfico 37 — Barragem: isotermas após 60h de concretagem - $T_{máx} = 34,90^{\circ}C$	103
Gráfico 38 — Comparação da temperatura ao longo do eixo x para o CG da Barragem.	104
Gráfico 39 — Temperatura ao longo do eixo y para o CG da Barragem.....	104
Gráfico 40 — Comparação temperatura ao longo do tempo para o Baricentro da Barragem.....	105
Tabela 2 — Comparação das temperaturas máximas atingidas	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	American Concrete Institute
CMB	Comissão Mundial de Barragens
H	Coefficiente de Transferência de Calor Global
ICOLD	International Commission on Large Dams
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
qs	Calor ganho devido à radiação solar
SCH	Silicatos de Cálcio Hidratados
$T(x,y,z,t)$	Temperatura existente em cada ponto do contorno
MG	Minas Gerais
MATLAB	Matrix Laboratory
CPV-ARI	Cimento Portland de Alta Resistência Inicial
CCR	Concreto Compactado a Rolo
CSH	Silicatos de Cálcio Hidratados
C3A	Aluminato Tricálcico
C3S	Silicato Tricálcico
EDP	Equações Diferenciais Parciais
MSV	Método de Separação de Variáveis
C.C	Condições de Contorno
C.I	Condições Iniciais
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias

LISTA DE SÍMBOLOS

$^{\circ}\text{C}$	Graus Celsius
A	Área
c	Calor Específico
h_c	Coefficiente de Convecção
J	Joule
k	Condutividade Térmica
m	Metro
\dot{q}	Calor de Hidratação
q_x	Fluxo de Calor
q_i	Temperatura Inicial do Concreto
Q	Quantidade de Calor
t	Tempo
T	Temperatura
T_a	Temperatura Ambiente
W	Watt
α	Coefficiente de Dilatação Térmica
ν	Coefficiente de Poisson
β	Energia de Ativação
δ^2	Difusividade Térmica
∇T^2	Laplaciano da Temperatura
Δx	Elemento na direção x
Δy	Elemento na direção y
Δz	Elemento na direção z
Δt	Intervalo de tempo
$\Delta x \Delta y \Delta z$	Elemento de volume
ΔE_{elem}	Balanco de energia do elemento
\dot{E}_{ger}	Taxa de Energia gerada
ρ	Massa Específica
Kr	Grau de Restrição
E	Módulo de Elasticidade

Pa	Pascal
Kg	Quilograma
Btu	Unidade Térmica Britânica
t	Tempo
s	Segundo
h	Horas
e	Erro Relativo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	GENERALIDADES	14
1.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	16
1.3	MOTIVAÇÃO	17
1.4	OBJETIVOS	18
1.5	METODOLOGIA	18
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
2	REVISÃO DA LITERATURA	21
2.1	DEFINIÇÃO DE BARRAGEM.....	21
2.2	BREVE HISTÓRICO DE BARRAGENS	22
2.3	CONCRETO MASSA	25
2.4	PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DO CONCRETO	31
2.5	PROPRIEDADES TÉRMICAS DO CONCRETO:.....	33
2.6	MÉTODOS NUMÉRICOS	34
2.6.1	MÉTODOS DAS DIFERENÇAS FINITAS	35
2.6.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	37
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	38
3.1	EQUAÇÃO DO CALOR	38
3.2	CALOR DE HIDRATAÇÃO	40
3.3	CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO	41
4	SOLUÇÕES DO PROBLEMA TÉRMICO	43
4.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	43
4.1.1	EQUAÇÃO DE LAPLACE	44
4.1.2	EQUAÇÃO DE POISSON BIDIMENSIONAL	52
4.1.3	EQUAÇÃO DE FOURIER UNIDIMENSIONAL	54
4.1.4	„EQUAÇÃO DO CALOR COMPLETA COM GERAÇÃO DE CALOR CONSTANTE	58
4.1.5	EQUAÇÃO DO CALOR COMPLETA COM GERAÇÃO TRANSIENTE.....	60
4.2	SOLUÇÕES NUMÉRICAS	64
4.2.1	EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DO CALOR PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF).....	64
4.2.2	EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DO CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS(MEF):	67
5	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	71
5.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MEF – ANSYS.....	71
5.2	IMPLEMENTAÇÃO SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MDF – MATLAB.....	73
5.3	IMPLEMENTAÇÃO SOLUÇÃO ANALÍTICA E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS – MAPLE.....	75
6	VALIDAÇÃO NUMÉRICA	76

6.1	TESTE DE CONVERGÊNCIA - REGIME PERMANENTE.....	76
6.1.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	77
6.1.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	78
6.1.2.1	MDF.....	78
6.1.2.2	MEF.....	79
6.1.3	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	81
6.1.4	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	83
6.2	TESTE DE CONVERGÊNCIA REGIME TRANSIENTE	85
6.2.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	85
6.2.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	86
6.2.3	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	87
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	90
7.1	PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E DOS MATERIAIS	90
7.2	VALIDAÇÃO DO MODELO DA BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE 91	
7.2.1	PLACA RETANGULAR	92
7.2.2	COMPARAÇÃO PLACA COM BARRAGEM	98
7.2.3	BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE:.....	100
7.2.4	BARRAGEM COM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR.....	104
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	106
8.1	CONCLUSÕES:	106
8.2	SUGESTÕES:.....	107
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
	APÊNDICE A	113

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A partir da segunda metade do século passado, o projeto, planejamento e construção de barragens consolidou-se no cenário nacional. Inicialmente, impulsionada pelo crescimento de grandes cidades, como Rio de Janeiro e São Paulo, e, em seguida devido ao processo de industrialização do país quando a oferta de energia era insuficiente para suprir a demanda nacional.

Atualmente, de acordo com o Comitê Internacional de Grandes Barragens (2008), as grandes barragens geram cerca de 19% de toda a eletricidade do mundo e um terço de todos os países dependem de usinas hidrelétricas para produzir mais da metade da sua eletricidade. Grande parte dessas estruturas foram construídas exclusiva ou primordialmente para fins de irrigação, e cerca de 30% a 40% dos 271 milhões de hectares irrigados no planeta dependem das mesmas.

Desse modo, as represas representam um importante meio de atender a necessidades de água e energia da população, além de servir como investimentos estratégicos de longo prazo capazes de oferecer diversos benefícios. Entre as vantagens da construção de barragens, podem ser destacadas o desenvolvimento regional, geração de empregos e fomento para a indústria. Outro aspecto positivo a ser considerado, consiste na geração de renda através da exportação.

No entanto, apesar das vantagens econômicas e sociais, as barragens possuem algumas desvantagens, por exemplo, a possibilidade de ruptura que pode gerar consequências catastróficas para o meio ambiente e sociedade. Infelizmente, não é possível eliminar completamente o risco de um acidente ou incidente envolvendo barragens. A cada década ocorre, em média, dez rompimentos significativos dessas estruturas em algum lugar do mundo. As falhas mais comuns são: enchentes extremas, incertezas geológicas no local escolhido para implantação, perdas de água através das fundações e aterros, defeitos de construção e projeto e sismicidade. No século XX ocorreram 200 casos notáveis de falhas em reservatórios ao redor do mundo e mais de 250.000 pessoas perderam suas vidas em desastres deste tipo. (ZUFFO, 2005)

Os projetos de elementos de barramentos constituídos de estruturas de concreto de grandes dimensões, como vertedouros, tomadas d'água e casa de força, exigem um aprimoramento cada vez maior de profissionais envolvidos em busca de uma metodologia

adequada, de forma a garantir sua qualidade e segurança. De acordo com Silveira (1961), é grande a possibilidade de permanência de uma barragem, durante o período em que a sua existência tem interesse, se a estrutura tiver sido devidamente dimensionada, considerando, entre as várias solicitações, as variações de temperatura e se o material também tiver sido estudado de forma a resistir o melhor possível a essa solicitação.

A previsão da temperatura de uma barragem reveste dificuldades resultantes da diversidade de causas que influenciam o seu estado térmico. O perfeito dimensionamento da estrutura implica o conhecimento das tensões que ela impõe. Similarmente, a pesquisa do material mais apto a resistir às variações de temperatura depende do conhecimento de como os mesmos reagem a solicitação térmica.

Dessa forma, as solicitações térmicas em Barragens de Gravidade de Concreto podem ser sintetizadas conforme pode ser visto na figura abaixo:

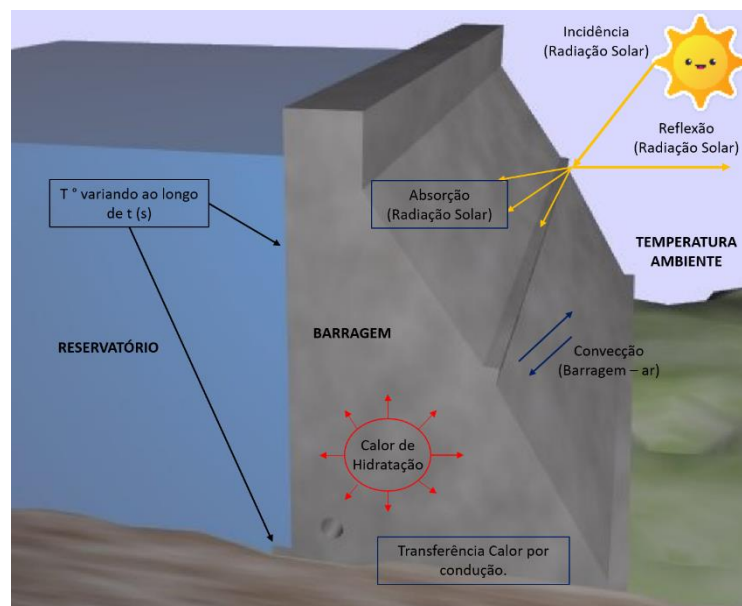


Figura 1 — Transferência de calor em uma barragem de gravidade.

Inicialmente, as barragens geram calor nas primeiras idades de sua existência. A reação de hidratação do cimento é fortemente exotérmica e processa-se durante períodos relativamente longos. No entanto, a barragem está exposta ao efeito da radiação solar e mantém contanto numa das faces com um fluido – o ar – e na outra com um fluido diferente – a água, dificultando, por via analítica ou numérica, a previsão do seu estado térmico.

Modelos de resolução do problema termomecânico têm sido desenvolvidos a fim de prever a distribuição de temperaturas e de tensões durante o processo de construção de estruturas maciças, ou qualquer outra em que o problema térmico é considerável, utilizando

ferramentas numéricas, tais como: Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Com essa aproximada previsão das temperaturas e tensões de origem térmica, mesmo antes que a estrutura seja concretada, pode-se, entre outras coisas, avaliar mais criteriosamente os cenários construtivos, em função da possibilidade de ocorrência de fissuras de origem térmica. (Santos; Calmon, 2004).

1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

De acordo com o American Concrete Institute - ACI (2005), o concreto massa é definido como um grande volume de concreto que apresenta expressivas dimensões, o suficiente para que algumas medidas sejam tomadas para reduzir a temperatura interna dessa estrutura, ou melhor, para reduzir o gradiente térmico entre as partes interna e externa do concreto.

Esse tipo de concreto é utilizado em obras de grandes dimensões e que demandam grandes solicitações estruturais, tais como, blocos de fundações e barragens. Dessa forma, a preocupação com o desempenho da obra antes mesmo da execução é fundamental, pois são obras de alto investimento financeiro e que, em caso de surgimento de patologias, podem vir a provocar grandes desastres. Esse material desenvolve um aquecimento interno durante o processo de hidratação, sendo imprescindível o estudo do comportamento térmico. Essas características influenciam para o aumento da temperatura no interior do concreto devido à liberação de calor no processo de hidratação dos produtos cimentícios, esse processo é chamado de calor de hidratação COELHO et all. (2014).

Junto com o calor de hidratação, os efeitos de condução, radiação e convecção, assim como as condições iniciais e de contorno do concreto também influenciam na elevação da temperatura do material. No entanto, a principal causa de preocupação nesse tipo de problema é o gradiente térmico atingido, ou seja, a diferença entre as temperaturas máxima e mínima que o concreto está sujeito. Pois, quanto maior o gradiente térmico, maior a probabilidade de surgimento de tensões térmicas que provocam as fissurações (COELHO, 2014).

De acordo com Metha e Monteiro (2008), projetistas e construtores de grandes barragens de concreto foram os primeiros a reconhecer a importância da elevação de temperatura no concreto devido ao calor de hidratação e subsequente retração e fissuração ocorridos no resfriamento. Fissuras paralelas ao eixo da barragem ameaçam sua estabilidade estrutural. Alguns recursos, como a utilização de softwares, podem prever e avaliar a temperatura interna no concreto massa. Este processo permite a identificação das maiores

temperaturas atingidas, do tempo de evolução do calor e dos locais de temperatura crítica na estrutura. Com esses dados é possível buscar soluções para melhor adequação ao problema (COELHO, 2012).

Portanto, partindo do comportamento térmico das barragens de gravidade e levando em consideração os possíveis problemas resultantes do gradiente térmico na estrutura, a presente pesquisa consiste em determinar a evolução térmica do concreto massa em uma estrutura de barragem através dos Métodos das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos utilizando, respectivamente, os programas Matlab e ANSYS no intuito de solucionar o problema proposto.

1.3 MOTIVAÇÃO

As Barragens de Gravidade de Concreto se revestem de peculiaridades próprias, por efeito do considerável volume de concreto necessários para sua construção. Em virtude da utilização do concreto massa na execução destes empreendimentos, verifica-se então a importância do controle da geração de calor e da consequente variação de volume, devido os problemas técnicos e econômicos envolvidos.

Apesar da sua grande utilização, a quantidade de pesquisas referentes a análise numérica dos efeitos térmicos em estruturas de concreto massa, realizadas em território nacional, é bem pequena. De acordo com Coelho (2015), os estudos nessa área não são tão abrangentes, limitados a algumas universidades e grandes empresas. Muitas informações são restritas e pouco divulgadas no âmbito das pesquisas científicas. No entanto, vários questionamentos relativos ao concreto massa ainda precisa ser esclarecidos, tais como, a altura ideal de uma camada para redução do calor e a melhor posição para dispor os tubos de refrigeração.

Dessa forma, diante da importância das barragens atualmente, a presente pesquisa tem por motivação as previsões das isotermas nas Barragens de Gravidade de Concreto com o objetivo de direcionar na escolha e execução de métodos construtivos que minimizem/sanem os impactos das ações térmicas na estrutura. Outrossim, surge de modo a contribuir com a discussão no meio acadêmico acerca da solução numérica do problema térmico em estruturas massivas de concreto, como barragens, permitindo assim o entendimento, estudos e aplicações futuras.

1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho é realizar uma análise numérica do problema térmico em barragens de gravidade utilizando-se os Métodos das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos para a solução do problema. Explora-se uma abordagem direcionada à implementação numérica do método e da validação dos resultados. Desta maneira busca-se simular o comportamento térmico da barragem, implementando um código bidimensional por Diferenças Finitas no MATLAB e outro por Elementos Finitos via ANSYS, sendo feita posteriormente a comparação dos resultados obtidos.

Para que o objetivo principal seja atendido os seguintes objetivos específicos devem ser alcançados:

- Estudar as diversas formas da Equação do Calor e da Equação de Geração de Calor do concreto massa entendendo o seu comportamento.
- Implementar a solução do problema térmico via MDF e MEF.
- Implementar os modelos numéricos para a solução do problema térmico via MDF e MEF.
- Validar a metodologia numérica implementada: o código precisa ter resultados confiáveis, dessa forma a sua validação se torna parte indispensável do trabalho. Além de comprovar a acuracidade dos resultados obtidos pelo código.
- Implementar as condições de contorno e condições iniciais para simular o problema térmico em barragens de gravidade.
- Representar graficamente dos resultados obtidos.

1.5 METODOLOGIA

Na presente pesquisa foi desenvolvida a análise analítico-numérica de problemas térmicos em Barragens de Gravidade de Concreto, para as quais foram aplicados os Métodos dos Elementos Finitos (MEF) e das Diferenças Finitas (MDF). Estes consistem em método numéricos que resolvem equações diferenciais que governam fenômenos físicos envolvidos nos problemas de engenharia.

A pesquisa foi dividida em quatro etapas. Inicialmente, realizou-se uma revisão da literatura buscando a compreensão sobre o problema térmico no caso de estudo e, a partir do

conhecimento obtido, adotou-se a metodologia aqui descrita para que os objetivos propostos fossem alcançados.

Na segunda etapa, foram desenvolvidas as soluções analíticas e numéricas para a Equação do Calor degenerada. A solução analítica foi determinada através do Método de Separação de Variáveis enquanto a solução numérica via MDF e MEF. Para todas as soluções foram adotadas as mesmas condições iniciais e de contorno.

Posteriormente, foram realizadas simulações do problema através de modelos simplificados (barras e placas). As soluções obtidas pelo Método Analítico e das Diferenças Finitas foram desenvolvidas através do MatLAB e a solução via Elementos Finitos utilizando o Ansys Workbench. Para a validação dos modelos numéricos, foram realizadas comparações das curvas "Temperatura *versus* Posição", para o Regime Permanente e Transiente, e das curvas "Temperatura *versus* Tempo", para o caso do Regime Transiente, obtidas analiticamente e numericamente neste estudo.

A última etapa deste trabalho foi a modelagem numérica via MDF e MEF de uma Barragem de Gravidade de Concreto. Foi analisada a geração interna de calor. Por fim, a partir dos resultados obtidos, apresenta-se as conclusões dessa pesquisa.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta monografia divide-se em 8 capítulos. Uma breve descrição do conteúdo apresentado em cada capítulo é feita a seguir:

No Capítulo 1 foi realizada a introdução ao tema, constando os objetivos e as justificativas da pesquisa, bem como a metodologia empregada.

O Capítulo 2 foi voltado ao referencial teórico que serviu como base para este trabalho. Dessa forma, realizou-se uma revisão bibliográfica sobre o assunto.

O Capítulo 3 aborda a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento da pesquisa. Descrevendo as equações que discretizam o fenômeno térmico, o calor de hidratação e as respectivas condições iniciais e de contorno.

O capítulo 4 versa sobre o desenvolvimento das soluções analíticas e numéricas desenvolvidas.

No capítulo 5 são apresentados os aspectos computacionais, informando a configuração mínima requerida para desenvolvimento das soluções numéricas, descrevendo sobre os programas utilizados e sobre os procedimentos adotados para as simulações.

No Capítulo 6 foi abordada a simulação numérica para casos simplificados, destacando-se os parâmetros utilizados nas modelagens, bem como os resultados obtidos. Além disso, fez-se a validação numérica das soluções propostas comparando os resultados numéricos com os analíticos.

O capítulo 7 foi dedicado às simulações numéricas aplicadas ao caso da Barragem, sendo apresentadas as particularidades de cada simulação e os resultados obtidos.

No capítulo 8 foram apresentadas as conclusões desta pesquisa, bem como sugestões para futuras investigações.

A Referência Bibliográfica e o Apêndice completam o volume da monografia.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo tem o propósito de fornecer um embasamento teórico para compreensão dos efeitos térmicos em barragens de gravidade. Inicialmente, algumas definições e a evolução histórica destas estruturas são apresentadas. Em seguida, o concreto massa é descrito, assim como suas propriedades físicas, térmicas e mecânicas. Finalmente, uma breve explicação dos métodos numéricos (MDF e MEF) é desenvolvida, finalizando esta seção.

2.1 DEFINIÇÃO DE BARRAGEM

"Barragem é qualquer estrutura em um curso permanente ou temporário de água para fins de contenção ou acumulação de substâncias líquidas ou de misturas de líquidos e sólidos, compreendendo o barramento e as estruturas associadas" (Brasil, 2010).

Segundo *US Bureau of Reclamation* (1987), estas estruturas podem ser classificadas segundo diversos critérios:

1. De acordo com a utilização:
 - Barragens de armazenamento ou regularização das vazões.
 - Barragens de derivação para desviar o fluxo para canais.
 - Barragens para controle das cheias.
 - Barragens para contenção de rejeitos industriais.
2. De acordo com o projeto hidráulico:
 - Barragens vertedoras ou de soleira livre.
 - Barragens não vertedoras.
3. De acordo com o comportamento estrutural:
 - Barragens tipo gravidade.
 - Barragens estruturadas.
4. De acordo com os materiais de construção:
5. Barragens de concreto ou alvenaria. Barragens de aterro (terra ou enrocamento).

As barragens de gravidade são os tipos mais comuns e que requerem a menor manutenção, se adaptam em qualquer localidade, mas tem limitações de altura com relação à base e à fundação (CREAGER, 1964, *Apud* COELHO, 2012). A figura 2 mostra uma barragem do tipo gravidade.



Figura 2 — Barragem de Gravidade de Concreto (EngWhere, 2018)

Muitas destas barragens foram construídas há 50 anos ou mais, algumas delas com valor histórico relevante, e apresentam sintomas de envelhecimento, tanto no corpo da barragem como no maciço de fundação. Para além disto, os regulamentos de segurança são atualizados com regularidade, fruto do desenvolvimento científico e tecnológico e da experiência acumulada. Torna-se então necessário rever periodicamente as condições de segurança das barragens existentes segundo estas novas exigências, que, não raras vezes, justificam obras a nível estrutural e hidráulico. Estas atividades devem ser apoiadas, tanto quanto possível, por ferramentas numéricas apropriadas, garantindo o nível de segurança exigido.

2.2 BREVE HISTÓRICO DE BARRAGENS

Desde o início da história da Humanidade, as barragens foram fundamentais ao desenvolvimento. A sua construção devia-se, sobretudo, à escassez de água no período seco e à conseqüente necessidade de armazenamento de água, feito em barragens executadas em bases empíricas. Algumas das barragens mais antigas de que se tem conhecimento situavam-se, por exemplo, no Egito, Médio Oriente e Índia (SOUZA, 2017).

De acordo com *International Commission on Large Dams* (2000), as primeiras barragens de terra foram construídas em 2000 a.C.; e a barragem de Sayamaike, uma das mais antigas do

Japão, foi construída no início do século VII e, após várias modificações e um aumento de sua altura, continua em uso até hoje. As primeiras barragens de gravidade foram construídas por volta do ano 700 a.C., pelo rei assírio Senacherib, com o objetivo de abastecimento de água. Elas foram executadas em alvenaria e seus restos ainda podem ser vistos. Outra barragem antiga de que se tem registro é a barragem de Marib, construída por volta de 500 a.C. e que foi utilizada por quase 1000 anos. Na Europa, até o século XIX, as barragens de gravidade eram construídas em alvenaria.

Segundo Moura (2016), uma contribuição decisiva para a construção desse tipo de barragem veio com os romanos, que introduziram uma mistura de cal e cinzas vulcânicas com propriedades pozolânicas na sua construção. Após os romanos e até o século XIX pouco progresso foi feito. Com a invenção do cimento Portland em 1892, passou-se a empregar o concreto também na construção de barragens, embora até 1930 as barragens em alvenaria representassem 50% do total de barragens de gravidade existentes. Até os dias de hoje esse material ainda é amplamente utilizado em países onde a mão de obra é barata, tais como a China e a Índia.

Por volta de 1950, o número de barragens construídas aumentava cada vez mais, à medida que a demanda a ser atendida também aumentava. As barragens de concreto nesse período representavam, então, 38% das barragens com mais de 15 m construídas no mundo. Porém, nos anos subsequentes essa porcentagem foi diminuindo até representar apenas 16,5% do total em 1982. Esse declínio ocorreu por conta do elevado custo do concreto – que requer um importante aporte de mão de obra, especialmente no caso de execução de formas, além de toda a tecnologia empregada – e do aumento da popularidade das barragens de terra e enrocamento, num momento em que ocorria um grande desenvolvimento da tecnologia de mecânica dos solos (MILANI FILHO ,2003, Apud MOURA ,2016).

De acordo com MELLO (2011), a mais antiga barragem que se tem notícia em território brasileiro foi construída onde hoje é área urbana do Recife, PE, possivelmente no final do Século XVI, antes mesmo da invasão holandesa. Conhecida presentemente como açude Apipucos, aparece em um mapa holandês de 1577. Os registros das primeiras barragens do Brasil são esparsos e sem divulgação, o que dificulta o retrospecto histórico dessas estruturas. Registros destacam que a primeira usina hidrelétrica instalada no país foi a de Ribeirão do Inferno, em Minas Gerais, em 1884 (Comitê Brasileiro de Grandes Barragens, 1982).

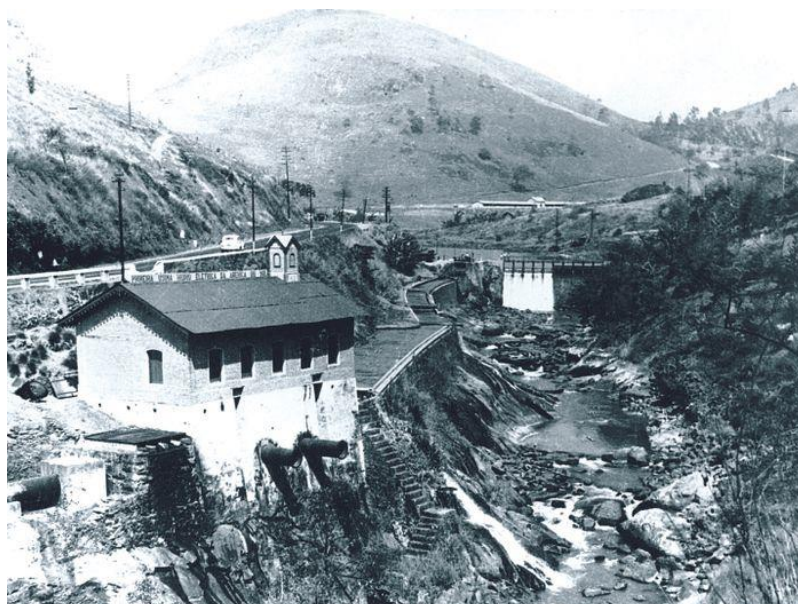


Figura 3 — Usina Hidrelétrica de Ribeirão do Inferno (CEMIG).

Marques Filho e Isaia (2011) Apud. Souza (2017), evidenciam que a utilização do concreto como material de construção de barragens de aproveitamentos hidráulicos ocorre a mais de 120 anos. Porém, vale ressaltar que, no período anterior a 1900, o concreto utilizado em barragens não era controlado. O primeiro controle tecnológico registrado foi feito pelos EUA na barragem de Crystal Spring, na Califórnia, concluída em 1890. Posteriormente, o controle do concreto e o conceito de concreto massa foi se aprimorando nas barragens Elephant Butte, Arrowrock Dam (1915), Big Dalton Dam (1920), Theodore Roosevelt Dam (American Concrete Institute, 1999).

O período correspondente de 1930 a 1970 houve um grande desenvolvimento na construção de barragens em concreto massa. Em 1930 foi organizado o ACI 207 que trata das informações e propriedades do concreto massa. A construção da Hoover Dam nos EUA nessa época contribuiu para a evolução, devido ao seu tamanho, exigiu uma análise mais minuciosa dos materiais e técnicas construtivas, além de terem sido instalados tubos de pós-resfriamento do concreto. Após 1970 foi desenvolvido o Concreto Compactado a Rolo (CCR) e suas técnicas são aprimoradas até hoje (American Concrete Institute, 1999).

A partir dos anos de 1970 a construção de hidrelétricas no Brasil cresceu consideravelmente, e há ainda grande perspectiva de crescimento. Algumas ganham destaque no âmbito nacional, como é o caso de Itaipu, FURNAS, Xingó, Sobradinho, Paulo Afonso, Tucuruí, Belo Monte, Santo Antônio, Complexo Tapajós (SOUZA, 2017).



Figura 4 — Usina Hidrelétrica de Tucuruí. (ANA,2017)

2.3 CONCRETO MASSA

Metha e Monteiro (2008), define o concreto massa como o concreto em uma estrutura maciça; por exemplo, viga, pilares, estacas, comportas, ou barragens onde o volume é de tal magnitude que requer meios especiais para combater a geração de calor e decorrente mudança de volume. De modo análogo, ISAIA (2005) define como aquele que, ao ser aplicado uma estrutura, requer a tomada de precauções que evitem fissurações derivadas de seu comportamento térmico, sendo este seu aspecto fundamental.



Figura 5— Trabalhador da construção civil concretando uma fundação

Muitas obras utilizam o concreto massa em suas estruturas. Devido estas estruturas apresentarem grandes dimensões e grandes volumes de concreto, quanto a estas características,

tornam-se preocupantes devido à probabilidade do surgimento de patologias, tais como fissurações e trincas. As estruturas com grande quantidade de concreto produzem uma elevação da temperatura interna do corpo, devido à liberação do calor de hidratação dos materiais cimentícios. Projetistas e construtores de grandes barragens de concreto foram os primeiros a reconhecer a importância da elevação da temperatura no concreto devido ao calor de hidratação e subsequente retração e fissuração ocorridos no resfriamento (METHA; MONTEIRO, 2008).

Assim como o concreto convencional, o concreto massa é composto de cimento, agregados e água, além de, em muitos casos, pozolana e outras adições. A dosagem tem como objetivo ou foco a seleção e a quantificação destes materiais de modo a proporcionar economia e redução do calor de hidratação (figura 6), sem desconsiderar a obtenção de uma adequada trabalhabilidade, resistência, durabilidade e impermeabilidade que respeitem o propósito da estrutura na qual será aplicado.

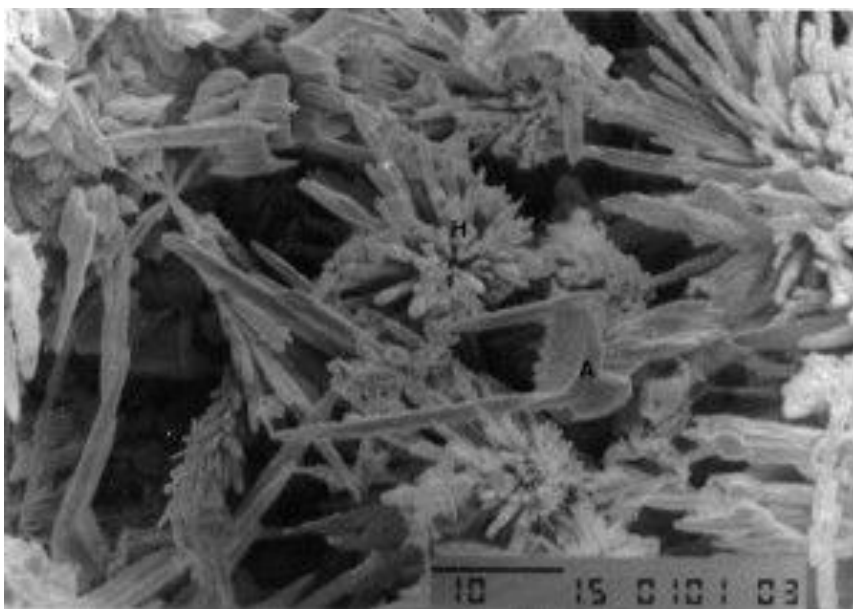


Figura 6 — Hidratação do Cimento – microestrutura (Tokudome, 2008).

Segundo o Comitê Internacional de Grandes Barragens (2008), o concreto massa difere do concreto estrutural na medida em que é colocado em seções de espessura onde o calor de hidratação dissipa lentamente e o gradiente térmico pode induzir aberturas no concreto. Sabe-se que a reação da água com o cimento, que resulta na formação dos silicatos de cálcio hidratados (CSH) é exotérmica, ou seja, libera calor. Portanto, quando a temperatura do concreto se diferencia da temperatura na superfície do elemento estrutural a probabilidade de ocorrer uma fissura devido ao efeito térmico é muito grande. Isso ocorre porque conforme o concreto começa a esfriar e endurecer, ele passa por um processo natural de retração. Com isso

criam-se condições para que surjam tensões de tração que, se forem inferiores à resistência do material, poderão provocar fissuras (THOMAZ, 2013).

A tensão por tração no resfriamento do concreto pode inicialmente ser considerado como o produto de quatro fatores: K_r (grau de restrição), E (módulo de elasticidade), α (coeficiente de expansão térmica) e ΔT (variação de temperatura). Já que a queda de temperatura e a tensão resultante não ocorrem simultaneamente, é necessária uma correção na tensão calculada para se considerar o alívio de tensão devido a fluência. Portanto, o produto dos fatores, menos a tensão de relaxação por fluência, determina a tensão real; o concreto fissura quando a magnitude da tensão excede a resistência de tração do material (Figura 8).

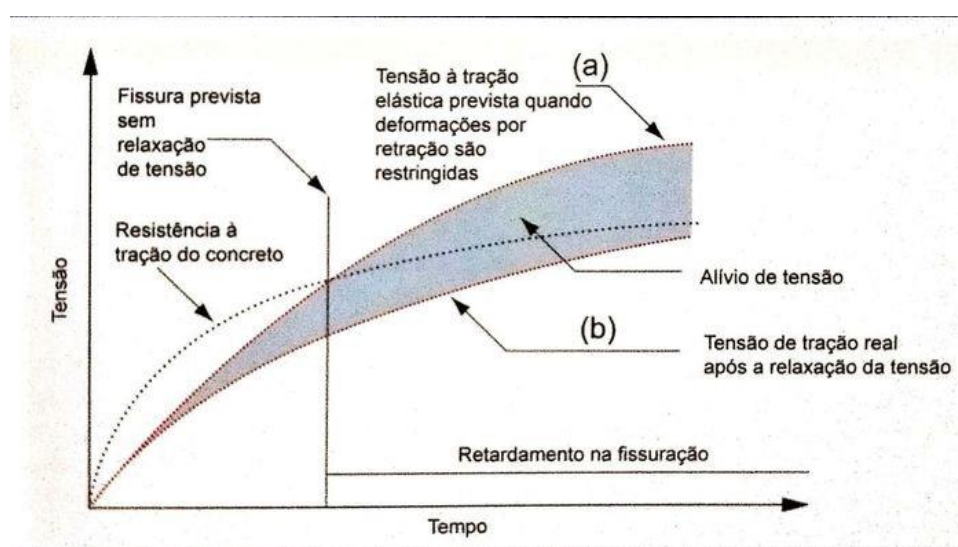


Figura 7 — Influência da retração e da fluência na fissuração do concreto. (Metha e Monteiro, 2008).

A queda de temperatura é o mais fácil de se controlar e recebe maior atenção na construção de barragens. Embasando várias práticas de construção para se reduzir a queda de temperatura, há a consciência de que uma estratégia de custo efetiva é restringir o calor de hidratação do cimento, que é a origem primária do aumento de temperatura. Princípios básicos, derivados principalmente de experiências que orientam a seleção dos materiais, dosagens e práticas de construção para controlar o aumento ou queda de temperatura no concreto massa serão discutidos posteriormente. (Metha; Monteiro, 2008). A seguir alguns dos pontos sobre materiais e suas respectivas dosagens aplicados ao concreto massa baseado nos estudos de Metha e Monteiro (2008) são discutidos.

Cimento: O calor de hidratação de um cimento é uma função da composição e finura de seus compostos. Cimentos Portland que contêm respectivamente mais C3A (Aluminato

Tricálcico) e C3S (Silicato Tricálcico) apresentam maior calor de hidratação do que os cimentos mais grossos ou com menos C3A e C3S. Caso o aumento e a subsequente queda de temperatura seja julgado muito alto do ponto de vista da fissuração térmica, uma forma de baixá-la seria a redução do consumo de cimento do concreto, desde que isso por ser feito sem comprometer a resistência mínima e os requisitos de trabalhabilidade.

Aditivos e adições: Com teores de cimento 100 Kg/m^3 , é essencial usar um baixo consumo de água para alcançar a resistência à compressão projetada para um ano (na faixa de 13 a 17MPa), que normalmente é especificada para o concreto no interior de grandes estruturas de gravidade. Aproximadamente de 4 a 8% de ar incorporado são rotineiramente incorporados às misturas de concreto para reduzir o consumo de água, enquanto a trabalhabilidade desejada é mantida. Aditivos redutores de água cada vez mais são simultaneamente aplicados para o mesmo fim.

Agregados: Nas misturas de concreto para barragens, todos os métodos possíveis para reduzir a quantidade de água que possam permitir uma redução correspondente no consumo de cimento (mantendo uma relação água/cimento constante) devem ser explorados. Sob esse aspecto, os dois métodos mais efetivos em termos de custo são a maior quantidade possível de agregado graúdo e a seleção de dois ou mais grupos individuais de dimensão de agregado graúdo que devem ser combinados para produzir uma graduação máxima em termos de massa específica (teor mínimo de vazios). Os limites típicos da graduação do agregado graúdo para concreto massa e graduação ideal combinada para agregado de no máximo 150mm e 75mm são especificados no relatório do (COELHO, 2012). O consumo de agregado e sua mineralogia têm uma grande influência sobre as propriedades relevantes do concreto massa, como o módulo de elasticidade, coeficiente de expansão térmica, difusividade e capacidade de deformação.

Dosagem: O procedimento para dosagem do concreto massa é o mesmo que o usado para determinar as dosagens para concreto convencional. Além da maior dimensão do agregado, a determinação do consumo de água deve se basear na maior consistência possível de concreto fresco que possa ser misturado, lançado e compactado adequadamente. Se o equipamento do canteiro de obras é inadequado para manuseio de concreto com consistência rígida, deve-se buscar equipamentos alternativos, em vez de aumentar os teores de água e de cimento na mistura do concreto. No caso de concreto pré-resfriado, as misturas experimentais de laboratório também devem ser feitas a baixas temperaturas, pois menos água será necessária para atingir a consistência dada de 5 a 10°C do que a temperaturas ambientes normais (de 20 a 30°C), devido à hidratação mais lenta do cimento a baixas temperaturas.

A determinação do consumo de cimento de concreto massa é orientada pela relação entre água/cimento e a resistência que parece ser significativamente afetada pela textura do agregado. Em clima moderado ou ameno, geralmente é permitido concreto com uma relação água/cimento máxima de 0,8 para o interior de barragens e paredes de comportas e de 0,6 para superfícies externas expostas à água. A tensão de compressão máxima em barragens de gravidade adequadamente projetadas contra tombamento e deslizamento é bastante baixa; em unidades de MPa, geralmente é de 0,025 a 0,03 vezes a altura da barragem em metros. Por segurança, recomenda-se que a resistência do concreto seja quatro vezes a tensão máxima um ano após a construção. Barragens construídas antes de 1940 continham concretos feitos com aproximadamente 223Kg/m³ de consumo de cimento.

A adoção de certas práticas de construção é utilizada para controlar a elevação de temperatura em estruturas de concreto de grande porte e, conseqüentemente, as fissuração de origem térmica. A seguir é apresentado um resumo de um relatório técnico sobre resfriamento e sistemas isolantes para concreto massa (ACI 207, 1980, Apud METHA; MONTEIRO, 2008):

•Pós – resfriamento: O primeiro grande uso de pós-resfriamento de concreto em obra foi na construção da Barragem Hoover no início da década de 1930. Além do controle da temperatura, um objetivo primordial do pós-resfriamento foi contrair os pilares de concreto que compunham a barragem a um volume estável, de forma que as juntas de construção pudessem ser preenchidas com graute para assegurar a ação monolítica da barragem. Devido a baixa difusividade do concreto (de 0,065 a 0,084 m² por dia), levaria mais de 100 anos para a dissipação de 90% da elevação de temperatura, através dos processos naturais. Apesar do uso de cimento de baixo calor de hidratação na produção do concreto, que continha um agregado de dimensão máxima de 150 mm, também foi empregado um método especial de construção em blocos para uma eficiente dissipação de calor.

O resfriamento foi obtido por meio da circulação de água fria através de tubos de aço com paredes finas embutidos no concreto (tipicamente 25mm de diâmetro nominal e 1,5mm de espessura das paredes). Na Barragem Hoover, a circulação da água fria iniciou-se após a temperatura do concreto ter atingido 65°C (isto é, várias semanas após o lançamento do concreto). Posteriormente, para a construção de várias outras barragens, o *U.S. Bureau of Reclamation* seguiu essencialmente a mesma prática, mas a circulação da água foi iniciada simultaneamente ao lançamento do concreto. Além disso. O espaçamento dos tubos e a espessura das camadas variaram para limitar a temperatura máxima a um nível projetado em todas as estações.



Figura 8 — Esquema de circulação de água através de tubos no interior do concreto. (Sousa e Silva, 2014)

De acordo com o Metha e Monteiro (2008), durante os poucos primeiros dias que se seguem ao lançamento as taxas de resfriamento ou de remoção de calor podem ser as mais altas possíveis, porque o módulo de elasticidade do concreto é relativamente baixo. A resistência e o módulo de elasticidade geralmente aumentam rapidamente até depois de ocorrer o pico inicial de temperatura do concreto, que pode se dar em algum momento durante os primeiros 15 dias que seguem ao lançamento. Depois disso, o resfriamento deve continuar numa taxa em que a queda de temperatura do concreto não exceda $0,6^{\circ}\text{C}$ por dia. Experiências mostram que a maioria dos concretos massa, que possuem propriedades de expansão elástica e térmicas médias, pode suportar uma queda de temperatura de a 17°C durante um período de aproximadamente 30 dias após o pico inicial. Quando o concreto se torna elástico, é importante que a queda de temperatura se dê o mais lentamente possível para permitir a relaxação. Sob essas condições lentas de resfriamento, o concreto pode suportar uma redução de 20°C na temperatura sem fissurar.

•Pré-resfriamento: A primeira utilização do pré-resfriamento de materiais para reduzir a temperatura máxima de concreto massa foi feita pela *Corps of Engineers* durante a construção de Barragem Norfolk, no início da década de 1940. Uma parte da água de amassamento foi introduzida no concreto na forma de gelo triturado para que a temperatura do concreto fresco na obra ficasse limitada a cerca de 6°C . Em seguida, combinações de gelo triturado, água de amassamento fria e agregados resfriados foram utilizados pelo *Corps of Engineers* na

construção de várias grandes barragens de gravidade (de 60 a 150 m de altura) para atingir temperaturas de lançamento da ordem de 4,5°C.

De acordo com o Coelho (2012), o controle da temperatura de lançamento é de grande influência para evitar a fissuração térmica do concreto, quando este passa do estado plástico para o estado elástico, menor será a tendência à fissuração. Em estruturas de grande porte, cada redução de 6°C na temperatura de lançamento do concreto, abaixo da temperatura média do ar, resulta em queda de cerca de 3°C na temperatura máxima a ser atingida pelo concreto.

Para aumentar a temperatura em 0,6°C, a água absorve 2,2 Btu/Kg de calor, enquanto o cimento e agregados absorvem apenas 0,49 Btu/Kg. Portanto é mais eficiente usar água gelada na redução da temperatura do concreto. Sendo, o uso de gelo o mais eficiente, porque este absorve 317Btu/kg de calor ao passar para o estado líquido. Para a homogeneidade do concreto, é importante que todo o gelo na mistura do concreto esteja derretido antes da conclusão da mistura. Dessa forma, o gelo em escamas a partir do gelo prensado na forma de biscoito é preferível a blocos de gelo triturados. O resfriamento do agregado graúdo, enquanto é transportado para a betoneira, por meio de borrifamento de água gelada, pode ser necessário para suplementar a utilização de gelo e água de amassamento resfriada.

•Isolamento superficial: O objetivo do isolamento superficial não é restringir a elevação da temperatura, mas regular a taxa de queda da temperatura de forma que as diferenças de tensão devidas a altos gradientes de temperaturas entre a superfície do concreto e seu interior, sejam reduzidas. Depois de o concreto endurecido adquirir elasticidade, quedas de temperaturas ambiente e aumentos da temperatura interna agem ao mesmo tempo para aumentar o gradiente de temperatura e o diferencial de tensão. Especialmente em climas frios, pode ser aconselhável moderar a taxa de perda de calor de superfícies cobrindo-as com coxins de poliestireno expandido ou poliuretano (fator k da ordem de 12,6 a 27,8 Btu – mm/h-m²°C).

2.4 PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS DO CONCRETO

Na maioria das vezes, a resistência do concreto é estabelecida pelo projeto da estrutura. Isto também ocorre, em menor escala, com outras propriedades, como, por exemplo, a permeabilidade, em algumas estruturas hidráulicas, e a massa específica, em estruturas que necessitem de maior peso ou sejam submetidas à radiação nuclear. Durante a execução da obra, as propriedades do concreto especificadas pelo projeto devem ser controladas, de modo a garantir o seu atendimento ao projeto. Outras propriedades do concreto não são definidas pelo

projeto e dependem dos materiais empregados na sua produção e do traço na dosagem do concreto (ANDRADE, 1997).

Segundo Andrade (1997), a determinação das propriedades do concreto reveste-se de maior importância no caso de estruturas de concreto massa. As variações térmicas do concreto tornam essas estruturas mais susceptíveis à fissuração. O controle da fissuração do concreto massa exige a realização de estudos térmicos aprofundados, para os quais é necessário o conhecimento da maioria das propriedades do concreto, que devem ser determinadas em laboratório. Este tópico tem por finalidade destacar as principais características e propriedades do material concreto, incluindo aspectos relacionados à sua utilização, além de especificar alguns dos fatores que influenciam na resistência mecânica do concreto, conforme pode ser visto na Figura 09.

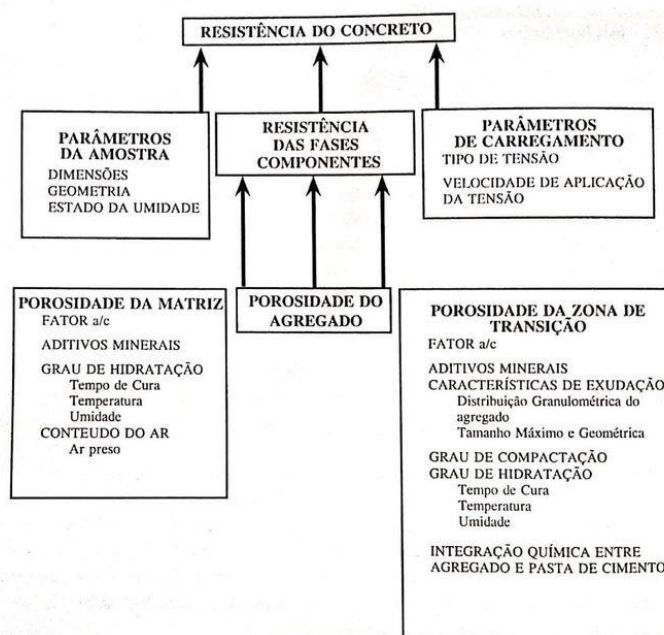


Figura 09 — Interação dos fatores que influenciam a resistência do Concreto. (Metha e Monteiro, 2008)

De acordo com Coelho (2012) para o conhecimento dos estados tensionais do material faz-se inicialmente um estudo dos processos de tração, compressão e deformação do concreto, buscando, dessa forma, perceber a influência da temperatura nesses estágios de tensão, uma vez que a hidratação do cimento, e outros efeitos térmicos associados, podem acelerar esses processos físicos e mecânicos e ajudar no surgimento de patologias.

A seguir serão discutidas algumas das principais propriedades do concreto:

- Resistência à compressão: a resistência à compressão do concreto depende de vários fatores que influenciam em sua porosidade. Esses fatores são a relação água/cimento, o teor de ar incorporado, o tipo de cimento utilizado, as características dos agregados, o uso de aditivos, as condições de cura, desenvolvimento da idade de hidratação do concreto. Na compressão, é necessário um maior gasto de energia para gerar e aumentar fissuras existentes na matriz.

- Resistência à tração: a fissuração do concreto é frequentemente consequência de uma ruptura por tração; a retração geralmente ocorre devido à redução da temperatura do concreto ou à secagem do concreto úmido. Para estruturas de concreto geralmente se utiliza o aço para absorver as cargas de tração, no entanto, essa solução é impraticável em estruturas de concreto massa, tais como barragens (Metha e Monteiro, 2008). É importante ressaltar também que no concreto massa a análise tensional devido ao problema térmico está relacionada com a resistência à tração. Deve-se lembrar ainda que os fatores que influenciam na resistência à compressão também influenciam a tração (COELHO, 2016).

- Deformações do Concreto: as deformações no concreto podem levar às fissurações, sendo preocupante no caso das barragens. Elas ocorrem devido ao comportamento do material com relação às cargas externas ou como resposta às ações ambientais. Geralmente, em peças espessas, a retração por secagem é um fator menos importante que a contração térmica (COELHO, 2012).

De acordo com Skumautz (2006) Apud. Coelho (2012), as microfissuras do concreto aparecem devido à relação entre as forças internas e a rigidez dentro do concreto. Sabendo-se que a resistência da matriz do concreto é menor que a dos grãos do agregado, surgem microfissuras ao redor dos grãos. Com o aumento da tensão, essas microfissuras se ligam e formam fissuras macroscópicas, que podem levar ao surgimento de trincas.

2.5 PROPRIEDADES TÉRMICAS DO CONCRETO:

É necessário ter o conhecimento das propriedades térmicas do concreto para entender o seu comportamento. O estudo da massa e do calor específico, da condutividade e da difusividade térmica são importantes para o desenvolvimento de gradientes de temperatura, deformações térmicas, empenamento e fissuração nas primeiras idades do concreto e para a isolamento térmica proporcionada pelo serviço do concreto (COELHO, 2012). Desse modo, a seguir são descritas as definições de modo resumido sobre as propriedades térmicas do concreto baseado em pesquisas realizadas por (METHA; MONTEIRO, 2008):

•Massa específica (ρ): A massa específica é a relação entre a massa de um corpo sobre o volume que esse mesmo ocupa. Desta forma pode-se dizer que a densidade mede o grau de concentração de massa em determinado volume. É influenciada pelo teor de água e de finos, pelos agregados utilizados e pelo índice de vazios. Quanto menor a quantidade de água e teor de pasta na mistura maior será a massa específica. A massa específica do concreto no estado fresco pode ser um importante indicador das características que este apresentará no estado endurecido. O aumento de temperatura é dado com o aumento de massa específica do concreto (COELHO, 2016).

•Coeficiente de expansão térmica (α): é definida como a variação na unidade de comprimento por variação na unidade de temperatura. Este coeficiente pode ser determinado pela média ponderada dos componentes do concreto.

•Calor específico (c): corresponde à quantidade necessária de calor para elevar em um grau a temperatura de uma unidade de massa de um material. No qual o calor específico do concreto de peso normal não é muito afetado pelo tipo de agregado, temperatura e outros parâmetros. Geralmente, os valores típicos do calor específico ficam entre 0,9 e 1,0 KJ/Kg.°C.

•Condutividade térmica (K): fornece o fluxo de calor transmitido através de uma unidade de área de um material sob uma unidade de gradiente de temperatura unitária.

•Difusividade térmica (κ): De acordo com Metha e Monteiro (2008) a difusividade térmica é a propriedade que expressa a capacidade de difusão de calor em todas as direções e indica a facilidade com que o concreto tolera variações da temperatura. O calor se move mais facilmente pelo concreto com maior difusividade térmica. Para o concreto de densidade normal, a condutividade geralmente controla a difusividade térmica porque a difusividade térmica porque a densidade e o calor específico não variam muito.

2.6 MÉTODOS NUMÉRICOS

O uso da modelagem computacional aplicada a todos os campos da engenharia – aeronáutica, mecânica, civil, dentre outras – tem crescido muito ao longo das últimas décadas, porém, apenas recentemente essa técnica passou a ser empregada por engenheiros de barragens. Isso ocorreu, em parte, por causa da lacuna que existia entre os especialistas em modelagens numéricas e os projetistas de barragens – que frequentemente preferiam recorrer aos métodos analíticos de cálculo e aos métodos empíricos baseados em sua experiência profissional. Tal

distância foi reduzida uma vez que se passou a compreender o potencial do uso de modelos numéricos, e a se utilizar com crescente frequência os computadores (ICOLD, 2001).

Muitos dos problemas práticos de engenharia não têm solução exata, portanto faz-se uso de soluções aproximadas. O modelo computacional – tal como ocorre com o modelo analítico – deve ser capaz de representar satisfatoriamente bem os problemas a serem resolvidos. Assim, a escolha do modelo a ser utilizado irá depender do nível de precisão de resposta que se espera. Algumas perguntas devem ser feitas pelos projetistas de barragens, como por exemplo: o modelo tem que ser tridimensional ou é suficiente que seja bidimensional? Ele deve representar a fundação ou quanto dela? Efeitos dinâmicos devem ser representados? (MOURA, 2016).

Desta forma, existem diferentes processos para se calcular a temperaturas no interior de estruturas de concreto, destacando-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Em ambos os processos, as temperaturas são calculadas por meio de computador, tendo em vista o grande volume de cálculos, realizados repetidamente para diversos intervalos de tempo e para diferentes condições de lançamento do concreto. (ANDRADE, 1997).

2.6.1 MÉTODOS DAS DIFERENÇAS FINITAS

"O método numérico das diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A idéia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças" (RUGGIERO; LOPES, 2006).

Desta forma, o método consiste em um procedimento numérico que resolve EDP's por discretização do domínio físico contínuo em uma malha discreta finita, aproximando cada derivada parcial na EDP por aproximações de diferenças algébricas finitas (JOED.HOFFMANN, 2015). A equação de diferenças finitas deve representar a solução exata da EDP em cada ponto da região discretizada em que se deseja obter a solução do problema.

Este método numérico pode ser usado em muitos problemas de engenharia, como nos problemas de placas, de transferência de calor, na determinação de deformações nas vigas, etc., quando soluções analíticas para as equações diferenciais governantes não podem ser encontradas ou são difíceis de se determinar. (SZILARD, 2004).

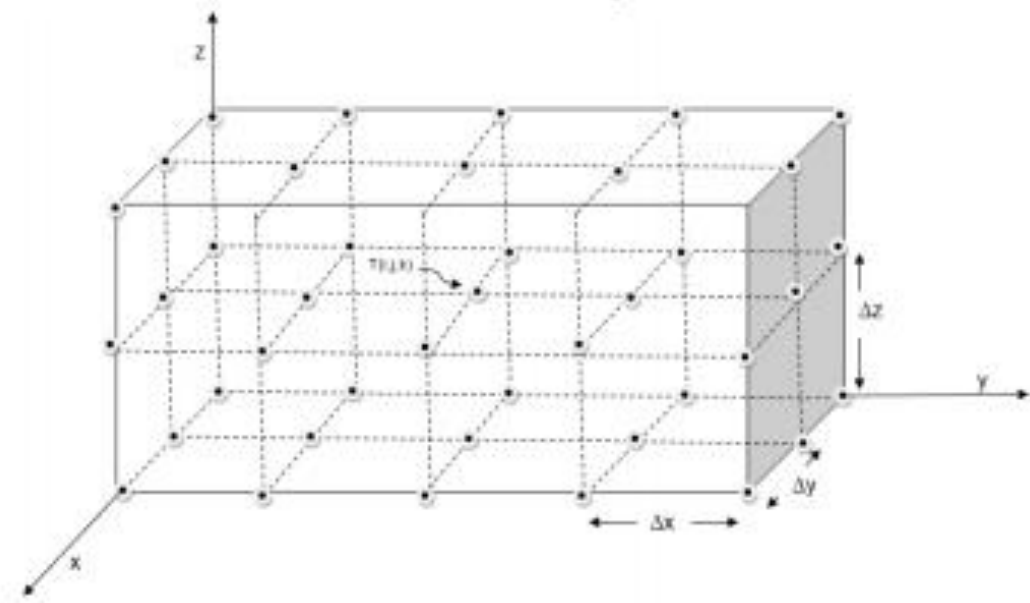


Figura 10 — Malha das Diferenças Finitas (MARTINS e PEDROSO, 2016).

Logo abaixo, a figura 11 apresenta os resultados, de acordo com Martins e Pedroso (2016), para as expressões das derivadas de primeira e segunda ordens de uma função $T = T(x, y, z)$. Sendo a malha representada na figura 10, observa-se um paralelepípedo que é subdividido em paralelepípedos infinitesimais de comprimento Δx , Δy e Δz .

Eixos	Derivadas	
	1ª ordem	2ª ordem
x	$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i-1,j,l}}{(\Delta x)^2}$
y	$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta y}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j-1,l}}{(\Delta y)^2}$
z	$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2\Delta z}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i,j,l+1} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j,l-1}}{(\Delta z)^2}$

Figura 11 — Expressões das derivadas de primeira e segunda ordens em Diferenças Finitas.

(MARTINS e PEDROSO, 2016)

2.6.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De forma simples, o método dos elementos finitos é um método que trabalha com funções de base locais, que são multiplicadas por funções peso e integradas. O resultado final é dependente das integrais resultantes. Este método tem como vantagem a aplicação em geometrias complexas, a facilidade de programação dos esquemas de interpolação, e a sólida base matemática, disponível em vários trabalhos ao longo de várias décadas.

"A análise de um corpo contínuo através do MEF consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas denominadas elementos finitos, cujo conjunto denomina-se malha de elementos finitos. Considera-se assim cada região ou elemento isoladamente, ao invés de tratar o problema globalmente, como é feito por métodos aproximados." (Timoshenko, 1958).

No entanto, a quantidade de elementos a ser utilizado deve ser estudado para cada caso, deve-se buscar sempre a convergência. Inicialmente faz-se a discretização de uma malha e analisa os seus resultados, posteriormente, refina-se a malha e observa se os valores estão próximos aos encontrados anteriormente. Caso isso aconteça, então a primeira malha utilizada é suficiente para a análise dos resultados. Convém observar também que quanto mais refinada a malha, maior será o tempo de processamento do programa (COELHO, 2012).

Segundo Coelho (2012), o objetivo de uma análise de elementos finitos é simular matematicamente o comportamento de um problema real. Isto é possível a partir da criação de um modelo que represente a situação a ser estudada. Este modelo dispõe de todos os nós, elementos, propriedades dos materiais, constantes reais, condições de limite e outras características que são utilizados para representar o sistema físico.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo descreve o problema térmico em estruturas de Barragens. São abordadas as formulações matemáticas e as respectivas definições das condições iniciais e de contorno para o problema em questão finalizando esta etapa com uma discussão sobre o calor de hidratação que ocorre no interior destas estruturas.

3.1 EQUAÇÃO DO CALOR

A dedução apresentada a seguir é baseada nos estudos desenvolvidos por Çengel e Ghajar (2012):

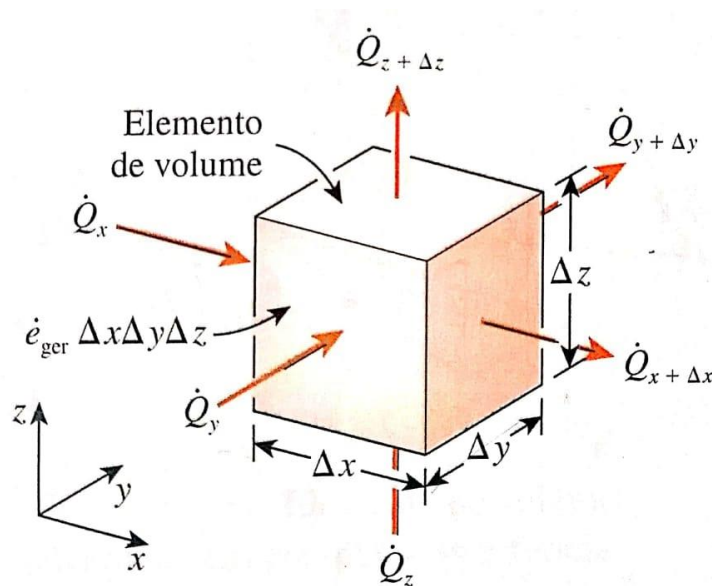


Figura 12: Condução de calor tridimensional através de um elemento de volume retangular.

(Çengel e Ghajar, 2012).

Considere a imagem acima (Figura 12) como um pequeno elemento retangular de comprimento Δx , largura Δy e altura Δz . Nesse caso, o balanço de energia durante um pequeno intervalo de tempo Δt pode ser expresso como:

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{ger,elem}} = \frac{\Delta E_{\text{elem}}}{\Delta t} \quad 3.1$$

Considerando o volume do elemento equivalente à $V_{elem} = \Delta x \Delta y \Delta z$, a mudança na quantidade de energia do elemento e a taxa de geração de calor dentro dele podem ser expressas como:

$$\Delta E_{Elem} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad 3.2$$

$$\dot{E}_{ger,elem} = \frac{\dot{q}}{K} \cdot V_{elem} = \frac{\dot{q}}{K} \Delta x \Delta y \Delta z \quad 3.3$$

Substituindo na Eq. 3.1, obtém-se:

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \frac{\dot{q}}{K} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad 3.4$$

Dividindo por $\Delta x \Delta y \Delta z$, a equação é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \frac{\dot{q}}{K} \\ = \frac{\rho c (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad 3.5$$

Definindo as áreas como: $A_x = \Delta y \Delta z$, $A_y = \Delta x \Delta z$ e $A_z = \Delta x \Delta y$, respectivamente, tomando o limite como $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e $\Delta T \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dy} \right) + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dz} \right) + \frac{\dot{q}}{K} = \frac{c\rho}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3.6$$

Da definição de derivada e da lei de condução de calor de Fourier,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{dQ_x}{dx} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{d}{dx} \left(-k \Delta y \Delta z \frac{dT}{dx} \right) = -\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \quad 3.7$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{dQ_y}{dy} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{d}{dy} \left(-k \Delta x \Delta z \frac{dT}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) \quad 3.8$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{dQ_z}{dz} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{d}{dz} \left(-k \Delta x \Delta y \frac{dT}{dz} \right) = -\frac{d}{dz} \left(k \frac{dT}{dz} \right) \quad 3.9$$

A equação geral de condução do calor para coordenadas retangulares, considerando a condutividade térmica constante é reduzida para:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} + \frac{\dot{q}}{K} = \frac{c\rho}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3.10$$

Sendo $\frac{c\rho}{k}$ a difusividade térmica do material.

3.2 CALOR DE HIDRATAÇÃO

A dedução apresentada a seguir é baseada nos estudos desenvolvidos por Coelho (2012). Considerando a Equação 3.10, no ensaio adiabático não existe variação de temperatura nas direções x,y,z, do espaço. Nessa situação todo o calor gerado internamente é armazenado pelo próprio material e o termo $\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}$ se anula.

O aumento da temperatura está condicionado a existência de geração de calor. Após certo tempo, a taxa de geração interna de calor é cessada nesse período a temperatura se estabiliza. Nestas condições a Eq. 3.10 torna-se:

$$\dot{q} = c\rho \cdot \Delta\dot{T}^{ad} \quad 3.11$$

De acordo com Faria (2004), uma função capaz de ajustar dados experimentais que caracteriza as curvas de elevação adiabática da temperatura através de três parâmetros experimentais (a,n,t), denominada função de Hill, é definida como:

$$T^{ad}(t) = T_{max} \frac{t^n}{a^n + t^n} \quad 3.12$$

A partir de dados experimentais da temperatura adiabática para um calorímetro adiabático é possível fazer a curva de temperatura em função do tempo e, conseqüentemente, o ajuste desses valores. Derivando a Eq. 3.12 e substituindo na Eq. 3.11, o calor de hidratação é definido como:

$$\dot{q} = c\rho \cdot \Delta T \cdot a^n \cdot n \cdot \frac{t^n}{(a^n + t^n)^2} \quad 3.13$$

Nos ensaios adiabáticos do concreto massa, é possível obter-se a curva de temperatura adiabática do concreto massa. O calor específico e a massa específica podem ser encontrados com ensaios experimentais.

3.3 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

As equações de condução de calor descritas anteriormente foram desenvolvidas usando o balanço de energia do elemento diferencial dentro do meio e permaneceram as mesmas independentemente das condições térmicas nas superfícies desse meio. Isso significa que as equações diferenciais não incorporam nenhuma informação relacionada às condições na superfície, como temperatura ou fluxo de calor especificado. Já sabemos que o fluxo de calor e a distribuição de temperatura em um meio dependem das condições nas superfícies e que a descrição do problema de transferência de calor em um meio não está completa sem a descrição total das condições térmicas nas superfícies das fronteiras do meio. As expressões matemáticas das condições térmicas nas fronteiras são chamadas de condições de contorno. (Çengel e Ghajar, 2012).

Segundo Çengel e Ghajar (2012), do ponto de vista matemático, resolver uma equação diferencial é essencialmente um processo de remoção de derivadas ou um processo de integração. Por isso, a solução diferencial geralmente envolve constantes arbitrárias. Para obter uma solução única para um problema, é necessário especificar mais do que a equação diferencial que o rege. Precisa-se especificar algumas condições (como valor da função ou sua derivada para algum valor da variável independente) de modo que, forçando a solução para satisfazer as condições em pontos específicos, sejam obtidos valores únicos para constantes arbitrárias e, portanto, uma solução única. Entretanto, como não há lugar para acrescentar informações ou condições adicionais na equação diferencial, devemos fornecê-las separadamente, na forma de condições iniciais e de contorno.

O tópico apresentada a seguir é baseado no estudo desenvolvido por Coelho (2012) :

Condições Iniciais: é definida pela distribuição de temperatura em função das coordenadas espaciais considerando o tempo inicial = 0 para todo o domínio, ou seja:

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad 3.15$$

Condições de Contorno: As condições gerais de contorno definidas para a Equação de Fourier são as condições de Dirichlet e de Neumann. A condição de Dirichlet considera que a temperatura existente em uma porção do contorno T_t corresponde à temperatura imposta na superfície, dada pela equação 3.16:

$$T(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad x, y, z \text{ em } T_t \quad 3.16$$

Outrossim, a condição de Neumann determina o fluxo de calor considerando que este é conhecido para todo ponto de uma determinada parte do contorno exterior do domínio T_q e para qualquer instante de tempo. Determinando a derivada do campo de temperatura em relação à normal ao sólido na temperatura T_q tem-se:

$$k \cdot \frac{\partial T}{\partial n}(x, y, z, t) = q_n(x, y, z, t) \quad x, y, z \text{ em } T_q \quad 3.17$$

Finalmente, determina-se o fluxo de calor nas superfícies externas. Este corresponde ao somatório dos fluxos de calor devido à radiação solar, convecção e condução:

$$q(x, y, z, t) = q_s(x, y, z, t) + h[T(x, y, z, t) - T_a(t)] \quad 3.18$$

Sendo:

- $T(x,y,z,t)$ a temperatura existente em cada ponto do contorno;
- T_a a temperatura ambiente existente no interior do domínio;
- H o coeficiente de transferência de calor global;
- $q_s(x,y,z,t)$ o calor ganho devido à radiação solar (radiação de onda curta) e é dado pela Eq.3.19:

$$q_s(x, y, z, t) = a_r \cdot I. (x, y, z, t) \quad 3.19$$

4 SOLUÇÕES DO PROBLEMA TÉRMICO

As soluções de problemas de engenharia podem ser realizadas através de métodos experimentais, analíticos e numéricos, no qual, cada um apresenta suas vantagens e desvantagens, sendo que a melhor solução a ser adotada depende do problema e dos recursos disponíveis para saná-los. Neste capítulo, serão desenvolvidas as soluções analíticas e numéricas, através dos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, baseado nos seguintes autores: (SILVEIRA, 1961, ÇENGEL e GHAJAR 2012 e COELHO, 2012).

4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

As soluções analíticas podem ser deduzidas apenas para uma classe limitada de problemas, que incluem os que podem ser aproximados por modelos lineares e aqueles que têm uma geometria simples e baixa dimensão (CHAPRA; CANALE, 2016). De acordo com Silveira (1961), nas aplicações práticas, as condições peculiares a um dado problema não são molde a permitir a busca da solução por via analítica, ou porque a forma do corpo é muito complicada, ou porque as condições iniciais e nos limites são complexas. Neste tópico, será determinada a resolução analítica para a distribuição de temperaturas por meio do Método de Separação de Variáveis (MSV) adotando algumas hipóteses com o objetivo de simplificar o problema, para que se desenvolva uma melhor compreensão do comportamento dos efeitos térmicos no concreto-massa.

A equação geral de condução do calor para a condutividade térmica constante, de acordo com Çengel e Ghajar (2012) é definida como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} + \frac{\dot{q}}{K} = \frac{c\rho}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad 4.1$$

Considerando as condições quanto ao regime do fluxo (transiente ou permanente) e geração de calor, esta Eq. (4.1) é reduzida as formas apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 4.1: Equação de condução de calor sob condições específicas:

Nome da Equação	Regime do Fluxo	Geração do Calor	Equação
Poisson	Permanente	Sim	$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} + \frac{q}{K} = 0$ [4.2]
Fourier	Transiente	Não	$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} = \frac{c\rho}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ [4.3]

Laplace	Permanente	Não	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ [4.4]
---------	------------	-----	---

4.1.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE

A equação de Laplace (4.4) expressa a equação de condução do calor em regime permanente, ou seja, a temperatura não varia com o tempo e também não possui geração de calor interno. Na determinação da solução da equação de Laplace, será considerado um bloco no espaço com dimensões L_1 , L_2 e L_3 mostrados na figura 4.1.

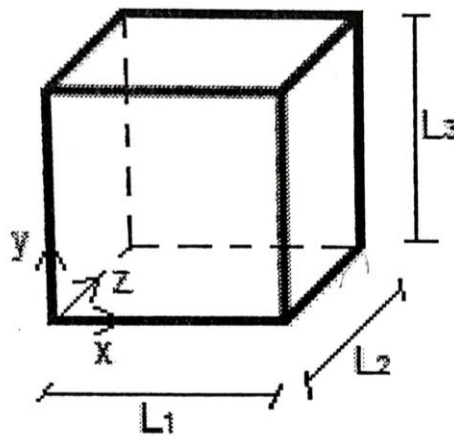


Figura 13: Paralelepípedo. (Coelho, 2015)

Atendendo as seguintes C.C:

$$T(0,y,z) = 0 \quad 4.5$$

$$T(L_1,y,z) = 0 \quad 4.6$$

$$T(x,0,z) = 0 \quad 4.7$$

$$T(x,L_2,z) = 0 \quad 4.8$$

$$T(x,y,0) = 0 \quad 4.9$$

$$T(x,y,L_3) = f(x,z) \quad 4.10$$

Aplicando o MSV, temos que:

$$(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad 4.11$$

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}\right) = -\lambda_1^2 \quad 4.12$$

Da equação de Laplace, temos:

$$+X'' + \lambda_1^2 X = 0 \quad 4.13$$

Para $\lambda_1^2 = 0$ o resultado não é válido pois, a equação seria reduzida a uma função linear $X(x) = ax + b$. Porém, de acordo com as C.C, $a=b=0$ e conseqüentemente $X(x)=0$.

Para $\lambda_1^2 > 0$, temos:

$$+X'' - \lambda_1^2 X = 0 \quad 4.14$$

Sendo a equação característica para a EDO dada por

$$r^2 - \lambda_1^2 = 0 \quad 4.15$$

$$r = \pm \lambda_1 \quad 4.16$$

$$X(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{-\lambda_1 x} \quad 4.17$$

Em que A e B são constantes.

Aplicando as C.C, temos:

Para $x=0 \Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow$

$$Ae^0 - Be^0 = 0 \quad 4.18$$

$$A = -B \quad 4.19$$

Para $x=L_1 \Rightarrow X(L_1)=0 \Rightarrow$

$$Ae^{L_1 x} + Be^{-L_1 x} = 0 \quad 4.20$$

$$-Be^{L_1 x} + Be^{-L_1 x} = 0 \quad 4.21$$

$$B(-e^{L_1x} + e^{-L_1x}) = 0 \quad 4.22$$

Sendo $(-e^{L_1x} + e^{-L_1x}) \neq 0$, logo, $B = 0 \Rightarrow A = 0$

Então, $\lambda_1^2 > 0 \Rightarrow$ o resultado não é válido.

Para $\lambda_1^2 < 0$, tem-se:

$$+X'' + \lambda_1^2 X = 0 \quad 4.23$$

Sendo a equação característica para a EDO dada por:

$$r^2 + \lambda_1^2 = 0 \quad 4.24$$

$$r = \pm \lambda_1 i \quad 4.25$$

$$X(x) = Ce^{i\lambda_1 x} + De^{-i\lambda_1 x} \Rightarrow \quad 4.26$$

$$X(x) = C\cos(\lambda_1 x) + D\sin(\lambda_1 x) \quad 4.27$$

Em que C e D são constantes.

Substituindo as C.C.:

Para $x=0 \Rightarrow X(x)=0 \Rightarrow$

$$X(0) = C\cos(0) + D\sin(0) \quad 4.28$$

Logo, $C=0$.

Para $x=L_1 \Rightarrow X(L_1)=0 \Rightarrow$

$$X(L_1) = C\cos(\lambda_1 L_1) + D\sin(\lambda_1 L_1) = 0 \quad 4.29$$

Substituindo o valor de C na equação,

$$D\sin(\lambda_1 L_1) = 0 \quad 4.30$$

Considerando $D \neq 0$, então $\text{sen}(\lambda_1 L_1)$ deve ser igual à zero para a igualdade ser verdadeira. Isolando λ_1 ,

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{L_1} \quad 4.31$$

Podemos definir a função $X_n(x)$ como:

$$X_n(x) = A_m \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) \quad 4.32$$

Da igualdade (4.12), isolando o 2º termo, tem-se:

$$+\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}\right) = +\lambda_1^2 \quad 4.33$$

Aplicando o MSV:

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} - \lambda_1^2 = \lambda_2^2 \quad 4.34$$

Então,

$$Y'' + \lambda_2^2 Y = 0 \quad 4.35$$

$$Z'' - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)Z = 0 \quad 4.36$$

Para $\lambda_2^2 = 0$ o resultado não é válido, pois a equação seria reduzida a uma função linear $Z(z) = az + b$. Porém, de acordo com as C.C, $a=b=0$ e consequentemente $Y(y)=0$.

Para $\lambda_2^2 > 0$, temos:

$$Y'' + \lambda_2^2 Y = 0 \quad 4.37$$

Sendo a equação característica para a EDO dada por

$$r^2 - \lambda_2^2 = 0 \quad 4.38$$

$$r = \pm \lambda_2 \quad 4.39$$

$$Y(y) = Ae^{\lambda_2 y} + Be^{-\lambda_2 y} \quad 4.40$$

Em que A e B são constantes

Aplicando as C.C, temos:

Para $z=0 \Rightarrow Y(y)=0 \Rightarrow$

$$Ae^0 - Be^0 = 0 \quad 4.41$$

$$A = -B \quad 4.42$$

Para $y=L_2 \Rightarrow Y(L_2)=0 \Rightarrow$

$$Ae^{L_2 y} + Be^{-L_2 y} = 0 \quad 4.43$$

$$-Be^{L_2 y} + Be^{-L_2 y} = 0 \quad 4.44$$

$$B(-e^{L_2 y} + e^{-L_2 y}) = 0 \quad 4.45$$

Sendo $(-e^{L_2 y} + e^{-L_2 y}) \neq 0$, logo, $B = 0 \Rightarrow A = 0$

Então, $\lambda_2^2 > 0 \Rightarrow$ o resultado não é válido.

Para $\lambda_2^2 < 0$, tem-se:

$$Y'' + \lambda_2^2 Y = 0 \quad 4.46$$

Sendo a equação característica para a EDO dada por:

$$r^2 + \lambda_2^2 = 0 \quad 4.47$$

$$r = \pm \lambda_2 i \quad 4.48$$

$$Y(y) = Ce^{i\lambda_2 y} + De^{-i\lambda_2 y} \Rightarrow \quad 4.49$$

$$Y(y) = C \cos(\lambda_2 y) + D \sin(\lambda_2 y) \quad 4.50$$

Em que C e D são constantes.

Substituindo as C.C.:

Para $z=0 \Rightarrow Y(y)=0 \Rightarrow$

$$Y(0) = C\cos(0) + D\sin(0) \quad 4.51$$

Logo, $C=0$.

Para $z=L_2 \Rightarrow Y(L_2)=0 \Rightarrow$

$$Y(L_2) = C\cos(\lambda_2 L_2) + D\sin(\lambda_2 L_2) = 0 \quad 4.52$$

Substituindo o valor de C na equação,

$$D\sin(\lambda_2 L_2) = 0 \quad 4.53$$

Considerando $D \neq 0$, então $\sin(\lambda_2 L_2)$ deve ser igual à zero para a igualdade ser verdadeira. Isolando λ_2 ,

$$\lambda_2 = \frac{n\pi}{L_2} \quad 4.54$$

Podemos definir a função $Y_n(y)$ como:

$$Y_n(y) = B_m \sin\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) \quad 4.55$$

Desta forma,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 = \lambda_{m,n}^2 \quad 4.56$$

$$\lambda_{m,n} = \pi \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2\right)} \quad 4.57$$

Substituindo (4.56) na eq (4.36), temos:

$$Z'' - \lambda_{m,n}^2 Z = 0 \quad 4.58$$

De modo semelhante ao que foi desenvolvido para $X_n(x)$ e $Y_n(y)$. Podemos definir a função $Z_n(z)$ como:

$$Z_n(z) = C_{mn} \sinh(\lambda_{m,n} z) \quad 4.59$$

Substituindo as funções $X(x)$ (4.32), $Y(y)$ (4.55), $Z(z)$ (4.59) na Eq. (4.11), tem-se:

$$T(x, y, z) = A_m \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot B_m \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) \cdot C_{mn} \operatorname{senh}(\lambda_{m,n} z) \quad 4.60$$

Outrossim, o produto das constantes A_m , B_m e C_{mn} , pode ser substituído por uma única constante a_{mn} :

$$A_m \cdot B_m \cdot C_{mn} = a_{mn} \quad 4.61$$

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) \cdot \operatorname{senh}(\lambda_{m,n} z) \quad 4.62$$

Aplicando a C.C (4.10), considera-se o termo $a_{mn} \cdot \operatorname{senh}(\lambda_{m,n} L_3) = b_{mn}$,

$$T(x, y, L_3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) \quad 4.63$$

Integrando a equação (4.63) em função de x e y , obtém-se:

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) dx dy = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dx dy \quad 4.64$$

Multiplicando ambos os lados por $\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dx dy \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dx dy \end{aligned} \quad 4.65$$

Reescrevendo o segundo termo da eq. (4.65):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \int_0^{L_2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dy \int_0^{L_1} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) dx \quad 4.66$$

Resolvendo o produto, temos:

$$\int_0^{L_2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dy \int_0^{L_1} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) dx = \frac{L_1}{2} \cdot \frac{L_2}{2} = \frac{L_1 \cdot L_2}{4} \quad 4.67$$

Então,

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dx dy = b_{mn} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{4} \quad 4.68$$

Isolando b_{mn} ,

$$b_{mn} = \frac{4}{L_1 \cdot L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) dx dy \quad 4.69$$

Ou $f(x, y) = T(x, y, z)$, temos:

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_2} y \right) \cdot \frac{\operatorname{senh}(\lambda_{m,n} z)}{\operatorname{senh}(\lambda_{m,n} L_3)} \quad 4.70$$

Sendo esta a equação de Laplace tridimensional. Ressalta-se que alterando as condições de contorno e iniciais encontra-se a mesma solução alterando apenas x, y e z . Por exemplo:

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_2} y \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_3} z \right) \cdot \frac{\operatorname{senh}(\lambda_{m,n} x)}{\operatorname{senh}(\lambda_{m,n} L_1)} \quad 4.71$$

No qual:

$$a_{mn} = \frac{4}{L_2 \cdot L_3} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} f(y, z) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L_2} y \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_3} z \right) dy dz \quad 4.72$$

E:

$$\lambda_{m,n} = \pi \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_3} \right)^2 \right)} \quad 4.73$$

Determinada a Equação de Laplace Tridimensional, esta pode ser reduzida ao caso bidimensional e unidimensional. No qual, a equação bidimensional é determinada excluindo uma variável e reduzindo a constante:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L_1} \frac{\int_0^{L_1} \left(f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_1} x \right) dx \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L_1} x \right) \cdot \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{L_1} x \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{L_1} L_2 \right)} \quad 4.74$$

E para o caso unidimensional, esta resume-se a equação linear:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \quad 4.75$$

4.1.2 EQUAÇÃO DE POISSON BIDIMENSIONAL

A Equação de Poisson corresponde ao caso em que a propagação da temperatura ocorre em regime permanente com geração de calor interna constante, sendo esta equação para o caso bidimensional definida logo abaixo:

$$k\nabla^2 T + q = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{q}{K} = 0 \quad 4.76$$

Neste estudo, será desenvolvida uma solução para a eq. (4.76) em uma placa, ou seja, um elemento bidimensional (x,y) de geometria simples com seção transversal constante, de material homogêneo e comprimentos L_1 e L_2 , conforme a figura a seguir:

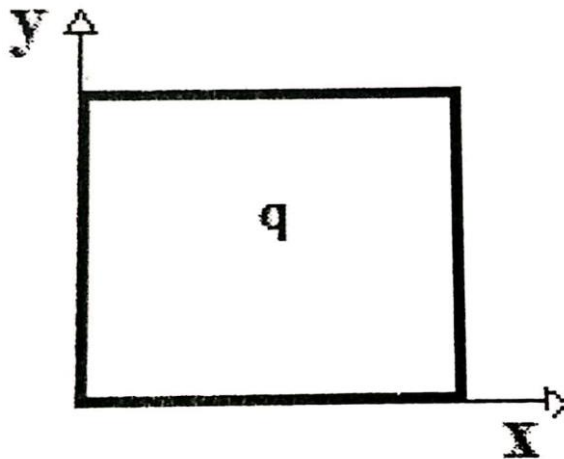


Figura 14: Placa. (Coelho, 2015)

As condições de contorno a serem consideradas são:

$$T(0, y) = 0 \quad 4.77$$

$$T(L_1, y) = 0 \quad 4.78$$

$$T(x, 0) = 0 \quad 4.79$$

$$T(y, L2) = f(x) \quad 4.80$$

Aplicando o MSV, tem-se que:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{q}{k} = 0 \quad 4.81$$

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{q}{k}\right) = \lambda^2 \quad 4.82$$

A eq. (4.84) pode ser reescrita das seguintes formas:

$$X'' - \lambda^2 X = 0 \quad 4.83$$

$$-\left(\frac{Y''}{Y} + \frac{q}{k} + \lambda^2\right) = 0 \quad 4.84$$

Como $\frac{q}{k}$ e λ^2 são constantes, a eq. (4.86) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$-\left(\frac{Y''}{Y} + \phi^2\right) = 0 \quad 4.85$$

Sendo que:

$$\phi^2 = \frac{q}{k} + \lambda^2 \quad 4.86$$

Desenvolvendo a eq. (4.85) e a eq. (4.87) de modo equivalente ao tópico anterior, tem-se:

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \quad 4.87$$

E,

$$Y_n(y) = B_n \sinh(\phi y) \quad 4.88$$

De acordo com o MSV temos que $T(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$. Logo, $T(x,y)$ corresponde à:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) B_n \sinh(\phi y) \quad 4.89$$

Sendo A_n e B_n constantes, considera-se o produto delas como uma única constante a_n .

Então, a equação (4.91) pode ser reescrita como:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) B_n \sinh(\phi y) \quad 4.90$$

Determinando o valor de a_n :

$$a_n = \frac{2}{L_1} \frac{\int_0^{L_1} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) dx}{\sinh(\phi y)} \quad 4.91$$

E:

$$\phi^2 = \frac{q}{k} + \lambda^2 \quad 4.92$$

A equação (4.92) corresponde à solução do problema proposto.

4.1.3 EQUAÇÃO DE FOURIER UNIDIMENSIONAL

A equação de Fourier corresponde a um regime transiente. Para o caso de estudo será considerado o exemplo de uma barra de comprimento L , com temperatura fixas nas extremidades, conforme pode ser visualizado na imagem abaixo:

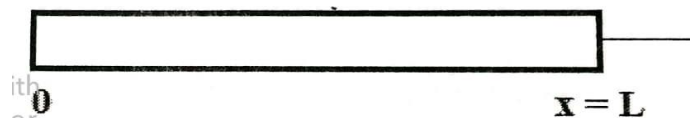


Figura 15: Barra com temperatura fixa nas extremidades. (Coelho, 2015)

A análise será considerada bidimensional, pois além da variação ao longo do comprimento, será acrescido um termo referente a Temperatura (T) que varia ao longo do tempo (t), como pode ser visto na equação (4.93):

$$k\nabla^2 T = \rho c \frac{dT}{dt} \quad 4.93$$

Podendo ser reescrita como:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = \rho c \frac{dT}{dt} \quad 4.94$$

Ou ainda,

$$\delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{dT}{dt} \quad 4.95$$

Em que δ^2 corresponde à difusividade térmica.

Considerando as seguintes C.C:

$$T(0, t) = 0 \quad 4.96$$

$$T(L, t) = 0 \quad 4.97$$

E a seguinte Condição Inicial C.I,

$$T(x, 0) = f(x) \quad 4.98$$

Adotando, assim como os casos anteriores, o MSV:

$$T(x, t) = X(x)\tau(t) \quad 4.99$$

Considerando,

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} e X'' = x^2 \quad 4.100$$

Então, substituindo-se (4.99) em (4.100), tem-se:

$$\delta^2 X'' \tau = X \dot{\tau} \quad 4.101$$

Dividindo-se a eq. [4.101] por $X\tau$,

$$\frac{X''}{X} = \frac{\dot{\tau}}{\tau^2} = \lambda^2 \quad 4.102$$

Sendo λ uma constante.

Resolvendo o 1º termo de forma similar a resolução de Laplace, temos:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad 4.103$$

Em que,

$$X_n(x) = A_n \text{sen} \left(\frac{m\pi}{L_1} x \right) \quad 4.104$$

Sendo $\lambda = \frac{n\pi}{L}$.

Resolvendo o 2º termo:

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau^2} = \lambda^2 \quad 4.105$$

Quando $\lambda^2 < 0$, tem-se:

$$\dot{\tau} = -\tau \lambda^2 \delta^2 \quad 4.106$$

Considerando $\mu = \frac{\delta n\pi}{L}$, a Eq. (4.106) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tau} + \mu^2 \tau = 0 \quad 4.107$$

Sendo a Eq.4.105 característica para a EDO dada por:

$$r + \mu^2 = 0 \quad 4.108$$

Isolando r,

$$r = -\mu^2 \quad 4.109$$

Logo:

$$\tau_n(t) = B_n e^{-\mu^2 t} \quad 4.110$$

Substituindo (4.110) e (4.104) na Eq. (4.99), tem-se que:

$$\tau(x,t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) B_n e^{-\mu^2 t} \quad 4.111$$

Como A_n e B_n são constantes, define-se que $a_n = A_n \cdot B_n$, a Eq. (4.111) é reduzida para seguinte forma:

$$\tau(x,t) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) e^{-\mu^2 t} \quad 4.112$$

Ou ainda,

$$\tau(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) e^{-\mu^2 t} \quad 4.113$$

Substituindo a C.I, tem-se:

$$\tau(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) \quad 4.114$$

De modo equivalente ao que foi definido em Laplace:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad 4.115$$

Então, substituindo o valor de a_n na Eq. (4.114), tem-se:

$$\begin{aligned} \tau(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) e^{-\mu^2 t} \end{aligned} \quad 4.116$$

Alterando as condições de contorno para qualquer temperatura na extremidade, temos:

$$T(0,t) = T_1 \quad 4.117$$

$$T(L,t) = T_2 \quad 4.118$$

Nesse caso, inicialmente, existe uma variação de temperatura provocando um deslocamento do equilíbrio podendo ser definido como:

$$u(x,t) = T(x,y) - T_E(x) \quad 4.119$$

Substituindo as C.I, tem-se:

$$u(x,t) = f(x) - T_E(x) \quad 4.120$$

A solução final para esse caso, é reescrita adicionando-se apenas a influência da temperatura inicial, sendo definida da seguinte forma:

$$T(x,t) = T_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_E(x)] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) e^{-\delta^2 \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 t} \quad 4.121$$

4.1.4 .,EQUAÇÃO DO CALOR COMPLETA COM GERAÇÃO DE CALOR CONSTANTE

Nesse caso, a equação do calor completa será dada em análise de uma barra unidimensional com temperatura ambiente em uma extremidade e fluxo de calor nulo na outra (Coelho, 2015 Apud. Hetnaski & Eslami, 2009).

Adotando as seguintes C.C:

$$\frac{dT}{dt}(0,t) = 0 \quad 4.122$$

$$T(L,t) = T_{\infty} \quad 4.123$$

E a seguinte C.I:

$$T(x,0) = T_0 \quad 4.126$$

A Eq. (4.121) é reescrita, como:

$$\delta^2 \nabla^2 T + q = \frac{dT}{dt} \quad 4.127$$

Seja:

$$u(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad 4.128$$

Tem-se que:

$$\delta^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + q = \frac{du}{dt} \quad 4.129$$

Alterando as C.C :

$$\frac{du}{dx}(0, t) = 0 \quad 4.130$$

$$u(L, t) = 0 \quad 4.131$$

E a C.I:

$$u(x, 0) = u_0 = T_0 - T_\infty \quad 4.132$$

A solução da EDO é dada por:

$$u(x, t) = \theta(x, t) - \varphi(x) \quad 4.133$$

No qual a solução não-homogênea é dada por:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{q}{\delta^2} = 0 \quad 4.134$$

E as seguintes C.C:

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad 4.135$$

$$\varphi(L) = 0 \quad 4.136$$

De maneira equivalente ao que foi definido em Poisson:

$$\varphi(x) = \frac{qL^2}{2\delta^2} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \quad 4.137$$

Da outra equação:

$$\delta^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d\theta}{dt} \quad 4.138$$

E a,s respectivas C.C:

$$\frac{d\theta}{dx}(0, t) = 0 \quad 4.139$$

$$\theta(L, t) = 0 \quad 4.140$$

Da mesma forma que foi obtida para a solução de Fourier:

$$\theta(x,t)=f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{sen}(\lambda_n x) e^{-\delta^2 \lambda_n^2 t} \quad 4.141$$

Em que:

$$a_n = -(-1)^n \frac{qL^2}{\delta^2} \frac{2}{(\lambda_n L)^3} \quad 4.142$$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad 4.143$$

Sendo:

$$u(x, t) = \frac{qL^2}{\delta^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(\lambda_n L)^3} \cos(\lambda_n x) e^{-\delta^2 \lambda_n^2 t} \right] \quad 4.144$$

Então,

$$T(x, t) = T_{\infty} + \frac{qL^2}{\delta^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(\lambda_n L)^3} \cos(\lambda_n x) e^{-\delta^2 \lambda_n^2 t} \right] \quad 4.145$$

4.1.5 EQUAÇÃO DO CALOR COMPLETA COM GERAÇÃO TRANSIENTE

A solução desse caso foi obtida baseado nos estudos de (Coelho, 2015 Apud. Frasson, 2015) através do MSV.

Dada a Equação:

$$\delta^2 \nabla^2 T + \theta_0 m e^{-mt} = \frac{dT}{dt} \quad 4.146$$

E as seguintes C.C e C.I para o problema:

$$CC: T(0, t) = 0 \quad 4.147$$

$$CC: \frac{dT}{dx}(L, t) = 0 \quad 4.148$$

$$C.I: T(x, 0) = 0 \quad 4.149$$

Observe que $\theta_0 m e^{-mt} = q(x, t)$.

Através do MSV, obtém-se que:

$$\delta^2 \nabla^2 T + \theta_0 m e^{-mt} = \frac{dT}{dt} \quad 4.150$$

$$+X'' - \lambda X = 0 \quad 4.151$$

E,

$$\dot{\tau} + \lambda \tau(t) = 0 \quad 4.152$$

A solução para a Eq. (4.151) é dada por:

$$\varphi_n(x) = \text{sen}(w_n x) \quad 4.153$$

Em que,

$$w_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2L} \quad 4.154$$

Para a Eq. (4.152), a solução é do tipo:

$$\tau(t) = c_1 e^{-\lambda \delta^2 t} \quad 4.155$$

Em termos das autofunções, temos para $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n(x) \quad 4.156$$

Considerando,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x) \quad 4.157$$

E,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x) \cdot g(x) dx \quad 4.158$$

Ortogonalizando as funções, tem-se:

$$\langle f, g \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle \quad 4.159$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \int_0^l f(x) \cdot g(x) dx \quad 4.160$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \int_0^l \text{sen}(w_n x) \cdot \text{sen}(w_k x) dx \quad 4.161$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(w_n - w_k) x) dx - \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(w_n + w_k) x) dx \quad 4.162$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \int_0^l \cos\left(\frac{n-k}{l} \pi x\right) dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos\left(\frac{n+k}{l} \pi x\right) dx \quad 4.163$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \int_0^l \cos\left(\frac{n-k}{l} \pi x\right) dx \quad 4.164$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \begin{cases} \frac{L}{2} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad 4.165$$

Assim, se $\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = 0$, temos que $n \neq k$. Logo, pode-se afirmar que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x) \quad 4.166$$

No 1º termo, temos:

$$\langle 1, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n, \varphi_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{d_k L}{2} \quad 4.167$$

No 2º termo:

$$\langle 1, \varphi_k \rangle = \int_0^l \varphi_k(x) dx = \int_0^l \text{sen}(w_k x) dx = \frac{1}{w_k} \quad 4.168$$

Das equações (4.166) e (4.154), calcula-se:

$$d_n = \frac{2}{L w_n} = \frac{4}{(2n+1)\pi} \quad 4.169$$

Sendo assim:

$$\theta_0 m e^{-mt} = \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_0 m d_n) e^{-mt} \varphi_n(x) \quad 4.170$$

Logo:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n(x) \quad 4.171$$

$$\frac{dT}{dt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \varphi_n(x) \quad 4.172$$

$$\varphi_n''(x) = -w_n^2 \varphi_n(x) \quad 4.173$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varphi_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) w_n^2 \varphi_n(x) \quad 4.174$$

$$\theta_0 m e^{-mt} = \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_0 m d_n) e^{-mt} \varphi_n(x) \quad 4.175$$

A Eq. (4.146), torna-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(\theta_0 m d_n) e^{-mt} - \delta^2 w_n^2 b_n(t)] \varphi_n(x) \quad 4.176$$

A Eq. (4.176) só é válida de, $\forall n \geq 0$:

$$b_n'(t) + \delta^2 w_n^2 b_n(t) = (\theta_0 m d_n) e^{-mt} \quad 4.177$$

Considerando $m = \delta^2 w_n^2$, tem-se:

$$b_n(t) = c_n e^{-\delta^2 w_n^2 t} + (\theta_0 m d_n) e^{-mt} \quad 4.178$$

Sendo $m \neq \delta^2 w_n^2$, tem-se:

$$b_n(t) = c_n e^{-\delta^2 w_n^2 t} + \frac{(\theta_0 m d_n) e^{-mt}}{\delta^2 w_n^2 - m} \quad 4.179$$

Considerando $b_n(0) = 0 \Rightarrow T(x, 0) = 0$, obtém-se:

$$c_n = - \frac{(\theta_0 m d_n)}{\delta^2 w_n^2 - m} \quad 4.180$$

Logo, $b_n(t)$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$b_n(t) = c_n (e^{-\delta^2 w_n^2 t} - e^{-mt}) \quad 4.181$$

Então, $T(x,t)$ pode ser finalmente definida como:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-\delta^2 w_n^2 t} - e^{-mt}) \text{sen}(w_n x) \quad 4.182$$

No apêndice, encontra-se na Tabela A.1 resumo das soluções analíticas desenvolvidas por Coelho, 2015.

4.2 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Apresentou-se a solução, obtida por via analítica, de alguns problemas simples que, isoladamente ou associados, podem fornecer a distribuição de temperaturas em barragens, mediante a consideração de certas hipóteses simplificadoras. Em contrapartida, os métodos numéricos possibilitam uma solução mais fácil e rápida destes problemas com auxílio de ferramentas computacionais. Neste tópico serão abordadas a solução para a Equação Geral de Condução do Calor pelo MDF e MEF.

4.2.1 EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DO CALOR PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF)

O MDF permite o cálculo da temperatura em qualquer ponto do domínio (Figura 1) a

partir das suas condições de contorno. O método constitui na substituição de equações diferenciais por equações algébricas fazendo transformações de derivadas em diferenças finitas. Com base em estudos realizados por [8,5] mostra-se na tabela (1) as substituições das Equações Diferenciais de Primeira Ordem e das Equações Diferenciais de Segunda Ordem pelas suas respectivas formas em Diferenças Finitas:

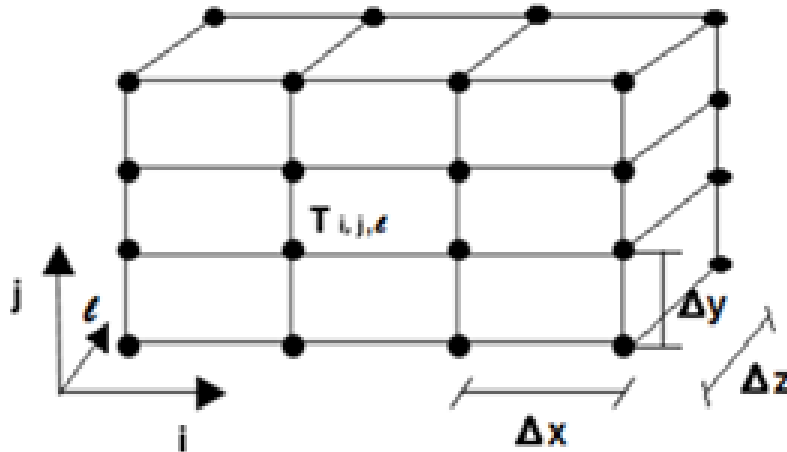


Figura 16: Malha em Diferenças Finitas (Coelho 2016).

Tabela 4.2: Equações Diferenciais de Primeira Ordem e das Equações Diferenciais de Segunda Ordem pelas suas respectivas formas em Diferenças Finitas

1ª Derivadas de Primeira Ordem:		2ª Derivadas de Segunda Ordem	
$\frac{\partial T}{\partial x}$	$\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	$\frac{T_{i+1,j,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i-1,j,l}}{(x_{i+1} - x_{i-1})^2} = \frac{T_{i+1,j,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i-1,j,l}}{\Delta x^2}$
$\frac{\partial T}{\partial y}$	$\frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta y}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$	$\frac{T_{i,j+1,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j-1,l}}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} = \frac{T_{i,j+1,l} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j-1,l}}{\Delta y^2}$
$\frac{\partial T}{\partial z}$	$\frac{T_{l+1} - T_{l-1}}{z_{l+1} - z_{l-1}} = \frac{T_{l+1} - T_{l-1}}{2\Delta z}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$	$\frac{T_{i,j,l+1} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j,l-1}}{(z_{l+1} - z_{l-1})^2} = \frac{T_{i,j,l+1} - 2T_{i,j,l} + T_{i,j,l-1}}{\Delta z^2}$

No caso transiente existirá ao menos uma derivada no tempo. Conforme Coelho (2012)

o termo $\frac{\partial T}{\partial t}$ com incrementos de tempo (κ) é definido como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad 4.182$$

Substituindo as EDO's pelas diferenças correspondentes na Equação 4.182, definimos a Equação Geral de Condução do Calor em Diferenças Finitas Tridimensional:

$$\frac{T_{i+1,j,l}^k - 2T_{i,j,l}^k + T_{i-1,j,l}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,l}^k - 2T_{i,j,l}^k + T_{i,j-1,l}^k}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,l+1}^k - 2T_{i,j,l}^k + T_{i,j,l-1}^k}{\Delta z^2} + \frac{q^k}{k} = \frac{1}{D} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad 4.183$$

Sendo $D = \frac{k}{\rho c}$, conhecido como difusividade térmica.

Considerando $\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2$, e simplificando a equação (5.182) chega-se a Equação (5.184):

$$T_i^{k+1} = F(T_{i+1,j,l}^k + T_{i-1,j,l}^k + T_{i,j+1,l}^k + T_{i,j-1,l}^k + T_{i,j,l+1}^k + T_{i,j,l-1}^k) + (16F)T_i^k + G \quad 4.184$$

No qual,

$$F = \frac{\Delta t \cdot D}{\Delta x^2} \quad 4.185$$

$$G = \frac{q^k \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta t}{\rho c} \quad 4.186$$

Considerações:

- O termo q^k corresponde a geração de calor no instante de tempo que está sendo calculado – Ou seja, assume-se a derivada.
- Caso a função não esteja derivada, ao invés de utilizar-se q^k , adota-se $\frac{q^{k+1} - q^k}{\Delta t}$.
- A partir do caso tridimensional, pode-se chegar ao bidimensional e unidimensional.

- Na Eq. de Fourier o termo D deixa de existir.
- Na Eq. de Poisson o termo G permanece e a variação temporal deixa de existir.
- Para o caso de Laplace, o termo G deixa de existir.

A expressão em MDF permite o cálculo da temperatura em qualquer ponto do domínio. Os pontos virtuais, fora do domínio, são determinados pelas C.C.. A aplicação da expressão em MDF a todos os pontos do domínio leva a um sistema de n equações com n incógnitas, do tipo $Ax=B$, que é resolvido pelos métodos clássicos matemáticos no MatLab. Coelho (2012)

Na tabela B.1, localizada no apêndice, são apresentadas as soluções para as equações do calor através das Diferenças Finitas desenvolvidas por Coelho (2015).

4.2.2 EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DO CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS(MEF):

De acordo com Coelho (2015) a distribuição de temperatura $T(x,y,z,t)$ no interior do corpo sólido definida como:

$$I = \frac{1}{2} \iiint_V [K \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) - 2 \left(\dot{q} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) T] dV \quad 4.187$$

Utilizando o método de Galerkin para solução da equação, adotamos os seguintes passos:

1. Divide-se o domínio V em E elementos finitos com p nós;
2. Assume-se a forma variacional adequada de T em elementos finitos com e elementos expressos por:

$$T^{(e)}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \vec{T}^{(e)} \quad 4.188$$

Onde:

$$[N(x, y, z)] = [N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \dots \quad N_p(x, y, z)] \quad 4.189$$

$$T^{(e)} = [T_1(t) : T_2(t)] \quad 4.190$$

3. É definida igual à zero a integral do resíduo ponderado sobre o domínio do elemento, tendo os mesmos pesos que as funções de interpolação N_i . Se a solução da equação anterior não for exata, faz-se a substituição da mesma pela equação diferencial, que em vez de zero terá um valor diferente denominado de resíduo. Assim, o critério a ser satisfeito em cada instante de tempo é:

$$I = \iiint_{V^e} N_i k \left(k \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right) \right) \right) + \dot{q} - \rho c \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} dV \quad 4.191$$

Reescrevendo o primeiro termo da integral:

$$\iiint_{V^e} N_i k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) dV = - \iiint_{V^e} k \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) dV + \iiint_{V^e} N_i k \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) l_x dS \quad 4.192$$

Sendo l_x o cosseno da direção x. Para a equação completa, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \iiint_{V^e} k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right) \right] dV + \\ & \iiint_{V^e} N_i k \left[\left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) l_x + \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right) l_y + \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right) l_z \right] dS + \iiint_{V^e} N_i k \left(\dot{q} - \right. \\ & \quad \left. \rho c \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right) dV \end{aligned} \quad 4.193$$

O contorno do elemento $^{(e)}$ é composto de $S1^{(e)}$, $S2^{(e)}$ e $S3^{(e)}$. A integral de superfície é zero e devido T_0 em $S1^{(e)}$, as derivadas de $T^{(e)}$ com relação a x, y e z também seriam zero. Em $S2^{(e)}$ e $S3^{(e)}$, as condições de contorno satisfazem o problema, tendo então como integral de superfície em $S2^{(e)}$ e $S3^{(e)}$:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2^{(e)} + S_3^{(e)}} N_i k \left[\left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \right) l_x + \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \right) l_y + \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \right) l_z \right] dS \\ & = \iint_{S_2^{(e)}} N_i q dS_2 - \iint_{S_2^{(e)}} h (T^{(e)} - T_\infty) dS_3 \end{aligned} \quad 4.194$$

Sendo a forma matricial da equação:

$$[K_1^{(e)}]T^{\rightarrow(e)} + [K_2^{(e)}]T^{\rightarrow(e)} + [K_3^{(e)}]T^{\dot{\rightarrow}(e)} - P^{\rightarrow(e)} = 0^{\rightarrow} \quad 4.195$$

No qual:

$$K_{1ij}^{(e)} = - \iiint_{V^e} k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\frac{\partial TN_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\frac{\partial TN_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\frac{\partial TN_j}{\partial z} \right) \right] dV \quad 4.196$$

$$K_{2ij}^{(e)} = \iint_{S_3^{(e)}} h N_i N_j dS_3 \quad 4.197$$

$$K_{3ij}^{(e)} = \iint_{V^{(e)}} \rho c N_i N_j dV \quad 4.198$$

$$P^{\rightarrow(e)}_i = \iint_{V^{(e)}} \dot{q} N_i dV - \iint_{S_2^{(e)}} N_i q dS_2 - \iint_{S_2^{(e)}} h(T_\infty) dS_3 \quad 4.199$$

1. Os elementos da matriz podem ser escritos de forma usual:

$$[\underline{K}_3] T^{\dot{\rightarrow}(e)} + [\underline{K}^{(e)}] T^{\rightarrow(e)} = \underline{P}^{\rightarrow} \quad 4.200$$

$$[\underline{K}_3] = \sum_{e=1}^E [K_3^{(e)}] \quad 4.201$$

$$[\underline{K}] = \sum_{e=1}^E [K_1^{(e)} + K_2^{(e)}] \quad 4.202$$

2. As equações devem ser resolvidas incorporando as condições de contorno e as condições iniciais. As expressões $[K_1^{(e)}], [K_2^{(e)}], [K_3^{(e)}]$ e $P^{\rightarrow(e)}$ são escritas como matriz de notação:

$$K_1^{(e)} = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad 4.203$$

$$K_2^{(e)} = \iint_{S_3^e} h [N]^T [N] dS_3 \quad 4.204$$

$$K_3^{(e)} = \iiint_{V^e} \rho c [N]^T [N] dV \quad 4.205$$

$$P^{\rightarrow(e)} = P^{\rightarrow}_1{}^{(e)} - P^{\rightarrow}_2{}^{(e)} + P^{\rightarrow}_3{}^{(e)} \quad 4.206$$

Em que:

$$P_1^{-\langle e \rangle} = \iiint_{V^e} \dot{q} [N]^T dV \quad 4.207$$

$$\bar{P}_2^{-\langle e \rangle} = \iint_{S_3^{(e)}} q [N]^T dS_2 \quad 4.208$$

$$P_3^{-\langle e \rangle} = \iint_{S_3^{(e)}} h T_\infty [N]^T dS_3 \quad 4.209$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad 4.210$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 4.211$$

5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo descreve os aspectos computacionais envolvidos na implementação da solução do problema proposto. Dessa forma, busca-se proporcionar o embasamento teórico e os aspectos práticos acerca dos procedimentos adotados no desenvolvimento dos modelos numéricos. A seguir são apresentados os procedimentos e os softwares utilizados nas simulações.

5.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MEF – ANSYS

As soluções numéricas via MEF foram desenvolvidas através do software de Elementos Finitos ANSYS WORKBENCH versão 18.1. O desenvolvimento do modelo para o problema proposto é definido pelas seguintes etapas:

1ª. Preprocessor:

- Definir o Material, especificando as propriedades térmicas.
- Definir o Modelo da Estrutura a ser analisado.
- Definir a Malha (tamanho, tipo de elemento, tamanho do elemento).

2ª. Solution:

- Atribuir as Condições Iniciais e de Contorno (temperatura inicial, temperatura nas bordas do elemento estrutural, etc).
- Solução do problema.

3ª. Postprocessor:

- Apresentação dos resultados da análise da Etapa Anterior.

Figura 17— Etapas do Modelo via ANSYS WORKBENCH.

Como visto na figura 17, o desenvolvimento de um modelo via ANSYS WORKBENCH, compreende três estádios. O primeiro consiste no *preprocessor* no qual são definidas as propriedades do material a ser utilizado, a geometria e a malha de elementos finitos. Posteriormente, no estádio *solution*, são definidas as condições iniciais e de contorno que

delimitam a modelagem. Por fim, no *postprocessor*, são apresentados os resultados da simulação.

Com o intuito de solucionar o problema térmico foram definidos dois modelos padrões de solução. O primeiro (figura 18) corresponde ao caso aplicado para um elemento estrutural em regime permanente e o segundo consiste na solução do problema térmico em regime transiente (figura 19).

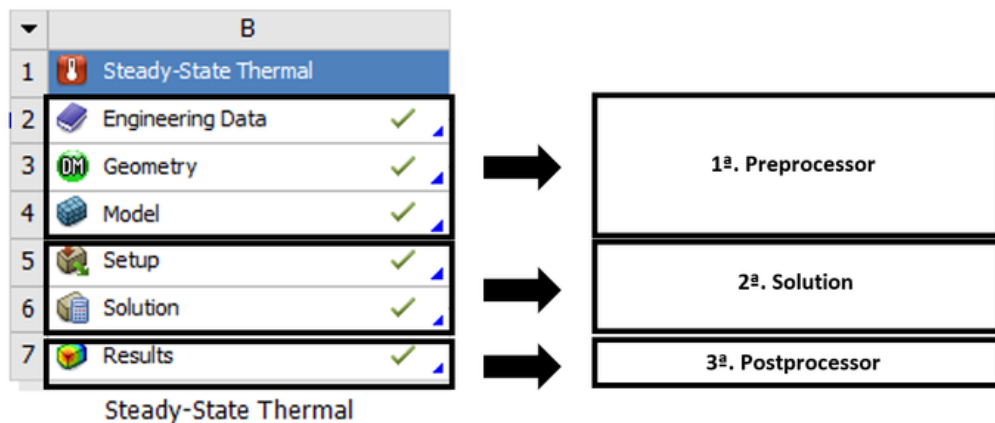


Figura 18 — Solução de Problemas Térmicos através do MEF em Regime Permanente.

Dessa forma observa-se na figura 21 que, após a definição da função térmica, Steady-State Thermal, a simulação consiste em seguir o procedimento acima definido. No entanto, a implementação do segundo modelo (Figura 19), torna-se mais complexa pois necessita de um acoplamento, a análise térmica estacionária passa a corresponder a uma condição inicial na análise térmica transiente. Por fim, adiciona-se as condições temporais e executa-se os procedimentos definidos nas etapas 2 e 3.

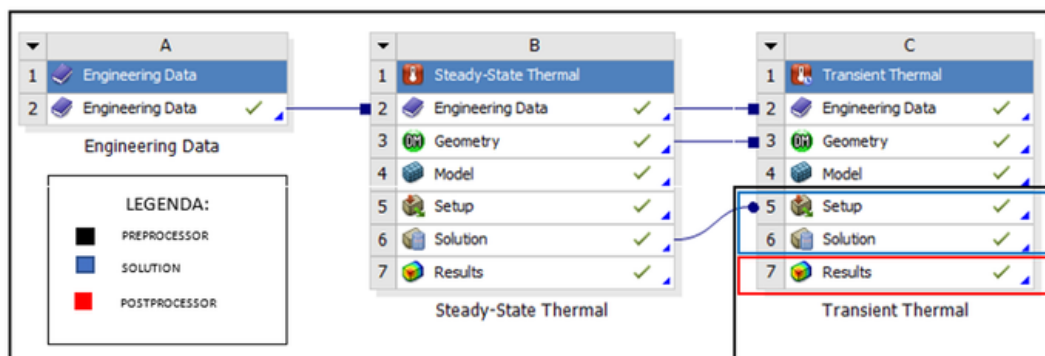


Figura 19 — Solução de Problemas Térmicos através do MEF em Regime Transiente.

O segundo modelo corresponde ao que mais se aproxima da realidade das estruturas executadas em Concreto Massa. Posteriormente, o mesmo pode ser aprimorado adicionando-

se, por exemplo, a simulação da construção em camadas. Logo abaixo é exposta, a título de ilustração, as isotermas obtidas via ANSYS da solução do problema térmico transiente para uma placa considerando um tempo equivalente à 2 dias.

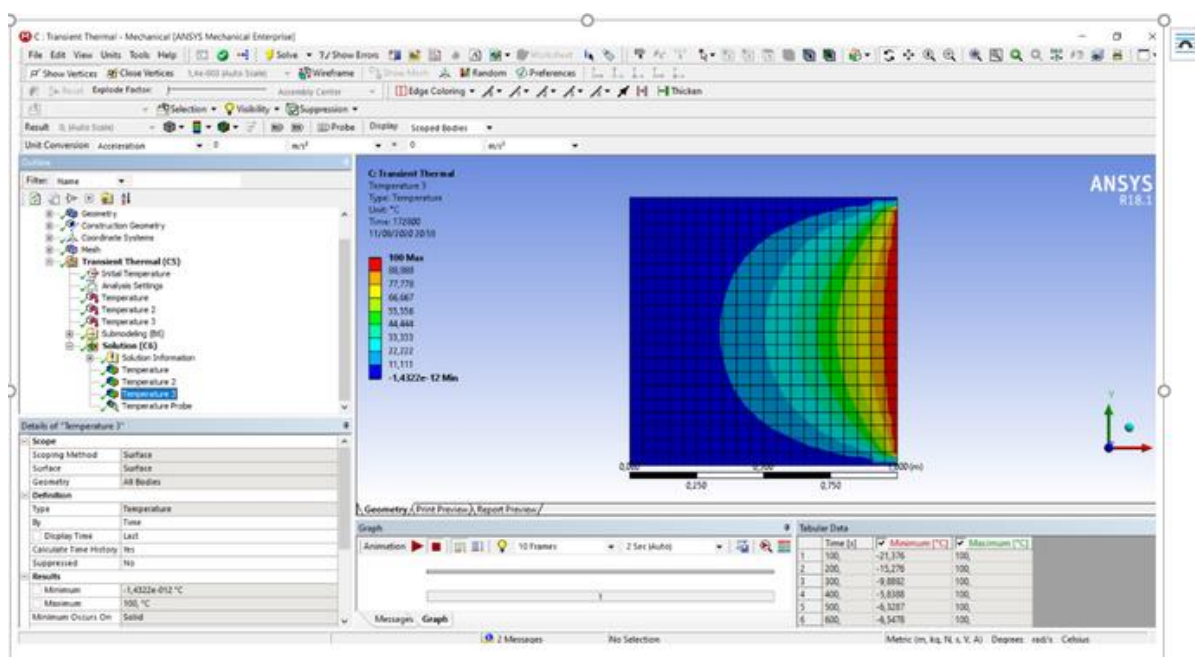


Figura 20— Exemplo de distribuição de temperatura (Regime Transiente) via ANSYS – Solução Qualitativa.

5.2 IMPLEMENTAÇÃO SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MDF – MATLAB

De acordo com Becker et al. (2010) o Matlab (abreviatura de MATrix LABoratory - Laboratório de Matrizes) é um *software* de simulação matemática que realiza operações matriciais, constrói gráficos em duas ou três dimensões, auxilia no processamento de sinais, além de manipular outras funções especializadas. Trabalha com uma linguagem de programação de alto-nível, em um ambiente interativo, para o desenvolvimento de algoritmos, análise e visualização de dados e computação numérica. Próprio para as áreas técnicas e científicas, o *software* tem funções de tratamento numérico de alto desempenho, capazes de resolver problemas computacionais técnicos de forma mais eficiente do que as tradicionais linguagens de programação. Além do ambiente interativo, outra facilidade do Matlab é a possibilidade de execução de arquivos texto contendo uma sequência de instruções definidas pelo usuário. Esses arquivos texto, que têm extensão '.m', podem ser criados e editados dentro ou fora do seu ambiente.

Diante das qualidades expostas, decidiu-se implementar as soluções numéricas via MDF através do *software* MATLAB R2016a. O modelo de solução foi dividido em 05 etapas. A

primeira corresponde a definição das propriedades e geometria do material. A segunda etapa constitui na definição da malha, procedimento que interfere na definição da precisão nas soluções em Diferenças Finitas e na terceira etapa são adicionadas as condições iniciais e de contorno. Na quarta etapa, implementa-se a solução da equação que governa o problema térmico. Por fim, na última etapa, são selecionados os resultados de interesse para a Análise Numérica. As etapas do modelo computacional desenvolvido para a solução do problema via MDF são apresentadas na figura abaixo.

```

% Solução Equação de Fourier Via MDF (Caso placa):
clear
clc
close

% ETAPA 01 - Definição das Propriedades e Geometria:
tt = 172800;
dt = 1;
k = 1.78;
Cp = 1000;
dama = 2388;
D = k / (dama * Cp);
F = D * dt / (h^2);
ii = 1;

% ETAPA 02 - Definição da Malha:
nt = round(tt/dt);
h = 0.025;
x = 0:h:1;
nx = round(1/h);
y = 0:h:1;
ny = round(1/h);

% ETAPA 03 - Definição das Condições Iniciais e de Contorno:
T(1,:) = 0;
T(:,1) = 0;
T2 = 100;
T3 = 0;
T4 = 0;
T5 = 0;
Tmax = max([T1, T2, T3, T4, T5]);
T(nx+1,ny+1,nt) = 0;
T(1,,:) = (T1);
T(nx+1,,:) = (T2);
T(:,1) = (T3);
T(:,ny+1) = (T4);
T(:,ny+1) = (T5);

% ETAPA 04 - Solução da Equação de Fourier Bidimensional via MDF:
while (erro > 0.0000001)
for k = 1:nt
for i = 2:nx
for j = 2:ny
T0 = T(i,j,k);
T(i,j,k+1) = T(i,j,k) + F * ( T(i+1,j,k) + T(i-1,j,k) + T(i,j+1,k) +
T(i,j-1,k) - 4 * T(i,j,k) );
erro = abs(T(i,j,k+1) - T0);
end
end
end

% ETAPA 05 - Resultados:
T
A(nx+1) = 0;
B(ny+1) = 0;
C(nt) = 0;

A = T(20,:);
A = A';
B = T(:,20);
B = B';
display('Resultado: A')

```

Figura 21 — Etapas da Solução Numérica via MatLab

5.3 IMPLEMENTAÇÃO SOLUÇÃO ANALÍTICA E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS – MAPLE

Por fim, foram desenvolvidas através do MAPLE as soluções analíticas e a comparação com as soluções numéricas. O procedimento foi dividido em cinco etapas: a primeira que consiste na declaração das bibliotecas utilizadas no decorrer da rotina implementada. Posteriormente, na segunda etapa, a solução da equação analítica foi determinada. Na terceira e na quarta etapa foram realizadas a importação dos dados gerados na solução via MDF e via MEF e por último foram gerados gráficos comparando as três soluções obtidas. Logo abaixo é mostrado um modelo de solução implementado no MAPLE.

```

#Convergência Fourier:
[>
# ETAPA01: Determinar a Biblioteca do MAPLE empregada:
with(LinearAlgebra):
with(linalg):
with(student):
with(plots):
with(plottools):
plots(display):
with(Statistics):
with(ExcelTools):
with(PDEtools):
with(DEtools):
with(plots,odeplot):

#ETAPA02: Solução Analítica da Equação de Fourier 1D-
[> G_4_E := plot(100*x + sum((2/1) * (100*(n*pi*cos(n*pi) - sin(n*pi)) / (n^2 * pi^2)) * sin(n*Pi/1 * x))
· exp(-80000 * 7.495812395 * 10^-7 * (n*Pi)^2), n = 1 ..300), x = 0 ..1, colour = black, thickness
= 1, axes = boxed, title = "Temperatura ao longo eixo x", linestyle = 1, legend = "Analítica",
labels = ["x(m)", "T(C)"], titlefont = ["ARIAL", 12], labelfont = ["ARIAL", 15]):
[> display(G_4_E):

#ETAPA 03: Importando os dados MDF:
[> MODO := ExcelTools-Import("C:\\Users\\gise1\\OneDrive\\Área de Trabalho\\xmdf.xlsx", "x"):
[>
[> Cota_x := [seq(MODO(i, 2), i = 1 ..11)]:
[> T := [seq(MODO(i, 1), i = 1 ..11)]:
[> G_5 := [seq([Cota_x[i], T[i]], i = 1 ..11)]:
[> G_5_MDF := plot(G_5, style = point, thickness = 10, symbol = circle, symbolsize = 15, colour = magenta, thickness = 1, axes = boxed, title = "Temperatura ao longo eixo x", linestyle = 1, legend = "MDF", labels = ["x(m)",
"T(C)"], titlefont = ["ARIAL", 12], labelfont = ["ARIAL", 15]):
[>
[> G_5_G := plot(G_5, colour = magenta, thickness = 1, axes = boxed, title = "Temperatura ao longo eixo x", linestyle = 1, legend = "MDF", labels = ["x(m)", "T(C)"], titlefont = ["ARIAL", 12], labelfont = ["ARIAL", 15]):
[>

#ETAPA 04: Importando os dados MEF:
[> MODO30 := ExcelTools-Import("C:\\Users\\gise1\\OneDrive\\Área de Trabalho\\xmf.xlsx", "x30"):
[>
[> Cota_x30 := [seq(MODO30(i, 1), i = 1 ..11)]:
[> T30 := [seq(MODO30(i, 2), i = 1 ..11)]:
[> G_30 := [seq([Cota_x30[i], T30[i]], i = 1 ..11)]:
[>
[> G_5_MEF := plot(G_30, style = point, thickness = 10, symbol = cross, symbolsize = 15, color = blue, axes = boxed, title = "Temperatura ao longo do eixo x", legend = "MEF "):
[>
[> G_4_G := plot(G_30, colour = green, thickness = 1, axes = boxed, title = "Temperatura ao longo eixo x", linestyle = 1, legend = "MEF", labels = ["x(m)", "T(C)"], titlefont = ["ARIAL", 12], labelfont = ["ARIAL", 15]):
[>

#ETAPA 05: Comparação entre métodos analíticos e numéricos:
[> display({G_4_E, G_5_MDF, G_5_MEF})]

```

Figura 22 — Solução Analítica e a Comparação com as Soluções Numéricas via Maple.

6 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

A utilização de métodos numéricos leva à obtenção de soluções aproximadas, sendo que uma importante propriedade deles é a convergência. Os testes de convergência foram realizados de acordo com Método de Euler no qual o erro global é da ordem do passo utilizado nas soluções. Dessa forma, quando o espaçamento da malha tende a zero, o erro também tende a zero e as soluções numéricas desenvolvidas convergem para a solução exata.

Porém, deve-se ressaltar que a utilização de um passo muito pequeno (tendendo a zero) é impraticável, pois exigiria um tempo computacional demasiadamente alto, além de fazer com que os erros de arredondamento aumentassem rapidamente. Um procedimento simples que pode, na maioria dos casos, ser utilizado para determinar se o passo utilizado é adequado consiste em resolver o problema adotando, gradativamente, menores valores para o espaçamento da malha. A partir de um determinado ponto as soluções obtidas serão muito parecidas sendo que, um maior refinamento da malha a partir deste ponto não irá reduzir o erro global de forma significativa. (FONTANA, 2018).

Neste Capítulo foram desenvolvidos testes de convergência e comparações das soluções do problema térmico, em regime permanente e transiente, aplicados a geometrias simplificadas, através das soluções numéricas (Método dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas) e analíticas, com a finalidade de validar as rotinas computacionais para que estas possam ser aplicadas ao caso da Barragem de Gravidade.

6.1 TESTE DE CONVERGÊNCIA - REGIME PERMANENTE

Inicialmente, validou-se a solução do problema térmico para o caso particular da Equação de Laplace Bidimensional. O caso laplaciano consiste em uma das soluções mais simplificadas da Equação do calor por não depender do tempo. Por consequência, a solução numérica dependerá apenas do refinamento da malha para convergir.

A Eq 4.4 é reduzida à seguinte forma:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad 6.1$$

A Geometria escolhida para determinar as soluções para o problema bidimensional, trata-se de uma placa de 1 metro x 1 metro, no qual está exposta à temperatura de 100°C na extremidade

direita (T4) e 0°C nas extremidades esquerda (T3), superior (T1) e inferior (T2). Como pode ser visto na figura [23].

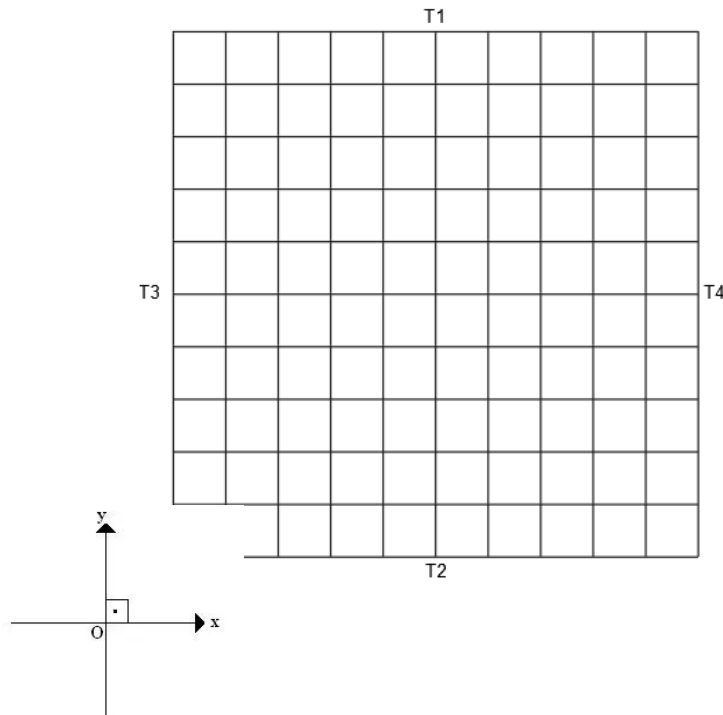


Figura 23 — Solução Laplace Bidimensional

6.1.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica é determinada pela equação:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{1000} \frac{2}{L_1} \cdot \frac{\int_0^{L_1} (f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}x\right) dx) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L_1}L_2\right)} \quad 6.2$$

No caso em estudo, foram feitas as seguintes substituições:

- L_1 e $L_2 = 1\text{m}$;
- $f(x) = 100$;

Logo, a solução analítica [Eq 6.2] é apresentada graficamente como:

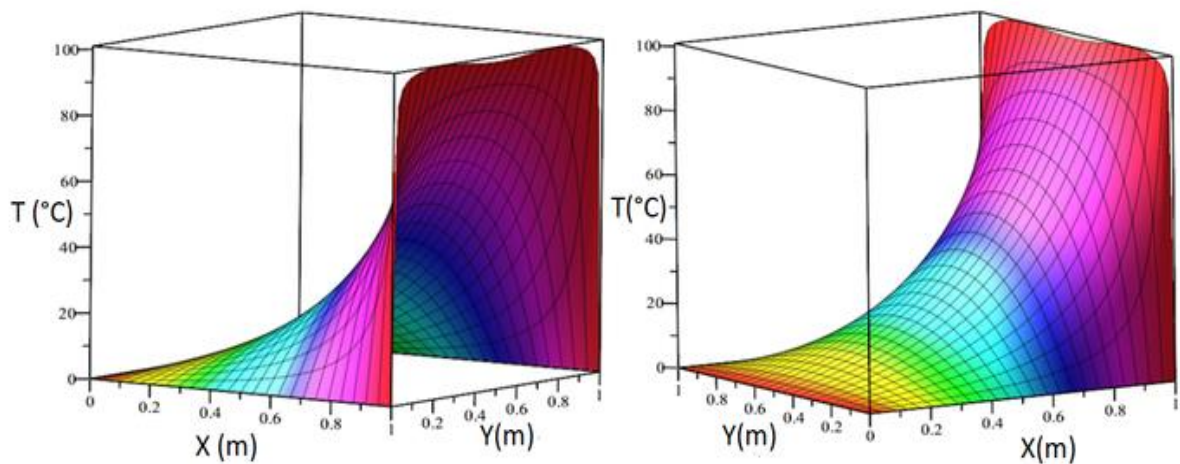


Gráfico 1 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – Método Analítico

6.1.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

6.1.2.1 MDF

A solução da Equação [6.1] em diferenças finitas corresponde à:

$$T_{(i,j)} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{4}$$

6.3

Aplicando as condições iniciais e de contorno, a solução por diferenças finitas para uma malha de 0,1m, é apresentada graficamente como:

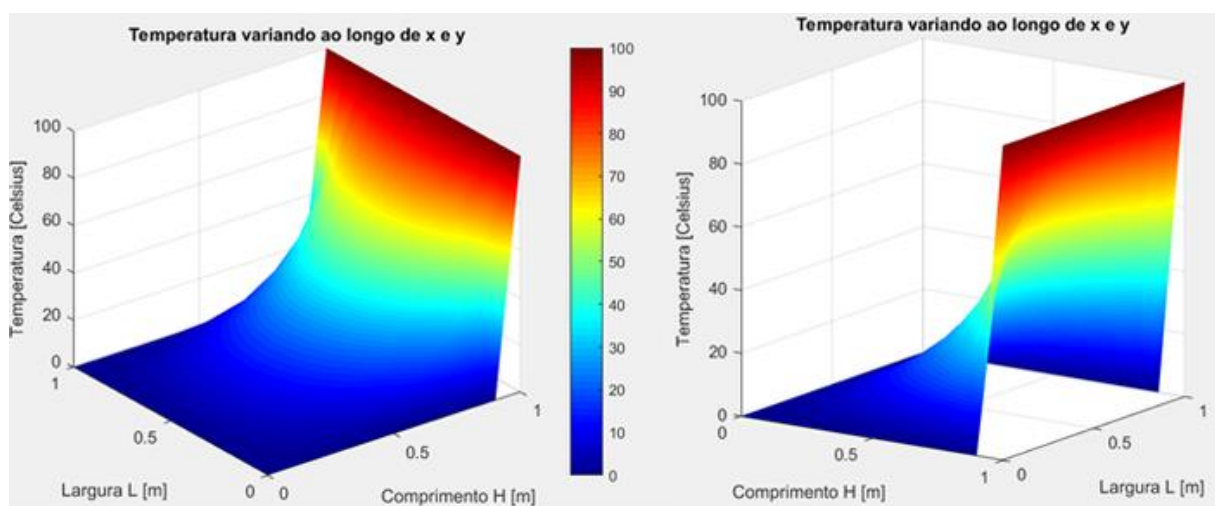


Gráfico 2 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – Método das Diferenças Finitas.

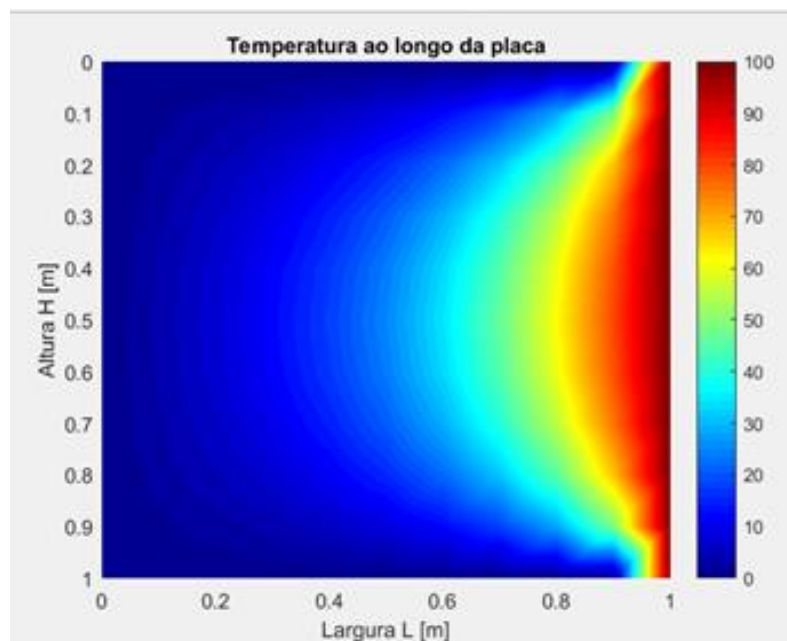


Gráfico 3 — Variação da Temperatura (°C) ao longo da placa – Vista Superior.

Ambos os gráficos consistem nas isotermas obtidas através da solução via MDF da Equação de Laplace para o caso bidimensional. Apesar do gráfico apresentar características mais qualitativas, é possível observar as isotermas de temperatura ao longo da placa devido o gradiente de temperatura criado pelas Condições de Contorno na placa. Obedecendo aos princípios da termodinâmica, há um fluxo de calor da maior temperatura à menor temperatura afim de criar-se um equilíbrio térmico dentro do corpo.

6.1.2.2 MEF

A solução numérica via MEF foi desenvolvida através do *software* ANSYS, conforme no qual foram adotadas:

- Tipo de Análise: Estática, Steady – state – thermal.
- Elemento: PLANE55.

Para a criação da malha imposta sobre o modelo, ver Figura 24, foi utilizado o elemento PLANE 55, apresentado na Figura 28. Este elemento é composto por quatro nós, com um único grau de liberdade em cada nó, a temperatura. Este elemento apresenta a capacidade de condução

térmica transiente, permitindo o contato perfeito entre os materiais. O elemento utiliza funções de interpolação linear entre os nós e um esquema de integração completo de Gauss (2x2) (ALFREDO, 2018).

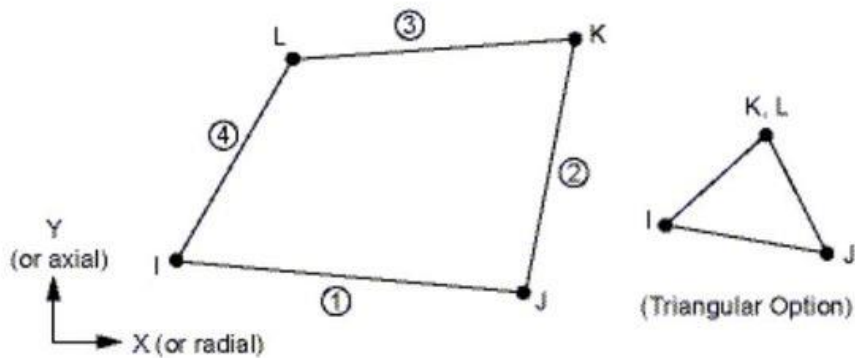


Figura 24— Elemento PLANE 55. (Alfredo, 2018)

Solucionando o problema, para a mesma malha adotada via MDF, apresenta-se como resposta os gráficos abaixo em que é possível observar o fluxo de calor ao longo da placa devido ao gradiente térmico:

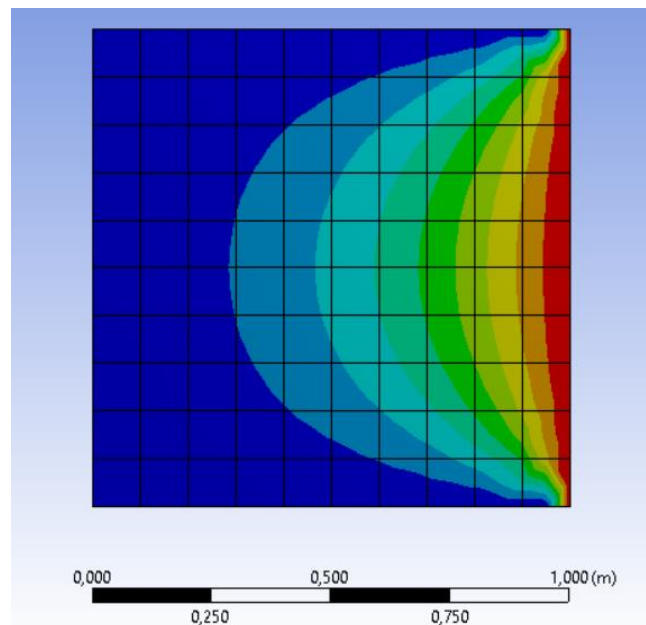


Gráfico 4 — Solução de Laplace para o caso Bidimensional – MEF.

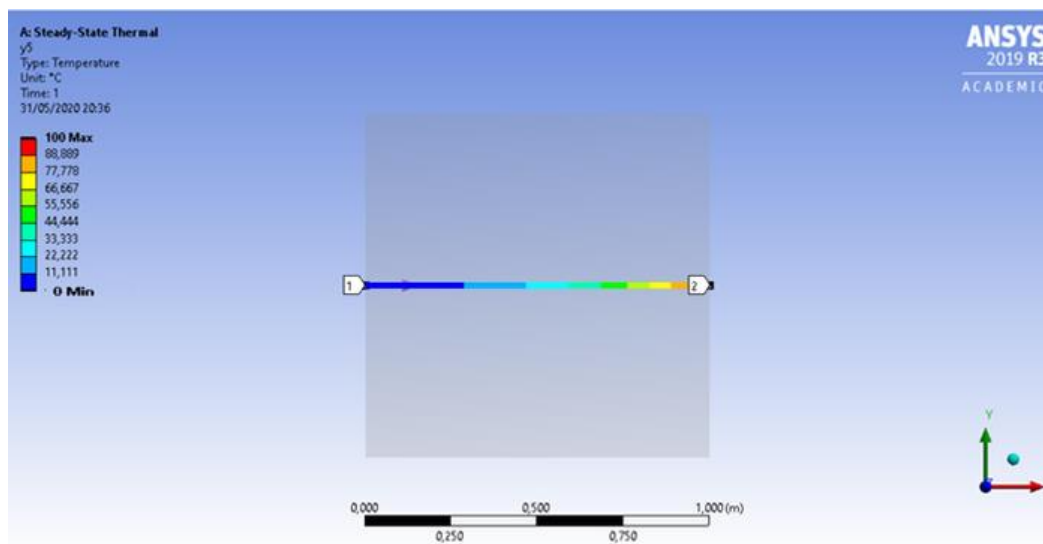


Gráfico 5 — Variação da Temperatura ao longo do eixo x para $y = 0,5\text{m}$ – MEF

Assim como o gráfico 03 gerado via MDF, o gráfico 04 gerado por MEF mostra as isotermas ao longo da placa. Posteriormente, considerando o valor de $x = 0,5\text{m}$, determina-se a variação de temperatura em função de y . Finalizando esta etapa, de modo similar, fixamos o valor de $y = 0,5\text{m}$ e determinamos a variação da temperatura em função de x .

6.1.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta etapa, realizamos a comparação entre os três métodos analisando as reta $r(x,0.5)$ e a $s(0.5, y)$. O primeiro gráfico (gráfico 07), corresponde a variação da temperatura ao longo do eixo x para um valor fixo de $y=0,5\text{m}$. Nesse caso quase todos os pontos são coincidentes exceto o ponto localizado no final do gráfico. Provavelmente isso ocorreu devido ao uso de um pequeno valor para n no somatório do método analítico e não devido a malha dos métodos numéricos já que a solução destes são coincidentes.

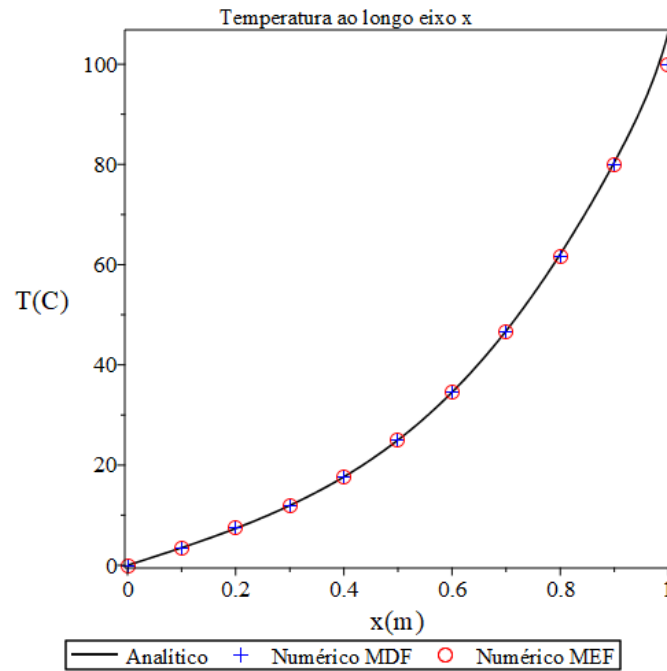


Gráfico 7 — Temperatura (°C) ao longo do eixo x(m) para y=0,5m.

No gráfico 08, temos a variação da temperatura ao longo do eixo y para x=0,5m. Observa-se que os três pontos são coincidentes, validando os resultados obtidos para o modelo bidimensional.

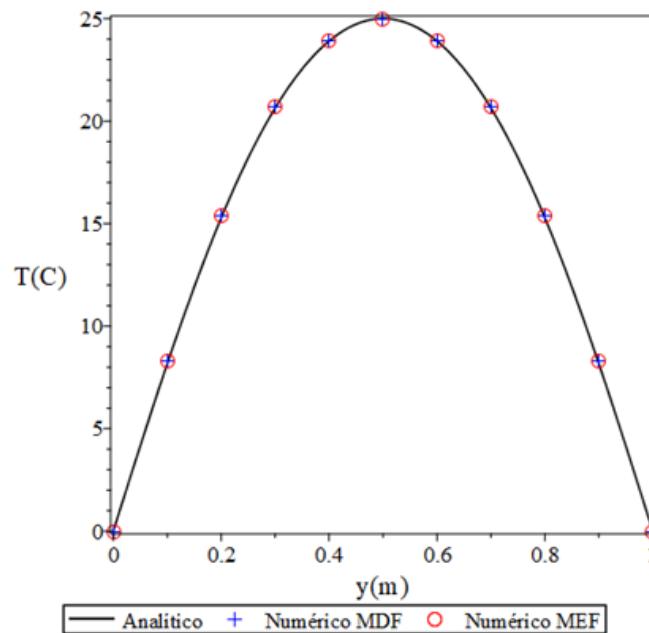


Gráfico 8 — Temperatura (°C) ao longo do eixo y(m) para x=0,5m.

6.1.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

No processo de validação das soluções laplacianas, utilizou-se os resultados obtidos nas soluções analíticas e comparou este com as soluções via MDF e MEF para diferentes malhas. Posteriormente, calculou-se o erro percentual de cada uma das soluções em função da quantidade de elementos utilizados na discretização da malha com a finalidade de adotar a melhor malha, sendo que, entende-se como melhor malha aquela que fornecem resultados mais precisos para o menor custo computacional.

Inicialmente, analisou-se para $y=0,5m$ a variação da temperatura ao longo do eixo x para diferentes malhas. Assim, os resultados encontrados são apresentados no gráfico abaixo.

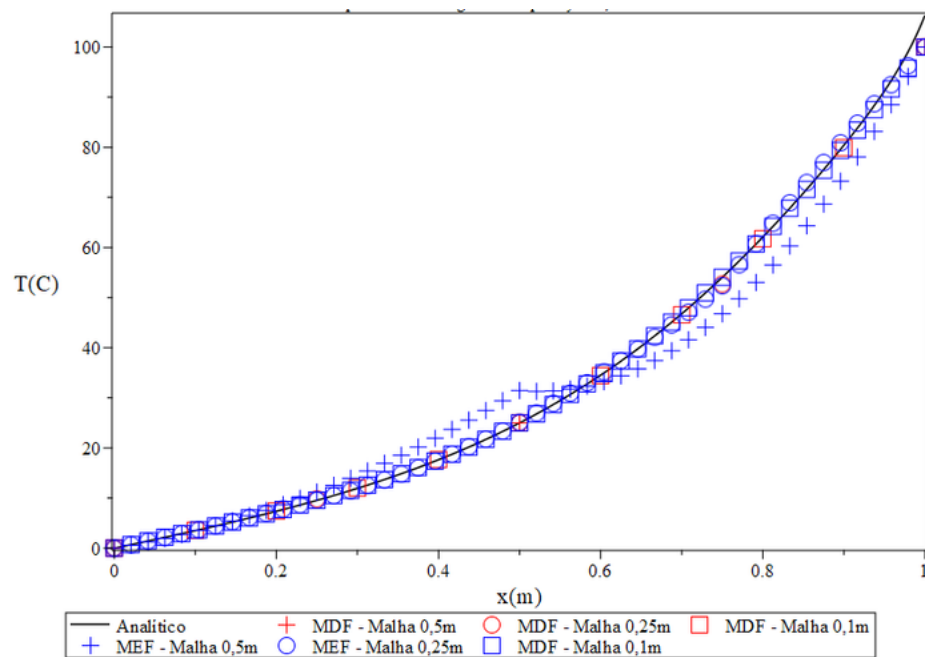


Gráfico 9 — Temperatura ao longo do eixo x para $y=0,5m$.

A partir do gráfico 9 constata-se que, com o refinamento da malha os métodos numéricos aproximam da solução analítica. As malhas de $0,5m$ tanto para o MEF quanto para o MDF, apresentaram resultados com considerável discrepância em relação analítica. A partir da malha $0,25m$ os resultados obtidos via MDF e MEF convergem a solução analítica enquanto os obtidos via MEF. Posteriormente, analisou-se a variação da temperatura ao longo do eixo y para $x=0,5m$ para diferentes malhas. Os resultados obtidos são apresentados no Gráfico 10.

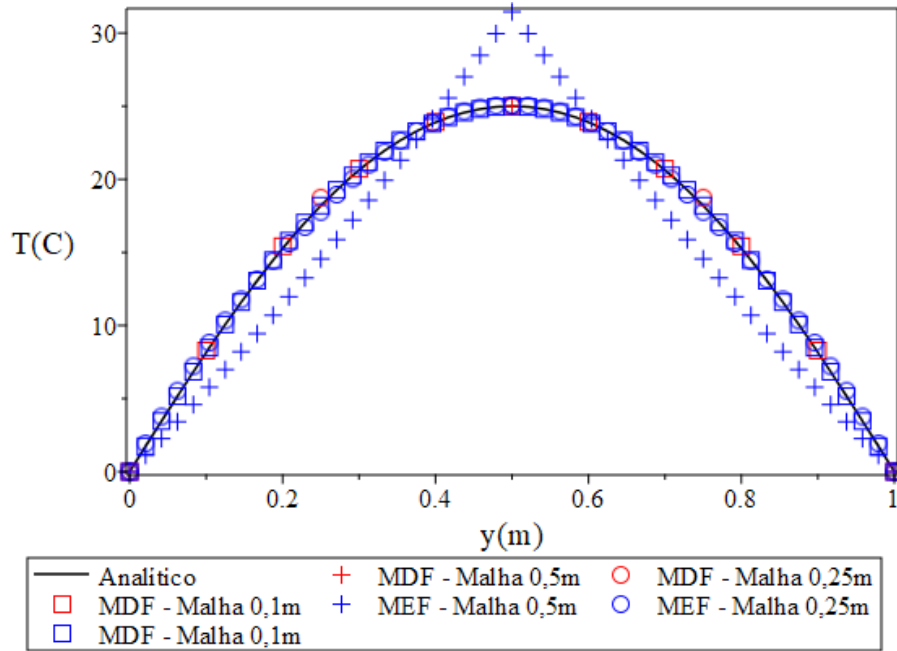


Gráfico 10 — Temperatura ao longo do eixo y para x=0,5m.

De modo similar ao observado no Gráfico 09 as malhas de 0,5m apresentaram uma significativa divergência em relação à solução analítica. Para as demais malhas os valores são convergentes. Logo abaixo é apresentado o erro relativo à convergência do MEF em função do número de elementos das malhas, não se utilizou o erro relativo ao MDF por este se aproximar de 0, afim de validar as soluções numéricas para que estas possam ser aplicadas à diferentes casos como soluções do problema térmico em regime permanente.

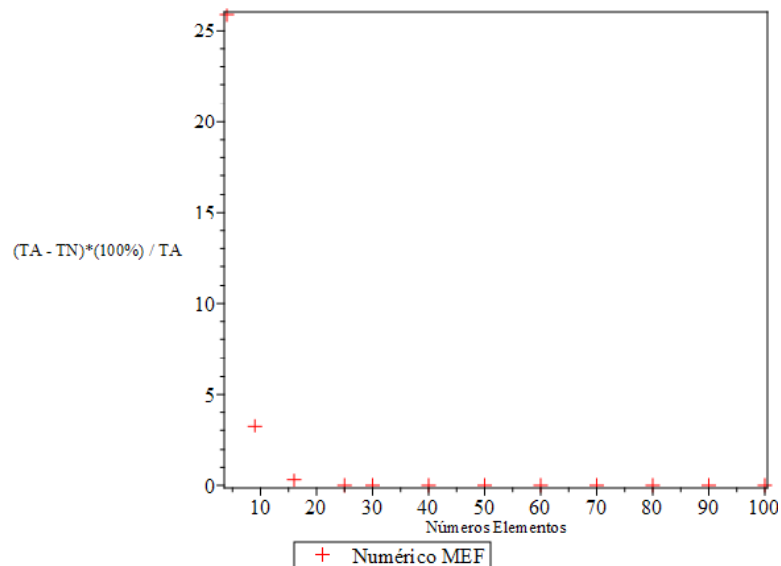


Gráfico 11 — Erro de Convergência Solução Numérica Laplace

Por certo, observa-se através do gráfico 11, que as soluções numéricas apresentam uma boa precisão e possibilita a determinação das mesmas para um baixo custo computacional.

6.2 TESTE DE CONVERGÊNCIA REGIME TRANSIENTE

Nesta etapa, validou-se a solução do problema térmico para o caso particular da Equação de Fourier Unidimensional. Em tal caso a equação do calor é variável em função da posição e do tempo. Dessa forma, a solução numérica dependerá do refinamento da malha e do passo tempo para convergir.

A Eq. é reduzida a seguinte forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{c \cdot \rho}{\kappa} + \frac{\partial T}{\partial t} \quad 6.4$$

A geometria escolhida para determinar as soluções para o problema unidimensional, trata-se de uma viga de 1 metro e secção transversal de 0,1m x 0,1m , no qual está exposta à temperatura de 100°C na borda direita (T₂) e 0°C na borda esquerda (T₁). Como pode ser visto na figura abaixo.



Figura 28 — Solução Fourier Unidimensional

Fonte: O autor (2020)

6.2.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica é determinada pela Equação:

$$T(x, t) = T_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_E(x)] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\delta^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad 6.5$$

Observa-se que, a solução de Fourier é variável em função do tempo - o que caracteriza o regime transiente. No caso em estudo, foram feitas as seguintes considerações:

- L1 = 1m.
- t = 172800 s (2 dias).

Os dados térmicos empregados na solução do problema são definidos na tabela abaixo:

Tabela 6.1 — Propriedades térmicas do Concreto Massa

Parâmetros Térmicos	Valores
Condutividade Térmica (W/m. °C)	1,79
Calor Específico (J/ g.°C)	1000
Massa Específica (Kg / m ³)	2388

Fonte: O autor (2020)

A solução analítica da Eq.6.4 é apresentada graficamente como:

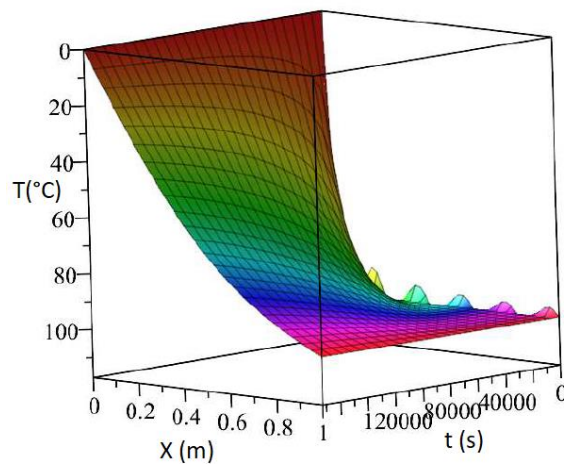


Gráfico 12 — Solução Equação de Fourier Unidimensional - Método Analítico

6.2.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

MEF:

Considerações importantes em relação a solução via Elementos Finitos:

- Utilizou-se diferentes malhas e diferentes passos temporais para determinar qual malha apresenta melhor custo computacional;
- Adotou-se um intervalo de 2 dias (172800 segundos);
- O Elemento utilizado para solução do problema térmico foi o Plane55.

Logo abaixo é apresentada a solução obtida via MEF através de um gráfico qualitativo, considerando uma malha de 0,1m.

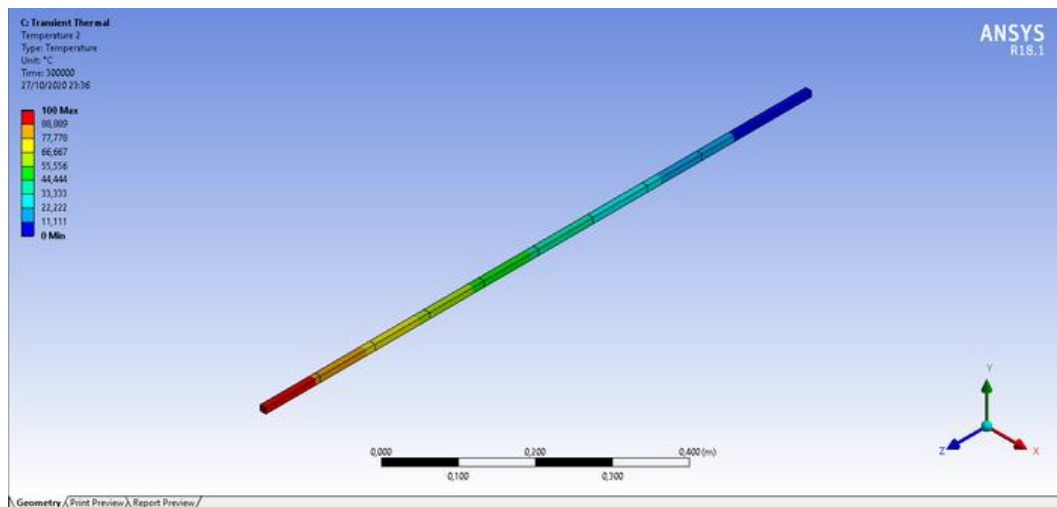


Gráfico 13 — Solução Numérica via MEF - Malha de 0,1m para t=300000s
MDF:

Considerações importantes em relação à solução via Diferenças Finitas:

- Será acrescido o termo temporal na Equação do Calor;
- O passo tempo adotado será de 1 segundo;
- Para cada passo temporal haverá uma determinada temperatura;
- A convergência será determinada pela relação espaço-temporal.

A solução da Eq. 6.4 em Diferenças Finitas corresponde à:

$$T_i^{k+1} = (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k)F + (1 - 2F)T_i^{k+1} \quad 6.6$$

Sendo $F = D\Delta t / \Delta x^2$.

6.2.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

No caso da solução da Equação de Fourier, apesar de se tratar de uma viga, o elemento é considerado bidimensional por depender da posição e do tempo. Dessa forma, para validar a solução foram analisadas duas situações: a convergência das soluções numéricas para diferentes malhas considerando $x = 0,5m$ para t variando de 0 à 300000s (Gráfico 14) e a convergência das soluções considerando $t = 2$ dias ao longo da viga (Gráfico 15).

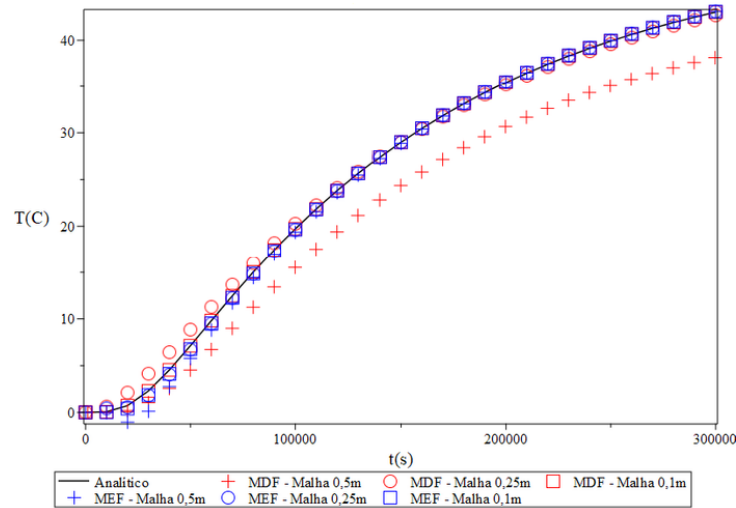


Gráfico 14 — Temperatura ao longo do tempo para $x = 0,5m$ - Equação de Fourier

Observa-se que a solução numérica via MDF diverge das demais soluções quando utilizada a malha de $0,5m$. Para as demais malhas, as soluções numéricas apresentam o mesmo comportamento da solução analítica. O passo tempo utilizado para todas as soluções foi correspondente a 1 segundo. Durante o desenvolvimento das soluções, nota-se que, para maiores passos temporais as soluções numéricas passam a divergir da analítica.

Logo abaixo, são apresentados os resultados ao longo do eixo x para $t = 2$ dias.

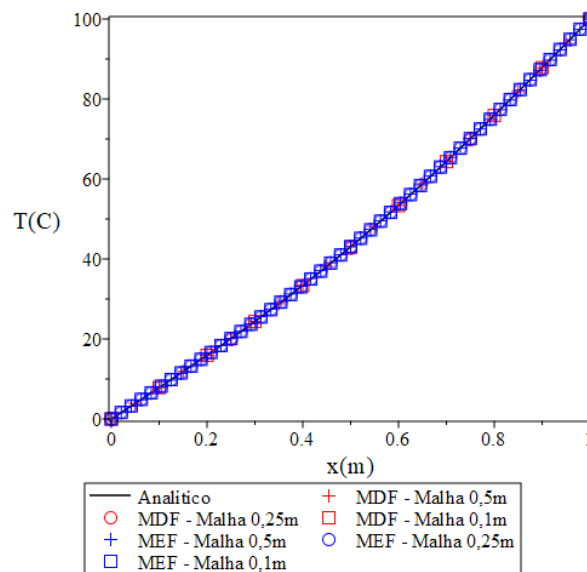


Gráfico 15 — Temperatura ao longo do eixo x para $t=2$ dias - Equação de Fourier

A partir do gráfico 15, nota-se que para um $t=2$ dias todas as soluções são convergentes, inclusive para malhas com refinamentos não ideais como a de $0,5m$ e $0,25m$.

Finalizando esta etapa de convergência, logo abaixo é apresentado o gráfico do erro referente a cada um dos métodos em função no número de elementos considerando o ponto central da viga e $t=2$ dias.

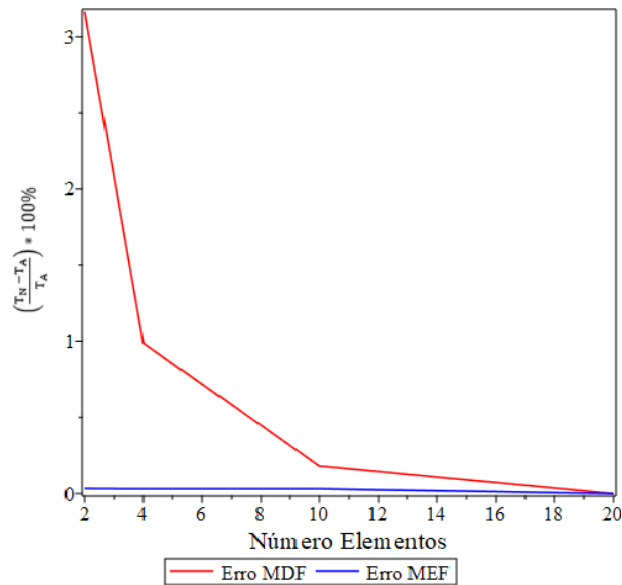


Gráfico 16 — Erro de Convergência Solução Numérica Fourier

Como esperado, o erro referente a cada um dos métodos numéricos é inversamente proporcional ao número de elementos, ou seja, quanto menor o número de elementos maior o erro. Dessa forma, com base nas soluções numéricas aqui expostas, as soluções numéricas foram validadas podendo, desta forma, ser aplicada ao caso da Barragem de Gravidade. Por fim, decidiu-se adotar uma malha de 0,1m para o MDF, uma malha de 0,1m para o MEF e o passo tempo de 1s, pois estes valores apresentam a melhor convergência para o menor custo computacional.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção tem por objetivo apresentar os resultados provenientes das simulações numéricas realizadas nesta pesquisa. Primeiramente serão discutidas as soluções utilizadas na validação e na análise dos fenômenos térmicos aplicados à Barragem de Concreto Gravidade. Subsequentemente serão expostos exemplos de aplicação, variando condições iniciais e de contorno, envolvidos nos problemas térmicos mostrando as principais tendências do fenômeno.

7.1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E DOS MATERIAIS

Nas simulações desenvolvidas nesta pesquisa, foram utilizados os seguintes modelos geométricos e propriedades dos materiais.

- Geometria Placa Retangular:

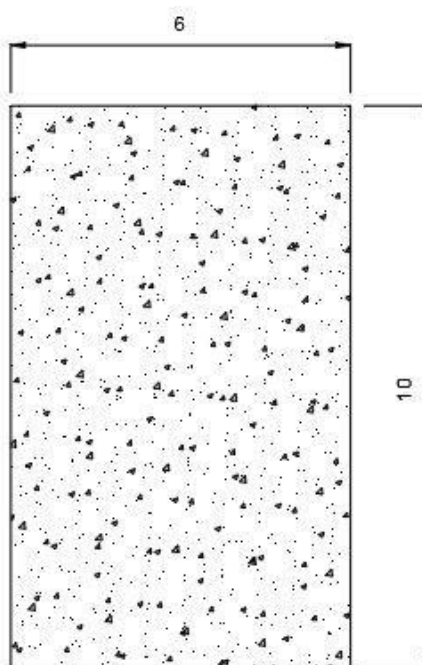


Figura 25 — Placa Retangular

- Geometria Barragem de Concreto Gravidade:

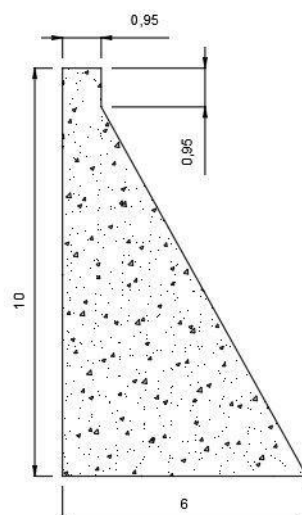


Figura 26— Geometria Barragem de Gravidade

Este perfil de barragem é baseado em uma seção real de acordo com Coelho (2012). Foram consideradas medidas proporcionais para facilitar as simulações e também uma estrutura maciça de concreto. Todas as simulações aqui executadas podem ser reproduzidas para quaisquer dimensões de Barragem de Concreto Gravidade.

- Propriedades do Material Concreto Massa:

Quadro7.1 — Propriedades Térmicas do Concreto Massa

PROPRIEDADES	CONCRETO
k-Conductividade térmica (W/m.°C)	1,79
c-Calor Específico (J/g.°C)	1000
d-Massa Específica (kg/m ³)	2300
α -Coeficiente de Dilatação (10 ⁻⁶ /°C)	7,07
h-Coeficiente de Convecção (W/m ² .°C)	10

Fonte: Coelho (2012)

7.2 VALIDAÇÃO DO MODELO DA BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE

Com o intuito de validar o modelo da Barragem de Gravidade foram adotados os seguintes procedimentos:

- Inicialmente, para uma placa retangular, foram determinadas as soluções analíticas e numéricas do problema térmico;
- De posse desses resultados, eles foram confrontados com o intuito de validar as soluções numéricas a partir das soluções analíticas disponíveis.
- Validadas as soluções numéricas, aplicou-se a geometria da Barragem aos modelos propostos.
- Devido a particularidades do modelo das Diferenças Finitas quando aplicado às geometrias complexas, as soluções numéricas foram comparadas com a finalidade de validar o modelo da barragem proposto via MDF;
- Por fim, realizou-se uma análise dos resultados obtidos explicando o comportamento térmico da Barragem.

7.2.1 PLACA RETANGULAR

A primeira parte da solução do modelo proposto reside em aplicar as Condições Iniciais e de Contorno. A princípio foram adotadas as propriedades dos materiais e a geometria exibidas no quadro 7.1 e na figura 25. Quanto a temperatura, considerou-se a de lançamento do concreto igual a 45°C e utilizou-se no contorno da geometria a temperatura de $T1 = 25^{\circ}\text{C}$ na parte superior da placa e nas demais faces a temperatura de 20°C ($T2$, $T3$ e $T4$), conforme pode ser visto na figura abaixo.

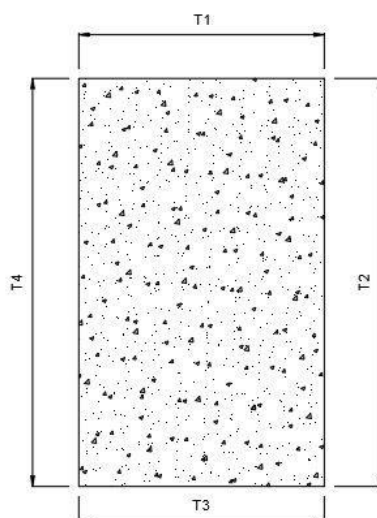


Figura 27 — Temperatura atuante como Condição de Contorno - Placa

Como a situação apresentada é favorável por ser uma placa retangular manteve-se a malha de 0,1m, modificando apenas a geometria. Para a solução via MEF foi utilizado o

elemento PLANE55 e foram gerados 60000 elementos e 263141 nós. Logo abaixo são apresentados os resultados obtidos e as suas respectivas interpretações.

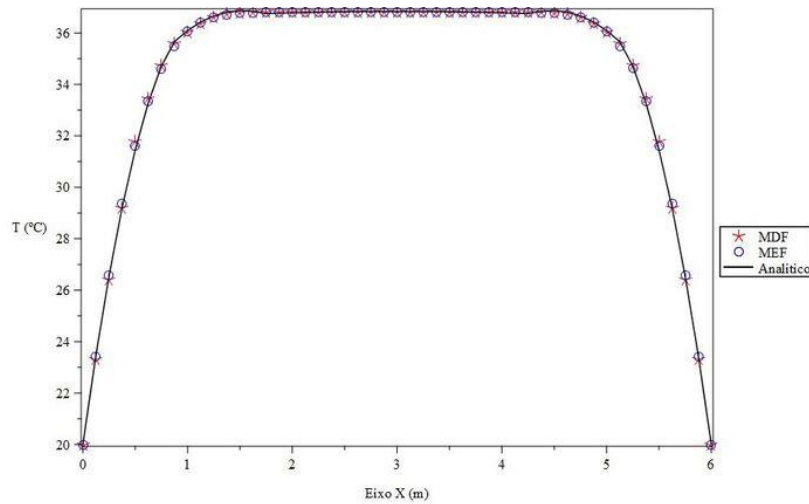


Gráfico 17 — Temperatura ao longo do eixo x para y=5m após 2 dias de concretagem – Equação de Fourier.

O gráfico 17 corresponde às temperaturas obtidas ao longo do eixo x para y=5m após 2 dias de concretagem. As temperaturas máximas foram obtidas no ponto central da placa e são equivalentes à $T_{MDF} = 36,827 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_{MEF} = 36,812 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_A = 36,871 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Os respectivos gradientes térmicos foram: $\Delta T_{MDF} = 16,827 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $\Delta T_{MEF} = 16,812 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e $\Delta T_A = 16,871 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Calculando o erro das soluções numéricas em relação à solução analítica temos para o MDF e = 0,26% e para o MEF e=0,35%.

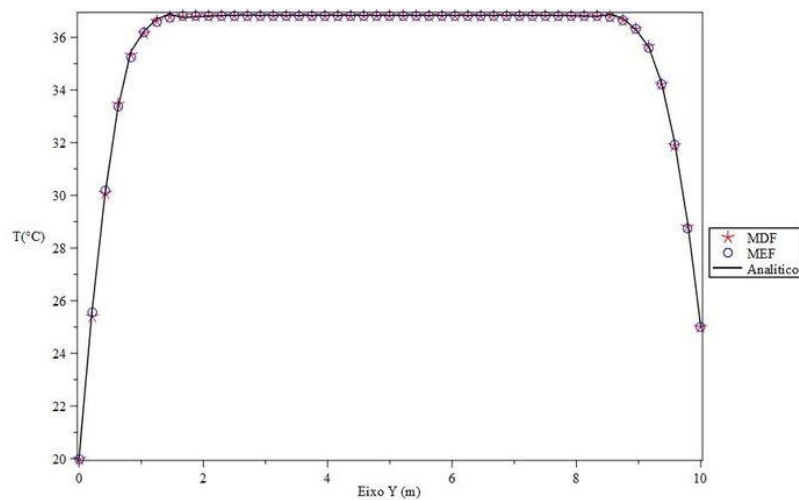


Gráfico 18 — Temperatura ao longo do eixo y para x=3m após 2 dias de concretagem – Equação de Fourier.

O gráfico 18 corresponde às temperaturas obtidas ao longo do eixo y para $x=3\text{m}$ após 2 dias de concretagem. As temperaturas máximas foram obtidas no ponto central da placa e são equivalentes à $T_{\text{MDF}} = 36,827\text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_{\text{MEF}} = 36,812^{\circ}\text{C}$ e $T_{\text{A}} = 36,871^{\circ}\text{C}$. Os respectivos gradientes térmicos foram: $\Delta T_{\text{MDF}} = 16,827\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\Delta T_{\text{MEF}} = 16,812^{\circ}\text{C}$ e $\Delta T_{\text{A}} = 16,871^{\circ}\text{C}$. Calculando o erro das soluções numéricas em relação à solução analítica temos a mesma taxa de erro para o MDF $e = 0,26\%$ e para o MEF $e = 0,35\%$.

Os próximos resultados correspondem a variação da temperatura em função do Tempo para os pontos com suas respectivas coordenadas definidos na figura 28.

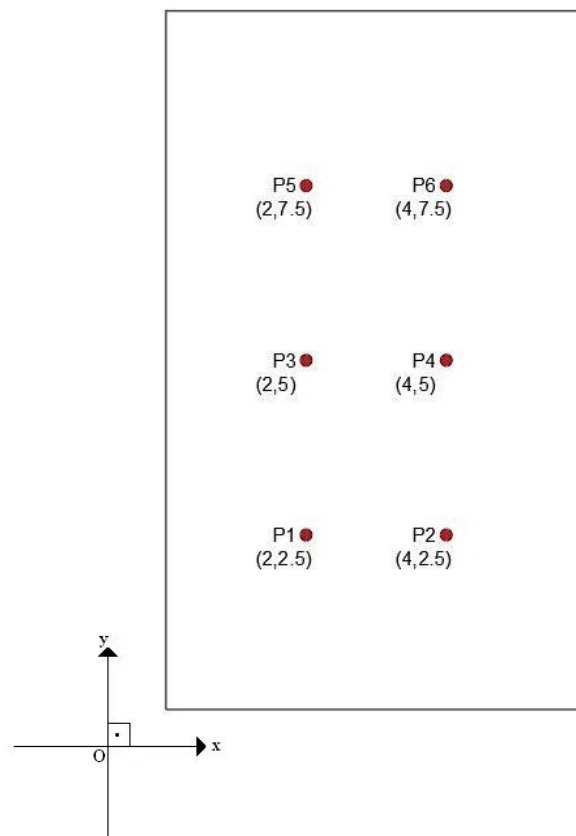


Figura 28— Pontos analisados na placa.

Devido a simetria da placa, os pontos (P1 e P2), (P3 e P4) e (P5 e P6) possuem os mesmos resultados logo, serão anexados apenas 3 gráficos para o conteúdo não se tornar repetitivo. Foi utilizado o passo de tempo equivalente a 1s. Como o valor utilizado é pequeno não há uma preocupação quanto a convergência pois já é adotado um valor muito menor que o utilizado no início da convergência.

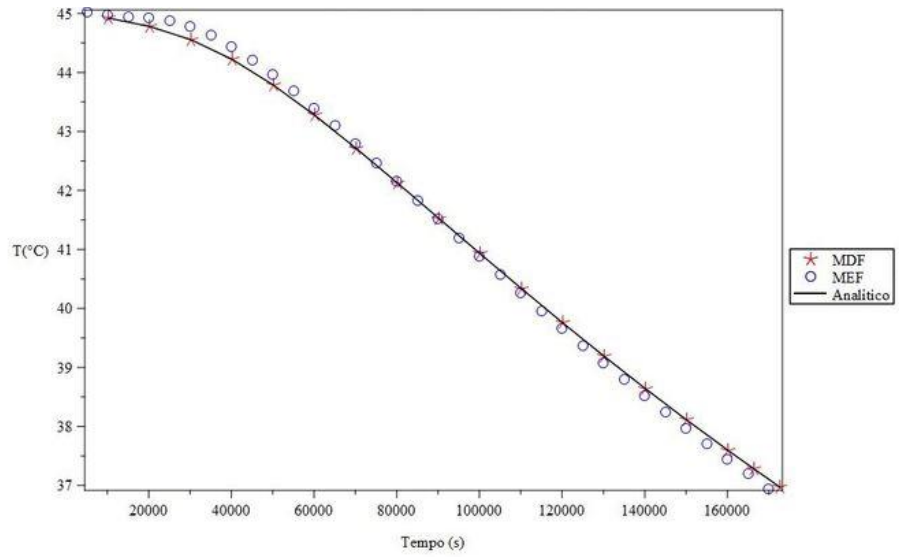


Gráfico 19 — Temperatura ao longo do tempo para P1(2,2,5) e P2(4,2,5)

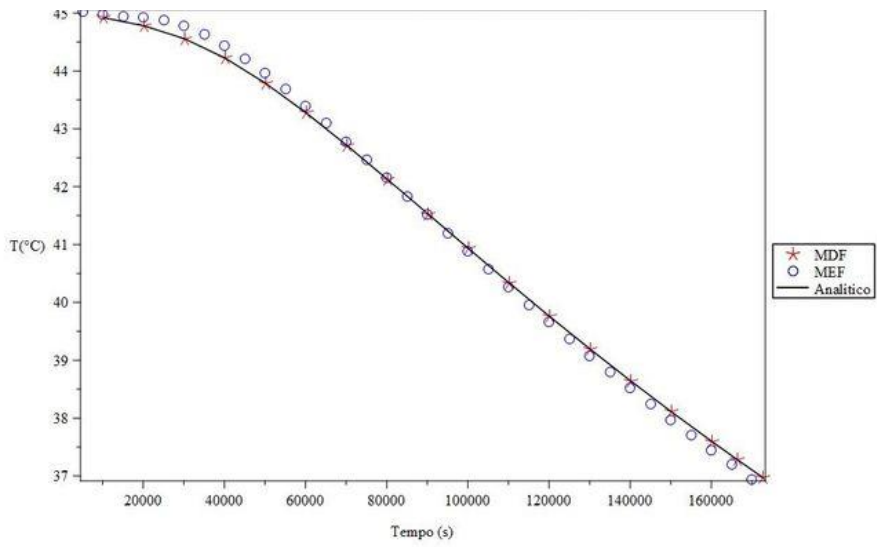


Gráfico 20 — Temperatura ao longo do tempo para P3(2,5) e P4(4,5)

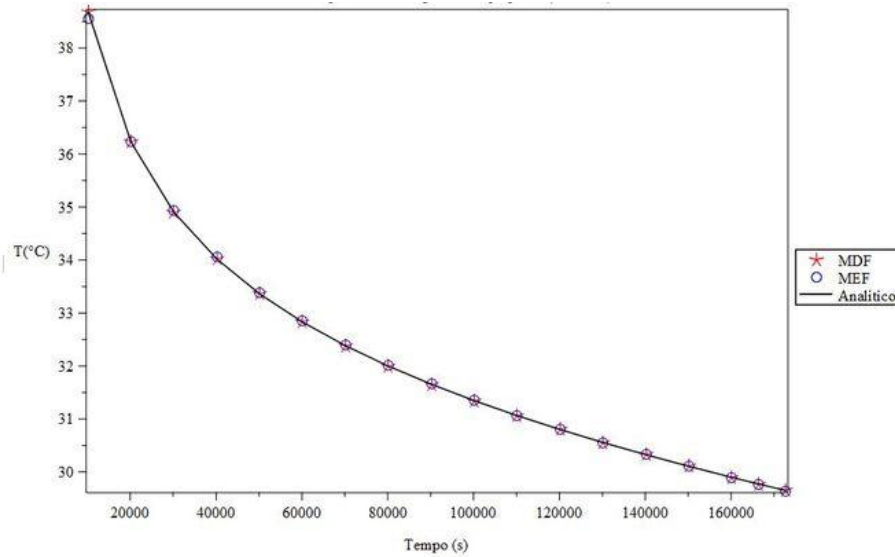


Gráfico 21 — Temperatura ao longo do tempo para P5(2,7,5) e P6(4,7,5)

Para os pontos analisados a temperatura na placa tende a diminuir ao longo do tempo com o propósito de atingir um equilíbrio com o meio externo. As temperaturas determinadas via MEF apresentam uma pequena divergência em relação as analíticas, a maior delas ocorre para o tempo de 40000 segundos em que a $T_{MEF}=44,57^{\circ}\text{C}$ e a $T_A=44,22^{\circ}\text{C}$. O erro relativo máximo corresponde à 0,73%, como este valor é menor que 1%, os resultados apresentam uma boa precisão. Logo abaixo são mostradas a evolução das isotermas na placa em função do tempo para melhor compreensão do fenômeno térmico.

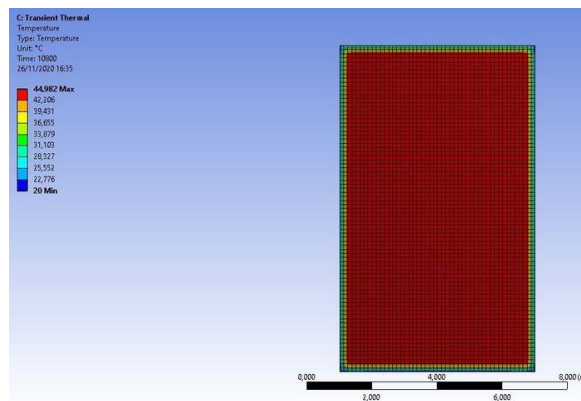


Gráfico 22 — Isotermas após 3h da Concretagem - Tmax = 44,98°C

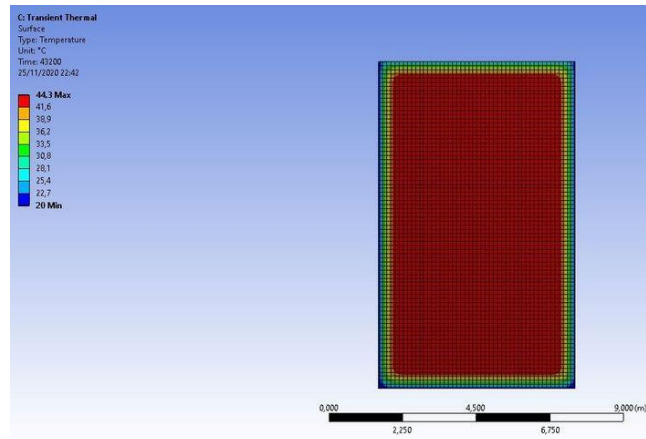


Gráfico 23 — Isotermas após 12h da Concretagem - $T_{max} = 44,30^{\circ}\text{C}$

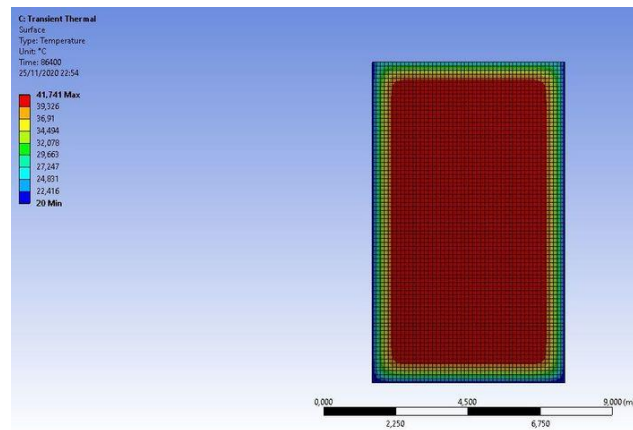


Gráfico 24 — Isotermas após 24h da Concretagem - $T_{max} = 41,74^{\circ}\text{C}$

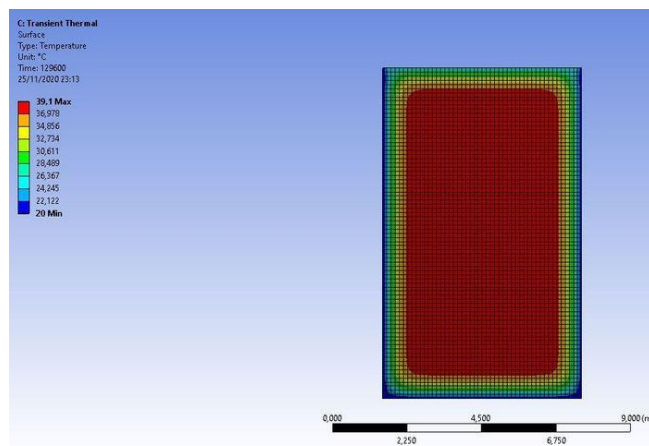


Gráfico 25 — Isotermas após 36h da Concretagem - $T_{max} = 39,10^{\circ}\text{C}$

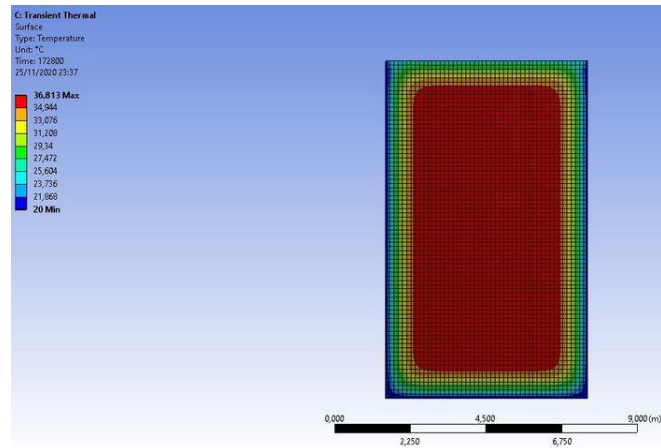


Gráfico 26 — Isotermas após 48h da Concretagem - $T_{max} = 36,81^{\circ}\text{C}$

7.2.2 COMPARAÇÃO PLACA COM BARRAGEM

O modelo desenvolvido para a barragem foi validado através da comparação com o modelo da placa. Dessa forma, adotando as mesmas condições iniciais e de contorno e as geometrias apresentadas nas figuras (25, 26), nesta seção serão confrontados os resultados obtidos para ambos os casos. No entanto, haverá uma particularidade na solução desenvolvida via MDF. Normalmente este método é limitado a geometrias mais simples devido à dificuldade da adequação da malha a geometrias complexa. Para solucionar esse problema foi realizado um maior refinamento da malha, passando de 0,1m para 0,05m, aumentando dessa forma o custo computacional, mas melhorando a precisão dos resultados.

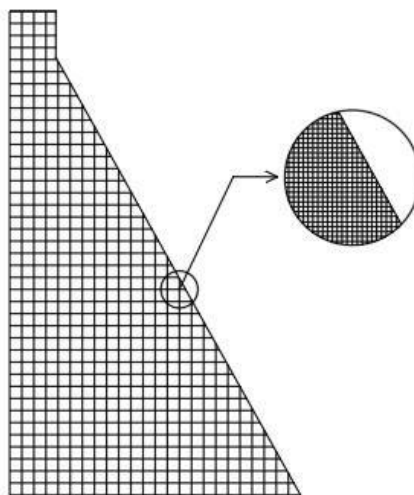


Figura 29 — Refinamento da malha aplicada a geometria da Barragem para solução via MDF.

Inicialmente determinou-se a variação da temperatura ao longo do eixo y para $x=0,45\text{m}$ (Gráfico 27). Essa reta foi adotada devido o comprimento ao longo do eixo y ser igual para a barragem e para a placa.

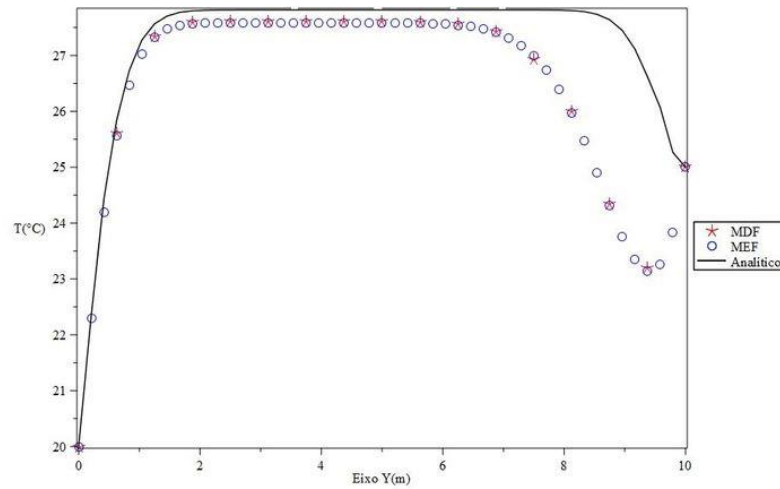


Gráfico 27 — Temperatura ao longo do eixo y para $x=0,45\text{m}$

Observa-se que apesar dos valores distintos as curvas apresentam o mesmo comportamento. A divergência entre os valores encontrados nas soluções analíticas e numéricas ocorrem devido a diferença da geometria, porém os resultados encontram-se muito próximos. A maior diferença entre as temperaturas ocorre para $y=9\text{m}$ no qual a temperatura dos métodos numéricos foi de $23,4^\circ\text{C}$ e a do método analítico $27,2^\circ\text{C}$. Posteriormente, avaliou-se a evolução da Temperatura ao longo do tempo para o baricentro da Barragem P(2,3.6).

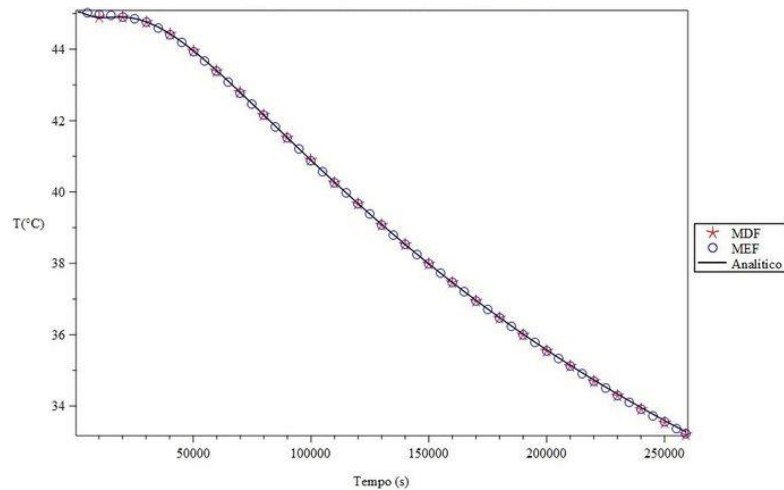


Gráfico 28 — Comparação da Temperatura ao longo do tempo para P(2,3.6)

Os resultados encontrados são coincidentes para as três soluções. Dessa forma, avaliando em conjunto com o gráfico 27, observa-se que o modelo da barragem proposto é valido tanto para o MEF quanto para o MDF. Sobre as soluções encontradas através do MDF, o refinamento da malha mostrou-se uma excelente alternativa para sanar o problema existente quando o MDF é aplicado à geometria complexa.

7.2.3 BARRAGEM DE CONCRETO GRAVIDADE:

Este tópico mostra a análise térmica de um perfil de barragem. Primeiramente determinou-se a evolução da temperatura ao longo do tempo para o seu Baricentro, conforme pode ser visto no gráfico a seguir.

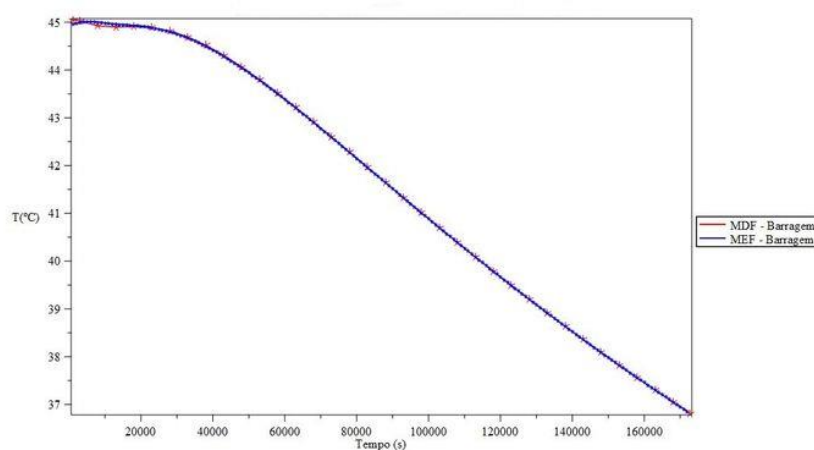


Gráfico 29 — Temperatura ao longo do tempo para o Baricentro da Barragem.

A partir desse gráfico nota-se que, de maneira similar à placa, a temperatura interna da barragem é muito alta no início e corresponde a temperatura de lançamento do concreto. Depois esse valor cai drasticamente assumindo uma tendência quase linear. Essa queda abrupta é preocupante durante a execução da barragem e deve ser controlada pois ela provoca a formação de tensões térmicas devido a presença de um elevado gradiente térmico.

Seguindo com a análise, traçou-se uma reta paralela ao eixo x passando pelo baricentro para que fosse determinada a variação da temperatura nessa região. De modo similar, traçou-se uma reta paralela ao eixo y.

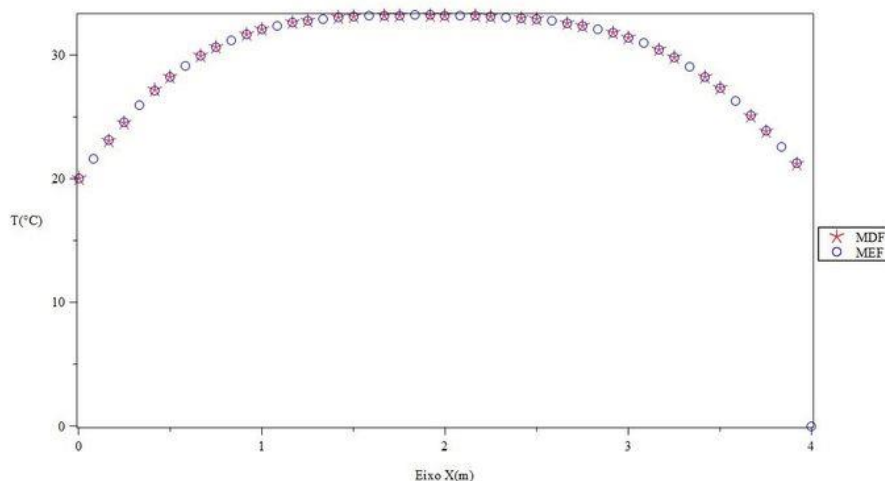


Gráfico 30 — Temperatura ao longo do eixo x para o CG da Barragem

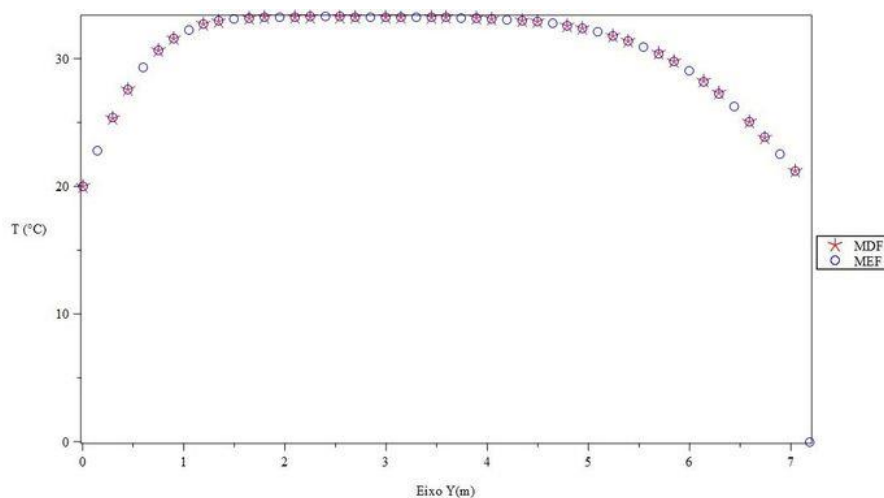


Gráfico 31 — Temperatura ao longo do eixo y para o CG da Barragem

Do mesmo modo que os casos anteriores, a região interna a barragem é a que possui maior temperatura e as soluções numéricas são praticamente coincidentes. Nota-se que o gradiente térmico é influenciado pelas dimensões da estrutura a ser concretada (esse parâmetro será avaliado no tópico a seguir). Por fim, são apresentadas as isotermas na Barragem de Concreto Gravidade mostrando de maneira qualitativa o comportamento da estrutura após a concretagem.

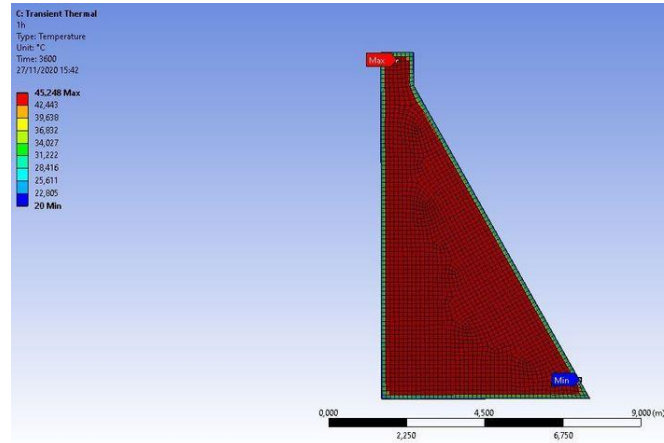


Gráfico 32 — Barragem: isotermas após 1h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 45,25^{\circ}\text{C}$.

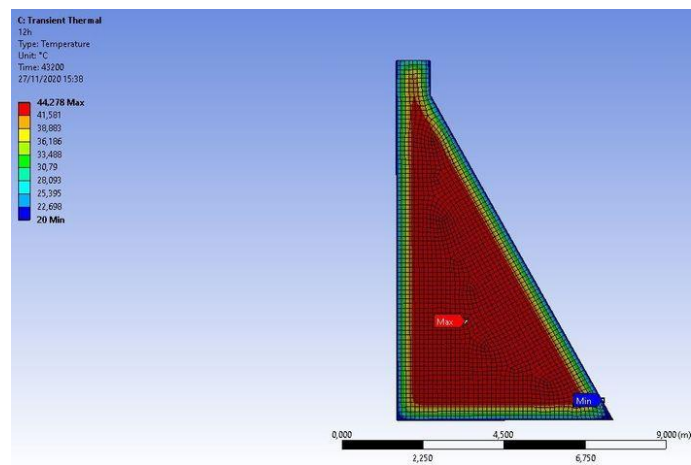


Gráfico 33 — Barragem: isotermas após 12h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 44,28^{\circ}\text{C}$.

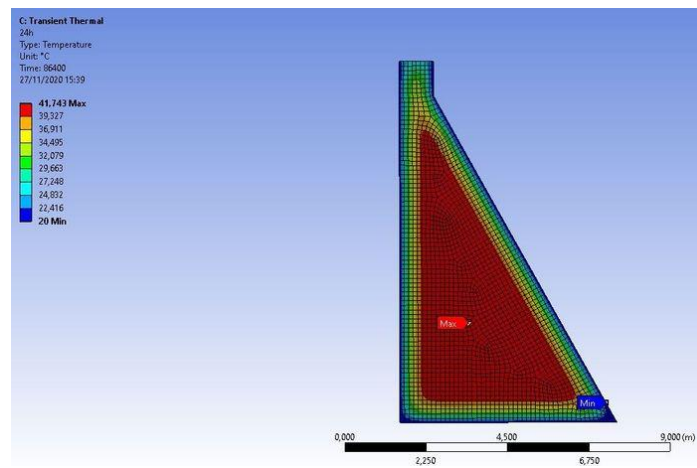


Gráfico 34 — Barragem: isotermas após 24h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 41,74^{\circ}\text{C}$.

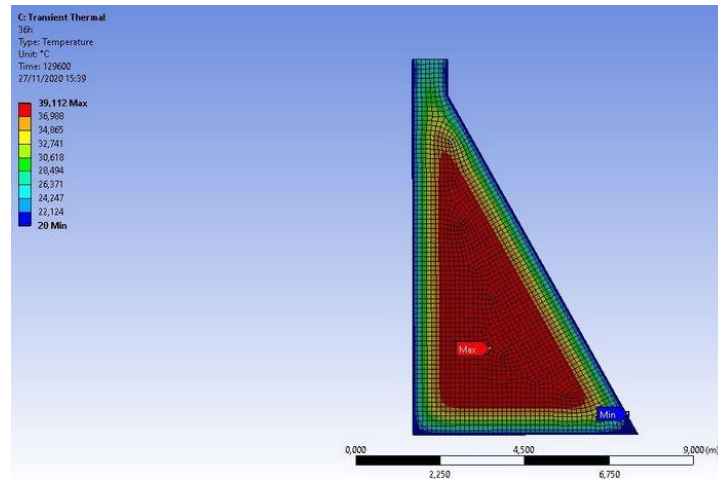


Gráfico 35 — Barragem: isotermas após 36h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 39,11^{\circ}\text{C}$.

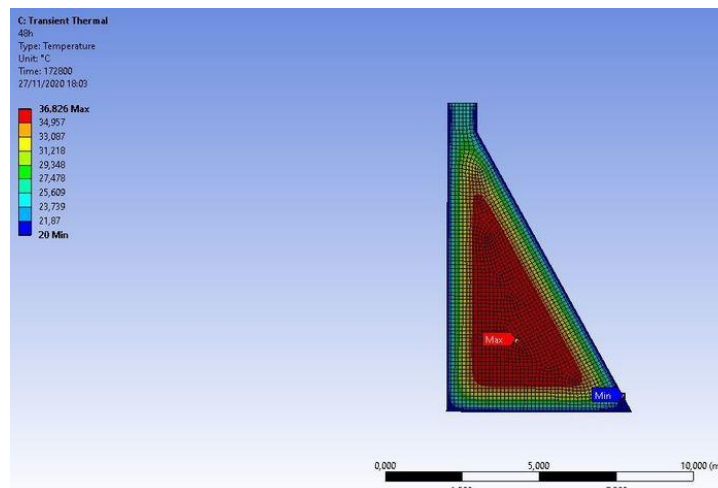


Gráfico 36 — Barragem: isotermas após 48h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 36,83^{\circ}\text{C}$.

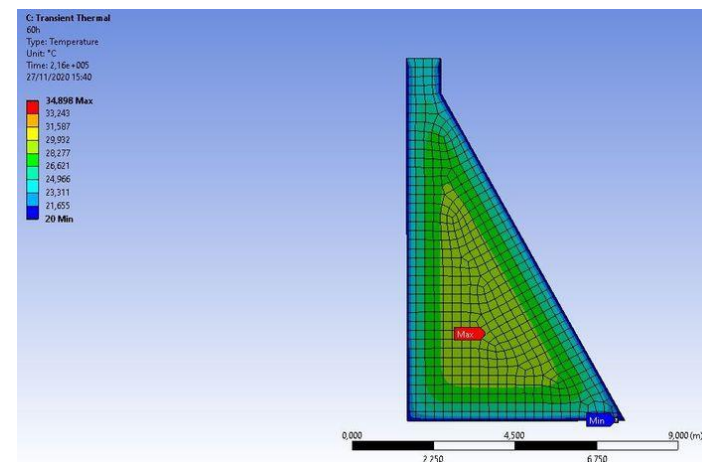


Gráfico 37 — Barragem: isotermas após 60h de concretagem - $T_{\text{máx}} = 34,90^{\circ}\text{C}$.

7.2.4 BARRAGEM COM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR

Este exemplo ilustra o fenômeno térmico na estrutura da Barragem considerando uma constante geração interna de calor ($q_k = 200 \text{ W/m}^3$) no qual este valor representa o calor gerado nas reações de hidratação do cimento. Trata-se de uma análise comparativa apenas via MEF, não foram usados os métodos analíticos, de forma a verificar qual a influência da geração de calor na temperatura interna da estrutura. Os resultados encontrados são apresentados nos gráficos 38 à 40.

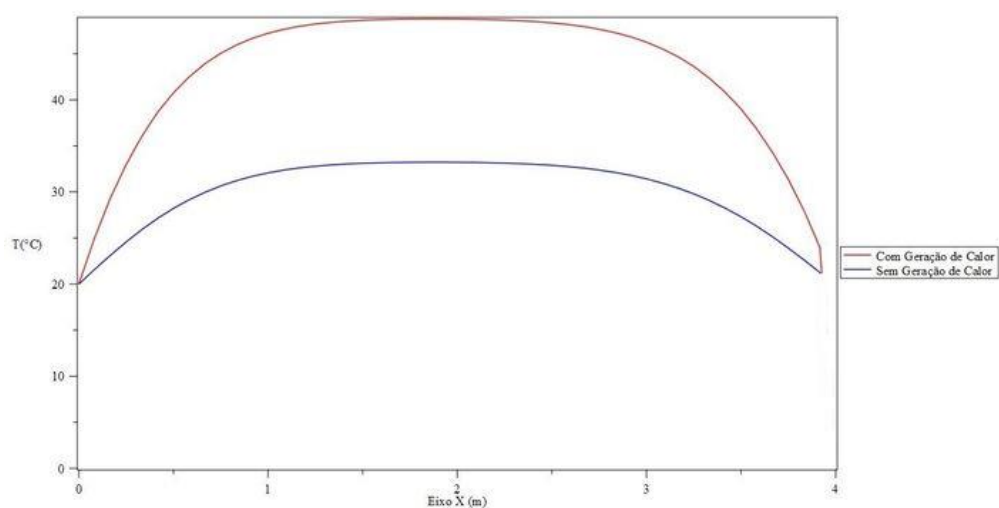


Gráfico 38 — Comparação da temperatura ao longo do eixo x para o CG da Barragem.

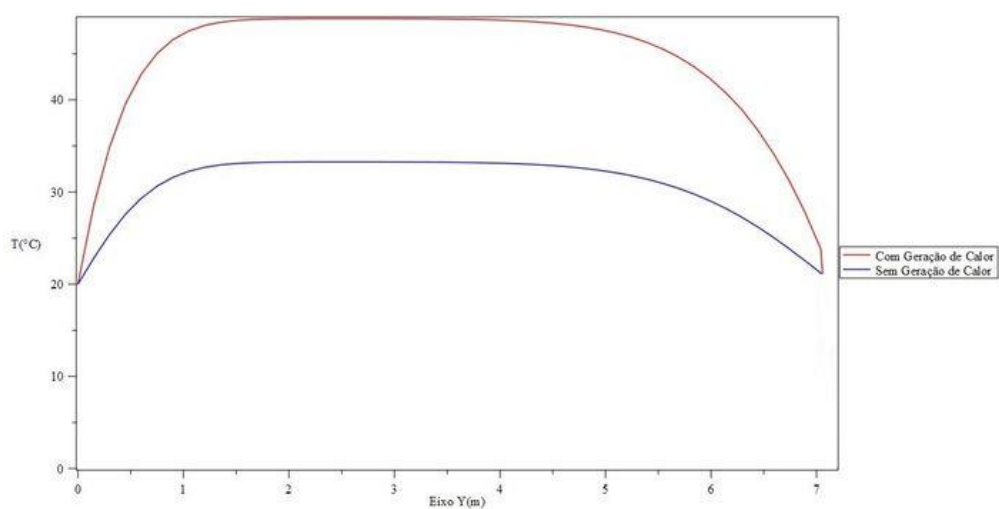


Gráfico 39 — Temperatura ao longo do eixo y para o CG da Barragem

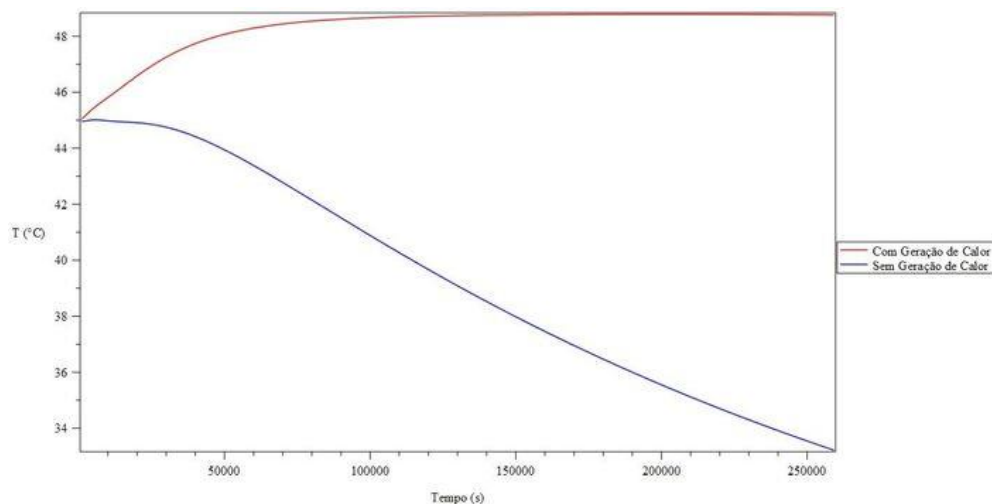


Gráfico 40 — Comparação temperatura ao longo do tempo para o Baricentro da Barragem

Como pode se observar nos gráficos acima, os valores da temperatura para a estrutura com geração interna de calor são superiores aos que não possuem geração de calor sendo que essa diferença pode chegar até 47%. As curvas da temperatura em função da posição apresentam o mesmo comportamento dado que as maiores temperaturas estão na região central. No entanto, as curvas da temperatura em função do tempo apresentam um comportamento diferente. A curva da estrutura sem geração de calor é, a todo instante, decrescente no qual a temperatura máxima é atingida nas idades iniciais. No caso da curva com geração de calor esta apresenta um crescimento até $t = 194000s$ atingindo nesse momento a temperatura de pico equivalente à $48,79\text{ }^{\circ}\text{C}$. Na tabela a seguir são mostradas as temperaturas máximas atingidas durante a análise para ambos os casos.

Tabela 2 — Comparação das temperaturas máximas atingidas

Variável	T com geração de calor	T sem geração de calor	Diferença Percentual
$X_{cg} = 1,83m$	$48,783\text{ }^{\circ}\text{C}$	$35,819\text{ }^{\circ}\text{C}$	36,2%
$Y_{cg} = 2,54m$	$48,772\text{ }^{\circ}\text{C}$	$33,226\text{ }^{\circ}\text{C}$	46,79%
$t = 194000$	$48,824\text{ }^{\circ}\text{C}$	$33,27\text{ }^{\circ}\text{C}$	46,75%

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

8.1 CONCLUSÕES:

Na presente monografia foi realizada a simulação do comportamento térmico de uma Barragem de Concreto Gravidade através do Método das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos. A metodologia desenvolvida permitiu determinar as isotermas na estrutura analisada adaptando o modelo e as propriedades dos materiais de acordo com a necessidade do estudo. Mesmo para o modelo implementado através das Diferenças Finitas, que de acordo com a literatura apresenta restrições ao ser aplicado à geometrias complexas, observou-se um erro percentual inferior à 12% após o refinamento da malha na região do contorno. Considerando a simplicidade do método e a limitação do tempo computacional devido aos recursos disponíveis, esses resultados consistem numa solução precisa e eficiente do problema.

A realização de simulações dos parâmetros térmicos: geração interna de calor, temperatura de lançamento de concreto e variação das dimensões da estrutura permitiu o levantamento de algumas recomendações que devem ser consideradas/executadas durante a construção de uma Barragem a fim de minimizar o gradiente térmico, as quais são:

- Para diminuir a geração de calor recomenda-se a adoção de um cimento que libere menos energia nas reações de hidratação do cimento o que excluí, por exemplo, a utilização do cimento CPV-ARI na construção de Barragens de Gravidade. Além disso, recomenda-se a utilização de sistemas de refrigeração interna. Estes são feitos por pequenas tubulações contendo água gelta. Essas tubulações devem ser introduzidas no concreto ainda fresco e permanecerão dentro dele após endurecido;
- A temperatura de lançamento do concreto deve ser controlada. Uma das formas de controle é a adição de agregado resfriado, gerenciamento da quantidade de cimento utilizada e a adição de gelo triturado durante a concretagem. Deve-se ter o cuidado de não alterar a relação água/cimento do traço do concreto;
- Por fim, para minimizar o impactos do volume de concreto utilizado nas barragens, recomenda-se a construção em camadas variando entre 2m à 2,5m. Caso não ocorra o resfriamento do concreto, a espessura da camada passa a ser de no máximo 1 m.

A previsão das isotermas proporcionada pela simulação numérica aqui desenvolvida permitirá o monitoramento do comportamento da Barragem em relação a origem de tensões e fissuras térmicas. No mais, levando em conta todos os resultados obtidos e considerações feitas

referentes às aproximações utilizadas nas análises, pode-se concluir que os métodos apresentados geraram resultados satisfatórios para a utilização da análise.

8.2 SUGESTÕES:

Este trabalho consiste na continuidade da linha de pesquisa de Estudos dos Problemas Térmicos de Barragens de Concreto Gravidade desenvolvida no Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura da Universidade de Brasília. A partir das questões levantadas nesta análise, recomenda-se para trabalhos futuros:

- Calcular as tensões térmicas via MDF e MEF;
- Aplicar o método definido nesta pesquisa a casos de Barragens Brasileiras e comparar com resultados obtidos experimentalmente;
- Determinar as isothermas na Estrutura da Barragem considerando a geração interna de calor transiente;
- Simular o comportamento térmico da Barragem após a adoção de métodos que minimizem o gradiente térmico como: a construção em camadas, tubos de resfriamento, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Cement and Concrete Terminology**. ACI 318 Farmington Hills, 2005.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Mass Concrete**. ACI-207.1R: **Mass Concrete**. ACI Committee 207. Detroit, USA, 1999.

ANDRADE, W. P. (Ed.); **Concretos: Massa, estrutural, projetado e compactado com rolo**. São Paulo: Pini, 1997. 1 v.

ANA. **Usina Hidrelétrica de Tucuruí (PA) - Rui Faquini/Banco de Imagens ANA**. Disponível em:< https://www.ana.gov.br/imagens/imagens-divisao-hidrografica/imagens-regiao-hidrografica-tocantins-araguaia/toca_143-8040444-usina-hidreletrica-de-tucurui-pa-rui-faquini.jpg/view>. Acesso em 06/2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.**NBR 12818: Concreto - Determinação da difusividade térmica**. Rio de Janeiro: 1993.

ALMEIDA, G. V.; COELHO, N. A.; PEDROSO, L. J.. **Distribuição de temperatura em placas em regime transiente: comparação entre solução analítica e numérica**. In:XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Brasília: 2016.

ALFREDO B. F. (Ed.). **Colunas Mistas Parcialmente Revestidas: Efeito da Resistência à Flambagem sob Ação do Fogo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UFTP. 2018.

ATAÍDE, C. A. V. CORREA, M. R. S. **Estudo comparativo entre o método das tensões admissíveis e o método dos estados limites para a alvenaria estrutural**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 8, n. 34, 2006. Disponível em:< http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee34_105.pdf>. Acesso em 20/05/19.

BECKER, A.J. **Noções Básicas de Programação em MATLAB**.1ª Ed.Santa Maria, 2010.

BRASIL. PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. Lei n. 12.334 de 20 de set. de 2010. **Estabelece a política Nacional de Segurança de Barragens destinadas à acumulação de água para quaisquer usos, à disposição final ou temporária de rejeitos e à acumulação de resíduos industriais, cria o Sistema Nacional de Informações sobre Segurança de Barragens**. Brasília: Síntese, 2010.

ÇENGEL, Y.A.; GHAJAR, A.J; **Transferência de Calor e Massa – Uma abordagem Prática.** 4ª Ed.MCGRAW-HILL:2012.

CEMIG. **Primeira Usina Hidrelétrica da América Latina Completa 130 anos.** Jornal da cidade BH. Disponível em: < <https://www.jornaldacidadebh.com.br/atualidades/primeira-usina-hidreletrica-da-america-latina-completa-130-anos/>. >. Acesso em 6/09/20.

CHAPRA,S.C.; CANALE,R.P.. **Numerical Methods for Engineers.** 5ª ed. New York: MCGRAW-HILL:2006.

COMITÊ INTERNACIONAL DE GRANDES BARRAGENS. **Barragens e a Água no Mundo.** Paraná: Texto Faz Comunicação S/S Ltda, 2008. Título original: Dams & The World's Water.

COMITÊ BRASILEIRO DE GRANDES BARRAGENS. **Barragens no Brasil.** São Paulo 1982. 279 p.

COELHO, N. A.. **Um Estudo Numérico Do Efeito Térmico Em Concreto Massa.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.

COELHO, N. A.; GOMES, F. M. P.; PEDROSO, L. J.; SILVA, D. A.. **Um estudo comparativo analítico-numérico de tensões térmicas em casos clássicos de vigas e placas.** In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Brasília: 2016.

COELHO, N. A.; **Métodos Analíticos e Numéricos para o Estudo dos Efeitos Termomecânicos no Concreto Massa Orientados às Barragens de Gravidade.** Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD-007A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

COELHO, N. A.; **Uma contribuição analítico- numérico para o tratamento dos efeitos térmicos no concreto massa orientado à barragem de concreto.** Qualificação de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília. Brasília, 2015.

CORRÊA,L; FERREIRA, V. G.; **Solução numérica de equações diferenciais parciais via o método das diferenças finitas.** In: II Colóquio De Matemática Do Centro Oeste, II. 2011. 2011.

FARIA, E. F.. **Predição da Exotermia da Reação de Hidratação do Concreto Através de Modelo Termo-Químico e Modelo de Dados.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Rio de Janeiro: 2004.

ENGWHERE. **Barragem de Gravidade ou Represa de Gravidade?**. Disponível em: <<https://www.engwhere.com.br/barragem-de-gravidade-represas-de-gravidade/>>. Acesso em: 6 set.2020.

FERREIRA, R. **Classificação das Barragens**. Notas de aula da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Disponível em: <http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/15030/material/puc_barragens_02_classificacao.pdf>. Acesso em 07/2019.

FONTANA, E. **Métodos Numéricos em Engenharia Química**. Paraná:2018.

HOFFMAN, J. D., 2001. **Numerical methods for engineers and scientists**, Marcel Dekker, Inc.

ISAIA, G.C. **Concreto: Ciência e Tecnologia**. V.2.1 ed. São Paulo: IBRACON, 2005.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 116.

INOUE, G.; **Medidas Preventivas de Controle de Temperatura que Induz Fissuração no Concreto Massa**. Boletim Técnico N° 7; Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP; São Paulo: 1986.

INTERNATIONAL COMMISSION ON LARGE DAMS – ICOLD. **Bulletin 94 – Computer software for dams - Validation**. Paris, 1994.

INTERNATIONAL COMMISSION ON LARGE DAMS – ICOLD. **Boletim 117 - A Barragem de Gravidade - Uma Barragem para o Futuro**. Paris, 2000. Traduzido por João Luís Escosteguy Merino - CBDB, 2004.

INTERNATIONAL COMMISSION ON LARGE DAMS – ICOLD.**Boletim 122 - Procedimentos computacionais para engenharia de barragens - Confiabilidade e Aplicabilidade**. Paris, 2001. Traduzido por Júlio Cesar Ezequiel da Costa – CBDB, 2008.

INTERNATIONAL COMMISSION ON LARGE DAMS – ICOLD. **Bulletin 155 – Guidelines for use of numerical models in dam engineering**. Paris, 2013.

KUPERMAN, S.C. **Concreto massa convencional e compactado com rolo para barragens**. In: ISAIA, G.C. Concreto – Ensino, Pesquisa e Realizações, Instituto Brasileiro do Concreto – IBRACON. Vol II, cap.41, p.1260-1295. São Paulo, 2005.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M.. **Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais**. 1 ed. São Paulo: IBRACON, 2008.

MARQUES FILHO, J. **Concreto massa e Compactado a Rolo**. In: ISAIA, G. C. **Concreto: Ciência e Tecnologia**, Instituto Brasileiro do Concreto – IBRACON. Vol II, p.1399-1448. São Paulo, 2011.

MELLO, F. M.. **Síntese do Desenvolvimento da Implantação das Barragens no Brasil. A História das Barragens no Brasil Séculos XIX, XX, XXI: cinquenta anos do Comitê Brasileiro de Barragens-CBDB**. Rio de Janeiro, 2011a.

MILANI FILHO, L. **O uso do concreto compactado com rolo em barragens – tendências futuras**. Itajubá, 2003. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Energia) – Universidade Federal de Itajubá.

MOURA, F. M. P. **Estudo Comparativo da verificação da estabilidade de barragens de gravidade de concreto compactado a rolo a partir de modelagem em elementos finitos e métodos analíticos**. Salvador, 2016. Dissertação – Universidade Federal da Bahia.

MARTINS, E. F. R.; PEDROSO, L. J.. **Um estudo analítico-numérico da equação de Laplace orientado à problemas térmicos em estruturas de concreto**. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - RIPE. V. 2. N. 12. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/23490>> Acesso em: 15/07/2019.

PEDROSO, J. L. **Barragens de Concreto: Aspectos Gerais e Fundamentos do Cálculo de Tensões e da Estabilidade Baseado no Método de Gravidade**. Apostila do Curso de Barragens de Concreto. Universidade de Brasília - UnB, Brasília, 2002.

PEDROSO, L. J., 2011. **Uma Introdução do Método das Diferenças Finitas Centrais em Cavidades Acústicas 2D**. Publicação Didática, Universidade de Brasília.

RAO, S. S.; **The Finite Element Method in Engineering**. 3ª ed. United States of America: Butterworth Heinemann: 1999.

RUGGIERO, Márcia A. G., LOPES, Vera Lúcia da R.. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais** - 2ª edição. São Paulo, Pearson Makron Books, 2006.

SANTOS, S.B; CALMOM, J.L.. **PFEM_2DT E PFEM_2DAT – Programas para análise termomecânica desacoplada em estruturas maciças de concreto durante a fase de construção**. In: Ibero-Latin American Congress On Computational Methods In Engineering, XXV. Anais [...]. Recife: 2004.

SILVA, S.; **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Notas de aula. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Foz do Iguaçu: 2009. 118

SILVEIRA, A. F.; **As variações de temperatura nas barragens**. Lisboa: Lab Nac Eng Civ, 1961. 437 p.

SOUZA, G. T... **Dosagem experimental de concreto massa com adição de sílica ativa aplicado em barragem**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Pará – UFPA. Tucuruí: 2017.

SOUSA, A; SILVA, I. **Retração Térmica e Fissuração em Concreto por Calor de Hidratação**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Goiás – UFG. Goiânia: 2014.

SZILARD, R.. **Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods**. John Wiley & Sons. New Jersey: 2004.

Trabalhador da construção civil derramando um concreto na fundação de massa. Disponível em: <https://br.freepik.com/fotos-premium/trabalhador-da-construcao-civil-derramando-um-concreto-na-fundacao-de-massa_3015862.htm>. Acesso em 6 set 2020.

THOMAZ, E. **Calor sob controle**. Revista TÉCNICA. Ed. 190, janeiro de 2013, p. 30-35.

TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). **Theory of plates and shells**. 2.nd. United States, McGraw-Hill, 1959.

THE HOOVER. Disponível em: <<https://www.blackcanyonadventures.com/blog/2017/07/5-littleknown-facts-about-hoover-dam>>. Acesso em 01/07/19.

US BUREAU OF RECLAMATION. **Projeto de Pequenas Barragens** - 3ª edição, 1987.

ZUFFO, M. **Metodologia para Avaliação da Segurança de Barragens**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas – Unicamp. Campinas: 2005 .

APÊNDICE A

Tabela A.1 – Resumo das soluções analíticas.

$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ (*)	$T(0) = T_1$ $T(L) = T_2$	$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$
$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ (*)	$T(0, y) = 0$ $T(L_1, y) = 0$ $T(x, 0) = 0$ $T(x, L_2) = f(x)$	$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \int_0^{L_1} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) dx}{L_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2} L_2\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right)$
$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$	$T(0, y, z) = 0$ $T(L_1, y, z) = 0$ $T(x, 0, z) = 0$ $T(x, y, 0) = 0$ $T(x, y, L_3) = 0$ $T(x, L_2, z) = f(x, z)$	Em que: $T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3} z\right) \frac{\sinh(\lambda_{m,n} x)}{\sinh(\lambda_{m,n} L_1)}$ $a_{mn} = \frac{4}{L_2 L_3} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} f(y, z) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_3} z\right) dy dz$ $\lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2}$
$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ (*)	$T(0, y, z) = 0$ $T(L_1, y, z) = 0$ $T(x, 0, z) = 0$ $T(x, y, 0) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial z}(x, y, L_3) = 0$ $T(x, L_2, z) = f(x, y)$	Em que: $T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) \frac{\cosh(\lambda_{m,n} z)}{\cosh(\lambda_{m,n} L_3)}$ $a_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) dy dx$ $\lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2}$
$k \nabla^2 T + q = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{k} = 0$ (*)	$T(0) = T_1$ $T(L) = T_2$	$T(x) = -\frac{q}{2k} x^2 + \frac{T_2 - T_1}{L} x + \frac{qL}{2k} x + T_1$
$k \nabla^2 T + q = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0$	$T(0, y) = 0$ $T(L_1, y) = 0$ $T(x, 0) = 0$ $T(x, L_2) = f(x)$	Em que: $T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \cdot \sinh(\emptyset y)$ $a_n = \frac{2 \int_0^{L_1} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) dx}{L_1 \frac{\sinh(\emptyset L_2)}{\sinh(\emptyset L_2)}}$ $\emptyset^2 = \frac{q}{k} + \lambda^2$
$k \nabla^2 T + q = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0$ (*)	$T(L_1, y) = T_{\infty}$ $T(x, L_2) = T_{\infty}$ $\frac{dT}{dy}(x, 0) = 0$ $\frac{dT}{dx}(0, y) = 0$	Em que: $T(x, y) = T_{\infty} + \frac{qL_1^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh \lambda_n y}{(\lambda_n L_1)^3 \cosh \lambda_n L_2} \cos \lambda_n x$ $\lambda_n L_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$
$k \nabla^2 T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T(0, t) = 0$ $T(L, t) = 0$ $T(x, 0) = f(x)$	Em que: $T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{-\mu^2 t}$ $\mu = \frac{\delta n \pi}{L}$ $\delta^2 = \frac{k}{\rho c}$
$\delta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$	$T(0, t) = T_1$ $T(L, t) = T_2$ $T(x, 0) = f(x)$	$T(x, t) = T_R(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_R(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\delta^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$

$k\nabla^2 T = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$\begin{aligned} (*) \quad & T(0, y, t) = 0 \\ & T(L_1, y, t) = 0 \\ & T(x, 0, t) = 0 \\ & T(x, L_2, t) = 0 \\ & T(x, y, 0) = f(x, z) \end{aligned}$	$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) dx dy \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_1} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) e^{-\lambda^2 \delta^2 t}$ <p>Em que:</p> $\lambda = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2}$
$k\nabla^2 T = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$\begin{aligned} (*) \quad & \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial x}(L_1, y, t) = 0 \\ & T(x, 0, t) = 0 \\ & T(x, L_2, t) = 0 \\ & T(x, y, 0) = f(x, y) \end{aligned}$	$T(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) dx dy \cos\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) e^{-\lambda^2 \delta^2 t}$ <p>Em que:</p> $\lambda = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2}$
$k\nabla^2 T = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$\begin{aligned} (*) \quad & \frac{\partial T}{\partial x}(0, y, z, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial x}(L_1, y, z, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial y}(x, L_2, z, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, L_3, t) = 0 \\ & T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \end{aligned}$	$T(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{nml} \frac{4}{L_1 L_2} \cos\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L_3} z\right) e^{-\lambda^2 \delta^2 t}$ <p>Em que:</p> $\lambda = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{l}{L_3}\right)^2}$ $a_{nml} = \frac{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} f(x, y, z) \cos\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L_3} z\right) dx dy dz}{\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} f(x, y, z) \cos^2\left(\frac{n\pi}{L_1} x\right) \cos^2\left(\frac{m\pi}{L_2} y\right) \cos^2\left(\frac{l\pi}{L_3} z\right) dx dy dz}$
$\delta^2 \nabla^2 T + q = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\ & T(L, t) = T_{\infty} \end{aligned}$	$T(x, t) = T_{\infty} + \frac{qL^2}{\delta^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(\lambda_n L)^3} \cos(\lambda_n x) e^{-\delta^2 \lambda_n^2 t} \right]$
$\delta^2 \nabla^2 T + \theta_0 m e^{-mt} = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\begin{aligned} & T(0, t) = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \end{aligned}$	$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{-\delta^2 w_n^2 t} - e^{-mt}) \operatorname{sen}(w_n x)$ <p>Em que:</p> $c_n = -\frac{\theta_0 m d_n}{\delta^2 w_n^2 - m}$ $w_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$

Tabela B.1 - Soluções para as equações do calor via MDF.

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$	$T_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1}}{2}$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$	$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$	$T_{i,j,l} = \frac{T_{i+1,j,l} + T_{i-1,j,l} + T_{i,j+1,l} + T_{i,j-1,l} + T_{i,j,l+1} + T_{i,j,l-1}}{6}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = 0$	$T_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + ql^2/k}{2}$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0$	$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + ql^2/k}{4}$
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = 0$	$T_{i,j,l} = \frac{T_{i+1,j,l} + T_{i-1,j,l} + T_{i,j+1,l} + T_{i,j-1,l} + T_{i,j,l+1} + T_{i,j,l-1} + ql^2/k}{6}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_i^{k+1} = (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k)F + (1 - 2F)T_i^k$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_{i,j}^{k+1} = (T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)F + (1 - 4F)T_{i,j}^k$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_{i,j,l}^{k+1} = (T_{i+1,j,l}^k + T_{i-1,j,l}^k + T_{i,j+1,l}^k + T_{i,j-1,l}^k + T_{i,j,l+1}^k + T_{i,j,l-1}^k)F + (1 - 6F)T_{i,j,l}^k$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_i^{k+1} = (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k)F + (1 - 2F)T_i^k + G$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ $G = \frac{q^k \Delta x^2 \Delta t}{\rho c}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial q}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_{i,j}^{k+1} = (T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k)F + (1 - 4F)T_{i,j}^k + G$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ $G = \frac{q^k \Delta x^2 \Delta t}{\rho c}$
$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial q}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$	$T_{i,j,l}^{k+1} = (T_{i+1,j,l}^k + T_{i-1,j,l}^k + T_{i,j+1,l}^k + T_{i,j-1,l}^k + T_{i,j,l+1}^k + T_{i,j,l-1}^k)F + (1 - 6F)T_{i,j,l}^k + G$ $F = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ $G = \frac{q^k \Delta x^2 \Delta t}{\rho c}$