

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**PANTEÃO ROMANO:
DESCRIÇÃO HISTÓRICO-CONCEITUAL DE ELEMENTOS
ESTRUTURAIS CARACTERÍSTICOS E ANÁLISE
SIMPLIFICADA DE SUA CÚPULA SEMIESFÉRICA**

FILLIPE MARINHO FARIA

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr.-Ing.

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO DE 2020

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**PANTEÃO ROMANO:
DESCRIÇÃO HISTÓRICO-CONCEITUAL DE ELEMENTOS
ESTRUTURAIS CARACTERÍSTICOS E ANÁLISE
SIMPLIFICADA DE SUA CÚPULA SEMIESFÉRICA**

FILLIPE MARINHO FARIA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr.-Ing. (ENC-UnB)
(ORIENTADOR)**

**LUCIANO MENDES BEZERRA, Ph.D. (ENC-UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**LEONARDO DA SILVEIRA PIRILLO INOJOSA, D.Sc. (ENC-UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**DAVIDSON DE OLIVEIRA FRANÇA JÚNIOR, M.Sc. (PECC-UnB)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

BRASÍLIA/DF, 10 DE DEZEMBRO DE 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

FARIA, FILLIPE MARINHO

Panteão Romano: descrição histórico-conceitual de elementos estruturais característicos e análise simplificada de sua cúpula semiesférica

xii, 131 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2020)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Panteão Romano

2. Cúpulas

3. Teoria de Membrana

4. Teoria Flexional

5. Método dos Elementos Finitos

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Bacharel)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FARIA, F. M. (2020). Panteão Romano: descrição histórico-conceitual de elementos estruturais característicos e análise simplificada de sua cúpula semiesférica. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 131 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Fillipe Marinho Faria

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Panteão Romano: descrição histórico-conceitual de elementos estruturais característicos e análise simplificada de sua cúpula semiesférica

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2020

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



Fillipe Marinho Faria

SMDB Conjunto 15 Casa 3D, Lago Sul

71.680-150 - Brasília/DF – Brasil

AGRADECIMENTOS

Sou grato à Universidade de Brasília pela formação em engenharia civil, ao prof. Lineu Pedroso pela orientação deste trabalho, aos profs. Luciano Bezerra e Leonardo Inojosa pelas correções e sugestões e ao eng. Davidson França pela ajuda na parte de Teoria Flexional, Método dos Elementos Finitos e análise de resultados.

*Si vis pacem,
para bellum*

RESUMO

A curiosidade histórica dos estudiosos contemporâneos nos construtores do passado e nos métodos construtivos adotados na Antiguidade, tem suscitado na atualidade o desenvolvimento de conhecimentos, ferramentas e abordagens teóricas inovadoras, que permitem o entendimento de obras monumentais de interesse arquitetônico e histórico que tem resistido ao tempo, como é o caso do Panteão Romano. Para se compreender como esses monumentos foram construídos, como se comportam e como o gênio criativo de seus construtores foram utilizados, estudos comparativos de métodos do passado com métodos mais recentes, visam lançar luz ao entendimento dessa “arte de construção”. Assim, nesse trabalho modelos matemáticos embasados em teorias modernas da engenharia, amparados em instrumentos computacionais avançados, são usados para analisar de forma simplificada a cúpula do Panteão Romano. Uma metodologia analítica, através da Teoria de Membrana e da Teoria Flexional de cascas esféricas, e uma metodologia numérica, mediante o Método dos Elementos Finitos via software SAP2000, são utilizadas para a modelização do problema, e comparação dos resultados.

Palavras-chave: Panteão Romano. Cúpulas. Teoria de Membrana. Teoria Flexional. Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

The historical curiosity of contemporary scholars in the builders of the past and in the construction methods adopted in Antiquity, has aroused today the development of knowledge, tools and innovative theoretical approaches, which allow the understanding of monumental works of architectural and historical interest that have resisted time as is the case with the Roman Pantheon. In order to understand how these monuments were built, how they behave and how the creative genius of their builders were used, comparative studies of methods from the past with more recent methods, aim to shed light on the understanding of this "art of construction". Thus, in this work mathematical models based on modern engineering theories, supported by advanced computational instruments, are used to analyze in a simplified way the dome of the Roman Pantheon. An analytical methodology, using the Membrane Theory and the Flexural Theory of spherical shells, and a numerical methodology, using the Finite Element Method via SAP2000 software, are used to model the problem and compare the results.

Keywords: Roman Pantheon. Domes. Membrane Theory. Flexural Theory. Finite Element Method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	3
1.2 JUSTIFICATIVA	3
1.3 OBJETIVOS	3
1.3.1 GERAIS	3
1.3.2 ESPECÍFICOS	4
1.4 PERGUNTAS SUSCITADAS PELO TRABALHO	4
1.5 METODOLOGIA	4
1.6 ABRANGÊNCIA, LIMITAÇÕES E DIFICULDADES	5
1.7 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS	6
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA & GENERALIDADES.....	7
2.1 TERMINOLOGIAS, CLASSIFICAÇÕES & DEFINIÇÕES.....	8
2.1.1 COLUNA.....	8
2.1.2 ARCO	10
2.1.3 CÚPULA	14
2.1.4 PANTEÃO	15
2.2 TÉCNICAS CONSTRUTIVAS	16
2.3 MATERIAIS CONSTRUTIVOS	20
2.4 DESCRIÇÃO DO MONUMENTO	22
2.5 ASPECTOS HISTÓRICOS	29
2.6 SIMBOLOGIA	38
2.7 COMPARAÇÃO COM OUTROS MONUMENTOS.....	39
2.8 NOÇÕES ESTRUTURAIS BÁSICAS	46
2.9 HISTÓRICO DO ESTUDO DO ARCO & SUA RELAÇÃO COM A CÚPULA	48
3 ASPECTOS GEOMÉTRICOS E DE PROJETO	64
3.1 DADOS TÉCNICOS	64
3.1.1 PLANTAS E CORTES	64
3.1.2 DIMENSÕES.....	67
3.1.3 PROPRIEDADES MECÂNICAS	69
3.1.4 MASSA	69
3.1.5 ASPECTOS GEOGRÁFICOS E CLIMÁTICOS	70
4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	71
4.1 O DOMO COMO ESTRUTURA	71
4.2 TEORIA DE MEMBRANA.....	72

4.2.1 CASO 1 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	75
4.2.2 CASO 2 – CÚPULA COM <i>OCULUS</i> SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	76
4.2.3 CASO 3 – CÚPULA SUBMETIDA A CARGA DE NEVE (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	77
4.3 TEORIA FLEXIONAL.....	77
4.3.1 CASO 4 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE SEGUNDO GÊNERO).....	80
4.3.2 CASO 5 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE TERCEIRO GÊNERO).....	81
5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	82
5.1 MATLAB	82
5.2 EXCEL.....	82
5.3 SAP2000 (MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS).....	83
6 RESULTADOS.....	85
6.1 CONVERGÊNCIA DA MALHA	87
6.2 CASO 1 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	88
6.3 CASO 2 – CÚPULA COM <i>OCULUS</i> SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	92
6.4 CASO 3 – CÚPULA SUBMETIDA A CARGA DE NEVE (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO).....	94
6.5 CASO 4 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE SEGUNDO GÊNERO).....	96
6.6 CASO 5 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE TERCEIRO GÊNERO).....	97
6.7 COMPARAÇÃO DOS ESFORÇOS ENTRE OS 3 TIPOS DE APOIO	98
7 CONCLUSÃO	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
APÊNCIDES.....	107
A1 – ESPESSURA MÉDIA DA CÚPULA	107
A2 – ÂNGULO DO <i>OCULUS</i>	108
A3 - CÁLCULO DE p , ap E λ	109
A4 – ÂNGULO DE 52°	110
A5 - CARGA DE NEVE.....	112
A6 – CASO 5 DETALHADO	115
A7 – MÉTODO DAS FORÇAS.....	117
A8 – ARCO BIARTICULADO	118

A9 – ARCO BIENGASTADO123

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Casos de cúpulas estudadas	5
Tabela 2.1 – Comparação entre monumentos da Roma Antiga com cúpula e <i>oculus</i>	40
Tabela 2.2 – Comparação entre monumentos	41
Tabela 3.1 – Dimensões dos principais elementos do Panteão	68
Tabela 3.2 – Dados dos materiais	69
Tabela 4.1 – Fórmulas do caso 1	75
Tabela 4.2 – Fórmulas do caso 2	76
Tabela 4.3 – Fórmulas do caso 3	77
Tabela 4.4 – Fórmulas do caso 4	80
Tabela 4.5 – Fórmulas do caso 5	81
Tabela 6.1 – Resumo dos principais parâmetros da cúpula do Panteão	87
Tabela 6.2 – Níveis de refinamento da malha	88
Tabela 6.3 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 1 (malha 1)	89
Tabela 6.4 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 1 (malha 2)	91
Tabela 6.5 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 2 (malha 1)	92
Tabela 6.6 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 2 (malha 2)	93
Tabela 6.7 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 3 (malha 1)	94
Tabela 6.8 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 3 (malha 2)	95
Tabela 6.9 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 4 (malha 2)	96
Tabela 6.10 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 5 (malha 2)	98

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Grande Pirâmide de Gizé	1
Figura 1.2 – Segundo Templo de Ártemis	1
Figura 1.3 – Farol de Alexandria	2
Figura 1.4 – Mausoléu de Halicarnasso	2
Figura 1.5 – O Panteão Romano em 2019	2
Figura 2.1 – Componentes de uma coluna	8
Figura 2.2 – Entablamento (arquitrave, friso e cornija) e capitel	8
Figura 2.3 – Vários tipos de capitéis	9
Figura 2.4 – Capitéis: toscano, ordens clássicas (dórico, jônico e coríntio) e composto	9
Figura 2.5 – Terminologia do arco	11
Figura 2.6 – Classificação de arcos segundo a forma de sua curva	12
Figura 2.7 – Classificação de arcos segundo a forma do intradorso	13
Figura 2.8 – Classificação de arcos segundo a geometria	14
Figura 2.9 – Meridianos e paralelos de uma cúpula	15
Figura 2.10 – Algumas terminologias do Panteão	16
Figura 2.11 – A construção de um arco	17
Figura 2.12 – “Armadura” de arcos de alívio embutidos no Panteão (concepção de Jones e realização de Grover)	18
Figura 2.13 – Proposta de Viollet-le-Duc	19
Figura 2.14 – Proposta de Taylor	19
Figura 2.15 – Seção transversal esquemática (desenho de Jones)	19
Figura 2.16 – Parede com cobertura de tijolo com desenho esquemático do núcleo de concreto	22
Figura 2.17 – Porta dupla de bronze	23
Figura 2.18 – Porta vista do interior	23
Figura 2.19 – O <i>oculus</i> da cúpula do Panteão	23
Figura 2.20 – O <i>oculus</i> visto do topo do Panteão	23
Figura 2.21 – Degraus de acesso da cúpula	24
Figura 2.22 – Conjunto de degraus	24
Figura 2.23 – Desenho dos degraus	24
Figura 2.24 – Painéis afundados	24
Figura 2.25 – Design original do piso do Panteão	25
Figura 2.26 – Numeração dos nichos do Panteão	25
Figura 2.27 – Colunas externas do Panteão	26
Figura 2.28 – Colunas internas do Panteão	26
Figura 2.29 – Base de coluna externa do Panteão	26
Figura 2.30 – O pórtico do Panteão	27
Figura 2.31 – Exterior do bloco intermediário, lado oeste	27
Figura 2.32 – Seção transversal da escadaria leste do Panteão (desenho de Jones e Grover)	28
Figura 2.33 – Rotunda vista do sul, acima dos <i>grottoni</i>	28
Figura 2.34 – Rotunda, vista de costas	28
Figura 2.35 – Construção do Panteão (concepção de Jones e realização de Grover)	29
Figura 2.36 – Extensão máxima do Império Romano no ano 117 sob Trajano	30
Figura 2.37 – Um <i>vexillum</i> com a <i>aquila</i> imperial e a sigla SPQR	30
Figura 2.38 – (a) Augusto. (b) Apolodoro. (c) Adriano. (d) Trajano. (e) Agripa.	31
Figura 2.39 – Planta do primeiro (vermelho) e do terceiro (preto) Panteão	32
Figura 2.40 – Inscrição no Panteão	33
Figura 2.41 – Inscrição de Severo e Caracala	33
Figura 2.42 – Elevação do pavimento ao redor do Panteão	34
Figura 2.43 – Maquete do CAMPVS MARTIVS	35
Figura 2.44 – Panteão no CAMPVS MARTIVS	35
Figura 2.45 – Igreja Sancta Maria ad Martyres	36
Figura 2.46 – Teto de madeira no pórtico do Panteão	36

Figura 2.47 – Torres do século XVII, retiradas em 1880	36
Figura 2.48 – Pátio em frente ao Panteão	37
Figura 2.49 – Rafael	37
Figura 2.50 – Victor Emmanuel II	37
Figura 2.51 – Umberto I	37
Figura 2.52 – Simulação do Panteão em sua época pagã	38
Figura 2.53 – Simulação no interior do Panteão (noturno)	38
Figura 2.54 – Um globo dentro do Panteão	39
Figura 2.55 – O homem vitruviano, de da Vinci	39
Figura 2.56 – Banhos de Caracala	40
Figura 2.57 – Villa Almerico Capra detta La Rotonda	42
Figura 2.58 – Colegiata di Santa Maria Assunta in Cielo	42
Figura 2.59 – Igreja de San Simeone Piccolo	42
Figura 2.60 – Catedral de Santa Edwiges	42
Figura 2.61 – Templo Canoviano	42
Figura 2.62 – Igreja de Gran Madre di Dio	42
Figura 2.63 – Igreja de San Francesco di Paolo	43
Figura 2.64 – Igreja de San Carlo al Corso	43
Figura 2.65 – Basílica da Assunção de Nossa Senhora	43
Figura 2.66 – Chiesa della Divina Sapienza	43
Figura 2.67 – Maquete do Große Halle	43
Figura 2.68 – Comparação: Panteão (abaixo) e Große Halle	43
Figura 2.69 – Rotunda projetada por Jefferson	44
Figura 2.70 – Desenho de Thomas Jefferson	44
Figura 2.71 – Monticello	44
Figura 2.72 – Dólar frente e verso	44
Figura 2.73 – Jefferson Memorial	44
Figura 2.74 – Estátua de Thomas Jefferson	44
Figura 2.75 – Grande Domo do MIT	45
Figura 2.76 – Santa Maria del Fiore	45
Figura 2.77 – Royal Albert Hall	45
Figura 2.78 – Superfícies desenvolvíveis e não-desenvolvíveis	46
Figura 2.79 – Folha de papel enrijecida pela curvatura	47
Figura 2.80 – Cortes verticais num domo	48
Figura 2.81 – Procedimento de Gil de Hontañón	50
Figura 2.82 – Outros procedimentos	50
Figura 2.83 – (a) Página do Codex Arundel. (b) Detalhe do paralelogramo de forças	51
Figura 2.84 – Estudos sobre arcos e regra para a verificação da estabilidade de arcos	51
Figura 2.85 – Esquema de um canal de Florença	52
Figura 2.86 – Mapa de Ímola	52
Figura 2.87 – Fortificação	53
Figura 2.88 – Balística	53
Figura 2.89 – Regra de Derand para espessura dos pés-direitos de arcos	54
Figura 2.90 – Corrente suspensa de Hooke	55
Figura 2.91 – Gráficos de Philippe de La Hire	56
Figura 2.92 – Mecanismo tipo cunha deslizante proposto por Philippe de La Hire	56
Figura 2.93 – Modelo de Poleni para análise da estabilidade da cúpula de São Pedro em Roma	57
Figura 2.94 – Estudos de Bossut para a geometria das aduelas de um arco circular	58
Figura 2.95 – Modelo de Coulomb para análise de arcos	58
Figura 2.96 – Linhas de resistência (<i>a-b-c-d-e-f</i>) e de pressões (<i>A-B-C-D-E</i>)	59
Figura 2.97 – Método gráfico de Méry	60
Figura 2.98 – Verificação da segurança de um arco e da espessura de um pé direito	61
Figura 2.99 – Modelo de Gaudí para o dimensionamento de cúpulas	62
Figura 2.100 – Modelos fotoelásticos para estudo das catedrais de Beauvais e Bourges	63
Figura 3.1 – Vista em planta do nível mais baixo	64

Figura 3.2 – Planta da parte superior e planta refletida com a superfície interna	65
Figura 3.3 – Seção transversal lateral	65
Figura 3.4 – Seção transversal parte de trás	65
Figura 3.5 – Seção transversal frontal	65
Figura 3.6 – Vista de elevação frontal	66
Figura 3.7 – Vista de elevação lateral	66
Figura 3.8 – Interior do Panteão, Roma, c. 1734 (pintura de Giovanni Paolo Panini)	66
Figura 3.9 – Composição dos materiais da rotunda	69
Figura 3.10 – Coordenadas geográficas do Panteão	70
Figura 4.1 – Domo deformado por cargas verticais	72
Figura 4.2 – Condições da Teoria de Membrana	73
Figura 4.3 – Cúpula e elemento infinitesimal da superfície	74
Figura 4.4 – Componente normal da força meridional	74
Figura 4.5 – Componente normal da força tangencial	74
Figura 4.6 – Diagrama de equilíbrio do segmento de uma casca	74
Figura 4.7 – Casca esférica com esforços cortante H e momento M aplicado	78
Figura 4.8 – Roteiro de cálculo pela Teoria Flexional	79
Figura 4.9 – Princípio de superposição de efeitos	79
Figura 5.1 – Geometria de um elemento	83
Figura 6.1 – Cúpula semiesférica	85
Figura 6.2 – Cúpula com α diferente de 90° (não considerada nesse trabalho)	86
Figura 6.3 – Ângulo do <i>oculus</i>	86
Figura 6.4 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 1)	89
Figura 6.5 – Gráficos comparativos do caso 1 (malha 1)	90
Figura 6.6 – Deslocamento Δ_r (soma vetorial de U_1 e U_2) e Δ_ϕ (R2) na base da cúpula (malha 1)	90
Figura 6.7 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 2)	91
Figura 6.8 – Gráficos comparativos do caso 1 (malha 2)	91
Figura 6.9 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 1)	92
Figura 6.10 – Gráficos comparativos do caso 2 (malha 1)	93
Figura 6.11 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 2)	93
Figura 6.12 – Gráficos comparativos do caso 2 (malha 2)	94
Figura 6.13 – Gráficos comparativos do caso 3 (malha 1)	95
Figura 6.14 – Gráficos comparativos do caso 3 (malha 2)	95
Figura 6.15 – Gráficos comparativos do caso 4 (malha 2)	97
Figura 6.16 – Gráficos comparativos do caso 5 (malha 2)	98
Figura 6.17 – Gráficos comparativos de cúpulas com apoios de 1° , 2° e 3° gênero (resultados analíticos)	99
Figura A2.1 – Ângulos Φ_0 e Φ'_0	108
Figura A4.1 – Forças tangencial e meridional em função do ângulo Φ	111
Figura A4.2 – Ângulos Φ de 43° (linha azul) e 52° (linha preta)	111
Figura A5.1 – Casos (i) e (ii)	112
Figura A5.2 – Coeficientes de forma para a carga de neve para cobertura esférica com um <i>oculus</i> no centro	113
Figura A5.3 – Parte da cúpula que recebe carga de neve	113
Figura A5.4 – Norma para o cálculo de μ_3	114
Figura A8.1 – Arco circular biarticulado	118
Figura A8.2 – Sistema principal	118
Figura A8.3 – Detalhe da estrutura	118
Figura A8.4 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_1	119
Figura A9.1 – Arco circular biengastado	123
Figura A9.2 – Sistema principal	123
Figura A9.3 – Detalhe da estrutura	123
Figura A9.4 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_1	124
Figura A9.5 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_2	125

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

LETRAS LATINAS

a	Raio médio de uma cúpula
A	Altitude acima do nível do mar de determinado local (ou área da seção infinitesimal)
b	Diâmetro de uma cobertura
C_e	Coefficiente de exposição
C_{est}	Coefficiente de carga de neve excepcional
C_t	Coefficiente térmico
E	Módulo de elasticidade longitudinal
E_i	Esforço no sistema principal provocado pela aplicação do hiperestático com valor inicialmente arbitrado
E_0	Esforço no sistema principal provocado pelo agente solicitante externo
$\{F\}$	Vetor de forças nodais
h	Espessura de uma cúpula
H	Componente horizontal
H_A	Força na direção horizontal em determinado ponto A
I	Momento de inércia de seção transversal em relação a seu eixo neutro
K	Classificação de cascas segundo a Curvatura de Gauss
$[K]$	Matriz de rigidez global de um sistema
M_A	Momento em determinado ponto A
$M_{1\alpha}$	Momento devido ao hiperestático 1 percorrendo um ângulo α de um arco
N_θ	Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo
$N_{\theta\phi}$	Forças de cisalhamento por unidade de comprimento
$N_{\phi\theta}$	Forças de cisalhamento por unidade de comprimento
N_ϕ	Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano
p	Peso próprio
p_z	Carregamento perpendicular à superfície da casca
p_θ	Carregamento tangente à superfície de uma casca na direção do paralelo

p_ϕ	Carregamento tangente à superfície de uma casca na direção do meridiano
R	Resultante do peso próprio (ou raio médio de um arco)
r_0	Raio que reside em um plano perpendicular ao eixo de uma cúpula
r_1	Raio interno de uma cúpula
r_2	Raio externo de uma cúpula
s	Carga de neve em uma cobertura
s_{Ad}	Valor de projeto de uma carga excepcional de neve no solo para determinado local
s_k	Valor característico de carga de neve no solo
ds	Distância infinitesimal entre duas seções de uma estrutura
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos nodais
V	Componente vertical
V_A	Força na direção vertical em determinado ponto A
$\{X\}$	Vetor dos hiperestáticos
X_i	Valor obtido para o hiperestático, a partir da resolução direta do sistema de equações de compatibilidade elástica ou da equação matricial
y	Distância vertical de um ponto arbitrário até o centroide de um corpo
Z	Número da zona fornecido no mapa do <i>Eurocode 1 – Parts 1-3</i>

LETRAS GREGAS

α	Ângulo fixo entre a reta vertical que passa pelo centro de uma cúpula a uma reta que passa pelo seu centro e pelo final de seu meridiano (ou ângulo entre a linha horizontal da base do arco até o seu centro e a linha do raio, percorrendo desde a parte esquerda da estrutura até o seu topo)
β	Ângulo entre a linha horizontal da base do arco até o seu centro e a linha do raio, percorrendo desde a parte direita da estrutura até o seu topo
Υ	Peso específico de determinado material
Δ_r	Deslocamento horizontal de uma cúpula na direção radial
Δ_ϕ	Rotação do meridiano de uma cúpula
$[\delta]$	Matriz de flexibilidade
δ_{ij}	Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_i e X_j no sistema principal, com os valores arbitrados
δ_{i0}	Combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_i (com o valor arbitrado) no sistema principal.
$[\delta_M]$	Matriz de flexibilidade dos momentos fletores
$[\delta_N]$	Matriz de flexibilidade dos esforços normais
$\{\delta_0\}$	Matriz da combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X (com o valor arbitrado) no sistema principal
θ	Ângulo compreendido entre dois pontos de um mesmo paralelo de uma cúpula
λ	Coefficiente de atenuação dos esforços oriundos da perturbação da borda
μ_i	Coefficiente de forma da carga de neve
μ_3	Coefficiente de forma da carga de neve para uma cobertura cilíndrica
ν	Coefficiente de Poisson
$[\xi]$	Matriz de rigidez
ρ	Massa específica de determinado material
σ_ϕ	Tensão meridional
σ_θ	Tensão tangencial
Φ	Ângulo entre a reta vertical que passa pelo centro de uma cúpula e uma reta que passa pelo seu centro e por algum ponto de seu meridiano
Φ_0	Ângulo entre a reta vertical que passa pelo centro de uma cúpula e a reta que passa pelo seu centro e o ponto onde termina o seu <i>oculus</i>

Φ'_0	Complemento de Φ_0
$d\Phi$	Rotação relativa de duas seções distantes de ds
Ψ	Diferença entre o ângulo α e o ângulo Φ de uma cúpula

1 INTRODUÇÃO

São inúmeros os povos e indivíduos que contribuíram para o desenvolvimento da ciência e da engenharia, em especial na construção de edifícios. Também são inúmeros os monumentos que deixaram como legado, testemunhas de suas grandes realizações, a começar pelos grandes construtores egípcios e gregos. Os egípcios desenvolveram um procedimento bem uniforme de construção para a maioria das 80 pirâmides de que se tem notícia, miticamente atribuído a Imhotep, o grande engenheiro de pirâmides. A Grande Pirâmide de Gizé (fig. 1.1), erigida pelo faraó Quéops e para ele, é tida como a obra-prima dos egípcios (SALVADORI, 2011).

Segundo Addis (2009), a primeira e única das Sete Maravilhas do Mundo Antigo que sobreviveu até nossos tempos, a Pirâmide de Gizé, com seus quase 150 m de altura, continuou como a construção mais alta do mundo até o surgimento das flechas nas catedrais do século XIV. Outra maravilha do mundo antigo era o Templo de Ártemis, em Éfeso (fig. 1.2). Completado por volta de 300 a.C., o santuário reconstruído para a deusa Ártemis tinha mais de 120 colunas de 19 m, 129 m de comprimento e 68 m de largura. O templo durou mais de 700 anos, até ser demolido e suas pedras serem usadas na construção de uma igreja cristã.



Figura 1.1 – Grande Pirâmide de Gizé
Fonte: acervo do autor



Figura 1.2 – Segundo Templo de Ártemis
Fonte: Addis, 2009

Há também o Colosso de Rodes¹, uma estátua terminada por volta de 230 a.C. para celebrar a vitória da cidade contra as tropas de Demétrio, um dos generais de Alexandre, o Grande. A estátua tinha 35 m de altura e, ao que se sabe, grande parte do metal usado havia sido reciclado de inúmeras máquinas de guerra deixadas para trás com a derrota e fuga de Demétrio. O Colosso foi destruído por um terremoto em 224 a.C. Outra obra é o Farol de Alexandria (fig. 1.3), projetado pelo grego Sóstrato de Cnidos. Construído na ilha de Faro,

¹Vitrúvio comparava outras grandes estátuas tendo como base a erigida na cidade de Rodes, capital da ilha de mesmo nome que se situa a cerca de 30 km da costa sudeste da Turquia moderna. *Statua colossica*: estátua colossal, ou seja, de grandes dimensões, por comparação com o Colosso de Rodes.

marcava a entrada do porto da nova Alexandria, no norte do Egito. A obra foi iniciada em 290 a.C. por Ptolomeu Soter e finalizada pelo filho Ptolomeu II em 270 a.C. Como muitas estruturas antigas a leste do Mediterrâneo, seu destino foi selado pelos movimentos da Terra: o farol veio abaixo em 1326, após grandes danos causados por um terremoto.

As outras três maravilhas do mundo antigo restantes são: Estátua de Zeus em Olímpia, de cerca de 12,4 m de altura, feita pelo construtor e escultor ateniense Fídias por volta de 430 a.C. e destruída por volta de 475 d.C. (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, 2015); Mausoléu de Halicarnasso (atual Bodrum, Turquia) (fig. 1.4) , de cerca de 45 m de altura (Smith, 1870), desenhada pelos arquitetos gregos Sátiro e Pítis entre 353 e 350 a.C. (KOSTOF, 1985; GLOAG, 1969), que não sobreviveu aos terremotos do século XV; e os Jardins Suspensos da Babilônia, cujo local não foi definitivamente identificado (FINKEL; SEYMOUR, 2008) e pouco se sabe a respeito.

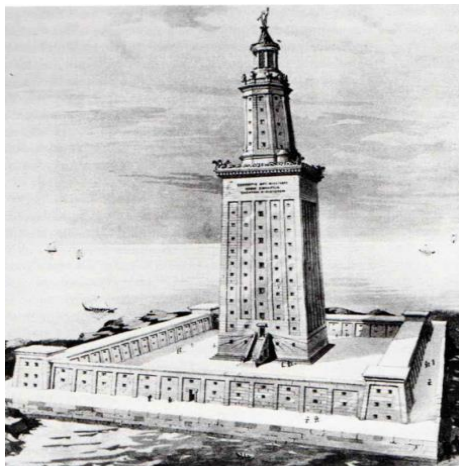


Figura 1.3 – Farol de Alexandria
Fonte: Addis, 2009

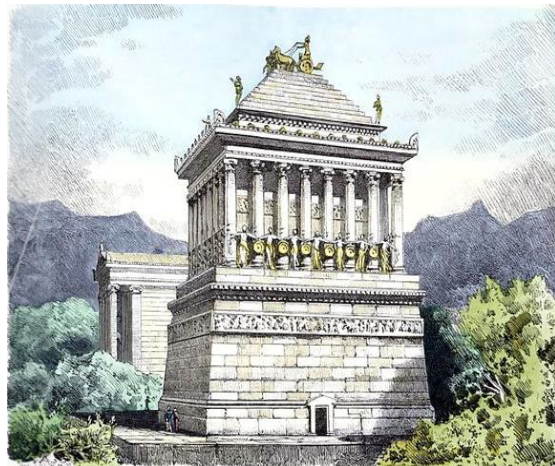


Figura 1.4 – Mausoléu de Halicarnasso
Fonte: Knab, 1886

Quando o Panteão Romano (fig. 1.5) foi construído, as Sete Maravilhas do Mundo Antigo já haviam sido definidas. Se sua cúpula já tivesse sido construída na época, certamente ele estaria entre elas (MARDER; JONES, 2015).



Figura 1.5 – O Panteão Romano em 2019
Fonte: acervo do autor

O presente texto tem como tema o Panteão Romano, uma estrutura que sobrevive de forma bastante conservada há quase 2 milênios, sendo uma das principais atrações turísticas da capital italiana.

1.1 MOTIVAÇÃO

O interesse por esta abordagem histórico-descritiva de aspectos da engenharia antiga surgiu quando, da apreciação do Panteão Romano, percebe-se a enorme diferença entre os recursos tecnológicos e matemáticos de que dispõe a engenharia moderna e os recursos muito mais limitados daquela época para, mesmo com essa restrição de aspectos científicos, a construção de obras surpreendentemente elaboradas.

A escolha do Panteão como objeto desta abordagem se deve ao fato de essa obra ter sido e continuar sendo inspiradora. Seus aspectos arquitetônicos e de construção podem ser inseridos na perspectiva histórica – em relação ao foco dos elementos da construção antigos e dos modernos – e da ciência – em relação aos cálculos envolvidos no trabalho proposto.

1.2 JUSTIFICATIVA

O tema proposto é relevante, pois sua abordagem é histórica e parte do entendimento de que os rudimentos da engenharia se encontram lá, naquele tempo, de forma significativa.

As primeiras evidências claras que temos do uso da matemática, da engenharia e dos procedimentos de projeto formais e sequenciais datam de cerca de 450 a.C., nos territórios sob a influência da civilização grega a leste do Mar Mediterrâneo. Tanto a matemática como arte de projetar grandes edificações e cidades foram introduzidas na Europa pela Índia e o Oriente Médio. Na verdade, talvez a primeira evidência escrita da arte da construção possa ser encontrada no código de leis da Babilônia (c. 1780 a.C.) estabelecido por seu primeiro soberano, Hamurábi, que reinou de 1792 a 1750 a.C. O código de Hamurábi, que regrava todos aspectos da sociedade, incluía leis específicas sobre construção, o que nos transmite tanto a ideia de responsabilidade profissional como o fato de que tal atividade exigia conhecimentos específicos (ADDIS, 2009, p. 13, 15).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GERAIS

Descrever, na perspectiva histórica, elementos estruturais gerais e característicos do Panteão Romano que mais se destacam, bem como o comportamento estrutural de sua cúpula;

e comparar a estrutura do Panteão Romano com algumas construções posteriores que tiveram, pelo menos em parte, sua cúpula como inspiração.

1.3.2 ESPECÍFICOS

Efetuar cálculos diversos relacionados à cúpula semiesférica, com base nas Teorias de Membrana e Flexional (Métodos Analíticos) e do Método dos Elementos Finitos (Método Numérico), com comparação de resultados.

1.4 PERGUNTAS SUSCITADAS PELO TRABALHO

Que elementos estruturais característicos do Panteão Romano podem ser descritos? O que os cálculos dos esforços internos de arcos e cúpulas podem demonstrar? A cúpula do Panteão foi comparada com outras cúpulas projetadas e construídas em épocas posteriores? Qual a diferença entre os materiais dessas diversas cúpulas?

1.5 METODOLOGIA

Em relação aos procedimentos, a pesquisa é bibliográfica, porque se desenvolveu por meio de consultas a fontes primárias e secundárias em relação a conceitos, teorias, estruturas, engenharia e design do Panteão, estudos sobre avaliações de estruturas e perspectiva histórica de estruturas, além de outros aspectos referentes ao tema.

Quanto à finalidade, a pesquisa se classifica como descritiva, porque apresenta traços e características do tema, o Panteão Romano. É também explicativa, porque calcula e analisa os esforços internos relativos à estrutura da cúpula do Panteão. Richardson et al. (1999) definem: trabalhos são descritivos quando buscam, apenas, descrever características da questão em estudo; são explicativos, quando se analisam e se explicam causas e questões relacionadas ao objeto de estudo.

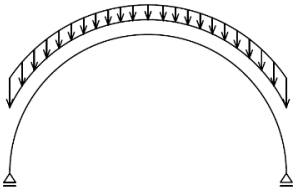
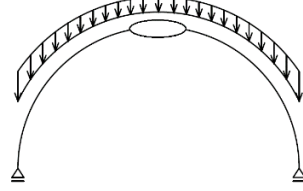
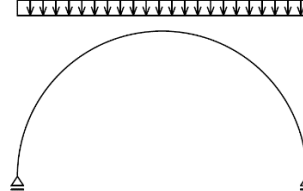
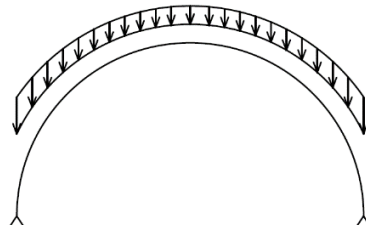
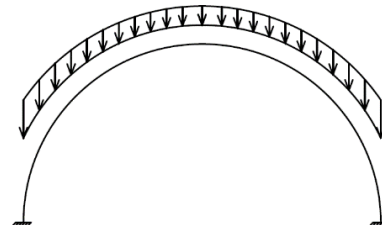
Neste trabalho, foi feito uso de Métodos Analíticos e Numéricos. No que se refere aos cálculos analíticos, foram tomados como base diversas bibliografias relacionadas ao tema. Para execução de cálculos numéricos e criação de gráficos, bem como para confirmação dos resultados, foram utilizados os *softwares*: Excel, MATLAB e SAP2000.

Em termos de método, buscou-se seguir o modelo de René Descartes (2017), em seu Discurso do Método, segundo o qual, para melhor se entender um problema, deve-se dividir cada dificuldade analisada em tantas parcelas quantas sejam possíveis e necessárias, a fim de

melhor resolvê-las, e conduzir por ordem os pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, aos poucos, até o problema mais complexo.

Neste trabalho as análises simplificadas foram fragmentadas em 5 casos para um melhor entendimento do problema. Na tabela 1.1 são apresentados os casos citados.

Tabela 1.1 – Casos de cúpulas estudadas

Descrição	Casos estudados		
	1	2	3
Cúpulas com apoios de 1º gênero (Teoria de Membrana)	<p>Peso próprio e cúpula fechada (sem <i>oculus</i>)</p> 	<p>Peso próprio e cúpula aberta (com <i>oculus</i>)</p> 	<p>Carga de neve e cúpula fechada (sem <i>oculus</i>)</p> 
	4		5
Cúpulas com apoios de 2º e 3º gênero (Teorias de Membrana e Flexional)	<p>Peso próprio e cúpula fechada (sem <i>oculus</i>)</p> 	<p>Peso próprio e cúpula fechada (sem <i>oculus</i>)</p> 	

Conforme visto na tabela acima, toda a fundamentação teórica e resultados de todos os casos serão apresentados com essa organização.

1.6 ABRANGÊNCIA, LIMITAÇÕES E DIFICULDADES

A cúpula do Panteão Romano apresenta certas dificuldades de análise, como o fato de sua espessura ser variável, o material constituinte variar ao longo de camadas e a estrutura possuir muitos vazios. Para possibilitar seu estudo, várias simplificações e adaptações foram adotadas. Dessa forma, a fundamentação teórica e as análises feitas neste trabalho envolvem apenas cascas finas, axissimétricas e de espessura constante, cujo material é homogêneo, isotrópico e elástico linear.

1.7 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Além da Introdução e da Conclusão, o desenvolvimento do trabalho foi organizado em cinco capítulos (numerados de 2 a 6): o capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica e generalidades a respeito do Panteão e de arcos e cúpulas – assim como a relação que um tem com a outra – de forma conceitual e terminológica, relativa a elementos estruturais e finalidades. Contemplou sua história, sua representação para a engenharia e sua influência para construções semelhantes no mundo, além de sua simbologia e uma descrição de materiais construtivos na perspectiva histórico-conceitual.

O capítulo 3 apresenta alguns aspectos de projeto, principalmente plantas, cortes e vistas da estrutura do Panteão, suas principais dimensões e algumas propriedades de seus materiais constituintes.

No 4 constam os métodos de análise, com fundamentos da Teoria de Membrana, da Teoria Flexional e do Método dos Elementos Finitos, descrição que embasou os cálculos do trabalho.

No capítulo 5, descrevem-se os *softwares* utilizados no trabalho e suas funções, visando ao auxílio dos cálculos ou a testes de verificação de resultados.

No capítulo 6 são apresentados cálculos de diversos modelos de cúpulas, tendo como parâmetro as dimensões e características do Panteão. O capítulo inclui análises feitas com a Teoria de Membrana, a Teoria Flexional e o Método dos Elementos Finitos via SAP2000, iniciando com modelos simplificados e, progressivamente, apreciando modelos mais complexos, além da comparação de resultados.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA & GENERALIDADES

De início, no que se refere aos termos “engenheiro” e “arquiteto”, conforme Addis (2009), há inevitáveis dificuldades com essa terminologia na perspectiva da Antiguidade, devido às questões temporais e também a diferenças linguísticas, geográficas e técnicas, sendo um anacronismo usar tais palavras para se referir a qualquer pessoa atuando antes de aproximadamente 1450. A palavra grega antiga *arkitekton* não significa “arquiteto”, como a entendemos hoje. Uma tradução melhor seria “gerente de obras”. Mas é importante conhecer a acepção atual dos termos, para se poder compreender a inter-relação entre eles.

Um dos fundamentos de maior importância na engenharia estrutural é a respeito da carga a que a estrutura está submetida. Engel (1981 apud NUNES, 2009) afirmou que a estrutura tem por objetivo a manutenção do controle das cargas gravitacionais, das forças externas e das tensões internas, “canalizando-as” nos trajetos previstos para mantê-las interdependentes, em um sistema de ação e de reação que proporcione o equilíbrio de cada componente individual e do sistema como um todo. A noção de cargas conduzidas ao longo dos elementos estruturais é exemplificada, metaforicamente, pela imagem da água conduzida pela tubulação.

Portanto, é essencial entender o comportamento geral de cada tipo de peça estrutural para a produção de uma construção eficiente. E aí aparece outro conceito fundamental no estudo de estruturas, que é sobre o *comportamento estrutural e análise estrutural*.

Salvadori (2011) comenta que, no passado, as estruturas eram construídas por meio do método tradicional da tentativa e erro. Por esse método, cada construtor ia ousando um pouco mais que o anterior e, confrontando-se com o fracasso, entendia que os limites do sistema tinham sido extrapolados. Exemplo disso é o ousado domo de tijolos da igreja de Santa Sofia em Constantinopla (atual Istambul, Turquia) – um dos maiores domos da Antiguidade, construído primeiramente em 537 d.C. – que desmoronou duas vezes e finalmente conseguiu ser mantido em pé, como está hoje. Outro exemplo é a abóboda muito alta da catedral gótica de Beauvais, que caiu duas vezes até que os construtores dos séculos XIV e XVI compreenderam o potencial da construção e as limitações reais desse tipo de edificação.

A construção das primeiras cúpulas tecnicamente avançadas começou na Europa, com a Revolução Arquitetônica Romana, quando tal sistema estrutural era frequentemente utilizado para moldar grandes espaços interiores de templos e edifícios públicos. Naquelas cúpulas, normalmente o material usado na construção não tinha grande resistência à tração e, para se reduzir o peso próprio, variava-se a espessura e o material agregado à medida que se aumentava a altura, sendo que deste modo reduziam-se as tensões normais na direção dos meridianos na estrutura concluída. Um exemplo é o Panteão de Roma [...] (RABELLO et al., 2016, p. 559).

Para esses autores, a geometria das cúpulas tem influência direta em seu desempenho estrutural. A depender do material e de suas características, a eficiência estrutural vai estar associada diretamente à eficiência da forma, incluindo a espessura e os raios da curvatura. Eles ainda explicam que uma cúpula que tenha tensões meridionais e tangenciais constantes pode “fornecer um projeto com um bom aproveitamento do material em toda a cúpula e diminuir os momentos fletores e cortantes que podem ser significativos em outros tipos de geometria” (RABELLO et al., 2016, p. 560).

2.1 TERMINOLOGIAS, CLASSIFICAÇÕES & DEFINIÇÕES

2.1.1 COLUNA

Apresenta-se um esquema dos componentes de uma coluna (fig. 2.1): (a) crêpis ou estereóbata; (b) coluna; (c) entablamento; (d) base; (e) fuste; (f) capitel; (g) arquitrave; (h) friso; (i) cornija; (j) scamillus; (k) plinto; (l) discos de perfil côncavo ou convexo; (m) equino; (n) ábaco. Na fig. 2.2, outros termos da parte de cima coluna (entablamento e capitel).

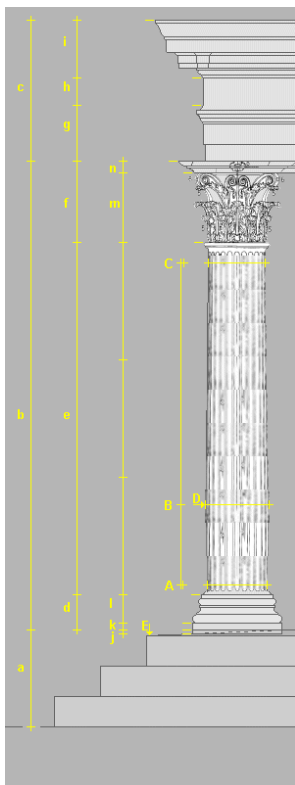


Figura 2.1 – Componentes de uma coluna
Fonte: Benutzer, 2005

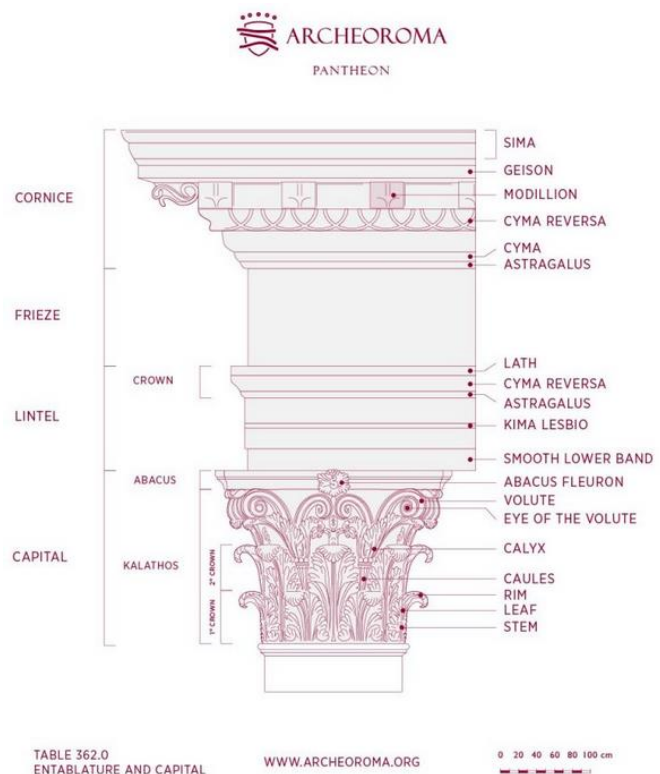


Figura 2.2 – Entablamento (arquitrave, friso e cornija) e capitel
Fonte: Archeoroma, 2020

O modelo da fig. 2.2 é uma coluna do Panteão e, na parte esquerda, de cima para baixo, encontram-se: cornija, friso, arquitrave e capitel.

Segundo a Encyclopædia Britannica (2017), capitéis primitivos (fig. 2.3) já eram conhecidos no Egito e na Mesopotâmia no século XXIX a.C. Três formas amplamente utilizadas de capitéis foram criadas pelos gregos, as chamadas ordens clássicas, que incluem os capitéis dóricos, jônicos e coríntios. Os romanos acrescentaram o capitel toscano, uma forma modificada do dórico, e o capitel composto, que combinava volutas jônicas com a forma de sino coríntio (fig. 2.4).

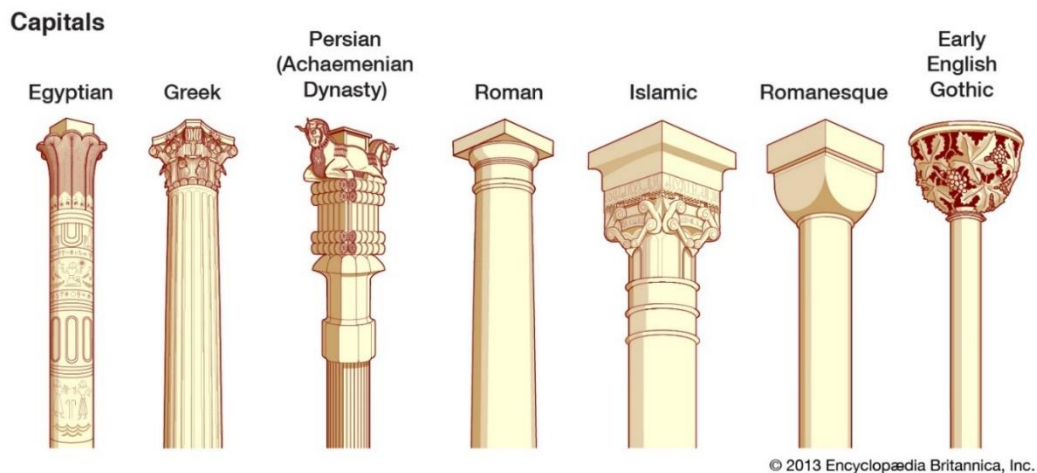


Figura 2.3 – Vários tipos de capitéis
Fonte: Encyclopædia Britannica, 2013

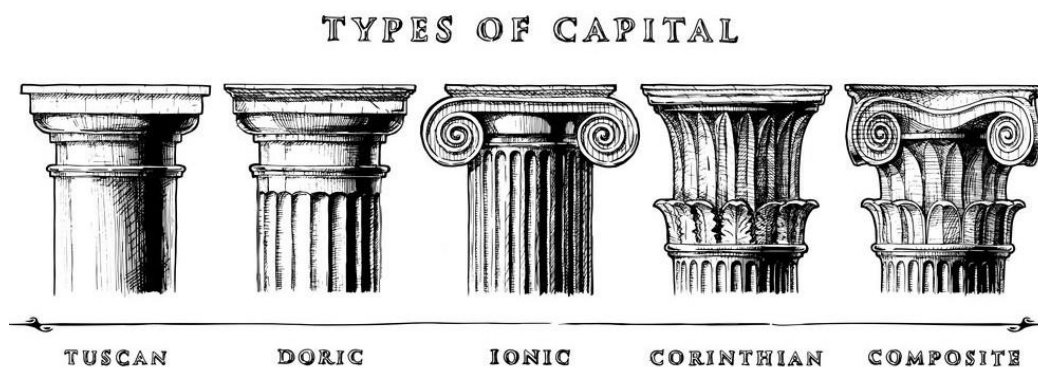


Figura 2.4 – Capitéis: toscano, ordens clássicas (dórico, jônico e coríntio) e composto
Fonte: Suricoma, 2020

Por uma ordem arquitetônica, sabe-se o estilo de construção, pois seus elementos o descrevem. Na arquitetura da Era Clássica, as ordens eram identificadas facilmente pelo perfil, proporções e detalhes estéticos. O estilo de uma coluna indica o próprio estilo e, com isso, tem-se a ordem usada na estrutura toda. “As ordens clássicas – [...] Dórica, Jônica e Coríntia – não servem apenas como descritores das ruínas das construções antigas, mas também indicam o desenvolvimento arquitetônico e estético da própria arquitetura Grega” (BECKER, 2020).

2.1.2 ARCO

Arco é um elemento estrutural que, geralmente, une duas paredes ou dois pilares, mas também pode ser constituído de um elemento único e contínuo, de aço ou concreto armado. No arco, as *aduelas*² ou pedras individuais atuam sob compressão. Arcos estáveis podem apresentar formas: semicircular (pleno ou de meio ponto); pontiaguda (apontado); arco reto (falso ou adintelado) (ADDIS, 2009).

Conforme West (1989 apud Martha, 2010), arcos e cabos são modelos cujos elementos estruturais têm eixos bem definidos e, hipotética e respectivamente, submetem-se à flexão e à tração puras. Esse comportamento é associado à eficiência do material, pois há uma tensão constante nas seções transversais de cada elemento. Martha (2010) também afirma que tal comportamento é mais claro nos cabos, pelo fato de eles serem flexíveis e sua forma se modificar para alcançar a tensão constante. Também porque a tensão interna de elementos que sofrem tração é limitada apenas pela resistência do material. Já nos elementos estruturais que são submetidos à compressão, a resistência da estrutura pode ter sua capacidade limitada pela perda de estabilidade, relacionada com as inevitáveis imperfeições geométricas, fenômeno chamado de *flambagem*³.

Salvadori (2011, p. 12), citando Leonardo da Vinci, afirma que “Um arco consiste em duas fraquezas que se apoiam uma contra a outra e criam uma força”.

A terminologia dos principais elementos constituintes dos arcos encontra-se definida e exemplificada abaixo, de forma ilustrativa, no desenho esquemático de perspectiva interna da Basílica de Vézelay, França (fig. 2.5).

²“Aduela – Uma pedra, geralmente em forma de cunha, usada para formar um *arco* de alvenaria” (ADDIS, 2009, p. 611).

³“Colapso de um elemento estrutural sob a ação de uma força de compressão ou de esforços de compressão que fazem com que ele perca subitamente sua estabilidade e curve-se perpendicularmente à linha de ação daquela força. A flambagem ocorre, por exemplo, em um *pilar* ou *escora* ou uma chapa fina de uma *longarina* de ferro ou aço, ou mesmo em uma *casca* fina de concreto armado” (ADDIS, 2009, p. 611).

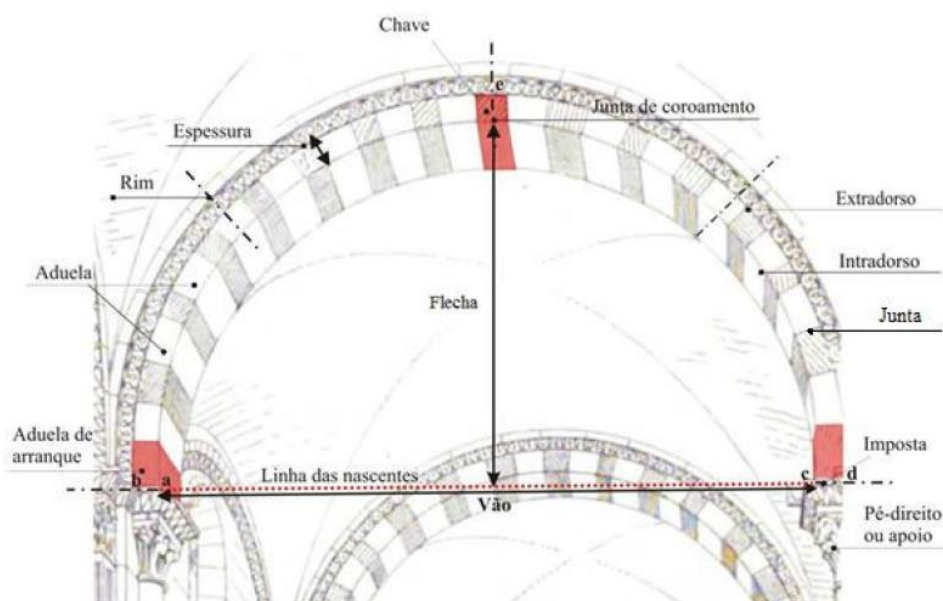


Figura 2.5 – Terminologia do arco
 Fonte: Viollet-le-Duc (1854, adaptado, apud NUNES, 2009)

Apoiando-se em Corona; Lemos (1972), Pevsner et al. (c. 1977), Tacla (1984), Turner (1996), Ching (1999) e obras gerais de referência, Nunes (2009) define:

- *Aduela* é o termo que designa o bloco em cunha que compõe a zona curva do arco, em sentido radial, com a face côncava para o interior e a convexa para o exterior. O plano de contato entre duas aduelas é a *junta*. A aduela superior, que “fecha”/trava a estrutura, é chamada de *chave* ou *fecho*. Nos arcos descontínuos, a chave é formada por duas aduelas. As aduelas inferiores, posicionadas na base do arco, são *aduelas de arranque*. O arco se apoia no *pé-direito* (*apoio*), que pode ser uma coluna pilastra, consolo ou massa de alvenaria. O termo *imposta* designa o último bloco do pé-direito, que apoia a aduela de arranque ou, em alternativa, a seção correspondente ao plano que separa o pé-direito e o arco;

- *Intradorso* é a face interior e côncava do arco; a face exterior e convexa é o *extradorso*, e a face frontal (plano *abcd* na fig. 2.5) é denominada *testa* ou *paramento*. As *nascentes* ou *nascenças* correspondem às arestas inferiores das aduelas de arranque (pontos *a, b, c, d* na fig. 2.5) e se situam na *linha das nascentes*, ou *linha de arranque*;

- *Coroamento*, no extremo oposto, é o ponto mais elevado do arco (ponto *e*, na fig. 2.5), situado no extradorso sobre o eixo vertical da chave; a *junta de coroamento* designa a seção transversal correspondente a esse eixo. Nos arcos descontínuos, a junta de coroamento corresponde a uma junta propriamente dita, entre as duas aduelas que constituem a chave;

- *Rim* se refere à seção transversal à meia altura do arco. O *vão*, *luz* ou *abertura* do arco corresponde à distância entre as nascentes, tomada pelo intradorso (entre os pontos *a*

e c na fig. 2.5); a *abertura externa*, à distância entre as nascentes, tomada pelo extradorso (entre os pontos b e d na fig. 2.5), e o *vão teórico*, distância entre as nascentes, tomada pelo eixo do arco;

- *Flecha* ou *altura* é a medida da distância entre a linha das nascentes e a face inferior da chave. A relação entre a flecha e o vão costuma ser expressa por uma fração de numerador unitário e é um dos elementos mais importantes da geometria do arco, pois está diretamente associado a seu comportamento mecânico;

- A *espessura* do arco corresponde à medida da distância entre o intradorso e o extradorso. O arco pode ter espessura constante ou variável. Nesse último caso, costuma-se indicar a espessura na chave, nas impostas e nos rins, as quais são áreas especialmente relevantes para o equilíbrio do arco de alvenaria.

Segundo Séjourné (1914 apud NUNES, 2009), na forma geométrica do arco, há um sistema de classificação em três variáveis (fig. 2.6): a relação f entre a flecha e o vão do arco; a curva do intradorso (completa ou segmental); e a curva do extradorso (contínua ou descontínua).

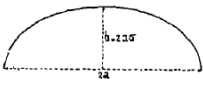
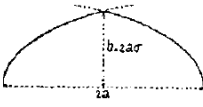
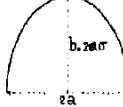
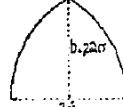
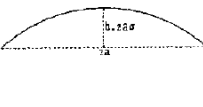
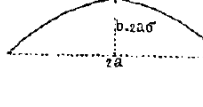
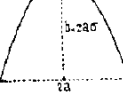
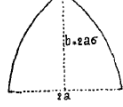
	Curva rebaixada $\left[f < \frac{1}{2} \right]$		Curva sobrelevada $\left[f > \frac{1}{2} \right]$	
	Contínua	Descontínua (quebrada)	Contínua	Descontínua (quebrada)
Semi-curva completa (tangentes verticais aos apoios)	 <p>Elipses de 2º grau; curvas algébricas em forma de elipse; curvas compostas de segmentos de curvas; asas de cesto de m centros.</p>	 <p>Duas elipses, duas asas de cesto, duas parábolas, etc., se interceptando.</p>	 <p>Elipses elevadas, asas de cesto elevadas, etc</p>	 <p>Duas semicircunferências, etc., se interceptando.</p>
Segmento de curva (tangentes inclinadas em relação aos apoios)	 <p>Elipses de 2º grau; curvas algébricas em forma de elipse; curvas compostas de segmentos de curvas; asas de cesto de m centros.</p>	 <p>Duas elipses, duas asas de cesto, das parábolas, etc., se interceptando.</p>	 <p>Elipses elevadas, asas de cesto elevadas, etc</p>	 <p>Duas semicircunferências, etc., se interceptando.</p>

Figura 2.6 – Classificação de arcos segundo a forma de sua curva
Fonte: Séjourné (1914 apud NUNES, 2009)

Middlenton (1905 apud NUNES, 2009) explicou que, pela curva do intradorso, os arcos podem ser divididos em planos (adintelados), constituídos por segmentos de circunferência

(esses ainda classificados conforme o número de segmentos que os compõem) e constituídos por segmentos de outros tipos de curva (elíptico, parabólico, etc) (fig. 2.7).


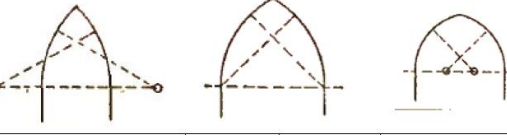


Número de Centros	Nome do arco ou forma do intradorso
1	
2	
3	
4	

Figura 2.7 - Classificação de arcos segundo a forma do intradorso
 Fonte: Middlenton (1905 apud NUNES, 2009)

No inventário que define 35 tipos de arcos (fig. 2.8) tirado, *verbatim*, de Nunes (2009), a qual se baseou em Fletcher (1987), encontram-se: (1) triangular; (2) falso; (3) pleno, circular, semi-circular, de meio ponto, de volta inteira, de volta redonda, de volta perfeita, redondo, de pleno centro, romano; (4) peraltado, ultra-semicircular; (5) segmentar, abaulado; (6, 9) de ferradura, bizantino, mourisco, árabe, revindo, capaz; (7) acarelado; (8) de ferradura apontado; (10) ogival peraltado; (11) ogival sobrelevado, ogival lanceolado, lanceolado; (12) ogival equilátero; (13) ogival rebaixado; (14) segmentar apontado; (15) abatido, asa de cesto, asa de balaio, *anse de panier*, sarapanel, rebaixado, de três ou mais centros; (16) abatido rebaixado; (17) tudor, de quatro centros, gótico inglês; (18) aviajado, montante, em rampa, rampante, de arranques desiguais, de pés desiguais, descendente, esconço; (19) otomano, falso tudor; (20) elíptico, semielíptico; (21) parabólico; (22, 24) trilobulado, trilobado, trifoliado; (23, 25) trilobulado apontado, trilobado apontado, trifoliado apontado; (26) pentalobulado, pentalobado; (27) polilobulado, polilobado; (28, 29) contracurvado, conopial, de carena, de querena, de colchete, de moldura, flamejante; (30) pseudo abatido; (31) adintelado; (32) ogival italiano; (33) veneziano; (34) florentino; (35) de ombros.

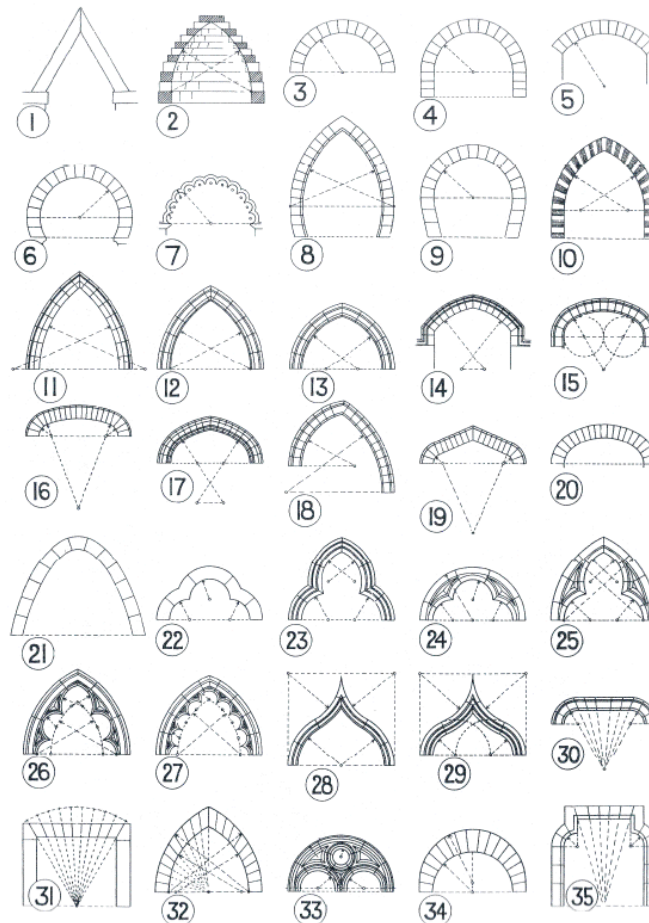


Figura 2.8 – Classificação de arcos segundo a geometria
 Fonte: Fletcher (1987 apud NUNES, 2009)

Ragette (2003 apud NUNES, 2009, p. 17) propõe uma classificação de arcos em três grupos: genuínos, cuja forma “corresponde ao fluxo natural das forças (catenário, parabólico, semicircular, segmental, ogival, abatido, entre outros)”; arcos adversos, os quais não estão de acordo completamente com o fluxo natural das forças (contracurvado, de ferradura, de ombros); arcos decorativos, que são contrários à linha natural do abobadar ou então não têm a função de arco, sendo só aplicações decorativas (e.g.: o polilobulado). Os arcos mais recorrentes na literatura são os genuínos.

2.1.3 CÚPULA

Na engenharia civil, cúpula e domo são sinônimos. E cúpula é um tipo de casca.

Domo, de acordo com a Encyclopædia Britannica (2014), é uma “estrutura hemisférica expandida do arco” que constitui, no geral, um teto ou cobertura. No início, as cúpulas surgiram como montes sólidos, com técnicas que se adaptavam apenas a edifícios menores (cabanas redondas e túmulos no antigo Oriente Médio, na Índia e no Mediterrâneo). Foram os romanos que introduziram em larga escala seu hemisfério de alvenaria.

Conforme consta em Salvadori (2011) (fig. 2.9), as cargas de uma cúpula precisam ser canalizadas para o solo, e um domo faz isso ao longo de suas linhas verticais ou *meridianos*, que vão ficando cada vez mais comprimidos à medida que se aproximam do suporte do domo. A continuidade da superfície do domo (em oposição ao arco) introduz uma ação ao longo de suas seções horizontais ou *paralelos*, que impede que os meridianos se abram.

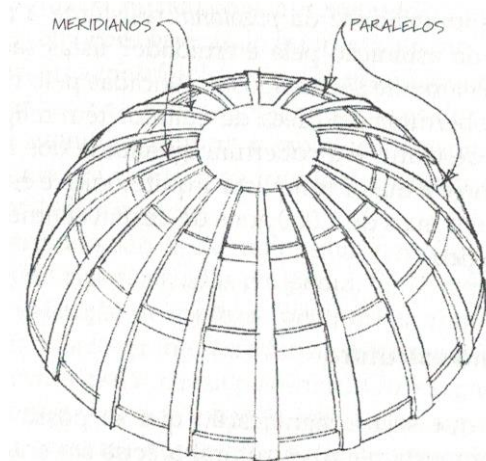


Figura 2.9 – Meridianos e paralelos de uma cúpula
Fonte: Salvadori, 2011

Guerrin (2003) classifica as cúpulas com base em aspectos variados de formas e disposições:

- 1) forma em planta: plano circular (cúpula de revolução), plano elíptico (cúpula elíptica), plano poligonal (cúpula poligonal);
- 2) forma do meridiano: circular, elíptica, parabólica, de ogiva, cônica, forma de igual resistência;
- 3) disposição no vértice: cúpula fechada, cúpula aberta. A cúpula aberta pode suportar no seu topo uma outra cúpula (ou lanternim);
- 4) concepção das vigas de borda inferiores: cúpula flexível, cúpula cintada;
- 5) disposições construtivas: cúpula de espessura constante, cúpula de espessura variável, cúpula em nervuras meridianas, cúpula em nervuras paralelas, cúpula em nervuras ortogonais;
- 6) método de construção: cúpula fundida sobre cintamento e cúpula pré-fabricada;
- 7) altura da cúpula: cúpula abatida, cúpula de arco pleno e cúpula elevada.

2.1.4 PANTEÃO

A seguir (fig. 2.10) são apresentadas algumas terminologias de elementos da estrutura do Panteão.

- Rotunda: “edifício ou divisão em edifício de planta circular ou oval e coberto por cúpula” (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, 2016).
- Frontão: “empena triangular formando o final da inclinação da cobertura sobre um pórtico (a área, com cobertura apoiada em colunas, conduz à entrada de um edifício) [...] O frontão era o coroamento da fachada do templo grego” (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, 2017).
- Bloco intermediário: no Panteão é a ligação entre o pórtico e a rotunda (MARDER; JONES, 2015).
- *Oculus*: “(Latim: “olho”) [...] qualquer um dos vários elementos estruturais que lembram um olho. [...] A abertura redonda no topo de alguns domos, ou cúpulas, também é um *oculus*” (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, 1998).

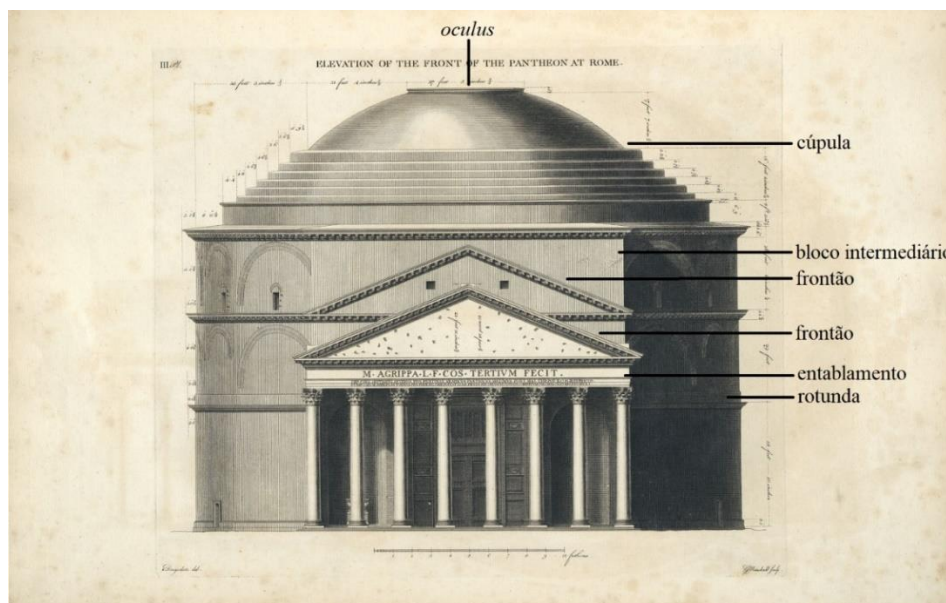


Figura 2.10 – Algumas terminologias do Panteão
Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

2.2 TÉCNICAS CONSTRUTIVAS

Conforme Čakarić (2017), do Egito antigo, onde se construiu a Grande Pirâmide de Gizé em 16 anos, com pedras de 2,5 toneladas, aos primeiros arranha-céus nos EUA, onde se construiu o *Empire State Building* de 400 m de altura em um ano, a instalação e a construção sempre foram um desafio para engenheiros e trabalhadores. É um campo no qual os desenhos se tornam realidade. Esse autor esclarece que, em toda a história, sempre foi muito difícil desafiar a gravidade e construir edifícios que demonstrem o poder de determinada civilização

e sua engenhosidade. Desde a primeira e simples habitação, o homem tem lutado para vencer as forças da natureza e avançar no desenvolvimento de construções.

Salvadori (2011, p. 159-160) explica, de forma geral, como se constroem arcos. Como o arco é comprimido por todos os lados – o peso próprio, o tabuleiro e as cargas do tráfego fazem essa compressão –, sua construção pode ser feita com materiais resistentes à compressão. Exemplos desses materiais são pedras, tijolos e concreto. Historicamente, a existência de materiais naturais compressivos justifica as construções ancestrais de pontes em arco e de coberturas arqueadas há mais de 2.500 anos. Os romanos, mestres em construções de alvenaria, aplicaram arcos em várias situações: arcos de alvenaria e tijolo foram aplicados em pontes nas estradas e em monumentos; os muros externos do Coliseu escavados por arcos; banhos romanos cobertos por tetos em arco ou abóbadas de berço; o Panteão com grande teto em domo – que “funciona até certo ponto como uma série de arcos dispostos ao redor de um círculo” –; aquedutos de água com vários conjuntos de arcos sobrepostos no topo, entre outros.

Os arcos romanos tinham uma envergadura máxima de cerca de 30 metros, sempre em semicírculo, pela facilidade de se construir andaimes circulares de madeira ou *cimbres*⁴ (fig. 2.11) para a respectiva construção. Apesar de um cabo de grande envergadura poder se estender de torre a torre sem suporte intermediário, o arco de alvenaria era construído com blocos separados ou *aduelas*, com o apoio temporário em cimbres, o que até hoje é feito, geralmente de madeira. A construção de um arco inicia ao mesmo tempo nas duas extremidades do cembre. Quando o bloco do topo, ou *pedra de fecho*, é fixado entre os dois blocos, o cembre pode ser removido por baixo, pois as duas metades se apoiam uma na outra (SALVADORI, 2011).

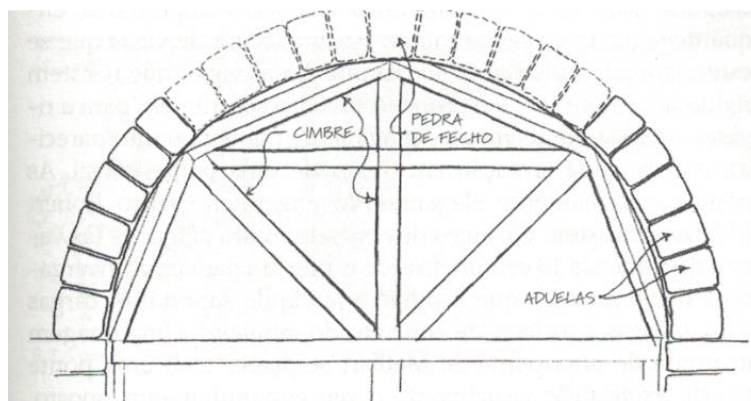


Figura 2.11 – A construção de um arco
Fonte: Salvadori, 2011

⁴“Estrutura temporária de apoio, tradicionalmente de madeira, usada para sustentar as *aduelas* de um *arco* ou *abóbada* de alvenaria durante a construção. O cembre é removido após o término da construção, que se torna autoportante. Também chamado de *cimbramento* ou *cambota*” (ADDIS, 2009, p. 611).

Para o caso de cúpulas, Marder e Jones (2015) explica que a sobrevivência do Panteão dependeu principalmente da qualidade técnica da construção romana, qualidade essa que atingiu seu apogeu na primeira metade do século II d.C. Isso deriva de uma longa tradição de experimentação inteligente com materiais (principalmente tijolo e concreto) e determinadas unidades de construção espacial (arcos, abóbadas e cúpulas). É ilustrativa a técnica dos construtores do Panteão, classificada por densidade do agregado no concreto, com o mais pesado no fundo e o mais leve no topo. Na parte superior da pedra-pome da cúpula (ou escoria), foi usado um material vulcânico leve da região do Vesúvio, adquirido com dificuldade após a erupção do ano 79 d.C. haver encoberto as melhores áreas sob material inferior. Os construtores romanos também depositavam muita fé nos chamados arcos de alívio (fig. 2.12). “Arco de alívio é um arco construído sobre um lintel ou arquitrave para aliviar o peso apoiado” (CHISHOLM, 1911, p. 311).

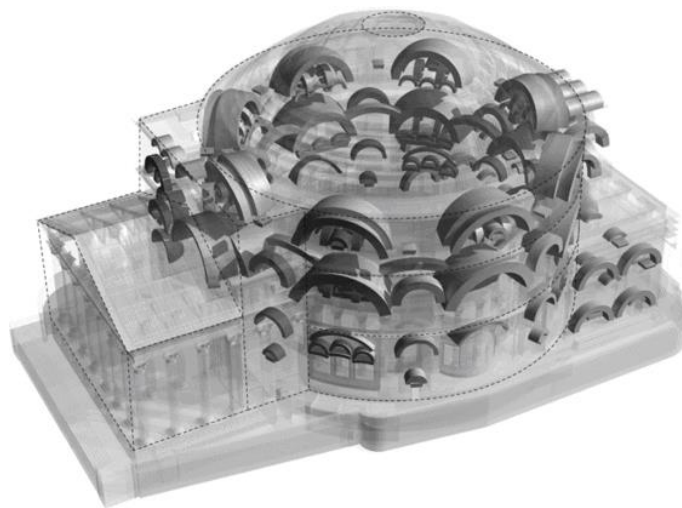


Figura 2.12 – “Armadura” de arcos de alívio embutidos no Panteão (concepção de Jones e realização de Grover)
Fonte: Marder; Jones, 2015

Para construir essa cúpula, foi preciso um suporte estável para as molduras de madeira sobre as quais o concreto foi colocado. Quando concreto é endurecido, os suportes são removidos. Foram propostas várias hipóteses sobre como essas estruturas temporárias foram mantidas ao longo do tempo (ARCHEOROMA, 2020). Mas conforme Charles River Editors (2020), não se sabe exatamente como a estrutura do Panteão foi construída.

A fig. 2.13 apresenta a proposta de Viollet-le-Duc de centralização das estruturas temporárias para construir a cúpula, e a fig. 2.14, a proposta de Taylor.

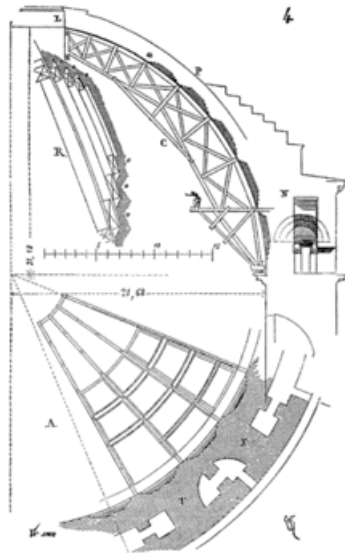


Figura 2.13 – Proposta de Viollet-le-Duc

Fonte: Viollet-le-Duc (1875 apud MARDER; JONES, 2015)

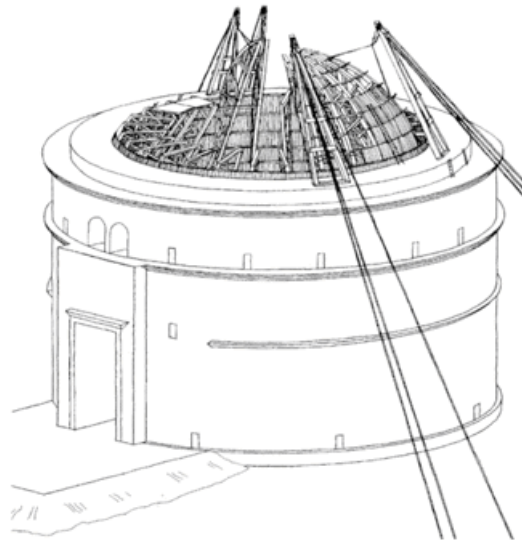


Figura 2.14 - Proposta de Taylor

Fonte: Taylor (2003 apud MARDER; JONES, 2015)

A fig. 2.15 mostra outra proposta com uma seção transversal esquemática com extensão (tom cinza) de uma torre de centralização hipotética em forma de anel para a construção da cúpula, escala 1:600 (MARDER; JONES, 2015).

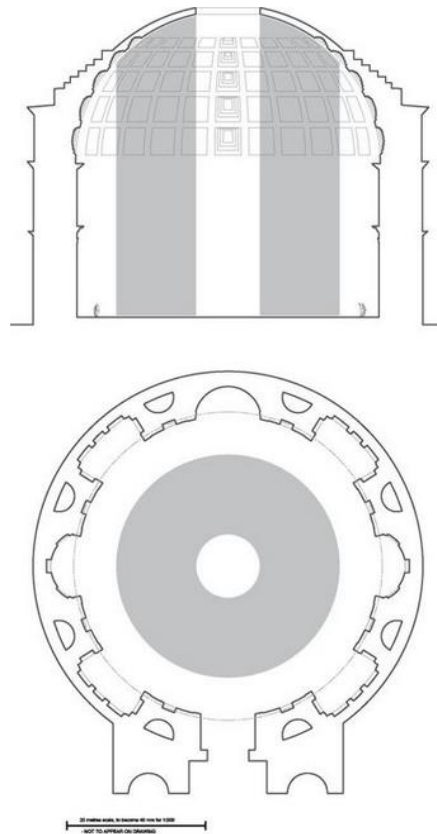


Figura 2.15 - Seção transversal esquemática (desenho de Jones)

Fonte: Marder; Jones, 2015

2.3 MATERIAIS CONSTRUTIVOS

A evolução do material estrutural não acompanhou as necessidades advindas dos conceitos teóricos que avançaram. À exceção dos concretos armado e protendido⁵ e do aço de alta resistência, os materiais utilizados hoje são semelhantes aos usados por nossos antepassados (SALVADORI, 2011).

Addis (2009) complementa que foi apenas com o uso do aço, em meados do XIX, que muitas das conquistas romanas foram superadas. Para Salvadori (2011, p. 9), isso se evidencia nas construções de pontes, com a construção de vãos de 30 metros pelos romanos. “No projeto de pontes, estamos 60 vezes à frente dos romanos. No entanto, em termos relativos, fizemos poucos avanços no que tange à dimensão em outros tipos de construção”. Ele também faz comparações com o peso dos materiais que se usava no passado e em dias mais recentes:

A superioridade dos materiais modernos, no entanto, é de uma natureza surpreendente sob o ponto de vista econômico, se não quanto à dimensão. Nossos grandes edifícios são extremamente leves e de construção mais barata do que os do passado. A cúpula da Basílica de São Pedro, a maior igreja cristã do mundo, tem um diâmetro de 41,75 metros, consiste em não apenas uma, mas duas cúpulas de tijolo e pesa cerca de 2.197 quilos por metro quadrado. A cúpula do salão de exposições do C.N.I.T.⁶, maior do que a basílica de São Pedro, pesa apenas 439 quilos por metro quadrado. (SALVADORI, 2011, p. 7)

Salvadori (2011, p. 9) ainda responde sobre a existência de esperança além dessas conquistas recentes, explicando que se se considerarem os fatores econômicos e se limitar ao aço, o único de meio de se vencer as fronteiras atuais é aumentando sua resistência, o que é exequível, apenas, nos limites “da atração molecular do aço”. Para esse autor, “na construção, como em tudo na vida, o empenho humano é frustrado pelas leis da natureza”.

Para se fazer o “concreto” daquela época romana, era necessária a obtenção de uma substância especial. Vitruvius (2009) explicou que há um tipo de pó que produz soluções admiráveis naturalmente. É original das regiões de Baiae e dos municípios em volta do monte Vesúvio⁷. Quando ela é misturada com cal e pedra miúda, dá consistência a vários tipos de edificações, solidifica os molhes⁸ sob a água. Isso é possível porque nessas regiões montanhosas há fontes e lavas abundantes que não seriam encontradas nas profundezas se não fosse o fogo ardente, intenso em enxofre, alúmen ou betume. Esse fogo profundo e o vapor das chamas que

⁵Protensão – Sistema no qual os elementos da estrutura estão sempre sujeitos a esforços ou são tensionados antes da aplicação da carga principal da estrutura. Em uma viga de concreto protendida de piso, a armadura de aço é tracionada e depois comprime o concreto antes que a viga receba as cargas do piso” (ADDIS, 2009, p. 612).

⁶Centre Nacional des Industries et des Techniques.

⁷Vitruvius refere-se à areia vulcânica, depois chamada pozolana, por ser abundante em Pozzuoli (antiga *Puteoli*), junto a Nápoles. Na Antiguidade, foi usada na construção de estruturas portuárias, por adquirir solidez sob a água.

⁸*Moles*: molhes de defesa e de atracação nos portos.

circulam ardendo tornam a terra leve, e o tufo produzido não tem o elemento líquido. Assim, quando três coisas originadas da força do fogo se misturam de forma semelhante, quando a água se mistura a elas também, une-se tudo em uma coisa só rapidamente, consolidando-se pelo elemento líquido, e nem as ondas, nem a força da água conseguem dissolvê-la.

Conforme Addis (2009), o uso de pozolana e de agentes químicos semelhantes para fazer cimento hidráulico foi mantido apenas nas regiões onde a pozolona era encontrada na natureza (mais perto de Nápoles e no Vale do Reno). O cimento hidráulico desapareceu completamente das demais regiões da Europa, entre os séculos VI e XVIII.

É importante ressaltar que o termo “concreto” só se tornou preciso nos últimos dois séculos. Antes, ele era utilizado para se referir a misturas de ingredientes que sofriam reação química quando eram misturados com água e formavam um material resistente e duro. Hoje, o concreto é um material com uma aglomerante ou ingrediente quimicamente ativo (argamassa de cimento ou cal) que liga vários enchimentos ou ingredientes passivos que são conhecidos como agregados e que geralmente são areia e pedra britada. O gesso e o calcário, de ocorrência natural, são rochas que se tornam ativas quimicamente quando são aquecidas a 900°C, removendo as moléculas de água que integram a rocha. Eles são moídos e formam um pó chamado cal virgem ou cimento. Quando esse material é usado, o cimento misturado com água inicia uma reação química. Nessa reação, a água e o dióxido de carbono do ar fazem uma recombinação e formam uma massa sólida. Na reação química inicial, que libera calor, a cal pura fica dura quando reage com o dióxido de carbono atmosférico e forma o carbonato de cálcio. Esse outro processo é lento e não ocorre sob a água; por isso essa cal é conhecida como “não-hidráulica” (ADDIS, 2009).

As propriedades químicas dos cimentos, e portanto a natureza exata das reações químicas que ocorrem quando o concreto ou a argamassa é feito, varia consideravelmente, conforme a composição química das rochas, a proporção de água e cimento, e o grau de exposição à atmosfera. Todos esses fatores afetam suas propriedades mecânicas, especialmente a resistência. Assim, a seleção do traço correto é um aspecto crucial da produção do concreto (ADDIS, 2009, p. 615).

Agora fazendo referência específica ao concreto romano, de acordo com Solheiro (2017), a argamassa usada pelos romanos para o concreto era obtida pela combinação, em proporções cuidadosamente controladas, de pozolana (finas cinzas vulcânicas), cal e água. Os agregados (*caementa*), consistindo em rochas ou tijolos quebrados, eram, segundo Moore (2002 apud Solheiro, 2017), adicionados à argamassa e compactados com uma ferramenta especial para criar o concreto estrutural. Os moldes para a cura do concreto eram feitos em madeira, pedra empilhada ou tijolo (fig. 2.16). O processo era demorado e realizado com um notável controle de qualidade.

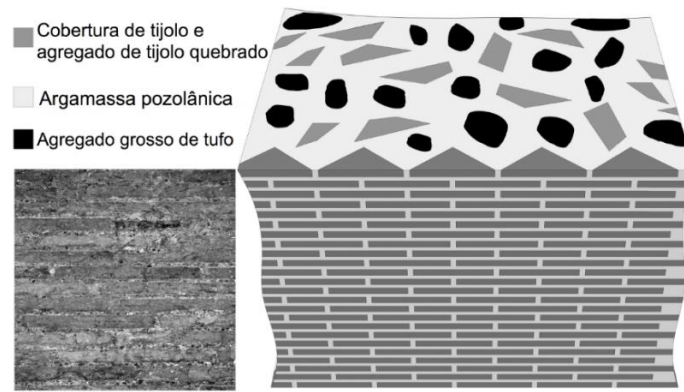


Figura 2.16 – Parede com cobertura de tijolo com desenho esquemático do núcleo de concreto
 Fonte: Brune; et al. (2010 apud SOLHEIRO, 2017)

Segundo Addis (2009), o domo do Panteão foi construído principalmente com uma mistura de concreto romano usual – camadas alternadas de pasta de cimento e tijolos quebrados (diferente do material quase homogêneo usado atualmente). Para reduzir o peso da cúpula, diversas metodologias foram usadas: a seção transversal da cúpula diminui gradualmente de sua nascente à coroa, com o centro formando um *oculus*; as partes mais baixas da cúpula foram aliviadas em cerca de 10% de seus pesos com o uso de painéis afundados; redução da densidade do concreto (lançado em camadas horizontais).

O concreto usa *caementae* ou o que hoje se chama de agregado, progressivamente tornando-se mais leve na medida em que se eleva a edificação. Em fundações, o agregado é formado por lascas de mármore travertino, resíduos de grandes blocos de travertino utilizados em partes da própria edificação. No primeiro nível do Panteão, o agregado é constituído de camadas alternadas desse mármore com tufo calcário. No segundo, o agregado é composto de camadas alternadas de tufo calcário e de fragmentos de ladrilhos. Já no terceiro e na parte inferior da cúpula, o agregado é composto de cacos de tijolo. A camada seguinte, uma banda fina da cúpula, o agregado é formado de camadas de cacos de tijolo e de tufos calcários alternadamente. Por fim, o agregado no resto da cúpula é integrado por camadas alternadas de tufo calcário leve e de pedra-pomes (ADDIS, 2009).

2.4 DESCRIÇÃO DO MONUMENTO

Aqui é feita uma descrição mais detalhada dos principais elementos estruturais e arquitetônicos do Panteão.

Em frente ao Panteão, há uma grande porta dupla de bronze (figs. 2.17 e 2.18) com 7,53 metros de altura e 4,90 metros de largura que permite a entrada para se visualizar, no interior,

a cúpula esférica feita há quase 19 séculos. É possível ainda ver o céu através do *oculus*, no topo da cúpula (figs. 2.19 e 2.20), o maior já feito em alvenaria (ARCHEOROMA, 2020).



Figura 2.17 – Porta dupla de bronze
Fonte: Pantheon Roma, 2020



Figura 2.18 – Porta vista do interior
Fonte: Donovan, 1975



Figura 2.19 - O *oculus* da cúpula do Panteão
Fonte: acervo do autor



Figura 2.20 – O *oculus* visto do topo do Panteão
Fonte: Donovan, 1975

Os degraus de acesso externo ao *oculus* do Panteão acompanham a curvatura da cúpula e são mostrados de perto, de longe e em desenho, numa visão de conjunto (figs. 2.21, 2.22 e 2.23). Como será visto mais adiante (Apêndice A4), é bastante provável que os romanos já soubessem que esses degraus também desempenham uma importante função estrutural, por meio de esforços nos paralelos da cúpula. No interior da cúpula do Panteão existe um conjunto de recuos ou painéis afundados (fig. 2.24) no interior de sua cúpula. São 5 anéis de 28, i.e., 140 desses recuos que se tornam progressivamente menores à medida que se aproximam do *oculus* (ARCHEOROMA, 2020).

[...] foram feitos despejando concreto em grandes blocos de forma de madeira. Sua função não era apenas estética, mas eles têm um papel fundamental em tornar a cúpula mais leve e também aceleraram a evaporação da água e a solidificação da mistura de cimento, aumentando a área de superfície exposta ao ar durante o processo de

carbonatação (a reação química entre o hidróxido de cálcio no cimento e o dióxido de carbono no ar para formar o carbonato de cálcio) (ARCHEOROMA, 2020).



Figura 2.21 - Degraus de acesso da cúpula
Fonte: Donovan, 1975



Figura 2.22 – Conjunto de degraus
Fonte: Pixabay, 2020

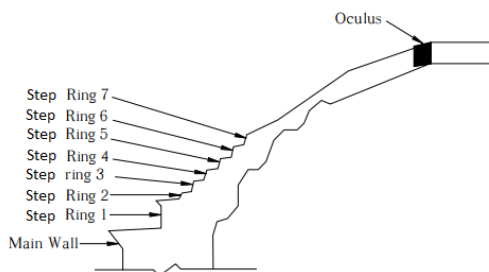


Figura 2.23 – Desenho dos degraus
Fonte: Achwal et al., 2006



Figura 2.24 – Painéis afundados
Fonte: Donovan, 1975

Conforme MacDonald (1976), o chão é feito de granitos coloridos, mármore e pórfiro, no formato de quadrados e círculos em quadrados (fig. 2.25). As cores se repetem e são aumentadas, tanto na arquitetura quanto na calçada da primeira rotatória da zona. As colunas, com nichos diagonais (numerados em 3, 7, 11 e 15 – cf. fig. 2.26) e as pilastras de flanco são de mármore laranja-amarelado (*giallo antico*, amarelo antigo) da Numídia, região da atual Tunísia ocidental e Argélia oriental. Os outros dois nichos, 5 e 13, e as colunas da abside, 9, são de mármore multicolorido, com um esbranquiçado principal e grandes marcas em vermelho e roxo-avermelhado, *pavonazetto* (ou mármore de pavão), da Ásia Central Menor (atual região da Turquia). A cor pórfiro egípcio vermelho-púrpura-escuro foi usada em certas capelas. O pír, as superfícies de nicho e a parede da segunda zona do sótão eram originalmente recobertos de mármore com vários padrões circulares e quadrados. Nas capelas e em outros lugares, muito se perdeu, inclusive havendo substituições das pedras originais por bolinhas coloridas feitas em

gesso pintado. A razoável quantidade de revestimento original que ainda resta deixa claro que as cores branco, verde e cinza-verde aumentaram em relação às cores mencionadas.



Figura 2.25 – Design original do piso do Panteão
Fonte: Pantheon Roma, 2020

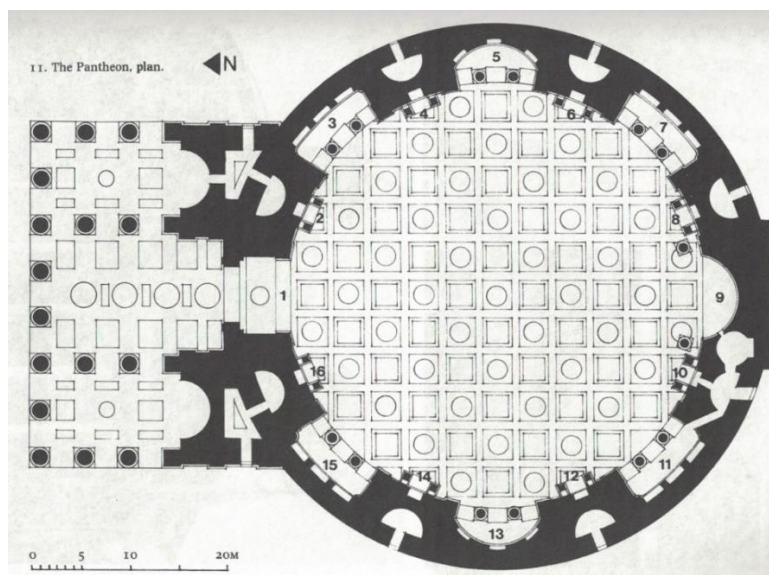


Figura 2.26 – Numeração dos nichos do Panteão
Fonte: MacDonald, 1976

Um total de 16 colunas sustentam o entablamento e o frontão em frente à rotunda do Panteão. Segundo Marder e Jones (2015), toda a cantaria das colunas do edifício é composta de dois tipos: mármore quase branco (Mármore de Elgin) das pedreiras do Monte Pentélico perto de Atenas (o mesmo do Partenon e suas esculturas) e granito do Egito (granito vermelho de Assuão e granito cinza de Mons Claudianus, entre o mar Vermelho e o rio Nilo).

Conforme MacDonald (1976, p. 28), todas as colunas do Panteão são coríntias (figs. 2.27 e 2.28). O pórtico é constituído de oito colunas de fachada sem pregas, com estrutura triangular

de pedra. Por trás, há oito colunas iguais em tamanho e desenho, formando três breves corredores. As colunas externas originais eram de granito egípcio cinza; as de dentro de granito egípcio em tom avermelhado. Todas possuem êntase, uma sutil diminuição de diâmetro à medida que aumentam. Todas são monólitos e a base é de mármore branco (fig.2.29).



Figura 2.27 – Colunas externas do Panteão
Fonte: acervo do autor



Figura 2.28 – Colunas internas do Panteão
Fonte: acervo do autor



Figura 2.29 – Base de coluna externa do Panteão
Fonte: Albuquerque, 2015

Para Marder e Jones (2015), essa variedade de mármore (“panteão de mármore”), vinda de várias partes do mundo, fornece um lembrete visual do alcance do domínio imperial romano. De dentro da Itália, os mármore vieram de Carrara para alguns dos capitéis coríntios.

As colunas, juntamente com o entablamento e o frontão, formam o pórtico do Panteão (fig. 2.30) (*pronaos*, para os italianos), uma típica entrada no estilo grego de templos (ARCHEOROMA, 2020). A ligação entre o pórtico do Panteão e a rotunda é feita pelo bloco intermediário (fig. 2.31), ou de transição (*avancorpo*, para os italianos) (MARDER; JONES, 2015).



Figura 2.30 – O pórtico do Panteão
Fonte: acervo do autor



Figura 2.31 – Exterior do bloco intermediário, lado oeste
Fonte: acervo do autor

O único propósito conhecido do bloco intermediário era o de abrigar um par de escadarias que sobem toda a altura da estrutura para dar acesso à cobertura. No nível mais alto, as escadas também fornecem meios de entrada para quartos que séculos mais tarde seriam ocupados pela *Accademia dei Virtuosi*, uma associação de artistas que foi sediada lá a partir do século XVI (MARDER; JONES, 2015).

A fig. 2.32 representa a seção transversal da escadaria leste do Panteão. Segundo Marder e Jones (2015), atualmente, essa escada leste é acessada por uma das duas grandes absides do pórtico (uma antiga porta do flanco foi bloqueada). As escadas sofreram uma pequena reconfiguração, mas permanecem essencialmente inalteradas. O plano trapezoidal faz seis voltas completas, e mais uma sétima subida contra a parede curva da rotunda. Eles dão acesso a várias partes diferentes do edifício, que incluem às câmaras semicirculares do tambor, ao conjunto de salas em frente ao bloco de transição ocupado pelos *Virtuosi*, ao entablamento do pórtico, à estrutura do meio da rotunda e ao telhado.

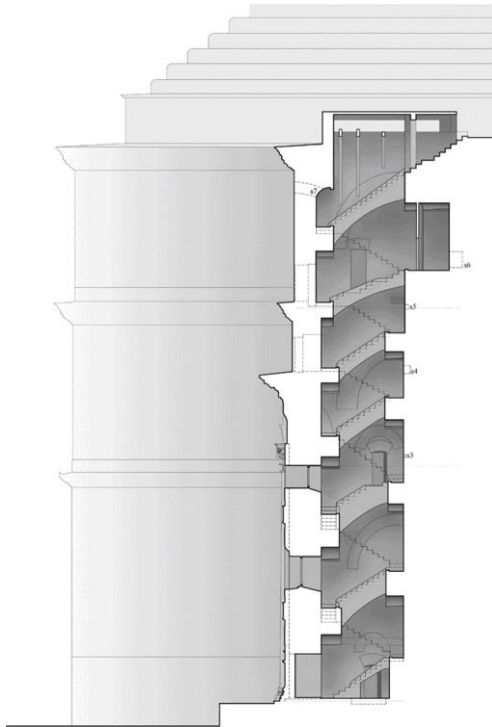


Figura 2.32 – Seção transversal da escadaria leste do Panteão (desenho de Jones e Grover)
 Fonte: Marder; Jones, 2015

A estabilidade do Panteão foi uma grande preocupação dos construtores. Isso é demonstrado pelo anexo de estruturas comprimidas entre a rotunda e a basílica adjacente ao sul (fig. 2.33 e fig. 2.34). Paredes paralelas e abóbadas associadas delimitados em dois níveis, conhecidos coletivamente em italiano como *grottoni*. No eixo principal acima deles, um sólido arco de tijolos sustentava uma espécie de ponte que ligava a basílica à rotunda. Todo esse complexo constituiu, efetivamente, um contraforte gigantesco (MARDER; JONES, 2015).



Figura 2.33 – Rotunda vista do sul, acima dos *grottoni*
 Fonte: Waddell (apud MARDER; JONES, 2015)



Figura 2.34 – Rotunda, vista de costas
 Fonte: acervo do autor

Conforme apontam Marder e Jones, 2015, observam-se, na fig. 2.33, cicatrizes, evidentes no nível e acima das três aberturas visíveis no meio, que testemunham a presença de uma conexão perdida ou “ponte” com a basílica na parte traseira (sul) dos *grottoni*.

Em síntese, a idealização estrutural do Panteão (fig. 2.35) – rotunda, bloco de transição e pórtico (suas três partes principais) – fazem parte de uma concepção inicial única (MARDER; JONES, 2015).

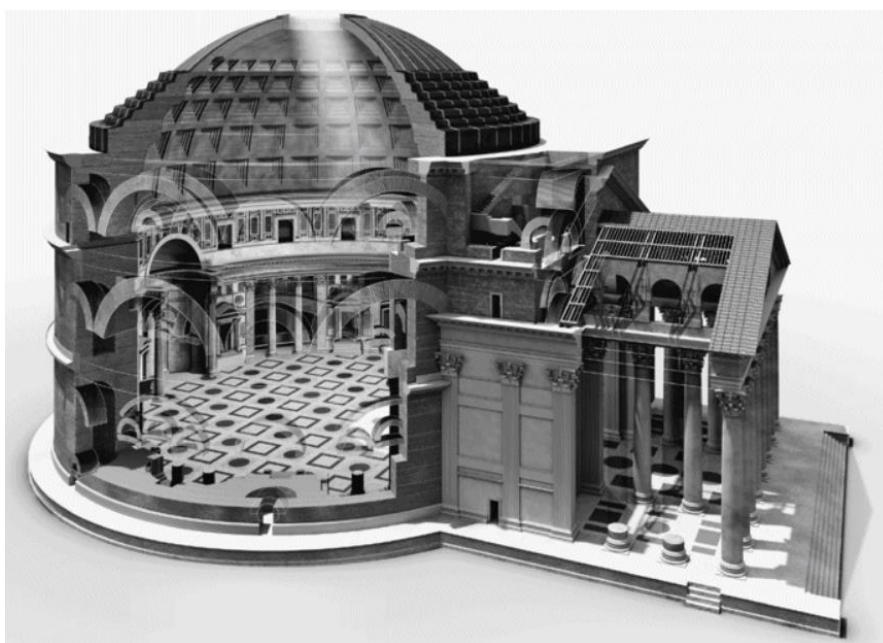


Figura 2.35 – Construção do Panteão (concepção de Jones e realização de Grover)
Fonte: Marder; Jones, 2015

2.5 ASPECTOS HISTÓRICOS

O nome latino *pantheum* é derivado do grego antigo *pantheion* (Πάνθειον), que significa “[templo] de todos os deuses” (ARCHEOROMA, 2020). Não por acaso, a construção do Panteão⁹ se deu durante um dos períodos de maior prosperidade do Império Romano (fig. 2.36 e fig. 2.37), o qual abrangeu cerca de 5 milhões de quilômetros quadrados (TAAGEPERA, 1979), atualmente repartidos por quarenta países (HOPKINS, 2009) em três continentes, sua população estimada em 55-60 milhões de habitantes (KELLY, 2006), o que contabilizava entre 1/6 e 1/4 da população mundial (HOPKINS, 2009), tornando essa a maior população de qualquer entidade política unificada do Ocidente até meados do século XIX (GOLDSMITH, 1984).

⁹Em língua portuguesa tanto o termo Panteão quanto Panteon são encontrados na literatura.



Figura 2.36 - Extensão máxima do Império Romano no ano 117 sob Trajano
 Fonte: Bennett, 1997



Figura 2.37 – Um vexillum com a aquila imperial e a sigla SPQR
 Fonte: Ancient Rome, 2020

Obs.: SPQR é a abreviatura de *Senātus Populusque Rōmānus* (O Senado e Povo Romanos), expressão referente ao governo da antiga República Romana, também usada durante o Império.

Segundo Addis (2009), desde os remotos tempos, a engenharia se desenvolveu sob o predomínio de um destes dois climas econômicos: guerra ou paz. Até meados do século XVIII, a palavra “engenheiro” se referia a um engenheiro militar, cujas atribuições incluíam o projeto e a execução de trincheiras, fortificações, edificações militares e produção de armas. Também davam soluções para se fornecer água e modificar o curso de rios. Porém, na maior parte do tempo, eles se voltavam para projetos militares. Nos períodos de paz, muitas vezes suas habilidades se dirigiam a outros projetos cívicos e religiosos. Por isso agradece-se à *Pax Romana* (os dois ou três séculos em que o Império Romano foi mais ou menos estável) pela quantidade de edificações cívicas da Roma Antiga. Várias obras tiveram a construção interrompida por muitos anos, durante os quais se reconstruíam fortificações e muralhas para

defesa das cidades contra ameaças¹⁰. A catedral de Florença – cúpula projetada por Brunelleschi – é uma delas. Grande parte dos projetistas de templos da Antiguidade, de catedrais medievais e de palácios do Renascimento aprendeu seu ofício quando da construção dessas fortificações e sobreviveu graças a isso. Vitruvius e os renascentistas Antonio da Sangallo, o Jovem, e Leonardo da Vinci são exemplos proeminentes.

MacDonald (1976) não cita uma data precisa, mas afirma que a construção do Panteão não começou antes de 117, tendo terminado, provavelmente, por volta de 126 a 128¹¹. E como vários monumentos antigos, afirma que seu arquiteto é desconhecido. Para Addis (2009), no entanto, é quase certo que Apolodoro de Damasco¹² tenha tido importante participação em seu projeto, já que foi um dos grandes construtores da época, autor de grandes projetos. Mas, para MacDonald (1976), tal como Justiniano está para Hagia Sophia ou Luís IV está para Versalhes, o Panteão está para o Imperador Adriano. Abaixo, esculturas de alguns nomes relacionados ao Panteão (Figura 2.38).



Figura 2.38 – (a) Augusto. (b) Apolodoro. (c) Adriano. (d) Trajano. (e) Agripa.

Fonte: (a) Domínio público. (b) Ma, 2009. (c) Amin, 2016. (d) Saint-Pol, 2007 (e) Nguyen, 2009.

¹⁰Conforme Isaacson (2017), não foi a primeira nem a última vez que gastos com defesa se tornaram prioritários sobre as despesas artísticas. Em 1489 Leonardo da Vinci iniciou um estudo para projetar o monumento equestre *Il cavalo* (o cavalo), uma gigantesca estátua de bronze encomendada pelo duque de Milão, Ludovico Sforza, em homenagem a seu pai, Francesco. Porém, em 1494 o duque se viu obrigado a cancelar o projeto quando as tropas do rei francês Carlos VIII assolaram a Itália, e o bronze reservado para moldar o cavalo foi usado para fazer três canhões pequenos. Mesmo assim os franceses conquistaram Milão com facilidade em 1499. Evento similar ocorreu também com o Panteão, conforme descrito mais à frente neste trabalho.

¹¹Segundo Addis (2009), começou em 118 e terminou em 126. Marder e Jones (2015) apontam que ele foi iniciado ainda no governo de Trajano e que foi finalizado por volta de 125-8.

¹²Ele foi um dos grandes engenheiros de estruturas de seu tempo, primeiramente como engenheiro militar e depois como engenheiro chefe de obras públicas (*praefectus fabrum*) para dois imperadores romanos, Trajano e Adriano. São associados a seu nome vários dos *grands projets* da época: Fórum de Trajano, Basílica de Trajano, Banhos Públicos de Trajano, Edifícios Públicos do Mercado de Trajano, Ponte de Trajano (sobre o Rio Danúbio), Coluna de Trajano, Panteão e Templo de Vênus e Roma (ADDIS, 2009).

Segundo MacDonald (1976), onde está localizado o atual Panteão, antes havia um santuário retangular, construído por Agripa, ministro do Imperador Augusto¹³, em aproximadamente 25 a.C. Seu arquiteto foi provavelmente Lucius Cocceius Auctus (ARCHEOROMA, 2020). Tal edifício, duas vezes incendiado¹⁴, foi inteiramente substituído por Adriano pela estrutura atual¹⁵ (fig. 2.39).

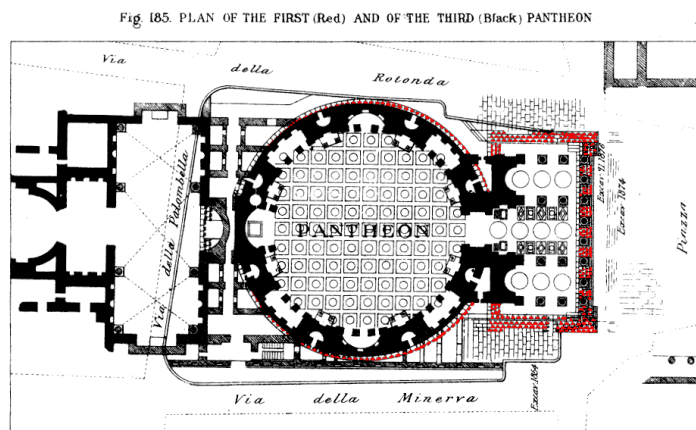


Figura 2.39 – Planta do primeiro (vermelho) e do terceiro (preto) Panteão
 Fonte: Lanciani (1897 apud MARDER; JONES, 2015)

Em conformidade com MacDonald (1976), destaca-se a omissão do nome de Adriano em algumas das inscrições imperiais em construções públicas ao redor do Império durante seu reinado (117-38), algo não muito comum em um imperador. Isso aconteceu também com o Panteão, ao manter a inscrição restaurada original, abreviada e em latim (fig. 2.40), para a nova construção:

M·AGRIPPA·L·F·COS·TERTIVM·FECIT

Ou “*M[arcus] Agrippa L[ucii] F[ilius] co[n]s[ul] tertium fecit*”. Em português: “Marco Agripa, filho de Lúcio, fez isto quando cônsul pela terceira vez”.

¹³Conforme Addis (2009), o primeiro imperador romano, Augusto, chegou ao poder após acontecimentos dramáticos que marcaram a história de Roma. Em 45 a.C., Júlio César (100-44 a.C.) foi eleito o primeiro (e último) *Dictator Perpetuus*; um ano depois, ele foi assassinado pelos senadores. Em meio a revolta e o caos, e após uma década e meia de governo compartilhado e disputado, em 27 a.C. o Senado romano conferiu ao sobrinho-neto e filho adotivo de César, Otávio (63 a.C.-14 d.C.), os títulos de *Augustus* (“o sublime”) e *Princeps* (“principal cidadão”). Com poder absoluto, lhe foi jurado um voto de lealdade como *Imperator* pelo Senado.

¹⁴Primeiro em 80 (restaurado pelo imperador Domiciano), e depois em 110, atingido por um raio e novamente assaltado pelas chamas; conforme Marder e Jones (2015).

¹⁵“No final da década de 1890, escavações foram feitas nas proximidades do Panteão para tentar, entre outras coisas, para aprender mais sobre a construção de Agripa. Por uma variedade de razões, os resultados, conforme publicado, foram bastante inconclusivos, mas parece provável que o edifício de Agripa era retangular, onde é agora o pórtico, mas de frente para o outro lado, ou seja, para o sul” (MACDONALD, 1976, p. 60). Entretanto, segundo Marder e Jones (2015), informações mais recentes sugerem que o edifício de Agripa era voltado para o norte como a estrutura atual. Vitruvius escreve sobre a orientação dos templos sagrados em *De architectura*, Livro IV, Capítulo V.



Figura 2.40 – Inscrição no Panteão
Fonte: acervo do autor

Segundo MacDonald (1976), essa inscrição ainda causa confusão quanto à data de construção do Panteão, e não é raro que digam que ele foi feito no tempo de Augusto. Porém, estudos dos selos do Panteão provam que seu material é do início do ano 120 (selos de Adriano), o que determina um *terminus post quem*, ou seja, ou não poderia ter sido da época de Augusto¹⁶. Pelos estudos mais recentes, principalmente consta em Marder e Jones (2015), a provável data de início de sua construção é algo em torno de 112-5, com término em torno de 123-8.

Ainda: examinando mais de perto, vê-se outro texto na arquitrave (fig. 2.41), logo abaixo da inscrição de Agripa, feita pelo imperador Septímio Severo e seu filho Caracala em 202. Observa-se que “restauraram cuidadosamente o Panteão, que foi danificado pelo tempo” (ARCHEOROMA, 2020):

PANTHEVM·VETVSTATE·CORRVPTVM·CVM·OMNI·CVLTV·RESTITVERVNT



Figura 2.41 – Inscrição de Severo e Caracala
Fonte: acervo do autor

¹⁶Só por volta de 1891-2 descobriu-se que o Panteão não era um edifício de Agripa. Escavações do jovem arquiteto francês Georges Chédanne revelaram traços de uma construção anterior debaixo do pórtico e um pavimento em mármore policromado por baixo rotunda; havia também os selos de tijolos do tempo de Adriano. Houve dúvidas, pois parece que apenas um dos 90 selos eram da época de Adriano. Então, fortes evidências sugerem que a construção do Panteão foi iniciada por Trajano (MARDER; JONES, 2015).

Ainda é possível ler: IMP·CAES·L·SEPTIMIUS·SE..., abreviação de *Imp Caesari Lucius Septimius Se...* (Imperador Lúcio Septímio Se...).

A propósito, MacDonald (1976) comenta que a transferência da capital do Império Romano para Constantinopla em 330 foi, de várias maneiras, um duro golpe para a cidade, com a criatividade arquitetônica indo para o leste e o norte do Império:

Os bem organizados escritórios imperiais de obras, que foram amplamente supridos com homens e dinheiro, praticamente deixaram de funcionar. No final do século, por volta de 398, o governo imperial ausente considerou necessário proibir, sob pena de exílio, barracas ou barracas de construção no outrora grandioso *Campus Martius*, o distrito plano na curva do Tibre onde está o Panteão. A dilapidação de edifícios grandes e pequenos, tanto pelo homem quanto pela natureza, juntamente com as inundações e a quase ausência de saneamento da cidade e outros serviços públicos, fizeram com que o nível do terreno ao redor do Panteão aumentasse gradualmente. Este foi um evento importante na transformação do aspecto e do efeito arquitetônico do edifício, tão importante quanto a perda de estruturas adjacentes. Por causa desse período na história de Roma, o Panteão parece ter se enraizado dentro do chão. De modo nenhum; o chão subiu e aumentou consideravelmente ao seu redor¹⁷ (MACDONALD, 1976, p. 18).



Figura 2.42 – Elevação do pavimento ao redor do Panteão
Fonte: acervo do autor

As figs. 2.43 e 2.44 mostram parte da área do *Campus Martius* (ou Campo de Marte), distinguindo o Panteão em seu contexto. A maquete da fig. 2.43 mostra parte do antigo CAMPVS MARTIVS (por volta de 300 d.C.), uma área pública com cerca de 2 km². Em cima e à direita está a Ilha Tiberina; à esquerda, indo pela Ponte Fabrício, há o Teatro de Marcelo; desce-se pelo Circo Flamínio e chega-se ao Templo de Marte; vai-se para a esquerda para chegar ao Teatro de Balbo. Descendo pelo Pórtico de Pompeu, alcança-se o Teatro de Pompeu e depois o Odeão de Domiciano e o Estádio de Domiciano. O Panteão está mais à baixo. Na

¹⁷Segundo Marder e Jones (2015), escavações realizadas na *Piazza della Rotonda* na frente do pórtico do Panteão em 1997-8 revelaram que o pavimento antigo estava em torno de dois metros abaixo do pavimento atual (fig. 2.42).

maquete da fig. 2.44 o Panteão está acima e à direita. Descendo, chega-se à *Piazza della Rotonda*; indo à esquerda há o Templo de Matídia e depois, o Templo de Adriano. Abaixo, vê-se a Coluna de Marco Aurélio e em seguida à direita, a Coluna de Antonino Pio.

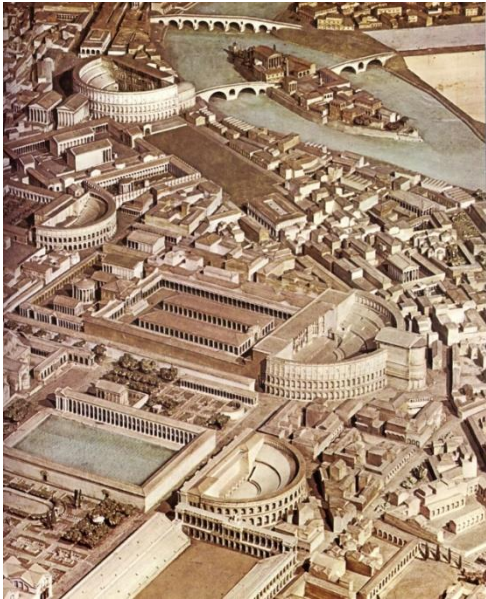


Figura 2.43 – Maquete do CAMPVS MARTIVS
Fonte: Domínio público



Figura 2.44 – Panteão no CAMPVS MARTIVS
Fonte: Cristiano64, 2014

Segundo MacDonald (1976), por volta do ano 609, nas profundezas da Idade das Trevas, o imperador bizantino Focas (já em Constantinopla) deu permissão ao Papa Bonifácio IV para consagrar o Panteão como igreja católica, Sancta Maria ad Martyres (fig. 2.45). O Papa Urbano VIII também teve papel importante na história do Panteão, ao remover quase 200 toneladas de bronze do telhado do pórtico (fig. 2.46)¹⁸. O metal foi usado principalmente para a fabricação de 80 canhões para o Castelo Sant'Angelo (também túmulo de Adriano). O Papa disse ser melhor usá-los para defender a Santa Sé do que para manter a chuva fora do pórtico do Panteão. No início do século XVII, torres gêmeas (fig. 2.47) foram erguidas nas extremidades do pórtico de entrada, numa provável obra de Carlo Maderno (ou talvez de Gianlorenzo Bernini); elas foram desmontadas em 1880. O Panteão é, de longe, o mais bem preservado de todos os monumentais edifícios romanos. A última grande reforma do edifício aconteceu em 1929-34¹⁹.

¹⁸ Isso gerou a famosa sátira italiana, com referência ao nome da família Barberini, e os bárbaros do passado: *quod non fecerunt barbari fecerunt barberini* (o que os bárbaros falharam em fazer, os pequenos barberini fizeram).

¹⁹ Reformas menores continuaram. O pavimento da rotunda foi reformado em 1872 e mais vezes até 1990; de 1960 a 1970, melhorou-se a drenagem da cobertura. Outros esforços impressionantes de preservação começaram a partir de 1992 com a direção de Mario Lollo Ghetti (MARDER; JONES, 2015).



Figura 2.45 – Igreja Sancta Maria ad Martyres
Fonte: acervo do autor



Figura 2.46 – Teto de madeira no pórtico do Panteão
Fonte: Albuquerque, 2015

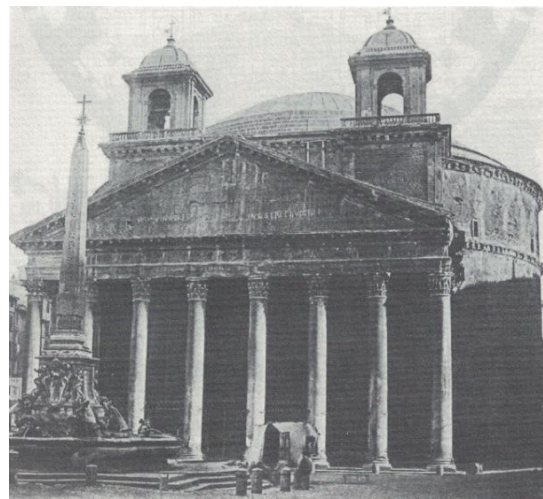


Figura 2.47- Torres do século XVII, retiradas em 1880
Fonte: Macdonald, 1976

Originalmente, havia um pátio de entrada em frente ao Panteão (fig. 2.48). Era uma quadra de sentido alongado, pavimentada e emoldurada por colunatas. Com o passar do tempo, desapareceram as colunatas, o solo aumentou seu nível consideravelmente e surgiram edifícios em grande área do antigo pátio. A partir do século XVI, o espaço aberto na frente do Panteão foi, aos poucos, conduzido ao estado em que se encontra atualmente. Em alguma época, “o extremo leste do pórtico (à esquerda, de frente para o prédio, que fica quase exatamente norte-sul) havia caído e foi restaurado à Época de Urbano VIII, na década de 1620, e Alexandre VII, na década de 1660” (MACDONALD, 1976, p. 19).

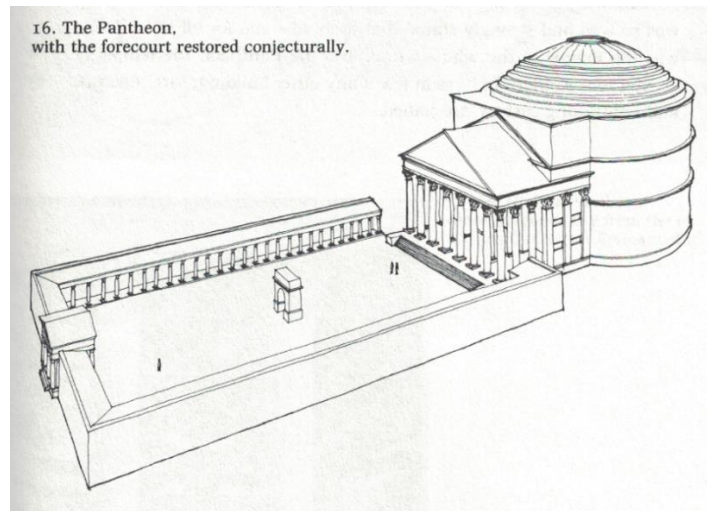


Figura 2.48 – Pátio em frente ao Panteão
Fonte: Macdonald, 1976

A fonte na *Piazza della Rotonda*, *Fontana del Pantheon*, em frente ao Panteão, foi feita em cerca de 1575 por Giacomo della Porta. E o chamado Obelisco *Macuteo* foi acrescentado à fonte em 1710-1 por Filippo Barigioni, obedecendo à ordem do Papa Clemente XI.

Restos mortais de importantes italianos estão sepultados no Panteão. MacDonald (1976) afirma que, em 1520, o mestre renascentista Rafael foi enterrado (fig. 2.49) na posição 6 do templo. O túmulo de Victor Emmanuel II (fig. 2.50), o primeiro rei da Itália, morto em 1878, foi colocado no grande nicho oeste na posição 13, e o de Umberto I (fig. 2.51), assassinado em 1900, na posição número 5. Impressionado com o Panteão, o mestre renascentista Michelangelo chegou a dizer: “*Un disegno angelico e non umano*”. Em português: “Uma obra realizada por anjos e não seres humanos”.



Figura 2.49 – Rafael
Fonte: acervo do autor



Figura 2.50 – Victor Emmanuel II
Fonte: acervo do autor



Figura 2.51 – Umberto I
Fonte: acervo do autor

Segundo MacDonald (1976), atrás do pórtico do Panteão, há uma inscrição de 1632, colocada pelo Papa Urbano VIII:

PANTHEON AEDIFICIVM TOTO TERRARVM ORBE CELEBERRIVM

Em português: “O Panteão, a construção mais célebre do mundo”.

Por fim, apresentam-se simulações de como seria o Panteão quando ainda era um templo pagão e uma visão noturna (fig. 2.52 e 2.53).



Figura 2.52 – Simulação do Panteão em sua época pagã
Fonte: IDIA Lab, 2020



Figura 2.53 – Simulação no interior do Panteão (noturno)
Fonte: IDIA Lab, 2020

2.6 SIMBOLOGIA

O significado da cúpula foi bastante analisado por historiadores da arquitetura. Segundo Macdonald (1976, p. 68, 69), a relação entre círculo e quadrado sempre foi importante em projetos arquitetônicos romanos. A rotunda, e.g., se baseia nessa relação da seguinte forma: “a cúpula sobe de uma altura, de modo que na seção vertical a rotunda é composta por metade de um círculo inscrito na metade superior de um quadrado” (fig. 2.54), ou, “o raio da cúpula é o mesmo que a altura interna do cilindro”. Em três dimensões, “a evolução teórica das superfícies interiores da rotunda é a metade de uma esfera – a cúpula – e um cilindro – parede vertical interna abaixo – todos inscritos e tangentes às superfícies de um cubo anexo.” Se o cubo teórico for cortado no sentido horizontal no exato meio, o plano produzido é o ponto no qual a cúpula brota. Vitruvius investigou “as proporções na arquitetura e na figura humana, e suas relações simpáticas”, algo semelhante aos termos circulares e quadrados. O desenho de Leonardo da Vinci sobre essa suposição é muito conhecido (fig. 2.55) e sugere reciprocidade entre o círculo e o quadrado, além do alcance e do “envelope espacial teórico de uma figura humana idealizada”. Os conceitos sugeridos aparecem ampliados no Panteão, onde “a varredura dos membros da figura vitruviana é expandida para dimensões colossais.” A simpatia proposta entre a forma abobadada romana e o espaço potencial da figura humana talvez seja uma das chaves para se dimensionar a vida longa dessa arquitetura e a sua influência contínua.

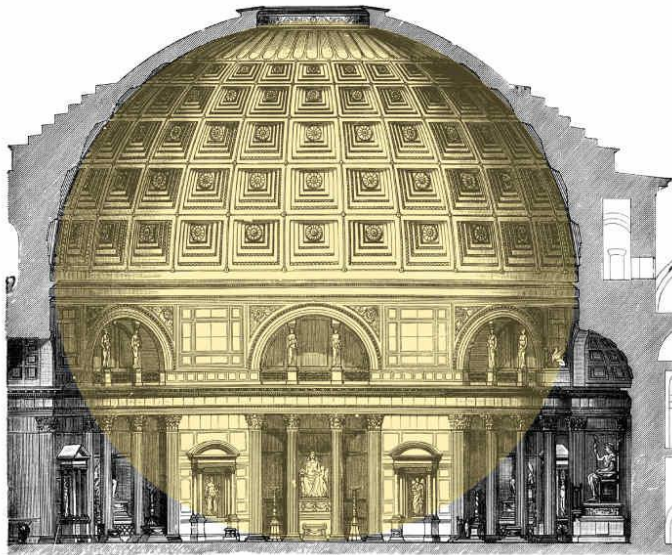


Figura 2.54 – Um globo dentro do Panteão
 Fonte: Wanted in Rome, 2020

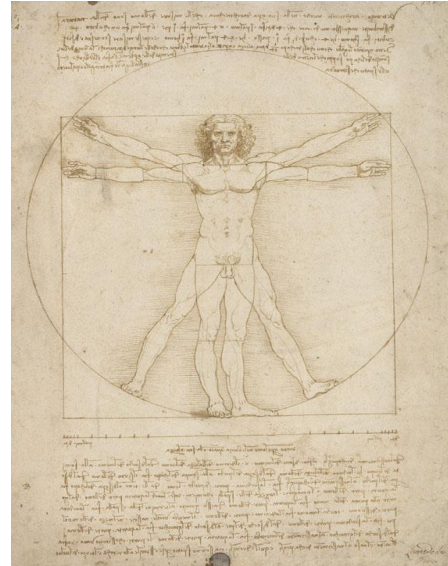


Figura 2.55 - O homem vitruviano, de da Vinci
 Fonte: Gallerie Accademia, 2020

O império era imenso, vigiado por todos os deuses, e o sistema imperial reivindicava, se não perfeição, sucesso e permanência. Ordem e sistema eram sinônimos, e o mais ordenado das formas geométricas e, portanto, arquitetônicas, é o círculo. É sem cantos e sem costuras, e não tem começo nem fim. Mantém a continuidade e, quando elevado em forma a uma grande altura e abobadado, sugere uma segurança inclusiva. Em um sentido muito real, a rotunda do Panteão é uma metáfora da arquitetura para as pretensões ecumênicas do Império Romano, o cinturão de cornijas é uma declaração em forma arquitetônica da fronteira de nove milhas que cercou o mundo greco-romano posterior, o mundo que o governo romano, na melhor das hipóteses, considerou ser o mordomo. A rotunda do Panteão, sua entrada modificada ao passar pelas formas arquitetônicas tradicionais daquele mundo, revelou um grande símbolo do domínio de Roma em uma experiência visual marcante (MACDONALD, 1976, p. 88).

Embora o projeto do Panteão seja bastante aparente, ninguém jamais foi capaz de descobrir exatamente o que a estrutura deveria significar. Em certo sentido, entretanto, o fato de que o Panteão parece para sempre condenado a estar envolto em mistério serve apenas para realçar sua beleza cativante (CHARLES RIVER EDITORS, 2020).

2.7 COMPARAÇÃO COM OUTROS MONUMENTOS

Segundo MacDonald (1976), o Panteão (como um todo) nunca foi duplicado ou copiado em nenhuma escala. Porém, vários edifícios tiveram, em maior ou menor grau, inspiração em sua arquitetura. Na tabela 2.1 a seguir é apresentada uma comparação entre cúpula do Panteão e a de algumas construções da Roma Antiga que tenham um *oculus* semelhante:

Tabela 2.1 – Comparação entre monumentos da Roma Antiga com cúpula e *oculus*

Monumento	Localização	Data de construção	Diâmetro da cúpula (m)	Diâmetro do <i>oculus</i> (m)
Panteão	Roma	Iníc. séc. II d.C.	43,50	8,95
Termas de Diocleciano (<i>Hall Octagonal</i>)	Roma	Iníc. séc. IV d.C.	21,65	4,20
Templo de Mercúrio	Baiae	Final séc. I a.C.	21,55	3,65
Termas de Diocleciano (<i>Tepidarium</i>)	Roma	Iníc. séc. IV d.C.	19,30	3,68
Templo do Divino Rômulo	Fórum Romano	Iníc. séc. IV d.C.	14,70	3,70
Casa Dourada (<i>Domus Aurea</i>)	Roma	Iníc. séc. I d.C.	13,48	5,99
<i>Tempio della Tosse</i>	Tivoli	Iníc. séc. IV d.C.	12,30	2,13

Fonte: Archeoroma, 2020 (adaptado)

Os Banhos de Caracala (fig. 2.56) tinham um gigantesco *caldarium*²⁰ (ou *cella solearis*), de planta baixa circular e coberto por uma cúpula de concreto, réplica quase fiel à do Panteão, mas com largura cerca de 8 metros menor (ou seja, um diâmetro de aproximadamente 35 metros). O edifício foi construído a apenas algumas centenas de metros dos Banhos de Trajano (e cerca de 100 anos após os projetados por Apolodoro) e eram praticamente uma cópia deste. Eram três recintos principais aquecidos, as *thermae*, e cerca de outros 50 espaços menores, com vestiários, salas para jogos com bola e outros esportes, salas de ginástica, massagistas, cabeleireiros, auditórios, bibliotecas e lojas. Numa era com poucas instalações ou espaço para se lavar em casa, os banhos públicos (*balnea*) eram corriqueiros na vida urbana. Eles se tornaram possíveis graças a um sistema de calefação, que fornecia grandes quantidades de água e de ar quentes, com enormes caldeiras a lenha e um hipocausto (que possuía em seu núcleo o *praeformum*, ou fornalha, constantemente alimentado) (ADDIS, 2009).

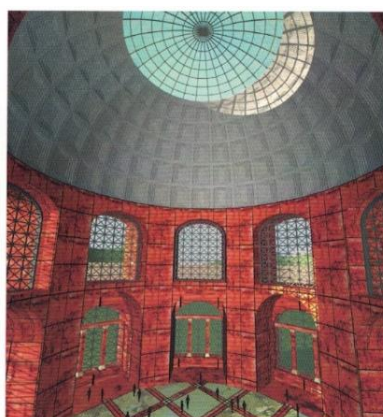


Figura 2.56 – Banhos de Caracala
Fonte: Addis, 2009

²⁰*Caldarium*: recinto para banho quente; *tepidarium*: recinto para banho morno; *frigidarium*: recinto para banho frio; *natatio*: piscina ao ar livre; *laconium*: sala de transpiração (ancestral romano da sauna) (ADDIS, 2009).

Na tabela 2.2, há comparações da cúpula do Panteão com outras consideradas expoentes de construções com cobertura em cúpula.

Tabela 2.2 – Comparação entre monumentos

Monumento	Diâmetro da Cúpula (m)	Data (d.C.)	Tempo (anos)	Material
Panteão (Roma)	43,30	118-125	7	Concreto
S. Sofia (Istambul)	32,60	532-567	5	Concreto
S. Pedro (Roma)	42,00	1400-1564	50	Pedra
Catedral Florença	42,20	1420-1434	14	Pedra
S. Paulo (Londres)	30,80	1675-1710	35	Pedra
Panteão (Paris)	21,00	1755-1792	37	Pedra

Fonte: Isaia, 2011

A seguir são listadas algumas edificações que tiveram inspiração – no mínimo em parte – no Panteão, começando na Europa: Villa Almerico Capra detta La Rotonda, construída em Vicenza, região de Vêneto no século XVI por Andrea Palladio (fig. 2.57); Collegiata di Santa Maria Assunta in Cielo, Arícia, região do Lácio, província de Roma, século XVII por Gianloranzo Bernini (fig. 2.58) (ALBUQUERQUE, 2015); Igreja de San Simeone Piccolo, em Veneza, primeira metade do século XVIII por Giovanni Antonio Scalfarotto (fig. 2.59). Em 1750, Frederico, o Grande, mandou construir em Berlim a Catedral de Santa Edwiges, com a forma de um Panteão (fig. 2.60). Templo Canoviano, construído em Possagno em 1819-33 por Antonio Canova (fig. 2.61); Igreja de Gran Madre di Dio, construída em Turim em 1818-31 por Ferdinando Bonsignore (fig. 2.62); Igreja de San Francesco di Paola, construída em Nápoles em 1817-46 por Pietro Bianchi (fig. 2.63); Igreja de San Carlo al Corso, construída em Milão em 1836-46 por Carlo Amati (fig. 2.64); Basílica da Assunção de Nossa Senhora, ou Rotunda de Mosta, construída em 1833-60 em Mosta, ilha de Malta por Giorgio Grognet de Vassé (fig.2.65) ; Chiesa della Divina Sapienza, construída em Roma em meados do século XX por Marcello Piacentini (fig.2.66) (MACDONALD, 1976).



Figura 2.57 – Villa Almerico Capra detta La Rotonda
Fonte: Vighetto, 2006



Figura 2.58 – Colegiatta di Santa Maria Assunta in Cielo
Fonte: Pio, 2009



Figura 2.59 – Igreja de San Simeone Piccolo
Fonte: Descouens, 2012

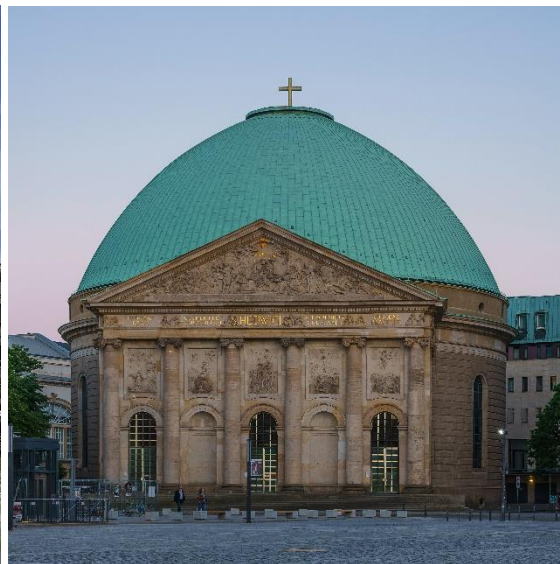


Figura 2.60 – Catedral de Santa Edwiges
Fonte: Savin, 2018



Figura 2.61 – Templo Canoviano
Fonte: Furio Imperiale, 2007



Figura 2.62 – Igreja de Gran Madre di Dio
Fonte: Mark, 2008



Figura 2.63 – Igreja de San Francesco di Paolo
Fonte: MM, 2007



Figura 2.64 – Igreja de San Carlo al Corso
Fonte: Arbalete, 2010



Figura 2.65 – Basílica da Assunção de Nossa Senhora
Fonte: Vincentz, 2014



Figura 2.66 – Chiesa della Divina Sapienza
Fonte: Pizza, 2019

Adolf Hitler tinha um fascínio de longa data pelo Panteão, o qual ele adaptou de forma modificada em seu projeto para uma gigantesca Grosse Halle (Grande Salão)²¹ que pretendia construir em um local importante em Berlim. Posteriormente, auxiliado no projeto do Grosse Halle por seu arquiteto oficial Albert Speer, que desenvolveu ainda mais os esboços anteriores de Hitler da década de 1920, Hitler imaginou um edifício tão grande que acomodaria uma multidão de 150.000 a 180.000 pessoas (figs. 2.67 e 2.68). [...] o Grande Salão, para tomar emprestada uma frase do próprio Speer, estava realmente em uma escala "megalomaniaca" (MARDER; JONES, 2015, p. 419).

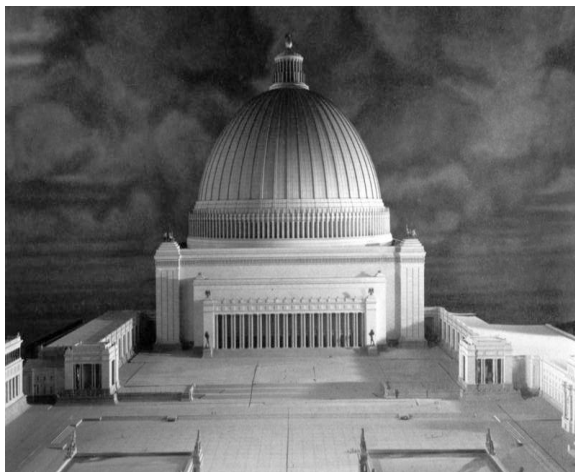


Figura 2.67 – Maquete do Große Halle
Fonte: autor desconhecido



Figura 2.68 – Comparação: Panteão (abaixo) e Große Halle
Fonte: Montagem do autor (MetaballStudios, 2020 e Hashime, 2020)

²¹Também chamado de Volkshalle (Salão do Povo) ou Ruhmeshalle (Salão da Glória).

A cúpula projetada teria um diâmetro de 250 metros e se elevaria a uma altura de 290 metros. Naturalmente, com a derrota alemã na Segunda Guerra Mundial e o fim do Terceiro Reich, o Große Halle nunca foi construído.

Abaixo, outras obras também inspiradas no Panteão, agora nos Estados Unidos: a rotunda (figs. 2.69 e 2.70) projetada por Thomas Jefferson (o 3º Presidente dos EUA), um grande entusiasta de arquitetura; o Monticello (fig. 2.71), construído em Charlottesville, Virgínia, propriedade de Thomas Jefferson e projetado por ele. Hoje é Patrimônio Mundial da Humanidade e, inclusive, figura no verso da nota de 2 dólares americanos (fig. 2.72); Jefferson Memorial (figs. 2.73 e 2.74), em Washington, D.C; o Grande Domo do MIT (fig.2.75), em Cambridge, Massachusetts.



Figura 2.69 – Rotunda projetada por Jefferson
Fonte: Terren in Virginia, 2007

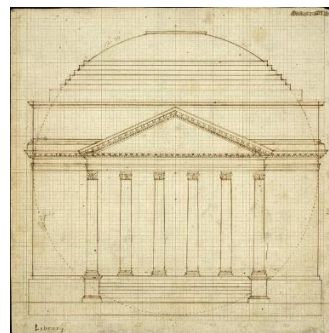


Figura 2.70 – Desenho de Thomas Jefferson
Fonte: Jefferson, 1818/1819



Figura 2.71 – Monticello
Fonte: Kozlowski, 2005



Figura 2.72 – Dólar frente e verso
Fonte: National Numismatic Collection at the Smithsonian Institution, 2013



Figura 2.73 – Jefferson Memorial
Fonte: Ravi, 2011



Figura 2.74 – Estátua de Thomas Jefferson
Fonte: Graysick, 2013

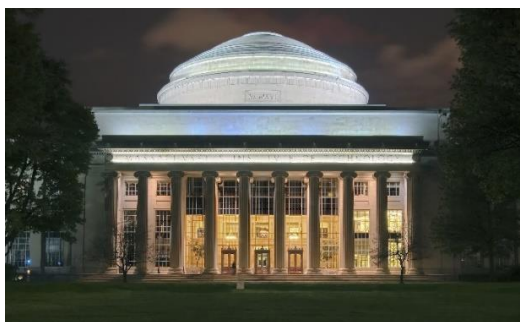


Figura 2.75 - Grande Domo do MIT
Fonte: Fcb981, 2020

Encontra-se na literatura uma certa inconsistência para considerar por quanto tempo a cúpula do Panteão permaneceu como a maior do mundo. Se foi até 1436, com o recorde perdido para a Santa Maria del Fiore (fig. 2.76), de Filippo Brunelleschi, ou até 1871, com o recorde perdido para o Royal Albert Hall (fig. 2.77).



Figura 2.76 – Santa Maria del Fiore
Fonte: Addis, 2009



Figura 2.77 – Royal Albert Hall
Fonte: Diliff, 2012

Tal inconsistência provavelmente se deve ao fato de o tambor sobre o qual a cúpula de Brunelleschi é apoiada ter uma forma octogonal e não circular. Segundo o *Public Broadcasting Service* (2014, apud POZZA 2015), esse tambor não é regular (seus lados não possuem as mesmas dimensões, nem seus ângulos internos) e seu maior diâmetro mede cerca de 45,72 m. Porém, um outro diâmetro considerado é de cerca de 42,20 m (ISAIA, 2011). Portanto, é justo considerar que a cúpula do Panteão permaneceu como a maior do mundo por cerca de 13 séculos (de 128 a 1436). Em 1871, em Londres, o Royal Albert Hall superou ambas as marcas com sua cúpula elíptica de diâmetros de cerca de 54,76 m e 64,82 m (ROYAL ALBERT HALL, 2012).

2.8 NOÇÕES ESTRUTURAIS BÁSICAS

Salvadori (2011, p. 202-3) se refere à distinção entre superfícies desenvolvíveis e superfícies não-desenvolvíveis. Cita o exemplo: caso se curve uma folha de papel em forma de semicilindro e depois, soltá-la, ela voltará a sua forma achatada por si mesma (fig. 2.78). Diz-se, assim, que se trata de *superfície desenvolvível*. Porém, se se cortar uma bola de borracha ao meio, restando um domo semiesférico, ele não se achata por si só se colocado em uma superfície plana, mas também não fica plano se for pressionado contra ela. Somente vai se achatar se for feito um número grande de cortes radiais ou, se for muito delgado, ele puder ser *esticado* na superfície plana (fig. 2.78). Domos “são *superfícies não-desenvolvíveis, não-achatáveis*.” E por serem de difícil achatamento, são bem mais rígidas que as superfícies desenvolvíveis.

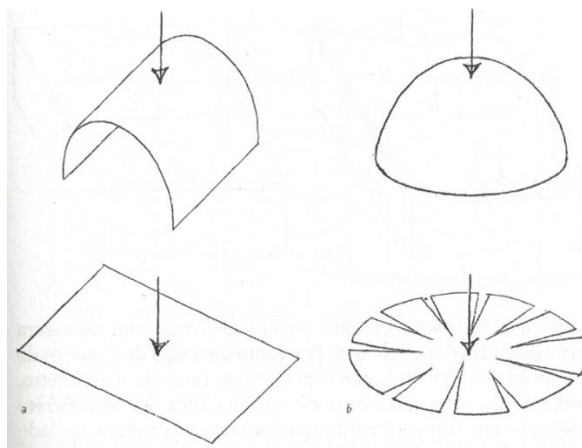


Figura 2.78 – Superfícies desenvolvíveis e não-desenvolvíveis
Fonte: Salvadori, 2011

Há estruturas – como lajes planas e vigas – cuja rigidez se deve principalmente à espessura: se muito delgadas, tornam-se muito flexíveis, conforme Salvadori, que esclarece:

Uma das maravilhas do comportamento estrutural é que a rigidez e a resistência de elementos semelhantes a placas ou folhas podem ser obtidas não apenas aumentando a sua espessura e, portanto, a quantidade de material necessário, mas também pelo uso de formas curvas. Algumas das maiores e mais instigantes coberturas devem sua resistência exclusivamente à forma. É por isso que são chamadas de *estruturas de resistência produzida pela forma* (SALVADORI, 2011, p. 206).

Continuando de forma didática e intuitiva, Salvadori (2011, p. 206-8) faz uso de exemplos simples para explicar o comportamento estrutural de elementos curvos. Segundo explica (fig. 2.79), quando uma pessoa segura uma folha de papel por um de seus lados menores, o papel não suporta nem o seu peso próprio: a folha cai. Mas se o papel for ligeiramente curvado para cima, do lado segurado, a folha fica mais rígida e pode suportar (tal uma viga em balanço) seu peso próprio e até um peso pequeno adicional (como uma caneta). A folha de papel não foi

reforçada para receber o pequeno peso, mas só curvada para cima. A curvatura proporcionou à folha de papel uma rigidez e resistência.

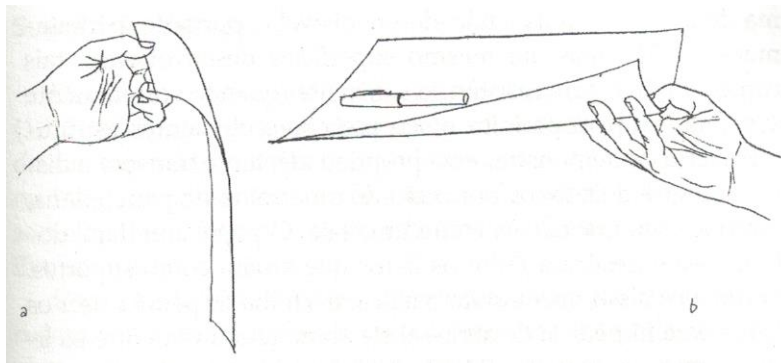


Figura 2.79 – Folha de papel enrijecida pela curvatura
Fonte: Salvadori, 2011

Esse interessante comportamento da folha de papel pode ser explicado através conceito de *momento de inércia*. Conforme Hibbeler (2010), a expressão do momento de inércia I de uma área A é dada por

$$I = \int y^2 dA, \quad (2.1)$$

em que A é a área da seção transversal da estrutura e y é a distância de um ponto arbitrário até o centroide da estrutura em seu eixo vertical. Então, com a curvatura feita na folha de papel, mantêm-se A constante na eq. 2.1 e y sofre um aumento, aumentando também o momento de inércia I . E conforme Süsskind (1980), temos a seguinte equação:

$$d\Phi = \frac{M ds}{EI}, \quad (2.2)$$

em que $d\Phi$ é a rotação relativa de duas seções distantes de ds , devida momento ao momento M aplicado (E sendo o módulo de elasticidade longitudinal do material). Portanto, mantendo as demais propriedades constantes, com um aumento de I , há uma diminuição de $d\Phi$, o que explica o comportamento da folha de papel.

Segundo Salvadori (2011), foi o matemático Carl Friedrich Gauss que descobriu, em meio a uma infinita variedade, todos os tipos de superfícies curvas que se pode imaginar e que incluem apenas três categorias: superfícies similares a domos, similares a selas e similares a cilindros.

Aqui será visto apenas as superfícies similares a domos: corte-o verticalmente pela metade com uma faca. O corte toma uma forma curvada para baixo. Se for cortado pela metade em qualquer direção, todos os pedaços tomam uma forma curva para baixo (fig. 2.80). “Uma

superfície em forma de domo é curva para baixo em todas as suas direções radiais. [...] Os domos e coberturas suspensas, com curvaturas sempre na mesma direção (para baixo ou para cima), constituem a primeira das categorias de Gauss.” São as chamadas superfícies não-desenvolvíveis e são usadas, há séculos, para cobrir grandes áreas (SALVADORI, 2011, p. 209-10).

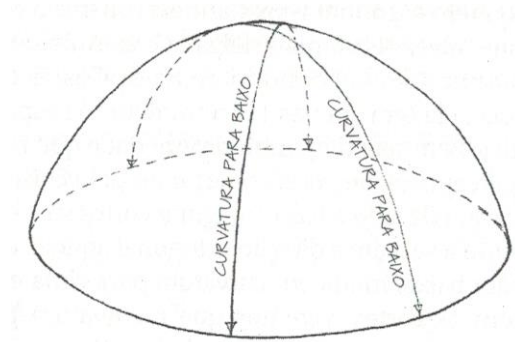


Figura 2.80 – Cortes verticais num domo
Fonte: Salvadori, 2011

Dessa forma, é possível fazer a classificação de cascas segundo a Curvatura de Gauss ($K = 1/R_1R_2$), conforme mostra Solheiro (2017):

- Para superfícies semelhantes a domos (curvatura dupla sinclástica): $K > 0$;
- Para superfícies semelhantes a cilindros (curvatura simples): $K = 0$;
- Para superfícies semelhantes a selas (curvatura dupla anticlástica): $K < 0$.

2.9 HISTÓRICO DO ESTUDO DO ARCO & SUA RELAÇÃO COM A CÚPULA

De acordo com Kurrer (2008), a importância da disciplina de história da teoria das estruturas para a engenharia civil reside em seu potencial como instrumental em quatro frentes distintas: uma científica, interna à teoria das estruturas, na verificação da consistência interna de novas teorias, por meio da reflexão sobre sua gênese e objeto; uma prática, no campo da engenharia, como fonte de um conhecimento necessário à preservação do patrimônio histórico, e também capaz de contribuir com a evolução dos processos de construção modernos; uma cultural, na democratização do conhecimento da engenharia, uma vez que pode ajudar a tornar a teoria das estruturas mais acessível ao público leigo; e, finalmente, uma frente didática, na tarefa de superar o “formulismo” no aprendizado da teoria das estruturas (NUNES, 2009, p. 4).

Em uma visão geral sobre o arco, Nunes (2009), com base em vários autores, descreve: o arco estrutural tem sua origem no Egito Antigo, notadamente com as abóbadas de berço datadas de 3500 a.C.; o arco, “quaisquer que sejam suas variações estilísticas, foi a base da arquitetura européia”.

Segundo Gago (2004), poucos documentos com registros das metodologias de dimensionamento e das técnicas construtivas utilizadas na Antiguidade chegaram até os dias atuais. Do período anterior ao Império Romano, nenhum documento que se possa considerar um tratado de construção sobreviveu. O primeiro tratado de construção que se conhece é o manual *De Architectura*, do engenheiro militar romano Vitrúvio, escrito no século I a.C., início da era imperial romana. Também o tratado de Plínio (23-70 d.C.) e o tratado militar de Vegécio (385-400 d.C.), onde se encontram capítulos relativos às técnicas construtivas romanas. Tais documentos, principalmente o tratado de Vitruvius, foram essenciais para a divulgação e a perpetuação da arquitetura romana e das suas técnicas construtivas.

De acordo com Rua (1998 apud GAGO 2004), no tratado de Vitruvius não há quaisquer regras de dimensionamento relacionadas com arcos, abóbadas ou cúpulas. Com relação ao dimensionamento estrutural, apenas no capítulo XI do livro VI se aborda a necessidade de aplicar regras de proporção adequadas como garantia da estabilidade. O dimensionamento era baseado em regras de proporção geométrica e, quando bem sucedido, reproduzidos em escala através do império.

Addis (2009, p. 149) refere que um dos primeiros livros sobre esse tema foi escrito pelo francês Philibert de l'Orme (c. 1510-70), com *Nouvelles Inventions pour bien bastir et a petits fraiz* (Novos Métodos de Construir Bem e a Baixo Custo) (1561). O livro é aplicado principalmente “em questões práticas de edificação, incluindo uma ideia que ele desenvolvera para construir arcos grandes de madeira unindo várias tábuas curtas – um processo que lembra a madeira laminada que conhecemos hoje (sem cola)”.

Gago (2004) citou a necessidade de se identificar um sistema geométrico que regesse as proporções do interior das igrejas e a metodologia de dimensionamento, baseada em relações entre as principais dimensões dos elementos construtivos, era aceita por diversos mestres, havendo apenas divergência na quantificação das proporções a se adotar. Alguns autores registaram essas regras, com destaque para as regras de Rodrigo Gil de Hontañón (c. 1500-77).

Addis (2009, p. 150) explica que, na Espanha, o projetista de catedrais Rodrigo Gil de Hontañón estava preocupado com a coleta e a racionalização de regras de projeto. Em seu livro *Compendio de Arquitectura y Symetría de los Templos* (Compêndio da Arquitetura e Simetria de Templos) ele dá orientações que “abranjem a planta e a elevação de uma catedral, mas são mais interessantes ao tratar de arcos e abóbadas”. Ele afirma: “Tentei com frequência estabelecer o tamanho da imposta para qualquer tamanho de arco determinado, e nunca encontrei uma regra que fosse adequada para mim” (HUERTA, 2004 apud ADDIS, 2009, p. 152). Gil também discute sete procedimentos para de projeto para determinar as dimensões de

pilastras e contrafortes em relação a paredes ou arcos: quatro fórmulas aritméticas e três métodos geométricos (fig. 2.81 e 2.82).

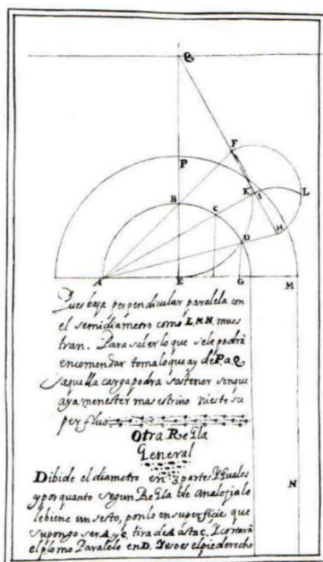


Figura 2.81 – Procedimento de Gil de Hontañón
Fonte: Addis, 2009

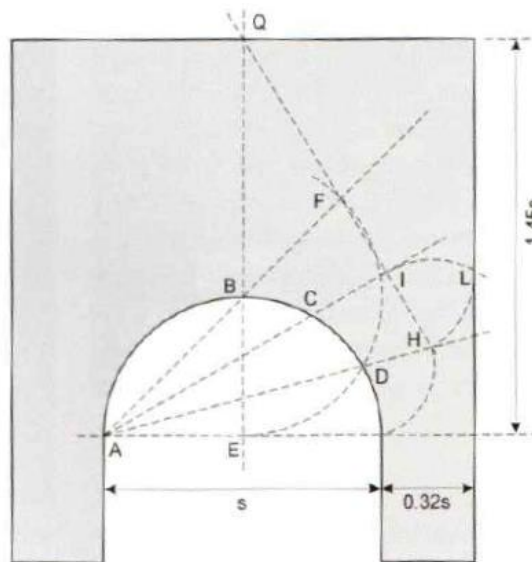


Figura 2.82: Outros procedimentos
Fonte: Addis, 2009

O interesse crescente pela arquitetura da Antiguidade levou ao nascimento da arquitetura renascentista. Cópias e traduções dos livros da Antiguidade foram “redescobertas”. Com o advento da imprensa, foram impressas traduções dos textos de Vitrúvio, Plínio, Vegécio, Euclides e Arquimedes e, posteriormente, diversos tratados dedicados à arquitetura, geometria, perspectiva, desenho, estereotomia²² e mecânica, ampliando enormemente a divulgação do conhecimento. Desse modo, começaram a ser lançadas as bases das várias ciências relacionadas à construção, que viriam a transformar a profissão do engenheiro numa atividade com uma componente teórica, em oposição cada vez maior ao da profissão de mestre construtor do período medieval (GAGO, 2004).

Leonardo da Vinci desenvolveu os primeiros estudos das bases da resistência dos materiais, os quais estiveram perdidos até ao século XIX. Em seus manuscritos, é provável que a força, caracterizada pela sua intensidade, direção e sentido, seja definida pela primeira vez; também estuda o equilíbrio de duas forças inclinadas e, pela primeira vez, aparece a regra do paralelogramo para a adição de forças (fig. 2.83). Os primeiros estudos sobre o comportamento mecânico dos arcos de que se tem conhecimento são também de Leonardo da Vinci, e constam

²²Desenvolvida arte do final do século XVI. “Processo envolvia calcular cuidadosamente a geometria de pedras complexas e não-uniformes e fazer desenhos delas de modo que os pedreiros pudessem trabalhar em muitas pedras simultaneamente e as pedras pudessem ser assentadas assim que fossem necessárias” (ADDIS, 2009, p. 153).

de um conjunto de ensaios experimentais (fig. 2.84). Neles, da Vinci fornece ideias que só viriam a ser desenvolvidas séculos mais tarde (GAGO, 2004).

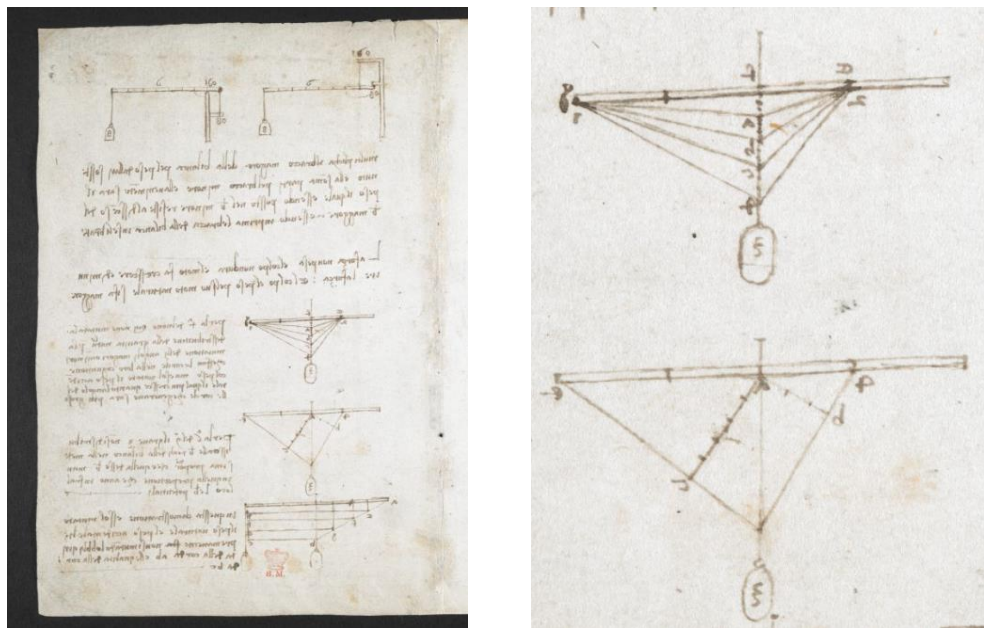


Figura 2.83 – (a) Página do Codex Arundel. (b) Detalhe do paralelogramo de forças.
Fonte: British Library, 2020

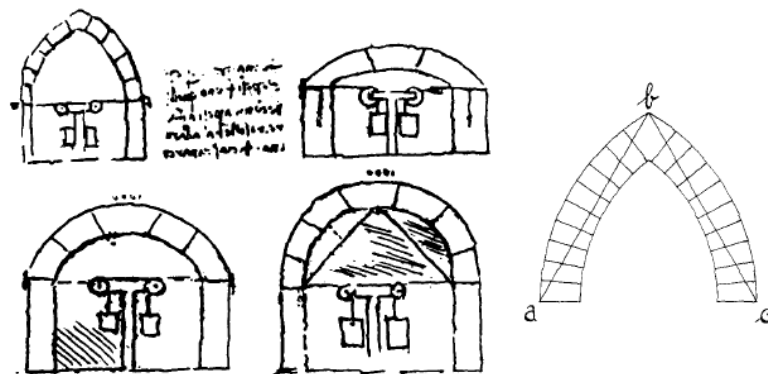


Figura 2.84 – Estudos sobre arcos e regra para a verificação da estabilidade de arcos
Fonte: Gago, 2004

Conforme consta em Isaacson (2017), Leonardo da Vinci foi um polímata cujos trabalhos, além é claro da arte com o desenho e a pintura, destacam-se: anatomia, engenharia hidráulica, óptica, mecânica, topografia, fortificações, armamentos, engenharia militar e botânica. Para Addis (2009, p. 145), ele foi o “primeiro engenheiro projetista identificado, no sentido em que usamos essa designação profissional hoje”.

Leonardo promoveu um esquema para um canal de Florença (fig. 2.85) em direção ao mar, já que o Arno não é navegável através de corredeiras a oeste da cidade. O desenho vigoroso a seguir mostra sua proposta para a rota da água: ao norte de Florença (à direita), via Prato e Pistoia, depois através de um corte profundo em uma passagem de montanha, voltando ao Arno,

perto de Pisa. Não há evidências de que seus planos tenham sido seriamente considerados pelo governo florentino (ROYAL COLLECTION TRUST, 2018).

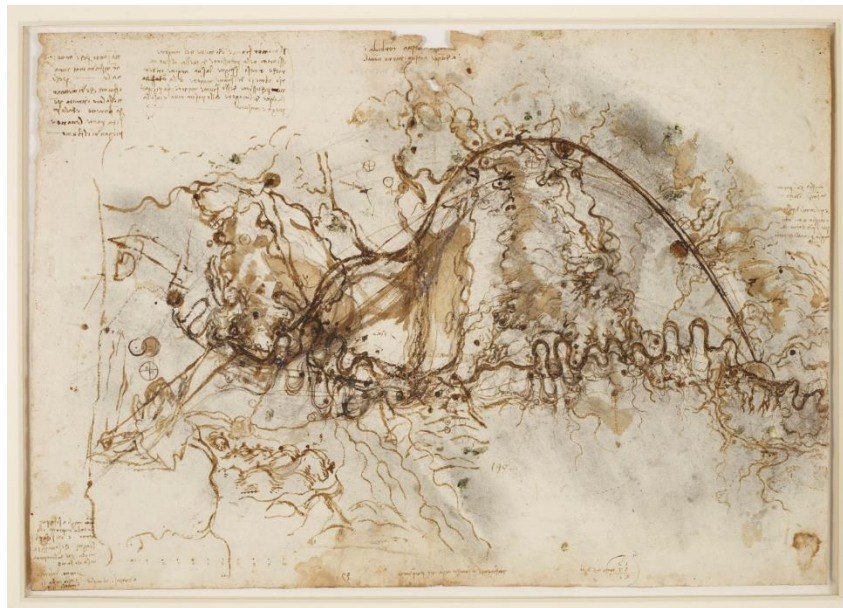


Figura 2.85 – Esquema de um canal de Florença
Fonte: Royal Collection Trust, 2018

Leonardo da Vinci fez um mapa (fig. 2.86) com grande precisão em 1502 a pedido de César Bórgia (ROYAL COLLECTION TRUST, 2018), que chegou a declarar que “todos os engenheiros em todos os nossos domínios devem se consultar com ele e agir de acordo com suas ordens” (ADDIS, 2009, p. 140).

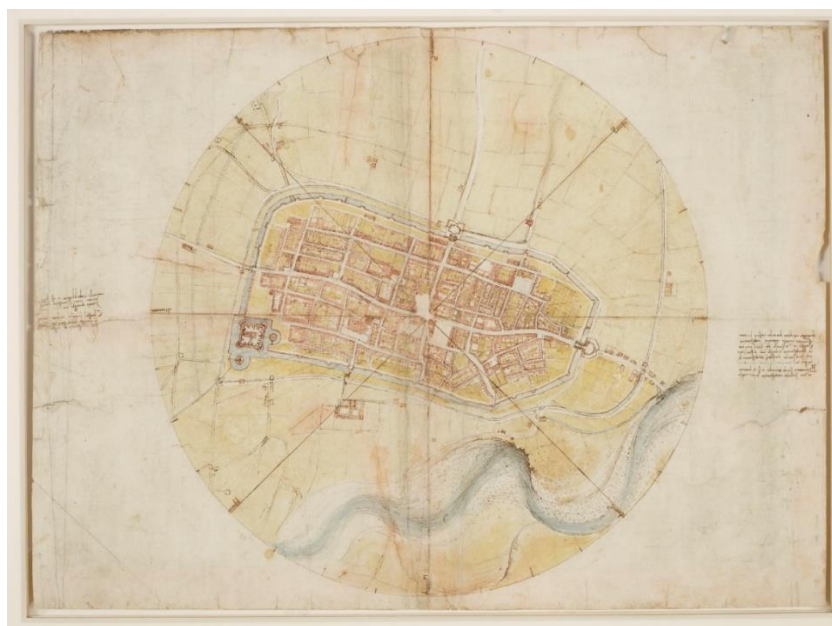


Figura 2.86 – Mapa de Ímola
Fonte: Royal Collection Trust, 2018

A página 117 do *Codex Atlanticus* traz um estudo de fortificação (fig. 2.87). Em carta para Ludivico Sforza para pedir um emprego, Leonardo escreveu: “Se um lugar sob cerco não puder ser subjogado por bombardeios, seja por causa da altura de suas barreiras ou da força de sua posição, tenho métodos para destruir qualquer fortaleza, mesmo aquelas construídas sobre rocha maciça” (ISAACSON, 2017, p. 116).

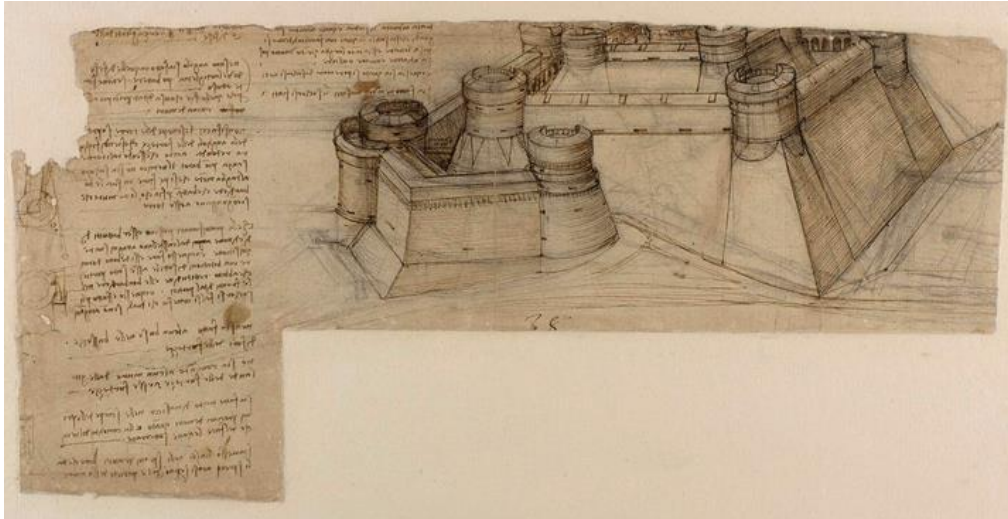


Figura 2.87 – Fortificação
Fonte: Codex Atlanticus, 2020

A página 33 do *Codex Atlanticus*, um estudo de balística (fig. 2.88). Na carta para Ludivico Sforza para pedir um emprego, Leonardo escreveu: “Projetei canhões mais convenientes e fáceis de serem transportados, capazes de arremessar pequenas pedras de maneira semelhante a uma tempestade de granizo; a fumaça proveniente causará grande terror ao inimigo, provocando enorme prejuízo e confusão” (ISAACSON, 2017, p. 116).

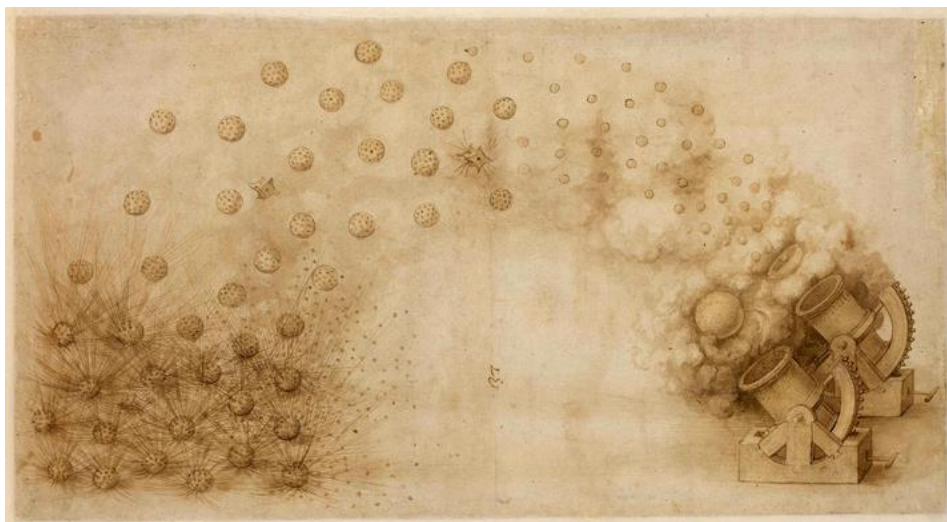


Figura 2.88 – Balística
Fonte: Codex Atlanticus, 2020

“Para os antigos construtores ‘uma forma estrutural válida’, isto é, já construída e demonstrando estabilidade, ‘é correta independentemente de seu tamanho, e é precisamente uma geometria adequada a que assegura a estabilidade das obras de alvenaria’” (HUERTA, 2004 apud NUNES, 2009, p. 32).

Então, segundo Gago (2004), a partir de 1638, com os estudos de Galileo Galilei (1564-1642), foi possível o desenvolvimento das bases da mecânica estrutural que deram condições para uma progressiva substituição das regras de dimensionamento empíricas por regras mais racionais.

Galileu foi a primeira pessoa a fazer uma distinção clara entre a resistência de um material e a resistência de um objeto feito do mesmo material – em outras palavras, a distinção entre propriedades de um material e de uma estrutura. Desta forma, ele abriu caminho para o raciocínio em termos de tensão (força por unidade de área), em vez de força ou resistência (ADDIS, 2009, p. 191).

Segundo Gago (2004), em 1643 o monge jesuíta François Derand (1588-1644) publicou um importante tratado de arquitetura em 119 capítulos. Em um deles ele enuncia uma regra empírica para o dimensionamento da espessura das paredes ou colunas que suportam os arcos (fig. 2.89), que viria a ser muito popular até ao final do século XVIII. Porém, essa regra, segundo Viollet-le-Duc e Rondelet, é muito anterior a Derand, como evidenciadas em catedrais góticas.

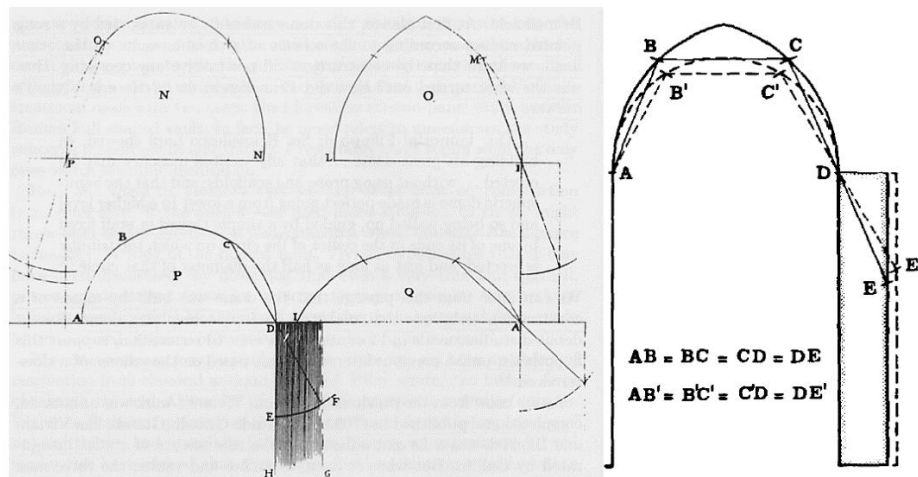


Figura 2.89 – Regra de Derand para espessura dos pés-direitos de arcos
Fonte: Mainstone (1998 apud GAGO, 2004)

Ainda de acordo com Gago (2004), em 1669, um monge jesuíta, Honoré Fabri (1607-88), publicou o que se pode considerar o primeiro estudo científico sobre a estática em arcos. Lamentavelmente seu estudo teve pouca divulgação, e a maioria dos conceitos teve que ser novamente formulada por outros autores. Em 1675, Robert Hooke (1635-1703) relacionou o

problema do arco com o da catenária²³, e descobriu que suspendendo uma corrente metálica pelas duas pontas se obtinha a geometria invertida de um arco equilibrado (fig. 2.90). Mesmo assim, ele não conseguiu resolver a estática do problema. Então, em 1697, David Gregory (1659-1708) determinou, embora com erros, a forma do cabo suspenso e publicou a expressão matemática da catenária. Admitindo que a catenária era a forma adequada para um arco sujeito à ação do seu peso próprio, afirmou que “quando um qualquer arco se mantém em equilíbrio é porque contém na sua espessura uma catenária”. Também fez analogia com a catenária, permitindo a determinação da força que atua sobre os encontros do arco: “a mesma força que a corrente exerce para dentro é exercida para fora pelo arco”.

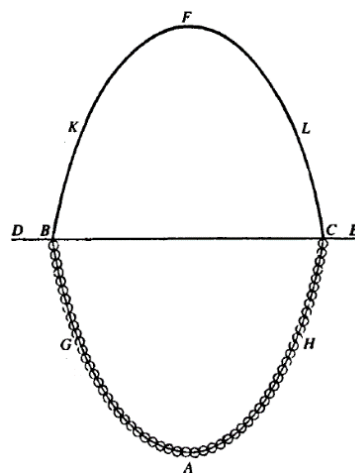


Figura 2.90 – Corrente suspensa de Hooke
Fonte: Hooke (1998 apud GAGO, 2004)

Addis (2009) esclarece que a primeira aplicação bem-sucedida da estática ao arco foi publicada em 1695 pelo acadêmico francês Philippe de La Hire (1640-1718) em seu livro *Traité de Mécanique* (Tratado de Mecânica). Segundo Gago (2004), La Hire é considerado, por diversos autores, como o primeiro investigador com uma abordagem científica do estudo de arcos e abóbadas, do ponto de vista da mecânica estrutural. Até então, com exceção do trabalho de Honoré Fabri, que não teve influência histórica, os estudos sobre estas estruturas eram baseados em interpretações intuitivas das observações experimentais. La Hire publicou um tratado de mecânica onde há o estudo do equilíbrio de 3 forças concorrentes (lei dos senos) e as primeiras aplicações de estática gráfica. Nesse tratado, não foi dada especial importância ao arco e só numa das 126 “proposições” da obra o arco foi objeto de estudo (fig. 2.91).

²³“O nome de uma forma geométrica assumida por um cabo ou corrente uniforme sujeito apenas ao seu peso próprio e preso por duas extremidades” (ADDIS, 2009, p. 611).

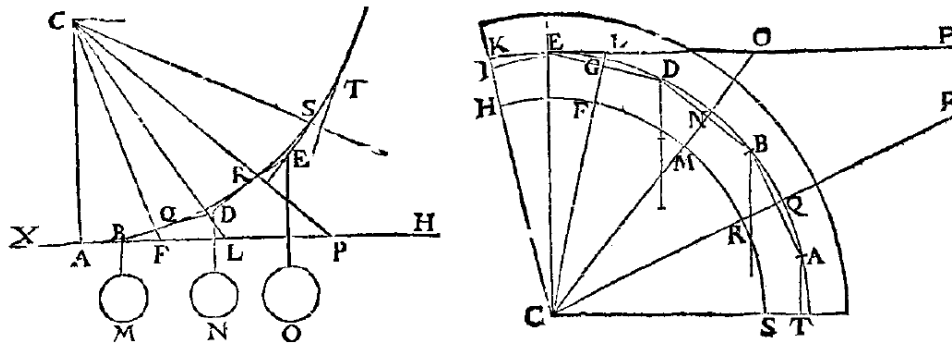


Figura 2.91 – Gráficos de Philippe de La Hire
Fonte: Gago, 2004.

Para La Hire, o problema da determinação da espessura dos pés-direitos de arcos e abóbadas é extremamente difícil, e as regras da época careciam de fundamento. Ele retomou o estudo do arco e apresentou uma memória cujo objetivo era estabelecer regras racionais para seu dimensionamento. Então, pela primeira vez foi estipulada uma forma de como um arco real poderia colapsar, admitindo que ele ruía através de um mecanismo do tipo cunha deslizante, onde, pela ação do seu peso, a parte superior cairia, deslizando sobre juntas fraturadas e empurrando os encontros para o exterior (fig. 2.92). O efeito do atrito não foi considerado e só com Coulomb foi formulado convenientemente (GAGO, 2004).

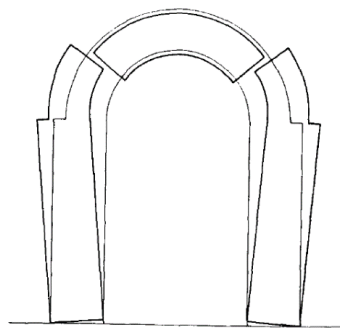


Figura 2.92 – Mecanismo tipo cunha deslizante proposto por Philippe de La Hire
Fonte: Gago, 2004

Os estudos de La Hire foram descritos por Bernard Forest de Bélidor (1698-1761) na obra *La Science des ingénieurs* (A Ciência dos Engenheiros). Bélidor tinha objetivos práticos, procurando regras para dimensionar os elementos construtivos (como experimentos com a resistência de pequenas vigas de madeira). Os trabalhos de La Hire e de Bélidor sobre regras de dimensionamento das espessuras dos pés-direitos de arcos e abóbadas foram os primeiros estudos a introduzir a estática na análise de arcos (GAGO, 2004).

Baldi afirmou que o mecanismo de colapso deve envolver a rotação das aduelas em relação a um eixo. A partir desse ponto, outros cientistas encontraram uma linha de experimentação a seguir: começaram a propor modelos matemáticos de comportamento para

explicar e prever resultados de testes em escala. O francês Augustin Danyzy (no século XVIII) fez testes com maquetes de arcos com aduelas de argamassa e informou em 1732 sua descoberta à *Société Royale des Sciences* (Sociedade Real de Ciências), em Montpellier, França. Seu trabalho foi publicado num apêndice ao tratado de estereotomia (corte, divisão e ajuste de pedra) de Amédée Frézier. Pierre Couplet desenvolveu em 1729 e 1730 duas memórias sobre o comportamento estrutural de arcos, que representavam avanços na teoria da mecânica dos arcos em comparação aos estudos de La Hire e Bélidor (GAGO, 2004).

Gago (2004) continua: em 1734, Pierre Bouger (ligado à arquitetura naval) apresentou uma memória sobre de cúpulas. Bouger, fazendo analogia para cúpulas entre catenárias e arcos, definiu um perfil de cúpula capaz de suportar o peso próprio, qualquer que fosse a espessura. No século XVIII, as fissuras que se viam na cúpula da Basílica de São Pedro em Roma desde 1631, levantavam dúvidas quanto à sua segurança estrutural. Para resolver o problema, o Papa Bento XIV encomendou um estudo a Giovanni Poleni, que resultou em um tratado publicado em 1748. Poleni dividiu a cúpula em cinquenta lúnulas e analisou a estabilidade de um arco equivalente, formado por duas lúnulas diametralmente opostas (fig. 2.93). Ao verificar que era possível inscrever na seção do arco um dos perfis da catenária, concluiu que a cúpula era estável e que as fissuras meridionais não ameaçavam a segurança da estrutura.

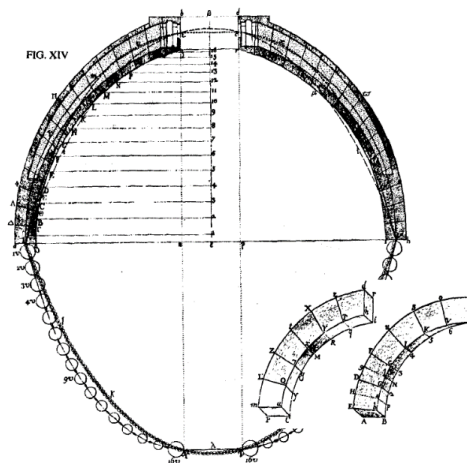


Figura 2.93 – Modelo de Poleni para análise da estabilidade da cúpula de São Pedro em Roma.
Fonte: Gago, 2004

Entre 1770 e 1776, Charles Bossut (1730-1814) estudou a relação do arco e da cúpula, para determinar uma geometria mais adequada (fig. 2.94). Chegou ao mesmo resultado obtido por Bouger, com a extensão da analogia entre catenárias e arcos. Porém, nenhuma dessas teorias considerou o efeito tridimensional do comportamento estrutural das cúpulas (GAGO, 2004).

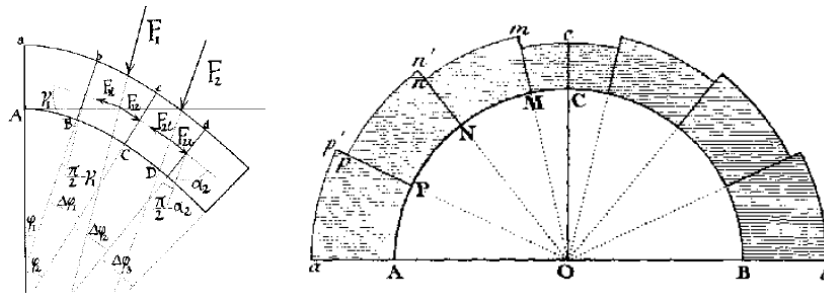


Figura 2.94 – Estudos de Bossut para a geometria das aduelas de um arco circular
Fonte: Gago, 2004

Charles-Augustin de Coulomb também fez estudos sobre arcos, com uma memória publicada em 1773, estabelecendo uma base teórica para a análise de arcos, o que lhe permitiu identificar o modo de colapso mais provável (fig. 2.95) e determinar os valores correspondentes dos limites de impulsos (GAGO, 2004).

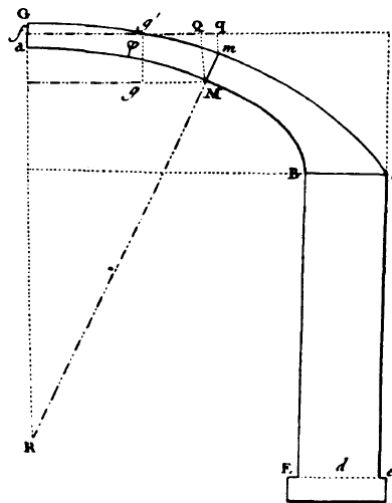


Figura 2.95 – Modelo de Coulomb para análise de arcos
Fonte: Gago, 2004

Como Couplet, Coulomb iniciou os estudos de arcos sem atrito e, posteriormente, incluiu o atrito nas juntas dos elementos adjacentes, concluindo que ele “era suficientemente alto para evitar qualquer deslizamento relativo.” Com base nisso, observou que a formação de charneiras de rotação era “o único processo de geração do mecanismo de colapso”. Ele ainda concordou que a pressão não tinha de ser necessariamente perpendicular às juntas entre elementos (como defendeu La Hire), mas que somente teria de respeitar as condições para se manter “no interior da espessura do arco” (GAGO, 2004, p. 35).

Segundo Gago (2004), outros pesquisadores da época, como Lorenzo Mascheroni (1750-1800), em 1785, e Giuseppe Venturoli (1768-1844), em 1810, continuaram os estudos de arcos e de seus mecanismos de colapso. No século XVIII, a maioria dos autores adotou a metodologia de divisão em lúnulas proposta por Poleni, estudando a cúpula como um conjunto de arcos

justapostos. Mas esses estudos pouco influenciaram na rotina dos construtores. Regras empíricas já estabelecidas por gerações eram as habituais.

Gago (2004) também afirma que, no século XIX, a teoria dos arcos, abóbadas e cúpulas sofreu uma reorientação, com o abandono do estudo de mecanismos de colapso e a adoção dos conceitos da teoria da elasticidade. O arco passou a ser tratado como uma curva elástica e sua teoria perdeu o carácter “especial”, tornando-se um caso particular das estruturas planas de comportamento linear. Porém, as técnicas de dimensionamento continuaram e os conceitos dos mecanismos de colapso foram mantidos até meados do século XX. Os métodos desenvolvidos até as primeiras décadas do século XIX não consideravam a distribuição das tensões nas seções transversais de arcos ou abóbadas. Claude Navier mudou isso em 1823, ao definir o conceito de núcleo central. Em cerca de 1830, foram introduzidas duas novas noções no estudo dos arcos: a *linha de resistência* e a *linha de pressões*. Timoshenko (1953 apud GAGO, 2004) define: “linha de resistência é o polígono que une os centros de pressões de cada junta; e a linha de pressões é o lugar geométrico das interseções consecutivas entre as direções das resultantes das pressões atuantes nas juntas” (fig. 2.96).

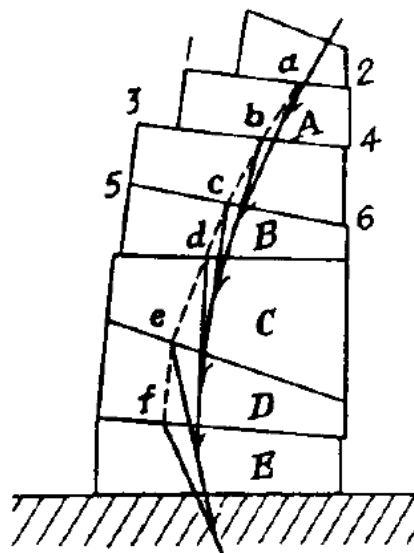


Figura 2.96 – Linhas de resistência (a-b-c-d-e-f) e de pressões (A-B-C-D-E)
Fonte: Timoshenko (1953 apud GAGO, 2004)

Gago (2004) cita outros estudos sobre o arco. Em 1831, Franz Gerstner (1756-1832) foi o primeiro a estudar as linhas de pressões. Para ele, a forma invertida da linha de pressões é análoga a um arco totalmente comprimido. Também mostrou que o problema do arco é estaticamente indeterminado, ou seja, é possível encontrar um número infinito de linhas de pressões que satisfaçam as condições de equilíbrio. Em 1840, Édouard Méry, estudando os trabalhos de Moseley e Navier, desenvolveu um método gráfico prático muito popular (fig.

2.97). Em 1843, Henry Moseley (1801-72), mostrou que a linha de pressões e a linha de resistência são curvas geométricas diferentes. Afirmou que para um arco estar em equilíbrio, a linha de resistência deveria estar totalmente incluída no interior do arco; caso essa linha cruzasse o extradorso ou o intradorso, o arco quebraria perto desse ponto de interseção.

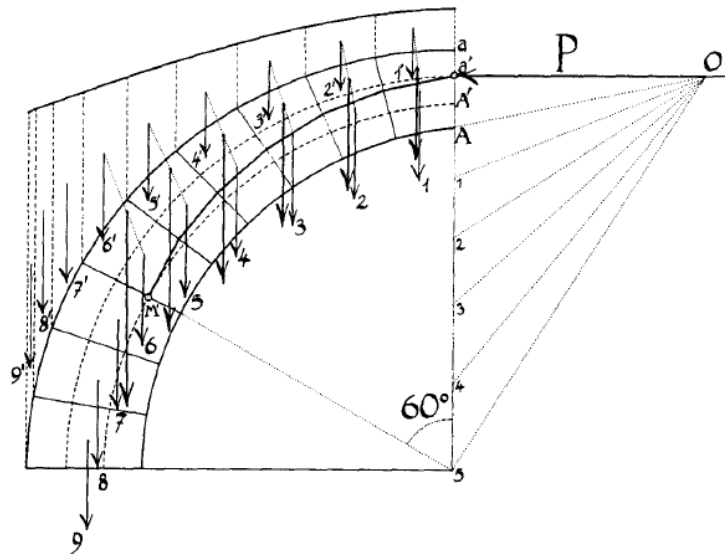


Figura 2.97 – Método gráfico de Méry
Fonte: Gago, 2004

Gago (2004) complementa que, em 1839 e 1852, Jean Victor Poncelet (1788-1867) apresentou métodos gráficos inovadores na análise de arcos. Seu método, juntamente com os estudos de Méry, foram incorporados num único método de verificação da estabilidade de arcos e abóbadas, publicado em 1849 no tratado do Gustav Breyman (1807-59) (fig. 2.98), tornando-se referência na segunda metade do século XIX e no início do século XX.

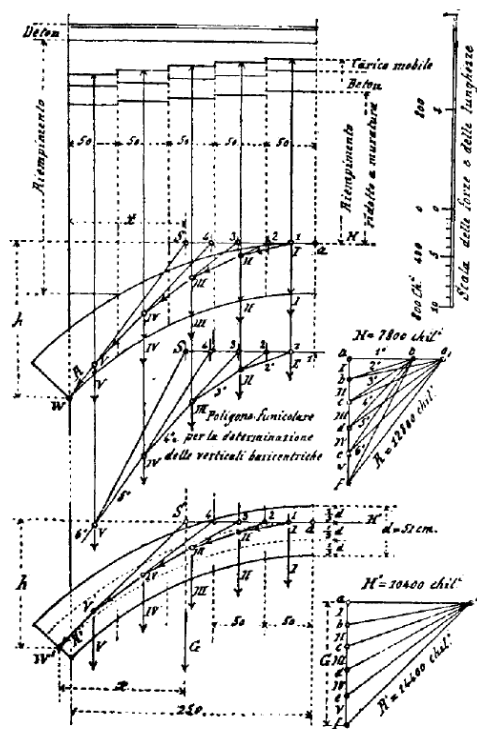


Fig. 18 - Calcolo di archi e volte in muratura.

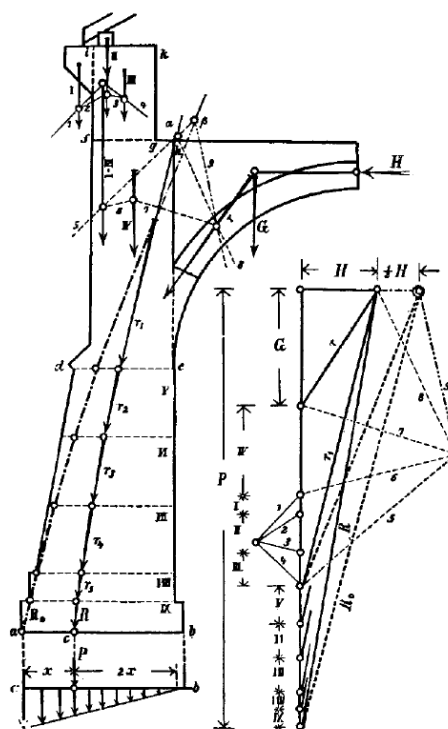


Fig. 19 - Calcolo dei piedritti.

Figura 2.98 – Verificação da segurança de um arco e da espessura de um pé direito
Fonte: Breyman (1849 apud GAGO, 2004)

Para Gago (2004, p. 43), a principal questão sobre o tema no final da primeira metade do século XIX era qual lei da física deveria ser introduzida para resolver a indeterminação estática do arco. Inicialmente, tentou-se considerar hipóteses simplificadoras para tornar a estrutura em um problema determinado. ‘No entanto, alguns autores, como Poncelet em 1852, concluíram que não era possível determinar a curva de pressões “verdadeira” apenas por meio das equações de equilíbrio, sugerindo a sua determinação através das técnicas de resolução de estruturas hiperestáticas’. Houve dúvidas se um arco poderia ser considerado uma estrutura elástica. No entanto, Winkler, Perrodil e outros fizeram diversos ensaios para mostrar que a teoria elástica podia ser aplicada aos arcos. Em 1953, Eduardo Cardoso afirmou que os arcos podiam e deviam ser analisados pela teoria da elasticidade. Em 1867, Winkler, aplicando o teorema de Menabrea e considerando o arco uma estrutura elástica, explicou que a curva de pressões real do arco era aquela que, em média, se afastava o menos possível do seu eixo. Em 1875, G. Fuller contribuiu com uma nova técnica de construção do polígono funicular, que permitia a determinação da espessura mínima admissível de um arco para uma dada carga externa. Porém, com a Revolução Industrial, as estruturas de alvenaria foram progressivamente substituídas por estruturas de aço, e os estudos e projetos de arcos de alvenaria entrou em declínio. Em 1879 os estudos de indeterminação estática já estavam desenvolvidos, e Carlo Castigliano (1847-84) aplicou os teoremas energéticos que levam seu nome na análise estrutural de arcos de alvenaria. Nessa

fase, a teoria dos arcos, abóbadas e cúpulas perdeu seu carácter “particular”, passando a fazer parte da teoria elástica de vigas curvas. Em 1883, o arquiteto Antoni Gaudí (1852-1926) iniciou a construção da Igreja da Sagrada Família em Barcelona e adotou as metodologias antigas em seu dimensionamento, mais especificamente a analogia entre catenária e arco e sua extensão ao caso de cúpulas (fig. 2.99).



Figura 2.99 – Modelo de Gaudí para o dimensionamento de cúpulas
Fonte: Gago, 2004

Na primeira metade do século XX, verificou-se um gradual declínio nos projetos de estruturas em alvenaria e uma ascensão das estruturas metálicas e de concreto armado, provocando um certo esquecimento tempo das técnicas construtivas mais antigas e de seus métodos de cálculo. Entre outros motivos, o interesse pela recuperação de estruturas antigas estimulou uma nova perspectiva sobre o comportamento estrutural dos arcos. Devido aos robustos meios de transporte de guerra no período imediatamente anterior à Segunda Guerra Mundial, o governo britânico começou a classificar as pontes de acordo com sua capacidade para suportar veículos militares. Assim, A. Pippard executou testes experimentais em arcos e, em 1948, desenvolveu uma metodologia de análise elástica baseada no método de Castigliano. Em 1966, Jacques Heyman, fez estudos sobre a aplicação do método da análise limite às estruturas de alvenaria, como arcos, arcobotantes, abóbadas, cúpulas, torres e escadas. Suas investigações prosseguiram por muitas décadas (GAGO, 2004).

Por fim, na década de sessenta, a instituição britânica *Military Engineering Experimental Establishment* adaptou os trabalhos de Pippard e de outros autores, criando um método empírico de avaliação da capacidade resistente de pontes em arco, chamado de método MEXE/MOT, que só viria a ser divulgado para a sociedade civil na década de oitenta. Em 1982, Robert Mark utilizou métodos de foto-elasticidade para entender o comportamento de estruturas góticas (fig.

2.100). Com a ascensão dos computadores, o uso do Método dos Elementos Finitos na análise estrutural se tornou bastante popular, inicialmente desenvolvido para análise de estruturas metálicas ou de concreto armado, cujo comportamento estrutural era modelado como linear e contínuo. Mais tarde, com maiores avanços computacionais, foi possível considerar as características não lineares do comportamento mecânico da alvenaria e simular a descontinuidade entre elementos. Em 1981 e 1985, Sawko e Towler fizeram os primeiros trabalhos de análise de arcos com o Método dos Elementos Finitos, utilizando modelos de comportamento linear elástico. O desenvolvimento dos modelos de análise não lineares, possível devido à rápida evolução dos recursos computacionais, levou a um alto grau de sofisticação na análise estrutural, permitindo uma análise rigorosa do comportamento das edificações (GAGO, 2004).

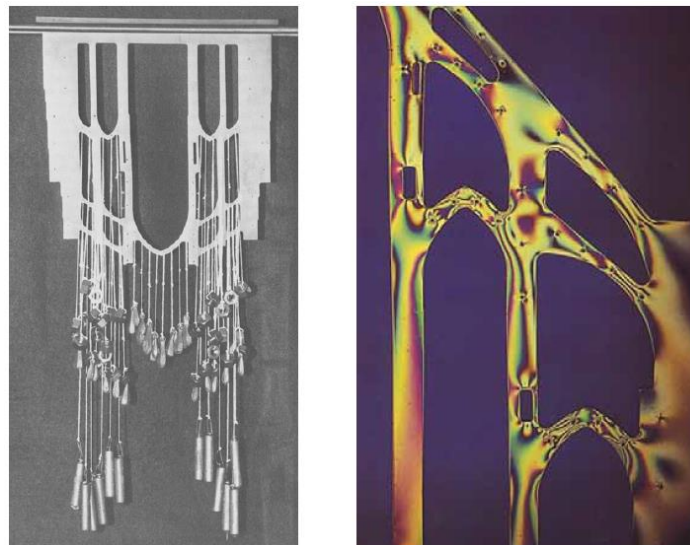


Figura 2.100 – Modelos fotoelásticos para estudo das catedrais de Beauvais e Bourges
Fonte: Mark (1982 apud GAGO, 2004)

3 ASPECTOS GEOMÉTRICOS E DE PROJETO

Para Addis (2009), a essência da engenharia da edificação é a capacidade de planejar, antes do início das obras, como um prédio será construído. Para tanto, uma habilidade importante que os engenheiros devem ter é a capacidade de comunicar esse projeto aos interessados. Desenhos e maquetes em escala para este propósito remontam ao Egito Antigo. Foi durante os anos entre aproximadamente 1500 e 500 a.C. que os egípcios e os gregos antigos do período helênico desenvolveram o que se conhece hoje como “projeto” de um prédio. Mas foi somente na Renascença que foram desenvolvidas as técnicas de representação de formas tridimensionais complexas no papel.

3.1 DADOS TÉCNICOS

3.1.1 PLANTAS E CORTES

Segundo Marder e Jones (2015), o arquiteto Antoine B. Desgodetz (1653-1728) publicou em 1682 um livro intitulado *Les édifices antiques de Rome* em Paris. Desgodetz foi enviado a Roma bancado pela Académie Française em 1676-7 para realizar uma série de medições precisas dos monumentos antigos de Roma. Após seu retorno a Paris, seus desenhos foram publicados e, bancados pela coroa francesa, o texto deveu parte de sua autoridade ao fato de que não era um empreendimento individual, mas de uma expoente instituição francesa de arquitetura.

A seguir, são apresentados desenhos do Panteão na forma de, como descrito por Vitrúvio, *ichnographia* (planta de um edifício, no seu plano horizontal e geometral) (figs. 3.1 e 3.2), *orthographia* (alçado ou *imago erecta* de um edifício) (figs. 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7) e *scaenographia* (representação em perspectiva do edifício) (fig. 3.8).

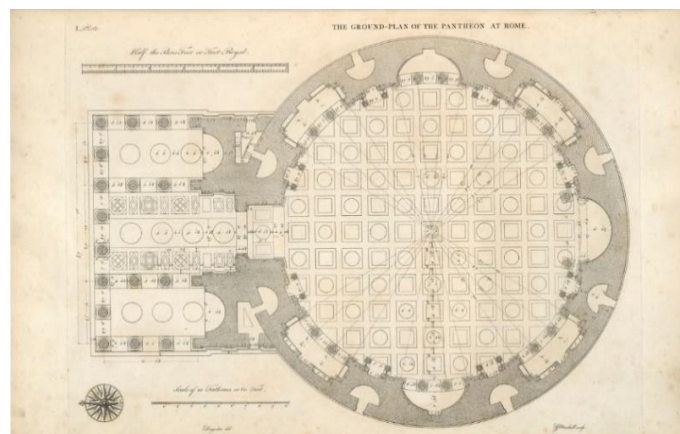


Figura 3.1 – Vista em planta do nível mais baixo
Fonte: Desgodetz (1682)

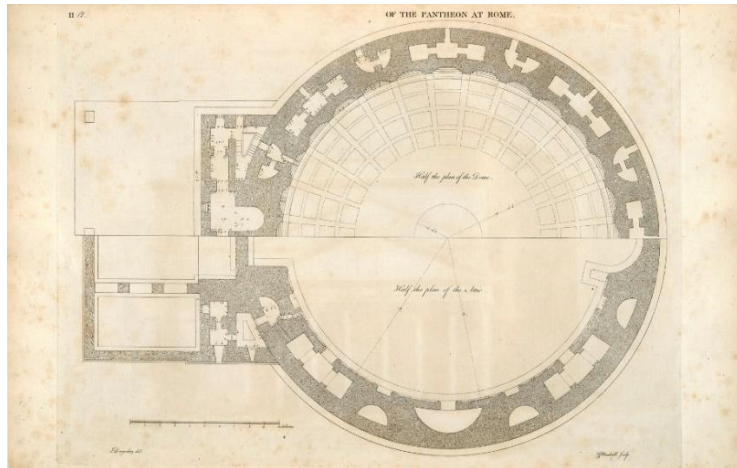


Figura 3.2 – Planta da parte superior e planta refletida com a superfície interna
 Fonte: Desgodetz (1682)

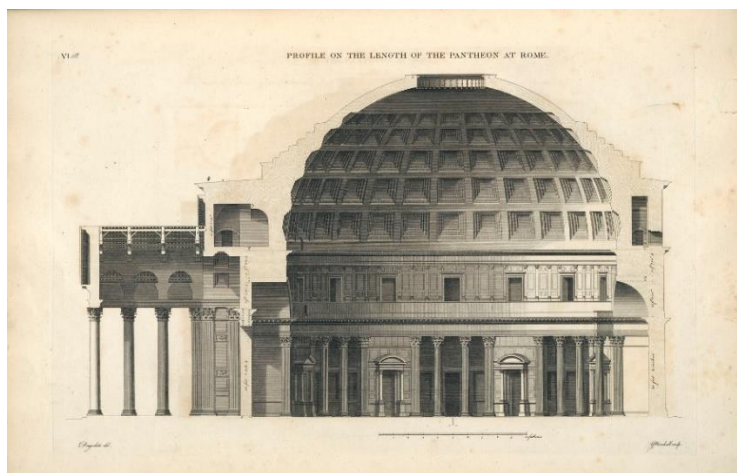


Figura 3.3 – Seção transversal lateral
 Fonte: Desgodetz (1682)

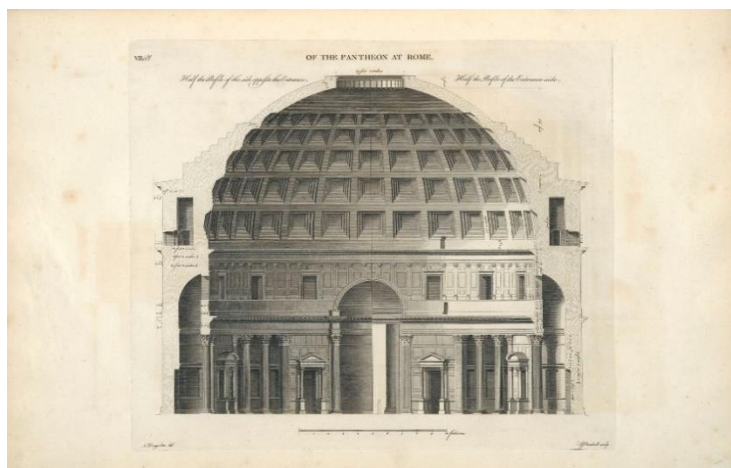


Figura 3.4 – Seção transversal parte de trás
 Fonte: Desgodetz (1682)



Figura 3.5 – Seção transversal frontal
 Fonte: Desgodetz (1682)

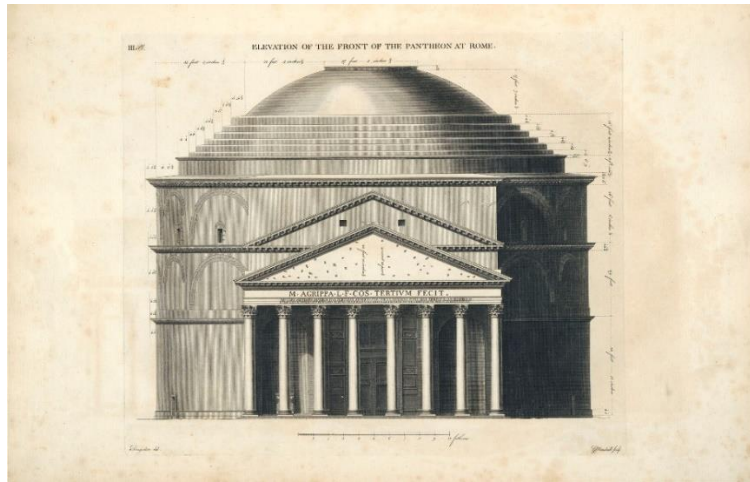


Figura 3.6 – Vista de elevação frontal
 Fonte: Desgodetz (1682)

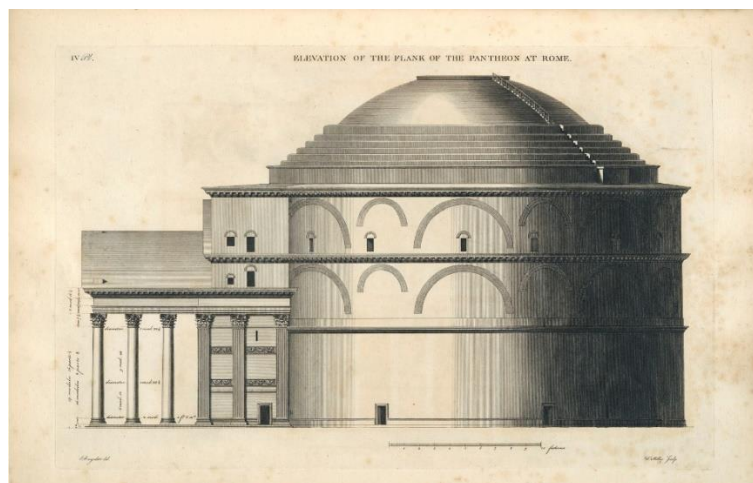


Figura 3.7 - Vista de elevação lateral
 Fonte: Desgodetz (1682)

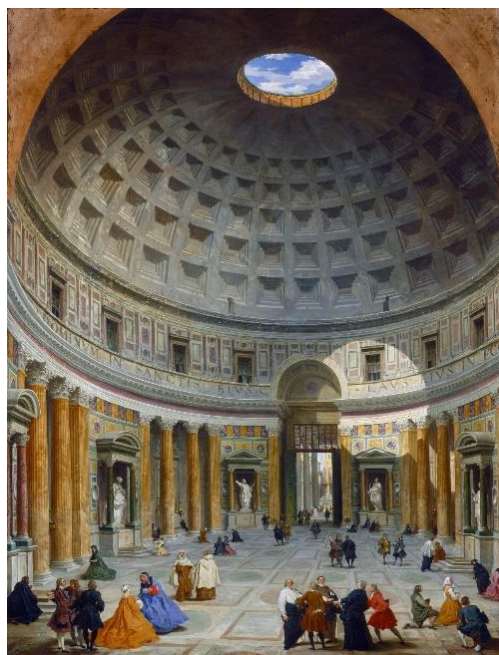


Figura 3.8 – Interior do Panteão, Roma, c. 1734 (pintura de Giovanni Paolo Panini)
 Fonte: Samuel H. Kress Collection, 2020

3.1.2 DIMENSÕES

O Panteão foi dimensionado no sistema de medição da Roma Antiga. Seu *oculus*, e.g., possui diâmetro de 30,00 *pes* (sistema romano), equivalente a 8,88 m (1 *pe* = 0,296 m). Para melhor compreensão e para fazer as devidas conversões, tal sistema é apresentado a seguir.

Para Chisholm et al. (2018), um sistema de medição consiste num processo de associação de números a quantidades e fenômenos físicos. Imprescindível para toda a ideia de pesos e medidas são os conceitos de uniformidade, unidades e padrões. A uniformidade é a exigência de padrões precisos e confiáveis de medidas. A unidade é o nome de uma quantidade, como quilograma ou libra. O padrão é a incorporação física de uma unidade por determinada organização, como o cilindro de platina-irídio mantido pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas em Paris como quilograma padrão. Hoje, há dois tipos de sistemas principais de medição, distintos historicamente: o sistema Imperial Britânico, um sistema evolutivo que cresceu mais ou menos ao acaso, e o Sistema Internacional de Unidades ou SI, sistema planejado muito utilizado pela comunidade científica em quase todos os países. Os autores citam várias medidas romanas e algumas correspondências histórica e atual:

- Medidas de comprimento: com base no “pé padrão romano (*pes*)”:

Esta unidade foi dividida em 16 dígitos ou em 12 polegadas. Nos dois casos, seu comprimento era o mesmo. Os metrologistas chegaram a conclusões diferentes quanto ao seu comprimento exato, mas os equivalentes modernos atualmente aceitos são 296 mm ou 11,65 polegadas. Expresso em termos desses equivalentes, o dígito (*digitus*), ou 1/16 de pé romano, era de 18,5 mm (0,73 polegadas); a polegada (*uncia* ou *pollicus*), ou 1/12 de pé romano, era de 24,67 mm (0,97 polegadas); e a palma (*palmus*), ou 1/4 de pé romano, era de 74 mm (2,91 polegadas) (CHISHOLM et al., 2018).

- Escalas maiores de comprimento: as unidades lineares maiores eram expressas em pés. O côvado ou *cubitum* correspondia a 11/2 pés romanos (444 mm ou 17,48 polegadas). Cinco pés romanos representavam o ritmo ou *passus*, iguais a 1,48 m ou 4,86 pés (CHISHOLM et al., 2018);

- Medidas para trajetos longos: as medidas de itinerário mais frequentemente usadas eram o *furlong* ou *stade* (*stadium*), milha (*mille passus*) e liga (*leuga*). *Furlong* correspondia a 625 pés romanos (185 m ou 606,9 pés) ou 125 passos; era um oitavo de milha. A milha era de 5.000 pés romanos (1.480 m ou 4.856 pés) ou 8 *furlongs*. A liga eram 7.500 pés romanos (2.220 m ou 7.283 pés) ou 1.500 passos (CHISHOLM et al., 2018);

- Medidas de peso: o padrão para o peso, antes do século III a.C., era a *as*, também conhecida como libra etrusca ou a libra de ‘Oscan’, representada por 4.210 grãos ou 272,81 gramas. Era dividido em 12 onças de 351 grãos ou 22,73 gramas cada. Outro padrão foi criado em 268 a.C., quando um denário de prata alcançou 70,5 grãos ou 4,57 gramas. Seis denários ou

“centavos” eram calculados com a onça (*uncia*) de 423 grãos ou 27,41 gramas; 72 deles produziram uma nova libra com 12 onças, 5.076 grãos ou 328,9 gramas (CHISHOLM et al., 2018);

- Medidas de volume: as principais medidas de capacidade eram a *hemina*, *sextarius*, *modius* e *amphora*, para os produtos secos, e o *quartarus*, *sextarius*, *congius*, *urna* e *amphora*, para os líquidos. Todas eram baseadas no *sextarius* e não havia dois *sextarii* idênticos; então, a média mais aceita atualmente é 35,4 polegadas cúbicas, correspondendo a quase 1 pinta ou 0,58 litro. A *hemina* ou meio *sextarius*, com base nessa média, era de 17,7 polegadas cúbicas ou 0,29 litro. Dezesesseis *sextarii* constituíam 566,4 polegadas cúbicas ou 9,28 litros; 48 *sextarii* compunham a *amphora* de 1.699,2 polegadas cúbicas ou 27,84 litros. Na série líquida, o *quartarus* ou um quarto de um *sextarius* (igual a 35,4 polegadas cúbicas) correspondia a 8,85 polegadas cúbicas ou 0,145 litro; seis *sextarii* equivaliam ao *congius* de 212,4 polegadas cúbicas ou 3,48 litros; 24 *sextarii* representavam uma urna de 849,6 polegadas cúbicas ou 13,92 litros. Tal como nos produtos secos, 48 *sextarii* representavam uma *amphora* (CHISHOLM et al., 2018).

Na tabela 3.1 a seguir, são apresentadas as dimensões dos principais elementos do Panteão em três sistemas de medida: o Romano, o Internacional e o Imperial:

Tabela 3.1 - Dimensões dos principais elementos do Panteão

SISTEMA	ROMANO	SI	IMPERIAL
Unidade	<i>Pes</i>	Metros	Pés
Diâmetro interno da cúpula	146,28	43,30	142,04
Espessura da cúpula na base	19,93	5,90	19,35
Espessura da cúpula no topo	4,73	1,40	4,59
Diâmetro do <i>oculus</i>	30,00	8,88	29,13
Diâmetro interno da rotunda	150,00	44,40	145,65
Espessura da parede na base	21,62	6,40	20,99
Largura do pórtico	115,00	34,04	111,67
Altura da parede (interior)	73,14	21,65	71,02
Altura da parede (exterior)	102,70	30,40	99,72
Diâmetro dos pilares	5,00	1,48	4,86
Altura dos pilares	39,86	11,80	38,71
Altura da porta	25,44	7,53	24,70
Largura da porta	16,55	4,90	16,07

Fonte: baseado em Macdonald (1976); Marder; Jones (2015); Archeorama (2020)

3.1.3 PROPRIEDADES MECÂNICAS

Na fig. 3.9, apresenta-se uma divisão esquemática do Panteão em relação ao tipo de material utilizado, complementada pelos respectivos dados da tabela 3.2, para se compreender as propriedades mecânicas de sua estrutura.

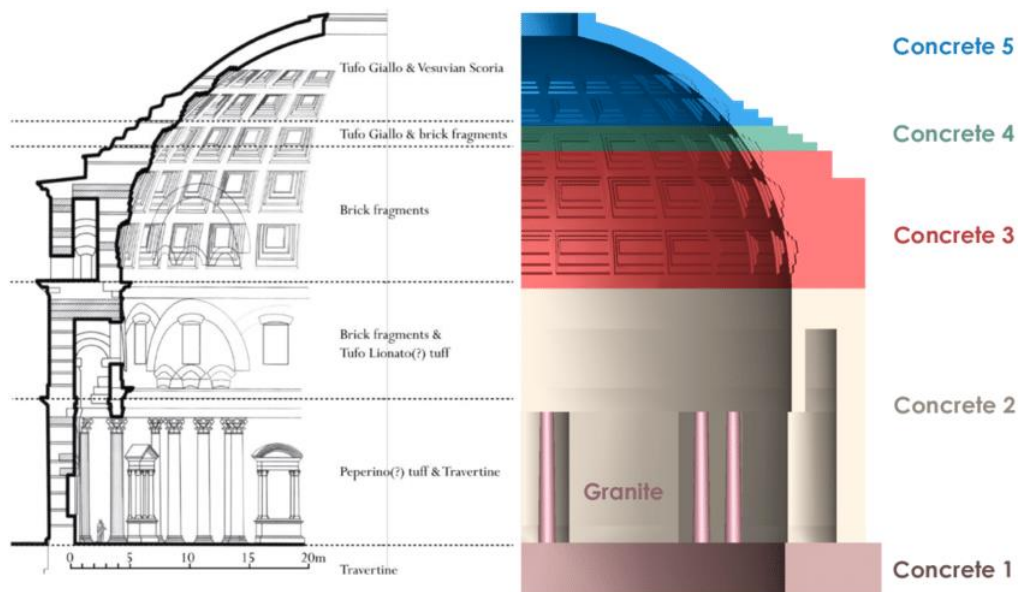


Figura 3.9 – Composição dos materiais da rotunda
Fonte: Lancaster (2005 apud MASI et al. 2018)

Tabela 3.2 - Dados dos materiais

Material	Part	ρ [kg/m ³]	E [Gpa]	ν
Granite	Columns	2500	55,3	0,16
Concrete 1	Foundations	2000	13,5	0,2
Concrete 2	Cylindrical wall	1750	7,0	0,2
Concrete 3	Lower dome	1600	4,6	0,2
Concrete 4	Intermediate dome	1500	3,6	0,2
Concrete 5	Upper dome	1350	3,0	0,2

Fonte: baseado em Lancaster (2005 apud MASI et al., 2018)

O valor do módulo de elasticidade E utilizado neste trabalho é de 2,9 GPa, em conformidade com Brune (2010 apud SOLHEIRO 2017). E o valor do coeficiente de Poisson ν adotado é de 0,2.

3.1.4 MASSA

A cúpula do Panteão pesa, aproximadamente, 5.000 toneladas métricas, cerca de 5.000.000 quilogramas. Cada coluna pesa cerca de 60 toneladas (ARCHEOROMA, 2020).

3.1.5 ASPECTOS GEOGRÁFICOS E CLIMÁTICOS

Conforme o *software* Google Maps (fig. 3.10), as coordenadas geográficas do Panteão são: latitude de 41°53'55,01''N, longitude de 12°28'36,15''L e altitude de 53 m. Pelo site da *World Weather Online*, em Roma, nos últimos 10 anos, a temperatura máxima foi de 33°C e a mínima, de 2°C.



Figura 3.10 – Coordenadas geográficas do Panteão
Fonte: Google Maps, 2020

A neve deve ser considerada um evento raro no Panteão, porque é raro na própria Roma, conforme consulta no *The New York Times*. A última vez em que nevou na capital italiana foi em 2018. Antes disso, foi em 2012, depois de um intervalo de quase 30 anos.

4 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesse capítulo, primeiramente é apresentado, de forma qualitativa, o funcionamento geral do domo como estrutura. Em seguida são apresentadas duas teorias para fazer análises quantitativas.

4.1 O DOMO COMO ESTRUTURA

Segundo Salvadori (2011), o comportamento estrutural do domo precisa ser entendido antes de se poder apreciar seu aparecimento no palco arquitetônico. Inicialmente, considera-se o domo com um hemisfério perfeito (caso específico do Panteão), de espessura pequena em relação à sua envergadura. Então o domo precisa suportar seu peso próprio e a carga móvel, que inclui a força de pressão e a sucção do vento e, em climas setentrionais, inclui o peso da neve. Tais cargas devem ser canalizadas para o solo, e intuitivamente, percebe-se que o domo faz isso ao longo de suas linhas verticais curvas ou meridianos. O domo pode ser pensado como uma série de arcos verticais idênticos, ajustados ao redor de uma base circular e encontrando-se no topo, onde têm uma chave de abóbada (ou pedra de fecho) comum. As cargas se acumulam do topo para a base ao longo dos meridianos verticais, que vão ficando cada vez mais comprimidos à medida que se aproximam do suporte do domo.

Salvadori (2011) continua: a continuidade da superfície do domo possibilita que sua espessura seja relativamente pequena, por introduzir, ao longo das secções horizontais ou paralelos, uma ação que impede os meridianos arqueados de se abrirem. A fig. 4.1 demonstra, de forma exagerada, a deformação de um domo que está sujeito a cargas; a tendência é o domo afundar no topo e abrir na base. Esses movimentos são substancialmente impedidos no domo pelos seus anéis horizontais. Na parte superior, os paralelos são comprimidos porque resistem ao deslocamento para dentro, e na parte inferior, sujeitam-se à tração ao resistir ao deslocamento para fora. Em domos as deformações que ocorrem são muito pequenas, pois as alterações advindas da compressão ou da tração são mínimas, quando comparadas às causadas pela flexão. Desse impedimento das deformações meridionais causado pela ação de compressão ou de tração sobre nos anéis que formam os paralelos, vêm dois efeitos: 1) o domo se torna muito mais rígido e os meridianos comprimidos não empenam. É por isso que se pode construir um domo mais delgado sem comprometer sua estabilidade; 2) o domo não se abre na base, o que elimina a necessidade de se colocar escoras externas ou tirantes de tração internos. “Na verdade,

os paralelos da base, que sofrem tração, constituem os tirantes circulares que impedem a abertura do domo” (SALVADORI, 2011, p. 256).

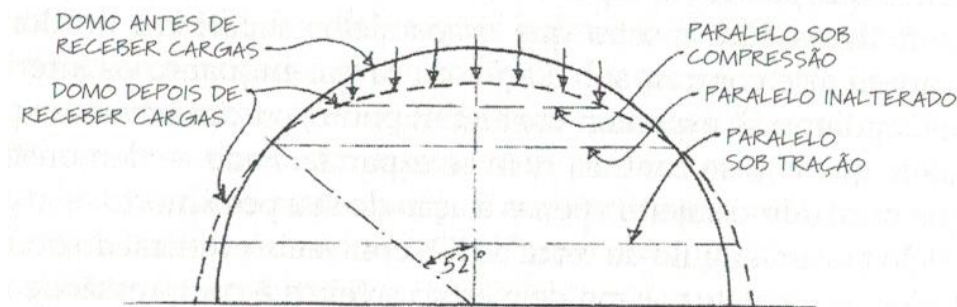


Figura 4.1 – Domo deformado por cargas verticais
Fonte: Salvadori, 2011

Conforme Salvadori (2011), na fig. 4.1, vê-se a tendência dos paralelos superiores dos domos de se contraírem pela ação da carga; a tendência dos paralelos inferiores é de se expandirem. Porém, em algum ponto, é necessário um paralelo que não se contraia nem se expanda. Em um domo submetido somente à ação do peso próprio, esse paralelo é de cerca de 52° com o eixo vertical do domo. Os paralelos acima dele sofrem compressão, e os abaixo, sofrem tração (no Apêndice A4 é mostrado analiticamente como se chegou a esse ângulo).

4.2 TEORIA DE MEMBRANA

Segundo Pedroso (1995), a Teoria de Membrana é baseada na hipótese de não aparecerem momentos fletores e torçores numa casca, mas somente forças normais nas seções principais. O nome “membrana” se deve ao fato de as cascas serem muito delgadas e não terem rigidez considerável nem para flexão e nem para torção, de modo a resistir aos esforços internos apenas com forças normais. É uma teoria que descreve com boa aproximação o comportamento estrutural das cascas reais, desde que satisfaçam determinadas condições geométricas, de apoio e de carga. Isso significa que, apesar de aparecerem momentos fletores e torçores, eles são muito pequenos, e o estado torcional real se assemelha pouco àquele previsto na Teoria de Membrana. É importante enfatizar que a Teoria de Membrana é válida para determinadas condições de contorno. No caso, apenas forças normais que estejam paralelas à direção dos meridianos podem estar presentes em suas bordas (fig. 4.2).

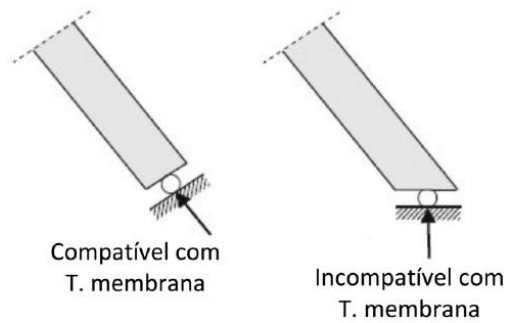


Figura 4.2 – Condições da Teoria de Membrana
 Fonte: Blaauwendraad et al. (2014 apud SOLHEIRO, 2017, modificado)

Todas as fórmulas da parte de Teoria de Membrana foram tiradas de Rabello et al. (2016), Pedroso (1995) e Guerrin (2003), e são cúpulas finas, esféricas e axissimétricas. Então, têm-se as seguintes definições (fig. 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6):

Φ : Ângulo entre a reta vertical que passa pelo centro de uma cúpula e uma reta que passa pelo seu centro e por algum ponto de seu meridiano;

Φ_0 : Ângulo entre a reta vertical que passa pelo centro de uma cúpula e a reta que passa pelo seu centro e o ponto onde termina o seu *oculus*;

Φ'_0 : Complemento de Φ_0 ;

θ : Ângulo compreendido entre dois pontos de um mesmo paralelo de uma cúpula;

$N_\phi = N_\phi(\Phi)$: Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano;

$N_\theta = N_\theta(\theta)$: Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo;

$N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi} = 0$: Forças de cisalhamento por unidade de comprimento;

$p_\phi = p_\phi(\Phi)$: Carregamento tangente à superfície da casca na direção do meridiano;

$p_\theta = 0$: Carregamento tangente à superfície da casca na direção do paralelo;

$p_z = p_z(\Phi)$: Carregamento perpendicular à superfície da casca;

r_1 e r_2 : Raios de curvatura arbitrariamente variáveis;

$r_0 = r_2 \sin \Phi$: Raio que está em um plano perpendicular ao eixo da casca;

h : Espessura da casca (muito pequena em relação a r_1 e r_2);

$a = r_1 = r_2$: Raio médio da casca;

γ : Peso específico do material da casca;

p : Força por unidade de área;

$A = \int dA = 2\pi r_0 ds$: Área da seção infinitesimal;

$R = pA$: Resultante do peso próprio;

s : Taxa de carga por unidade de superfície projetada (carga de neve).

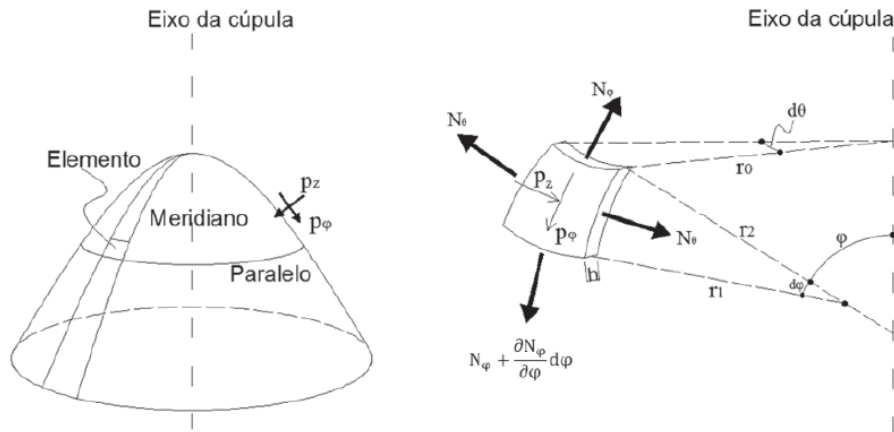


Figura 4.3 – Cúpula e elemento infinitesimal da superfície
 Fonte: Rabello et al., 2016

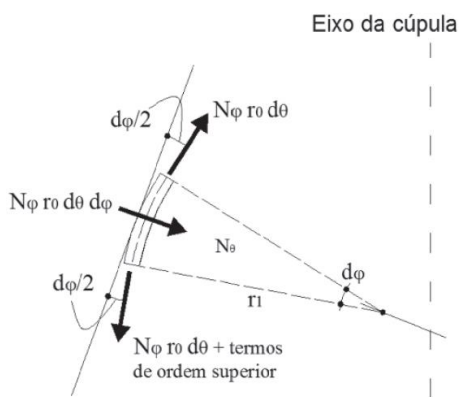


Figura 4.4 – Componente normal da força meridional
 Fonte: Rabello et al., 2016

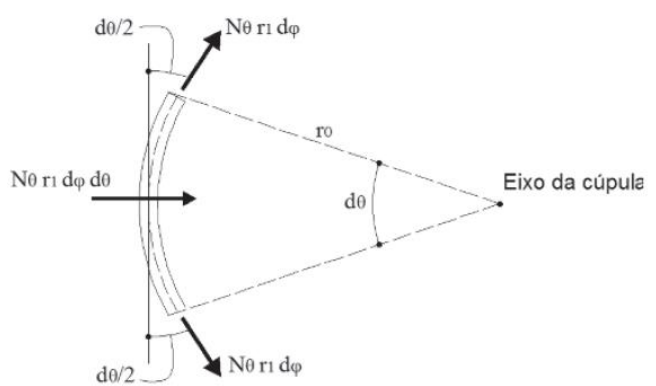


Figura 4.5 – Componente normal da força tangencial
 Fonte: Rabello et al., 2016

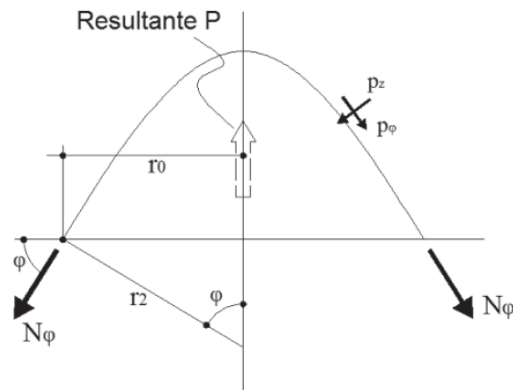


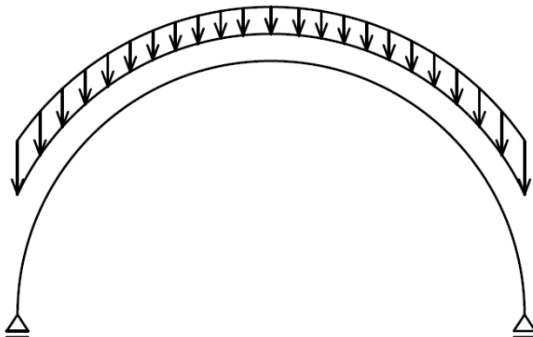
Figura 4.6 – Diagrama de equilíbrio do segmento de uma casca
 Fonte: Rabello et al., 2016

A seguir são apresentados os cinco casos de estudo desse trabalho com suas respectivas fórmulas.

4.2.1 CASO 1 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Na tabela 4.1 são apresentadas as fórmulas para o cálculo dos esforços normais e dos deslocamentos para uma cúpula com apoio de 1º gênero submetida ao peso próprio.

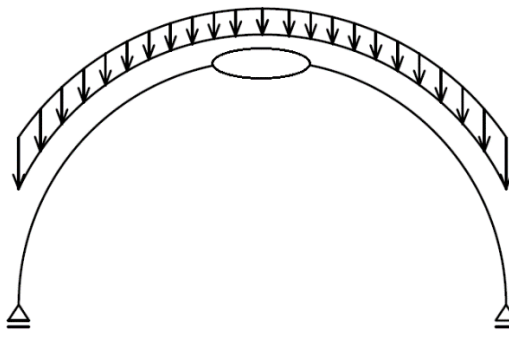
Tabela 4.1 – Fórmulas do caso 1

		
Força por unidade de área	$p = \gamma h$	(4.1)
Resultante do peso próprio	$R = -2\pi a^2 p (1 - \cos \Phi)$	(4.2)
Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano	$N_\phi = -\frac{ap}{1 + \cos \Phi}$	(4.3)
Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo	$N_\theta = ap \left(\frac{1}{1 + \cos \Phi} - \cos \Phi \right)$	(4.4)
Deslocamento horizontal de uma cúpula na direção radial	$\Delta_r = \frac{a^2 p}{Eh} \sin \Phi \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos \Phi} - \cos \Phi \right)$	(4.5)
Rotação do meridiano de uma cúpula	$\Delta_\phi = \frac{ap}{Eh} (2 + \nu) \sin \Phi$	(4.6)

4.2.2 CASO 2 – CÚPULA COM *OCULUS* SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Na tabela 4.2 são apresentadas as fórmulas para o cálculo dos esforços normais para uma cúpula com *oculus* e com apoio de 1º gênero submetida ao peso próprio.

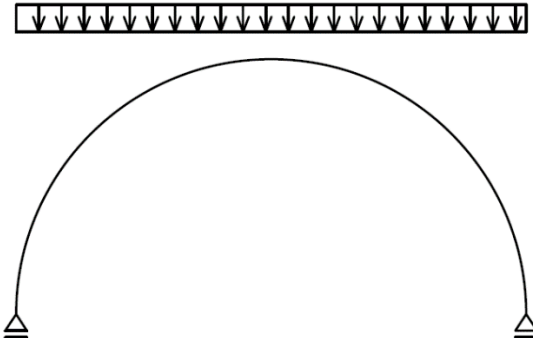
Tabela 4.2 – Fórmulas do caso 2

		
Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano	$N_{\phi} = -ap \frac{\cos \phi_0 - \cos \phi}{\sin^2 \phi}$	(4.7)
Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo	$N_{\theta} = ap \left(\frac{\cos \phi_0 - \cos \phi}{\sin^2 \phi} - \cos \phi \right)$	(4.8)

4.2.3 CASO 3 – CÚPULA SUBMETIDA A CARGA DE NEVE (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Na tabela 4.3 são apresentadas as fórmulas para o cálculo dos esforços normais e dos deslocamentos para uma cúpula com apoio de 1º gênero submetida a carga uniformemente distribuída, no caso, carga de neve.

Tabela 4.3 – Fórmulas do caso 3

		
Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano	$N_{\phi} = -\frac{as}{2}$	(4.9)
Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo	$N_{\theta} = -\frac{as}{2} \cos 2\phi$	(4.10)
Deslocamento horizontal de uma cúpula na direção radial	$\Delta_r = \frac{a^2 q}{Eh} \sin \phi \left(\frac{1 + \nu}{2} - \cos^2 \phi \right)$	(4.11)
Rotação do meridiano de uma cúpula	$\Delta_{\phi} = \frac{aq}{Eh} (3 + \nu) \sin \phi \cos \phi$	(4.12)

4.3 TEORIA FLEXIONAL

Para Baker et al. (1972 apud PEDROSO, 2010), a teoria de membrana tem algumas limitações. A teoria flexional, por ser mais completa, tem um desenvolvimento que demanda maiores exigências para ser usada em análises no cotidiano. Ambas as teorias, todavia, podem ser combinadas em um método de engenharia, chamado Método das Forças, que simplifica o problema e torna possível analisar cascas complicadas em um período de tempo relativamente menor.

Todas as fórmulas da parte de Teoria Flexional foram tiradas de Pedroso (1995). As eqs. 4.13 e 4.14 consistem na primeira etapa de cálculo da Teoria Flexional, ou seja, o parâmetro λ representa o coeficiente de atenuação dos esforços oriundos da perturbação da borda. Tal

coeficiente reflete o fato de as condições de borda irem alterando a partir da base para o topo da cúpula.

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2}, \quad (4.13)$$

$$\Psi = \alpha - \Phi, \quad (4.14)$$

onde

h : Espessura da casca;

a : Raio da casca;

λ : Coeficiente de atenuação dos esforços oriundos da perturbação da borda;

$\nu = 0,2$: Coeficiente de Poisson;

H : Força horizontal na borda livre;

$M = M_\alpha$: Momento na borda livre.

A fig. 4.7 apresenta as condições de esforço cortante e momento fletor na borda da cúpula, ou seja, para condições de contorno em que o apoio da estrutura esteja rotulado (2º gênero) ou engastado (3º gênero).

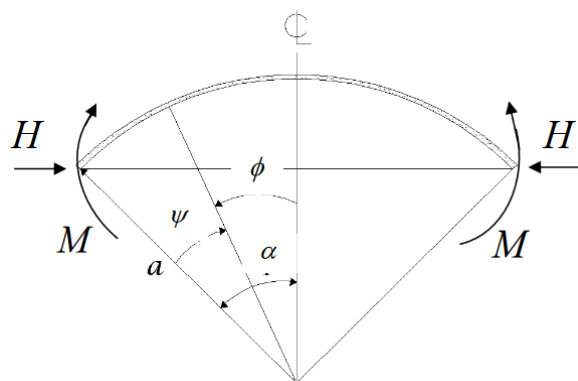


Figura 4.7 – Casca esférica com esforços cortante H e momento M aplicado
 Fonte: Billington (1965 apud LUSTOSA, 2011, modificado)

Em Lustosa (2011) consta (fig. 4.8) um resumo do roteiro que deve ser executado nos cálculos de cúpulas pela Teoria Flexional. Um problema hiperestático pode ser resolvido por analogia do Método das Forças (Apêndice A7), ou seja, a solução final é obtida avaliando a solução primário (Teoria de Membrana) e solução secundária (esforços flexionais).

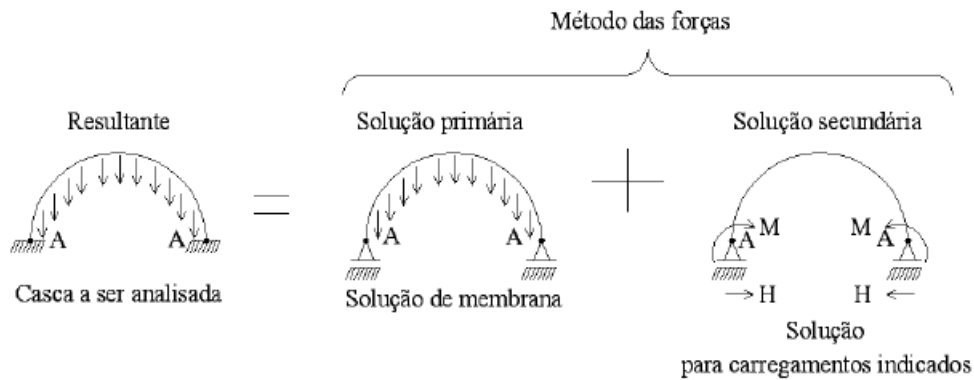


Figura 4.8 – Roteiro de cálculo pela Teoria Flexional
 Fonte: Lustosa, 2011

Segundo Pedroso (2010), no cálculo do problema pode ser aplicado o princípio de superposição de efeitos (fig. 4.9), em que se separa o efeito do carregamento externo e o de cada um dos esforços redundantes X_i . Para a determinação do problema final, arbitram-se, por simplicidade, valores unitários para tais hiperestáticos. Esses valores devem ser multiplicados pelos fatores X_1 e X_2 tais que façam com que os deslocamentos finais nas direções dos esforços redundantes finais sejam nulos.

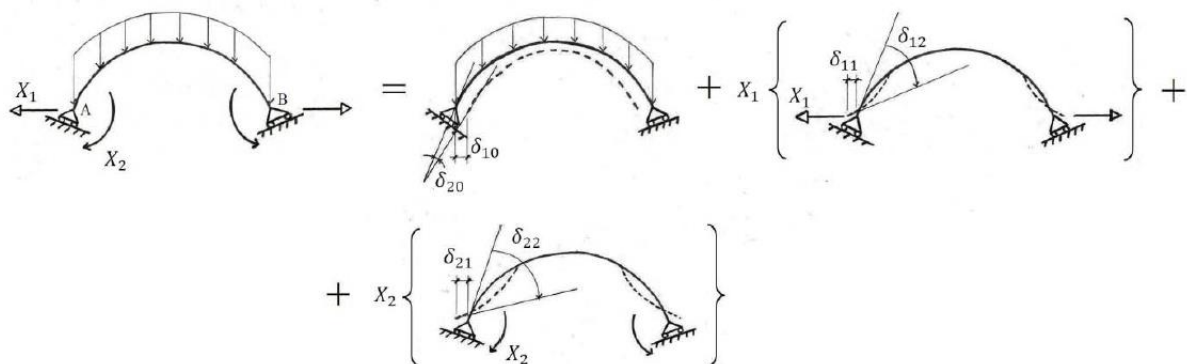


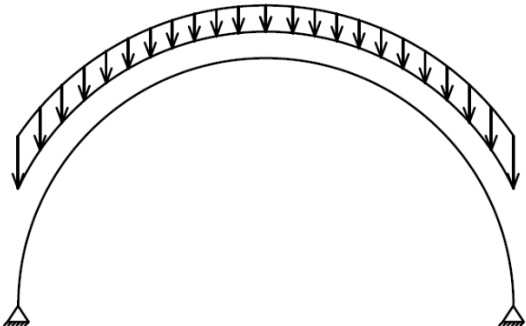
Figura 4.9 – Princípio de superposição de efeitos
 Fonte: Pedroso, 2010

Através da fig. 4.9 sabe-se que δ_0 é oriundo da combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X (com o valor unitário) no sistema principal; δ_{ij} é a combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_i e X_j no sistema principal; e δ_{i0} é a combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_i no sistema principal. Os valores de cálculo dos hiperestáticos serão apresentados nos tópicos abaixo.

4.3.1 CASO 4 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE SEGUNDO GÊNERO)

Na tabela 4.4 são apresentadas as fórmulas para o cálculo dos esforços normais para uma cúpula semiesférica com apoio de 2º gênero submetida ao peso próprio.

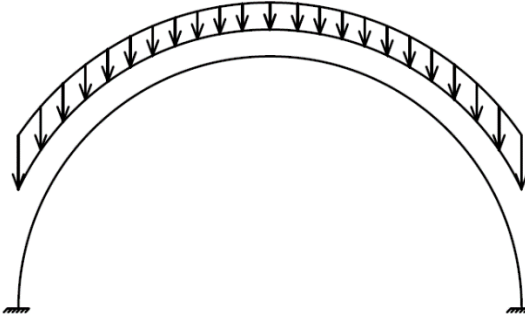
Tabela 4.4 – Fórmulas do caso 4

		
Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano	$N_{\phi} = -\sqrt{2} \cot(\alpha - \psi) \sin \alpha e^{-\lambda \psi} \sin \left(\lambda \psi - \frac{\pi}{4} \right) H$	(4.15)
Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo	$N_{\theta} = -2\lambda \sin \alpha e^{-\lambda \psi} \sin \left(\lambda \psi - \frac{\pi}{2} \right) H$	(4.16)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_1 no sistema principal	$\delta_{10} = \frac{a^2 p}{Eh} \sin \phi \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right)$	(4.17)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_1 e X_1 no sistema principal	$\delta_{11} = \frac{2a\lambda \sin^2 \phi}{Eh}$	(4.18)

4.3.2 CASO 5 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE TERCEIRO GÊNERO)

Na tabela 4.5 são apresentadas as fórmulas para o cálculo dos esforços normais para uma cúpula semiesférica com apoio de 3º gênero submetida ao peso próprio.

Tabela 4.5 – Fórmulas do caso 5

		
Força normal por unidade de comprimento na direção do meridiano	$N_{\phi} = -\sqrt{2} \cot(\alpha - \psi) \sin \alpha e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi - \frac{\pi}{4}\right) H - \frac{2\lambda}{a} \cot(\alpha - \psi) e^{-\lambda \psi} \sin(\lambda \psi) M_{\alpha}$	(4.19)
Força normal por unidade de comprimento na direção do paralelo	$N_{\theta} = -2\lambda \sin \alpha e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi - \frac{\pi}{2}\right) H - \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{a} e^{-\lambda \psi} \sin\left(\lambda \psi - \frac{\pi}{4}\right) M_{\alpha}$	(4.20)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_1 no sistema principal	$\delta_{10} = \frac{a^2 p}{Eh} \sin \phi \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right)$	(4.21)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_1 e X_1 no sistema principal	$\delta_{11} = \frac{2a\lambda \sin^2 \phi}{Eh}$	(4.22)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_2 no sistema principal	$\delta_{20} = -\frac{ap}{Eh} (2 + \nu) \sin \alpha$	(4.23)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_1 e X_2 no sistema principal	$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2\lambda^2 \sin \phi}{Eh}$	(4.24)
Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_2 e X_2 no sistema principal	$\delta_{22} = \frac{4\lambda^3}{Eha}$	(4.25)

5 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Atualmente, a teoria matemática das estruturas constitui parte essencial da física, tornando possível a construção de estruturas gigantescas, quebrando recordes. Elas representam triunfos do projeto estrutural e foram alcançados graças aos computadores e à eletrônica, capazes de realizar incontáveis operações por segundo, ao mesmo tempo apresentando decisões lógicas. Tais meios tornaram possíveis aquilo que era inviável há algumas décadas. Não é que faltasse conhecimento teórico, mas sim, porque as propostas exigiam cálculos manuais que poderiam levar muitos anos. Mas deve-se atentar para o fato de que o “infalível” computador “é operado por seres humanos falíveis e não se pode confiar neles para se obter respostas certas o tempo todo.” Dessa forma, nenhum engenheiro estrutural pode aceitar resultados de cálculos, realizados por computadores, a não ser que realmente concorde com eles (de certa forma) com base no que sua experiência indica (SALVADORI, 2011, p. 6).

Para a elaboração de cálculos e de modelagem relativos à proposta deste trabalho, foi utilizado o sistema da máquina computacional DELL (com o Windows 10 Home Single Language instalado), com as seguintes características: Processador: Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU @ 2.00GHz 2.60GHz; Memória instalada (RAM): 16,0 GB (utilizável: 15,9 GB); Tipo de sistema: Sistema Operacional de 64 bits, processador com base em x64.

A seguir, a título de exemplo, são apresentados, brevemente, softwares que auxiliam nos cálculos diversos de estruturas da construção civil, utilizados neste trabalho.

5.1 MATLAB

O MATLAB (*MATrix LABoratory*) é um *software* de alta performance orientado para o cálculo numérico. É desenvolvido pela empresa MathWorks Inc., fundada em 1984 e sediada em Natick, Massachusetts (MATHWORKS, 2020).

O MATLAB foi usado neste trabalho para efetuar cálculos numéricos diversos e conferir cálculos manuais na parte de integrais e matrizes em análise estrutural de arco hiperestático.

5.2 EXCEL

O Microsoft Excel é um robusto editor de planilhas desenvolvido pela Microsoft Corporation – com sede em Redmond, Washington, Estados Unidos – para a configuração, dentre outros, de planilhas, tabelas e gráficos, bem como para resolução de cálculos em geral.

Neste trabalho ele foi usado majoritariamente para a configuração de gráficos comparativos entre métodos analíticos e numéricos.

5.3 SAP2000 (MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS)

A Computers and Structures, Inc. (CSI) é uma empresa de software de engenharia estrutural e terremotos fundada em 1975 em Berkeley, Califórnia. Atualmente possui sedes em Walnut Creek, CA e Nova York, NY. A CSI produz cinco pacotes de softwares primários, entre eles o SAP2000, o qual é destinado ao uso em estruturas civis, como barragens, torres de comunicação, estádios, instalações industriais e edifícios (CSI, 2020).

Agora apresentam-se os procedimentos realizados na análise numérica através do *software* baseado em elementos finitos SAP2000. Na análise estática da casca o elemento *Shell* é utilizado na modelagem e, para estudo da convergência, o refinamento da malha e o erro foram analisados.

O elemento tipo *Shell*, pode ser utilizado para simular superfícies com pequenas espessuras, ou seja, uma laje de um pavimento, elementos estruturais de tabuleiro de uma ponte, cascas finas e demais superfícies curvas. Esse elemento empregado nas análises do SAP2000 consiste em um elemento finito de área quadrilátero com quatro nós, possuindo seis graus de liberdade em cada um, adequado para avaliar os esforços de membrana e de flexão. A fig. 5.1 mostra a geometria do elemento.

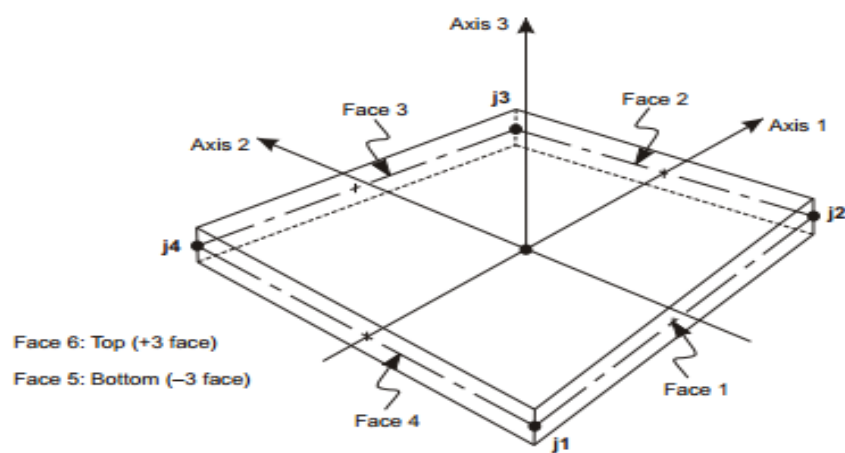


Figura 5.1 – Geometria de um elemento
Fonte: CSi Analysis Reference Manual, 2011

Com a modelagem através do elemento *Shell* o *software* SAP2000 realiza a análise estática da estrutura através da montagem da matriz de rigidez global no sistema de equações gerais baseado pela Lei de Hooke, dado por:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (5.1)$$

Onde $\{F\}$ é o vetor de forças nodais, $[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema e $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais.

Na modelagem da casca, a malha em elementos finitos foi refinada até se obter uma convergência para os valores dos esforços de membrana e flexionais. Nesse contexto, pode-se então validar a modelagem em elementos finitos a partir do erro obtido quando comparado às outras técnicas estudadas.

6 RESULTADOS

Primeiramente, antes de se iniciarem os cálculos, é preciso analisar com cuidado a geometria da cúpula, de modo a saber (ou aproximar) certas características da estrutura, como determinar se a cúpula é esférica (e em caso positivo, se o ângulo de borda a borda percorre exatamente meia volta, ou, de modo similar, se o ângulo α é igual a 90°), se seus apoios são de 1º, 2º ou 3º gênero, se é possível fazer uma espessura média, se a cúpula pode ser considerada como fina, se o seu material constituinte é homogêneo, se existem cargas acidentais. Ou seja, é preciso tentar entender a estrutura para fazer as simplificações necessárias e utilizar as teorias e as equações adequadas de acordo com cada situação. Fazer corretamente esse tipo de análise é um dos grandes desafios para os engenheiros e essencial para o estudo do problema real.

No presente trabalho, a cúpula foi considerada como uma semiesfera perfeita ($\alpha = 90^\circ$) (fig. 6.1), i.e., uma cúpula de arco pleno (raio igual a altura). Isso foi feito através de análise da sua geometria e de consulta na literatura.

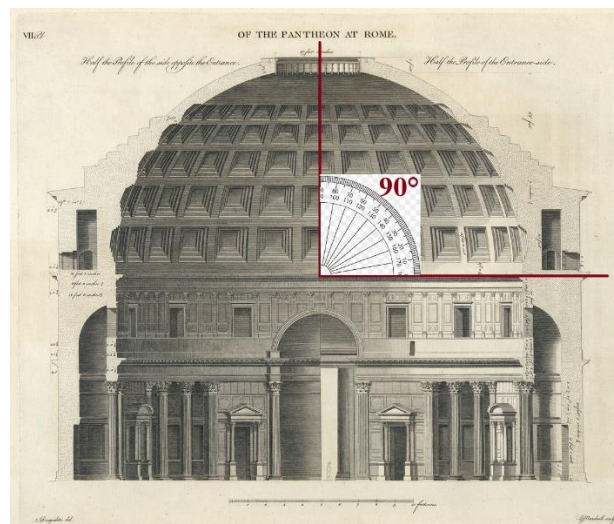


Figura 6.1 – Cúpula semiesférica
Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

No entanto, poderia ser feita uma justa argumentação em oposição. Outros autores poderiam achar melhor considerar que a cúpula do Panteão seja uma cúpula abatida (raio maior que altura), com o ângulo α igual a aproximadamente 65° (fig. 6.2), o que não foi considerado nesse trabalho.

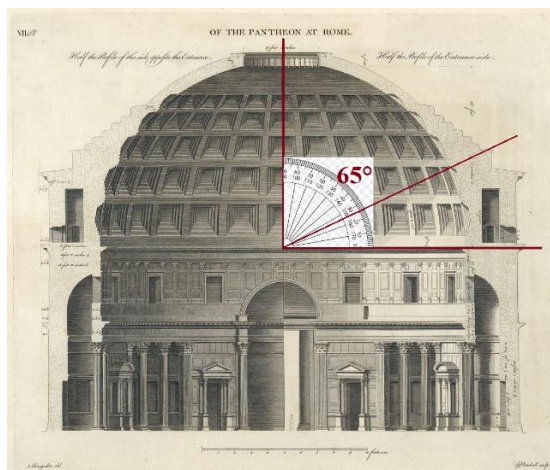


Figura 6.2 – Cúpula com α diferente de 90° (não considerada nesse trabalho)
 Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

Nesse trabalho, foram considerados apoios de 1° , 2° e 3° gênero nas análises. O mais provável é que, na estrutura real, o apoio seja algo intermediário entre o 2° e o 3° gênero.

Todo o desenvolvimento teórico parte do pressuposto de que a cúpula tenha espessura constante, o que evidentemente não é a realidade. Essa é uma limitação desse trabalho simplificado.

Calculando uma espessura média (o resultado foi de 1,13 m, conforme calculado no Apêndice A1), a cúpula teria uma relação espessura/raio de 0,52. Esse valor não é suficiente para considerá-la como uma casca fina. E o desenvolvimento teórico apresentado anteriormente funciona melhor para o caso de cascas finas, sendo esta, portanto, outra limitação desse trabalho.

Na fig. 6.3, vemos o ângulo que passa pelo centro da cúpula na vertical até o final do seu *oculus*. Com o auxílio de um transferidor, constata-se que tal ângulo é de cerca de 11° . No Apêndice A2, esse ângulo Φ_0 é calculado analiticamente e seu valor é de $11,83^\circ$.

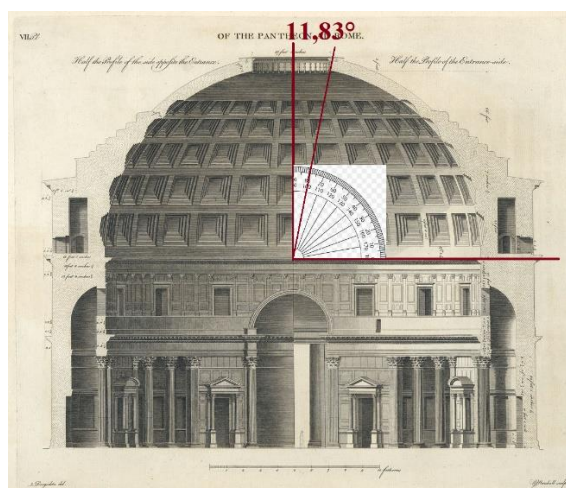


Figura 6.3 – Ângulo do *oculus*
 Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

Em um dos casos de cúpula analisada, é levado em consideração a carga de neve na cúpula do Panteão. Para o cálculo do seu valor, consulta-se o *Eurocode 1 – actions on structures – Part 1-3: general actions – snow loads*. Seu cálculo é feito no Apêndice A5, e seu valor s é de 0,48 kN/m².

Outro parâmetro necessário para se fazer os cálculos de cúpulas é o coeficiente de atenuação dos esforços λ , feito no Apêndice A3, cujo valor é de 5,7.

Na tabela 6.1 é apresentado um resumo dos parâmetros necessários para a análise de resultados desse capítulo.

Tabela 6.1 – Resumo dos principais parâmetros da cúpula do Panteão

Descrição	Sigla	Valor
Espessura média da cúpula	h	1,13 m
Raio da cúpula	a	21,65 m
Peso da cúpula	R	50.000 kN
Força por unidade de área na cúpula	p	16,98 kN/m ²
Carga de neve	s	0,48 kN/m ²
Ângulo que o <i>oculus</i> faz com a vertical	Φ_0	11,83°
Coeficiente de atenuação dos esforços	λ	5,7
Massa específica do concreto romano	γ	15 kN/m ³
Módulo de elasticidade do concreto romano	E	2,9 Gpa
Coeficiente de Poisson do concreto romano	ν	0,2

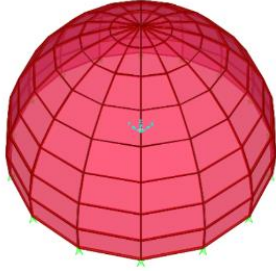

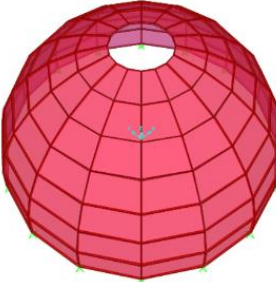
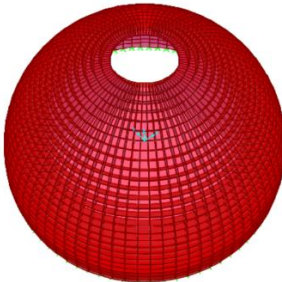
6.1 CONVERGÊNCIA DA MALHA

Na modelagem da cúpula, a malha em elementos finitos foi refinada até se obter uma convergência para os valores dos esforços de membrana. Nesse contexto, pode-se então validar a modelagem em elementos finitos a partir do erro obtido quando comparado à técnica analítica.

Com o SAP, no refinamento mostrado na tabela 6.2, o modelo estrutural da malha 1 foi feito com 16 subdivisões no sentido angular e 8 subdivisões na altura²⁴. Por outro lado, para o modelo estrutural da malha 2 foram assumidos um número de 80 subdivisões no sentido angular e 30 subdivisões na altura.

²⁴Em outras palavras: no SAP2000 escolhe-se o modelo *Shells e Spherical Dome* com *Radius*, R de 21,65 m, *Row Down Angle*, T 90°, *Num. of Divisions*, Angular de 16, *Num. of Divisions*, Z de 8 e inserindo os dados relevantes da cúpula, como colocar apoios de primeiro gênero na sua base (marcar apenas *Translation 3* em *Assign Joint Restraints*), constrói-se os dois modelos estruturais da malha 1: uma cúpula fechada e, eliminando alguns elementos do modelo, uma cúpula aberta.

Tabela 6.2 – Níveis de refinamento da malha

Modelo estrutural	Malha	
	1	2
Cúpula fechada (sem <i>oculus</i>)		
Cúpula aberta (com <i>oculus</i>)		

O modelo estrutural da malha 1 foi utilizado para comparação com os resultados da Teoria de Membrana – em cada um desses casos também é utilizada a malha 2 para efeito de comparação entre uma malha mais refinada e outra menos refinada – e o modelo estrutural da malha 2 para comparação com os resultados da Teoria Flexional.

A justificativa para a utilização da malha 1 é a seguinte: mesmo essa malha sendo um tanto grosseira se comparada com a malha 2, os valores – para a maior parte da estrutura – apresentaram bons resultados, como será mostrado a seguir. Para resultados insatisfatórios, é feito o teste de convergência – refinamento da malha – para tentar melhorar os resultados. Porém, tal justificativa para a utilização da malha 1 é apenas para fins didáticos, pois é sempre recomendável análises com malhas mais refinadas.

6.2 CASO 1 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Pelas eqs. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 e pela tabela 6.1, chega-se aos seguintes resultados analíticos para o caso 1:

$$N_{\phi} = -367,6 \frac{1}{1 + \cos \phi}, \quad (6.1)$$

$$N_{\theta} = 367,6 \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right), \quad (6.2)$$

$$\Delta_r = 0,0024 \sin \phi \left(\frac{1,2}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right), \quad (6.3)$$

$$\Delta_{\phi} = 0,00024 \sin \phi. \quad (6.4)$$

Com o SAP, a análise do caso 1 está ilustrado na fig. 6.4. Com base nessas figuras, foram extraídos cortes transversais e radiais na estrutura da cúpula para avaliação dos resultados numéricos. Além disso, puderam ser obtidos os resultados analiticamente, plotados através das eqs. 6.1 e 6.2, e comparados com o Método dos Elementos Finitos por meio do *software* SAP. A tabela 6.3 apresenta o comparativo.

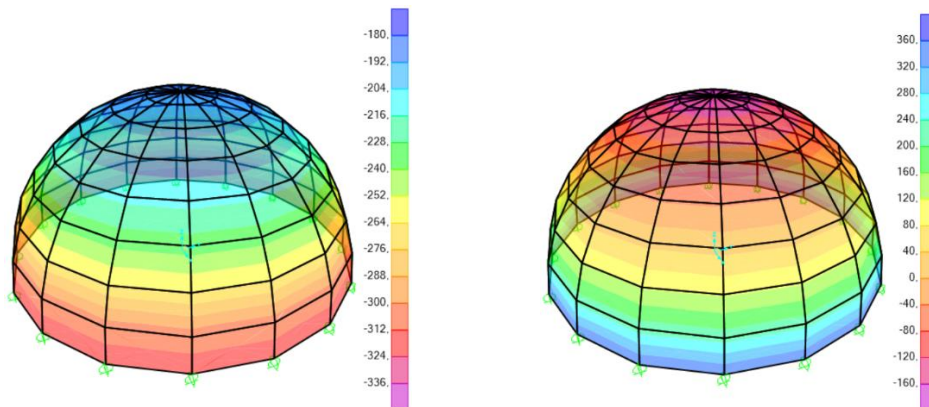


Figura 6.4 – Esforços de membrana N_{ϕ} (esquerda) e N_{θ} (direita) (malha 1)

Tabela 6.3 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 1 (malha 1)

ϕ (graus)	N_{ϕ} (kN) Analítico	N_{ϕ} (kN) Numérico	N_{θ} (kN) Analítico	N_{θ} (kN) Numérico
0	-183,8	-191,5	-183,8	-184,4
11,25	-185,6	-189,5	-175,0	-172,3
22,50	-191,1	-189,5	-148,5	-141,0
22,75	-200,7	-197,5	-104,9	-100,6
45,00	-215,3	-212,1	-44,6	-44,8
56,25	-236,3	-233,6	32,1	26,5
67,50	-265,9	-264,2	125,2	114,8
78,75	-307,6	-307,5	235,9	221,2
90,00	-367,6	-316,9	367,6	362,4

Finalmente, são feitos gráficos comparativos – analítico e numérico – de N_ϕ e N_θ (fig. 6.5).

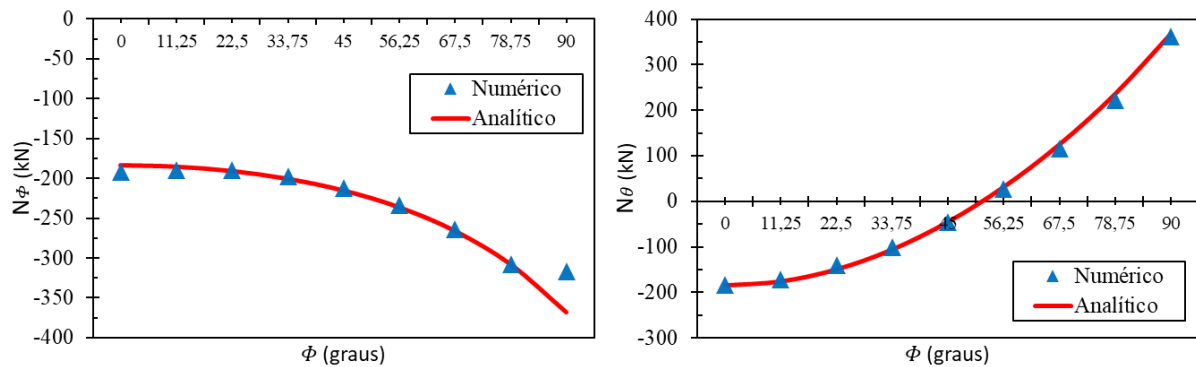


Figura 6.5 – Gráficos comparativos do caso 1 (malha 1)

Percebe-se que, exceto pelo ponto em 90° de N_ϕ , foram obtidos excelentes resultados, com muitos valores quase coincidentes, apesar da malha não ser muito refinada.

Através da solução das eqs. 6.3 e 6.4 e da fig. 6.6, nota-se que o resultado também convergiu para os deslocamentos Δ_r e Δ_ϕ da cúpula.

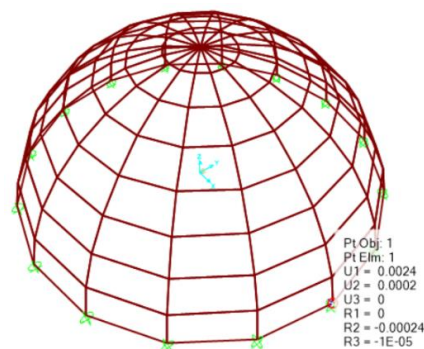


Figura 6.6 – Deslocamento Δ_r (soma vetorial de U1 e U2) e Δ_ϕ (R2) na base da cúpula (malha 1)

Como ilustração, é apresentado na fig. 6.7 o resultado gráfico da malha mais refinada. E também, para efeito comparativo entre as malhas 1 e 2, são apresentados os resultados da malha 2 através da tabela 6.4 e da fig. 6.8.

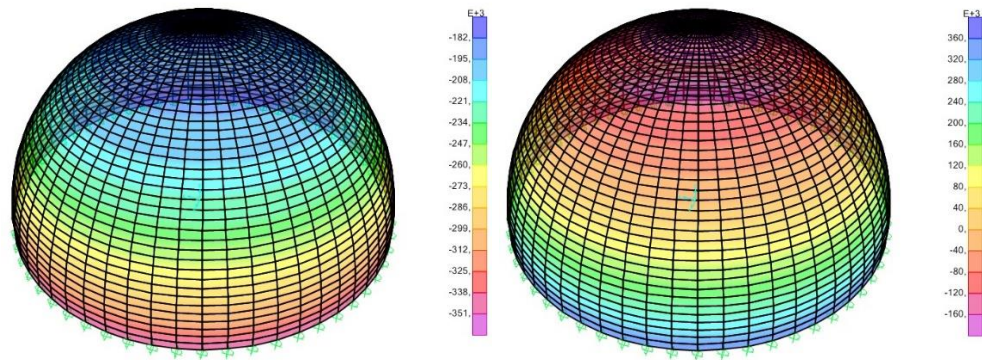


Figura 6.7 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 2)

Tabela 6.4 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 1 (malha 2)

Φ (graus)	N_ϕ (kN) Analítico	N_ϕ (kN) Numérico	N_θ (kN) Analítico	N_θ (kN) Numérico
0	-183,8	-180,8	-183,8	-180,6
9	-184,9	-181,5	-178,1	-174,4
18	-188,4	-184,6	-161,2	-157,4
27	-194,4	-190,2	-133,1	-129,9
36	-203,2	-198,8	-94,2	-91,3
45	-215,3	-210,7	-44,6	-43,6
54	-231,5	-226,6	15,4	14,6
63	-252,8	-247,5	85,9	83,8
72	-280,8	-274,9	167,2	162,9
81	-317,9	-311,4	260,4	253,8
90	-367,6	-346,6	367,6	359,9

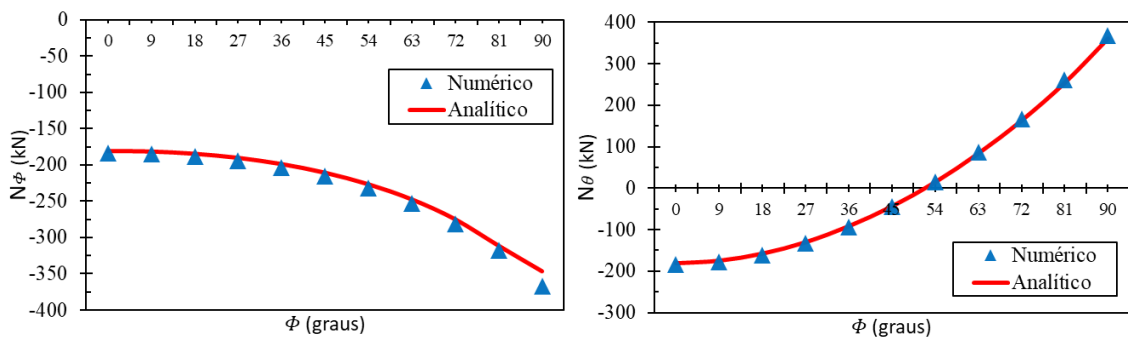


Figura 6.8 – Gráficos comparativos do caso 1 (malha 2)

Aqui, nota-se que os resultados são ainda melhores, como era de se esperar.

6.3 CASO 2 – CÚPULA COM *OCULUS* SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Similarmente ao que foi feito no caso 1, através das eqs. 4.7 e 4.8, chega-se aos seguintes resultados analíticos para o caso 2:

$$N_{\phi} = -367,6 \frac{\cos(0,2065) - \cos \phi}{\sin^2 \phi}, \quad (6.5)$$

$$N_{\theta} = 367,6 \left(\frac{\cos(0,2065) - \cos \phi}{\sin^2 \phi} - \cos \phi \right). \quad (6.6)$$

Com a mesma metodologia utilizada no caso 1, mostra-se na fig. 6.9 a modelagem no SAP2000 e apresentam-se seus resultados analíticos e numéricos com a malha 1 na tabela 6.5 e na fig. 6.10.

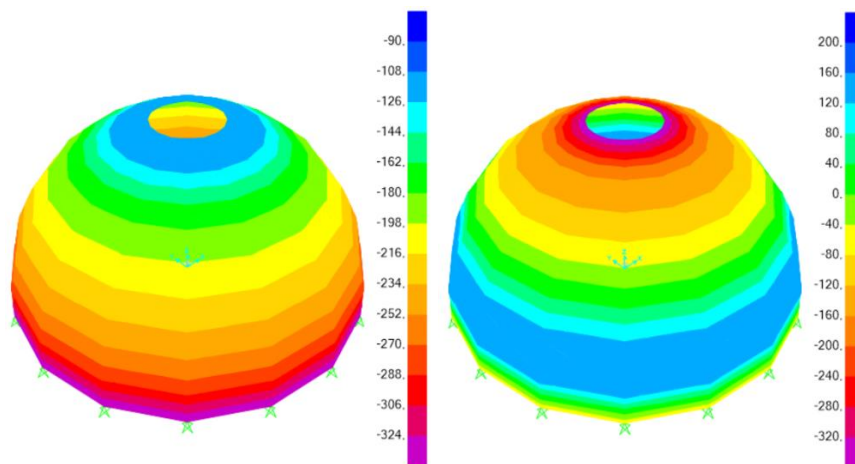


Figura 6.9 – Esforços de membrana N_{ϕ} (esquerda) e N_{θ} (direita) (malha 1)

Tabela 6.5 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 2 (malha 1)

ϕ (graus)	N_{ϕ} (kN) Analítico	N_{ϕ} (kN) Numérico	N_{θ} (kN) Analítico	N_{θ} (kN) Numérico
11,83	0	-126,7	-380,2	-361,0
22,5	-137,7	-127,2	-201,9	-173,2
33,75	-175,4	-173,1	-130,2	-118,0
45,00	-199,7	-197,2	-60,2	-57,7
56,25	-225,0	-223,7	20,8	17,4
67,5	-256,7	-256,6	116,0	107,1
78,75	-299,5	-300,9	227,8	213,9
90,00	-359,8	-309,9	359,8	355,7

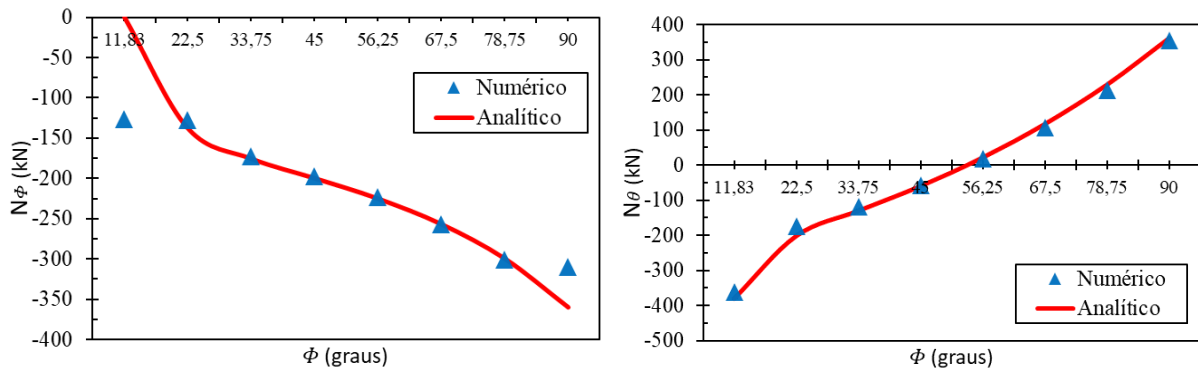


Figura 6.10 – Gráficos comparativos do caso 2 (malha 1)

Analisando o resultado acima, percebe-se que os valores numéricos para N_ϕ na borda do *oculus* (ângulo de $11,83^\circ$) e na base da cúpula (ângulo de 90°) divergiram bastante em relação ao resultado analítico. Uma malha mais refinada é indicada. Didaticamente, isso mostra que é preciso cuidado especial nas bordas das estruturas quando forem feitas análises estruturais.

Como ilustração, mostra-se na fig. 6.11 a modelagem no SAP2000 com os resultados de N_ϕ e N_θ , respectivamente. Novamente agora, para efeito comparativo entre as malhas 1 e 2, são apresentados os resultados da malha 2 através da tabela 6.6 e da fig. 6.12.

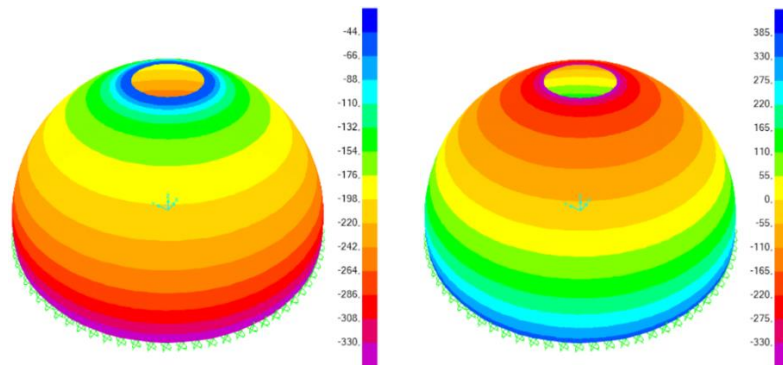


Figura 6.11 – Esforços de membrana N_ϕ (esquerda) e N_θ (direita) (malha 2)

Tabela 6.6 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 2 (malha 2)

Φ (graus)	N_ϕ (kN) Analítico	N_ϕ (kN) Numérico	N_θ (kN) Analítico	N_θ (kN) Numérico
11,83	0	-48,3	-359,8	-367,0
18	-106,6	-101,0	-243,0	-238,3
27	-156,5	-152,2	-171,0	-165,3
36	-180,6	-176,0	-116,8	-113,7
45	-199,7	-194,9	-60,2	-59,0
54	-219,6	-214,4	3,5	3,1
63	-243,0	-237,6	76,1	72,8
72	-272,2	-266,3	158,6	153,3
81	-309,9	-303,4	252,4	245,7
90	-359,8	-338,7	359,8	352,0

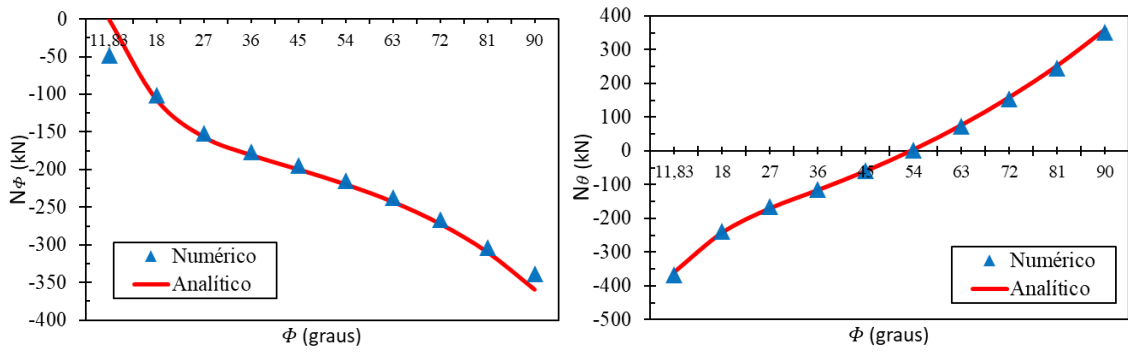


Figura 6.12 – Gráficos comparativos do caso 2 (malha 2)

Nota-se uma melhora significativa nos resultados com a malha mais refinada. Ainda assim, cuidado especial deve ser tomado nos extremos da estrutura.

6.4 CASO 3 – CÚPULA SUBMETIDA A CARGA DE NEVE (APOIO DE PRIMEIRO GÊNERO)

Similarmente ao que foi feito nos casos anteriores, através das eqs. 4.9 e 4.11 (e através do Apêndice A5), chega-se aos seguintes resultados analíticos para o caso 3:

$$N_{\phi} = -5,20 \text{ kN/m}, \quad (6.7)$$

$$N_{\theta} = -5,2 \cos 2\Phi. \quad (6.8)$$

Então, apresentam-se os resultados comparativos na tabela 6.7 e na fig. 6.13.

Tabela 6.7 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 3 (malha 1)

Φ (graus)	N_{ϕ} (kN) Analítico	N_{ϕ} (kN) Numérico	N_{θ} (kN) Analítico	N_{θ} (kN) Numérico
0	-5,2	-5,3	-5,2	-5,3
5	-5,2	-5,3	-5,1	-5,2
10	-5,2	-5,2	-4,9	-4,7
15	-5,2	-5,0	-4,5	-4,0
20	-5,2	-4,8	-4,0	-2,9
25	-5,2	-4,5	-3,3	-1,7
30	-5,2	-4,1	-2,6	-0,4

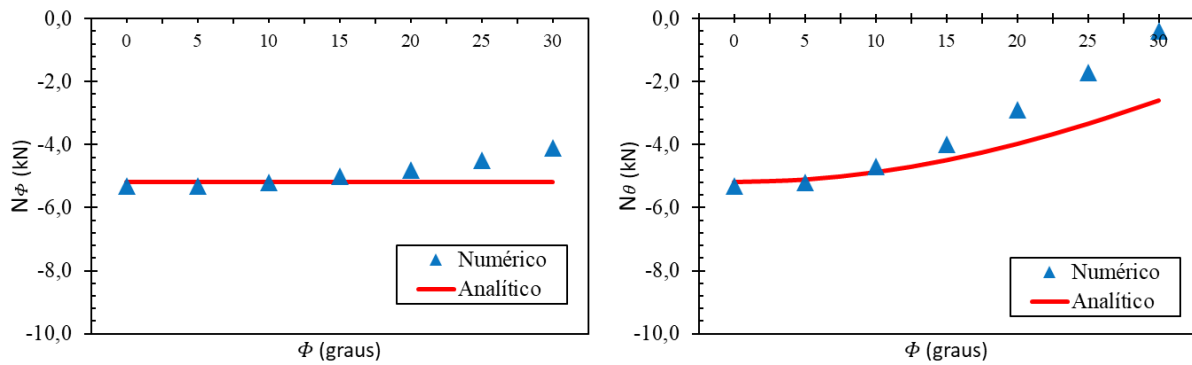


Figura 6.13 – Gráficos comparativos do caso 3 (malha 1)

Aqui é aconselhável uma malha mais refinada para a obtenção de melhores resultados de N_θ , pois, percentualmente, seus valores divergiram, embora em termos absolutos a diferença nos esforços seja muito pequena.

Então, similarmente aos casos anteriores, são apresentados os resultados da malha 2 através da tabela 6.8 e da fig. 6.14.

Tabela 6.8 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 3 (malha 2)

Φ (graus)	N_ϕ (kN) Analítico	N_ϕ (kN) Numérico	N_θ (kN) Analítico	N_θ (kN) Numérico
0	-5,2	-5,2	-5,2	-5,2
9	-5,2	-5,2	-4,9	-5,0
18	-5,2	-5,3	-4,2	-4,5
27	-5,2	-5,5	-3,1	-3,8
36	-5,2	-5,7	-1,6	-2,7

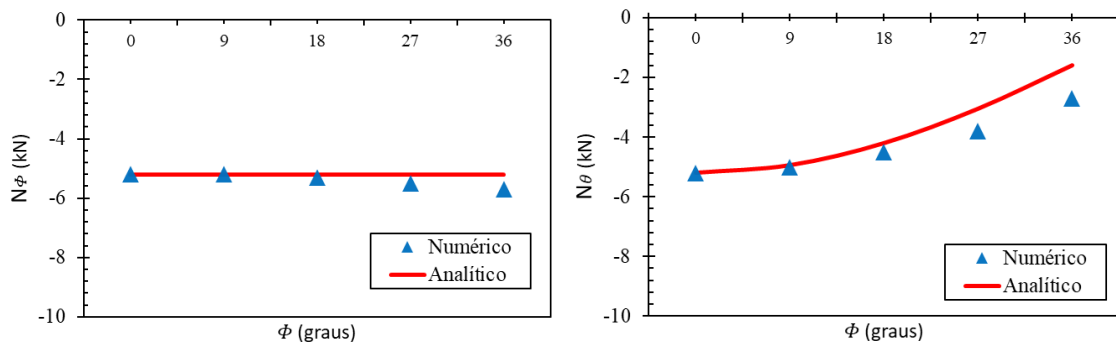


Figura 6.14 – Gráficos comparativos do caso 3 (malha 2)

Novamente, como de se esperar, os resultados – analíticos e numéricos – ficaram ainda mais próximos com a malha mais refinada.

6.5 CASO 4 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE SEGUNDO GÊNERO)

Similarmente ao que foi feito nos casos anteriores, através das eqs. 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18, chega-se aos seguintes resultados analíticos para o caso 4:

$$N_{\phi} = -\frac{367,6}{1 + \cos \phi} \quad (6.9)$$

$$- \sqrt{2} \cot(\phi) e^{-5,7(\pi/2-\phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{4}\right) (-38,5),$$

$$N_{\theta} = 367,6 \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) \quad (6.10)$$

$$+ 11,4 e^{-5,7(\pi/2-\phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 38,5.$$

Então, apresentam-se os resultados comparativos analítico-numéricos – aqui e no caso 5 somente com a malha 2 – na tabela 6.9 e na fig. 6.15.

Tabela 6.9 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 4 (malha 2)

ϕ (graus)	N_{ϕ} (kN) Analítico	N_{ϕ} (kN) Numérico	N_{θ} (kN) Analítico	N_{θ} (kN) Numérico
0	-179,5	-180,6	-183,7	-180,4
9	-184,8	-181,4	-178,1	-174,2
18	188,4	-184,5	-161,4	-157,3
27	-195,5	-190,5	-134,0	-131,0
36	-203,5	-199,3	-95,4	-93,3
45	-215,7	-211,1	-43,4	-42,2
54	-231,1	-226,2	26,5	27,1
63	-251,0	-245,3	112,8	112,0
72	-278,3	-271,6	183,2	179,0
81	-317,5	-309,8	148,3	144,5
90	-367,6	-360,3	-71,3	-70,2

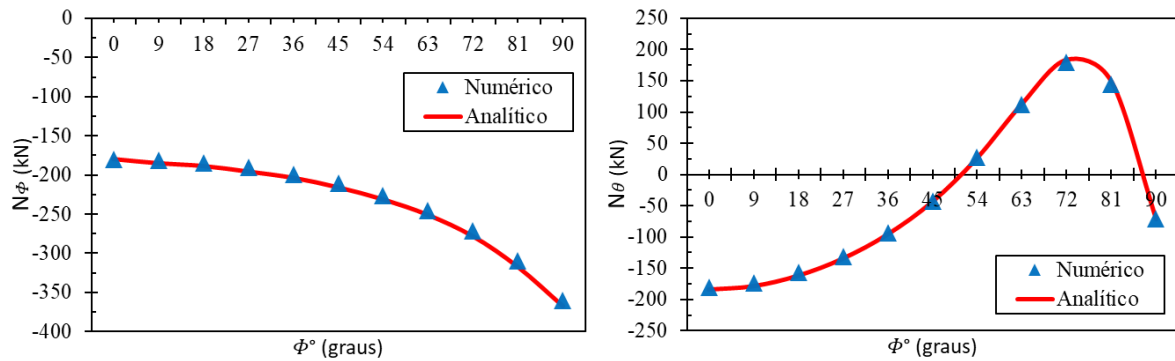


Figura 6.15 – Gráficos comparativos do caso 4 (malha 2)

Aqui os resultados foram excelentes, com pontos quase coincidentes.

6.6 CASO 5 – CÚPULA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE PESO PRÓPRIO (APOIO DE TERCEIRO GÊNERO)

Similarmente ao que foi feito nos casos anteriores, através das eqs. 4.13, 4.14, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25, chega-se aos seguintes resultados analíticos para o caso 5:

$$N_{\phi} = -\frac{367,6}{1 + \cos \phi} - \sqrt{2} \cot(\phi) e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (-77,1) - 0,53 \cot(\phi) e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin(5,7(\pi/2 - \phi)) \cdot (146,8), \quad (6.11)$$

$$N_{\theta} = 367,6 \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) - 11,4 e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{2}\right) \cdot (-77,1 \cdot 10^3) - 4,2 e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (146,8 \cdot 10^3). \quad (6.12)$$

Então, apresentam-se os resultados comparativos analíticos e numéricos na tabela 6.10 e na fig. 6.16.

Tabela 6.10 – Resultados analíticos e numéricos dos esforços de membrana para o caso 5 (malha 2)

Φ (graus)	N_ϕ (kN)		N_θ (kN)	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0	-178,1	-180,7	-183,8	-180,5
9	-184,9	-181,5	-178,2	-174,5
18	-188,5	-184,7	-161,7	-158,0
27	-194,7	-190,6	-134,0	-131,0
36	-203,5	-199,3	-93,9	-92,1
45	-215,1	-210,7	-38,6	-38,4
54	-230,1	-225,4	31,8	31,1
63	-250,4	-244,8	100,0	103,0
72	-279,9	-272,8	112,4	131,1
81	-321,0	312,6	8,3	49,6
90	-367,6	-354,3	-75,4	-70,9

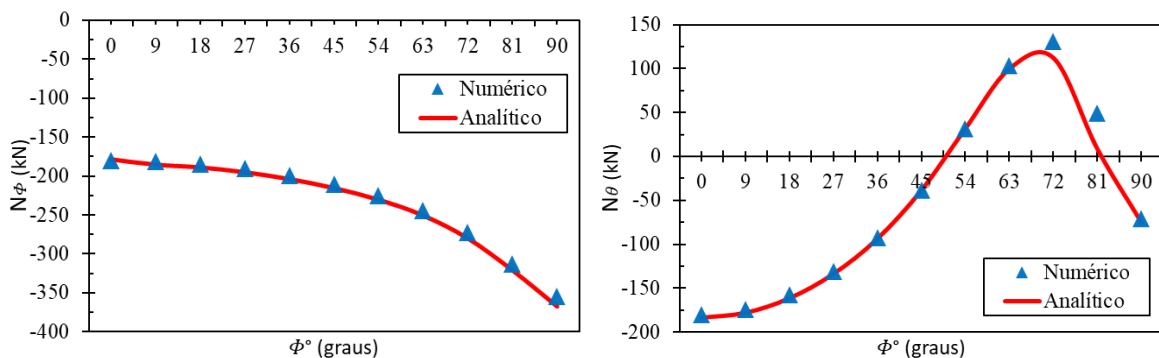


Figura 6.16 – Gráficos comparativos do caso 5 (malha 2)

Aqui os resultados apresentados também são coerentes (há uma leve alteração nos pontos em Φ igual a 72° e 81° que para os esforços nos paralelos). Por ser o caso mais complexo, os cálculos do caso 5 são mostrados em maiores detalhes no Apêndice A6.

6.7 COMPARAÇÃO DOS ESFORÇOS ENTRE OS 3 TIPOS DE APOIO

Neste item é feito um estudo comparativo entre os resultados analíticos (fig. 6.17) das cúpulas com apoios de 1° , 2° e 3° gênero (demais parâmetros inalterados), executados no modelo estrutural de cúpula fechada da malha 2.

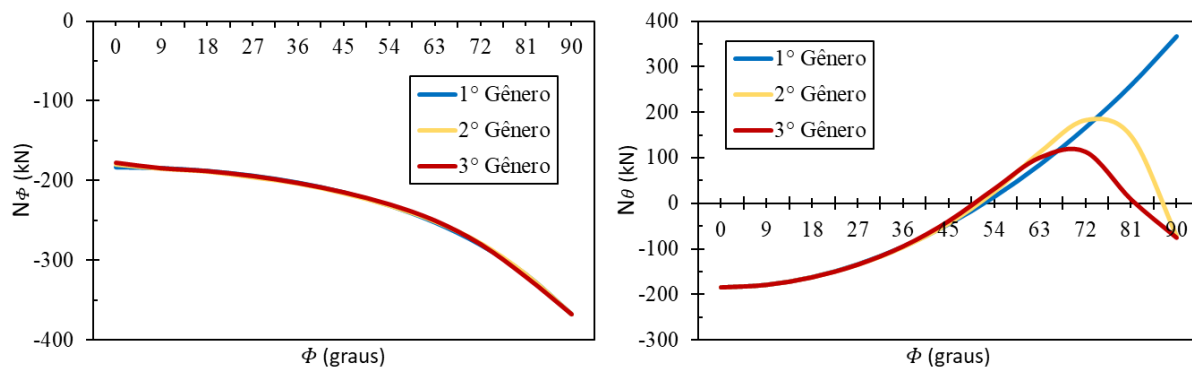


Figura 6.17 – Gráficos comparativos de cúpulas com apoios de 1°, 2° e 3° gênero (resultados analíticos)

A análise dos gráficos se mostra coerente com os conceitos teóricos encontrados na literatura sobre o tema, pois os resultados dos esforços nas cúpulas, considerando os três tipos de apoio, são praticamente coincidentes para toda a cúpula nos meridianos e, para ângulos distantes mais de 30° de suas bases, também para os paralelos.

As questões da escolha do refinamento da malha e dos parâmetros do modelo estrutural a serem adotados são complexas e requerem experiência.

7 CONCLUSÃO

Buscou-se, neste trabalho, descrever a estrutura do Panteão Romano e todos os aspectos que pudessem, de alguma forma, contextualizar essa obra em sua época. Isso porque a engenharia e seus métodos de construção avançam com o tempo, em relação às técnicas, ao material utilizado e à rapidez com os respectivos cálculos. Por isso, mostrou-se um pouco do seu impacto como obra de engenharia sobre construções posteriores. Atenção especial foi dada à sua cúpula, tendo sido feitos cálculos analíticos – através da Teoria de Membrana e da Teoria Flexional – e cálculos numéricos – através do Método dos Elementos Finitos via *software* SAP2000 – para analisar seus esforços normais.

Por meio da literatura, foi possível unir equações específicas para cada caso particular (apoios de 1º, 2º ou 3º gênero) e calcular os referidos esforços para uma cúpula semicircular, homogênea e de espessura constante, tendo como modelo e inspiração as dimensões do Panteão.

Nos casos de apoios de 1º gênero, foram calculados os esforços normais de cúpulas fechadas e abertas submetidas ao peso próprio e à carga uniformemente distribuída (referidos como casos 1, 2 e 3). Para os casos de apoios do 2º e 3º gênero (casos 4 e 5), foram calculados os esforços normais para cúpula fechada submetida ao peso próprio. Em seguida, foram feitas simulações numéricas de cada um desses casos, através de modelagem via SAP2000 para comparação dos métodos.

Como complemento, arcos também foram discutidos e analisados em apêndices. Foram calculadas as matrizes de flexibilidade de arco circular birotulado e biengastado.

Para outros estudos, visando uma melhor aproximação da estrutura real, pode-se, por exemplo, considerar a espessura variável da cúpula, o fato de seu material constituinte ser heterogêneo e de a cúpula não ser uma casca fina, bem como investigar os esforços secundários de momento fletor, além de outros tipos de problemas que envolvam temperatura, vento e terremoto, dentre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACHWAL, V. G.; JANGID, R. S.; VARMA, M. N. **Desenho dos degraus**. 2006. Disponível em: <https://brewminate.com/origin-and-evolution-of-the-roman-dome/>. Acesso em: 2 out 2020.

ADDIS, W. **Edificação: 3000 anos de projeto, engenharia e construção**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

ALBUQUERQUE, M. **Base de coluna externa do Panteão**. 2015. Disponível em: <https://historiaartearquitetura.com/2017/11/27/panteao-de-roma/>. Acesso em: 13 jul 2020.

ALBUQUERQUE, M. **História da arte e arquitetura**. 2015. Disponível em: <https://historiaartearquitetura.com/2017/11/27/panteao-de-roma/>. Acesso em: 13 jul 2020.

ALBUQUERQUE, M. **Teto de madeira no pórtico do Panteão**. 2015. Disponível em: <https://historiaartearquitetura.com/2017/11/27/panteao-de-roma/>. Acesso em: 13 jul 2020.

AMIN, O. S. M. **Bust of emperor Hadrian**. Roman 117-138 CE. Probably from Rome, Italy. Formerly in the Townley Collection. Now housed in the British Museum, London. 2016. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bust_of_Emperor_Hadrian._Roman_117-138_CE._Probably_From_Rome,_Italy._Formerly_in_the_Townley_Collection._Now_housed_in_the_British_Museum,_London.jpg. Acesso em: 9 dez 2020.

ANCIENT ROME. **Um vexillum com a aquila imperial e a sigla SPQR**. Disponível em: <https://ancient-rome.info/ancient-roman-flag/>. Acesso em: 9 jul 2020.

ARBALETE. **La chiesa di San Carlo al Corso a Milano**. 2010. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Milano_chiesa_San_Carlo_al_Corso.JPG. Acesso em: 16 jul 2020.

ARCHEOROMA. **Entablamento (arquitrave, friso e cornija) e capitel**. Disponível em: <https://www.archeoroma.org/sites/pantheon/>. Acesso em: 13 jul 2020.

ARCHEOROMA. **Pantheon**. Disponível em: <https://www.archeoroma.org/sites/pantheon/>. Acesso em: 13 jul 2020.

BECKER, J. A. **Ordens arquitetônicas gregas**. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/humanities/ancient-art-civilizations/greek-art/beginners-guide-greece/a/greek-architectural-orders>. Acesso em: 14 jul 2020.

BENNETT, J. **Trajan: optimus princeps, a life and times**. Bloomington: Indiana University Press, 1997.

BENUTZER. **Componentes de uma coluna**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Korinthische_S%C3%A4ulenordnung_Entasis2.png. Acesso em: 14 jul 2020.

BRITISH LIBRARY. **Página do Codex Arundel**. Disponível em: http://www.bl.uk/manuscripts/Viewer.aspx?ref=arundel_ms_263_f001r. Acesso em: 6 jul 2020.

ČAKARIĆ, I. **Façade installation optimization**. Detmold: Hochschule Ostwestfalen-Lippe, 2017.

CHARLES RIVER EDITORS. **The Roman Pantheon: the history and legacy of Rome's famous landmark**. s/l, 2020.

CHISHOLM, H. **Discharging arch**. 11. ed. Encyclopædia Britannica: Cambridge University Press, 1911.

CHISHOLM, L. J.; ZUPKO, R. et al. Measurement system. **Encyclopædia Britannica**. 2018. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/measurement-system>. Acesso em: 8 abr 2020.

CODEX ATLANTICUS. **Balística**. Disponível em: <http://www.codex-atlanticus.it/#/Overview>. Acesso em: 7 jul 2020.

CODEX ATLANTICUS. **Fortificação**. Disponível em: <http://www.codex-atlanticus.it/#/Overview>. Acesso em: 7 jul 2020.

CRISTIANO64. **Area del Pantheon, tempio di Adriano, tempio e colonna di Marco Aurelio** - plastico di Italo Gismondi presso il Museo della Civiltà Romana (EUR). 2014. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Area_Pantheon_Tempio_e_Colonna_di_Marco_Aurelio_-_Gismondi.jpg. Acesso em: 12 jul 2020.

CSI. **CSI Analysis Reference Manual**. Berkeley, 2011.

CSI. **Computers & Structures, Inc**. Structural and earthquake engineering software. Disponível em: <https://www.csiamerica.com/>. Acesso: 23 nov 2020.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. São Paulo: Lafonte, 2017.

DESCOUENS, D. **San Simeone Piccolo eighteenth century by architect Giovanni Antonio Scalfarotto and the scuola dei Tessitori di Panni di Lana, Venice**. 2012. Disponível em: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:San_Simeone_Piccolo_\(Venice\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:San_Simeone_Piccolo_(Venice).jpg). Acesso em: 8 dez 2020.

DESGODETZ, A. B.; **Les edifices antiques de Rome, dessinés et mesurés tres exactement**. Paris: Chez Jean Baptiste Coignard, 1682.

DILIFF. **The Royal Albert Hall, as viewed from the Albert Memorial in Kensington Gardens, London**. 2012. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Royal_Albert_Hall,_London_-_Nov_2012.jpg. Acesso em: 28 nov 2020.

DONOVAN. **Painéis afundados**. 1975. Disponível em: <https://www.nybooks.com/contributors/matt-donovan/>. Acesso em: 12 jul 2020.

DONOVAN. **Degraus de acesso da cúpula**. 1975. Disponível em: <https://www.nybooks.com/contributors/matt-donovan/>. Acesso em: 12 jul 2020.

DONOVAN. **O oculus visto do topo do Panteão**. 1975. Disponível em: <https://www.nybooks.com/contributors/matt-donovan/>. Acesso em: 12 jul 2020.

DONOVAN. **Porta vista do interior**. 1975. Disponível em: <https://www.nybooks.com/contributors/matt-donovan/>. Acesso em: 12 jul 2020.

EN 1991-1-3. **Eurocode 1: actions on structures – Part 1-3: general actions – snow loads**. Brussels: BSi, 2003.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Capital**. 2017. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/capital-architecture>. Acesso em: 6 dez 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Dome**. 2014. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/dome-architecture>. Acesso em: 13 jul 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Oculus**. 1998. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/oculus>. Acesso em: 6 dez 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Pediment**. 2017. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/pediment-architecture>. Acesso em: 6 dez 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Rotunda**. 2016. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/rotunda-architecture>. Acesso em: 6 dez 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Statue of Zeus**. 2015. Disponível em: <https://www.britannica.com/topic/Statue-of-Zeus>. Acesso em: 5 dez 2020.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. **Vários tipos de capitéis**. 2013. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/capital-architecture>. Acesso em: 6 dez 2020.

FCB981. **A HDR image of the dome at the MIT campus**. This version edited by reducing exposure (to save the highlights), applying highlight recovery (to save highlights), some curves work, noise reduction and some cropping. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:MIT_Dome_night1_Edit.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

FINKEL, I.; SEYMOUR, M. **Babylon: city of wonders**. London: British Museum Press, 2008.

FURIO IMPERIALE. **Tempio canoviano di Possagno (Treviso)**. 2007. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Tempio_Canoviano_1.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

GAGO, A. M. C. S. **Análise estrutural de arcos, abóbadas e cúpulas**. Lisboa: Universidade Técnica de Lisboa, 2004.

GALLERIE ACCADEMIA. **O homem vitruviano, de da Vinci**. Disponível em: <http://gallerieaccademia.it/node/1582>. Acesso em: 16 mar 2020.

GLOAG, J. **Guide to western architecture**. 2. ed. London: Spring Books, 1969.

GOLDSMITH, R. W. **An estimate of the size and structure of the national product of the early Roman Empire**. Review of Income and Wealth, 1984.

GRAYSICK. **Thomas Jefferson Memorial, inside at night**. 2013. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Inside_the_Jefferson_Memorial.jpg. Acesso em: 1º set 2020.

GUERRIN, A.; LAVAU, R. C. **Tratado de concreto armado**. vol. 4. s/l: Hemus, 2003.

HASHIME. **Comparação: Panteão (abaixo) e Große Halle**. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/572449802611199223/>. Acesso em 12 nov 2020.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HOPKINS, K. **The political economy of the Roman Empire**. The dynamics of ancient empires: state power from assyria to byzantium. Oxford: Oxford University Press, 2009.

IDIA LAB. **Simulação do Panteão em sua época pagã**. Ball State University. Disponível em: <https://idialab.org/virtual-roman-pantheon-in-blue-mars-cryengine>. Acesso em: 20 out 2020.

IDIA LAB. **Simulação no interior do Panteão (noturno)**. Ball State University. Disponível em: <https://idialab.org/virtual-roman-pantheon-in-blue-mars-cryengine>. Acesso em: 20 out 2020.

ISAACSON, W. **Leonardo da Vinci**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2017.

ISAIA, G. C. **Concreto: ciência e tecnologia**. vol. 1. São Paulo: IBRACON, 2011.

JEFFERSON, T. **Thomas Jefferson's design of the "rotunda", the library at the heart of the University of Virginia**. "South elevation of the rotunda, begun 1818, completed March 29, 1819. Ink and pencil drawing. 1818/1819. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:University_of_Virginia_Rotunda_1819_draft.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

KELLY, C. **The Roman Empire**: a very short introduction. Oxford: Oxford University Press, 2006.

KNAB. **The mausoleum at Halicarnassus, painting by Ferdinand Knab**. Cropped from the original. 1886. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mausoleum_at_Halicarnassus_by_Ferdinand_Knab_\(1886\)_cropped.png](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Mausoleum_at_Halicarnassus_by_Ferdinand_Knab_(1886)_cropped.png). Acesso em: 21 jul 2020.

KOZLOWSKI, M. **This photo was taken October 2005 at Monticello, the home of Thomas Jefferson, in Charlottesville, Virginia**. The reflection is from the fish pond where Jefferson would temporarily keep fish before they were prepared for meals at the house. 2005. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Monticello_reflected.JPG. Acesso em: 16 jul 2020.

KOSTOF, S. **A history of architecture**. Oxford: Oxford University Press, 1985.

LUSTOSA, I. A. A. **Um estudo comparativo analítico-numérico de esforços e deslocamentos em cascas cilíndricas abertas ou com conexões de borda**. 2011. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

MA. **Apollodorus**. 2009. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apollodorus_of_Damascus,_Greek_Architect_and_Engineer._Pic_01.jpg. Acesso em: 21 jul 2020.

MACDONALD, W. L. **The Pantheon**: design, meaning, and progeny. Cambridge: Harvard University Press, 1976.

MARDER, T. A.; JONES, M. W. **The Pantheon – from antiquity to the present**. New York: Cambridge University Press, 2015.

MARK, M. **Torino - chiesa della gran madre di Dio**. 2008. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:19TorinoGranMadreDio.JPG>. Acesso em: 16 jul 2020.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MASI, F.; STEFANO, I.; VANNUCCI, P. **A study on the effects of an explosion in the Pantheon of Rome**. 2018. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/A-study-on-the-effects-of-an-explosion-in-the-of-Masi-Stefanou>. Acesso em: 20 ago 2020.

MATHWORKS. **About MathWorks**. Disponível em: https://www.mathworks.com/company.html?s_tid=hp_ff_a_company. Acesso em: 23 nov 2020.

METABALLSTUDIOS. **Fictional buildings size comparison | 3D [real scale]**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hjIci91FRX4>. Acesso em: 12 nov 2020.

MEYER, L. **Parte da cúpula que recebe carga de neve**. Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/19773685839170299/>. Acesso em: 12 jul 2020.

MM. **Italia, regione Campania, Napoli, chiesa di San Francesco da Paola (piazza del Plebiscito), facciata della chiesa**. 2007. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:NapoliSanFrancescoDaPaolaFacciata.jpg>. Acesso em: 16 jul 2020.

NATIONAL NUMISMATIC COLLECTION AT THE SMITHSONIAN INSTITUTION. **United States \$2 banknote, legal tender, series of 1928 (Fr. Ref#1501)**. Part of the National Numismatic Collection, NMAH, Smithsonian Institution. Serial #1 of a printing of 55,889,424 notes. 2013. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:US-\\$2-LT-1928-Fr.1501.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:US-$2-LT-1928-Fr.1501.jpg). Acesso em: 16 jul 2020.

NGUYEN, M. L. **Portrait of M. Vipsanius Agrippa of the Gabii type**. Marble, ca. 25–24 BC. From Gabii. 2009. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Agrippa_Gabii_Louvre_Ma1208.jpg. Acesso em: 21 jul 2020.

NUNES, P. C. C. **Teoria do Arco de Alvenaria: Uma Perspectiva Histórica**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009, 160p, 2009.

PANTHEON ROMA. **Design original do piso do Panteão**. Disponível em: https://twitter.com/pantheon_roma/status/1257214400039211008. Acesso em: 16 jun 2020.

PANTHEON ROMA. **Porta dupla de bronze**. Disponível em: https://twitter.com/pantheon_roma/status/1264864469844463616. Acesso em: 16 jun 2020.

PEDROSO, L. J.; **Acoplamento de Cascas Esféricas com Anel de Borda** – Aspectos Teóricos e de Projeto. Publicação Didática. Brasília: Universidade de Brasília, 2010.

PEDROSO, L. J.; **Teoria de Placas e Cascas** – Uma Abordagem Analítica e Numérica. Publicação Didática. Brasília: Universidade de Brasília, 1995.

PIO, G. **L'esterno della collegiata di Santa Maria Assunta ad Ariccia (RM) dall'ultimo piano di Palazzo Chigi**. 2009. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Collegiata_Ariccia_01.JPG. Acesso em: 16 jul 2020.

PIXABAY. **Conjunto de degraus**. Disponível em: <https://pixabay.com/photos/pantheon-rome-roof-rooftop-3434225/>. Acesso em: 13 jul 2020.

PIZZA, G. **Chiesa della divina sapienza in Rome**. 2019. Disponível em: https://it.wikipedia.org/wiki/File:Chiesa_della_Divina_Sapienza_-_30-11-2019.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

POZZA, D. V. **Cúpula da catedral de Florença: análise utilizando o método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

RABELLO, F. T.; MARCELLINO, N. A.; LORIGGIO, D. D. Processo automático para análise e definição de geometria de cúpulas axissimétricas pela teoria de membrana com tensões normais constantes. **Rev. IBRACON Estrut. Mater.**, São Paulo, v. 9, n. 4, p. 544-557, ago. 2016. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-41952016000400544&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 23 jun 2020.

RAVI, J. **Jefferson Memorial seen across the Tidal Basin at dusk in Washington, D.C., USA**. 2011. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Jefferson_Memorial_At_Dusk_1.jpg. Acesso em: 1º set 2020.

RICHARDSON, R. J. et al. **Pesquisa social métodos e técnicas**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 1999.

ROYAL ALBERT HALL. **Why was the Royal Albert Hall built?**. 2012. Disponível em: <https://www.royalalberthall.com/about-the-hall/news/2012/march/why-was-the-hall-built/>. Acesso em: 28 nov 2020.

ROYAL COLLECTION TRUST. **A map of Imola 1502**. 2018. Disponível em: <https://www.rct.uk/collection/themes/exhibitions/leonardo-da-vinci-a-life-in-drawing/the-queens-gallery-palace-of-holyroodhouse/a-map-of-imola>. Acesso em: 7 jul 2020.

ROYAL COLLECTION TRUST. **A scheme for a canal to bypass the Arno c.1503-4**. 2018. Disponível em: <https://www.rct.uk/collection/themes/exhibitions/leonardo-da-vinci-a-life-in-drawing/the-queens-gallery-palace-of-holyroodhouse/a-scheme-for-a-canal-to-bypass-the-arno>. Acesso em: 7 jul 2020.

SAMUEL H. KRESS COLLECTION. **Interior of the Pantheon, Rome, c. 1734**. Disponível em: <https://www.nga.gov/collection/art-object-page.165.html>. Acesso em: 27 nov 2020.

SAINT-POL, B. **Bust of Trajan (reign 98–117 CE), with the civic crown, a sword belt and the aegis (attribut of Jupiter and symbol of divine power)**. 2007. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Traianus_Glyptothek_Munich_72.jpg. Acesso em: 21 jul 2020.

SALVADORI, M. G. **Por que os edifícios ficam de pé**. 2. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2011.

SAVIN, A. **The Bebelplatz in Berlin: church of St. Hedwig**. 2018. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Berlin_Bebelplatz_asv2018-05_img1.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

SOLHEIRO, A. R. F. **Análise de estruturas de casca pelo método dos elementos finitos**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2017.

SMITH, W. **Dictionary of Greek and Roman antiquities**. London: John Murray, 1870.

SPIEGEL, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

SURICOMA. **Capitéis: toscano, ordens clássicas (dórico, jônico e coríntio) e composto**. Disponível em: <https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/types-capital-classical-order-vector-7567514>. Acesso em: 14 jul 2020.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. 4. ed. vol. 2. Porto Alegre: Globo, 1980.

TAAGEPERA, R. **Size and duration of empires: growth-decline curves, 600 B.C. to 600 A.D.** vol. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

TERREN IN VIRGINIA. **The rotunda at the Lawn of the University of Virginia (UVa), view from the south east**. 2007. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rotunda_UVa_from_the_south_east.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

THE NEW YORK TIMES. **Snow falls in Rome, and the eternal**. 2018. Disponível em: <https://www.nytimes.com/2018/02/26/world/europe/rome-snow.html>. Acesso em: 2 jul 2020.

VINCENTZ, F. **Rotunda of St. Marija Assunta at Triq il-Kbira in Mosta, Malta**. 2014. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Malta_-_Mosta_-_Triq_il-Kbira_%2B_Rotunda_01_ies.jpg. Acesso em: 16 jul 2020.

VIGHETTO, I. **Villa Capra detta La Rotonda**. 2006. Disponível em: https://it.wikipedia.org/wiki/File:Villa_La_Rotonda.JPG. Acesso em: 16 jul 2020.

VITRÚVIO. **Tratado de arquitectura**. 3. ed. Lisboa: IST Press, 2009.

WANTED IN ROME. **Um globo dentro do Panteão**. Disponível em: <https://www.wantedinrome.com/news/the-pantheon-in-10-facts.html>. Acesso em: 26 mar 2020.

WORLD WEATHER ONLINE. **Temperaturas máxima e mínima**. Disponível em: <https://www.worldweatheronline.com/>. Acesso em: 15 jul 2020.

APÊNCIDES

A1 – ESPESSURA MÉDIA DA CÚPULA

Para análise comparativa entre os métodos analíticos com o Método dos Elementos Finitos pelo SAP, é necessário o cálculo da espessura média da cúpula. Como foi visto, os valores apontados na literatura para a massa específica da cúpula do Panteão variam entre 1350 e 1600 kg/m³. Para o cálculo da espessura média h_{med} , foi assumido um valor intermediário de massa específica, igual a 1500 kg/m³ (igual a um peso específico de 15 kN/m³). Também foi visto que o peso da cúpula é de cerca de 50.000 kN (5.000.000 kg) e que o raio é de 21,65 m. uma vez assumido a massa específica e conhecendo o raio da cúpula semiesférica, a espessura média pode ser calculada através das equações das eqs. 4.1 e 4.2, apresentando um valor de h_{med} igual a 1,13 m.

A princípio, parece que o resultado de h_{med} é muito baixo, pois deveria estar no intervalo mínimo e máximo das diferentes espessuras reais da cúpula, ou seja, um valor de 1,40 m < h_{med} < 5,90 m. Isso é devido aos muitos espaços vazios e aos painéis afundados na cúpula do Panteão, o que reduz bastante sua espessura média. Importante ressaltar que o h_{med} é de valor aproximado para tentar reproduzir o peso global da estrutura com uma densidade não muito distante da realidade.

A2 – ÂNGULO DO *OCULUS*

Conforme exposto nesse trabalho, o diâmetro da cúpula é de aproximadamente 43,30 m (portanto, raio de 21,65 m) e o diâmetro do *oculus* é de cerca de 8,88 m. Com isso, é possível fazer o cálculo dos ângulos Φ_0 e Φ'_0 (fig. A2.1) através do conhecimento de trigonometria.

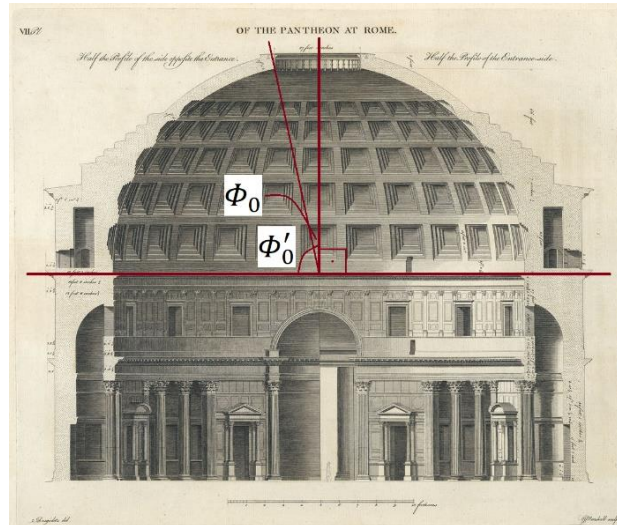


Figura A2.1 – Ângulos Φ_0 e Φ'_0
Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

Primeiro, é feita uma regra de três simples para se ter o círculo trigonométrico de raio unitário:

$$\begin{aligned} 21,65 \text{ m} &\rightarrow 1 \\ 8,88 \text{ m} &\rightarrow x \end{aligned}$$

$$\therefore x = 0,410161662818.$$

Assim, calcula-se o valor do ângulo Φ'_0 :

$$\cos \Phi'_0 = \frac{0,410161662818}{2} = 0,205080831409$$

$$\therefore \Phi'_0 = \cos^{-1}(0,205080831409) = 78,17^\circ.$$

Sabendo-se que $\Phi_0 = 90^\circ - \Phi'_0$, então

$$\Phi_0 = 90 - 78,17 = 11,83^\circ.$$

A3 - CÁLCULO DE p , ap E λ

Pela eq. 4.2 e com $\Phi = 90^\circ$, temos o seguinte:

$$R = -2\pi a^2 p$$

$$\therefore p = -\frac{R}{2\pi a^2} = -\frac{50000}{2 \cdot \pi \cdot 21,65^2} = 16,98 \text{ kN/m}^2$$

$$\therefore ap = 21,65 \cdot 16,98 = 367,6 \text{ kN/m.}$$

Através da eq. 4.13, sabendo que o coeficiente de Poisson vale 0,2, que o raio da cúpula é de 21,65 m e que a espessura média da cúpula é de 1,13 m, calcula-se o coeficiente de atenuação:

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2} = \sqrt[4]{3(1 - 0,2^2) \left(\frac{21,65}{1,13}\right)^2} = 5,7.$$

A4 – ÂNGULO DE 52°

Analisando a eq. 4.3, percebe-se que N_ϕ é sempre negativo para os valores de Φ , ou seja, as forças normais na direção dos meridianos são sempre forças de compressão. O mesmo não ocorre com N_θ . Para saber em qual ângulo as forças nos paralelos são nulas, resolve-se a equação 4.4 para $N_\theta = 0$:

$$N_\theta = Yha \left(\frac{1}{1 + \cos \Phi} - \cos \Phi \right) = 0$$
$$\therefore \frac{1}{1 + \cos \Phi} - \cos \Phi = 0.$$

Como $\cos \Phi \neq -1$ (pois $0 < \Phi < 90^\circ$), tem-se:

$$\cos^2 \Phi + \cos \Phi - 1 = 0.$$

Fazendo $x = \cos \Phi$ e resolvendo para x com a Fórmula de Bhaskara, tem-se:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$\therefore x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Como $0 < \Phi < 90^\circ$, descarta-se x_1 . Resolvendo $x = \cos \Phi$ para $x = x_2$, temos:

$$\cos \Phi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore \Phi = \cos^{-1} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 51,827^\circ = 51^\circ 49' 38''.$$

Portanto,

$\Phi < 51^\circ 49' 38''$: a cúpula está exclusivamente sob compressão nos paralelos;

$\Phi > 51^\circ 49' 38''$: a cúpula está exclusivamente sob tração nos paralelos.

Conforme Pedroso (1995), este é um fato de grande importância, pois modernamente, cúpulas feitas de material pouco resistente à tração, como o concreto, em geral devem ser armadas ao longo dos paralelos para $\Phi > 51^\circ 49' 38''$. No Panteão, isso não foi possível, pois a técnica de colocação de armaduras no concreto só foi desenvolvida séculos depois de sua construção.

Na fig. A4.1 há um resumo das conclusões analisadas acima.

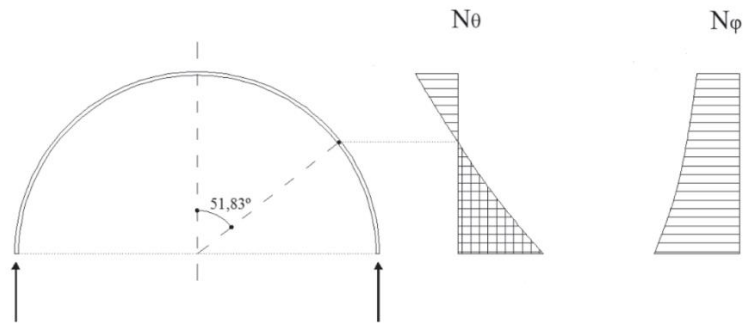


Figura A4.1 – Forças tangencial e meridional em função do ângulo Φ
 Fonte: Rabello et al., 2016

Observa-se na fig. A4.2 que o último degrau da cúpula do Panteão corresponde a um ângulo Φ de aproximadamente 43° (linha azul). A linha preta faz um ângulo de 52° com a vertical. Os romanos, mesmo com os conhecimentos tecnológicos limitados da época, colocaram uma espécie de reforço na parte mais crítica da cúpula, i.e., onde há tração no concreto.

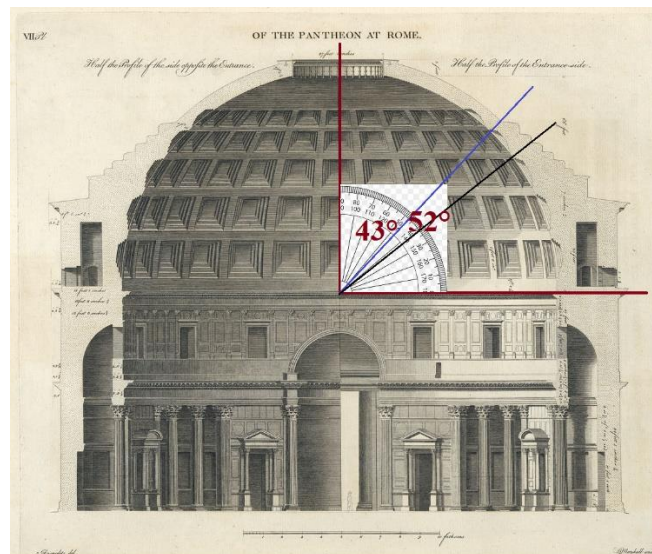


Figura A4.2 – Ângulos Φ de 43° (linha azul) e 52° (linha preta)
 Fonte: Desgodetz (1682) (modificado)

A5 - CARGA DE NEVE

Para o cálculo da carga de neve s consulta-se o *Eurocode 1 – Actions on structures – Part 1-3: General Actions – Snow loads* (referido agora apenas por Eurocode). Primeiramente o Panteão é colocado no caso da Seção 1.6.5 do Eurocode, o qual considera uma carga de neve uniformemente distribuída, afetada somente pela forma da cobertura. Então, indo para a Seção 5 do Eurocode (Carga de neve em coberturas), percebe-se que o Panteão se enquadra, de acordo com Solheiro (2017), no caso a) do item 5.2(3)P, no qual a carga de neve é calculada como:

$$s = \mu_i C_e C_t s_k,$$

onde:

s : carga de neve na cobertura [kN/m²];

μ_i : coeficiente de forma da carga de neve;

C_e : coeficiente de exposição;

C_t : coeficiente térmico;

s_k : valor característico da carga de neve no solo [kN/m²].

Conforme Solheiro (2017), o valor característico da carga de neve em Roma é dado por $s_k = 0,60$ kN/m², por meio de consulta do Anexo Nacional Italiano.

Para valores de C_e consulta-se a Tabela 5.1 do Eurocode (Valores recomendados de C_e para diferentes topografias) da norma. Considerou-se que o Panteão está em uma topografia normal, i.e., $C_e = 1,0$. Com permissão da norma em 5.2(8), temos $C_t = 1,0$. Portanto, para o cálculo de μ_i deve-se ir à Seção 5.3 do Eurocode (Coeficiente de forma da cobertura), colocando o Panteão no caso da Seção 5.3.5 (Coberturas cilíndricas).

Conforme Solheiro (2017), o caso (i) (fig. A5.1) indica uma carga de neve não deslocada, correspondendo a uma carga de neve uniformemente distribuída. Nesse caso, $\mu_i = 0,8$ e $s = 0,8 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,60 = 0,48$ kN/m². O caso (ii) se refere a uma carga de neve deslocada (e.g. devido ao vento). Maten (2011 apud Solheiro, 2017) formula um uma adaptação para o caso do Panteão, i.e., para uma cúpula com um *oculus* no seu centro.

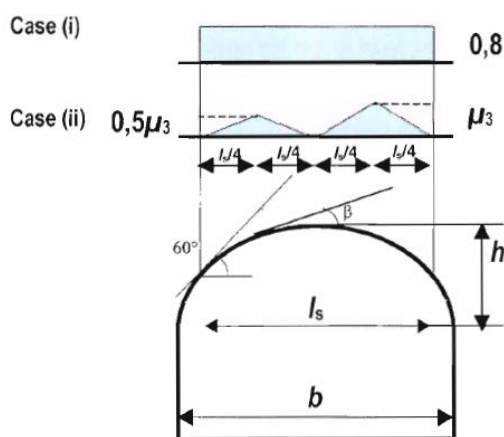


Figura A5.1 – Casos (i) e (ii)
Fonte: Eurocode, 2003

Pelo item 5.3.5(1) do Eurocode, se considera carga de neve apenas na parte da estrutura com inclinação inferior a 60°, i.e., para inclinações menores do que 60°, $\mu_3 = 0$ (fig. A5.2). Isso significa que, considerando a linha do diâmetro (fig. A5.3), apenas 30% ($2b/4 -$

$2b/10 = 3b/10$) da estrutura recebe carga de neve, pois $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\cos 78^\circ \approx 0,2$. Para inclinações maiores do que 60° , temos $\mu_3 = 0,2 + 10 h/b$, onde

$$\mu_3 = \mu_i;$$

h : altura da cúpula;

b : diâmetro da cúpula.

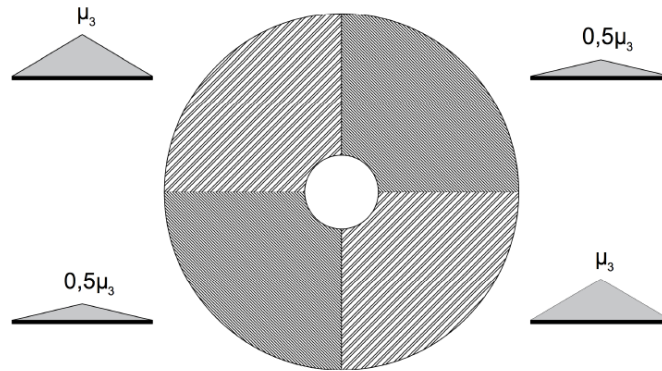


Figura A5.2 – Coeficientes de forma para a carga de neve para uma cobertura esférica com um *oculus* no centro.
Fonte: SOLHEIRO, 2017

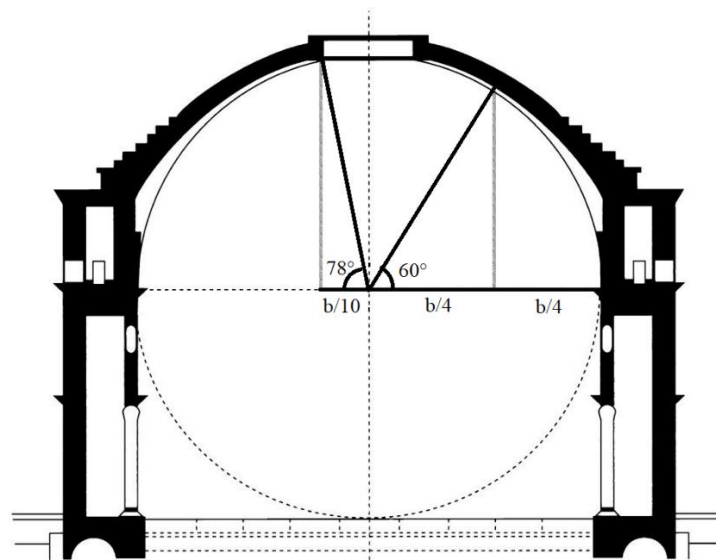


Figura A5.3 – Parte da cúpula que recebe carga de neve
Fonte: Meyer, 2020 (modificado)

Para o Panteão sabemos que

$$h/b = 0,5.$$

Pela norma (fig. A5.4), para $h/b \geq 0,18$, adota-se o valor de 0,18. Portanto

$$h/b = 0,18$$

$$\therefore \mu_3 = 0,2 + 10 \cdot 0,18 = 2,0.$$

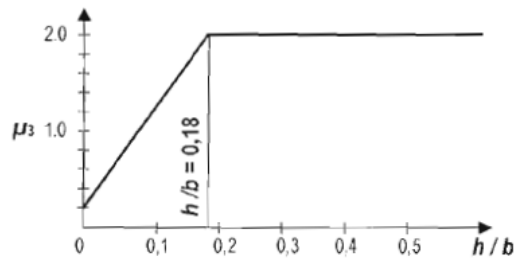


Figura A5.4 – Norma para o cálculo de μ_3
 Fonte: Eurocode, 2003

Portanto

$$s(\mu_3) = 2,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,60 = 1,2 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$s(0,5\mu_3) = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 0,60 = 0,6 \text{ kN/m}^2 .$$

A análise feita na Seção 6.1.1 deste trabalho considerou o caso (i), i.e., uma carga uniformemente distribuída no valor de

$$s = 0,48 \text{ kN/m}^2 .$$

A6 – CASO 5 DETALHADO

Tem-se $H = X_1 = 1$ e $M_\alpha = X_2 = 1$. Calculado anteriormente, sabe-se que

$$\delta_{10} = 0,0029,$$

$$\delta_{11} = 7,53 \cdot 10^{-8}.$$

Agora é preciso calcular δ_{20} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ e δ_{22} . Então

$$\delta_{20} = -\frac{ap}{Eh}(2 + \nu) \sin \alpha = -2,468 \cdot 10^{-7},$$

ou seja,

$$\{\delta_0\} = \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,90 \cdot 10^{-3} \\ -2,47 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix}.$$

Também

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2\lambda^2 \sin \Phi}{Eh} = \frac{2 \cdot 5,7^2 \cdot \sin(\pi/2)}{2,9 \cdot 10^9 \cdot 1,13} = 1,98 \cdot 10^{-8},$$

$$\delta_{22} = \frac{4\lambda^3}{Eha} = \frac{4 \cdot 5,7^3}{2,9 \cdot 10^9 \cdot 1,13 \cdot 21,65} = 1,04 \cdot 10^{-8}.$$

Ou seja,

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,53 \cdot 10^{-8} & 1,98 \cdot 10^{-8} \\ 1,98 \cdot 10^{-8} & 1,04 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}.$$

Invertendo-se a matriz de flexibilidade $[\delta]$, obtêm-se a matriz de rigidez $[\xi]$. Ou seja,

$$[\xi] = [\delta]^{-1} = \begin{bmatrix} 7,53 \cdot 10^{-8} & 1,98 \cdot 10^{-8} \\ 1,98 \cdot 10^{-8} & 1,04 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,66 \cdot 10^7 & -5,06 \cdot 10^7 \\ -5,06 \cdot 10^7 & 19,25 \cdot 10^7 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -[\xi]\{\delta_0\} = -\begin{bmatrix} 2,66 \cdot 10^7 & -5,06 \cdot 10^7 \\ -5,06 \cdot 10^7 & 19,25 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2,9 \cdot 10^{-3} \\ -2,47 \cdot 10^{-7} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \{X\} = \begin{Bmatrix} -77,1 \cdot 10^3 \\ 146,8 \cdot 10^3 \end{Bmatrix}.$$

Ou seja, $X_1 = H = -77,1$ kN e $X_2 = M_\alpha = 146,8$ kN/m. Os esforços normais finais de Φ é dado por

$$E_f = E_0 + \sum E_i X_i = E_0 + E_1 X_1 + E_2 X_2$$

$$\begin{aligned} \therefore E_{f\phi} = & -ap \frac{1}{1 + \cos \phi} - \sqrt{2} \cot(\alpha - \psi) \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) X_1 \\ & - \frac{2\lambda}{a} \cot(\alpha - \psi) e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi) X_2. \end{aligned}$$

Substituindo os valores do problema, tem-se:

$$\begin{aligned} N_\phi = & -\frac{367,6}{1 + \cos \phi} - \sqrt{2} \cot(\phi) e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (-77,1) \\ & - 0,53 \cot(\phi) e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin(5,7(\pi/2 - \phi)) \cdot (146,8). \end{aligned}$$

E os esforços normais finais de θ são dados por

$$\begin{aligned} E_f = E_0 + \sum E_i X_i = E_0 + E_1 X_1 + E_2 X_2 \\ \therefore E_{f\theta} = & ap \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) - 2\lambda \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{2}\right) X_1 \\ & - \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{a} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) X_2. \end{aligned}$$

Substituindo os valores do problema, tem-se:

$$\begin{aligned} N_\theta = & 367,6 \left(\frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) - 11,4 e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{2}\right) \\ & \cdot (-77,1 \cdot 10^3) - 4,2 e^{-5,7(\pi/2 - \phi)} \sin\left(5,7(\pi/2 - \phi) - \frac{\pi}{4}\right) \cdot (146,8 \cdot 10^3). \end{aligned}$$

A7 – MÉTODO DAS FORÇAS

Esse Apêndice serve como fundamento teórico para a resolução dos cálculos dos dois próximos Apêndices. Para a resolução de certos problemas, utilizam-se métodos usuais de solução de estruturas esbeltas. Temos seguinte o roteiro do Método das Forças, baseado em Süsskind (1980):

- 1º) Escolha do sistema principal;
- 2º) Traçado dos diagramas no sistema principal;
- 3º) Obtenção dos $EI\delta$ (para arcos também é preciso a obtenção dos $ES\delta$);
- 4º) Formulação do sistema de equações de compatibilidade elástica;
- 5º) Obtenção dos hiperestáticos ($\{X\} = -[\xi]\{\delta_0\}$);
- 6º) Obtenção dos efeitos finais ($E_f = E_0 + \sum E_i X_i$);

em que:

E : Módulo de elasticidade longitudinal do material (ou Módulo de Young);

I : Momento de inércia de seção transversal em relação a seu eixo neutro;

S : Área de seção transversal;

E_0 : Esforço no sistema principal, provocado pelo agente solicitante externo;

E_i : Esforço no sistema principal provocado pela aplicação do hiperestático X_i com o valor inicialmente arbitrado;

E_f : Esforço final na estrutura;

$\{X\}$: Vetor dos hiperestáticos

X_i : Valor obtido para o hiperestático, a partir da resolução direta do sistema de equações de compatibilidade elástica ou da equação matricial;

$[\delta]$: Matriz de flexibilidade;

$[\xi] = [\delta]^{-1}$: Matriz de rigidez;

$\{\delta_0\}$: Matriz da combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X (com o valor arbitrado) no sistema principal;

δ_{ij} : Combinação dos diagramas resultantes da aplicação dos hiperestáticos X_i e X_j no sistema principal, com os valores arbitrados;

δ_{i0} : Combinação dos diagramas resultantes da aplicação do carregamento externo e do hiperestático X_i (com o valor arbitrado) no sistema principal.

A8 – ARCO BIARTICULADO

O presente Apêndice e o próximo referem-se à análises preliminares não aproveitadas no escopo principal desse trabalho, mas que possuem um valor didático interessante. A ideia inicial era resolver um arco circular biarticulado (1 vez hiperestático) submetido a carregamento de peso próprio. Porém, foi feita somente a matriz de flexibilidade e a matriz de rigidez. A estrutura é a mostrada a seguir (fig. A8.1):

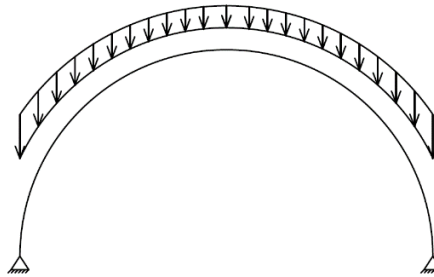


Figura A8.1 – Arco circular biarticulado

Tem-se uma estrutura 1 vez hiperestática. Portanto, é necessário 1 hiperestático. Foi escolhido o seguinte sistema principal (fig. A8.2):

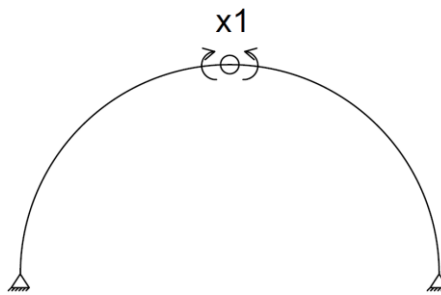


Figura A8.2 – Sistema principal

α : ângulo (de 0 a 90°) entre a linha horizontal da base esquerda do arco até o seu centro no topo, percorrendo toda a parte esquerda da estrutura (fig. A8.3).

β : ângulo (de 0 a 90°) entre a linha horizontal da base direita do arco até o seu centro no topo, percorrendo toda a parte direita da estrutura.

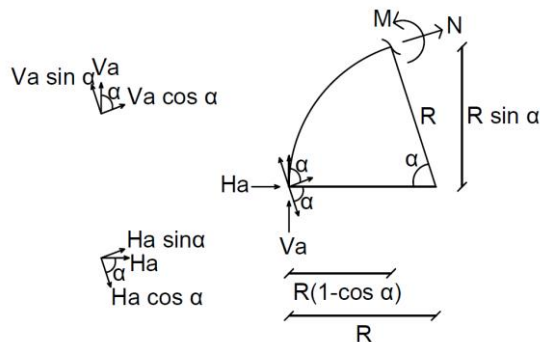


Figura A8.3 – Detalhe da estrutura

Agora, arbitra-se o valor unitário para o hiperestático, i.e., $X_1 = 1$, conforme mostrado na fig. A8.4.

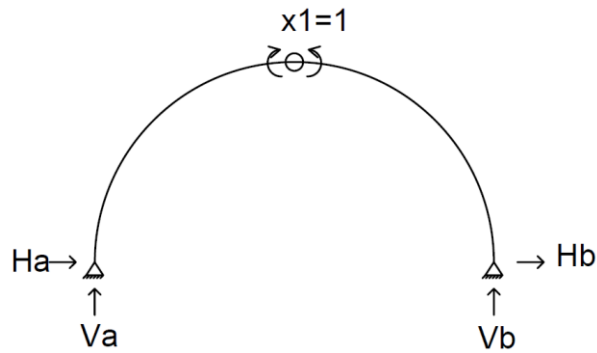


Figura A8.4 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_1

Então, é preciso calcular o valor das reações H_A , H_B , V_A e V_B :

$$\sum F_x = 0 \therefore H_A + H_B = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + V_B = 0;$$

$$\sum M_C = 0 \therefore V_B \cdot R + H_B \cdot R + x_1 = 0;$$

$$M_A = 0 \therefore V_B \cdot 2R = 0$$

$$\therefore V_B = 0$$

$$\therefore V_A = 0$$

$$\therefore H_A = \frac{1}{R}$$

$$\therefore H_B = -\frac{1}{R}$$

Agora, são calculados os valores dos momentos fletores internos e dos esforços normais internos do arco isostático, percorrendo os ângulos α ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) e β ($0 \leq \beta \leq 90^\circ$). Para os esforços internos de cisalhamento, basta percorrer o ângulo α .

$$M_{1\alpha} = V_A R(1 - \cos \alpha) - H_A R \sin \alpha \therefore M_{1\alpha} = -\frac{1}{R} \cdot R \sin \alpha$$

$$\therefore M_{1\alpha} = -\sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$M_{1\beta} - H_B \cdot R \sin \beta = 0 \therefore M_{1\beta} = -\frac{1}{R} \cdot R \sin \beta$$

$$\therefore M_{1\beta} = -\sin \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

E

$$N_{1\alpha} = -H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha$$

$$\therefore N_{1\alpha} = -\frac{\sin \alpha}{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$N_{1\beta} = H_B \sin \beta - V_B \cos \beta$$

$$\therefore N_{1\beta} = -\frac{\sin \beta}{R}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Percebe-se que $M_{1\alpha} = M_{1\beta}$ e $N_{1\alpha} = N_{1\beta}$, o que já era esperado devido à simetria do arco. Também:

$$V_{1\alpha} = H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha$$

$$\therefore V_{1\alpha} = \frac{\cos \alpha}{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Agora, faz-se o cálculo do $EI\delta$, primeiro para a parte esquerda do arco:

$$EI\delta_{11\alpha} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \alpha)(-\sin \alpha) d\alpha = \sin^2 \alpha d\alpha.$$

Há inúmeras maneiras de resolver a integral anterior. Aqui soluciona-se através de conferência com a tabela de integrais de Spiegel (2012) da Coleção Schaum.

$$\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u).$$

Aplicando os limites 0 e $\pi/2$ (ângulo α percorrendo metade do arco), chega-se ao resultado de $\pi/4$. Portanto,

$$EI\delta_{11\alpha} = \frac{\pi}{4}.$$

Similarmente, faz-se o cálculo do $EI\delta$ para a parte direita do arco. Pela simetria da estrutura, seu valor na parte da direita é o mesmo da parte esquerda. Portanto,

$$EI\delta_{11\beta} = \frac{\pi}{4}.$$

Então, para o cálculo do $EI\delta$ de todo o arco, soma-se o $EI\delta$ da parte esquerda com o $EI\delta$ da parte direita do arco:

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{11\alpha} + EI\delta_{11\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Com isso, tem-se a matriz de flexibilidade dos momentos fletores $\{\delta_M\}$ do arco. Como a matriz em questão é 1×1 , o $EI\delta_{11}$ é seu único termo. Então,

$$[\delta_M] = \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

Similarmente ao que foi feito para $EI\delta$, faz-se o cálculo do $ES\delta$:

$$ES\delta_{11\alpha} = ES\delta_{11\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \alpha}{R} \right) \left(-\frac{\sin \alpha}{R} \right) d\alpha = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{11} = ES\delta_{11\alpha} + ES\delta_{11\beta} = \frac{\pi}{2R^2}.$$

Com isso, tem-se a matriz de flexibilidade dos esforços normais $\{\delta_N\}$ do arco:

$$[\delta_N] = \left[\frac{\pi}{2R^2} \right].$$

Para efeito de comparação, calcula-se o percentual de cada parcela (momento e normal) na matriz de flexibilidade:

$$\text{parcela de } [\delta_M] = \frac{[\delta_M]}{[\delta_M] + [\delta_N]} = \frac{R^2}{R^2 + 1};$$

$$\text{parcela de } [\delta_N] = \frac{[\delta_N]}{[\delta_M] + [\delta_N]} = \frac{1}{R^2 + 1}.$$

Percebe-se que a parcela do esforço normal na matriz de flexibilidade só é relevante para raios muito pequenos:

para $R = 1 \rightarrow$ parcela de $[\delta_N] = 50\%$;

para $R = 2 \rightarrow$ parcela de $[\delta_N] = 20\%$;

para $R = 3 \rightarrow$ parcela de $[\delta_N] = 10\%$;

para $R = 10 \rightarrow$ parcela de $[\delta_N] \approx 1\%$.

Assim, calcula-se a matriz de flexibilidade:

$$[\delta] = [\delta_M] + [\delta_N] = \left[\frac{\pi(R^2 + 1)}{2R^2} \right].$$

Então, a matriz de rigidez é

$$[\xi] = [\delta]^{-1} = \left[\frac{2R^2}{\pi(R^2 + 1)} \right].$$

Para raios grandes, o cálculo pode ser simplificado desconsiderando a parcela do esforço normal na matriz de flexibilidade, i.e.:

$$[\delta] = [\delta_M] = \left[\frac{\pi}{2} \right].$$

Então, a matriz de rigidez é

$$[\xi] = \left[\frac{2}{\pi} \right].$$

A9 – ARCO BIENGASTADO

O presente Apêndice, como o anterior, apresenta um estudo preliminar não aproveitado no escopo principal desse trabalho, mas que possui um valor didático interessante. A ideia inicial era resolver um arco circular biengastado (3 vezes hiperestático) submetido a carregamento de peso próprio. Porém, foi feita somente a matriz de flexibilidade. A estrutura é a mostrada a seguir (fig. A9.1):

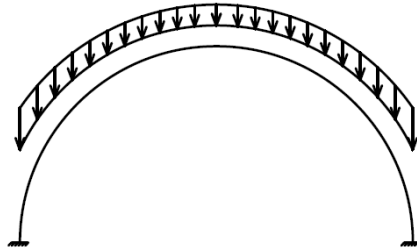


Figura A9.1 – Arco circular biengastado

Temos uma estrutura 3 vezes hiperestática. Portanto são necessários 3 hiperestáticos. Foi escolhido o seguinte sistema principal (fig. A9.2):

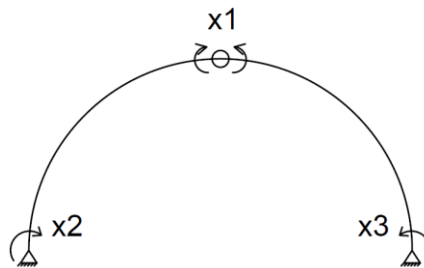


Figura A9.2 – Sistema principal

α : ângulo (de 0 a 90°) entre a linha horizontal da base esquerda do arco até o seu centro no topo, percorrendo toda a parte esquerda da estrutura (fig. A9.3).

β : ângulo (de 0 a 90°) entre a linha horizontal da base direita do arco até o seu centro no topo, percorrendo toda a parte direita da estrutura.

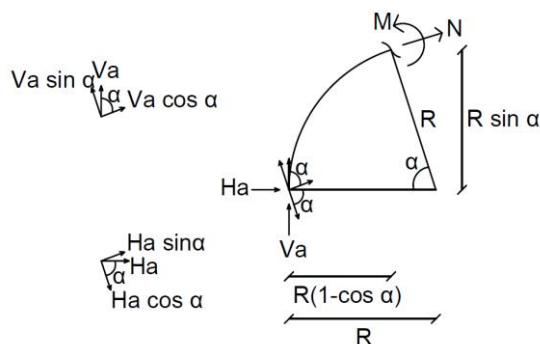


Figura A9.3 – Detalhe da estrutura

Para o hiperestático $X_1 = 1$ (figura A9.4) temos

$$\sum F_x = 0 \therefore H_A + H_B = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + V_B = 0;$$

$$\sum M_C = 0 \therefore V_B \cdot R + H_B \cdot R + x_1 = 0;$$

$$M_A = 0 \therefore V_B \cdot 2R = 0$$

$$\therefore V_B = 0$$

$$\therefore V_A = 0$$

$$\therefore H_A = \frac{1}{R}$$

$$\therefore H_B = -\frac{1}{R}$$

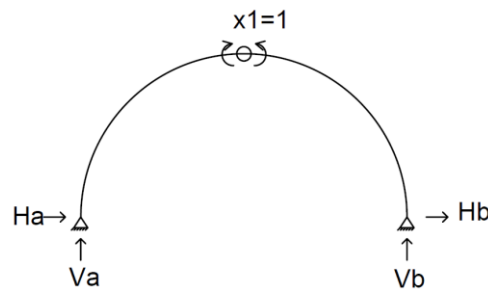


Figura A9.4 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_1

Então

$$M_{1\alpha} = V_A R (1 - \cos \alpha) - H_A R \sin \alpha \therefore M_{1\alpha} = -\frac{1}{R} \cdot R \sin \alpha$$

$$\therefore M_{1\alpha} = -\sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$M_{1\beta} - H_B \cdot R \sin \beta = 0 \therefore M_{1\beta} = -\frac{1}{R} \cdot R \sin \beta$$

$$\therefore M_{1\beta} = -\sin \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Também

$$N_{1\alpha} = -H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha$$

$$\therefore N_{1\alpha} = -\frac{\sin \alpha}{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$N_{1\beta} = H_B \sin \beta - V_B \cos \beta$$

$$\therefore N_{1\beta} = -\frac{\sin \beta}{R}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

E

$$V_{1\alpha} = H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha$$

$$\therefore V_{1\alpha} = \frac{\cos \alpha}{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para o hiperestático $X_2 = 1$ (fig. A9.5) temos

$$\sum F_x = 0 \therefore H_A + H_B = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + V_B = 0;$$

$$\sum M_A = 0 \therefore -V_B \cdot 2R + x_2 = 0$$

$$\therefore V_B = \frac{1}{2R}$$

$$\therefore V_A = -\frac{1}{2R};$$

$$M_C = 0 \therefore V_A \cdot R - H_A \cdot R + x_2 = 0 \therefore H_A = V_A + \frac{1}{R}$$

$$\therefore H_A = \frac{1}{2R}$$

$$\therefore H_B = -\frac{1}{2R}.$$

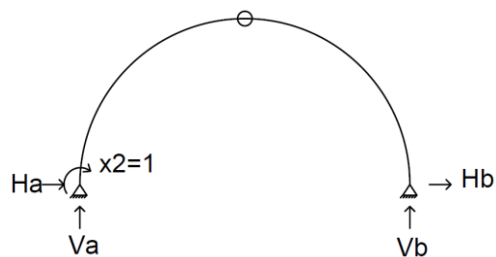


Figura A9.5 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_2

Então

$$M_{2\alpha} = V_A R (1 - \cos \alpha) - H_A R \sin \alpha + x_2$$

$$\therefore M_{2\alpha} = -\frac{1}{2R} \cdot R(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2R} \cdot R \sin \alpha + 1$$

$$\therefore M_{2\alpha} = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha + 1), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$M_{2\beta} - V_B \cdot R(1 - \cos \beta) - H_B \cdot R \sin \beta = 0$$

$$\therefore M_{2\beta} = \frac{1}{2R} \cdot R(1 - \cos \beta) - \frac{1}{2R} \cdot R \sin \beta$$

$$\therefore M_{2\beta} = \frac{1}{2}(1 - \cos \beta - \sin \beta), \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Também

$$N_{2\alpha} = -H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha$$

$$\therefore N_{2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$N_{2\beta} = H_B \sin \beta - V_B \cos \beta$$

$$\therefore N_{2\beta} = \frac{-\sin \beta - \cos \beta}{2R}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

E

$$V_{1\alpha} = H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha$$

$$\therefore V_{2\alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para o hiperestático $X_3 = 1$ (fig. A9.6) temos

$$\sum F_x = 0 \therefore H_A + H_B = 0;$$

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + V_B = 0;$$

$$\sum M_B = 0 \therefore -V_A \cdot 2R + x_3 = 0$$

$$\therefore V_A = \frac{1}{2R}$$

$$\therefore V_B = -\frac{1}{2R};$$

$$M_C = 0 \therefore V_B \cdot R + H_B \cdot R + x_3 = 0 \therefore H_B = -\left(V_B + \frac{1}{R}\right)$$

$$\therefore H_B = -\frac{1}{2R}$$

$$\therefore H_A = \frac{1}{2R}$$

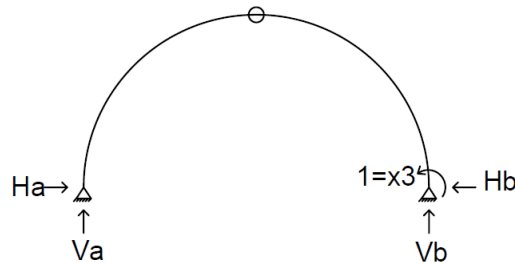


Figura A9.6 – Valor unitário arbitrado do hiperestático X_3

Então

$$M_{3\alpha} = V_A R (1 - \cos \alpha) - H_A R \sin \alpha$$

$$\therefore M_{3\alpha} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha - \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$M_{3\beta} - V_B \cdot R (1 - \cos \beta) - H_B \cdot R \sin \beta - x_3 = 0$$

$$\therefore M_{3\beta} = -\frac{1}{2R} \cdot R (1 - \cos \beta) - \frac{1}{2R} \cdot R \sin \beta + 1$$

$$\therefore M_{3\beta} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \sin \beta + 1), \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Também

$$N_{3\alpha} = -H_A \sin \alpha - V_A \cos \alpha$$

$$\therefore N_{3\alpha} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{2R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2};$$

$$N_{3\beta} = H_B \sin \beta - V_B \cos \beta$$

$$\therefore N_{3\beta} = \frac{\cos \beta - \sin \beta}{2R}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

E

$$V_{1\alpha} = H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha$$

$$\therefore V_{3\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Cálculo dos $EI\delta$:

$$EI\delta_{11\alpha} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \alpha) \cdot (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$EI\delta_{11\beta} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \beta) \cdot (-\sin \beta) d\beta = \frac{\pi}{4};$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{11\alpha} + EI\delta_{11\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

$$EI\delta_{12\alpha} = EI\delta_{21\alpha} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \alpha) \cdot \left[\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{1}{2} \right] d\alpha = \frac{-6 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{12\beta} = EI\delta_{21\beta} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \beta) \cdot \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \beta - \sin \beta) \right] d\beta = \frac{-2 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = EI\delta_{12\alpha} + EI\delta_{12\beta} = \frac{-4 + \pi}{4}.$$

$$EI\delta_{13\alpha} = EI\delta_{31\alpha} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \alpha) \cdot \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha - \sin \alpha) \right] d\alpha = \frac{-2 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{13\beta} = EI\delta_{31\beta} = \int_0^{\pi/2} (-\sin \beta) \cdot \left[\frac{1}{2}(\cos \beta - \sin \beta) + \frac{1}{2} \right] d\beta = \frac{-6 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = EI\delta_{13\alpha} + EI\delta_{13\beta} = \frac{-4 + \pi}{4}.$$

$$EI\delta_{22\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha + 1) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha + 1) \right] d\alpha = \frac{-1 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{22\beta} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \beta - \sin \beta) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \beta - \sin \beta) \right] d\beta = \frac{-3 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{22} = EI\delta_{22\alpha} + EI\delta_{22\beta} = \frac{-2 + \pi}{2}.$$

$$EI\delta_{23\alpha} = EI\delta_{32\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha + 1) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha - \sin \alpha) \right] d\alpha = \frac{-4 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{23\beta} = EI\delta_{32\beta} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \beta - \sin \beta) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(\cos \beta - \sin \beta + 1) \right] d\beta = \frac{-4 + \pi}{8};$$

$$EI\delta_{23} = EI\delta_{32} = EI\delta_{32\alpha} + EI\delta_{23\beta} = \frac{-4 + \pi}{4}.$$

$$EI\delta_{33\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha - \sin \alpha) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha - \sin \alpha) \right] d\alpha = \frac{-3 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{33\beta} = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(\cos \beta - \sin \beta + 1) \right] \cdot \left[\frac{1}{2}(\cos \beta - \sin \beta + 1) \right] d\beta = \frac{-1 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{33} = EI\delta_{33\alpha} + EI\delta_{33\beta} = \frac{-2 + \pi}{2}.$$

Portando

$$EI\delta_{11} = \frac{\pi}{2};$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{-4 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = \frac{-4 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{22} = \frac{-2 + \pi}{2};$$

$$EI\delta_{23} = EI\delta_{32} = \frac{-4 + \pi}{4};$$

$$EI\delta_{33} = \frac{-2 + \pi}{2};$$

Com isso, temos a matriz de flexibilidade para os momentos fletores do arco:

$$\delta_M = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{-4 + \pi}{4} & \frac{-4 + \pi}{4} \\ \frac{-4 + \pi}{4} & \frac{-2 + \pi}{2} & \frac{-4 + \pi}{4} \\ \frac{-4 + \pi}{4} & \frac{-4 + \pi}{4} & \frac{-2 + \pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Também é preciso ser feito o cálculo para a matriz de flexibilidade para os esforços normais do arco. Cálculo dos $ES\delta$:

$$ES\delta_{11\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \alpha}{R} \right) \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{R} \right) d\alpha = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{11\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \beta}{R} \right) \cdot \left(-\frac{\sin \beta}{R} \right) d\beta = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{11} = ES\delta_{11\alpha} + ES\delta_{11\beta} = \frac{\pi}{2R^2}.$$

$$ES\delta_{12\alpha} = ES\delta_{21\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \alpha}{R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}\right) d\alpha = \frac{\pi - 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{12\beta} = ES\delta_{21\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \beta}{R}\right) \cdot \left(\frac{-\sin \beta - \cos \beta}{2R}\right) d\beta = \frac{2 + \pi}{8R^2};$$

$$ES\delta_{12} = ES\delta_{12\alpha} + ES\delta_{12\beta} = \frac{\pi}{4R^2}.$$

$$ES\delta_{13\alpha} = ES\delta_{31\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \alpha}{R}\right) \cdot \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{2R}\right) d\alpha = \frac{\pi + 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{13\beta} = ES\delta_{31\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin \beta}{R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \beta - \sin \beta}{2R}\right) d\beta = \frac{\pi - 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{13} = ES\delta_{13\alpha} + ES\delta_{13\beta} = \frac{\pi}{4R^2}.$$

$$ES\delta_{22\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}\right) d\alpha = \frac{\pi - 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{22\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-\sin \beta - \cos \beta}{2R}\right) \cdot \left(\frac{-\sin \beta - \cos \beta}{2R}\right) d\beta = \frac{\pi + 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{22} = ES\delta_{22\alpha} + ES\delta_{22\beta} = \frac{\pi}{4R^2}.$$

$$ES\delta_{23\alpha} = ES\delta_{32\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2R}\right) \cdot \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{2R}\right) d\alpha = 0;$$

$$ES\delta_{23\beta} = ES\delta_{32\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-\sin \beta - \cos \beta}{2R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \beta - \sin \beta}{2R}\right) d\beta = 0;$$

$$ES\delta_{23} = ES\delta_{23\alpha} + ES\delta_{23\beta} = 0.$$

$$ES\delta_{33\alpha} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{2R}\right) \cdot \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{2R}\right) d\alpha = \frac{\pi + 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{33\beta} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \beta - \sin \beta}{2R}\right) \cdot \left(\frac{\cos \beta - \sin \beta}{2R}\right) d\beta = \frac{\pi - 2}{8R^2};$$

$$ES\delta_{33} = ES\delta_{33\alpha} + ES\delta_{33\beta} = \frac{\pi}{4R^2}.$$

Portanto

$$ES\delta_{11} = \frac{\pi}{2R^2};$$

$$ES\delta_{12} = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{13} = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{22} = \frac{\pi}{4R^2};$$

$$ES\delta_{23} = 0;$$

$$ES\delta_{33} = \frac{\pi}{4R^2}.$$

Com isso, temos a matriz de flexibilidade para os esforços normais do arco:

$$[\delta_N] = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2R^2} & \frac{\pi}{4R^2} & \frac{\pi}{4R^2} \\ \frac{\pi}{4R^2} & \frac{\pi}{4R^2} & 0 \\ \frac{\pi}{4R^2} & 0 & \frac{\pi}{4R^2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a matriz de flexibilidade do arco:

$$[\delta] = [\delta_M] + [\delta_N] = \begin{bmatrix} \frac{\pi(R^2 + 1)}{2R^2} & \frac{\pi(R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} & \frac{\pi(R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} \\ \frac{\pi(R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} & \frac{\pi(2R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} & \frac{-4 + \pi}{4} \\ \frac{\pi(R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} & \frac{-4 + \pi}{4} & \frac{\pi(2R^2 + 1) - 4R^2}{4R^2} \end{bmatrix}.$$