



Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Pol. Públicas  
Departamento de Economia  
Orientador: Prof. Dr. Rogério Mazali  
Escrito por: Lucas Machado Nogueira  
Matrícula: 15/0050381

**TESTANDO SE O NÍVEL DE EXPERIÊNCIA IMPACTA NAS ESTRATÉGIAS  
UTILIZADAS POR JOGADORES DE PÔQUER**

Brasília, 2021.

Lucas Machado Nogueira

**TESTANDO SE O NÍVEL DE EXPERIÊNCIA IMPACTA NAS ESTRATÉGIAS  
UTILIZADAS POR JOGADORES DE PÔQUER**

Monografia apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Mazali

Brasília, 2021.

## RESUMO

Este trabalho avalia se os agentes experientes possuem alguma vantagem em relação aos agentes inexperientes num contexto de teoria dos jogos. Para isso, utilizamos dados de torneios de pôquer e as probabilidades de os jogadores decidirem jogar com determinada mão. Desse modo, é possível comparar o quão próximo os jogadores estão jogando do equilíbrio de Nash por meio dos testes estatísticos de igualdade de densidades multivariadas de Li et al. (2009) e Kolmogorov-Smirnov entre duas distribuições empíricas. Os resultados encontrados indicam que os jogadores experientes utilizam estratégias mais próximas dos equilíbrios de Nash e diferentes dos jogadores inexperientes.

**Palavras-chave:** mercado competitivo; equilíbrio de Nash; pôquer; inteligência artificial; igualdade de densidades multivariadas; teste de Kolmogorov-Smirnov.

## ABSTRACT

This paper evaluates if experienced agents have an advantage over inexperienced agents in a game theory context. Poker tournaments and player's probability of playing a hand were used to compare how close to Nash equilibrium each group of players are. The statistical tests used to measure this difference were the equality of multivariate densities test of Li et al. (2009) and the Kolmogorov-Smirnov test between two empirical distributions. The results found indicate that experienced players adopt strategies closer to Nash equilibrium and differents then inexperienced players' strategies.

**Keywords:** competitive market; Nash equilibrium; poker; artificial intelligence; equality of multivariate densities; Kolmogorov-Smirnov test.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	5
2.	REVISÃO DE LITERATURA.....	7
2.1.	A teoria neoclássica em mercados descentralizados multilaterais e a composição desses mercados.....	7
2.2.	Inteligência artificial para jogos de pôquer com múltiplos jogadores.....	8
2.3.	Economia Comportamental.....	11
2.4.	Teste de igualdade de densidades multivariadas .....	13
3.	METODOLOGIA .....	13
3.1.	Construção da Base de Dados .....	13
3.2.	Inteligência Artificial .....	15
3.3.	Testes Estatísticos .....	17
4.	RESULTADOS .....	18
4.1.	Posição UTG.....	18
4.2.	Posição UTG+1 .....	20
4.3.	Posição MP.....	22
4.4.	Posição MP1 .....	24
4.5.	Posição Hijack.....	26
4.6.	Posição Cutoff.....	28
4.7.	Posição Button.....	30
5.	CONCLUSÃO .....	32
6.	REFERÊNCIAS .....	34

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é analisar se agentes experientes possuem vantagem em suas negociações em relação aos agentes inexperientes em um determinado mercado.

Este trabalho aborda as teorias da economia comportamental visto que o pôquer é um jogo de informações incompletas e, conseqüentemente, os jogadores estão expostos aos processos cognitivos que facilitam suas tomadas de decisão e também de erros sistemáticos que ocorrem a partir deste processo.

Tversky e Kahneman (1974) afirmam que as pessoas contam com um número de heurísticas para determinar probabilidades e prever valores a fim de reduzir a complexidade das tarefas. As heurísticas são processos cognitivos que auxiliam no processo de tomada de decisão por reduzir a complexidade dos problemas, porém, muitas vezes geram resultados enviesados. Dessa forma, como o pôquer é um jogo de informações incompletas, as tomadas de decisão por parte dos jogadores são repletas de heurísticas e vieses.

Em 2004, John A. List propôs um experimento em um mercado descentralizado para testar a teoria de preços neoclássica. List (2004) afirma que a experiência de mercado tem seu papel na distribuição de rendimentos: agentes com experiência de mercado lucram mais do que agentes inexperientes. Assim, os resultados demonstram que a composição do mercado possui uma forte influência nas tendências de equilíbrio (LIST, 2004).

Desse modo, este trabalho realiza um teste empírico tratando os torneios de pôquer como um mercado competitivo descentralizado e os jogadores que se inscreveram nesses torneios como os agentes negociadores. Testamos se as estratégias adotadas pelos jogadores experientes estão mais próximas da teoria (equilíbrio de Nash) do que as estratégias utilizadas por jogadores inexperientes. A partir disso, é possível observar se os jogadores experientes adotam estratégias parecidas com a inteligência artificial e diferentes das estratégias adotadas pelos jogadores inexperientes.

Para definir a estratégia ótima, foi utilizado um sistema de inteligência artificial denominada *PokerSnowie* no qual é possível construir diversos cenários de pôquer

diferentes e descobrir quais seriam as estratégias balanceadas e não-exploráveis para cada cenário. Essa ferramenta é baseada em redes neurais artificiais e foi treinada jogando contra uma versão de si mesma, sem fatores humanos como *input*. Assim, a inteligência artificial foi se aprimorando gradativamente à medida em que aumentava a probabilidade de tomar as ações que geravam os melhores resultados e reduzia a probabilidade de tomar ações subótimas de acordo com o seu grau de arrependimento. Esse processo de melhoria contínua se dá através do algoritmo Counterfactual Regret Minimization (CRF) e serve como base para todas inteligências artificiais em jogos de informação incompleta. Bowling et al. (2015) afirma que o CRF é um método iterativo para se aproximar de um equilíbrio de Nash em um jogo na forma extensiva através do processo de jogar repetidamente contra outra versão do algoritmo que também minimiza seu arrependimento. Além da *PokerSnowie*, outra versão de inteligência artificial que também utiliza como base o CRF é a *Pluribus*, porém esta não foi feita para fins comerciais. Brown e Sandholm (2019) mostram que como a estratégia da *Pluribus* foi construída através de treinamento contra si mesma e sem quaisquer dados humanos, ela provém uma perspectiva externa de como uma jogada ótima deve parecer.

Foram importadas 6.675.587 mãos jogadas em torneios de pôquer online para um programa de análise estatística denominado *hand2note* no qual é possível criar filtros para analisar situações específicas do jogo. Com isso, foi escolhido o cenário o qual os jogadores da mesa possuem um *stack* de 40 *big blinds* e estão nas posições: UTG, UTG+1, MP, MP1, HJ, CO e BTN. O próximo passo foi criar uma subdivisão entre os jogadores com base na quantidade de mãos jogadas de cada jogador dentro dessa base de dados, assim, é possível separar os jogadores experientes dos inexperientes e analisa-los. A partir disso, é possível obter a quantidade de observações para cada mão jogada pelos dois grupos de jogadores, definir as estratégias utilizadas nesse cenário e compará-las com as estratégias utilizadas pela inteligência artificial.

Foi utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov entre duas distribuições empíricas e o teste de igualdade de densidades multivariadas de Li et al. (2009) para comparar as observações obtidas entre os dois grupos com as observações da inteligência artificial. Para isso, foi proposto um teste de hipóteses no qual a hipótese nula é de que as duas distribuições são iguais e a hipótese alternativa é de que as duas distribuições não são iguais.

As conclusões dos testes estatísticos Kolmogorov-Smirnov e igualdade de densidades multivariadas mostraram que os jogadores experientes estão mais próximos do equilíbrio de Nash do que jogadores inexperientes e, portanto, o nível de experiência é um fator importante para jogos de pôquer.

O trabalho é dividido do seguinte modo: introdução; revisão de literatura sobre os experimentos da teoria de preços neoclássica, o desenvolvimento e resultados encontrados pela inteligência artificial em jogos de pôquer de múltiplos jogadores e o teste de igualdade de densidades multivariadas; metodologia abordando a estratégia empírica empregada no estudo com base na linguagem de programação R; os resultados obtidos e, por fim, a conclusão.

## **2. REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1. A teoria neoclássica em mercados descentralizados multilaterais e a composição desses mercados**

O autor John A. List testa as hipóteses da teoria do mercado competitivo através de um experimento o qual propõe que pessoas escolhidas aleatoriamente em um evento de cartas de esportes assumam o papel de negociadores (compradores e vendedores) e barganhem entre si até fecharem um contrato. Esse experimento foi organizado em quatro momentos: o primeiro experimento é constituir o mercado escolhendo aleatoriamente os compradores e vendedores; o segundo experimento é combinar compradores muito experientes com vendedores relativamente inexperientes; o terceiro experimento é constituir o mercado de compradores inexperientes e vendedores super experientes e o quarto experimento é combinar compradores muito experientes com vendedores muito experientes. List (2004) afirma que para este experimento, o nível de experiência de mercado é uma variável importante.

Desse modo, após as instruções de List para venderem (comprarem) a mercadoria ao maior (menor) preço possível e proibindo discussões entre os participantes para não induzir comportamentos de conluio, iniciou-se as rodadas de negociações. List (2004) mostra que os resultados perfeitamente competitivos

previstos pela teoria são: \$37 de lucro econômico total por rodada, entre \$13 e \$14 como preço competitivo e sete unidades como quantidade de equilíbrio. A partir disso, List (2004) demonstra que o experimento o qual o mercado é composto por agentes aleatórios mostra resultados que se aproximam bastante da teoria. Os resultados encontrados foram: quatro das cinco rodadas tiveram preços entre \$13 e \$14, além disso, três desses cinco períodos tiveram a quantidade de equilíbrio transacionada de sete unidades.

Ademais, o principal resultado está relacionado à composição do mercado: o nível de experiência de compradores e vendedores impacta diretamente na distribuição e no total dos ganhos em cada rodada (LIST, 2004). Com base nos dados levantados, é possível observar que no mercado em que os compradores tinham experiência de mercado como vantagem contra vendedores menos experientes, o preço praticado (entre \$12.21 e \$13.22) foi abaixo do preço competitivo. Alternativamente, quando os vendedores tinham experiência de mercado como vantagem, os preços praticados (entre \$13.99 e \$15.21) foram maiores do que os previstos pela teoria. Isso se deve ao fato de que agentes experientes executam mais negociações do que os agentes menos experientes e acabam ganhando mais dinheiro em suas negociações (LIST, 2004). Logo, a experiência de mercado é um fator significativo na determinação de preços. Nesse caso, através do poder de barganha, os agentes experientes negociam melhores preços e, desse modo, conseguem obter um lucro econômico maior do que seus concorrentes menos experientes.

A partir do artigo de List, este trabalho busca tratar o pôquer como um mercado competitivo descentralizado devido a sua natureza competitiva e por ser, basicamente, uma sequência de negociações entre os jogadores a fim de maximizar o retorno sobre os seus investimentos. Para isso, iremos comparar as estratégias utilizadas pelos jogadores experientes e inexperientes com as estratégias utilizadas por uma inteligência artificial que representa o que seria uma estratégia ótima.

## **2.2. Inteligência artificial para jogos de pôquer com múltiplos jogadores**

O equilíbrio de Nash é uma lista de estratégias a qual nenhum jogador é capaz de gerar ganhos ao desviar para uma estratégia diferente, ou seja, qualquer jogador que optar por usar o equilíbrio de Nash não irá perder o valor esperado independentemente do que o seu adversário faça. Caso o oponente opte por ações

subótimas, jogar o equilíbrio de Nash irá resultar num ganho de valor esperado Brown e Sandholm (2019). Também é possível utilizar uma estratégia de equilíbrio de Nash inicialmente e desviar dessa estratégia para explorar alguma fraqueza observada em um determinado adversário, no entanto, essa troca para uma estratégia explorativa que não é um equilíbrio Nash, abre espaço para que o próprio jogador seja explorado já que o adversário também pode mudar suas estratégias a qualquer momento. A explorabilidade de uma estratégia se dá pela diferença entre a utilidade esperada de uma melhor resposta contra determinado oponente e a utilidade esperada do equilíbrio de Nash (Moravčík et al. 2017).

A estratégia central da Pluribus foi computada através de múltiplos jogos contra outras cópias dessa mesma inteligência artificial, sem nenhuma base de dados de jogadores humanos ou inteligências artificiais anteriores usada como *input*. Inicialmente, a inteligência artificial jogou de forma aleatória e melhorou gradativamente enquanto determinava quais ações e qual distribuição de probabilidades dessas ações levavam a melhores resultados em comparação às versões iniciais da mesma. Assim, a Pluribus desenvolveu toda sua estratégia de jogo inicial em modo *offline*, porém durante as partidas contra oponentes reais, ela mantinha o processo de melhoramento contínuo através da procura por estratégias superiores à medida que enfrentava novas situações durante a partida.

Existem muitos pontos de decisão na modalidade de pôquer No-Limit Texas Hold'em para serem considerados individualmente. Logo, para reduzir a complexidade do jogo, foram desconsideradas algumas ações e alguns pontos de decisão foram agrupados por meio de um processo chamado abstração. Este processo reduz o número de diferentes ações que a inteligência artificial considera visto que uma aposta de \$201 não é tão diferente de uma aposta de \$200, portanto para construir uma estratégia menos complexa, a Pluribus considera apenas alguns tamanhos de apostas em qualquer ponto de decisão.

A estratégia base da Pluribus foi computada usando uma variante do *counterfactual regret minimization* (CRF). O CRF é um algoritmo iterativo que permite que a inteligência artificial melhore enquanto aprende a derrotar versões anteriores de si mesma. O algoritmo utilizado na Pluribus é o Monte Carlo CRF (MCCFR) que atravessa apenas uma porção da árvore de decisão ao invés de atravessar a árvore de decisão inteira em cada iteração. Desse modo, o MCCFR simula uma mão de poker e quando essa mão termina, a inteligência artificial revisa cada decisão que foi feita e

investiga o quão melhor ou pior seria tomar outra decisão disponível e assim por diante. Isso é possível devido à interação com as estratégias dos outros jogadores, desse modo a inteligência artificial é capaz de saber o que iria acontecer se outra ação fosse tomada naquelas circunstâncias e adaptar sua estratégia com base no seu arrependimento de não ter escolhido aquela ação fazendo com que numa próxima oportunidade ela escolha essa estratégia com uma probabilidade maior. Logo, o CRF é capaz de eliminar todas as estratégias estritamente dominadas em todos jogos finitos Brown e Sandholm (2019).

Como o poker se trata de um jogo de informações incompletas, a Pluribus conduz uma pesquisa em tempo real para buscar a melhor solução possível para a situação em que está envolvida. Além disso, como todos os jogadores podem modificar sua estratégia além do nó de um subjogo, os pesquisadores implementaram um sistema que assume que cada jogador pode escolher entre  $k$  diferentes estratégias para jogar quando um nó for alcançado. Uma dessas estratégias de continuação é a estratégia base pré-computada, a segunda é uma forma modificada da estratégia base enviesada para o *fold*, a terceira é a estratégia base enviesada para o *call* e a quarta é estratégia base enviesada para o *raise*. Outro desafio causado pela informação incompleta é que a estratégia ótima para uma determinada situação depende de qual é a estratégia do oponente para cada situação em que ele possa se encontrar, levando em consideração o seu range de mãos. Desse modo, para se manter imprevisível, a Pluribus calcula a probabilidade que ela chegaria em determinada situação com cada possível mão de acordo com sua estratégia e como ela agiria com cada mão para manter sua estratégia balanceada em mãos fortes e mãos de *bluff* e, só assim, definir qual será sua jogada com a mão que está realmente segurando.

Por fim, Pluribus foi avaliada em dois formatos: cinco profissionais humanos contra uma cópia da Pluribus (5H+1AI) e um profissional humano jogando contra cinco cópias da Pluribus (1H+5AI). Ademais, foi utilizada uma técnica para reduzir a variância (AIVAT) em todos experimentos para reduzir o fator sorte. Após aplicar esta técnica, Pluribus ganhou em média 48 mbb/game<sup>1</sup> (com um erro padrão de 25 mbb/game) no primeiro teste. Essa é uma grande taxa de vitória, principalmente em meio a grandes profissionais da atualidade. Pluribus foi determinada como lucrativa por meio de um teste t unilateral com intervalo de confiança de 95% e um p-valor de

---

<sup>1</sup> milli big blinds per game

0.028. Já no segundo teste, a AI também obteve sucesso e após 10.000 mãos jogadas, derrotou os humanos com uma taxa de vitória de 32 mbb/game (com erro padrão de 15 mbb/game). Brown e Sandholm (2019) afirmam que como a estratégia da Pluribus foi determinada inteiramente por um treinamento dela consigo mesma, pode-se considerar que surge uma nova perspectiva de como um jogo ótimo deve ser. Por fim, Brown e Sandholm (2019) concluem que o algoritmo estruturado através de pesquisa e treinamento contra versões de si mesmo pode produzir estratégias sobre-humanas para os jogos de pôquer com múltiplos jogadores.

Desse modo, utilizaremos a inteligência artificial *PokerSnowie* neste trabalho visto que ela utiliza o algoritmo CRF que é capaz de traçar um perfil de estratégias que converge para o Equilíbrio de Nash através da minimização do arrependimento.

Bowling et al. (2015, p. 147, tradução livre) afirma que:

O arrependimento é a perda de utilidade que um algoritmo sofre por não ter selecionado a estratégia ótima e só pode ser conhecida observando em retrospectiva.

O algoritmo de minimização de arrependimento é aquele que garante que seu arrependimento cresça de acordo com uma função sublinear através do tempo e, eventualmente, alcance a mesma utilidade que a estratégia ótima.

Assim, é possível comparar as estratégias utilizadas pelos jogadores experientes e inexperientes com as estratégias da inteligência artificial visto que estas convergem para o equilíbrio de Nash.

### **2.3. Economia Comportamental**

Tversky e Kahneman (1974) afirmam que as pessoas contam com um número de heurísticas para determinar probabilidades e prever valores a fim de reduzir a complexidade das tarefas. No entanto, apesar dessas heurísticas serem bastante úteis para a tomada de decisão, geralmente são carregadas de erros sistemáticos denominados vieses.

Tversky e Kahneman (1974) apresentam alguns tipos de heurísticas e seus respectivos vieses. A heurística da representatividade simboliza o quanto as pessoas julgam que a probabilidade de ocorrer um determinado resultado é representado por outro evento ocorrido no presente, ou seja, se o evento A é altamente representado por B, a probabilidade de A originar B é alta. No entanto, o viés da representatividade

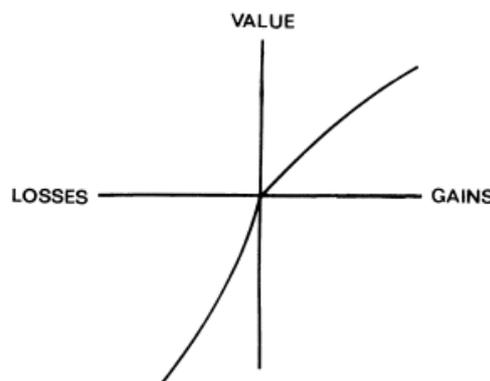
é a insensibilidade ao tamanho da amostra, ou seja, as pessoas avaliam o resultado de uma determinada amostra que pode não ter o tamanho adequado para confirmar a hipótese, desse modo as pessoas estão predispostas à “lei dos pequenos números”. Outra consequência da crença na representatividade é a conhecida falácia do apostador Tversky e Kahneman (1974). A falácia do apostador mostra que a probabilidade é comumente vista como um processo que se autocorrige, logo acredita-se que um desvio para uma direção induz um desvio para a direção oposta para que se restaure o equilíbrio. Porém, na verdade, os desvios não são corrigidos, pois as chances são diluídas ao longo de toda distribuição.

Outra heurística abordada por Tversky e Kahneman (1974) é denominada como ancoragem. Esse processo mostra que as pessoas fazem suas estimativas de acordo com um valor inicial. Assim, diferentes pontos de partidas geram diferentes estimativas e, portanto, resultados enviesados.

Além disso, segundo Kahneman e Tversky (1979), a Teoria da Utilidade Esperada é insuficiente para representar como os agentes avaliam suas preferências para a tomada de decisão num cenário em que existe risco e incerteza. A partir disso, sugerem a Teoria do Prospecto.

Na Teoria do Prospecto de Kahneman e Tversky (1979), o principal pressuposto é de que os agentes se tornam avessos ao risco num cenário de ganhos e, alternativamente, tornam-se tomadores de risco num cenário de perdas. O gráfico a seguir indica a “função-valor” que representa os resultados de preferências como ganhos ou perdas a partir de um ponto inicial representado pelo valor zero.

**Figura 1 - Função Valor**



Fonte: Kahneman e Tversky (1979)

É possível observar que a curva de perdas é convexa e a curva de ganhos é côncava e, além disso, a curva que representa as perdas é mais inclinada do que a curva de ganhos. Essa diferença explica a aversão à perda, desse modo, o valor dos ganhos e perdas não têm impactos simétricos na preferência. Assim, conclui-se que a “dor” da perda é maior do que a “satisfação” do ganho.

#### **2.4. Teste de igualdade de densidades multivariadas**

Li et al. (2009) propôs um teste não-paramétrico para igualdade de densidades multivariadas para dados contínuos e categóricos. O teste estatístico é construído baseado na integral da diferença das densidades ao quadrado e pode ser acessado através da função `npdeneqtest` no R. Como um teste que utiliza os valores críticos retirados de uma distribuição assintótica exibe distorções para uma amostra finita, o teste aplica a técnica de reamostragem *bootstrap* para que o teste tenha um tamanho correto. A reamostragem é obtida através da distribuição empírica dos dados.

### **3. METODOLOGIA**

#### **3.1. Construção da Base de Dados**

Inicialmente, importamos uma base de dados contendo 6.675.578 mãos de pôquer jogadas por 410.285 jogadores diferentes para um programa denominado *hand2note* que é capaz de realizar análises estatísticas das mãos jogadas. Uma das ferramentas existentes nesse programa é o *range research* que é capaz de filtrar essas mãos de acordo com um cenário específico a fim de obter algumas observações, como: as cartas que os jogadores estão jogando nesse cenário e a quantidade de cada combinação de cartas. O cenário escolhido para a análise neste trabalho foi: jogadores com quarenta *big blinds*, realizando uma aposta mínima de dois *big blinds* e que estão nas posições UTG, UTG+1, MP, MP+1, Hijack (HJ), Cutoff (CO) e Button (BTN).

**Figura 2 - Posições da Mesa**



Fonte: página do site [howtoplaypokerinfo](https://howtoplaypokerinfo.com/)<sup>2</sup>

Além disso, fizemos a subdivisão do total de jogadores em dois grupos: jogadores experientes e inexperientes. Para isso, determinamos como jogadores experientes aqueles que possuem mais de duas mil mãos jogadas nessa base de dados, pois jogadores experientes investem mais tempo no pôquer que a média dos jogadores. Já para jogadores inexperientes, definimos como aqueles que possuem menos de mil mãos jogadas nessa base de dados, pois é factível assumir que grande parte desses jogadores jogam de forma recreativa, portanto não possuem uma grande quantidade de mãos no geral.

Desse modo, é possível definir as estratégias que cada jogador está utilizando e as probabilidades de eles jogarem cada combinação possível. Como por exemplo, o resultado obtido para os jogadores experientes na posição UTG:

<sup>2</sup> Disponível em: <https://howtoplaypokerinfo.com/>. Acesso em: 25 out. 2021

**Figura 3 - Estratégia dos Jogadores Experientes no UTG**

AA	AKs	AQs	AJs	ATs	A9s	A8s	A7s	A6s	A5s	A4s	A3s	A2s
74	60	36	41	22	25	20	21	15	20	10	15	11
AKo	KK	KQs	KJs	KTs	K9s	K8s	K7s	K6s	K5s	K4s	K3s	K2s
128	52	37	23	22	19	3	1					
AQo	KQo	QQ	QJs	QTs	Q9s	Q8s	Q7s	Q6s	Q5s	Q4s	Q3s	Q2s
99	69	75	20	25	11	1				1		
AJo	KJo	QJo	JJ	JTs	J9s	J8s	J7s	J6s	J5s	J4s	J3s	J2s
76	36	9	83	30	12	1						
ATo	KTs	QTo	JTo	TT	T9s	T8s	T7s	T6s	T5s	T4s	T3s	T2s
44	6	1		70	17							
A9o	K9o	Q9o	J9o	T9o	99	98s	97s	96s	95s	94s	93s	92s
7					50	12	1					
A8o	K8o	Q8o	J8o	T8o	98o	88	87s	86s	85s	84s	83s	82s
						53	9	2				
A7o	K7o	Q7o	J7o	T7o	97o	87o	77	76s	75s	74s	73s	72s
1							34	3				
A6o	K6o	Q6o	J6o	T6o	96o	86o	76o	66	65s	64s	63s	62s
								34	2			
A5o	K5o	Q5o	J5o	T5o	95o	85o	75o	65o	55	54s	53s	52s
1									19	1		
A4o	K4o	Q4o	J4o	T4o	94o	84o	74o	64o	54o	44	43s	42s
										11		
A3o	K3o	Q3o	J3o	T3o	93o	83o	73o	63o	53o	43o	33	32s
											5	
A2o	K2o	Q2o	J2o	T2o	92o	82o	72o	62o	52o	42o	32o	22
												1

Fonte: Elaboração Própria

Para definir as probabilidades de cada combinação de mão ser jogada, dividimos a quantidade de observações pela quantidade total de eventos de cada mão. Assim, é possível construir uma tabela com as probabilidades das 169 mãos possíveis de serem jogadas para cada tipo de jogador e para cada posição.

### 3.2. Inteligência Artificial

A inteligência artificial *PokerSnowie* foi utilizada neste trabalho a fim de descobrir quais seriam as estratégias balanceadas e não-exploráveis de cada posição da mesa. Essa inteligência artificial foi treinada sem nenhum conhecimento humano prévio visando a construção de uma estratégia inteiramente feita jogando contra uma versão de si mesma. Desse modo, a *PokerSnowie* desenvolveu suas estratégias tentando explorar as fraquezas de seus oponentes e defendendo sua estratégia modificando suas jogadas para que não fosse explorada. Esse processo de adaptação e aprendizado faz com que a inteligência artificial convirja para uma estratégia balanceada e robusta, ou seja, um equilíbrio de Nash.

Para comparar as estratégias utilizadas pela inteligência artificial com as estratégias utilizadas pelos dois grupos de jogadores, construímos um cenário com quarenta *big blinds*, com aposta mínima de dois *big blinds* e para todas posições da mesa.

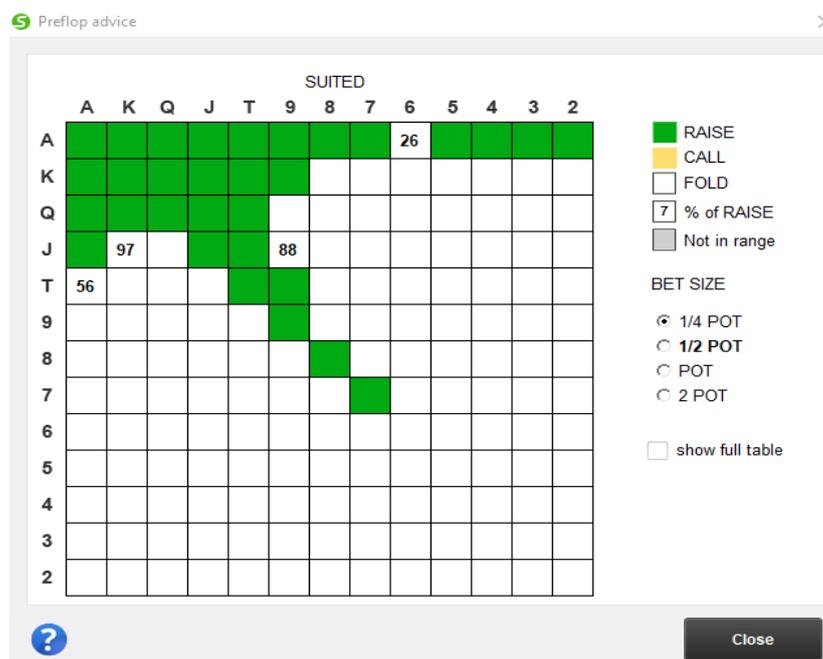
Figura 4 - Cenário Base no PokerSnowie



Fonte: PokerSnowie

Com isso, podemos descobrir qual seria a estratégia adotada pela inteligência artificial nesse cenário e em determinada posição, como por exemplo as combinações de cartas que ela usaria para a posição UTG:

Figura 5 - Estratégia da *PokerSnowie* no UTG



Fonte: *PokerSnowie*

### 3.3. Testes Estatísticos

Após a construção da base de dados com as probabilidades de cada grupo de jogadores, temos duas distribuições empíricas distintas que serão analisadas através do teste de Kolmogorov-Smirnov. Esse teste avalia se existe igualdade entre duas distribuições não-paramétricas através do cálculo da distância máxima entre as distribuições cumulativas das duas amostras. A hipótese nula desse teste é de que as duas amostras são retiradas da mesma distribuição. Com isso, podemos confrontar a distribuição dos jogadores experientes com a dos jogadores inexperientes; a distribuição dos jogadores experientes com a distribuição da inteligência artificial e, por fim, a distribuição dos jogadores inexperientes com a distribuição da inteligência artificial com o objetivo de descobrir se as estratégias dos jogadores experientes se diferem da estratégia dos jogadores inexperientes e se estão mais próximas das estratégias utilizadas pela inteligência artificial.

Para realizar o teste de igualdade de densidades multivariadas, atribuímos valores numéricos as cartas de dois a Às, como, respectivamente, de dois a quatorze. Desse modo, é possível construir uma matriz no formato bivariado a qual o eixo X representa o valor da primeira carta, o eixo Y o valor da segunda carta e o eixo Z as densidades de probabilidades (X, Y) dos jogadores.

**Tabela 1 - Distribuição Bivariada Jogadores Experientes no UTG**

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0,03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0,37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0,05	0,63	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02
6	0	0	0	0,1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0,15	1	0	0	0	0	0	0	0,02
8	0	0	0	0	0,1	0,45	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0,05	0,6	1	0	0	0	0	0,12
10	0	0	0	0	0	0	0	0,85	1	0	0,02	0,1	0,74
11	0	0	0	0	0	0	0,05	0,69	1	1	0,15	0,63	1
12	0	0	0,05	0	0	0	0,05	0,55	1	1	1	1	1
13	0	0	0	0	0	0,05	0,15	0,96	1	1	1	1	1
14	0,56	0,76	0,51	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaboração Própria

Assim, podemos aplicar o teste de igualdade de densidades multivariadas entre duas distribuições não paramétricas o qual possui como hipótese nula a igualdade entre as duas distribuições. Novamente, comparamos as distribuições dos jogadores

experientes *versus* jogadores inexperientes; jogadores experientes *versus* inteligência artificial e jogadores inexperientes *versus* inteligência artificial utilizando o R e a função `npdeneqtest`.

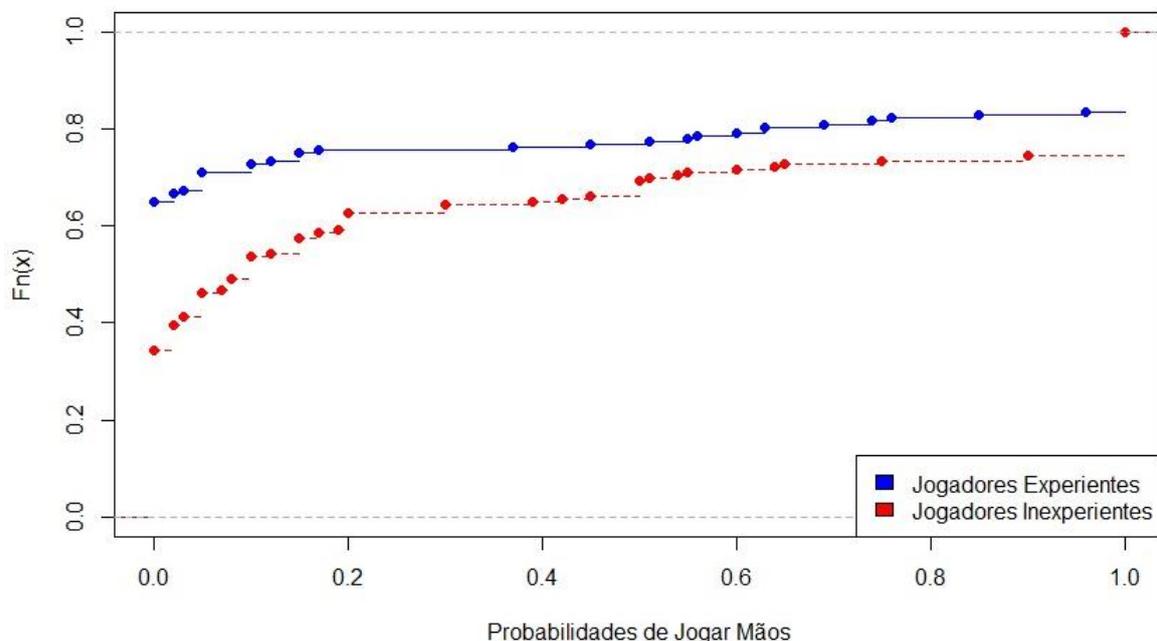
## 4. RESULTADOS

### 4.1. Posição UTG

Como mencionado anteriormente, iremos aplicar o teste de Kolmogorov-Smirnov e o teste de igualdade de densidade multivariadas para comparar a composição das estratégias adotadas por cada grupo de jogadores (experientes e inexperientes) com a estratégia da inteligência artificial.

O primeiro teste de Kolmogorov-Smirnov compara a estratégia utilizada por jogadores experientes *versus* jogadores inexperientes na posição UTG. A estatística  $D$  que mede a distância máxima entre as duas curvas de distribuições cumulativas foi de 0.30769 e o  $p$ -valor nesse teste foi de  $2.251e-07$ , desse modo o teste rejeita a hipótese nula de que as duas amostras vêm de uma mesma distribuição populacional em um nível de significância de 5%.

**Figura 6 - Distribuições Cumulativas UTG**

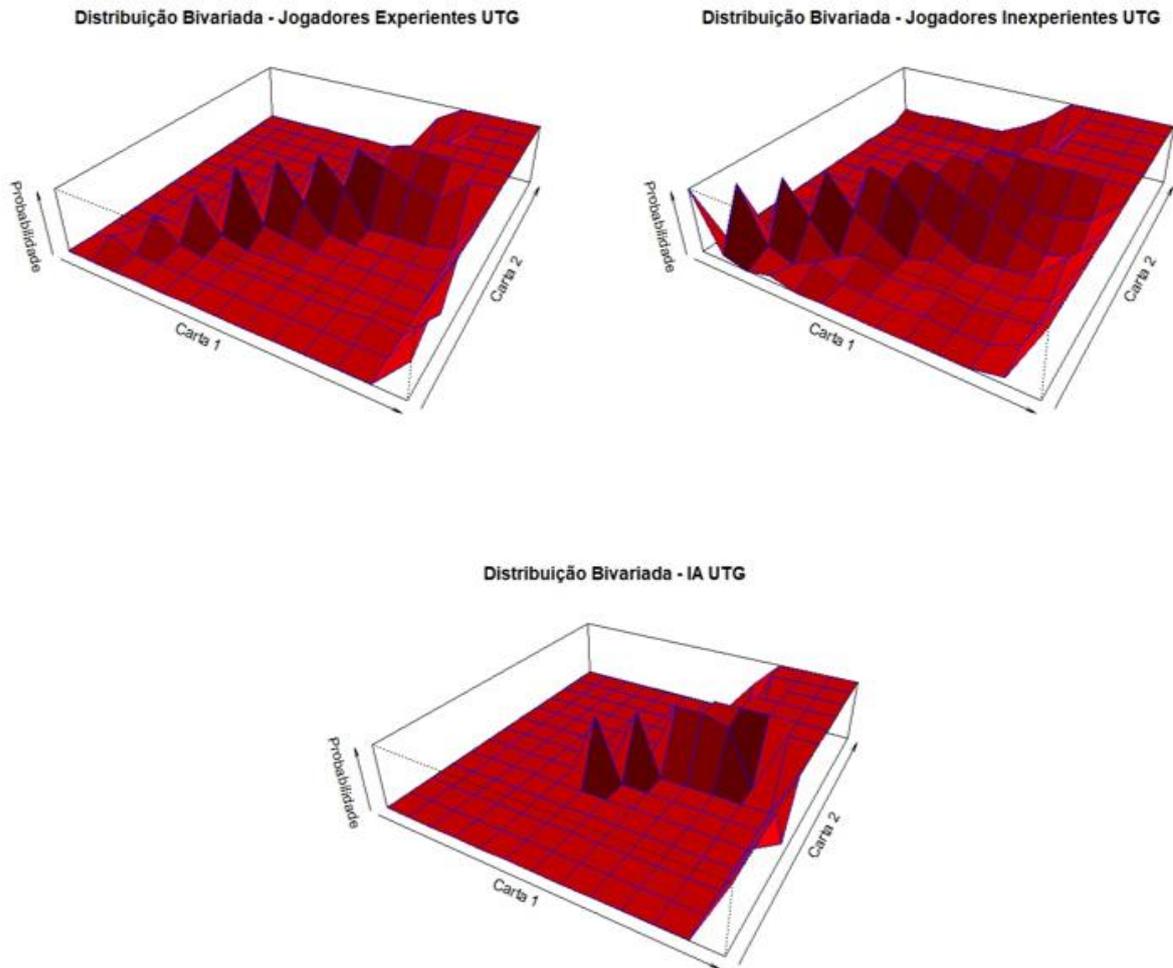


Fonte: Elaboração Própria

Já no caso de jogadores experientes versus inteligência artificial, a estatística D foi de 0.14201 e o p-valor encontrado foi de 0.06619, assim o teste aceita a hipótese nula de que as duas amostras vêm de uma mesma distribuição populacional ao nível de significância de 5%. Para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, obtemos a estatística D com valor de 0.4497 e o p-valor de 2.887e-15, logo rejeitamos a hipótese nula de que as duas amostras vêm de uma mesma distribuição populacional ao nível de significância de 5%.

Para o teste de igualdade de densidades multivariadas, comparamos inicialmente os jogadores experientes versus os jogadores inexperientes, o p-valor encontrado foi de 0.037594, assim a hipótese nula de igualdade é rejeitada ao nível de significância de 5% e conclui-se que as duas distribuições não são iguais. Já comparando os jogadores experientes versus inteligência artificial, obtemos um p-valor de 0.36591 e o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10%, logo as duas distribuições são iguais. Por fim, comparamos os jogadores inexperientes versus inteligência artificial, o p-valor encontrado foi de 0.011278 e, desse modo, a hipótese nula de igualdade é rejeitada ao nível de significância de 5%.

**Figura 7 - Distribuições Bivariadas UTG**

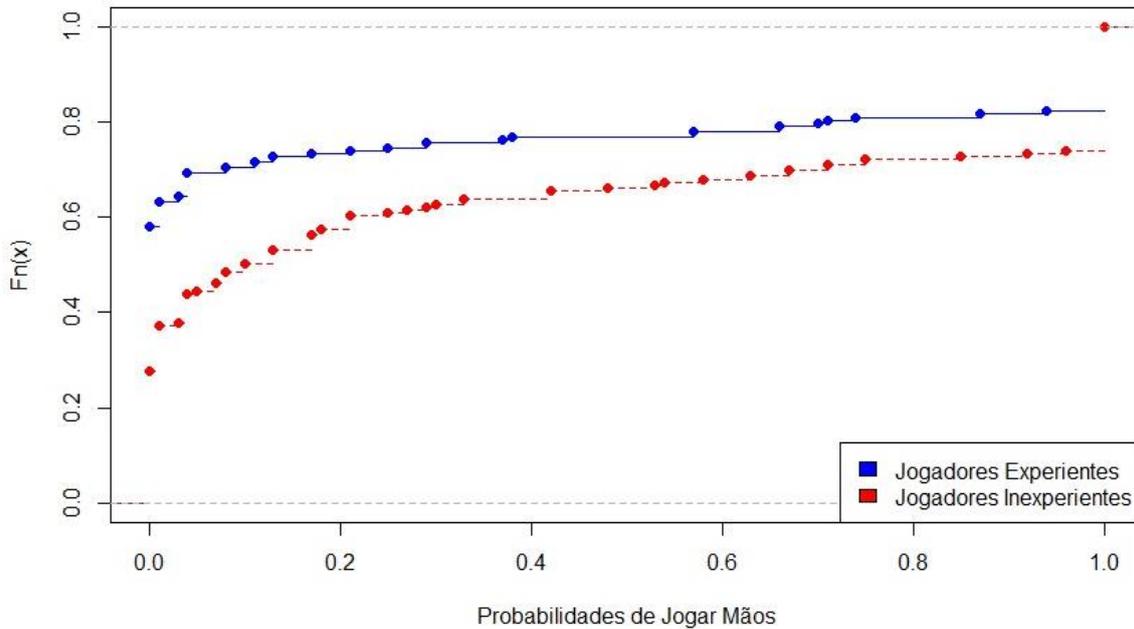


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.2. Posição UTG+1

Agora, através do teste de Kolmogorov-Smirnov, comparamos os jogadores experientes versus jogadores inexperientes para a posição UTG+1. A estatística D mostrou o valor de 0.30178 e o p-valor obtido foi de  $4.14e-07$ , logo o teste rejeita a hipótese nula de que as duas amostras vêm de uma mesma distribuição populacional ao nível de significância de 5%. Já na comparação entre jogadores experiente e a inteligência artificial, obtemos um valor da estatística D de 0.19527 e o p-valor de 0.003181, portanto o teste rejeita a hipótese nula em um nível de significância de 5%. Na comparação entre jogadores inexperientes e a inteligência artificial, a estatística D tem o valor de 0.49704 e o p-valor é  $2.2e-16$ , portanto o teste rejeita a hipótese nula em um nível de significância de 5%.

**Figura 8 - Distribuições Cumulativas UTG+1**



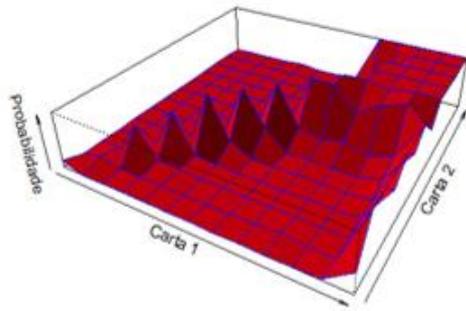
Fonte: Elaboração Própria

Apesar de rejeitarmos a hipótese nula entre jogadores experientes e a inteligência artificial, é notável a diferença quando comparamos com os jogadores inexperientes, pois os jogadores experientes estão muito mais próximos da inteligência artificial do que os jogadores inexperientes como indica a estatística D.

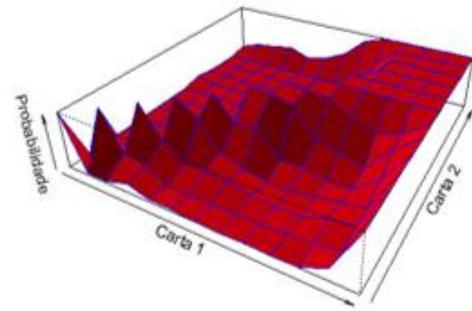
Para o teste de igualdade de densidades multivariadas, primeiramente comparamos os jogadores experientes com os jogadores inexperientes e encontramos um p-valor de 0.050125 indicando que a hipótese nula de igualdade é rejeitada ao nível de significância de 10%, portanto, as distribuições não são iguais. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, obtemos o p-valor de 0.48371, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de 10% e isso indica que as duas distribuições são iguais. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial encontramos o p-valor de 0.01554 e, portanto, rejeitamos a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 5% demonstrando que as duas distribuições não são iguais.

**Figura 9 - Distribuições Bivariadas UTG+1**

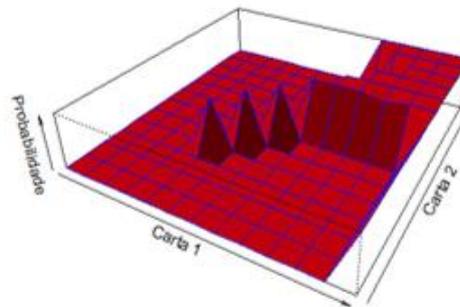
Distribuição Bivariada - Jogadores Experientes UTG+1



Distribuição Bivariada - Jogadores Inexperientes UTG+1



Distribuição Bivariada - IA UTG+1

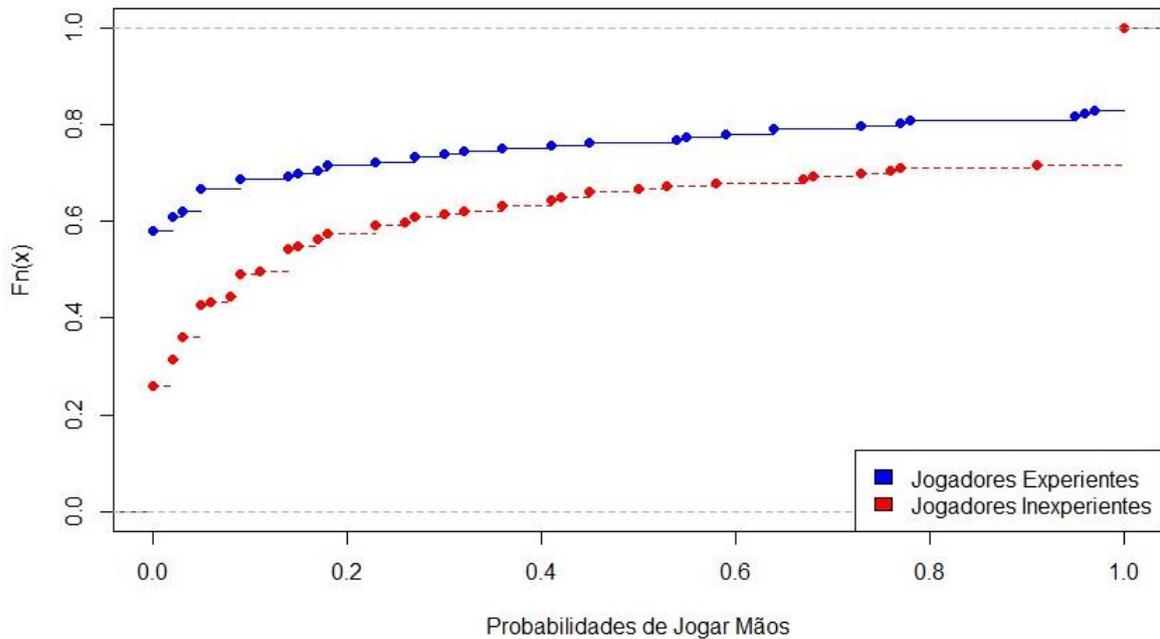


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.3. Posição MP

O teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os jogadores experientes com os jogadores inexperientes na posição MP resulta uma D de 0.31953 e um p-valor de  $6.42e-08$ , portanto rejeita-se a hipótese nula de que as duas amostras vêm de uma mesma distribuição populacional em um nível de significância de 5%. No caso do teste para jogadores experientes versus inteligência artificial, obtemos um valor para a estatística D de 0.16568 e um p-valor de 0.01933, portanto rejeita-se a hipótese nula em um nível de significância de 5%. Por fim, entre jogadores inexperientes e a inteligência artificial, temos uma estatística D de 0.48521 e um p-valor de  $2.2e-16$  rejeitando a hipótese nula em um nível de significância de 5%.

**Figura 10 - Distribuições Cumulativas MP**

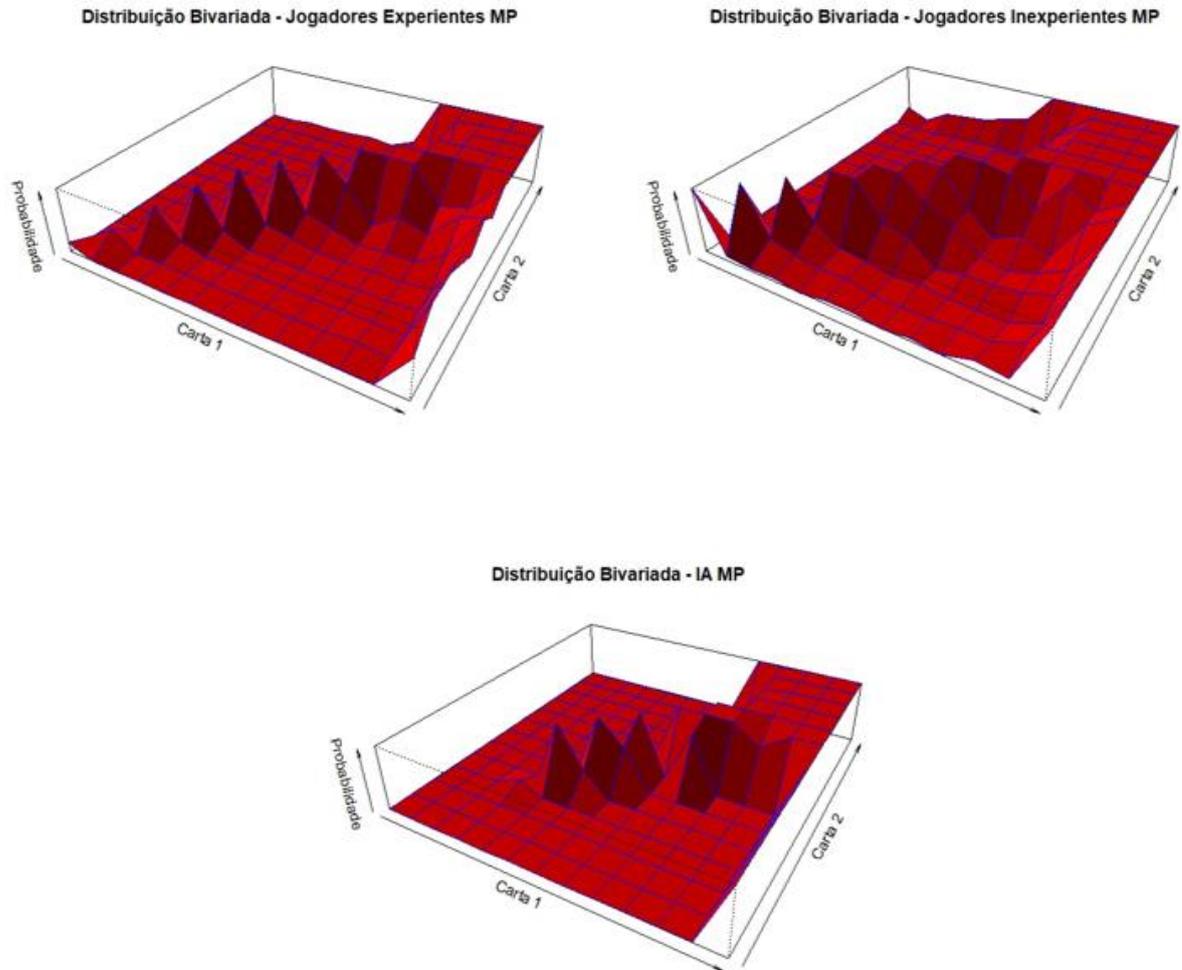


Fonte: Elaboração Própria

Novamente, observamos que apesar do teste de Kolmogorov-Smirnov rejeitar a hipótese nula de que as amostras de jogadores experientes e da inteligência artificial não vêm de uma mesma distribuição populacional, é notável que a distância entre as estratégias adotadas pelos jogadores experientes e a inteligência artificial é menor que a distância entre jogadores inexperientes e a inteligência artificial.

No teste de igualdade de densidades multivariadas para a posição MP, novamente realizamos o teste entre jogadores experientes e jogadores inexperientes e obtivemos o p-valor de 0.027569, assim, a hipótese nula de igualdade é rejeitada ao nível de significância de 5% mostrando que as duas distribuições não são iguais. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, o p-valor foi de 0.29323 e, portanto, o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade em um nível de significância de 10% revelando que as duas distribuições são iguais. Por fim, no teste entre jogadores inexperientes e inteligência artificial, o p-valor foi de 0.1604, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade em um nível de 10% de significância e conclui-se que as duas distribuições são iguais.

**Figura 11 - Distribuições Bivariadas MP**

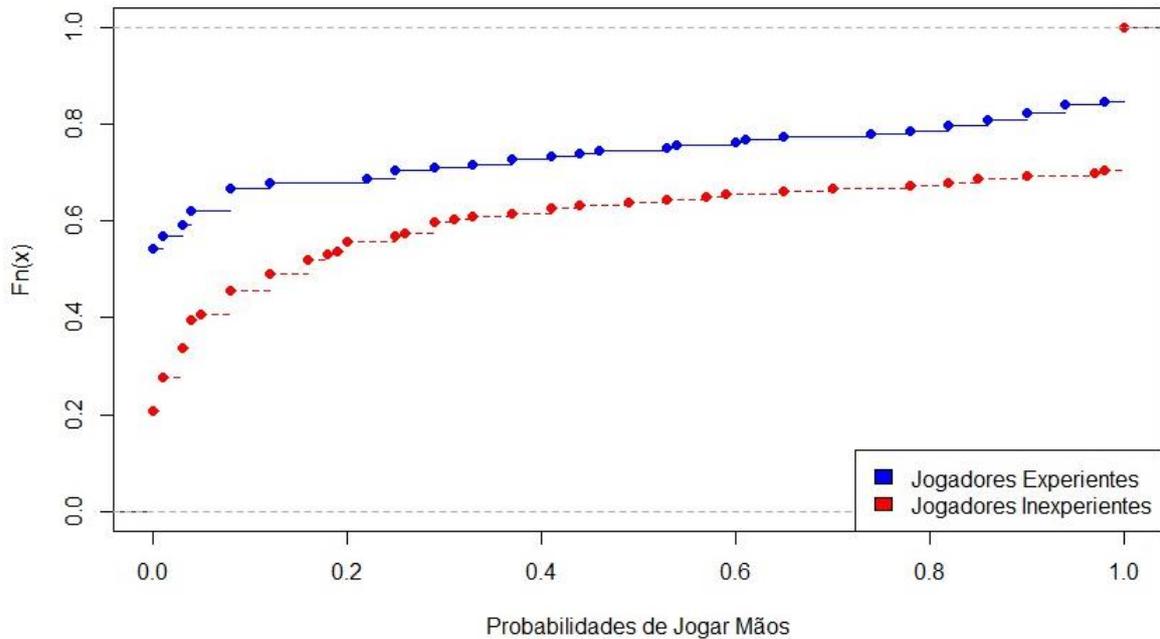


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.4. Posição MP1

Agora, realizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov para a posição MP1. Para o cenário entre jogadores experientes e jogadores inexperientes, obtivemos a estatística D no valor de 0.33728 e o p-valor de 8.949e-09, portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, o valor de D é 0.15385 e o p-valor é 0.03663, portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, a estatística D tem o valor de 0.49112 e o p-valor de 2.2e-16, portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%.

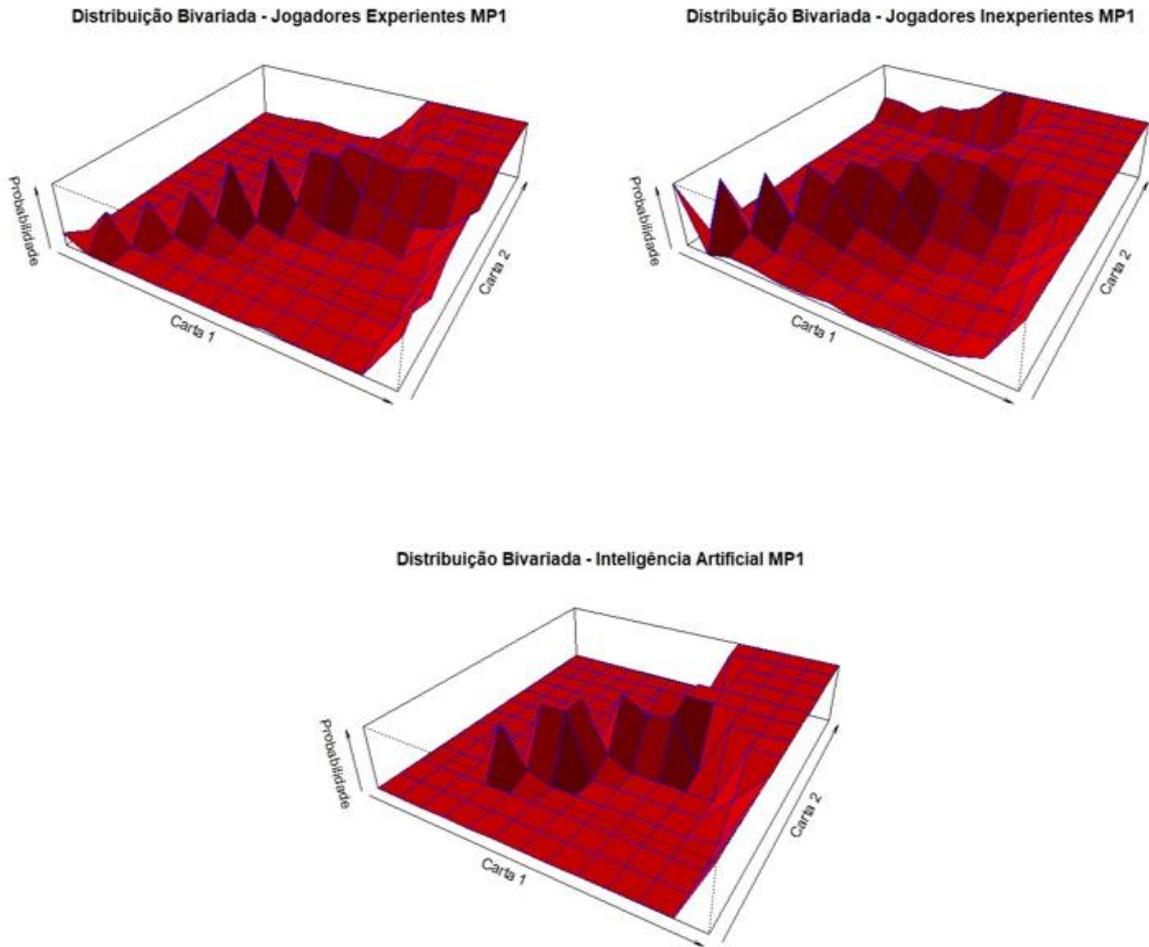
**Figura 12 - Distribuições Cumulativas MP1**



Fonte: Elaboração Própria

Já o teste de igualdade de densidades multivariadas para a posição MP1, primeiramente analisamos o cenário de jogadores experientes versus jogadores inexperientes e obtivemos o p-valor de 0.38095, portanto o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% indicando que as duas distribuições são iguais. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, o p-valor obtido foi de 0.71429, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% mostrando que as duas distribuições são iguais. Por fim, analisando jogadores inexperientes versus inteligência artificial, temos um p-valor de 0.49123, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% indicando que as duas distribuições são iguais.

**Figura 13 - Distribuições Bivariadas MP1**

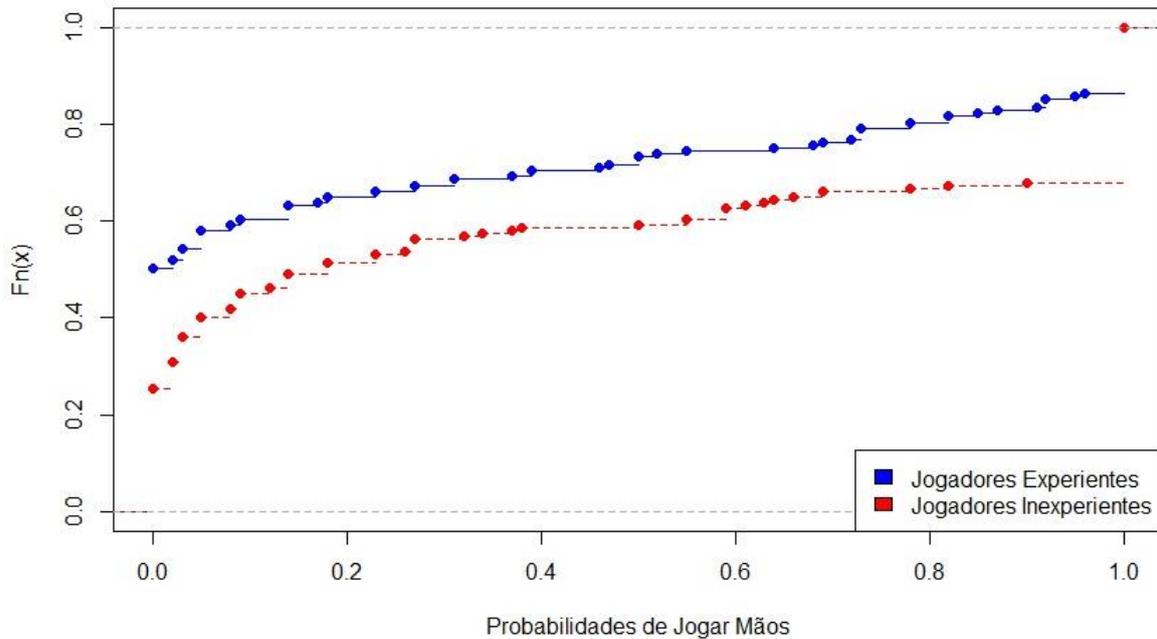


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.5. Posição Hijack

O teste de Kolmogorov-Smirnov para a posição Hijack inicia-se comparando jogadores experientes versus jogadores inexperientes, desse modo observamos que a estatística  $D$  é igual a 0.24852 e o  $p$ -valor é  $5.86e-05$ , portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, obtemos uma  $D$  de 0.19527 e o  $p$ -valor de 0.003181, logo rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, obtemos um valor para a estatística  $D$  de 0.38462 e o  $p$ -valor de  $2.778e-11$ , rejeitando a hipótese nula ao nível de significância de 5%.

**Figura 14 - Distribuições Cumulativas Hijack**

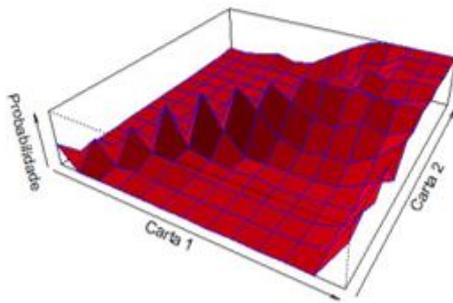


Fonte: Elaboração Própria

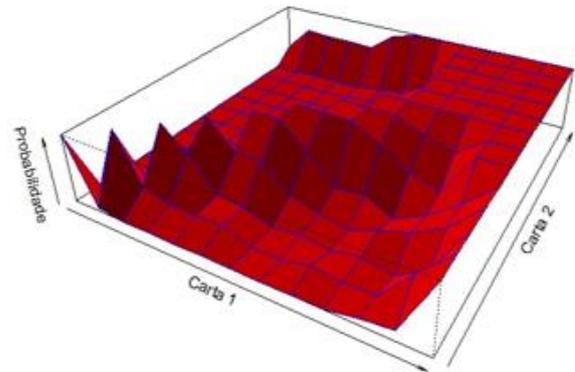
O teste de igualdade de densidades multivariadas para a posição Hijack inicia-se comparando os jogadores experientes com os jogadores inexperientes, desse modo, observamos um p-valor de 0.22055 e, assim, o teste falha em rejeitar hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% mostrando que as duas distribuições são iguais. Já para jogadores experientes versus inteligência artificial, apresenta-se o p-valor de 0.46366 e o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de 10% de significância mostrando que as duas distribuições são iguais. Por fim, para jogadores inexperientes e a inteligência artificial, obtemos um p-valor de 0.02005, portanto rejeitamos a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 5% e concluímos que as duas distribuições não são iguais.

**Figura 15 - Distribuições Bivariadas Hijack**

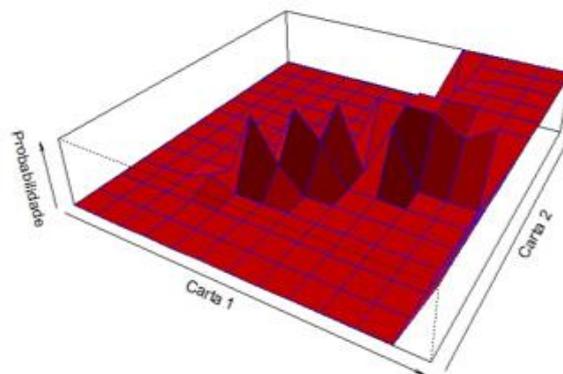
Distribuição Bivariada - Jogadores Experientes Hijack



Distribuição Bivariada - Jogadores Inexperientes Hijack



Distribuição Bivariada - Inteligência Artificial Hijack

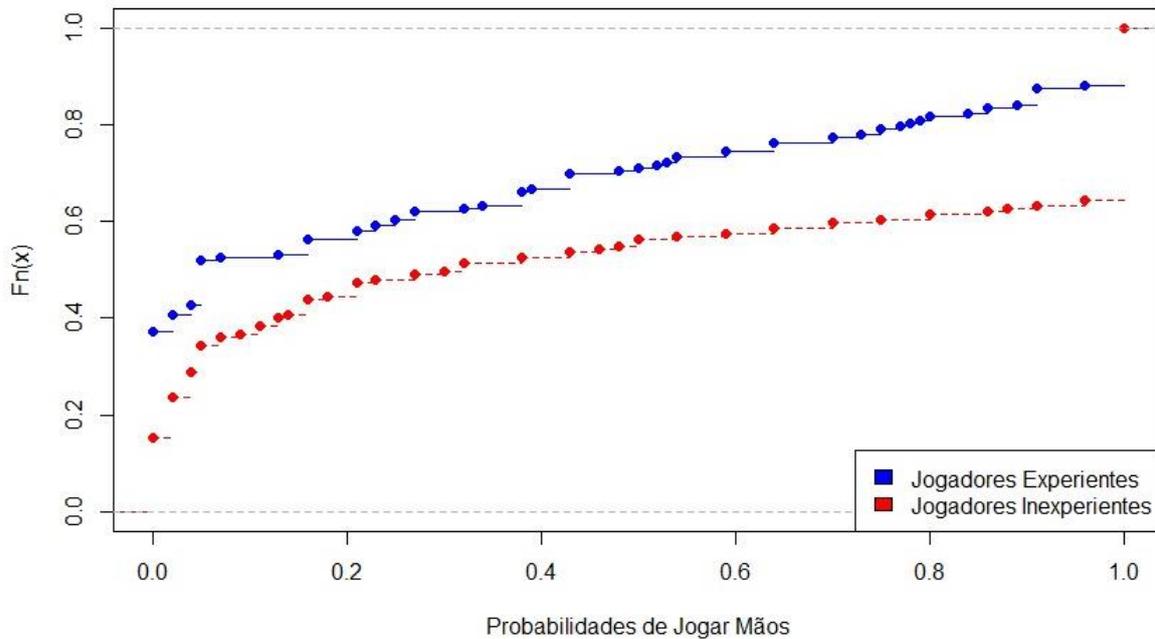


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.6. Posição Cutoff

O teste de Kolmogorov-Smirnov para a posição Cutoff entre jogadores experientes e inexperientes resulta num valor para a estatística D de 0.2426 e um p-valor de  $9.577e-05$ , portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, temos uma estatística D no valor de 0.31953 e um p-valor de  $6.42e-08$ , portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, temos uma D de 0.37278 e um p-valor de  $1.263e-10$ , logo rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%.

**Figura 16 - Distribuições Cumulativas Cutoff**

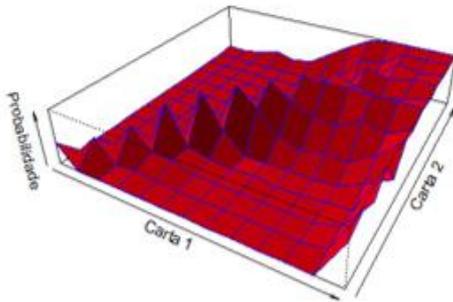


Fonte: Elaboração Própria

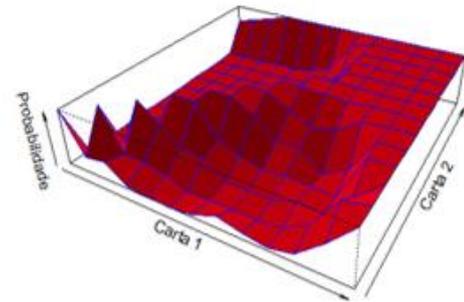
Já o teste de igualdade de densidades multivariadas para a posição Cutoff, inicialmente comparamos jogadores experientes versus jogadores inexperientes e obtemos um p-valor de 0.33083, desse modo, o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% mostrando que as duas distribuições são iguais. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, obtemos um p-valor de 0.48371 relevando que o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de 10% de significância e, portanto, as duas distribuições são iguais. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, temos um p-valor de 0.28321, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10%, concluindo que as duas distribuições são iguais.

**Figura 17 - Distribuições Bivariadas Cutoff**

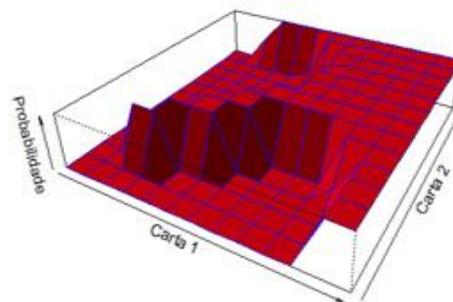
**Distribuição Bivariada - Jogadores Experientes Cutoff**



**Distribuição Bivariada - Jogadores Inexperientes Cutoff**



**Distribuição Bivariada - IA Cutoff**

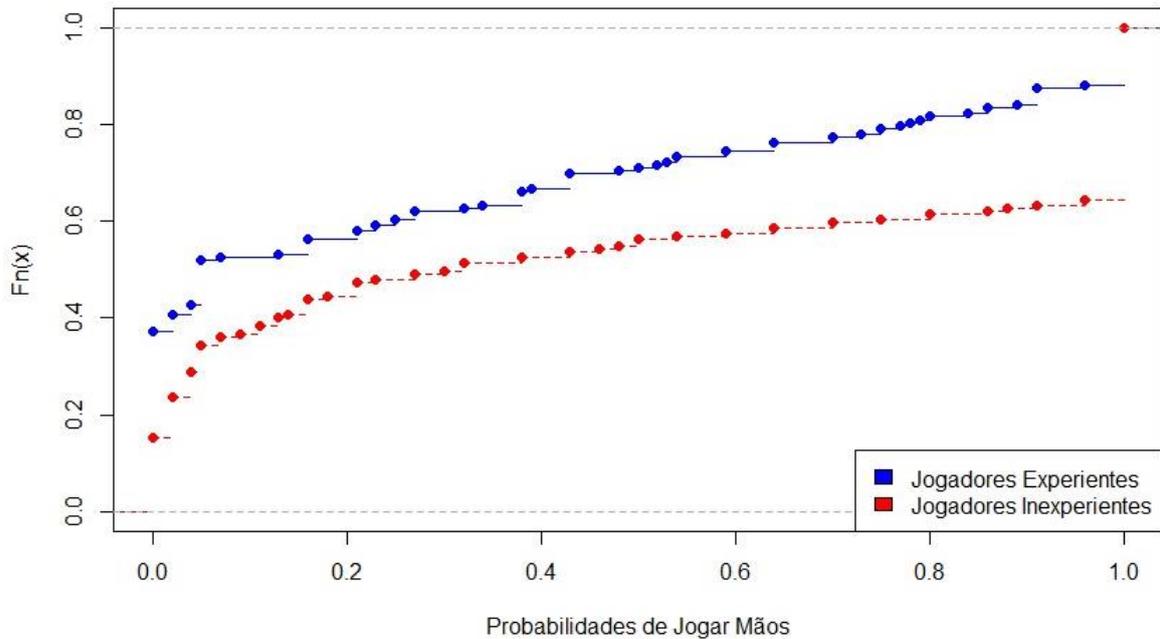


Fonte: Elaboração Própria

#### 4.7. Posição Button

O teste de Kolmogorov-Smirnov para a posição Button entre jogadores experientes e jogadores inexperientes apresenta uma  $D$  de 0.24852 e um  $p$ -valor de  $5.86e-05$ , logo rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Para jogadores experientes versus inteligência artificial, temos uma estatística  $D$  de 0.3787 e um  $p$ -valor de  $5.959e-11$ , portanto rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%. Por fim, realizando o teste entre jogadores inexperientes e a inteligência artificial, temos uma  $D$  de 0.35503 e um  $p$ -valor de  $1.121e-09$ , logo rejeita-se a hipótese nula ao nível de significância de 5%.

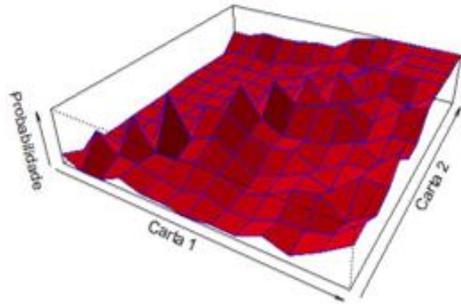
**Figura 18 - Distribuições Cumulativas Button**



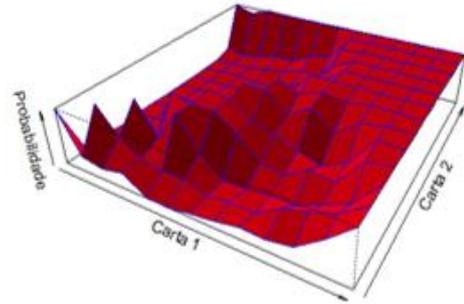
O teste de igualdade de densidades multivariadas para a posição Button revela que para jogadores experientes versus jogadores inexperientes, o p-valor encontrado é de 0.6391, portanto o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% e, assim, concluímos que as duas distribuições são iguais. Já para jogadores experientes versus inteligência artificial, temos o p-valor de 0.46617 portanto o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10%, logo concluímos que as duas distribuições são iguais. Por fim, para jogadores inexperientes versus inteligência artificial, obtemos o p-valor de 0.57143, logo o teste falha em rejeitar a hipótese nula de igualdade ao nível de significância de 10% e concluímos que as duas distribuições são iguais.

**Figura 19 - Distribuições Bivariadas Button**

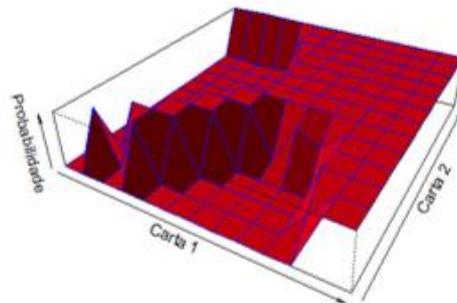
Distribuição Bivariada - Jogadores Experientes Button



Distribuição Bivariada - Jogadores Inexperientes Button



Distribuição Bivariada - IA Button



Fonte: Elaboração Própria

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho tem como objetivo testar se os jogadores experientes possuem estratégias diferentes dos jogadores inexperientes e, além disso, mensurar a diferença dessas estratégias das estratégias ótimas adotadas por uma inteligência artificial.

De acordo com a teoria moderna do pôquer, os jogadores deveriam jogar um range de mãos menor das posições iniciais da mesa visto que ainda existem muitos jogadores na mesa com cartas e, portanto, a probabilidade de ocorrer alguma reação é maior. Alternativamente, os jogadores deveriam jogar um range maior de mãos das posições finais visto que restaram poucos jogadores e, portanto, a probabilidade de

reação é menor. Portanto, as posições iniciais impactam bastante na lucratividade de um jogador. A inteligência artificial parte dessa lógica e é notável a diferença da composição de suas estratégias em diferentes posições.

Analisando a base de dados é possível notar que os jogadores experientes selecionam melhor as mãos com que deveriam jogar do que os jogadores inexperientes. Basicamente, os jogadores inexperientes jogam quase o mesmo leque de mãos para todas as posições, nos revelando que não são muito seletivos com suas mãos. Já os jogadores experientes crescem os seus ranges de mãos de acordo com a posição em que se encontram.

Além disso, os testes de Kolmogorov-Smirnov revelam que os jogadores experientes utilizam estratégias diferentes dos jogadores inexperientes para todas as posições. Também notamos que para a posição inicial, os jogadores experientes jogam igual a inteligência artificial e os jogadores inexperientes utilizam uma estratégia diferente da inteligência artificial. Os resultados dos jogadores experientes versus a inteligência artificial para as demais posições revelam que as duas amostras não fazem parte da mesma distribuição, no entanto, observamos que a distância que as distribuições dos jogadores experientes estão das distribuições da inteligência artificial é menor do que a dos jogadores inexperientes.

No caso do teste de igualdade de densidade multivariadas, observamos que os jogadores experientes possuem uma distribuição igual à distribuição da inteligência artificial para todas as posições. Além disso, para as posições iniciais os jogadores experientes jogam uma estratégia diferente da estratégia adotada pelos jogadores inexperientes e igual às estratégias da inteligência artificial ao passo que os jogadores inexperientes jogam estratégias diferentes das estratégias utilizadas pela inteligência artificial. Já para as posições do meio e do final da mesa, observamos que tanto os jogadores experientes quanto os jogadores inexperientes jogam de forma similar entre si e em comparação à inteligência artificial.

É importante ressaltar que o pôquer é um jogo de informações incompletas e sujeito a muitos vieses cognitivos, logo os jogadores podem tomar decisões baseado em alguma informação coletada sobre determinado jogador ao longo da partida (adaptação de tendências) ou mudarem sua estratégia por algum fator emocional externo. Assim, jogar o equilíbrio de Nash nem sempre é o mais adequado para todas infinitas situações que existem dentro do jogo. Outro fator importante é o fato de a inteligência artificial não possuir a capacidade de se adaptar às tendências dos

jogadores, logo ela utiliza uma estratégia fixa que é lucrativa, mas talvez não seja a mais lucrativa possível.

Por fim, concluímos que os jogadores experientes estão mais próximos do que se considera uma estratégia ótima do que os jogadores inexperientes, logo o nível de experiência influencia dentro desse mercado. Isso deve ao fato de que eles tomam mais decisões racionais do que os jogadores inexperientes pois, provavelmente se dedicam mais ao estudo da teoria do jogo do que jogadores que buscam apenas lazer.

Para pesquisas futuras acerca do tema, seria interessante analisar o histórico de lucro dos dois grupos de jogadores e testar se os jogadores experientes possuem um lucro médio (\$US/jogos) maior do que os jogadores inexperientes. Dessa forma, é possível colher mais evidências de que o pôquer é um jogo de habilidade e que o nível de experiência dentro desse mercado impacta diretamente no lucro dos jogadores.

## 6. REFERÊNCIAS

Bowling, M., Burch, N., Johanson, M., & Tammelin, O. (2015). Heads-up limit hold'em poker is solved. *Science*, 347(6218), 145-149.

Brown, N., & Sandholm, T. (2019). Superhuman AI for multiplayer poker. *Science*, 365(6456), 885-890.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 363-391.

Li, Q., Maasoumi, E., & Racine, J. S. (2009). A nonparametric test for equality of distributions with mixed categorical and continuous data. *Journal of Econometrics*, 148(2), 186-200.

List, J. A. (2004). Testing neoclassical competitive theory in multilateral decentralized markets. *Journal of Political Economy*, 112(5), 1131-1156.

Moravčík, M., Schmid, M., Burch, N., Lisý, V., Morrill, D., Bard, N., ... & Bowling, M. (2017). Deepstack: Expert-level artificial intelligence in heads-up no-limit poker. *Science*, 356(6337), 508-513.

Racine, J. S. (2012). Entropy-Based Inference using R and the np Package: A Primer. R package vignette, version 0.40-13, URL <http://CRAN.R-project.org/package=np>.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *science*, 185(4157), 1124-1131.