



Universidade de Brasília
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

DIEGO ZAKAREWICZ VIANA

(16/0151627)

**Black-Litterman versus Markowitz: um teste de carteiras
out-of-sample para o ano de 2020**

Brasília - DF

2021

DIEGO ZAKAREWICZ VIANA

**Black-Litterman versus Markowitz: um teste de carteiras
out-of-sample para o ano de 2020**

Projeto de Pesquisa submetido ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília (UnB) como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Daniel Oliveira Cajueiro

Brasília - DF

2021

Viana, Diego Zakarewicz.

Black-Litterman versus Markowitz: um teste de carteiras *out-of-sample* para o ano de 2020/ Diego Zakarewicz Viana - Brasília, 2021.

Monografia (bacharelado) - Universidade de Brasília, Departamento de Economia, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro, Departamento de Economia.

Diego Zakarewicz Viana

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família. Aos meus pais, André e Adriana, que sempre me apoiaram e foram a base primordial da minha educação. Sem o esforço deles, nada disso seria possível. Aos meus irmãos mais novos, Davi e Thiago, com quem eu pude ensinar a aprender o que Universidade não leciona, o amor e o perdão. A dedicatória ficaria maior do que este projeto se fosse expressar a eterna gratidão que tenho por eles.

Em segundo lugar, ao corpo discente e docente da Universidade de Brasília, que proporcionou a melhor vivência dentro e fora do Campi, trouxe toda a base científica necessária para que eu pudesse sair da Universidade como um profissional completo. Meu agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro, quem sempre esteve disponível e proporcionou o auxílio necessário para a elaboração deste projeto.

Ao Centro Acadêmico de Economia e à Econsult Consultoria Econômica, projetos que tive a oportunidade de participar ao longo da trajetória no curso de Economia, transformaram a minha visão sobre gestão e aplicação da ciência econômica na prática. E a todos aqueles colegas que estiveram comigo ao longo dessa bela jornada. Meu agradecimento especial aos meus colegas Thiago Raymon, Arthur Lorenzo, Matteo Taverna, José Lucas, Marcus Jovita, Isabella Brandão e Antônio Baena, que estiveram presentes nos momentos de conquistas e dificuldades.

Resumo

A teoria moderna das finanças teve como um de seus percussores Harry Markowitz, que em 1952 publicou o artigo Portfolio Selection. Sua teoria, apesar de relevante para a gestão de carteiras na modernidade, foi alvo de críticas, devido a difícil estimação dos parâmetros e da difícil aplicação na prática, por gerar portfólios concentrados em determinados ativos. A partir disso, o presente estudo se propõe a analisar, para o ano de 2020, marcado pela crise do Coronavírus, como um método alternativo de finanças teria desempenhado para o período em questão, em comparação com a estratégia de Markowitz. O método escolhido foi o de Black-Litterman, cujo objetivo é melhorar a decisão de *asset allocation*, superando os problemas da otimização de média variância de portfólio. Os dados utilizados foram provenientes do Ibovespa e análise *ex-post* foi feita em observações trimestrais, gerando quatro carteiras com dois níveis de volatilidades diferentes. O resultado encontrado confirma a superioridade do método de Black-Litterman, em comparação ao de Markowitz, no período analisado.

Palavras-chave: Markowitz, Black-Litterman, Otimização de Carteiras, Coronavírus.

Abstract

The modern portfolio theory had as one of its precursors Harry Markowitz, who in 1952 published the article Portfolio Selection. His theory, despite being relevant to the portfolio management in modernity, was the subject of criticism, due to the difficult estimation of parameters and the difficult application in practice, by generating concentrated portfolios in determined assets. From that, the present study proposes to analyse in the year of 2020, pronounced by the Coronavirus crisis, how an alternative method of finances would perform in this period, compared to the Markowitz strategy. The chosen method was Black-Litterman, whose aim is to enhance asset allocation decision, by overcoming the problems of mean-variance portfolio optimization. The used data came from the Ibovespa and the ex post analysis was made in quarterly observations, generating four portfolios with two levels of volatility. The result found confirms the superiority of the Black-Litterman method, compared to that of Markowitz, in the analysed period.

Key-Words: Markowitz, Black-Litterman, Portfolio Optimization, Coronavirus.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
1.1	Motivações	8
2	REFERENCIAL TEÓRICO	9
3	MATERIAIS E MÉTODOS.....	11
3.1	O modelo de Markowitz.....	12
3.2	O modelo de Black- Litterman	15
4	RESULTADOS	23
5	CONCLUSÃO.....	31
	REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente estudo será fazer uma análise comparativa entre dois métodos de montagem de portfólios, Markowitz (1952) e Black-Litterman (1992), utilizando ações listadas na B3. Com este trabalho, pretende-se, além de analisar *ex-post* qual dos modelos se mostrou mais eficiente para o período, fazer um teste para cada carteira no ano de 2020 e verificar suas respectivas eficiências.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: a seção em continuidade da introdução abordará a respeito das motivações que levaram a elaboração desse estudo, contextualizando sua relevância; na seção 2, será feito o referencial teórico, explicitando a escolha de cada modelo para as análises de portfólio; na seção 3, os materiais e métodos serão detalhados; na seção 4, os resultados serão apresentados, em que será feita uma discussão a respeito de cada modelo; e na seção 5 será feita a conclusão, apontando considerações finais.

1.1 Motivações

Uma das grandes preocupações dos investidores e gestores de carteiras de investimento foi buscar por uma escolha eficiente de ativos para compor seus portfólios. O pioneiro nesse estudo foi Markowitz (1952), que, por meio da ponderação de ativos, procurou otimizar o risco-retorno de uma carteira em seu artigo, *Portfolio Selection*. Sua abordagem, que posteriormente será discutida, que considera que investidores se importam apenas com risco e retorno dos ativos, apesar de pioneira, apresentou fragilidades na montagem de carteiras.

Desde então, outros autores deram continuidade ao estudo de escolha ótima de ativos, procurando adaptar seus modelos, dentre eles, Black e Litterman (1992). Contudo, pouca atenção foi dada na literatura acadêmica para a performance do modelo de Black e Litterman (1992), o qual surgiu como uma abordagem alternativa para a otimização de portfólio. Até agora, existe pouca evidência empírica para a performance *out-of-sample* do modelo Black-Litterman (BESSLER, OPFER, WOLFF, 2014).

Dessa forma, entende-se que a proposta do projeto tem relevância para o meio acadêmico. Junto a isso, o que aqui é proposto, além de fazer um teste *out-of-*

*sample*¹ de carteiras de ações listadas na B3 entre os anos de 2008 e 2019 – via Markowitz e Black-Litterman –, é testar cada uma dessas carteiras no ano de 2020, verificando a eficácia de cada modelo no ano em que o vírus SARS-CoV-2 assolou a economia global, como um todo. Veremos, por fim, como a crise gerada pelo COVID-19² afetou as carteiras em suas respectivas eficiências e se, dessas carteiras, sobressaiu-se a de Black-Litterman.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

As carteiras serão expostas nas próximas sessões para testar suas eficiências e analisar separadamente seus resultados. Pretende-se dar continuidade aos estudos de Bessler *et al.* (2014), em que os autores, por diferentes níveis de volatilidade, testaram carteiras hipotéticas (via modelo de Markowitz e via Modelo Black-Litterman). Além disso, os autores também incluíram carteiras do tipo $1/n$, em que n representa o número de ativos na carteira. Assim como nos autores, serão estruturadas carteiras por análise do tipo “rolling-sample”, em que trimestralmente serão feitas revisões das carteiras Black-Litterman, com base nas janelas anteriores de dados. Dessa forma, serão feitas quatro carteiras, uma em cada trimestre no ano de 2020. Mesmo sendo a janela de dados ser menor no presente estudo do que no estudo dos autores supracitados, também por englobar menos ativos do que os estudos feitos por Bessler *et al.* (2014), acredita-se que os resultados ainda serão relevantes. Os níveis de volatilidade também serão diferentes e mais bem detalhados na sessão Materiais e Métodos.

Segundo Silva *et al.* (2019), a teoria sobre a composição de portfólios parte do trabalho de Markowitz, quem propôs a otimização da carteira com base na média, variância e covariância dos retornos das ações, tomando como estimadores as séries históricas, caracterizando-se os riscos e retornos esperados. O objetivo, segundo os

¹ A evidência empírica baseada no desempenho de previsão *out-of-sample* (fora da amostra) geralmente é considerada mais confiável do que a evidência baseada no desempenho dentro da amostra, que pode ser mais sensível a discrepâncias e mineração de dados. Previsões *out-of-sample* também refletem melhor as informações disponíveis para o previsor em "tempo real".

² Por “COVID-19” entende-se a doença do coronavírus de 2019. O vírus que a causou é denominado “SARS-CoV-2”. Nesse estudo, será referido apenas como coronavírus.

autores, é gerar a máxima eficiência da carteira. O modelo de Markowitz é também conhecido como modelo de média variância.

Dentre as premissas do modelo desenvolvido por Markowitz (1952), estão que os investidores são avessos ao risco e racionais, os ativos são divisíveis e que os custos de transação são irrelevantes. Quando testado na prática, as premissas do modelo não refletem a realidade do mercado financeiro, visto que, primeiro, a economia comportamental traz evidências de que nem sempre os investidores são racionais, ou seja, podem tomar decisões por vieses, e, segundo, pois os custos de transação afetam tomadas de decisão.

Quando seu modelo é aplicado na prática, em gerenciamento de ativos, erros de estimação em parâmetros de *input*³, soluções de canto e custos de transação alto – que são resultados de realocações extremas de portfólios – normalmente geram uma performance pobre de portfólios *out-of-sample* (BESSLER, OPFER, WOLFF, 2014). Esses resultados derivam de dois principais problemas, segundo Black e Litterman (1992). O primeiro é a estimação dos retornos esperados; investidores normalmente tem conhecimentos sobre retornos absolutos ou relativos em poucos mercados. O modelo padrão de otimização, entretanto, requer a eles que forneçam expectativas de retornos para todas as *assets* e *securities*. Dessa forma, investidores devem complementar suas visões com um conjunto de premissas auxiliares, e os retornos históricos, que são normalmente utilizados para esse propósito, costumam fornecer guias ruins para retornos futuros. O segundo problema é que o peso das *assets* e moedas do portfólio ótimo de modelos padrão de alocação de ativos são extremamente sensíveis às premissas dos retornos utilizados (BLACK, LITTERMAN, 1992).

Tendo em vista os problemas metodológicos do modelo de Markowitz, Fisher Black e Robert Litterman criaram um modelo de otimização de portfólios que permite aos investidores combinar suas visões únicas em relação ao desempenho de diversas *assets* com o equilíbrio de mercado, de forma que resulta em carteiras intuitivas e bem diversificadas (IDZOREK, 2004). O objetivo, segundo Drobetz (2001), era remodelar a teoria moderna de portfólios para torná-lo mais aplicável para profissionais de

³ Em Markowitz (1952), os parâmetros *inputs* do modelo são: a expectativa de retorno para cada ativo; o desvio padrão de cada ativo e a matriz de correlação entre os ativos.

investimento. Sua abordagem é flexível o suficiente para combinar o equilíbrio de mercado com visões subjetivas e raciocínio econômico dos investidores. Visto que o modelo Black-Litterman propõe inicialmente portfólios de pesos neutros que são consistentes com o equilíbrio de mercado, a ponderação revisada tende a ser menos extrema, comparada com a abordagem tradicional da otimização por média variância, de Markowitz.

Assim, o modelo permite obter carteiras menos bruscas no peso de alocações dos ativos, reduzindo a chance de obter resultados extremos. Segundo Black e Litterman (1992), a inserção de visões sobre o movimento no mercado no modelo também dá um sentido econômico mais coerente com o cenário real do que aqueles obtidos do modelo de Markowitz. Por fim, uma visão mais assertiva do investidor sobre o comportamento dos ativos também tende a aumentar a rentabilidade e, conseqüentemente, eficiência da carteira. Sabendo disso, o presente estudo se propõe a verificar, utilizando carteiras de diferentes volatilidades, com ações listadas na B3, se há superioridade no modelo Black-Litterman comparado ao modelo de Markowitz, e comparar o comportamento de cada carteira no ano de 2020.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

As metodologias que aqui serão apresentadas para montar as carteiras eficientes são: Markowitz, na primeira subseção, e a versão de Bessler *et al.* (2014) de Black-Litterman, na segunda subseção.

Para a escolha das ações que irão compor os portfólios, utilizou-se como referência ações do Ibovespa. Foram escolhidas dezoito ações. Dentre os critérios para escolher cada ação, estão a negociabilidade e participações nos pregões, o histórico desde abril de 2008, diversificação em diferentes setores da economia, e dentre essas dezoito ações, nenhuma que seja referente à mesma empresa. Para o indicador da taxa livre de risco, será utilizado o CDI⁴.

Com base no exposto, as dezoito ações escolhidas foram: AMBEV S/A ON (ABEV3), B3 ON NM (B3SA3), BRASIL ON NM (BBAS3), CYRELA REALTY ON NM

⁴ O CDI é a taxa de certificado diário interbancário. Os dados foram retirados do domínio <https://verios.com.br/apps/comparacao/log/1ano/cdi/>, acessado em 22/04/2021.

(CYRE3), ENERGIAS BR ON ED NM (ENBR3), EQUATORIAL ON NM (EQTL3), GERDAU PN N1 (GGBR4), ITAUSA PN N1 (ITSA4), JBS ON NM (JBSS3), LOJAS RENNER ON NM (LREN3), MARFRIG ON ED NM (MRFG3), MRV ON NM (MRVE3), PETROBRÁS PN EX N2 (PETR4), RAIADROGASIL ON NM (RADL3), SUZANO S/A ON NM (SUZB3), USIMINAS PNA N1 (USIM5), VALE ON NM (VALE3) e WEG ON NM (WEGE3).

Após o desenvolvimento de cada metodologia, em que serão utilizados dados do dia 7 de abril de 2008 até as quatro observações trimestrais de 2020, será realizada uma análise *ex-post* comparando a eficiência de cada modelo. Com base em cada carteira, será feito um teste com cada uma delas no início de cada trimestre do ano de 2020, em que se tentará medir a eficácia da tomada de decisão. Para a primeira carteira, o modelo levará em conta todos os dados passados de 2008 até 2019. Para a segunda carteira, os dados são atualizados, de 2008 até o fim do primeiro trimestre de 2019, e assim sucessivamente.

Os dados foram coletados do Yahoo Finance e da Bloomberg, e o software utilizado foi o Phyton.

3.1 O modelo de Markowitz

Nesta subseção analisaremos como se dá a montagem de uma carteira ótima para diferentes níveis de risco, dentro da fronteira eficiente, segundo Markowitz (1952). No presente estudo, uma das restrições adotadas é que os ativos não podem ter posições vendidas, visto que não é uma prática comumente adotada em montagem de portfólios no Brasil. Os três pilares da modelagem de Markowitz são: o retorno esperado para a carteira; a proporção de cada ativo que irá compor a carteira e a variância da carteira.

Temos inicialmente uma carteira formada por dezoito ativos, de forma que sua soma é um.

$$\sum_{i=1}^n X_i w_i = 1, \quad (3.1)$$

$$w_i \geq 0,$$

Em que i são os n -ativos da carteira, com seus respectivos pesos, w , positivos. O retorno, R_p da carteira é, portanto,

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i w_i, \quad (3.2)$$

Sendo R_i o retorno do ativo i .

No modelo, o risco de cada ativo é dado pelo seu desvio padrão, que é a raiz da variância do i -ésimo ativo (cujo símbolo é σ_i^2) sendo

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^M \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{M}, \quad (3.3)$$

Em que M representa a quantidade de retornos; (\bar{R}_i) a média de retorno do ativo i ; R_{ij} o j -ésimo resultado possível para retorno do ativo i (ELTON, GRUBER, BROWN, GOETZMANN, 2012).

O desvio padrão, segundo Markowitz (1976), é a medida individual da variação ou dispersão de uma distribuição.

Não só o risco individual é importante para o modelo, mas é preciso analisar a correlação e a covariância entre os ativos.

Sendo a correlação entre o ativo i e k dada por

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}, \quad (3.4)$$

Em que σ_{ik} é a covariância entre o ativo i e k . Sua fórmula é dada por

$$\sigma_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^M (R_{ij} - \bar{R}_i) (R_{kj} - \bar{R}_k)}{M - 1} \quad (3.5)$$

O coeficiente de correlação, que pode variar entre -1 e +1, é uma medida de alcance de quanto os retornos podem subir e cair juntos. A covariância entre os ativos, em geral, tem mesmo sinal (positivo ou negativo) da correlação entre estes mesmos ativos (Markowitz, 1976).

Um dos objetivos do estudo de Markowitz foi demonstrar a importância da diversificação dentro de uma carteira de investimentos. Como provam Elton *et al.* (2012), quanto mais se acrescentam ações dentro de uma carteira, a variância esperada desse conjunto diminui até que se aproxima da covariância média.⁵ Segundo os autores, o risco individual dos ativos pode ser diversificado tanto que desaparece, mas a contribuição para o risco total provocada pelos termos de covariância não pode ser eliminada através da diversificação. O risco total também é conhecido como risco sistemático. O intuito da diversificação é, dessa forma, controlar o risco não-sistemático.

Serão apresentadas duas carteiras para cada trimestre de 2020, por níveis de desvios-padrão, que será nosso nível de volatilidade. Como a volatilidade anualizada do Ibovespa entre 2008 e 2019 foi de 26,97% ao ano, definiu-se duas carteiras: a moderada, cuja restrição de volatilidade proposta no estudo foi entre 19% e 21% ao ano, e agressiva, cuja volatilidade foi restrita entre 27% e 31% ao ano.

Para encontrar cada uma dessas carteiras, é necessário fazer a estimação da fronteira eficiente. O primeiro passo é encontrar a matriz de covariância entre os retornos dos ativos.

Em seguida, o modelo requer que seja incluída a expectativa de retorno de cada ação. Por meio dos retornos históricos de cada ativo, temos que a esperança de retorno será a média dos retornos passados. Os valores estão na Tabela 2.

Por meio da programação feita pelo Phyton, são feitas combinações entre os ativos. Minimizando a variância da carteira (3.3), sujeita à restrição do retorno (3.2), e ponderando pesos de cada um com a matriz de covariância e seus retornos individuais, é gerada a fronteira eficiente.

Em Bessler *et al.* (2014), o problema de otimização pode ser descrito como:

$$\max_{\omega} U = \omega' \mu - \frac{\delta}{2} \omega' \Sigma \omega, \quad (3.6)$$

⁵ Para mais detalhes, ver Elton *et al.* (2012, pp. 59-62).

Em que U é a utilidade do investidor, μ é o vetor de expectativas de retorno, ω é o vetor de pesos dos portfólios, Σ é a matriz de covariância e δ é o coeficiente de aversão ao risco.

Feito isso, temos, para cada volatilidade definida, carteiras que otimizam o retorno.

3.2 O modelo de Black- Litterman

Como apontam Litterman *et al.* (2003), a teoria moderna de carteiras tem apenas um tema central: ao construir suas carteiras, os investidores devem olhar para o retorno esperado de cada ativo em relação ao impacto que ele causa no risco da carteira como um todo.

Criado por Fisher Black e Robert Litterman, o novo modelo permite uma construção de portfólios que, primeiramente, não exige que investidores tenham especificado expectativas de retornos para cada ativo, como em Markowitz, que utiliza a média de retornos passados para tal. Nessa abordagem, Black e Litterman trabalham com o conceito de equilíbrio de mercado, incorporando, em segundo lugar, opiniões ou visões, que os investidores têm sobre determinados ativos, com suas respectivas confianças.

Segundo Benninga (2008), Black e Litterman, em seus estudos, partem do pressuposto que o investidor escolhe seu portfólio ótimo entre um determinado grupo de ativos; esse grupo de ativos (que aqui estão no Ibovespa) define a estrutura dentro do qual o investidor escolhe seu portfólio. Esse universo de ativos define o *benchmark*⁶. A premissa adicional constata que na falta de informações adicionais, o *benchmark* não consegue ser superado.

O modelo propõe que o retorno implícito dos ativos pode ser interpretado como a informação que o mercado tem sobre o futuro de cada ativo no portfólio do *benchmark*. Dessa forma, o investidor pode, ou não, concordar com cada perspectiva de retorno. E, não concordando, o investidor adapta suas opiniões no problema de otimização para obter o portfólio. O modelo Black-Litterman mostra como essas opiniões são incorporadas.

⁶ *Benchmark* é a referência que o portfólio terá para acompanhar.

O modelo utiliza a otimização da média variância de Markowitz (1952), combinando com o CAPM introduzido por Sharpe (1964), otimização reversa de Sharpe (1974), estimação mista de Theil (1971, 1978), *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) global de Black (1989a, 1989b) e Litterman (2003), segundo Idzrocek (2004).

O modelo considera que o mercado é eficiente e que portfólios otimizados seriam os portfólios de mercado, portfólios que contém todos os ativos do mercado ponderados por sua capitalização. Segundo o CAPM, é esperado que forças do mercado levem os preços dos ativos a patamares em que os retornos esperados se aproximam de portfólios indexados pelos pesos de capitalização de mercado.

Como ponto neutro de partida, para a definição dos retornos esperados exigida pela otimização de Markowitz, o modelo Black-Litterman utiliza retornos de equilíbrio do CAPM, que são o conjunto de retornos que compensam o mercado.

Utilizando o método da otimização reversa, Idzorek (2004), simplifica a aplicação do modelo, em que o vetor de excesso de retorno implícito é extraído de informações conhecidas:

$$\pi = \delta \Sigma \omega, \quad (3.7)$$

Em que:

π é o vetor de excesso de retorno implícito de equilíbrio;

δ é o coeficiente de aversão ao risco;

Σ é a matriz de covariância de excessos de retorno ($N \times N$); e

ω é o peso de capitalização de mercado dos ativos ($N \times 1$).

$$r \sim N(\bar{\mu}, \Sigma_{BL})$$

Em que r é o vetor do retorno dos ativos.

Para incluir as visões dos investidores, o modelo utiliza a abordagem Bayesiana, para inferir a probabilidade de distribuição dos retornos esperados, por meio do CAPM e das visões adicionais. A premissa bayesiana diz que os retornos esperados, μ , estão centrados nos valores de equilíbrio, que são normalmente

distribuídos, com média π . Para o cálculo de δ , divide-se o prêmio pelo risco obtido (*risk premium*) pela variância do excesso de retorno de mercado.

O modelo, segundo Drobetz (2001), está proximamente ligado ao CAPM e prediz que preços vão se ajustar até que, em equilíbrio de mercado, os retornos esperados serão tais que a demanda por estes ativos seja exatamente igual a oferta disponível.

$$\mu = \pi + \epsilon^{(e)} \quad (3.8)$$

Sendo $\epsilon^{(e)}$ o vetor da variável de distribuição normal, com média zero e covariância $\tau\Sigma$, em que τ é o coeficiente escalar que mede a confiabilidade das estimativas de retorno implícito, logo, a sensibilidade entre retorno subjetivo e o retorno implícito.

As visões que os investidores têm sobre os ativos são traduzidas por meio de matrizes a serem incorporadas no modelo, sendo:

$$P_{N \times M} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MN} \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_M \end{bmatrix}; \Omega = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & w_M \end{bmatrix}$$

Em que M é o número de visões do investidor; N é o número de ativos considerados; P_{ij} o valor correspondente a $(-1,0,1)$, dependendo da relação entre o ativo i valorizar mais (1) ou menos (-1) que o ativo j , sendo 0 para os outros ativos; q_i o valor absoluto em porcentagem de quanto um ativo i valoriza em relação ao ativo j ; w_i o valor correspondente ao nível de confiança por probabilidade do investidor naquela opinião, como descreve Idzorek (2004).

A visão que o investidor tem sobre os ativos pode ser expressa por:

$$P\mu = Q + \epsilon^{(v)} \quad (3.9)$$

Em que $\epsilon^{(v)}$ é o vetor aleatório normalmente distribuído não observável, com média zero e matriz diagonal de covariância Ω ⁷. Assume-se que $\epsilon^{(v)}$ e $\epsilon^{(e)}$ são independentes.

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{(e)} \\ \epsilon^{(v)} \end{pmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \right)$$

As visões são combinadas com o CAPM na estrutura bayesiana. O resultado encontrado é que os retornos esperados são distribuídos em uma normal, com média $\bar{\mu}$ e variância Σ_{BL} . $\bar{\mu}$ sendo:

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1} \pi + P' \Omega^{-1} Q] \quad (3.9)$$

E Σ_{BL} sendo

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} \quad (3.10)$$

Dado o retorno médio, $\bar{\mu}$, e a matriz de covariância, Σ_{BL} , o portfólio de Black-Litterman pode ser construído, utilizando a otimização tradicional da teoria de carteiras moderna. Para um investidor com uma aversão ao risco, δ , o problema de maximização pode ser escrito como:

$$\max_{\omega} U = \omega' \bar{\mu} - \frac{\delta}{2} \omega' \Sigma_{BL} \omega, \quad (3.11)$$

Sendo a condição de primeira ordem:

$$\bar{\mu} = \delta \Sigma_{BL} \omega^*$$

Em que ω^* é o vetor dos pesos do portfólio ótimo. Que é equivalente a:

⁷ Para mais detalhes, ver He e Litterman (2002).

$$\omega^* = \frac{1}{\delta} \Sigma_{BL} \bar{\mu}$$

Para investidores com diferentes níveis de aversão ao risco, $\hat{\delta}$, o portfólio será obtido escalando o novo peso, $\hat{\omega}^*$. Em que:

$$\hat{\omega}^* = \left(\frac{\delta}{\hat{\delta}} \right) \omega^*$$

O procedimento de Black e Litterman pode ser representado pela Figura 1. Para valores de τ próximos de zero, as estimativas combinadas de retorno convergem para os retornos implícitos. Para valores maiores ($\tau \rightarrow \infty$), as estimativas combinadas de retorno convergem para as visões do investidor, que seria semelhante ao portfólio de Markowitz. Neste presente estudo foi adotado τ de valor 0,05. Walters (2009) sugere que trabalhos consistentes de Black-Litterman trabalham com valores de τ entre o intervalo (0,025 e 0,05).

Como sugerem Bessler *et al.* (2014), a performance *out-of-sample*⁸ do modelo Black-Litterman será superior, desde que informações dinâmicas sobre a confiança das visões dos investidores forem incluídas. A análise no presente projeto, a cada três meses fará uma nova mudança na carteira, com o intuito de aproximar a carteira de acordo com as expectativas que os analistas de mercado têm para os ativos selecionados.

[...] Empregamos as mesmas janelas “rolling” de estimativas como para estimativas de retorno e estimamos a incerteza das estimativas de retorno como a variância de erros de previsão históricos [...]. A ideia é que em ambientes de mercado incertos, quando nos últimos meses, as estimativas de retorno diferirem fortemente do retorno efetivo, a confiabilidade para a estimativa de retorno subsequente provavelmente será menor, resultando em carteiras mais próximas da carteira de referência. Em contrapartida, em condições estáveis de mercado quando os últimos meses de previsões de retorno estão perto dos retornos obtidos, a estimativa de retorno para o próximo período deve ser mais confiável e o portfólio otimizado pode se afastar mais do portfólio de referência” (BESSLER *et al.*, pp. 9, 2014).

⁸ Para mais detalhes, ver Bessler *et al.* (2014).

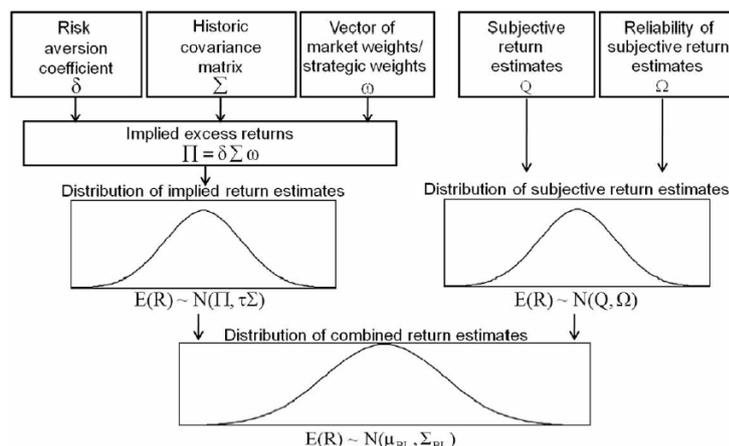


Figura 1: Procedimento da abordagem de Black-Litterman. Fonte: Idzorek (2004).

Para as expectativas de cada ação, os dados foram extraídos da Bloomberg. O “preço-alvo” considerado foi a média de consenso de mercado dos últimos doze meses a partir das observações trimestrais. Por exemplo, em 30/12/2019, a média de doze meses do alvo de ABEV3 estava em R\$ 20,13, como se pode observar na Tabela 2. Na Tabela 3 analisou-se o retorno de cada ação até a data de observação. Por exemplo, em 30/12/2019, a ABEV3 acumulou um retorno anual aproximado de 18,09%. Os retornos e preços de cada ação consideraram o preço de fechamento ajustado para dividendos e *splits*⁹.

Para incorporar a visão dos analistas no preço de cada ação, considerou-se a diferença do preço da ação na observação e o preço esperado pelo mercado. A diferença pode ser observada abaixo. Por exemplo, em 30/12/2019, ABEV3 fechou a negociação do pregão da B3 sendo cotada a R\$ 18,10. Nesta mesma data o preço-alvo estava em R\$ 20,13, que representa um desconto de 11,22%.

⁹ *Splits* é o termo utilizado quando a ação sofre um desmembramento.

Preço-alvo das ações 12 meses				
Ativos	30/12/2019	31/03/2020	30/06/2020	30/09/2020
ABEV3	R\$ 20,13	R\$ 16,88	R\$ 14,57	R\$ 15,53
B3SA3	R\$ 51,66	R\$ 51,08	R\$ 51,31	R\$ 66,06
BBAS3	R\$ 61,38	R\$ 56,79	R\$ 47,14	R\$ 45,44
CYRE3	R\$ 29,09	R\$ 27,60	R\$ 21,53	R\$ 27,54
ENBR3	R\$ 22,37	R\$ 22,33	R\$ 20,90	R\$ 21,72
EQTL3	R\$ 22,63	R\$ 23,81	R\$ 22,40	R\$ 24,03
GGBR4	R\$ 19,38	R\$ 17,17	R\$ 15,64	R\$ 20,80
ITSA4	R\$ 15,07	R\$ 14,58	R\$ 11,85	R\$ 12,26
JBSS3	R\$ 35,62	R\$ 32,66	R\$ 33,47	R\$ 34,33
LREN3	R\$ 55,56	R\$ 54,91	R\$ 48,11	R\$ 47,88
MRFG3	R\$ 12,83	R\$ 12,58	R\$ 15,77	R\$ 18,77
MRVE3	R\$ 20,90	R\$ 19,71	R\$ 18,01	R\$ 21,33
PETR4	R\$ 36,05	R\$ 26,68	R\$ 25,78	R\$ 28,78
RADL3	R\$ 19,96	R\$ 24,12	R\$ 23,95	R\$ 24,17
SUZB3	R\$ 40,69	R\$ 39,43	R\$ 49,29	R\$ 52,91
USIM5	R\$ 9,54	R\$ 8,25	R\$ 6,74	R\$ 10,37
VALE3	R\$ 61,98	R\$ 61,24	R\$ 66,46	R\$ 75,79
WEGE3	R\$ 25,97	R\$ 31,86	R\$ 38,65	R\$ 54,50

Tabela 1: Preço-alvo das ações. Fonte: Bloomberg. Elaboração: autor.

Retornos Anualizados (%) até a Observação.				
Início: abr/2008.				
Ativos	30/12/2019	31/03/2020	30/06/2020	30/09/2020
ABEV3	18,09%	14,09%	15,07%	13,86%
B3SA3	11,43%	10,12%	12,74%	12,57%
BBAS3	15,07%	10,32%	11,00%	10,36%
CYRE3	8,25%	4,68%	6,67%	6,66%
ENBR3	15,87%	13,31%	13,60%	13,31%
EQTL3	10,07%	8,33%	9,75%	9,16%
GGBR4	5,85%	3,31%	4,73%	5,66%
ITSA4	15,66%	11,94%	12,31%	11,51%
JBSS3	14,52%	12,45%	12,61%	12,19%
LREN3	25,27%	19,92%	21,53%	20,60%
MRFG3	3,77%	3,34%	4,38%	4,97%
MRVE3	14,36%	10,12%	12,44%	11,42%
PETR4	6,18%	3,29%	4,58%	4,16%
RADL3	34,01%	32,22%	32,35%	32,20%
SUZB3	12,25%	11,28%	11,22%	12,41%
USIM5	2,36%	1,27%	1,79%	2,34%
VALE3	7,39%	6,22%	7,31%	7,65%
WEGE3	20,13%	19,43%	22,65%	24,56%

Tabela 2: Retornos anualizados das ações de abril de 2008 até a data de observação de cada trimestre de 2020. Fonte: Yahoo Finance. Elaboração: autor.

Diferença entre Preço-Alvo e Preço em cada observação (%)				
Ativos	30/12/2019	31/03/2020	30/06/2020	30/09/2020
ABEV3	11,22%	46,15%	6,27%	27,82%
B3SA3	27,02%	47,89%	-3,21%	22,79%
BBAS3	23,35%	113,18%	53,50%	57,94%
CYRE3	6,01%	111,49%	0,09%	24,67%
ENBR3	9,87%	46,23%	26,36%	31,40%
EQTL3	1,94%	38,91%	-0,97%	13,46%
GGBR4	-1,22%	73,79%	-0,64%	1,76%
ITSA4	11,96%	70,93%	26,74%	41,90%
JBSS3	41,29%	64,29%	58,33%	66,09%
LREN3	0,91%	66,65%	17,34%	21,18%
MRFG3	30,39%	43,77%	26,57%	24,47%
MRVE3	-0,10%	65,91%	3,09%	36,56%
PETR4	23,50%	97,19%	23,70%	51,71%
RADL3	-9,97%	19,11%	8,67%	3,91%
SUZB3	2,55%	10,17%	33,98%	16,18%
USIM5	1,27%	69,40%	-7,16%	3,49%
VALE3	26,62%	54,30%	29,40%	34,00%
WEGE3	-24,09%	-4,27%	-23,02%	-16,59%

Tabela 3: Diferença entre Preço-Alvo e preço observado em cada observação de cada ação. Fonte:

Yahoo Finance e Bloomberg. Elaboração: autor.

4 RESULTADOS

Nesta sessão será discutida os resultados das carteiras para cada método. Além de Markowitz e Black-Litterman, faremos a comparação dos modelos com uma carteira que considera uma alocação proporcional para os dezoito ativos da carteira (1/N). Não foram considerados custos de transação para a análise e para o cálculo do Sharpe considerou-se o CDI do período.

Para o primeiro trimestre de 2020, os resultados de cada método são apresentados na Tabela 4. Sendo a carteira ponderada apresentada na Tabela 5.

	Markowitz	Black-Litterman	1/N
<i>Carteira Moderada</i>			
Retorno ao Período (%)	-21,75	-29,05	-38,75
Volatilidade anualizada (%)	21	21	23,88
Índice Sharpe	-4,46	-5,95	-7,06
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-35,27	-45,02	-48,65
Var (99%) (%)	-14,06	-14,59	-15,42
Número de Ativos	5	10	18
<i>Carteira Agressiva</i>			
Retorno ao Período (%)	-20,1	-32,37	-38,75
Volatilidade anualizada (%)	28	28	23,88
Índice Sharpe	-3,16	-5,09	-7,06
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-31,83	-47,34	-48,65
Var (99%) (%)	-13,35	-15,93	-15,42
Número de Ativos	4	9	18

Tabela 4: Resultados empíricos para a amostra do primeiro trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

Ativos	Markowitz Moderada	BL Moderada	Markowitz Agressiva	BL Agressiva	1/N
ABEV3	13,99	19,45	2,94	12,15	5,55
B3SA3	0	5,31	0	8,65	5,55
BBAS3	0	2,7	0	4,15	5,55
CYRE3	0	0	0	0	5,55
ENBR3	0	10,93	0	4,09	5,55
EQTL3	0	1,82	0	0	5,55
GGBR4	0	0	0	0	5,55
ITSA4	0	0	0	0	5,55
JBSS3	0	12,42	0	23,41	5,55
LREN3	12,53	0	17,98	0	5,55
MRFG3	0	9,36	0	17,13	5,55
MRVE3	0	0	0	0	5,55
PETR4	0	2,1	0	6,19	5,55
RADL3	46,5	0	71,42	0	5,55
SUZB3	17,16	27,83	7,67	11,36	5,55
USIM5	0	0	0	0	5,55
VALE3	0	8,08	0	12,86	5,55
WEGE3	9,82	0	0	0	5,55

Tabela 5: Alocação por ativo (%) para a amostra do primeiro trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

Vale lembrar que os efeitos do Coronavírus na bolsa de valores brasileira se iniciaram no dia 26 de fevereiro de 2020, em que o Ibovespa fechou com uma baixa de 7%. No trimestre, a bolsa fechou em queda de 36,85%, pior trimestre da história.

Como comentários gerais das carteiras, pode-se observar que, primeiramente, o método de Markowitz selecionou menos ativos na alocação, cinco ativos na moderada e quatro na agressiva, enquanto Black-Litterman selecionou dez e nove, respectivamente. A volatilidade considerada ao período foi similar nas carteiras moderadas e maior em Black-Litterman na carteira agressiva, respeitando o limite imposto de 19% a 21% ao ano para a seleção moderada, e 28% a 31% ao ano para a agressiva. A volatilidade do Ibovespa no primeiro trimestre foi de 76,27% anualizada.

No primeiro trimestre, o pior desempenho foi da carteira 1/N, que registrou uma queda de 38,75%, e Índice Sharpe de -7,06. O melhor desempenho, em ambos os perfis de volatilidade, foi de Markowitz, registrando queda de 21,75% na moderada (versus 29,05% em Black-Litterman) e de 20,1% na agressiva (versus 32,37% em Black-Litterman). Mesmo com menos ativos a carteira de Markowitz sobressaiu-se.

Em termos de eficiência, medido pelo Índice Sharpe, que considera o risco-retorno de cada portfólio, a carteira 1/N apresentou o pior resultado. Na carteira moderada, Markowitz teve Sharpe de -4,46 e Black-Litterman de -5,95. Na carteira agressiva, os resultados foram de -3,03 para Markowitz e -5,09 para Black-Litterman.

O *Maximum Drawdown* (MDD), que mede quanto a carteira teria rendido do topo de maior rentabilidade para o fundo de pior rentabilidade, foi pior na carteira 1/N. Em seguida, observou-se um MDD de -47,34% e -45,02% na carteira agressiva e moderada de Black-Litterman, respectivamente. O MDD de Markowitz foi de -31,83% e -35,27% para a carteira agressiva e moderada, respectivamente.

Já o *Value At Risk* (VAR), que mede a pior perda esperada da carteira (diariamente), com 99% de confiança, indica que o pior cenário ficou nas carteiras de Black-Litterman em comparação com as de Markowitz. O VAR da agressiva de Markowitz foi de -15,42 (versus -15,93 em Black-Litterman). Já a moderada de Markowitz teve VAR de -14,06 (versus -14,59 em Black-Litterman). A carteira 1/N teve o VAR de 15,42%.

No segundo trimestre, após o modelo levar em consideração os preços até 31/03/2020, os resultados são apresentados na Tabela 6.

	Markowitz	Black-Litterman	1/N
<i>Carteira Moderada</i>			
Retorno ao Período (%)	12,83	18,04	28,73
Volatilidade anualizada (%)	21	21	26,29
Índice Sharpe	2,63	3,70	4,71
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-6,12	-5,35	-6,94
Var (99%) (%)	-4,25	-3,45	-4,44
Número de Ativos	6	12	18
<i>Carteira Agressiva</i>			
Retorno ao Período (%)	13,85	25,29	28,73
Volatilidade anualizada (%)	28	28	26,29
Índice Sharpe	2,18	3,98	4,71
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-7,88	-10,13	-6,94
Var (99%) (%)	-5,86	-5,1	-4,44
Número de Ativos	4	11	18

Tabela 6: Resultados empíricos para a amostra do segundo trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

Sendo a carteira ponderada por cada ativo apresentada na Tabela 7.

Ativos	Markowitz Moderada	BL Moderada	Markowitz Agressiva	BL Agressiva	1/N
ABEV3	7,77	18,4	0	15,36	5,55
B3SA3	0	0	0	20,82	5,55
BBAS3	0	10,01	0	0	5,55
CYRE3	0	6	0	13,06	5,55
ENBR3	1,08	10,75	0	7,64	5,55
EQTL3	0	6,15	0	3,45	5,55
GGBR4	0	6,69	0	10,36	5,55
ITSA4	0	7,62	0	6,97	5,55
JBSS3	0	1,72	0	2,96	5,55
LREN3	5,58	3,94	6,09	4,03	5,55
MRFG3	0	0	0	0	5,55
MRVE3	0	0	0	0	5,55
PETR4	0	4,59	0	10,41	5,55
RADL3	47,18	2,24	71,49	0	5,55
SUZB3	24,94	21,89	5,99	4,94	5,55
USIM5	0	0	0	0	5,55
VALE3	0	0	0	0	5,55
WEGE3	13,45	0	16,43	0	5,55

Tabela 7: Alocação por ativo (%) para a amostra do segundo trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

No segundo trimestre de 2020, o Ibovespa apresentou retorno de 33,94% e volatilidade anualizada de 35,07%. A carteira que apresentou melhor desempenho em termos absolutos e relativos foi a 1/N, com ganho de 28,73% e Sharpe de 4,71.

Comparando a estratégia moderada e agressiva, pode-se observar melhor desempenho de Black-Litterman, que apresentou retorno de 18,04% no perfil moderado (versus 12,83% em Markowitz) e 25,29% no perfil agressivo (versus 13,85% em Markowitz). O Sharpe também foi melhor, de 3,70 na moderada (versus 2,63 em Markowitz) e de 3,98 na agressiva (versus 2,18 em Markowitz). O número de ativos permaneceu menor em Markowitz em ambos os perfis de risco.

O MDD foi de -10,13% na carteira agressiva de Black-Litterman (versus -7,88% na de Markowitz), de -5,35% na moderada (versus -6,12% em Markowitz). O MDD na 1/N foi de -6,94%.

O VAR da carteira 1/N foi de -4,44%. As carteiras de Markowitz apresentaram VAR de -4,25% e -5,86% para os perfis moderado e agressivo, enquanto as de Black-Litterman apresentaram VAR de -3,45% e -5,1%, respectivamente.

Já no terceiro trimestre, após o modelo levar em consideração os preços até 30/06/2020, os resultados são apresentados na Tabela 8. Sendo a carteira ponderada por cada ativo apresentada na Tabela 9.

	Markowitz	Black-Litterman	1/N
<i>Carteira Moderada</i>			
Retorno ao Período (%)	10,84	9,82	4,16
Volatilidade anualizada (%)	21	21	26,47
Índice Sharpe	2,22	2,01	0,69
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-5,74	-11,57	-8,27
Var (99%) (%)	-2,85	-2,28	-2,35
Número de Ativos	6	7	18
<i>Carteira Agressiva</i>			
Retorno ao Período (%)	10,92	5,56	4,16
Volatilidade anualizada (%)	27	27	26,47
Índice Sharpe	2,24	1,14	0,69
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-9,52	-13,48	-8,27
Var (99%) (%)	-3,3	-2,52	-2,35
Número de Ativos	4	3	18

Tabela 8: Resultados empíricos para a amostra do terceiro trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

Ativos	Markowitz Moderada	BL Moderada	Markowitz Agressiva	BL Agressiva	1/N
ABEV3	9,83	0	0	0	5,55
B3SA3	0	0	0	0	5,55
BBAS3	0	16,67	0	27,48	5,55
CYRE3	0	0	0	0	5,55
ENBR3	1,24	14,45	0	0	5,55
EQTL3	0	0	0	0	5,55
GGBR4	0	0	0	0	5,55
ITSA4	0	0,3	0	0	5,55
JBSS3	0	13,94	0	31,78	5,55
LREN3	5,46	0	6,18	0	5,55
MRFG3	0	1,45	0	0	5,55
MRVE3	0	0	0	0	5,55
PETR4	0	0	0	0	5,55
RADL3	40,7	0	62,57	0	5,55
SUZB3	24,72	52,97	5,66	40,74	5,55
USIM5	0	0	0	0	5,55
VALE3	0	0,23	0	0	5,55
WEGE3	18,05	0	25,59	0	5,55

Tabela 9: Alocação por ativo (%) para a amostra do terceiro trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

O Ibovespa recuou 1,66% no período, apresentando uma volatilidade anualizada de 21,73%. A quantidade de ativos mudou drasticamente no perfil agressivo de Black-Litterman, ficando com apenas 3 ativos (versus 4 em Markowitz). A carteira que apresentou o melhor desempenho foi a agressiva de Markowitz, rendendo 10,92% no período. A melhor eficiência, medida pelo Sharpe, foi observada na mesma carteira, de 2,24, enquanto a moderada do mesmo método apresentou Sharpe de 2,22. A moderada e agressiva de Black-Litterman apresentou Sharpe de 2,01 e 1,14, respectivamente.

A carteira moderada de Markowitz apresentou um retorno de 10,84%, enquanto em terceiro lugar ficou a carteira moderada de Black-Litterman, com rentabilidade de 9,82%. Em penúltimo lugar ficou a agressiva de Black-Litterman, com retorno de 5,56% e Sharpe de 1,14, sendo seguida pela 1/N, que ficou em último lugar, com rentabilidade de 4,16%.

O MDD da carteira 1/N foi de -8,27% no período em questão, enquanto o MDD nas carteiras de Markowitz foram de -5,74% (moderada) e -9,52% (agressiva). O MDD nas carteiras de Black-Litterman foram de -11,57% (moderada) e -13,48% (agressiva).

O maior e segundo VAR foi encontrado nas carteiras de Markowitz, -3,3% (agressiva) e -2,85% (moderada). Na carteira 1/N foi de -2,35%, ficando em terceiro lugar. Em penúltimo e último lugar ficaram as carteiras de Black-Litterman, -2,52% (agressiva) e -2,28% (moderada).

Por fim, no último trimestre do ano, o Ibovespa rendeu 24,65%, com volatilidade anualizada de 22%. Os resultados estão na Tabela 10.

A alocação por ativo se encontra na Tabela 11.

	Markowitz	Black-Litterman	1/N
<i>Carteira Moderada</i>			
Retorno ao Período (%)	15,32	24,74	21,32
Volatilidade anualizada (%)	20	20	26,37
Índice Sharpe	3,29	5,31	3,54
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-7,82	-7,53	-8,17
Var (99%) (%)	-3,55	-2,77	-3,53
Número de Ativos	6	9	18
<i>Carteira Agressiva</i>			
Retorno ao Período (%)	7,26	25,49	21,32
Volatilidade anualizada (%)	31	31	26,37
Índice Sharpe	1,04	3,65	3,54
Maximum Drawdown (MDD) (%)	-11,29	-10,08	-8,17
Var (99%) (%)	-4,5	-3,14	-3,53
Número de Ativos	2	7	18

Tabela 10: Resultados empíricos para a amostra do quarto trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

Ativos	Markowitz Moderada	BL Moderada	Markowitz Agressiva	BL Agressiva	1/N
ABEV3	5,66	19,81	0	9,77	5,55
B3SA3	0	0	0	0	5,55
BBAS3	0	7,97	0	25,43	5,55
CYRE3	0	0	0	0	5,55
ENBR3	2,27	15,09	0	11,58	5,55
EQTL3	0	2,76	0	0	5,55
GGBR4	0	0	0	0	5,55
ITSA4	0	10,15	0	9,57	5,55
JBSS3	0	9,88	0	25,61	5,55
LREN3	4,04	0	0	0	5,55
MRFG3	0	0	0	0	5,55
MRVE3	0	0	0	0	5,55
PETR4	0	4,34	0	14,78	5,55
RADL3	37,48	0	80,7	0	5,55
SUZB3	30,02	29,81	0	3,27	5,55
USIM5	0	0	0	0	5,55
VALE3	0	0,2	0	0	5,55
WEGE3	20,53	0	19,3	0	5,55

Tabela 11: Alocação por ativo (%) para a amostra do quarto trimestre de 2020. Fonte e elaboração: autor.

A carteira que apresentou o melhor resultado no período foi a agressiva de Black-Litterman, que rendeu 25,49% e apresentou o Sharpe, de 3,65, ficando atrás apenas para o Sharpe da moderada do mesmo método, que rendeu 24,74% e teve Sharpe de 5,31. A carteira 1/N apresentou retorno de 21,32% e Sharpe de 3,54. As carteiras de Markowitz apresentaram retornos de 15,32% e Sharpe de 3,29 (moderada) e 7,26% e Sharpe de 1,04 (agressiva).

O VAR foi maior nas carteiras de Markowitz, de -4,5% na agressiva e -3,55% na moderada, sendo seguido pela carteira 1/N, que foi de -3,53%. Por último, as carteiras de Black-Litterman apresentaram VAR de -2,77% (moderada) e -3,14% (agressiva).

O MDD das carteiras agressivas ficou próximo, em -11,29% na de Markowitz e -10,08% na de Black-Litterman. O MDD da carteira 1/N foi de -8,17%, enquanto as carteiras moderadas apresentaram -7,82% (Markowitz) e -7,53% (Black-Litterman).

No ano de 2020, a rentabilidade do Ibovespa foi de 1,11%, apresentando volatilidade de 45,39% ao ano, enquanto o CDI rendeu 2,72%.

De todas as carteiras analisadas, a que teve o melhor resultado anual absoluto foi a moderada de Black-Litterman, que rendeu 14,73% e apresentou o maior Sharpe, de 0,58. Em segundo lugar, ficou a moderada de Markowitz, que apresentou retorno de 12,85% e Sharpe de 0,49. Comparando a estratégia agressiva, também teve melhor performance a estratégia de Black-Litterman, que rendeu 12,24% (versus 8,22% em Markowitz) e teve Sharpe de 0,33 (versus 0,19 em Markowitz). A estratégia 1/N apresentou retorno anual de -0,36% e Sharpe de -0,12.

	Markowitz	Black-Litterman	1/N
<i>Carteira Moderada</i>			
Retorno ao Período (%)	12,85	14,73	-0,36
Volatilidade anualizada (%)	20,75	20,75	25,75
Índice Sharpe	0,49	0,58	-0,12
<i>Carteira Agressiva</i>			
Retorno ao Período (%)	8,22	12,24	-0,36
Volatilidade anualizada (%)	28,5	28,5	25,75
Índice Sharpe	0,19	0,33	-0,12

Tabela 12: Resultados anuais por estratégia no consolidado de 2020. Fonte e elaboração: autor.

5 CONCLUSÃO

Diante a ideia de comparar a eficiência de dois modelos diferentes para a montagem de portfólios, procurou-se abordar a técnica de cada um e verificar, dentre eles, qual apresentou melhor eficiência no ano de 2020, marcado pela crise do Coronavírus.

Percebeu-se, que o método de Black-Litterman, propondo um método considerado mais sofisticado e que traria um sentido econômico mais coerente com o cenário real, segundo Black e Litterman (1992), apresentou um desempenho melhor (em termos absolutos e relativos, este medido pelo Sharpe) do que o registrado pelo método de Markowitz. Apesar de ter apresentado no terceiro de trimestre de 2020 uma carteira mais concentrada do que em Markowitz, no geral, a diversificação de seu portfólio contribuiu para que essa concentração fosse menor do que no modelo clássico das finanças.

Por fim, espera-se que o trabalho tenha contribuído para a teoria de análise e gestão de carteiras, procurando aplicar métodos acadêmicos para verificar o comportamento dos ativos em períodos marcados por crises, como foi no ano de 2020 para a bolsa de valores brasileira.

REFERÊNCIAS

- BENNINGA, S. **Financial Modeling**. Cambridge: The MIT Press, 1168 p., 2014.
- BESSLER, W., OPFER, H., WOLFF, D. “Multi-Asset Portfolio Optimization and Out-of-Sample Performance: An Evaluation of Black–Litterman, Mean-Variance, and Naïve Diversification approaches”. **The European Journal Of Finance**, 2014.
- BLACK, F. and LITTERMAN, R. “Global Portfolio Optimization”, **Financial Analysts Journal**, pp. 28-43, 1992.
- DEMIGUEL, V., GARLAPPI, L., UPPAL, R. “Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient Is the 1/N Portfolio Strategy?”. **Review of Financial Studies** **22**, pp. 1915–1953, 2009.
- DROBETZ, W. “How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work”, **Financial Markets and Portfolio Management**, Vol. 15/ N°1, pp. 59-75, 2001.
- ELTON, E. J., GRUBER, M. J., BROWN, S. J., GOETZMANN, W. N. **Moderna Teoria de Carteira e Análises de Investimento**. Elsevier, 2012.
- ELTON, E. J., GRUBER, M. J. “Modern Portfolio Theory, 1950 to date”. **Journal of Banking & Finance** **21**, pp. 1747-1759, 1997.
- IDZOREK, T. “A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model”, 2004, *manuscrito não publicado*.
- LEE, W. Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation. **New Hope: Frank J. Fabozzi Associates**, pp. 125–136, 2000.
- LEE, W., LITTERMAN, R. “The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolio”, 2002.
- LITTERMAN, R. et al. **Modern Investment Management: An Equilibrium Approach**. Hoboken: Wiley, 624p., 2003.
- LOBARINHAS, R. B. “Modelos Black-Litterman e GARCH Octogonal Para Uma Carteira de Títulos do Tesouro Nacional”. USP, 2012.
- MARKOWITZ, H. M. “Markowitz Revisited”. **Financial Analysts Journal**, 32:5, pp. 47-52, 1976.
- MARKOWITZ, H. M. “Portfolio Selection”. **The Journal of Finance**, Vol. 7, N° 1, pp. 77-91, 1952.
- MARKOWITZ, H. M. “Portfolio Theory: As I Still See It”. **The Annual Review of Financial Economics**, Vol. 2, pp. 1-23, 2010.

RAMELLI, S., WAGNER, A. F. "Feverish Stock Price Reactions to COVID-19". **Swiss Finance Institute Research Paper Series**, Nº 20-12, 2020.

SILVA, A. F., DE OLIVEIRA, R. S., RIBEIRO, K. C. S. "Otimização de Carteiras de Investimento: Aplicações no IBRX50". **RAGC**, Vol. 7, Nº 27, pp. 73-88, 2019.

WALTERS, CFA, J. "The Black-Litterman Model in Detail", 2009.