



TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**RESSONÂNCIA MAGNÉTICA DE FLUXO
USANDO COMPRESSIVE SENSING
E INFORMAÇÃO A PRIORI DE VELOCIDADE**

Matheus Morais Dalvi

Brasília, julho de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
**RESSONÂNCIA MAGNÉTICA DE FLUXO
USANDO COMPRESSIVE SENSING
E INFORMAÇÃO A PRIORI DE VELOCIDADE**

Matheus Morais Dalvi

*Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista*

Banca Examinadora

Prof. Vinicius de Carvalho Rispoli, Dr., FGA/UnB _____

Orientador

Prof. João Luiz Azevedo de Carvalho, Ph.D., _____
FT/UnB

Examinador interno

Prof. Marcus Vinicius Chaffim Costa, Dr., _____
FGA/UnB

Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA

DALVI, MATHEUS MORAIS

RESSONÂNCIA MAGNÉTICA DE FLUXO USANDO COMPRESSIVE SENSING E INFORMAÇÃO A PRIORI DE VELOCIDADE [Distrito Federal] 2019.

xvi, 53 p., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Engenheiro, Engenharia Elétrica, 2019).

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

1. Ressonância Magnética

2. Contraste de Fase

3. Compressive Sensing

4. Dinâmica dos Fluidos Computacional

I. ENE/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DALVI, M.M. (2019). *RESSONÂNCIA MAGNÉTICA DE FLUXO USANDO COMPRESSIVE SENSING E INFORMAÇÃO A PRIORI DE VELOCIDADE*. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 53 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Matheus Morais Dalvi

TÍTULO: RESSONÂNCIA MAGNÉTICA DE FLUXO USANDO COMPRESSIVE SENSING E INFORMAÇÃO A PRIORI DE VELOCIDADE.

GRAU: Engenheiro Eletricista ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Conclusão de Curso e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Conclusão de Curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Matheus Morais Dalvi

Depto. de Engenharia Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

RESUMO

As doenças cardiovasculares figuram entre as principais causas de morte no mundo, tornando de extrema importância, para a análise de tais doenças, o estudo relativo à detecção de padrões de escoamento sanguíneo no corpo humano. No imageamento por ressonância magnética (RM), a quantificação do fluxo sanguíneo pode ser realizada com a técnica de contraste de fase (CF). Métodos alternativos para estimação de fluxo também são utilizados, como, por exemplo, a abordagem via modelos da dinâmica dos fluidos computacional (DFC). Apesar de amplamente utilizada, limitações da técnica de CF inviabilizam sua aplicação em alguns casos. Visando contornar o problema de subestimação de velocidade, o aumento da resolução espacial em exames de RM pode resultar em exames excessivamente longos, exigindo a permanência do paciente no interior do *scanner* por um longo período de tempo para a aquisição de medidas. Simulações com DFC, por sua vez, exigem intervalos de aquisição reduzidos e fornecem resultados com alta resolução temporal e espacial. Sua acurácia, entretanto, é altamente dependente das hipóteses do modelo utilizado, podendo os resultados calculados não corresponderem à realidade. A introdução da técnica de *Compressive Sensing* (CS) em exames de RM com CF, aliada à utilização de transformadas esparsificantes, permitem que imagens de fluxo sejam reconstruídas a partir de uma quantidade reduzida de amostras, empregando, para isso, o uso de conhecimento prévio acerca dos sinais de interesse. Partindo da ideia por trás do CS, este trabalho propõe o desenvolvimento de algoritmos capazes de integrar a esta técnica informações *a priori* de velocidade proveniente de imagens obtidas por métodos alternativos para quantificação de fluxo. Propõe-se um processo de reconstrução que utiliza-se tanto da hipótese de esparsidade do CS quanto das medidas calculadas por tais métodos. Espera-se, assim, que a quantificação de escoamentos possa se dar a partir de uma quantidade ainda menor de amostras, possibilitando maior rotatividade do *scanner* em exames de RM e, conseqüentemente, tornando estes mais acessíveis.

ABSTRACT

Cardiovascular diseases are among today's leading causes of death worldwide, making extremely relevant, while analyzing those diseases, the study about blood flow patterns detection in the human body. From magnetic resonance imaging (MRI), *in vivo* blood flow measurements can be taken directly by phase-contrast (PC) technique. Other possibility lies in the approach by alternative flow estimation methods, such as computational fluid dynamics simulation. Despite being widely applied on exams, PC-MRI can culminate on excessively lasting exams, requiring patients to stay inside MRI scanners for long periods of time while measurements are taken. CFD simulations, on the other hand, require reduced scan intervals and provides high spatial and temporal resolution, though its accuracy can be hugely affected by model assumptions and, thus, cause simulated results to be inconsistent. Compressive Sensing (CS) technique, allied to sparsifying transforms, has been applied on flow MRI exams, such as PC-MRI, to allow blood flow patterns to be measured through small data quantity, based on previous knowledge about referred images. By employing the concepts behind CS, this works proposes the development of algorithms capable of integrating to this technique *a priori* information taken from velocity images (estimated from alternative approaches). It will be proposed here a new signal reconstruction method for PC-MRI images based both on CS sparsity hypothesis and such velocity images. It is expected, by applying this method, that flow patterns will be quantified by even smaller set of measurements, allowing increase on scanner turnover at MRI exams and, thus, making those more accessible.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	4
1.2.1	OBJETIVO GERAL	4
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.3	JUSTIFICATIVA	4
1.4	ESTRUTURA DA MONOGRAFIA	5
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	PRINCÍPIOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA	6
2.1.1	SINAIS DE RM	6
2.1.2	CODIFICAÇÃO ESPACIAL E ESPAÇO K	8
2.1.3	SEQUÊNCIA DE PULSOS E AMOSTRAGEM	9
2.1.4	IMAGEAMENTO DE FLUXO POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA	11
2.2	<i>Compressive Sensing</i>	13
2.2.1	ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO PARA SISTEMAS SUBDETERMINADOS	16
2.3	TRANSFORMADAS ESPARSIFICANTES	18
2.4	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	21
3	METODOLOGIA	23
3.1	METODOLOGIA DE IMPLEMENTAÇÃO	23
3.1.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE RECONSTRUÇÃO	23
3.1.2	ALGORITMO PARA RECONSTRUÇÃO	24
3.2	METODOLOGIA EXPERIMENTAL	25
3.2.1	DEMONSTRAÇÃO COM FANTOMA	25
3.2.2	AMOSTRAGEM DO ESPAÇO K	26
3.2.3	EXPERIMENTOS	27
3.3	METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO	30
3.3.1	MÉTRICAS DE QUALIDADE DE IMAGENS	30
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	33
4.1	COMPARAÇÃO DE QUALIDADE OBJETIVA PARA IMAGENS DE CONTRASTE DE FASE	33
4.2	COMPARAÇÃO DE QUALIDADE OBJETIVA PARA IMAGENS DE FASE	40
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	44
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

APÊNDICES.....	50
I SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO.....	51

LISTA DE FIGURAS

2.1	Trajetória percorrida pela ponta do vetor de magnetização até o equilíbrio [1].	7
2.2	Decaimento da componente M_{xy} e recuperação de M_z após aplicação do pulso RF. Repare a queda mais acentuada da componente M_{xy} , dada pelo fato de T_2 ser menor que T_1	8
2.3	Diagrama simplificado da sequência de pulso <i>spin eco</i> , mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte [2].	10
2.4	Trajetórias no espaço k. (a) Trajetória cartesiana. (b) Trajetória espiral. (c) Trajetória espiral quadrada. Modificado de [1]	11
2.5	Princípio de codificação de velocidade em RM. (a) Aplicação, no tempo 1, de gradiente positivo, causando deslocamento de fase independente de movimentação ou não dos <i>spins</i> . (b) Aplicação, no tempo 2, de gradiente negativo com mesma intensidade. <i>Spins</i> estacionários terão anulação da fase acumulada, enquanto <i>spins</i> em movimento sofreram acúmulo de fase proporcional à distância percorrida, permitindo o cálculo de velocidade. (Modificado de [3]).	13
2.6	Representação do problema de minimização da norma ℓ_2 de um sinal bidimensional.	15
2.7	Representação do problema de minimização da norma ℓ_1 de um sinal bidimensional.	15
2.8	Esquema de aplicação de filtros para a decomposição do sinal em 1 nível.	20
2.9	Exemplo de aplicação da DWT. (a) Imagem original. (b) Decomposição em um nível utilizando filtro <i>Haar</i> . (c) Decomposição em dois níveis utilizando filtro <i>Haar</i>	21
3.1	Componentes do fantoma para aquisição dos dados de contraste de fase. (a) Fantoma da artéria carótida contendo fluido mimetizador de sangue. (b) Controlador para regulação do escoamento e fornecimento de sinal para aquisição gatilhada. (c) Compressor de ar necessário para gerar o escoamento (retirado da Ref. [3]).	26
3.2	Imagens de contraste de fase relativas ao corte escolhido. (a) Velocidade do eixo z . (b) Velocidade do eixo x . A tonalidade mais clara representa velocidade de 50 cm/s. A tonalidade mais escura, -50 cm/s. Valores definidos pelo VENC.	27
3.3	Obtenção do espaço k pela transformada de Fourier 2D. (a) Espaço k relativo à imagem <i>echo z</i> . (b) Trajetória espiral definida para amostragem do espaço k nos experimentos.	28
3.4	Imagens de fase a serem reconstruídas nos experimentos. (a) Imagem de fase referência. (b) Imagem de fase <i>echo z</i> - codificação de velocidade no eixo z . (c) Imagem de fase <i>echo x</i> - codificação de velocidade no eixo x . As imagens das figuras em 3.2 são obtidas a partir das respectivas diferenças entre as imagens com codificação em dado eixo e a imagem referência.	29

4.1	Qualidade da imagem de contraste de fase - velocidade no eixo z - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.	33
4.2	Qualidade da imagem de contraste de fase - velocidade no eixo z - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 0, 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.	34
4.3	Qualidade das imagens de contraste de fase - velocidade no eixo x - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.	34
4.4	Qualidade das imagens de contraste de fase - velocidade no eixo x - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 0, 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.	35
4.5	Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo z em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando <i>DCT</i> e $p = 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2a. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14}	36
4.6	Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo x em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando <i>DCT</i> e $p = 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2b. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14}	37
4.7	Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo z em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando <i>DWT</i> com filtro <i>Haar</i> e $p = 0, 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2a. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14}	38
4.8	Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo x em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando <i>DWT</i> com filtro <i>Haar</i> e $p = 0, 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2b. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14}	39

LISTA DE TABELAS

4.1	Qualidade objetiva (PSNR) das imagens de fase reconstruídas para $p = 1$ em função do parâmetro λ_3	40
4.2	Qualidade objetiva (PSNR) das imagens de fase reconstruídas para $p = 0, 1$ em função do parâmetro λ_3	41
4.3	Qualidade objetiva (SSIM) das imagens de fase reconstruídas para $p = 1$ em função do parâmetro λ_3	42
4.4	Qualidade objetiva (SSIM) das imagens de fase reconstruídas para $p = 0, 1$ em função do parâmetro λ_3	43

LISTA DE SÍMBOLOS

Subscritos

max	Máximo
min	Mínimo

Sobrescritos

T	Transposto
$-$	Conjugado
H	Conjugado hermitiano

Siglas

CF	Contraste de Fase
CS	<i>Compressive Sensing</i>
DCT	<i>Discrete Cosine Transform</i> (Transformada Discreta de Cossenos)
DWT	<i>Discrete Wavelet Transform</i> (Transformada Discreta de <i>Wavelet</i>)
GCF	Gradiente de codificação de Fase
GL	Gradiente de Leitura
GSC	Gradiente de Seleção de Corte
IRLS	<i>Iterative Reweighted Least Squares</i> (Mínimos Quadrados Reponderados Iterativamente)
MRI	<i>Magnetic Resonance Imaging</i> (Imageamento por Ressonância Magnética)
MSE	<i>Mean Squared Error</i> (Erro Quadrático Médio)
PSNR	<i>Peak Signal to Noise Ratio</i> (Relação Sinal-Ruído de Pico)
RF	Radiofrequência
RIP	<i>Restricted Isometry Property</i> (Propriedade da Isometria Restrita)
RM	Ressonância Magnética
SE	<i>Spin Eco</i>
SSIM	<i>Structural Similarity Index</i> (Índice de Similaridade Estrutural)
TE	Tempo de Eco
TR	Tempo de Repetição
US	Ultrassonografia
VENC	<i>Velocity Encoding</i> (Codificação de Velocidade)

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Segundo dados levantados pela Organização Mundial da Saúde, as doenças cardiovasculares figuram entre as principais causas de morte nas estatísticas globais [4]. No ano de 2016, essas doenças foram responsáveis por 17,9 milhões de mortes, computando 31% do total de falecimentos do mesmo ano. Por englobarem um conjunto de problemas que afetam o coração e os vasos sanguíneos, grande parte dessas doenças estão associadas a obstruções (parciais ou totais) de vasos do sistema cardiovascular, resultando em escoamento anormal do sangue no corpo humano. O acidente vascular cerebral isquêmico, por exemplo, é caracterizado pela obstrução de artérias responsáveis pela vascularização cerebral, podendo ser causado por um trombo - coágulo de sangue formado na parede do vaso sanguíneo - ou por um êmbolo - trombo deslocado pela corrente sanguínea e alojado em vaso menor [5]. Seja qual for a causa, este bloqueio dos vasos sanguíneos altera o padrão do escoamento de sangue no interior destes, podendo causar escoamentos turbulentos e aumentos locais de fluxo de sangue. Assim, exames que permitam quantificar e visualizar o escoamento sanguíneo tornam-se fundamentais tanto no tratamento quanto na prevenção de tais doenças. Atualmente, dois métodos distintos são utilizados em clínicas para obtenção de medidas acerca do escoamento sanguíneo: ultrassonografia (US) com Doppler e ressonância magnética (RM) com codificação de velocidade.

Por ser um exame mais acessível e oferecer resultados satisfatórios, a ultrassonografia com Doppler é a técnica mais utilizada em clínicas médicas para a quantificação de escoamento vascular. Seu equipamento é relativamente pequeno, barato, e é capaz de fornecer, com boa resolução temporal, medidas em tempo real acerca do escoamento sanguíneo [6]. Suas limitações consistem, entretanto, no fato de o feixe de ultrassom, controlado pelo operador, estar obrigatoriamente alinhado com o escoamento, podendo resultar, caso contrário, em medidas imprecisas [7]. Além disso, tecidos como o adiposo e o ósseo podem atenuar o sinal de ultrassom, dificultando ou impossibilitando a quantificação em determinados locais do corpo humano.

A ressonância magnética consiste, no âmbito de imagens médicas, na técnica mais avançada no que diz respeito a implementação e resultados. Capaz de fornecer imagens sob qualquer plano relativo ao corpo humano, o imageamento por RM (ou *MRI*, do inglês *Magnetic Resonance Imaging*) permite a visualização de órgãos e tecidos internos com alto nível de resolução e contraste, permitindo a detecção de detalhes não perceptíveis por outros métodos de imageamento. Além disso, exames de RM utilizam-se somente de campos magnéticos e ondas de rádio, tornando-os não invasivos e, portanto, mais seguros do que exames como a radiografia [8, 9]. Para a identificação e quantificação de escoamentos por ressonância magnética, a técnica mais utilizada é a de contraste de fase (CF) [10, 11, 12]. Nesta, um gradiente bipolar é ajustado para se alinhar com o escoamento de interesse e quantificar a velocidade média, sob determinado eixo, para cada

voxel — unidade tridimensional do volume de interesse [13]. Apesar das inúmeras possibilidades proporcionadas por essa técnica, algumas limitações ainda inviabilizam seu uso em determinados casos. Devido ao fato de se atribuir a cada *voxel* uma média da distribuição de velocidades em seu interior, há recorrentemente a subestimação dessa velocidade (efeito de volume parcial [14]). Uma possível forma de contornar esse problema seria elevando-se a resolução espacial, de forma a tornar cada *voxel* menor e, assim, obter valores de velocidade mais precisos. Há de se ressaltar, entretanto, que esta nem sempre é uma solução factível. Imagens com alta resolução espacial demandam maior tempo de aquisição do *scanner* de RM, resultando em exames de duração elevada (dezenas de minutos). Além da dificuldade de manter o paciente imóvel ao longo de todo o exame, aumentar o tempo de aquisição diminuiu a rotatividade da máquina de RM, encarecendo o custo de cada exame e tornando-o menos acessível [8, 15].

A redução do tempo de aquisição tem sido um dos principais objetos de estudo em pesquisas sobre ressonância magnética relacionadas a processamento de sinais. Alguns algoritmos atualmente utilizados em máquinas comerciais, como a interpolação espectral [16], ainda necessitam de uma grande quantidade de dados para que a qualidade da imagem final seja considerada aceitável. Foco de estudos mais recentes em RM, o *Compressive Sensing* (ou *Compressed Sensing*) tem apresentado avanços significativos nessa área, possibilitando, a partir de uma quantidade significativamente reduzida de amostras, a reconstrução de imagens com qualidade equivalente, ou até superior, às de outras técnicas [15, 17]. A teoria do CS baseia-se no fato de que, conhecido algum domínio no qual determinado sinal tenha uma representação esparsa, tal sinal pode ser representado por uma quantidade reduzida de coeficientes e, portanto, reconstruído a partir de taxas de amostragem inclusive inferiores à de Nyquist [18, 19]. Duas condições, entretanto, devem ser satisfeitas: o domínio “esparsificante” deve ser conhecido e a amostragem do sinal deve ser incoerente. Ainda de acordo com o CS, a qualidade da reconstrução do sinal depende do quão esparsa é a representação do sinal [20]. Sendo assim, estudos acerca de transformadas esparsificantes desempenham um grande papel na evolução do *Compressive Sensing*. Dentre as principais técnicas de esparsificação atualmente utilizadas, destacam-se as transformadas de *wavelets*, a transformada discreta de cossenos (DCT, do inglês *discrete cosine transform*) e técnicas de pré-filtragem [21, 22].

Visando a aceleração do processo de reconstrução das imagens de RM, uma extensão à técnica de CS consiste na utilização de outros tipos de informação *a priori*, reduzindo, assim, a quantidade de amostras necessárias à reconstrução. Em exames de ressonância magnética funcional, por exemplo, em virtude da redundância das imagens, apenas algumas estruturas variam entre as imagens reconstruídas. Desta forma, o uso de informação *a priori* se daria pelo conhecimento prévio de alguns segmentos de imagens futuras, como contorno do crânio ou de órgãos específicos. Um dos primeiros estudos nessa área competem a Lauterbur *et al.*, em [23]. Neste artigo, são descritas tanto as vantagens quanto as desvantagens de se utilizar esse tipo de informação em processos de reconstrução, ressaltando que, ao mesmo tempo em que há um ganho na velocidade do processo e na qualidade da imagem reconstruída, erros associados podem gerar uma degradação da imagem final.

Estudos recentes, tanto no contexto de imagens médicas quanto em áreas distintas, comprovaram como diferentes abordagens acerca de informações *a priori* podem resultar em ganhos para a reconstrução de sinais. Em [24], a informação de borda da imagem, representada no domínio de *wavelets*, é utilizada juntamente com medidas obtidas para a reconstrução da imagem final. Já em [25, 26], Miosso *et al.* mostram como o conhecimento prévio acerca de coeficientes não nulos em domínios esparsos podem ajudar na reconstrução de imagens por CS, ao se utilizar o algoritmo IRLS (do inglês *Iterative Reweighted Least Squares*) para solução do processo de minimização de norma.

Uma outra abordagem, porém indireta, à quantificação de escoamentos consiste no uso da Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Área de pesquisa relacionada à simulação numérica de escoamentos de fluidos e fenômenos correlacionados, estudos com a DFC já foram realizados em diversas geometrias vasculares, como aneurismas intracranianos [31], a aorta torácica [32] e a bifurcação carotídea, tanto em modelos (fantomas) [29] quanto *in vivo* [33]. Determinada a geometria dos vasos e a distribuição de velocidade nas entradas e saídas das seções de interesse, métodos numéricos são utilizados para encontrar soluções para as equações que regem o movimento de fluidos, determinando, assim, os perfis de velocidade ao longo dos vasos condutores. Desta forma, exames com DFC necessitam menor tempo para aquisição de dados nos pacientes, visto que padrões de escoamento são previstos com apenas parte das informações obtidas por exames convencionais de RM com codificação de velocidade.

Apesar do menor de tempo de aquisição e do avanço nessa área de estudo, rotinas convencionais de DFC ainda apresentam limitações quanto a precisão das medidas calculadas. Padrões de escoamento simulados com a dinâmica dos fluidos computacional ainda divergem, em alguns casos, de medidas obtidas por RM com contraste de fase [29, 31, 32]. Além de a escolha do modelo físico apropriado em cada caso ser ainda um problema em aberto [31], parte das hipóteses adotadas na literatura não condizem com aspectos de escoamentos *in vivo*, como vasos sanguíneos com paredes rígidas e viscosidade uniforme do sangue. Há de se ressaltar, ainda, o esforço computacional necessário para se solucionar certos casos, considerando o emprego, em rotinas comerciais, de malhas não cartesianas de elementos finitos.

Uma série de estudos com o intuito de unir ambas as técnicas — medidas *in vivo* e estimadas — já foram realizados [34, 35, 36]. Um algoritmo de mínimos quadrados utilizando algumas considerações da mecânica dos fluidos, por exemplo, foi proposto para melhorar a qualidade das linhas de corrente para os dados medidos por contraste de fase [34]. Grande parte das pesquisas na área, entretanto, ainda consideram ambas as soluções como mutuamente excludentes, indicando a ausência de algoritmos capazes de relacionar medidas de escoamentos obtidas por contraste de fase em exames de RM a soluções obtidas pela aplicação de técnica alternativa, como a DFC, impossibilitando o uso, em dado método, de informações *a priori* provenientes de método distinto para a quantificação de fluxo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho consiste em, a partir de um estudo de caso, desenvolver algoritmos capazes de aprimorar a técnica de reconstrução de imagens por *Compressive Sensing* aplicada à RM de fluxo por contraste de fase, utilizando, para isso, a introdução de informação *a priori* de velocidade proveniente da estimação de fluxo por técnica distinta, como a dinâmica de fluidos computacional. A partir de resultados prévios acerca da quantificação de padrões de escoamento, serão adaptados algoritmos de *CS* já existentes de forma a considerar tais resultados como informação *a priori* das imagens a serem reconstruídas. Espera-se, assim, que seja possível obter imagens de velocidade que integrem dados provenientes de fontes de diferente natureza, permitindo reduzir o número de amostras necessárias para a reconstrução por *CS* — reduzindo o tempo de aquisição para exames de RM com codificação de velocidade — ou, de forma equivalente, aumentar a qualidade objetiva das imagens para a mesma quantidade de amostras.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Desenvolvimento de algoritmo alternativo aos convencionais de *Compressive Sensing*, buscando integrar, como informação *a priori*, resultados obtidos previamente por métodos de identificação e quantificação de padrões de escoamento;
2. Determinação, a partir de testes que meçam a qualidade objetiva das imagens reconstruídas, acerca de quais parâmetros e filtros/transformadas utilizados melhor se adaptam ao processo de reconstrução de imagens do caso em questão, visando obter melhores resultados para a reconstrução por *CS*;
3. Avaliação dos resultados obtidos, visando determinar os ganhos relativos à escolha da transformada esparsificante e à introdução da informação *a priori* de velocidade.

1.3 JUSTIFICATIVA

A partir do estudo acerca da introdução de informação *a priori* por meio da dinâmica de fluidos computacional, este trabalho visa integrar informações e métodos tratados na literatura como mutuamente excludentes. Ao se acoplar medidas *in vivo* a dados obtidos a partir de modelos, espera-se reduzir a quantidade de amostras necessárias para a reconstrução de imagens de RM de fluxo por contraste de fase.

Alcançado tal feito, adaptações nos algoritmos propostos podem levar a redução do tempo de aquisição para exames reais de RM de fluxo, reduzindo o tempo do paciente no interior da máquina, elevando a rotatividade desta e reduzindo o custo de cada exame. Além disso, a mesma técnica pode ser utilizada para a reconstrução de sinais em diferentes contextos que não médicos,

desde que satisfeitas as condições básicas para tal.

1.4 ESTRUTURA DA MONOGRAFIA

Apresentado o contexto no qual o trabalho se insere, o capítulo 2 apresenta uma revisão teórica acerca dos tópicos relevantes para a compreensão do tema proposto por este trabalho. Partindo da ressonância magnética, serão apresentados os princípios fundamentais para a aquisição de dados e reconstrução de imagens, com ênfase em aspectos importantes para o desenvolvimento do método de reconstrução aqui proposto. As seções seguintes se destinarão a introduzir a técnica de *Compressive Sensing*, apresentando a teoria por trás do método e conceitos, como o das transformadas esparsificantes, necessários a seu entendimento e aplicação. Por fim, será feita uma breve introdução à Dinâmica dos Fluidos Computacional, expondo noções acerca de tal ferramenta e sua aplicação na quantificação de escoamentos.

O capítulo 3 se destinará à metodologia utilizada neste trabalho. Na seção de Metodologia de Implementação serão descritos o método de reconstrução de imagens proposto e os algoritmos desenvolvidos para a sua aplicação, apresentando as soluções encontradas analiticamente e rotinas previamente desenvolvidas utilizadas como base. A descrição dos testes realizados, bem como a definição acerca dos parâmetros e variáveis envolvidas, será exibida na seção de Metodologia Experimental. Nesta, considerações acerca dos objetivos do trabalho servirão como base para a condução dos experimentos. Em Metodologia de Validação, por sua vez, métodos de análise de qualidade objetiva serão sugeridos para a avaliação das imagens obtidas com o sistema de reconstrução proposto, envolvendo métricas capazes de examinar diferentes aspectos envolvidos no processo de comparação.

No capítulo 4, a exibição dos resultados obtidos, a partir dos experimentos conduzidos, se dará juntamente com uma discussão acerca da funcionalidade do método proposto. A apresentação das imagens reconstruídas, bem como dos dados referentes às métricas aplicadas, fundamentarão o debate sobre a validade e aplicabilidade do sistema desenvolvido neste trabalho, servindo de base para a conclusão – capítulo 5 – sobre as hipóteses levantadas e direcionamento acerca de trabalhos futuros envolvendo áreas correlacionadas.

Ao final desta tese, na seção de Apêndices, poderá ser encontrada a resolução, pormenorizada, do problema de otimização envolvido no método de reconstrução aqui desenvolvido.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 PRINCÍPIOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

Considerada a técnica mais complexa no âmbito de imagens médicas, o imageamento por ressonância magnética destaca-se, quando comparado a outros exames clínicos, pela capacidade de diferenciar uma vasta variedade de tecidos, ausência de exposição à radiação e qualidade da imagem final adquirida [8]. Essas vantagens são atribuídas ao exame de RM graças ao método de contraste utilizado no processo de aquisição das medidas: a excitação de núcleos de hidrogênio presentes nos tecidos de interesse. Dado que diferentes tecidos do corpo humano possuem diferentes quantidades de hidrogênio em sua composição química, o contraste obtido entre tais tecidos apresenta melhores resultados quando comparado a outras técnicas de imageamento [37].

2.1.1 Sinais de RM

A aquisição de medidas por parte do *scanner* de RM parte da aplicação de um forte campo magnético estático e uniforme ($\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$) sobre o corpo do paciente, com magnitude típica da ordem de $B_0 = 3$ T. Este campo magnético é responsável por alinhar os momentos magnéticos, ou *spins*, dos átomos de hidrogênio presentes nos tecidos, sendo que parte alinha-se paralelamente ao campo \mathbf{B}_0 e parte, anti-paralelamente. A diferença entre a quantidade de *spins* que se alinham paralelamente e anti-paralelamente é de aproximadamente cerca de cinco para um milhão [38]. Ao campo magnético mensurável resultante desse alinhamento (M_0) dá-se o nome de magnetização. Um segundo campo magnético de polarização circular \mathbf{B}_{RF} , ou campo de radio-frequência (RF), é, então, aplicado perpendicularmente a \mathbf{B}_0 , deslocando o vetor de magnetização \mathbf{M} para um plano transversal e fazendo-o realizar um movimento de precessão em torno de \mathbf{B}_0 com frequência:

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad (2.1)$$

chamada de *Frequência de Larmor*. Sendo assim, o vetor de magnetização, ao precessar no plano perpendicular, é capaz de induzir tensão elétrica em bobinas dispostas ao redor da máquina de RM [9, 37]. O comportamento de \mathbf{M} ao longo do tempo pode ser descrito pelas *Equações de Bloch*, dadas por [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} - \frac{M_{xy}}{T_2} \hat{z} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \hat{z}, \quad (2.2)$$

sendo γ a razão giromagnética e T_1 e T_2 os *tempos de relaxação* das componentes M_z (magnetização longitudinal) e M_{xy} (magnetização transversal), respectivamente.

A Eq. (2.2) analisa como as componentes do vetor de magnetização variam, ao longo do tempo e do corpo do paciente, em função do campo magnético resultante \mathbf{B} . Essa equação pode ser resolvida analiticamente, dadas certas condições de contorno, de modo a caracterizar os decaimentos das componentes longitudinal (M_z) e transversal (M_{xy}) após a aplicação de um pulso RF no plano transversal. Solucionando essas componentes separadamente e considerando as condições iniciais $M_z(0) = 0$ e $M_{xy}(0) = M_0$, tem-se [8, 1]:

$$M_z = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}); \quad (2.3)$$

$$M_{xy} = M_0 e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (2.4)$$

Tem-se que, aplicado um pulso de radiofrequência perpendicular ao campo magnético estático e conseqüente deslocamento do vetor magnetização para o plano transversal, a componente M_z cresce até atingir seu valor de equilíbrio (alinhamento com o campo \mathbf{B}_0), enquanto a magnitude da componente M_{xy} decai exponencialmente. As constantes de tempo (tempos de relaxação) T_1 e T_2 determinam o tempo necessário para que as componentes retornem, respectivamente, às suas condições de equilíbrio. A Figura 2.1 ilustra o comportamento de \mathbf{M} após cessado o pulso de radiofrequência.

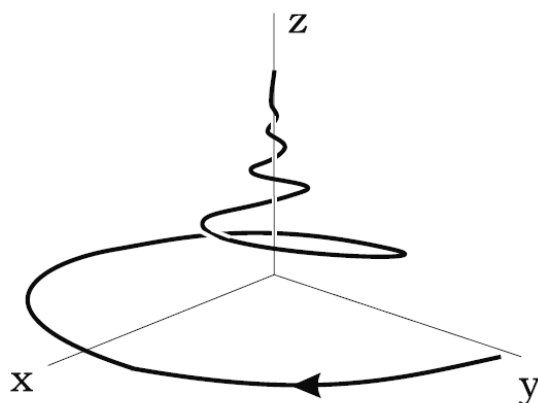


Figura 2.1: Trajetória percorrida pela ponta do vetor de magnetização até o equilíbrio [1].

A existência de magnetização no plano xy depende do alinhamento de fase entre *spins* no interior de dado *voxel*, o que ocorre no momento de aplicação do pulso \mathbf{B}_{RF} . Entretanto, devido à interação entre spins [2] dos núcleos de hidrogênio e à própria não homogeneidade do campo \mathbf{B}_0 , o tempo de relaxação T_2 torna-se menor que o tempo T_1 , como pode ser notado no gráfico da Figura 2.2.

A aquisição de dados suficientes para a formação da imagem final, como será mostrado à frente, depende de uma série de repetições do processo de “tombamento” do vetor de magnetização para o plano transversal. Como os tempos de relaxação T_1 e T_2 são características intrínsecas a cada tecido do corpo a ser analisado [39], o tempo entre as repetições (T_r) determina o peso

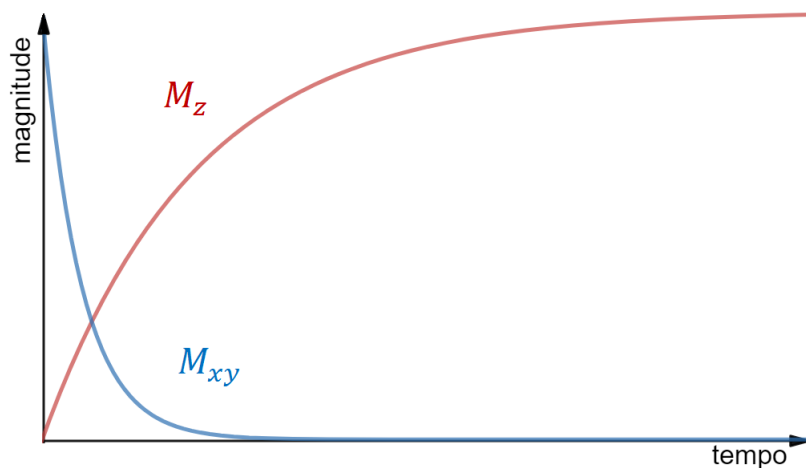


Figura 2.2: Decaimento da componente M_{xy} e recuperação de M_z após aplicação do pulso RF. Repare a queda mais acentuada da componente M_{xy} , dada pelo fato de T_2 ser menor que T_1 .

atribuído a cada um para o contraste da imagem final [9, 37]. A escolha por um T_r relativamente curto, por exemplo, dá uma maior relevância para T_1 , visto que não há tempo suficiente, entre as repetições, para a completa recuperação da magnetização longitudinal.

2.1.2 Codificação Espacial e Espaço k

A simples magnetização pelo campo estático B_0 e a excitação pelo pulso B_{RF} não oferecem qualquer possibilidade de distinção acerca das contribuições de cada localização espacial para o sinal de RM. Dado que todo o volume a ser analisado está sob o efeito dos mesmos campos e pulsos aplicados, o sinal de RM resultante deste processo é nada mais que a soma das contribuições individuais de cada ponto. Para solucionar essa questão, Paul Lauterbur [8] propôs, primeiramente, a segmentação do volume em uma série de cortes transversais. Para isso, sugeriu a utilização de um campo gradiente $G(r, t)$ sobre o campo B , variando de acordo com tempo e espaço. Desta forma, a frequência de precessão dos prótons de hidrogênio está sujeita à intensidade do campo magnético sob o qual estão submetidos.

Para dada posição $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$, o campo magnético torna-se:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}. \quad (2.5)$$

Conseqüentemente, a frequência de precessão, em função da posição, passa a ser definida por:

$$w(r) = \gamma(B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}). \quad (2.6)$$

A utilização de campos gradientes, ao variar o campo principal ao longo do volume a ser analisado pelo *scanner* de RM, permite que diferentes faixas deste volume estejam submetidos a diferentes intensidades de magnetização. A aplicação de um gradiente que varie linearmente na direção longitudinal ($\mathbf{G} = G_z \vec{z}$), por exemplo, implica na variação da velocidade angular de

precessão dos *spins* ao longo de cortes transversais do corpo do paciente. Desta forma, pode-se ajustar o pulso RF para que este atue somente na faixa de frequências de interesse, deslocando para o plano xy apenas o vetor de magnetização correspondente ao corte transversal de interesse.

Aplicando-se o resultado da Eq. (2.6) na Eq. (2.4) e integrando-se ao longo do volume, para encontrarmos o sinal resultante do deslocamento do vetor de magnetização para o plano transversal, tem-se:

$$S(t) = \int_{\text{volume}} M_{xy}(\mathbf{r}) e^{-j\gamma \mathbf{G} \mathbf{r} t} d\mathbf{r}. \quad (2.7)$$

Buscando no entanto, uma forma mais conveniente de representar tal sinal, Lauterbur propôs a definição da chamada *frequência espacial*, permitindo que as medidas do sinal de RM fossem codificadas em um novo plano. Definindo a variável \mathbf{k} como:

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t \mathbf{G}(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

e substituindo na Eq. (2.7), tem-se o sinal, no domínio da frequência espacial, dado por:

$$S(\mathbf{k}) = \int_{\text{volume}} M_{xy}(\mathbf{r}) e^{-j2\pi \mathbf{k} \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.9)$$

Os valores de $S(\mathbf{k})$ pertencem ao denominado **Espaço \mathbf{k}** : forma de representação do objeto - corte - de interesse no domínio da frequência [9, 1]. A Eq. (2.9) é equivalente à Transformada de Fourier com ligeira modificação em seu *kernel*, permitindo um mapeamento por meio de valores de \mathbf{k} ao invés da frequência ω . A partir da aplicação dos campos gradientes ao longo de sucessivas repetições do processo de aquisição do sinal de RM, preenche-se o espaço \mathbf{k} , ou parte deste, da imagem de interesse. Finalizado o processo de aquisição, computa-se sua transformada inversa e obtém-se, assim, a imagem final.

2.1.3 Sequência de Pulsos e Amostragem

O decaimento exponencial do sinal de RM, como mostrado na Eq. (2.4), sugere a necessidade de uma série de deslocamentos do vetor de magnetização para a amostragem do espaço \mathbf{k} . A sequência de pulsos determinada no *scanner* de RM, combinada com o uso de bobinas de gradiente para a alteração do campo magnético, determina a quantidade de repetições do processo de aquisição e a forma como as amostras são coletadas em cada etapa, determinando a trajetória de amostragem do espaço \mathbf{k} [1, 40].

Dado o campo de gradiente $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)$, tem-se que a componente G_x – gradiente de leitura – determina o deslocamento do espaço \mathbf{k} no eixo x , enquanto a componente G_y – gradiente codificador de fase –, o deslocamento no eixo y . G_z , ao alterar o campo magnético principal \mathbf{B} ,

determina o corte transversal escolhido para a aquisição das medidas. A cada pulso RF aplicado de acordo com a frequência do corte de interesse, a aplicação dos gradientes nas componentes x e y determina a trajetória, no espaço \mathbf{k} , percorrida pelas amostras coletadas. Assim, para campos gradientes invariantes no tempo, o tempo de atuação de cada componente, como definido pela Eq. (2.8), determina a trajetória em cada eixo do domínio \mathbf{k} [8].

Um dos métodos de sequência de pulsos utilizado para amostragem da imagem no domínio da frequência consiste no *Spin eco* (SE) [2] – Figura 2.3. Neste processo, amostra-se uma linha do espaço \mathbf{k} a cada tempo de repetição, sendo a trajetória da linha determinada pela ação dos campos gradientes. O processo inicia-se com a aplicação simultânea de um pulso RF e dos gradientes para a seleção do corte de interesse, sendo possível, nesta fase, a utilização de gradiente nas três componentes para seleção do corte. Com o deslocamento do vetor de magnetização para o plano transversal, o objetivo passa a ser codificar o sinal (com o uso dos gradientes de frequência e leitura) e amostrá-lo com sua máxima intensidade, visto que as interações entre os *spins* tendem a defasar os momentos magnéticos induzidos pelo pulso RF. Como a máxima intensidade do sinal ocorre já no momento de “tombamento” do vetor de magnetização, não havendo tempo suficiente para sua codificação, é necessário o uso do fenômeno de formação de eco. Observado pela primeira vez por Hahn [41], este descreveu que, se excitarmos os prótons com um pulso de RF de 90° e, após dado tempo t , enviarmos um segundo pulso de 180° , haverá o surgimento de um eco do primeiro sinal no tempo $2t$. Esse eco é resultado da aplicação do segundo pulso de RF, o que gera a refasagem dos momentos magnéticos de cada próton e, assim, permite a coleta do sinal com sua máxima intensidade em um momento posterior. Desta forma, a aplicação do pulso de 180° , juntamente com os gradientes seletores do corte, no tempo $TE/2$, garante o eco do sinal no tempo TE , permitindo, enquanto isso, o uso dos gradientes de leitura e codificador de fase para a determinação das linhas do espaço \mathbf{k} a serem amostradas.

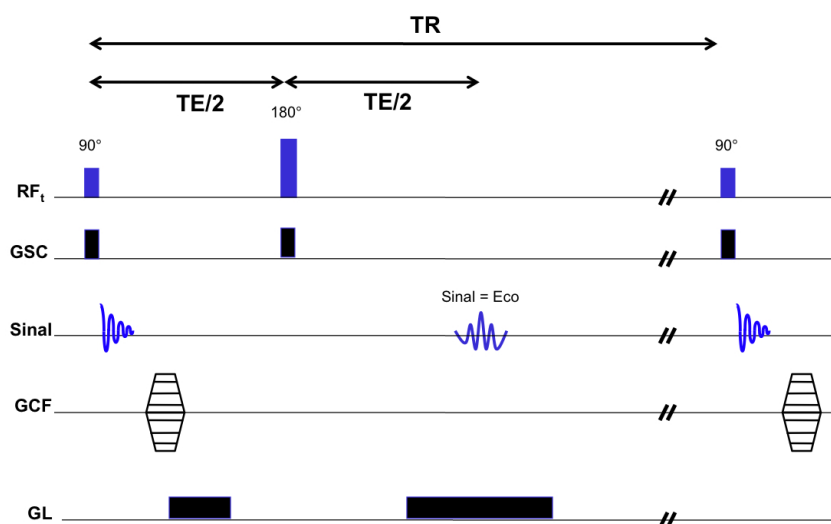


Figura 2.3: Diagrama simplificado da sequência de pulso *spin eco*, mostrando o acionamento dos gradientes de seleção de corte (GSC), codificação de fase (GCF) e codificação de frequência ou de leitura (GL). Sempre que um pulso de RF é transmitido ocorre o acionamento de um gradiente de seleção de corte [2].

Além do método descrito, outras sequências de pulsos, com diferentes formas de amostragem e diferentes trajetórias, encontram-se disponíveis para o exame de RM. No caso do *Turbo Spin echo* e da Imagem Ecoplanar [2], por exemplo, o primeiro garante um trem de ecos dentro de um mesmo TR a partir do uso de vários pulsos RF de 180° , enquanto o segundo garante esse trem de ecos utilizando os próprios campos de gradiente. Quanto às possíveis trajetórias de amostragem, estas são definidas pela aplicação dos campos de gradiente para codificação do sinal, sendo cada uma mais adequada para cada técnica de preenchimento do espaço \mathbf{k} , no caso de amostragem parcial deste domínio. A Figura 2.4 ilustra três dentre as diferentes trajetórias utilizadas em exames de ressonância.

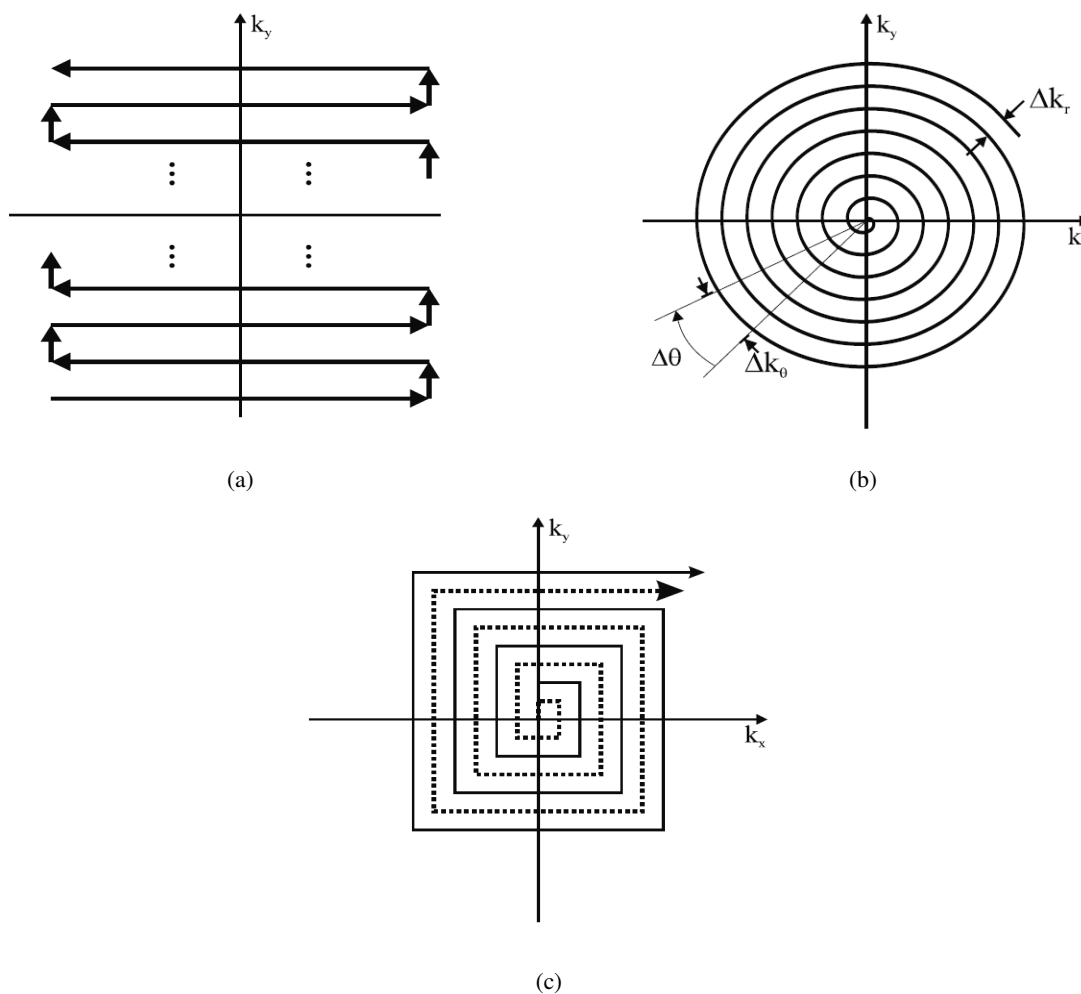


Figura 2.4: Trajetórias no espaço k . (a) Trajetória cartesiana. (b) Trajetória espiral. (c) Trajetória espiral quadrada. Modificado de [1]

2.1.4 Imageamento de Fluxo por Ressonância Magnética

Os princípios fundamentais relacionadas à quantificação do escoamento utilizando a ressonância magnética foram propostos por Singer [38] e Hahn [42], no final dos anos 1950. Somente

a partir de 1980 [43], entretanto, é que aplicações clínicas baseadas no método proposto foram relatadas. A ideia central utilizada para a quantificação do escoamento por ressonância magnética reside no fato de que *spins* se movendo com dada velocidade \vec{v} geram uma fase adicional proporcional ao produto da velocidade com o primeiro momento do gradiente sobre a direção de deslocamento dos *spins* (Figura 2.5).

Tem-se que, para *spins* com posição espacial descrita por $\vec{r}(t)$ e sujeitos a um gradiente de campo magnético $\vec{G}_r(t)$, a fase de magnetização é dada por:

$$\phi(\vec{r}, t) = \gamma \int_0^t \vec{G}_r(\tau) \cdot \vec{r}(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Para o caso de *spins* deslocando-se com velocidade constante $\vec{v} = (u, v, w)$ e posição inicial \vec{r}_0 , sua posição instantânea pode ser descrita pela fórmula $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. Reescrevendo a Eq. (2.10), para $t = TE$, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma \int_0^{TE} \vec{G}_r(t) \cdot (\vec{r}_0 + \vec{v}t) dt \\ &= \gamma \vec{r}_0 \cdot \int_0^{TE} \vec{G}_r(t) dt + \gamma \vec{v} \cdot \int_0^{TE} \vec{G}_r(t) t dt \\ &= \gamma \vec{r}_0 \cdot \vec{M}_0 + \gamma \vec{v} \cdot \vec{M}_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que \vec{M}_0 e \vec{M}_1 referem-se ao momento de ordem zero e primeiro momento do gradiente no tempo de eco (TE), respectivamente. Portanto, se utilizado um gradiente com momento de ordem zero nulo (gradiente bipolar alinhado com \vec{v} , por exemplo), a fase de magnetização para uma velocidade constante pode ser dada por:

$$\phi = \gamma \vec{v} \cdot \vec{M}_1. \quad (2.12)$$

Desta forma, se aplicado um gradiente com forma de onda bipolar entre as excitações e a leitura, a fase medida em dado pixel da imagem adquirida é diretamente proporcional à velocidade dos *spins* contidos no respectivo *voxel* (Figura 2.5). Entretanto, fatores como não homogeneidade do campo magnético podem levar a interpretações equivocadas acerca da velocidade média de cada *voxel* [44]. Uma possível solução para esses problemas consiste na aplicação do método de contraste de fase.

2.1.4.1 Contraste de Fase

A técnica de contraste de fase soluciona os problemas anteriormente citados a partir da aquisição de duas imagens, com variação do primeiro momento do gradiente bipolar entre as medidas [45]. Assim, a diferença de fase entre as duas imagens seria responsável por determinar a ve-

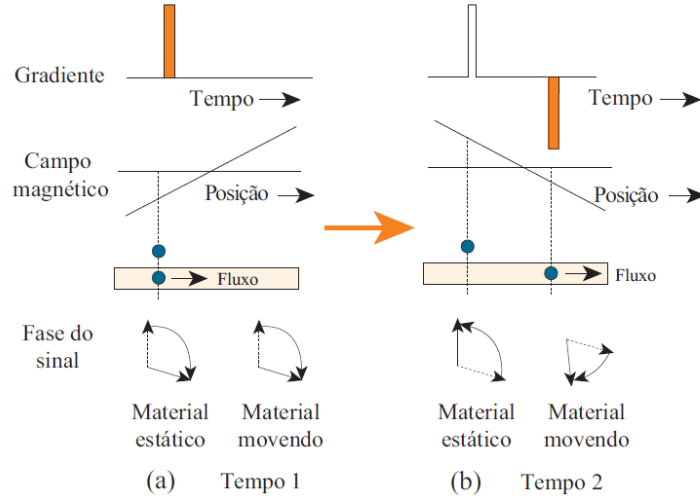


Figura 2.5: Princípio de codificação de velocidade em RM. (a) Aplicação, no tempo 1, de gradiente positivo, causando deslocamento de fase independente de movimentação ou não dos *spins*. (b) Aplicação, no tempo 2, de gradiente negativo com mesma intensidade. *Spins* estacionários terão anulação da fase acumulada, enquanto *spins* em movimento sofreram acúmulo de fase proporcional à distância percorrida, permitindo o cálculo de velocidade. (Modificado de [3]).

locidade média dos *spins* no intervalo de tempo entre as aquisições, anulando o ganho de fase atribuído a outros fatores. A velocidade em cada *voxel* ao longo de determinado eixo é dado por:

$$V_{cf}(x, y) = \frac{\phi_a(x, y) - \phi_b(x, y)}{\gamma(\vec{M}_1^a - \vec{M}_1^b)}, \quad (2.13)$$

em que $\phi_a(x, y)$ e $\phi_b(x, y)$ são as imagens de fase adquiridas em cada aquisição e \vec{M}_1^a e \vec{M}_1^b referem-se aos primeiros momentos dos gradientes bipolares usados em dado eixo para cada aquisição.

2.2 COMPRESSIVE SENSING

O *Compressive Sensing* – CS – [15, 46, 47] refere-se a uma técnica na área de processamento de sinais capaz de reconstruir estes — desde que atendidas certas condições — a partir de baixas taxas de amostragem (inclusive inferiores à determinada pela teoria de Shannon). Dois critérios necessários para tal reconstrução são: esparsidade e incoerência. O primeiro diz respeito à necessidade de se conhecer algum domínio no qual o sinal de interesse tenha uma representação esparsa (maior parte dos coeficientes com valor igual a zero). O segundo critério estabelece que as medidas coletadas do sinal devem ser tomadas a partir de uma amostragem incoerente, ou seja, aleatoriamente distribuída sobre o domínio no qual as medidas pertencem.

Considere uma imagem com L_y linhas e L_x colunas, resultando em um sinal com tamanho igual a $N = L_y L_x$. Desde que satisfeitas as condições citadas anteriormente, o CS tem como objetivo reconstruir o dado sinal a partir de l medidas lineares, sendo $l \ll N$. Em termos

matriciais, é fácil perceber que esta reconstrução resultará em um sistema linear subdeterminado, dado o número de equações menor que o de variáveis. Apesar da existência de um número infinito de soluções para o sistema, o CS utiliza-se da informação *a priori* sobre esparsidade para encontrar, dentro das possíveis soluções, aquela mais esparsa em determinado domínio conhecido. O CS, portanto, caracteriza-se por ser uma generalização da teoria de Shannon, no sentido de que os coeficientes nulos não precisam, necessariamente, estar concentrados a partir de certa frequência, mas podem estar distribuídos ao longo de sua banda, no caso do domínio de Fourier, ou em qualquer outro domínio conhecido [47].

Aplicando a técnica de CS no âmbito de RM, as l medidas lineares referidas acima corresponderiam às amostras no espaço k fornecidas pelo *scanner*, representadas pelo vetor \mathbf{b} . A obtenção destas medidas pode ser descrita pela fórmula $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}$, sendo a matriz \mathbf{M} , de dimensão $l \times N$, responsável por amostrar a imagem \mathbf{x} no espaço k . No domínio esparso conhecido, o sinal \mathbf{x} pode ser representado por $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, em que a matriz \mathbf{T} representa a transformada (ou conjunto de transformadas) para o domínio esparso. Desta forma, conclui-se a seguinte restrição para o CS:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0. \quad (2.14)$$

A condição acima diz respeito somente à correlação do sinal reconstruído com as medidas coletadas pelo *scanner*, sendo este, como dito previamente, um sistema linear subdeterminado. Considerando o critério da esparsidade, o CS torna-se, então, um problema de otimização com restrição. Pelo conceito de esparsidade definido, e considerando a esparsidade da imagem no domínio definido por \mathbf{T} , a solução para a reconstrução do sinal a partir do CS daria-se pela minimização do número de elementos não nulos no vetor $\hat{\mathbf{x}}$, ou a minimização da norma ℓ_0 de $\hat{\mathbf{x}}$ (representada por $\|\hat{\mathbf{x}}\|_0$). Minimizar a norma ℓ_0 , entretanto, equivale a testar todas as combinações possíveis para as posições dos valores não nulos de $\hat{\mathbf{x}}$ e selecionar o resultado que satisfaz a menor norma, resultando em um problema com complexidade de ordem combinatorial [26, 19] e, portanto, inviável. Um solução adotada consiste no uso da norma ℓ_1 , que garante, ainda que com um número de amostras superior à exigida por ℓ_0 [15, 46], a reconstrução da imagem de interesse. O problema final de minimização torna-se:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 \\ & \text{s.t. } \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou, simplesmente, encontrar o $\hat{\mathbf{x}}$ com menor norma ℓ_1 sujeito às medidas \mathbf{b} no espaço k . Aqui a norma ℓ_1 é dada por

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_i |\hat{x}_i|. \quad (2.16)$$

O critério da esparsidade e sua relação com a norma a ser escolhida para a otimização pode ser ilustrado nas Figuras 2.6 e 2.7, na qual cada eixo coordenado representa um determinado coeficiente do sinal (neste caso, considere o sinal como um par ordenado (x_1, x_2)). Assumindo $\mathbf{A} =$

MT^{-1} e substituindo na Eq. (2.14), temos a equação $A\hat{x} - b = 0$, representando, em duas dimensões, a equação de uma reta. Como minimizar a norma Euclidiana ℓ_2 ($\|\hat{x}\|_2 = (\sum_i |\hat{x}_i|^2)^{1/2}$) corresponde a encontrar o ponto de menor energia (ponto mais próximo da origem), tem-se, na Figura 2.6, que essa minimização não necessariamente encontrará a solução mais esparsa, dada a infinidade de pontos ao redor da circunferência passíveis de serem tangenciados pela restrição b .

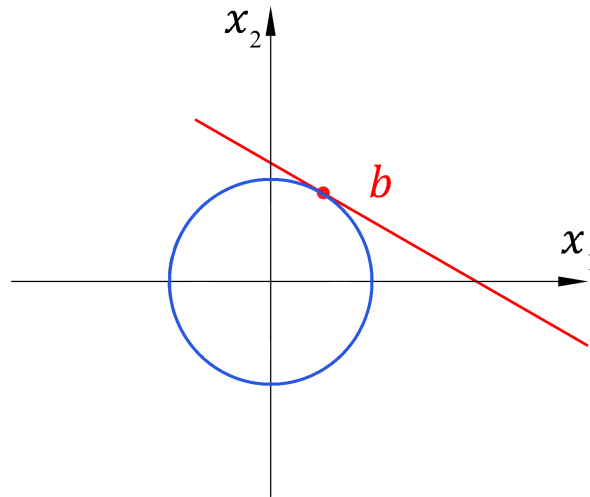


Figura 2.6: Representação do problema de minimização da norma ℓ_2 de um sinal bidimensional.

A minimização da norma ℓ_1 , por sua vez, como mostrado na Figura 2.7, garante maior probabilidade de a solução ser a mais esparsa possível. Como a menor soma possível para o módulo dos coeficientes pode ser determinada pelo contorno de um quadrado, a chance de a reta de restrição não tangenciar algum dos vértices, neste caso, é nula. Vale ressaltar que, ao se utilizar um processo iterativo para a solução por CS, a precisão dos resultados dependem da tolerância e critérios de parada adotados, possibilitando que o resultado final não fique situado, no caso deste exemplo, exatamente sobre algum dos eixos.

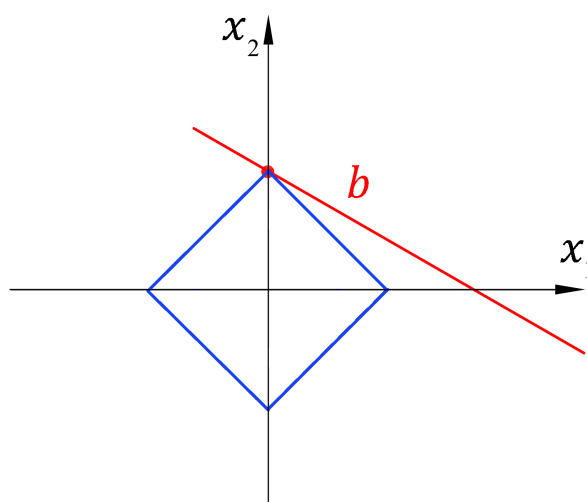


Figura 2.7: Representação do problema de minimização da norma ℓ_1 de um sinal bidimensional.

Considerando agora o critério da amostragem, este determina como as medidas devem ser extraídas do sinal de interesse — ou como a matriz \mathbf{M} deve ser descrita para possibilitar a reconstrução do sinal. Juntamente com a incoerência previamente citada, a propriedade da isometria restrita (*RIP*, do inglês *Restricted Isometry Property*) constitui as condições suficientes para o projeto de uma matriz de medidas estável [18, 19]. Dado um sinal v de tamanho N com S elementos não-nulos (S -esparso), define-se a constante de isometria restrita δ_S da matriz \mathbf{M} com respeito a \mathbf{T} como o menor número tal que:

$$1 - \delta_S \leq \frac{\|\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}v\|_2}{\|v\|_2} \leq 1 + \delta_S. \quad (2.17)$$

A relação acima impõe que a matriz $\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$ mantenha, com tolerância δ_S , a norma do vetor v . De forma geral, tem-se que, para determinado valor S , se a matriz de medidas possuir constante δ_S significativamente menor que 1, então é possível reconstruir v a partir das medidas obtidas utilizando-se $\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$. Além disso, quanto menor o valor da tolerância δ_S , mais estável é a solução obtida após a reconstrução.

A incoerência por si só determina que as colunas de \mathbf{T}^{-1} não podem ser representadas pelas linhas de \mathbf{M} e vice-versa. Embora seja necessário testar todas as combinações das matrizes de medida com a transformada e verificar se estas satisfazem a *RIP*, Candès e Tao [18] mostraram que uma matriz de medidas com distribuição Gaussiana pode satisfazer, com alta probabilidade, tanto a *RIP* quanto a incoerência independentemente da transformada esparsificante. Neste caso, pode ser mostrado ([19, 47]) que a *RIP* e a incoerência são satisfeitas a partir de uma quantidade de medidas $l \geq C \cdot S \cdot \log(N/S)$, sendo C uma constante.

Dadas as limitações de *hardware* do *scanner* utilizado no exame de RM, é inviável a aquisição de medidas de forma aleatória (com distribuição Gaussiana, por exemplo). Desta forma, as trajetórias utilizadas para o preenchimento do espaço \mathbf{k} devem ser tais que gerem o maior grau de incoerência possível. Dois tipos de trajetórias são capazes de obter um grau aceitável: linhas radiais e espirais, com densidade variável [15]. Dada a natureza das imagens de interesse, com esparsidade concentrada nas altas frequências, a densidade variável permite concentrar as amostras no centro do espaço \mathbf{k} (baixas frequências), justamente onde há maior concentração de informação para reconstrução do sinal.

2.2.1 Algoritmos de Otimização para Sistemas Subdeterminados

Apesar de o sistema a ser resolvido neste trabalho não ser exatamente da forma mostrada em (2.15), já que envolverá a adição de informação *a priori* proveniente de imagens de velocidade, cabe aqui descrevermos um dos possíveis métodos de resolução para a formulação convencional de *CS*. Esse mesmo método será utilizado para a resolução do sistema subdeterminado desenvolvido neste trabalho.

A proposta adotada para a solução do problema de *CS* será a de mínimos quadrados repon-

derados iterativamente (*IRLS*, do inglês *Iterative Reweighted Least Squares*) [26, 48]. Como a norma adotada não é um fator limitante para a solução via este método, considerando que através dele é possível encontrar a solução do problema convexo e não-convexo, toma-se como base a Eq. (2.15) e modifica-se o problema para:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{x}}\|_p^p \\ \text{s.t. } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

com $0 < p \leq 1$. O objetivo desta alteração é possibilitar a escolha da norma a ser minimizada, permitindo, conforme a esparsidade do sinal a ser reconstruindo, reduzir o valor de p para valores mais próximos a zero.

Reescrevendo o problema (2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |\hat{x}_k|^p \\ \text{s.t. } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A ideia por trás do *IRLS* é acrescentar um termo de ponderação w_k^{p-2} na minimização da norma ℓ_2 do vetor $\hat{\mathbf{x}}$. Definindo o valor inicial dos elementos do vetor peso w com valor unitário, resolve-se o problema de minimização para a norma ℓ_2 - com solução fechada - e atualiza-se o vetor peso. O objetivo é que, durante este processo iterativo, o vetor peso aproxime-se do vetor a ser minimizado, de forma que, ao se aplicar o termo de ponderação, o problema se torne o da Eq. (2.19).

Aplicando o método *IRLS*, a Eq. (2.19) torna-se:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k^{p-2} |\hat{x}_k|^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo o valor do vetor w atualizado conforme o valor da iteração anterior de $\hat{\mathbf{x}}$, de modo que:

$$w_k^{(m)} = \hat{x}_k^{(m-1)}. \quad (2.21)$$

O problema (2.19), para $p = 2$, possui solução fechada e pode ser facilmente resolvida com a introdução de multiplicadores de Lagrange. Inserindo-se o vetor peso na equação, feita a partir de uma matriz diagonal, a solução para cada iteração da Eq. (2.20) pode ser dada pela fórmula final [26]:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(m)} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}^{(m)} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.22)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N), \quad (2.23)$$

tal que

$$q_k = \left| \hat{x}_k^{(m-1)} \right|^{2-p} + \mu, \quad (2.24)$$

sendo μ uma constante de regularização, evitando que a Eq. (2.24) implique em um zero em algum ponto da diagonal de \mathbf{Q} .

A solução para o problema via *IRLS*, portanto, passa pelas sucessivas resoluções da Eq. (2.22) e atualização do vetor peso até que alguma condição de parada seja alcançada, indicando a convergência do processo iterativo. O critério de parada estabelecido, com μ inicialmente igual a 1, é dado por [26]:

$$\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^{(m)} - \hat{\mathbf{x}}^{(m-1)}\|}{1 + \|\hat{\mathbf{x}}^{(m-1)}\|} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{100}. \quad (2.25)$$

Alcançado tal critério, divide-se μ por 10 e repete-se o processo até $\mu \leq 10^{-8}$ [26, 48].

O algoritmo de solução proposto, utilizando o método de *IRLS*, pode ser resumido nos seguintes passos:

```

Inicializar  $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(0)}$  e  $\mu = 1$ ;
while  $\mu \geq 10^{-8}$  do
     $m = 0$ ;
    while  $x$  não convergir do
        Atualizar  $\mathbf{Q}^{(m)}$ ;
        Calcular  $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ ;
         $m = m + 1$ ;
    end
     $\mu = \mu/10$ ;
end

```

Algorithm 1: Algoritmo para aplicação do método de *IRLS*.

2.3 TRANSFORMADAS ESPARSIFICANTES

Dada a necessidade de representação do sinal de interesse em domínios esparsos, as transformadas esparsificantes são de fundamental importância para a solução de problemas por *CS* e recuperação do sinal com qualidade aceitável. Duas transformadas, comumente utilizadas em problemas de *CS*, foram selecionadas para a exemplificação do método de reconstrução proposto neste trabalho: *DCT* e *Wavelets*.

2.3.0.1 Transformada Discreta de Cossenos - *DCT*

A *DCT* (do inglês *Discrete Cosine Transform*) é uma transformada com ampla aplicação na área de compressão de imagens e vídeos, sendo utilizada, inclusive, em padrões como JPEG [49] e H.264 [50]. A partir do sinal em sua representação original, a *DCT* realiza uma transformação linear e o converte para um domínio de frequências espaciais denominado, no caso de sinais bidimensionais, matriz de coeficientes. Nesta matriz, o valor dos coeficientes, de forma análoga ao domínio de *Fourier*, determinam o quanto cada componente de frequência retém informação do sinal transformado [51].

Duas características da *DCT* consistem na periodicidade de sua representação e na concentração de energia nos coeficientes de baixa frequência [52]. Essa segunda característica, desejável para o caso de *CS*, consiste no fato de as imagens comumente utilizadas nesse tipo de aplicação possuírem, por natureza, informação concentrada nas baixas frequências. Vale ressaltar que o uso da *DCT* não introduz perdas ao sinal transformado, efeito presente somente nos casos de compressão, nos quais parte da informação relativa às altas frequências são propositalmente descartadas no processo de quantização dos coeficientes.

Considere uma imagem de tamanho $M \times N$ com coeficientes dados por A_{mn} , sua representação no domínio das frequências, a partir da *DCT*, pode ser dada por [51, 52]:

$$B_{pq} = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} \cos \frac{\pi(2m-1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n-1)q}{2N}, \quad (2.26)$$

sendo

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}}, & p = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}}, & 1 \leq p \leq M-1 \end{cases} \quad (2.27)$$

e

$$\alpha_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & q = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq q \leq N-1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Os coeficientes dados por B_{pq} preenchem a matriz de coeficientes do domínio da frequência. No caso de imagens com energia concentrada nas baixas frequências, nota-se a concentração de coeficientes com maiores valores, em módulo, no canto superior esquerdo da matriz, enquanto coeficientes com valores próximos – ou iguais – a zero estão distribuídos no restante da matriz. Os valores de A_{mn} podem ser recuperados pela simples aplicação da transformada inversa da *DCT* (ou *IDCT*, do inglês *Inverse Discrete Cosine Transform*).

2.3.0.2 Transformada Discreta de *Wavelets* - *DWT*

Ao contrário da *DCT*, que mede a projeção do sinal de interesse em ondas cossenoidais de diferentes frequências, a *DWT* (do inglês *Discrete Wavelet Transform*) associa o sinal a ser transformado a ondas de duração limitada. Suas diferentes funções base permitem, teoricamente, a representação de sinais sem perda de informação, e a escolha dessas funções definem a família de *wavelet* utilizada para a transformação. Cada família concentra ondas com diferentes características (forma, amplitude e fase) e apresentam vantagens na extração de determinado tipo de informação, sendo cada uma mais eficaz para a representação de cada tipo de sinal que se queira transformar [53].

Uma das formas de ser obter os coeficientes no domínio das *wavelets* consiste na decomposição do sinal de interesse por meio de Bancos de Filtro. A partir da escolha de determinado par de filtros passa-baixas e passa-altas, definindo, assim, a família *wavelet* correspondente [54], decompõe-se o sinal sucessivas vezes em componentes de alta frequência (detalhes) e baixa frequência (aproximação). A quantidade de etapas neste processo é determinada pelo nível de decomposição, sendo esta quantidade limitada pela dimensão do sinal.

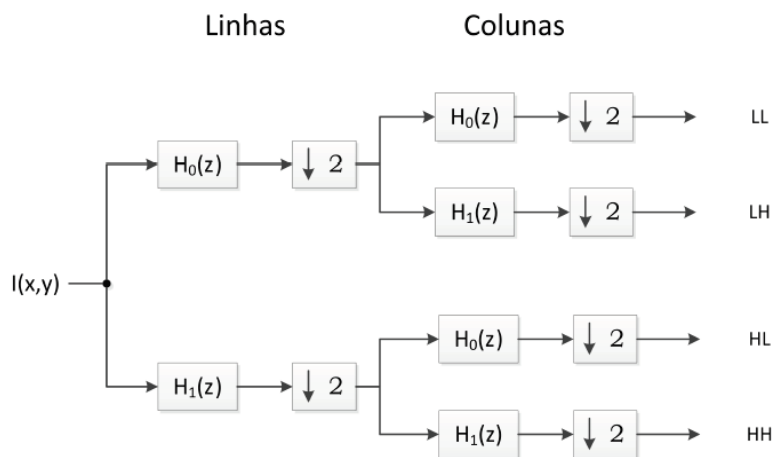


Figura 2.8: Esquema de aplicação de filtros para a decomposição do sinal em 1 nível.

Para o caso de sinais bidimensionais – imagens –, os coeficientes no domínio de *wavelets* são obtidos filtrando-se as linhas e as colunas da imagem com todas as combinações possíveis entre os filtros. Ao se filtrar, por exemplo, as linhas com um filtro passa-baixas e as colunas com um passa-altas, obtém-se uma imagem relativa aos detalhes (bordas) presentes na direção horizontal. Vale ressaltar que, durante o cálculo das quatro imagens possíveis (horizontal, vertical, diagonal e aproximação), realiza-se uma subamostragem dos coeficientes obtidos, de forma que a quantidade total destes seja sempre igual à dimensão total do sinal a ser decomposto. O processo repete-se, conforme o nível de decomposição desejado, partindo-se sempre dos coeficientes relativos à imagem de aproximação (filtro passa-baixas nas linhas e colunas), até o limite de a imagem de aproximação não puder ser mais dividida. A expectativa é a de que, ao final da transformação, os coeficientes obtidos após cada filtragem sejam capaz de conter, de forma esparsa, a informação relativa ao sinal original.

A imagem 2.8 mostra um esquema de decomposição de um sinal bidimensional em apenas um nível, enquanto a imagem 2.9 exemplifica a aplicação deste algoritmo na imagem da “Lena”. Nesta última, repare que os sinais transformados – tanto em um nível quanto em dois – são mais esparsos que o original, contendo exatamente as mesmas informações.



Figura 2.9: Exemplo de aplicação da DWT. (a) Imagem original. (b) Decomposição em um nível utilizando filtro *Haar*. (c) Decomposição em dois níveis utilizando filtro *Haar*.

2.4 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Apesar de o processo de aquisição de imagens de fluxo por simulações computacionais não fazer parte dos objetivos deste trabalho, cabe aqui uma pequena introdução ao tópico, a fim de explicar uma possível origem para as informações *a priori* que se deseja, neste trabalho, acoplar ao problema de *CS*.

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC) — ou *CFD* (do inglês *Computational Fluid Dynamics*) — consiste na área da computação científica relativa ao estudo de métodos computacionais para simulação de fenômenos envolvendo fluidos (movimento, troca de calor, *etc.*). Dada a dificuldade de se encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais parciais que descrevem escoamentos e fenômenos correlacionados, a DFC propõe, a fim de se obter numericamente soluções aproximadas, métodos de discretização capazes de aproximar estas equações diferenciais por um sistema de equações algébricas. Estas aproximações são realizadas em pequenos domínios no espaço e no tempo e, desta forma, determinam que a solução encontrada forneça informações acerca de localizações discretas no espaço e tempo.

As simulações de tais fenômenos se dão a partir da discretização do sistema tridimensional de equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade [55], respectivamente:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.29)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.30)$$

gerando quatro sistemas lineares da forma:

$$\mathbf{A}_w \mathbf{w} = \mathbf{b}_w, \quad (2.31)$$

sendo t o tempo, ρ a densidade de fluido, μ a viscosidade do fluido, \vec{v} o vetor velocidade e w representando uma das quatro variáveis que se deseja obter pela simulação: as velocidades escalares em cada direção (u , v e w) e a pressão p . Em [3], foi proposta uma modificação nesses quatro sistemas definidos por (2.31), visando incluir medidas adquiridas utilizando técnicas de ressonância magnética a fim de se obter soluções mais próximas das medidas reais. Tal proposta, inclusive, serviu como motivação para este trabalho, no que diz respeito à integração de medidas *in vivo* com solução via simulações computacionais.

Apesar de utilizada em uma série de aplicações no campo da engenharia, a solução de problemas por DFC ainda apresenta algumas limitações quanto aos resultados obtidos. Como mencionado em sua própria descrição, é necessário se atentar para o fato de que as soluções obtidas por métodos numéricos são sempre aproximações para os fenômenos reais. Além do fato de aproximações serem feitas durante o processo de discretização, as equações diferenciais que descrevem os próprios fenômenos podem conter idealizações, desconsiderando fatores que podem, em situações reais, causar divergência entre resultados simulados e medidos. Outro ponto a ser levado em consideração reside no fato de se utilizar métodos iterativos para a solução de equações discretizadas, o que impossibilita, dependendo das condições de parada adotadas, a obtenção de soluções exatas [56].

3 METODOLOGIA

3.1 METODOLOGIA DE IMPLEMENTAÇÃO

Nesta seção serão descritos os algoritmos e procedimentos realizados para a solução do sistema de reconstrução de imagens de RM com codificação de velocidade, por CF, proposto neste trabalho. Dentre os algoritmos desenvolvidos, inclui-se a solução do sistema linear adotado para a reconstrução, baseado em *compressive sensing* e na introdução de informação *a priori* de velocidade. Algoritmos previamente implementados — e utilizados como base para o desenvolvimento do método aqui proposto — serão, quando necessário, devidamente referenciados.

3.1.1 Formulação do Problema de Reconstrução

A codificação de velocidade por contraste de fase implica na necessidade de reconstrução de um par de imagens complexas (imagens de fase), com medidas adquiridas antes e após a aplicação do campo gradiente bipolar, para a então obtenção da imagem final de velocidade (dada pela diferença de fase entre as imagens reconstruídas). A formulação clássica para o problema de CS, apresentado pela Eq. (2.15), propõe a reconstrução de tais imagens a partir da otimização de dois sistemas independentes, baseando-se somente nas medidas adquiridas pelo *scanner* e na informação *a priori* sobre a esparsidade em determinado domínio.

O sistema desenvolvido neste trabalho para a reconstrução de sinais parte de uma abordagem diferente da sugerida em (2.18) e, desta forma, implica em uma solução diferente da apresentada, por exemplo, por Miosso *et al.* em [26], dada pela Eq.(2.22). Com o intuito de se inserir informação *a priori* de velocidade no modelo de resolução, dada por imagens de velocidade previamente obtidas, propõe-se, neste trabalho, o cálculo das imagens da fase a partir da minimização da seguinte função objetiva:

$$J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2\|_2^2 + \lambda_2 \|\mathbf{B}\mathbf{x}_1\|_p^p + \lambda_2 \|\mathbf{B}\mathbf{x}_2\|_p^p + \lambda_3 \|(\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M}) \odot \mathbf{m}\|_2^2 \quad (3.1)$$

em que \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 correspondem as imagens de cada fase, \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 as medidas adquiridas no espaço \mathbf{k} , \mathbf{A} a *sensing matrix* (matriz de aquisição e amostragem), \mathbf{B} a matriz referente à transformada esparsificante, \mathbf{M} a imagem de comparação contendo a informação *a priori* acerca de velocidade e \mathbf{m} uma máscara para selecionar nas imagens apenas áreas onde há informação de fluxo. O operador “ \odot ” refere-se à multiplicação ponto-a-ponto de matrizes e $\bar{\mathbf{x}}_1$, ao conjugado complexo da imagem \mathbf{x}_1 . Além disso, as constantes λ_n referem-se ao pesos atribuídos a cada norma.

O vetor \mathbf{M} é de fundamental importância neste trabalho, pois ele é quem fornece o objeto de

comparação com a informação *a priori* para o otimizador. Desta forma, sua modelagem é fundamental para se obter os melhores resultados possíveis. Considerando \mathbf{v} um vetor normalizado contendo informação de velocidade de alguma fonte (como, por exemplo, a DFC), então o vetor \mathbf{M} deve ser modelado na forma

$$\mathbf{M} = \rho e^{j\pi\mathbf{v}}, \quad (3.2)$$

em que ρ é a magnitude do vetor $\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2$ e j é a unidade imaginária. Esta modelagem é adequada, pois a imagem de velocidade desejada é obtida pela diferença de fase entre vetores ótimos \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , conforme Eq.(2.13). Além disso, como a magnitude entre $\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2$ e \mathbf{M} é a mesma, então o otimizador irá minimizar apenas a variável fase, que é o desejado.

Ao se formular o problema de otimização da forma dada por (3.1), o objetivo é permitir que, a partir da variação dos pesos λ_n , seja possível determinar, diretamente, a relevância de cada norma sobre o resultado final do processo de reconstrução. A relevância das medidas obtidas via *scanner* é atribuída pelo parâmetro λ_1 . A esparsidade do sinal, em dado domínio definido por \mathbf{B} , é influenciada por λ_2 . A proximidade da imagem final com a imagem modelo (contendo a informação *a priori*), por sua vez, é determinada por λ_3 . Desta forma, a reconstrução do sinal de interesse é dada não somente pela integração de informações de diferente natureza, mas pela ponderação destas. Tal formulação para o problema de reconstrução, assim como a proposta de solução, tem como base a abordagem utilizada em [57], no qual a proposta é inserir como informação *a priori* a esparsidade da diferença complexa entre as imagens de fase a serem reconstruídas.

3.1.2 Algoritmo Para Reconstrução

Para a solução do sistema proposto, será utilizada, assim como em [57], uma abordagem de minimização alternada [58], de forma que o processo de minimização da função objetiva (3.1) será dado, iterativamente, por dois problemas de otimização dependentes. Isso se deve ao fato da otimização ser não-linear, em virtude do termo $\|(\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M}) \odot \mathbf{m}\|_2^2$ que consta na Eq.(3.1). Cada etapa do método iterativo será responsável por minimizar, a partir de um sistema linear, as normas da Eq. (3.1) em função de uma determinada imagem \mathbf{x}_k , enquanto a outra imagem será fixada e igual à iteração anterior. O método *IRLS*, conforme utilizado em [26], será utilizado para o cálculo da norma p , salvo algumas alterações que serão mostradas na seguinte seção. O seguinte algoritmo resume o processo de minimização:

Inicializar $\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{0}$ e $k = 0$;

while não convergir **do**

 Fixa $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^k$ e minimiza $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^k)$ em função de \mathbf{x}_1 ;

$\mathbf{x}_1^k = \mathbf{x}_1$;

 Fixa $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^k$ e minimiza $J(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2)$ em função de \mathbf{x}_2 ;

$\mathbf{x}_2^{k+1} = \mathbf{x}_2$;

$k = k + 1$;

end

Algorithm 2: Algoritmo de minimização alternada para a solução do problema formulado em (3.1).

O cálculo de cada imagem (\mathbf{x}_1^k e \mathbf{x}_2^k) utilizada para minimizar $J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ em cada etapa do processo iterativo — cuja resolução, na íntegra, está apresentada no Apêndice I — é dada pela solução dos seguintes sistemas lineares:

$$[\lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}^H \mathbf{w}_1 \mathbf{B} + \lambda_3 \text{diag}(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_2^k \odot \bar{\mathbf{x}}_2^k)] \mathbf{x}_1 = \lambda_3 (\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_2^k \odot \mathbf{M}) + \lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{b}_1 \quad (3.3)$$

$$[\lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}^H \mathbf{w}_2 \mathbf{B} + \lambda_3 \text{diag}(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_1^k \odot \bar{\mathbf{x}}_1^k)] \mathbf{x}_2 = \lambda_3 (\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_1^k \odot \bar{\mathbf{M}}) + \lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{b}_2 \quad (3.4)$$

sendo \mathbf{w}_k o vetor de pesos referente ao método *IRLS* e o sobrescrito H representando o conjugado Hermitiano (transposto conjugado). Vale ressaltar que todas as variáveis envolvidas no sistema encontram-se na forma vetorial.

3.2 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Os testes de reconstrução de imagens de RM realizados neste trabalho basearam-se em imagens de fluxo obtidas a partir de dados de contraste de fase adquiridos por Rispoli em [3]. Para isso, foi necessário extrair medidas acerca de tais imagens e inseri-las no algoritmo de reconstrução desenvolvido. A forma como tais medidas foram obtidas e utilizadas, a escolha acerca da informação *a priori* simulada e os detalhes acerca da sequência de experimentos aqui realizada serão descritos a seguir.

3.2.1 Demonstração com Fantoma

Os dados de contraste de fase obtidos por Rispoli [3] foram adquiridos, via RM — máquina de ressonância magnética do Laboratório de Ressonância Magnética Funcional da University of Michigan (Ann Arbor, Michigan, EUA) —, a partir de um aparato desenvolvido com o intuito de realizar testes em sistemas de imageamento. Construído de forma a proporcionar excelente relação sinal-ruído, o fantoma (do inglês *phantom*) utilizado tem o objetivo de gerar um escoamento pulsátil com frequência “cardíaca” constante, produzindo escoamentos detectáveis por máquinas de ressonância magnética. Além do fantoma, um controlador (responsável por regular

a frequência e a aquisição por parte do *scanner* em determinada frequência) e um compressor de ar são utilizados para gerar tal escoamento (Figura 3.1). O fluido presente no interior dos tubos do fantoma – simulando artérias – é um fluido mimetizador de sangue, com densidade e viscosidade similares a do sangue humano.

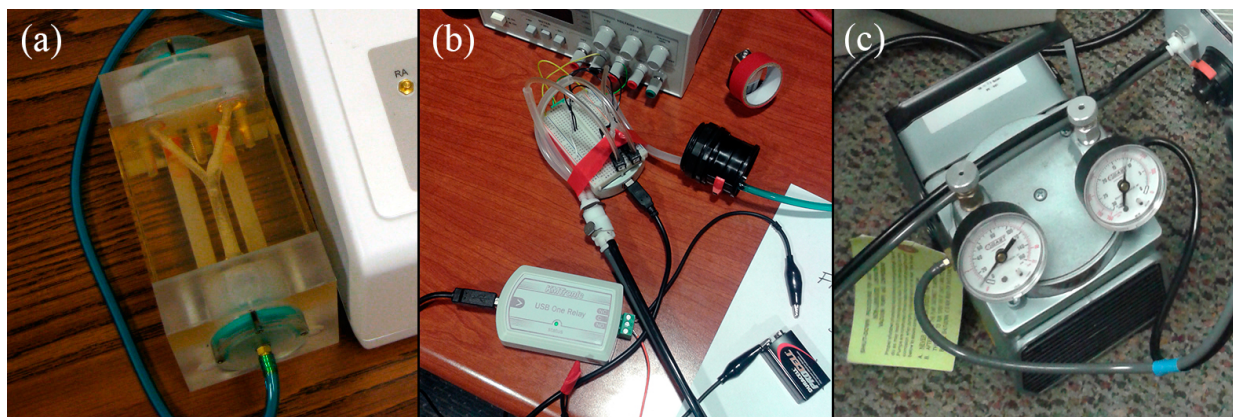


Figura 3.1: Componentes do fantoma para aquisição dos dados de contraste de fase. (a) Fantoma da artéria carótida contendo fluido mimetizador de sangue. (b) Controlador para regulação do escoamento e fornecimento de sinal para aquisição gatilhada. (c) Compressor de ar necessário para gerar o escoamento (retirado da Ref. [3]).

As medidas adquiridas do respectivo aparato no exame de contraste de fase foram obtidas por meio de imagens volumétricas *TF3D RF-spoiled gradient echo (SPGR)* em oito instantes de tempo distintos do ciclo de escoamento pulsátil com os seguintes parâmetros: tamanho do *voxel* igual a $0,5 \times 0,5 \times 1,0 \text{ mm}^3$; campo de visão $4,0 \times 3,5 \times 5,0 \text{ cm}^3$; VENC 50 cm/s; TR 11,4 ms; resolução temporal 91,2 ms; ângulo de *flip* $8,5^\circ$; 40 minutos por aquisição; 9 NEX e frequência igual a 60 bpm. O VENC corresponde à velocidade máxima detectável pelo exame, e a quantidade NEX, ao número de repetições do exame, permitindo-se tomar a média dos dados medidos em cada repetição e, assim, aumentar a relação sinal-ruído. Para cada NEX, foram adquiridas individualmente as componentes de velocidade u_{cf} , v_{cf} e w_{cf} relativas às velocidades em cada eixo do plano cartesiano. Vale ressaltar que, para cada componente de velocidade em dado corte do fantoma, duas imagens de fase são necessárias: uma para referência (comum a todas as componentes) e outra específica do eixo desejado.

3.2.2 Amostragem do Espaço k

Visto que o banco de dados utilizado para este trabalho consiste em dados de exame de contraste de fase já no domínio espacial, a primeira etapa consistiu em selecionar, dentre os disponíveis, um corte em um determinado instante do ciclo cardíaco e simular o espaço k preenchido pela máquina de RM durante o processo de aquisição. O corte selecionado (Figura 3.2) - foi tal que permitisse a quantificação e visualização de escoamento em dois eixos (x e z) do plano. Para isso, foi necessária a simulação do espaço k para três imagens de fase distintas: imagem referência, imagem com codificação no eixo x - *echo x* - e imagem com codificação no eixo z -

echo z. Por estar situado no plano xz , o corte selecionado (assim como todas as imagens de fase referidas) possuem resolução igual 80×50 pixels.

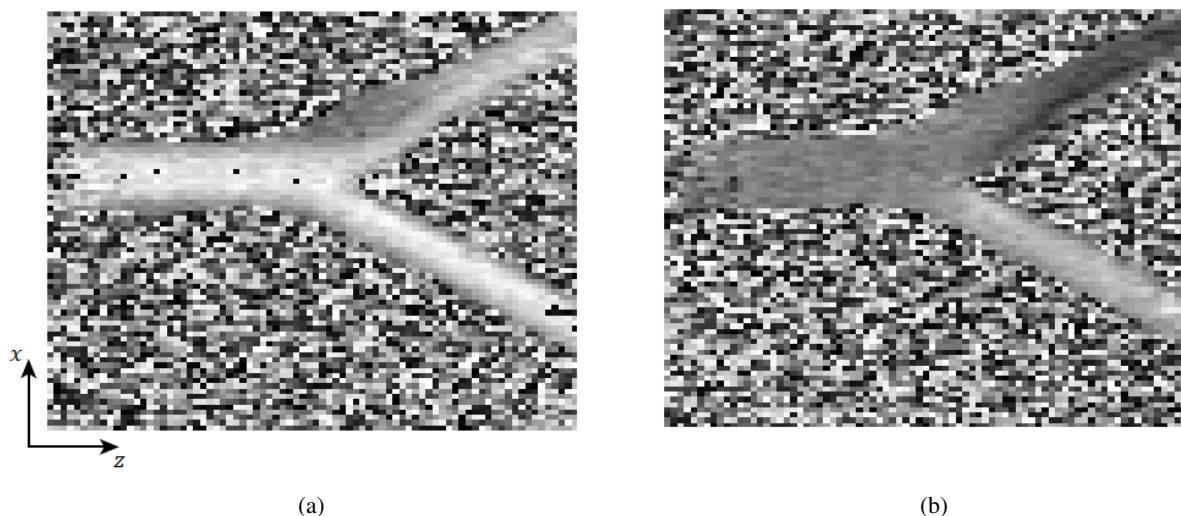


Figura 3.2: Imagens de contraste de fase relativas ao corte escolhido. (a) Velocidade do eixo z . (b) Velocidade do eixo x . A tonalidade mais clara representa velocidade de 50 cm/s. A tonalidade mais escura, -50 cm/s. Valores definidos pelo VENC.

A simulação do espaço k para as três imagens, realizada pelos próprios algoritmos de otimização, deu-se pela aplicação da transformada de Fourier bidimensional (Figura 3.3). Visando atender ao critério de incoerência e considerando as limitações de *hardware* do *scanner*, optou-se pela amostragem do espaço k segundo a trajetória espiral com densidade variável, de forma a concentrar a amostragem no centro do domínio das frequências e, simultaneamente, aderir ao critério da aleatoriedade. A Figura 3.3 ilustra a trajetória espiral aplicada ao processo de amostragem do espaço k . As taxas de amostragem utilizadas para os experimentos, bem como a descrição destes, serão discutidas na seção a seguir.

3.2.3 Experimentos

Com o intuito de verificar a validade e aplicabilidade das soluções derivadas dos sistemas descritos em (3.3), bem como comprovar a capacidade de se integrar informações e dados provenientes de fontes distintas para o problema de reconstrução de sinais, os testes realizados consistem em uma sequência de reconstruções das imagens de fase selecionadas (Figura 3.4) sob uma série de variações do conjunto de parâmetros e variáveis inclusos no processo de otimização.

Levando em consideração a alta gama de opções disponibilizadas pelo método de reconstrução proposto (incluindo variação dos pesos relativos a cada norma, transformadas/filtros esparsificantes, normais vetoriais, *etc.*), este trabalho se restringirá a verificar a validade dos algoritmos desenvolvidos sob a ótica da introdução de informação *a priori* de velocidade, contida na ima-

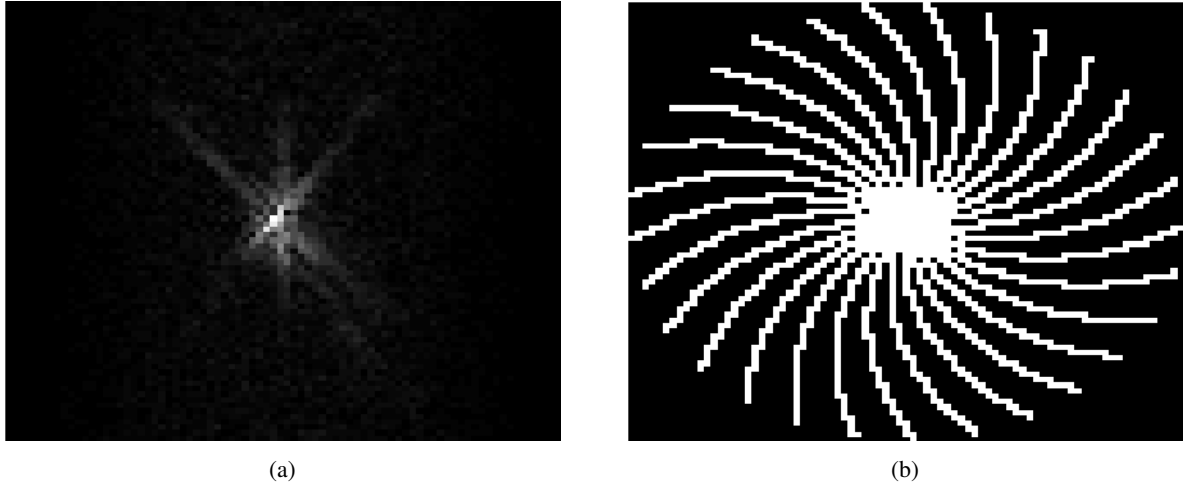


Figura 3.3: Obtenção do espaço k pela transformada de Fourier 2D. (a) Espaço k relativo à imagem *echo z*. (b) Trajetória espiral definida para amostragem do espaço k nos experimentos.

gem modelo inserida na formulação do problema. Ou seja, a partir da variação, em (3.1), do parâmetro λ_3 , será avaliado se, de fato, o incremento deste valor sobre os demais pesos, em diferentes condições, aproxima a imagem final de velocidade àquela escolhida para comparação. Se, à medida que λ_3 for incrementado, for constatado aumento da semelhança entre a imagem de CF reconstruída e a adotada como meio de comparação, será confirmada a funcionalidade do otimizador, ratificando a hipótese de inclusão de informações *a priori* no processo de reconstrução. Para os testes propostos, será atribuído ao parâmetro λ_3 valores entre 10^{10} e 10^{14} . Tais valores foram definidos de forma à garantir reconstruções tanto com pouca influência da imagem modelo ($\lambda_3 = 10^{10}$) quanto com predominância ($\lambda_3 = 10^{14}$) desta sobre as informações complementares (medidas e esparsidade).

Ressalta-se aqui que, com base em experimentos realizados, a influência da imagem modelo sobre a imagem final reconstruída só se deu para valores de λ_3 a partir de 10^{11} . Desta forma, reconstruções com $\lambda_3 = 10^{10}$ representam resultados iguais aos obtidos quando desconsiderada tal informação *a priori*, ou seja, quando realizada a reconstrução com base no CS convencional.

A taxa de amostragem do espaço k será de aproximadamente 22% em todas as reconstruções realizadas, representando o uso de aproximadamente 1/5 do total de informação presente no domínio da frequência. Essa taxa, determinada a partir de reconstruções baseadas somente em CS, foi escolhida de forma a causar, nessas condições, distorções significativas ao se comparar a imagem reconstruída com a original. O objetivo é permitir uma margem para aprimoramento, de forma a determinar como a qualidade da reconstrução é afetada ao se inserir, no processo de reconstrução, a imagem relativa à informação *a priori* de velocidade.

Além do cálculo em função do parâmetro λ_3 , as reconstruções de darão a partir de dois valores distintos para a norma do sinal de interesse no domínio esparso ($p = 1$ e $p = 0, 1$) e de um conjunto de filtros/transformadas esparsificantes. Para o caso de $p = 1$, os valores dos pesos λ_1 e λ_2 foram fixados em 10^3 . No caso de $p = 0, 1$, os pesos foram definidos como $\lambda_1 = 10^3$ e $\lambda_2 = 1$.

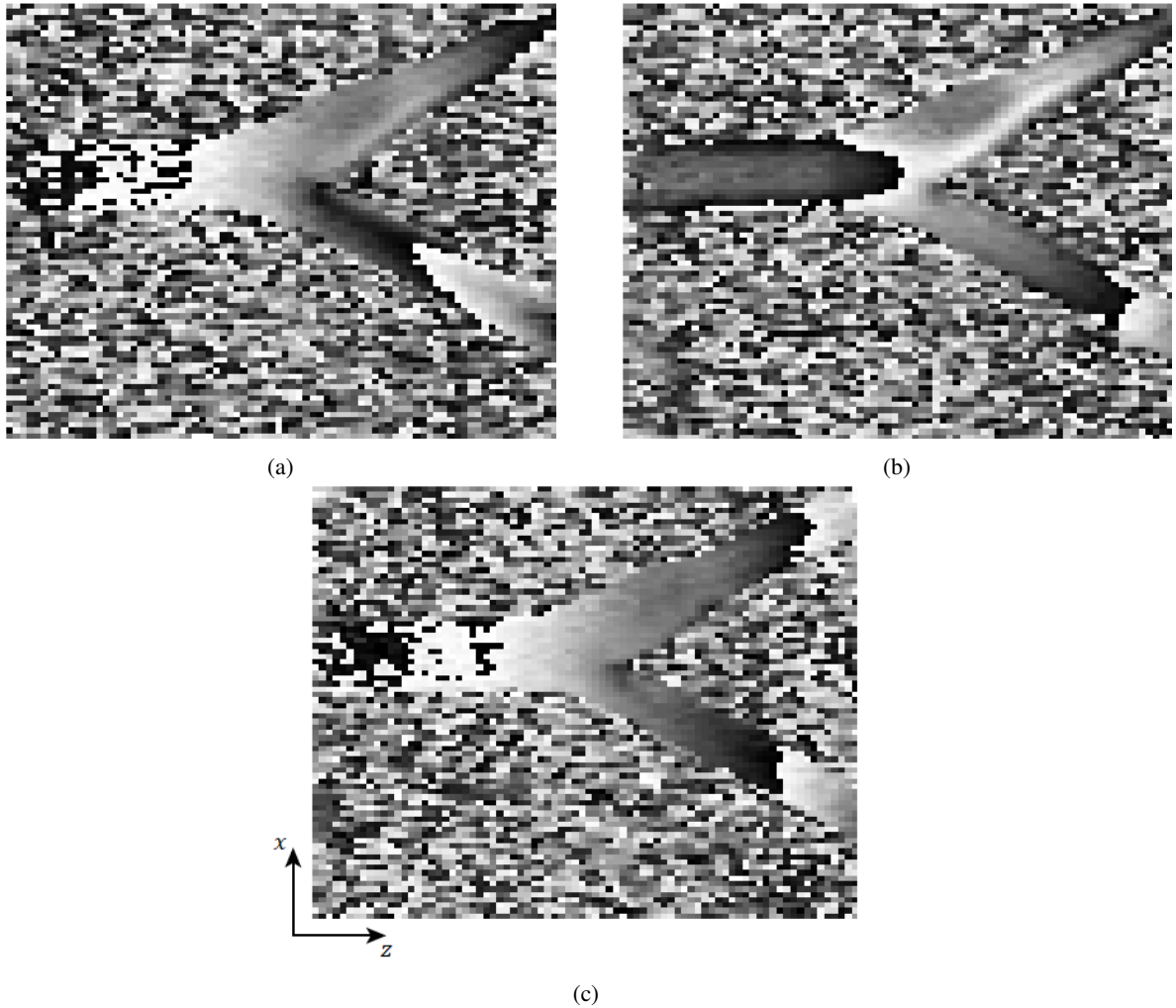


Figura 3.4: Imagens de fase a serem reconstruídas nos experimentos. (a) Imagem de fase referência. (b) Imagem de fase *echo z* - codificação de velocidade no eixo z . (c) Imagem de fase *echo x* - codificação de velocidade no eixo x . As imagens das figuras em 3.2 são obtidas a partir das respectivas diferenças entre as imagens com codificação em dado eixo e a imagem referência.

O uso de tais valores basearam-se, novamente, em testes com os algoritmos desenvolvidos ao se desconsiderar a informação *a priori* via imagem simulada ($\lambda_3 = 0$), determinando, assim, a ordem de grandeza dos pesos envolvidos quando considerada somente a técnica de *CS* (medidas adquiridas e esparsidade do sinal).

A esparsificação do sinal de interesse, por sua vez, se dará a partir do uso da Transformada Discreta de Cossenos e da Transformada Discreta de *Wavelets*. Para esta última, foi definida a decomposição em quatro níveis utilizando-se quatro famílias de filtros distintas, sendo que, para cada família, um único filtro foi escolhido: *Daubechies 1* (ou *Haar*), *Symlets 2*, *Coiflets 1* e *Biorthogonal 1.3*. Ressalta-se que a escolha por tais transformadas e tais famílias/filtros de *Wavelets* foi realizada com o intuito de apenas diversificar as condições de reconstrução dos experimentos realizados, buscando comprovar sua eficácia sob diferentes parâmetros. No caso de comprovada a eficácia e correteza do método, estudos futuros devem ser realizados para que se possa avaliar o desempenho do método proposto sob diferentes técnicas de esparsificação.

Visto que a norma $\|(\bar{\mathbf{x}}_1 \odot \mathbf{x}_2 - \mathbf{M}) \odot \mathbf{m}\|_2^2$, na Eq. (3.1), desempenha no otimizador a função de aproximar o sinal reconstruído àquele utilizado para comparação (\mathbf{M}), será aqui feita uma proposta de teste que vise, simultaneamente, demonstrar a influência de tal norma sobre a imagem final de CF e validar as soluções encontradas analiticamente para a minimização da função objetiva. Dado que não há, na literatura, registros acerca da formulação proposta por este trabalho para a reconstrução de imagens de ressonância magnética por contraste de fase, o principal objetivo aqui será o de comprovar a corretude das soluções advindas do problema de minimização, de forma a legitimar o desempenho do otimizador e dos algoritmos utilizados para tal. Desta forma, optou-se, nos experimentos aqui conduzidos, por adotar \mathbf{M} , em cada reconstrução, como a própria imagem original a ser reconstruída (adquirida em exame de RM com CF). Como, à princípio, não há restrição quanto a imagem a ser inserida como modelo, o uso da imagem de contraste de fase original com tal objetivo proporciona maior acurácia para as análises posteriores aos experimentos, permitindo adotá-la como referência para toda investigação acerca da qualidade objetiva do sinal reconstruído. Ou seja, diferentemente do que ocorreria caso se utilizasse, por exemplo, uma imagem simulada via DFC, a introdução da imagem original como modelo comparativo permite que o otimizador tenha sempre esta como referência, facilitando a identificação de como a introdução desta informação extra contribui para o processo de reconstrução.

Todos os algoritmos utilizados foram implementados no MATLAB (MathWorks, Inc., Natick, MA, EUA) e executados em um computador com processador Intel Core i7 2,5 Ghz com 12 GB de memória RAM utilizando o sistema operacional Windows 10 (Microsoft, Inc., Washington, D.C., EUA). Além disso, para o cálculo das soluções dos sistemas lineares envolvidos no processo de otimização foi utilizado o método do gradiente conjugado preconditionado, nativo do MATLAB.

3.3 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO

Nesta seção serão discutidos os métodos utilizados para se analisar tanto o desempenho do otimizador proposto quanto a qualidade de reconstrução das imagens de interesse, comparando-as com as imagens de contraste de fase originais. As métricas de qualidade objetiva utilizadas para tal análise avaliarão tanto as imagens finais de fluxo, quanto as imagens de fase referentes à cada etapa de aquisição: referência, *echo x* e *echo z*.

3.3.1 Métricas de Qualidade de Imagens

Segue, nas subseções seguintes, uma descrição acerca das métricas utilizadas para a validação do desempenho do otimizador, apresentando a fórmula de cada uma e os critérios envolvidos em sua adoção. A aplicação destas será realizada por algoritmos nativos do MATLAB.

3.3.1.1 Métrica PSNR

A relação sinal-ruído de pico (ou *PSNR*, do inglês *Peak Signal to Noise Ratio*) é baseada no erro quadrático médio (ou *MSE*, do inglês *Mean Squared Error*) e busca determinar a similaridade entre duas imagens a partir da razão entre a máxima intensidade do *pixel* e o nível de distorção entre estas. Experimentos têm mostrado que a *PSNR* apresenta o melhor desempenho, dentre outras métricas objetivas, ao se avaliar a similaridade de imagens ruidosas [59], tornando-a um parâmetro significativo para a análise de reconstrução de imagens.

Apesar de simples de calcular, a *PSNR* pode não coincidir com a percepção humana acerca de qualidade. Estudos previamente realizados [60] demonstraram uma deficiência do *MSE*, e conseqüentemente da *PSNR*, quanto à discriminação de conteúdo estrutural em imagens, visto que vários tipos distintos de degradação aplicados à mesma imagem podem levar a valores iguais de *MSE*. Isso evidencia a necessidade de técnicas de análise complementares, visando conclusões mais precisas acerca do desempenho do método de reconstrução proposto.

Dada duas imagens \mathbf{x} e \mathbf{y} , ambas de tamanho $M \times N$, a *PSNR* entre elas é definida como [61]:

$$PSNR(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(\text{peakval}^2 / MSE(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \quad (3.5)$$

em que

$$MSE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x_{ij} - y_{ij})^2 \quad (3.6)$$

e *peakval* representa o valor máximo possível dentre todos os pixels de ambas as imagens. Neste caso, considerando que as imagens analisadas são de velocidade, então o maior valor permitido é $\text{peakval} = \pi$. Cabe ressaltar que neste contexto as imagens \mathbf{x} e \mathbf{y} correspondem, respectivamente, a imagem de velocidade de referência e a imagem de velocidade obtida a partir dos resultados da otimização da Eq.(3.1).

Finalmente, observa-se que valores de *PSNR* aproximam-se do infinito a medida que o *MSE* tende a zero, indicando uma relação direta entre o valor calculado e a similaridade entre as imagens comparadas.

3.3.1.2 Métrica SSIM

O índice de similaridade estrutural (ou *SSIM*, do inglês *Structural Similarity Index*) resulta da combinação local de estrutura, luminância e contraste, gerando valores associados a pequenos blocos ao longo das imagens – mapa de qualidade. Como é calculada localmente, o resultado final é dado pela média dos valores associado a cada bloco.

Nesta técnica, estruturas são padrões de intensidade de *pixels* identificados numa dada vizinhança após a normalização de luminância e contraste. Dada a boa capacidade do sistema visual humano quanto à percepção de estruturas, os valores fornecidos por esta métrica aproxima-se

do conceito de qualidade subjetiva, consistindo, portanto, em um fator relevante na análise de imagens médicas. A *SSIM*, entre duas imagens \mathbf{x} e \mathbf{y} , pode ser calculada como [61]:

$$SSIM(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.7)$$

tal que

$$\begin{cases} l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \\ s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \end{cases} \quad (3.8)$$

sendo μ_x e μ_y as médias locais, σ_x e σ_y os desvios padrões, σ_{xy} a covariância cruzada e C_1 , C_2 e C_3 as constantes de regularização. As funções l , c e s referem-se, respectivamente, a luminância, contraste e estrutura. Além disso, assim como na *PSNR*, o valor associado a *SSIM* é diretamente relacionada à similaridade entre as imagens em questão. Novamente ressalta-se que neste contexto as imagens \mathbf{x} e \mathbf{y} correspondem, respectivamente, a imagem de velocidade de referência e a imagem de velocidade obtida a partir dos resultados da otimização da Eq.(3.1).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 COMPARAÇÃO DE QUALIDADE OBJETIVA PARA IMAGENS DE CONTRASTE DE FASE

Os gráficos contidos nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 contém informação acerca das métricas de qualidade objetiva aplicadas sobre as imagens de contraste de fase obtidas após a reconstrução das respectivas imagens de fase. Tais gráficos comparam o desempenho do otimizador sob o aspecto das diferentes técnicas de esparsificação utilizadas e em função dos valores atribuídos ao peso λ_3 e ao parâmetro p , referente à norma aplicada. Ressalta-se que, nesta etapa, está sendo avaliada somente a qualidade referente à diferença de fase entre as imagens de fase reconstruídas (contraste de fase). A análise relacionada às imagens de fase (referência, *echo z* e *echo x*), de fato reconstruídas na etapa de testes, será feita na seção seguinte.

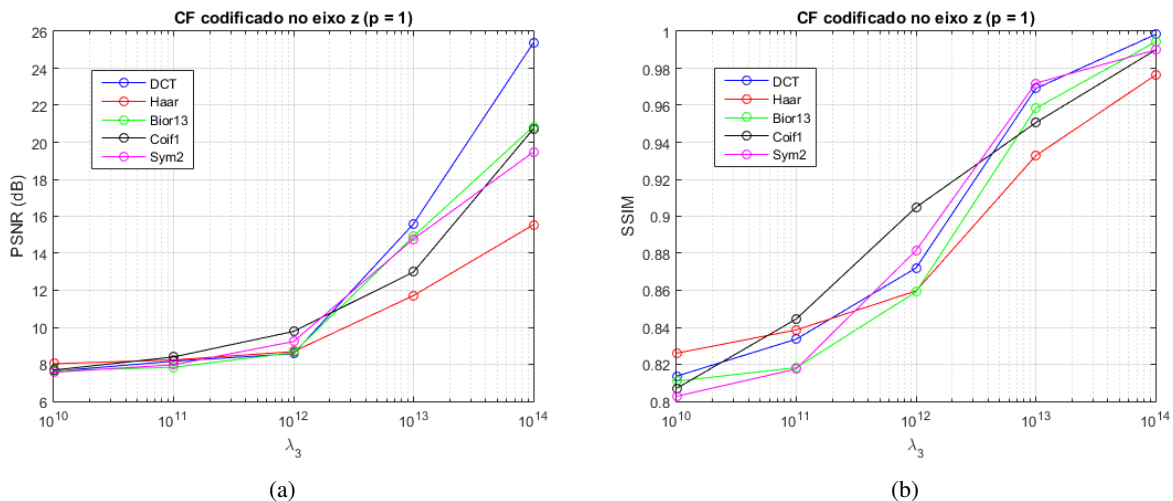
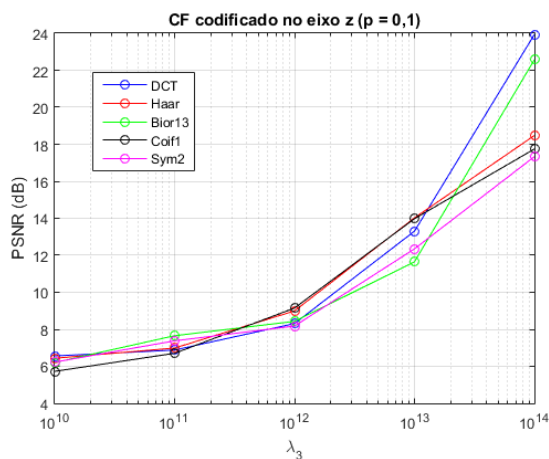


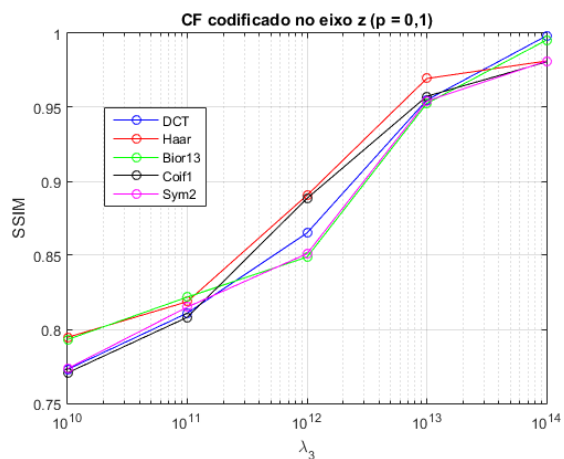
Figura 4.1: Qualidade da imagem de contraste de fase - velocidade no eixo z - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.

Analisados os gráficos tanto de *PSNR* quanto de *SSIM*, o primeiro ponto a se destacar consiste no crescente aumento da qualidade ao se incrementar o peso – λ_3 – referente à comparação com a imagem modelo. Independentemente da transformada esparsificante utilizada e da norma adotada, nota-se que o otimizador cumpriu o que de fato era esperado, garantindo, conforme aumento do peso, maior proximidade entre a imagem final de contraste de fase e a imagem escolhida como modelo, visto que esta também foi utilizada como referência para as métricas de qualidade.

A partir do conjunto de parâmetros escolhidos para análise, e analisando somente as imagens de contraste de fase, não foi possível determinar qual norma obteve melhor desempenho. Para as



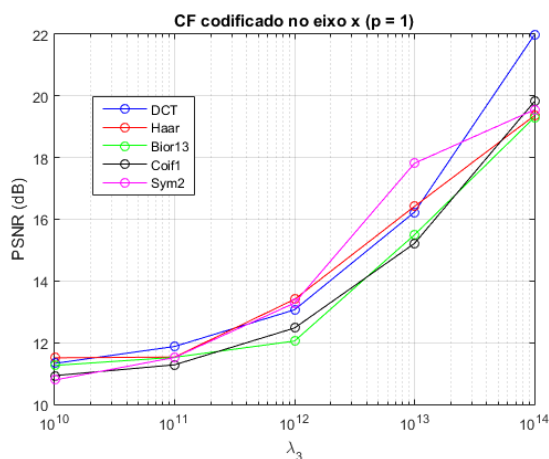
(a)



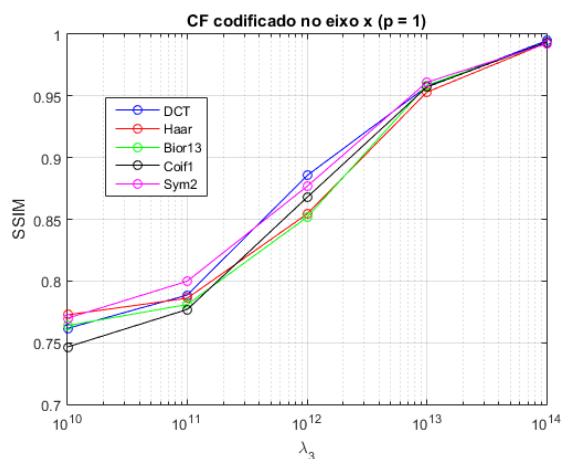
(b)

Figura 4.2: Qualidade da imagem de contraste de fase - velocidade no eixo z - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 0, 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.

referidas imagens, ambas as normas adotadas apresentaram desempenho similar, variando apenas, ainda que por quantidade relativamente baixa, a performance de cada transformada/filtro para cada valor do peso associado à imagem modelo e para cada eixo no qual a velocidade foi codificada. Para as condições adotadas na Figura 4.4, por exemplo, percebe-se um ligeiro destaque para a *DCT*, no intervalo de $\lambda_3 = 10^{12}$ a $\lambda_3 = 10^{14}$. A mesma eficiência não pode ser evidenciada, entretanto, se analisada sob a ótica adotada na Figura 4.3.



(a)



(b)

Figura 4.3: Qualidade das imagens de contraste de fase - velocidade no eixo x - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.

Um aspecto importante a ser considerado nestas análises consiste no fato de ter se utilizado, previamente à aplicação das métricas, uma máscara para remoção do ruído externo à área de quantificação de fluxo. Em virtude de o fantoma não apresentar núcleos de hidrogênio no volume externo aos tubos (artérias), os cálculos das imagens de contraste de fase inserem, na região ex-

terna ao escoamento, ruído de característica aleatória. A eliminação de tal ruído, após o cálculo da diferença de fase entre as imagens de fase, não interfere, entretanto, na análise do desempenho e funcionalidade do otimizador proposto, visto que não há influência sobre a região de interesse. O uso de tal máscara tem como único propósito garantir que as métricas sejam aplicadas exclusivamente sobre a porção da imagem referente à detecção do padrão de escoamento, impedindo que a análise objetiva seja comprometida.

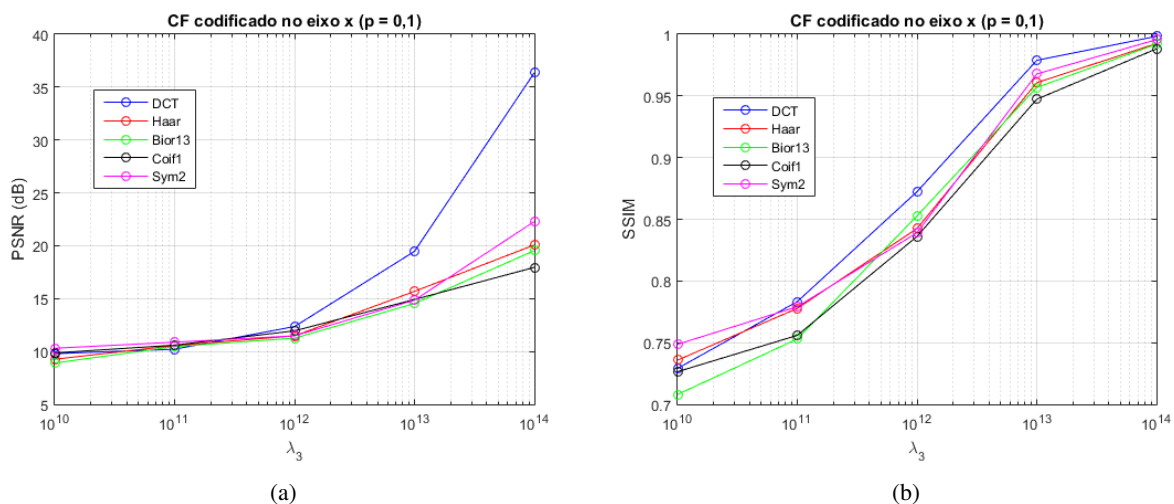


Figura 4.4: Qualidade das imagens de contraste de fase - velocidade no eixo x - em função do peso λ_3 . Reconstrução com $p = 0, 1$. (a) PSNR. (b) SSIM.

As Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam as imagens de contraste de fase referentes a alguns dos testes aqui executados. Nas Figuras 4.5 e 4.6 são expostas as imagens de velocidade codificadas nos eixos z e x , respectivamente, resultantes das reconstruções via DCT e $p = 1$. Nas Figuras 4.7 e 4.8, por sua vez, as reconstruções se deram utilizando a DWT com filtro $Haar$ e $p = 0, 1$. Note como a progressão do parâmetro λ_3 torna as imagens mais próximas às originais, exibidas na Figura 3.2.

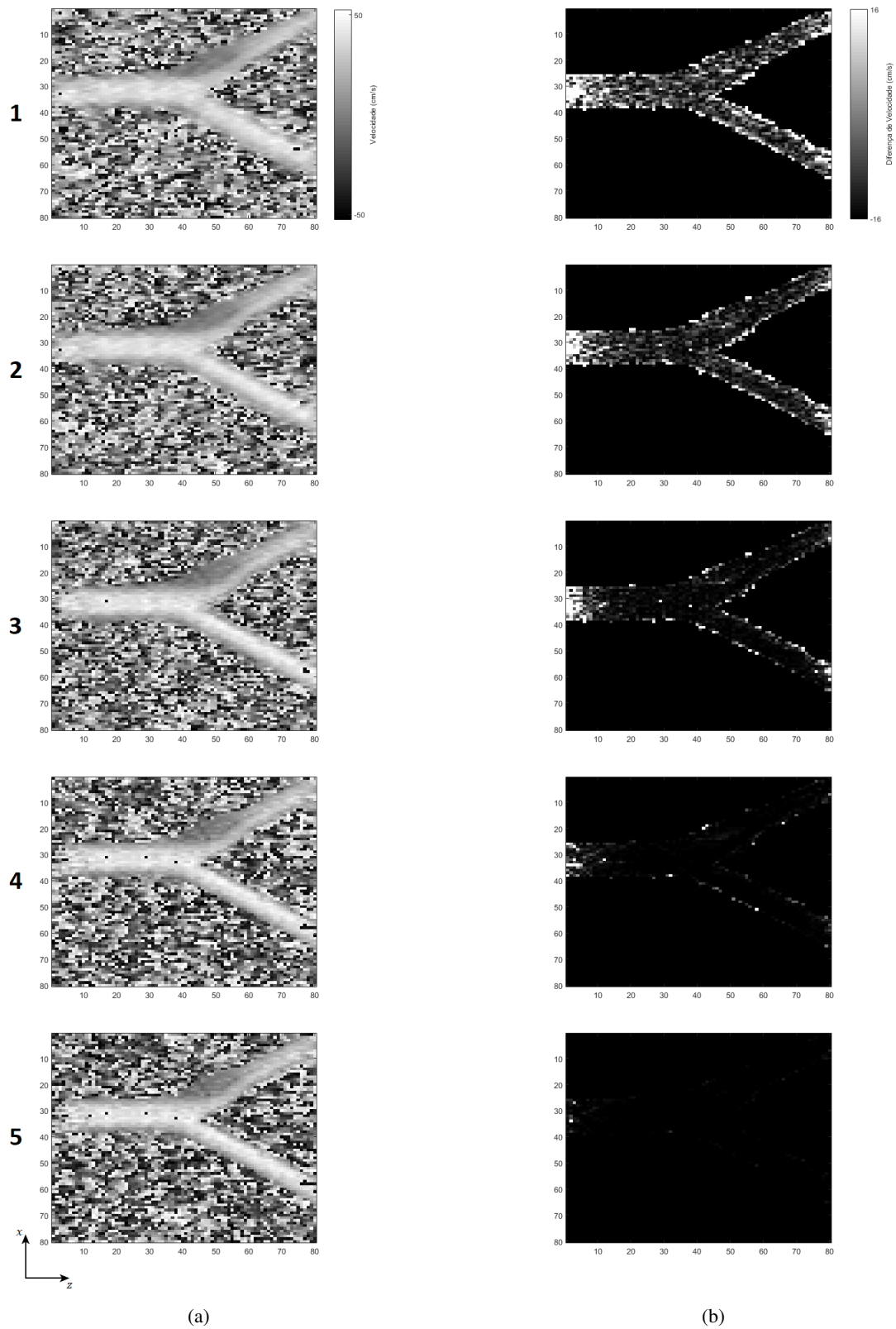


Figura 4.5: Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo z em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando DCT e $p = 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2a. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14} .

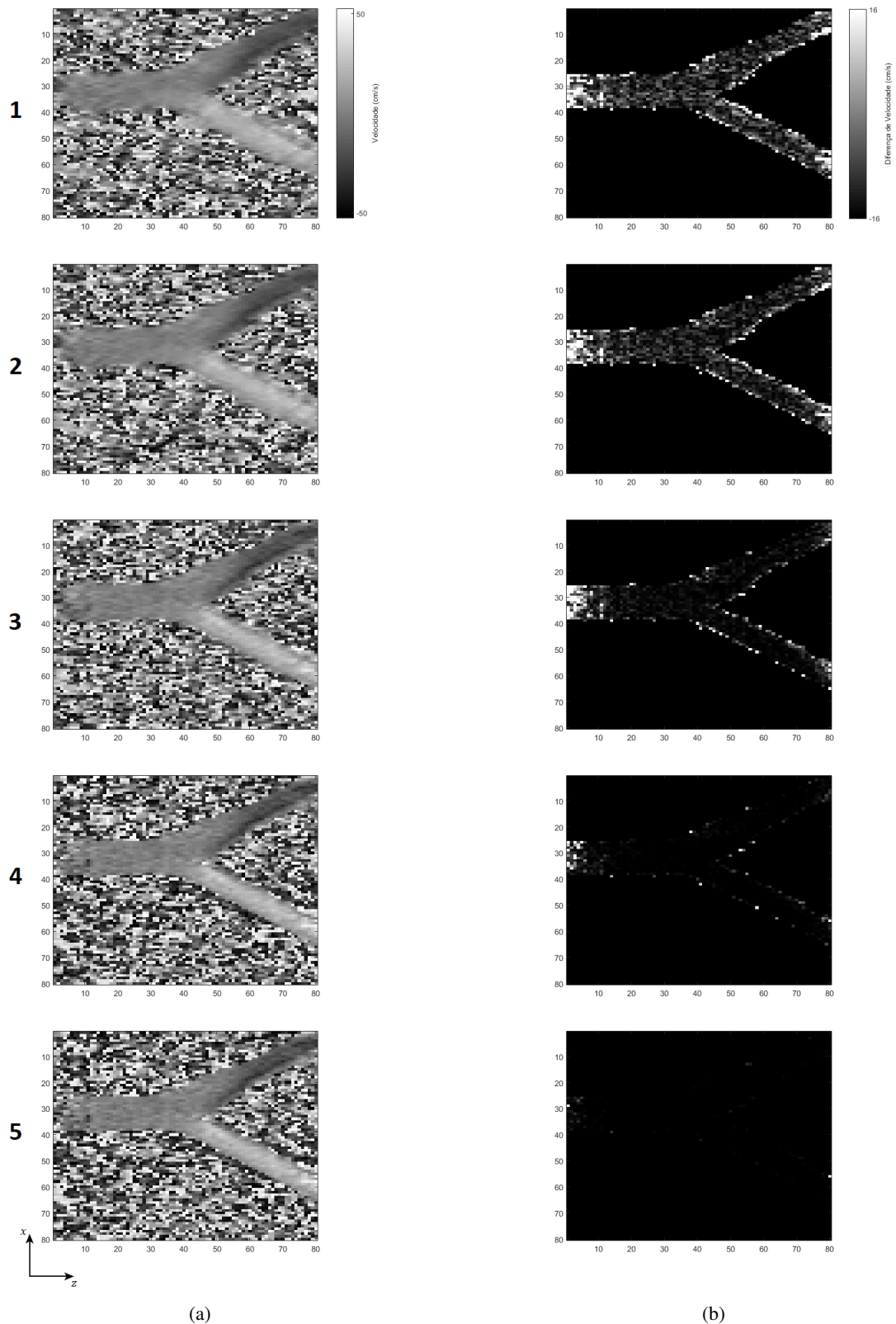


Figura 4.6: Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo x em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando DCT e $p = 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2b. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14} .

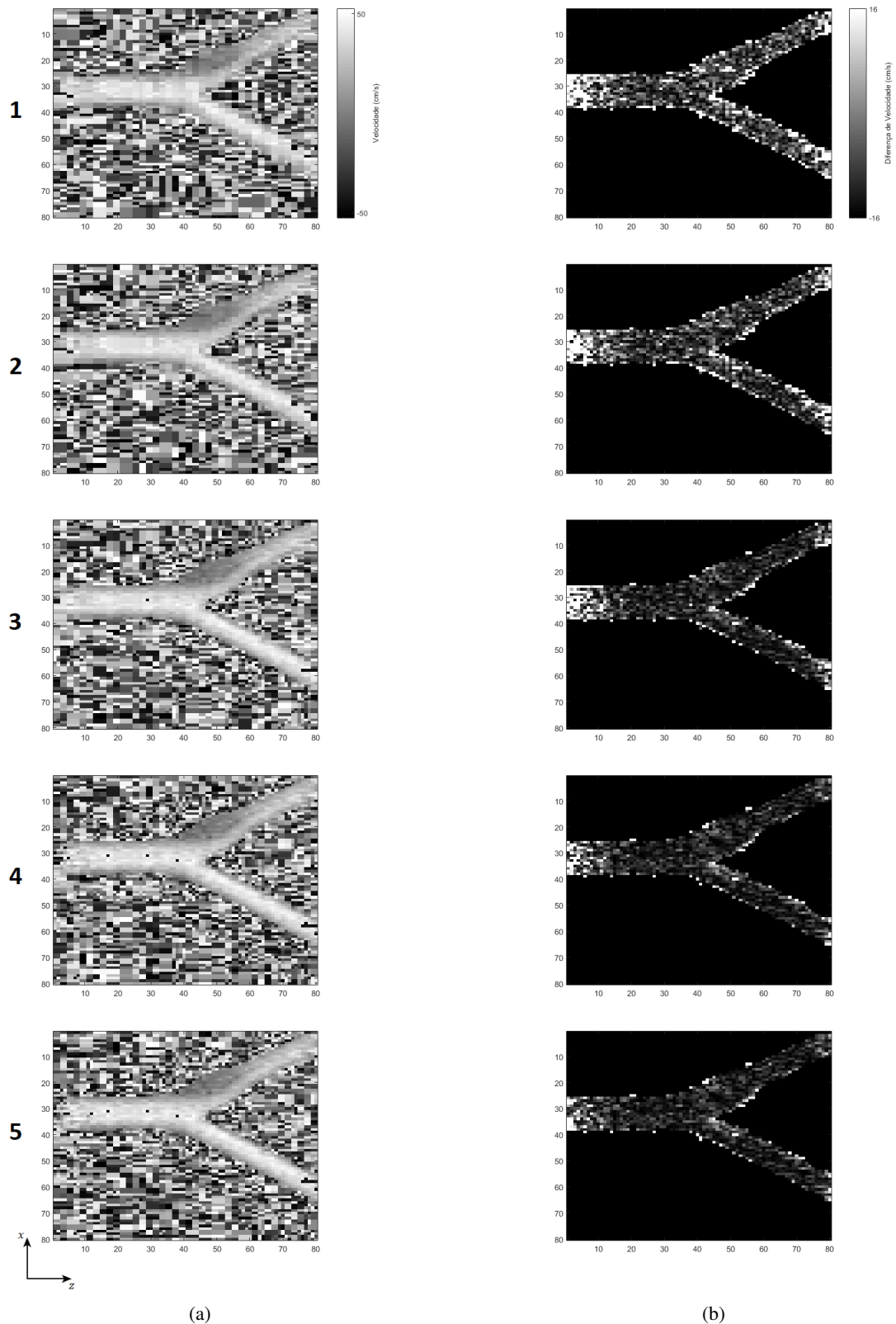


Figura 4.7: Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo z em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando *DWT* com filtro *Haar* e $p = 0, 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2a. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14} .

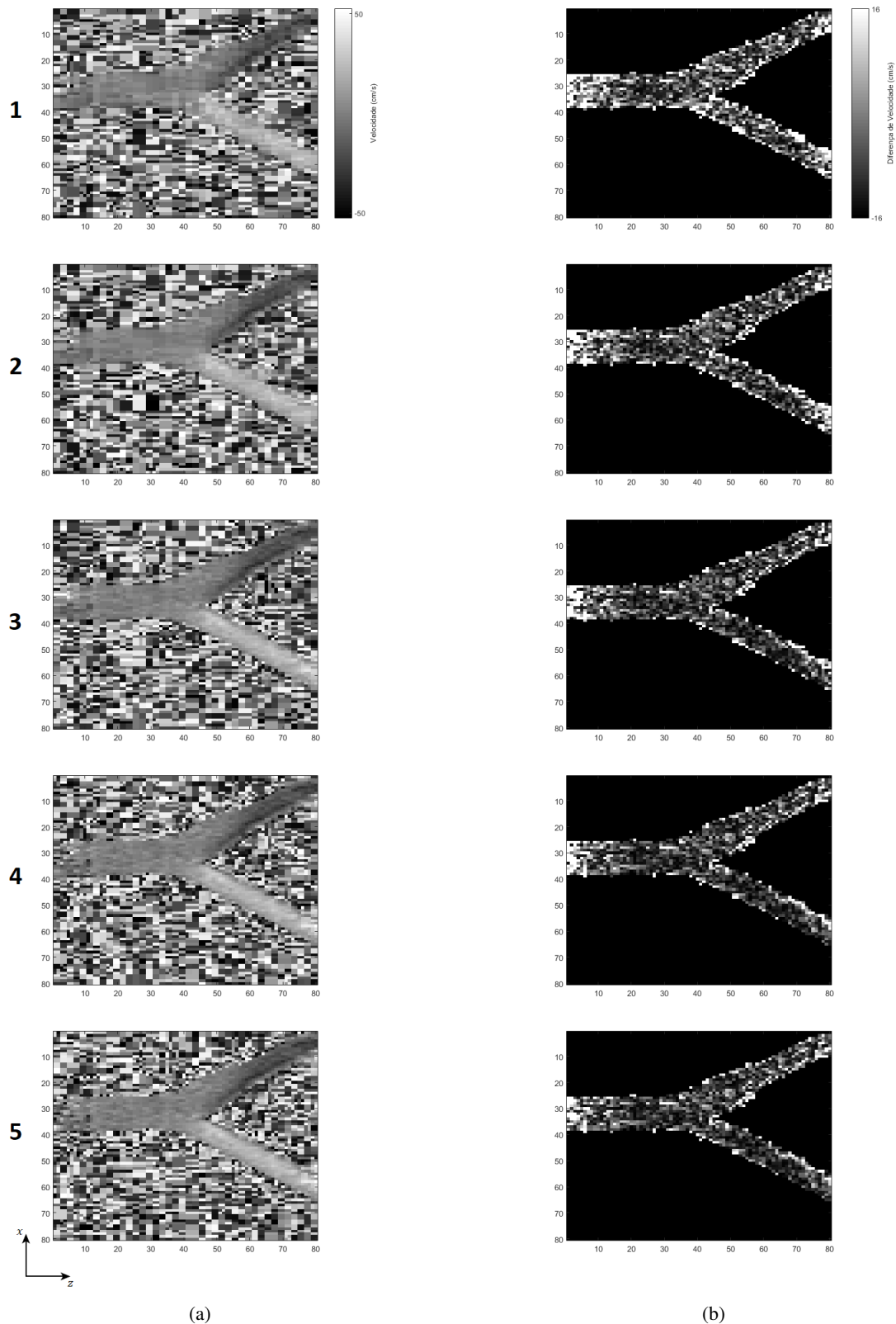


Figura 4.8: Imagens de contraste de fase com codificação de velocidade no eixo x em função do peso λ_3 . Obtidas a partir da reconstrução das imagens de fase utilizando *DWT* com filtro *Haar* e $p = 0, 1$. (a) Imagens de CF reconstruídas. (b) Erro absoluto entre a correspondente imagem reconstruída e a imagem original 3.2b. Linhas de 1 a 5 representam, respectivamente, λ_3 igual a: 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} , 10^{13} e 10^{14} .

4.2 COMPARAÇÃO DE QUALIDADE OBJETIVA PARA IMAGENS DE FASE

As Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 mostram os resultados das métricas aplicadas sobre as imagens de fase obtidas com o algoritmo de reconstrução. Visto que a introdução do termo extra (imagem modelo) ao processo de reconstrução diz respeito a uma restrição aplicada sobre uma operação entre as imagens \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , dada por $\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2$, faz-se necessária uma análise sobre como tal minimização afeta as imagens de fase individualmente. Novamente, as métricas de qualidade objetiva foram aplicadas sobre a fase de tais imagens, visto que esta é a informação relevante para o caso estudado.

Tabela 4.1: Qualidade objetiva (PSNR) das imagens de fase reconstruídas para $p = 1$ em função do parâmetro λ_3 .

Transformada/Filtro Esparsificante	Imagem de Fase	PSNR (dB)				
		$\lambda_3 = 10^{10}$	$\lambda_3 = 10^{11}$	$\lambda_3 = 10^{12}$	$\lambda_3 = 10^{13}$	$\lambda_3 = 10^{14}$
DCT	<i>referencia</i>	10,8586	11,0559	11,5782	11,1369	11,2010
	<i>echo z</i>	14,5863	15,3837	15,6357	14,8355	14,6830
	<i>echo x</i>	12,0902	12,0473	12,3606	12,0503	12,9316
Haar	<i>referencia</i>	11,1441	11,0263	10,9036	10,7657	10,7874
	<i>echo z</i>	15,3973	15,3973	15,3973	15,4639	15,4742
	<i>echo x</i>	11,4056	11,4056	11,4056	11,4056	11,3703
Coif1	<i>referencia</i>	11,2283	11,3622	11,9562	11,3769	11,2111
	<i>echo z</i>	14,8910	15,6997	16,0674	15,1856	15,0447
	<i>echo x</i>	11,4888	11,6697	12,3909	11,6590	11,4593
Sym2	<i>referencia</i>	10,8276	11,3292	11,3647	11,2351	11,4122
	<i>echo z</i>	15,2096	15,2482	16,4533	15,2001	15,0945
	<i>echo x</i>	11,7442	11,9590	12,1599	11,9591	11,8645
Bior1.3	<i>referencia</i>	11,1341	11,1333	10,7863	10,8692	10,9323
	<i>echo z</i>	14,3165	14,3165	14,3165	14,3537	14,3565
	<i>echo x</i>	11,5848	11,5848	11,5848	11,5835	11,4457

A partir dos resultados obtidos tanto com a *PSNR* quanto com a *SSIM*, percebe-se que, diferentemente, do observado nos testes sobre as imagens de contraste de fase, não foi possível identificar a mesma relação entre os índices de qualidade e os valores atribuídos ao peso λ_3 . Notou-se que, apesar de o contraste entre as imagens ter se aproximado da imagem modelo com o aumento do referido peso, o mesmo comportamento não ocorreu com as imagens de fase individualmente.

Observando-se as tabelas e atentando-se para a progressão dos índices de qualidade, percebe-se, inclusive, que há uma tendência de queda destes valores a partir de determinado valor de λ_3 . À

Tabela 4.2: Qualidade objetiva (PSNR) das imagens de fase reconstruídas para $p = 0, 1$ em função do parâmetro λ_3 .

Transformada/Filtro Esparsificante	Imagem de Fase	PSNR (dB)				
		$\lambda_3 = 10^{10}$	$\lambda_3 = 10^{11}$	$\lambda_3 = 10^{12}$	$\lambda_3 = 10^{13}$	$\lambda_3 = 10^{14}$
DCT	<i>referencia</i>	10,5184	10,1849	10,2039	10,2694	10,6045
	<i>echo z</i>	14,1920	14,4523	14,5057	14,1228	14,1759
	<i>echo x</i>	10,8733	10,9098	11,4090	10,8446	10,9167
Haar	<i>referencia</i>	9,9644	10,1132	10,5342	10,6260	10,8182
	<i>echo z</i>	14,4219	14,9615	14,7273	14,3338	14,3338
	<i>echo x</i>	11,1425	10,9668	11,1876	11,1003	11,1386
Coif1	<i>referencia</i>	10,9339	10,8424	11,2605	11,2121	11,2266
	<i>echo z</i>	14,1734	14,3249	14,3012	13,9850	14,0584
	<i>echo x</i>	10,7438	11,0370	11,0912	10,7263	10,7320
Sym2	<i>referencia</i>	10,7286	10,8940	10,4302	10,4512	10,6876
	<i>echo z</i>	14,6193	14,6476	14,5290	14,4413	14,4167
	<i>echo x</i>	10,7827	11,0887	10,9024	10,6691	10,5640
Bior1.3	<i>referencia</i>	10,3957	10,4398	10,4634	10,3691	10,5452
	<i>echo z</i>	14,3162	14,5335	14,3172	14,1101	14,2476
	<i>echo x</i>	10,3552	10,5537	10,4597	10,2316	10,2354

medida que a informação relativa à imagem modelo torna-se relevante no processo de otimização, há, de forma geral, aumento dos índices de qualidade para as imagens referência, *echo z* e *echo x*. A partir de determinado valor, entretanto, há uma inversão de padrão e pode ser percebido o declínio nos índices de qualidade.

Esse comportamento dos valores de ambas as métricas pode ser explicado com base na própria restrição adicionada por este trabalho ao problema de CS. Ao se inserir, no problema de otimização, a norma vetorial $\|(\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M}) \odot \mathbf{m}\|_2^2$, não se introduz uma regra específica para as imagens \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , mas sim para a imagem de contraste de fase resultante destas. A partir do momento em que o peso referente a esta norma a torna predominante sobre as demais informações inseridas no algoritmo de reconstrução, as medidas \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 , obtidas na etapa de aquisição e específicas de cada imagem de fase, e a informação de esparsidade perdem relevância para o otimizador. Desta forma, o algoritmo se concentrará em apenas calcular \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 tais que o contraste de fase resulte na imagem modelo, o que não garante que as imagens de fase tenham informações relevantes quando analisadas individualmente.

Este fenômeno pode ser observado, ainda que sutilmente, tomando como exemplo a métrica de *SSIM* aplicada aos resultados obtidos com reconstrução para $p = 1$, mostrado na Tabela 4.3. Independentemente da transformada/filtro esparsificante, é possível notar o crescimento do índi-

Tabela 4.3: Qualidade objetiva (SSIM) das imagens de fase reconstruídas para $p = 1$ em função do parâmetro λ_3 .

Transformada/Filtro Esparsificante	Imagem de Fase	SSIM				
		$\lambda_3 = 10^{10}$	$\lambda_3 = 10^{11}$	$\lambda_3 = 10^{12}$	$\lambda_3 = 10^{13}$	$\lambda_3 = 10^{14}$
DCT	<i>referencia</i>	0,7744	0,7938	0,8119	0,7642	0,7600
	<i>echo z</i>	0,7802	0,8058	0,8391	0,7928	0,7781
	<i>echo x</i>	0,8224	0,8247	0,8346	0,8247	0,8201
Haar	<i>referencia</i>	0,7767	0,7945	0,8007	0,7814	0,7761
	<i>echo z</i>	0,8127	0,8127	0,8127	0,8181	0,8175
	<i>echo x</i>	0,8041	0,8041	0,8041	0,8041	0,8043
Coif1	<i>referencia</i>	0,7889	0,8050	0,8190	0,7999	0,7757
	<i>echo z</i>	0,7940	0,8228	0,8341	0,8020	0,7938
	<i>echo x</i>	0,7998	0,8071	0,8220	0,8025	0,7954
Sym2	<i>referencia</i>	0,7775	0,7911	0,8111	0,7954	0,7886
	<i>echo z</i>	0,8009	0,8100	0,8445	0,8023	0,7989
	<i>echo x</i>	0,8066	0,8146	0,8229	0,8145	0,8031
Bior1.3	<i>referencia</i>	0,7756	0,7785	0,7805	0,7634	0,7696
	<i>echo z</i>	0,7954	0,7954	0,7954	0,7922	0,7962
	<i>echo x</i>	0,7962	0,7962	0,7962	0,7969	0,7922

ces de qualidade até o valor de $\lambda_3 = 10^{12}$, a partir do qual estes passam a decrescer.

A percepção clara acerca de tal alteração no processo de reconstrução (desconsiderando as amostras coletadas via *scanner* e o critério de esparsidade), entretanto, exige, na prática, uma discrepância entre os pesos ainda maior do que a apresentada nos testes realizados. Como pode ser observado, reconstruções para $\lambda_3 = 10^{14}$ ainda geram valores de *PSNR* e *SSIM* próximos aos obtidos em ponderações distintas, indicando, sob tais condições, a manutenção da qualidade das imagens de fase perante o crescimento dos índices das imagens de contraste de fase.

Da mesma forma como constatado previamente, os testes não foram conclusivos acerca da eficiência dos métodos de esparsificação utilizados e das normas de minimização atribuídas ao parâmetro p . Os experimentos aqui conduzidos comprovaram como o otimizador proposto da fato integra informações de diferentes naturezas, permitindo a imagem utilizada com modelo influenciar diretamente o resultado final do processo de reconstrução.

Tabela 4.4: Qualidade objetiva (SSIM) das imagens de fase reconstruídas para $p = 0, 1$ em função do parâmetro λ_3 .

Transformada/Filtro Esparsificante	Imagem de Fase	SSIM				
		$\lambda_3 = 10^{10}$	$\lambda_3 = 10^{11}$	$\lambda_3 = 10^{12}$	$\lambda_3 = 10^{13}$	$\lambda_3 = 10^{14}$
DCT	<i>referencia</i>	0,7493	0,7655	0,7420	0,7232	0,7310
	<i>echo z</i>	0,7694	0,7737	0,7789	0,7673	0,7680
	<i>echo x</i>	0,7901	0,7936	0,8021	0,7923	0,7911
Haar	<i>referencia</i>	0,7377	0,7603	0,7644	0,7518	0,7533
	<i>echo z</i>	0,7835	0,8029	0,7985	0,7850	0,7844
	<i>echo x</i>	0,8043	0,8077	0,8063	0,8010	0,8028
Coif1	<i>referencia</i>	0,7616	0,7801	0,7952	0,7799	0,7761
	<i>echo z</i>	0,7748	0,7786	0,7817	0,7732	0,7727
	<i>echo x</i>	0,7739	0,7823	0,7843	0,7704	0,7660
Sym2	<i>referencia</i>	0,7651	0,7988	0,7790	0,7594	0,7610
	<i>echo z</i>	0,7811	0,7869	0,7817	0,7769	0,7769
	<i>echo x</i>	0,7665	0,7701	0,7729	0,7634	0,7618
Bior1.3	<i>referencia</i>	0,7484	0,7608	0,7635	0,7542	0,7476
	<i>echo z</i>	0,7851	0,7914	0,7872	0,7814	0,7825
	<i>echo x</i>	0,7635	0,7665	0,7681	0,7573	0,7572

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho se propôs a desenvolver um método de reconstrução de imagens de RM de fluxo por contraste de fase baseado tanto em *Compressive Sensing* quanto em imagens de velocidade calculadas por técnica distinta, definidas aqui como informação *a priori*. A partir de algoritmos convencionais de CS, a hipótese inicial era a de possibilidade de integração de técnicas consideradas mutuamente excludentes pela literatura, visando ampliar o conjunto de informações *a priori* relativas ao padrão de escoamento de interesse. Foram apresentados, nos primeiros capítulos, o contexto acerca da necessidade de quantificação de padrões de escoamento e a motivação para realização deste estudo sobre a área, expondo trabalhos prévios utilizados como base para a elaboração do sistema de reconstrução aqui proposto.

No capítulo de Metodologia, foi formulado o problema de reconstrução, englobando a hipótese de esparsidade e as medidas simuladas inicialmente levantadas, e apresentados tanto as soluções calculadas analiticamente para o problema de otimização quanto os algoritmos responsáveis pela aplicação destas. Foi proposto, desta forma, que as imagens finais obtidas por tais algoritmos fossem baseadas em um conjunto de informações disponíveis, constituído por: medidas extraídas pelo *scanner* de RM, conhecimento de domínios capazes de representar os sinais de interesse de forma esparsa e, por fim, imagens calculadas previamente via métodos de quantificação de escoamentos, como a DFC.

Realizados os testes propostos, sob as condições definidas, e aplicadas as métricas escolhidas para a análise da qualidade objetiva das imagens, foi possível confirmar a validade das soluções - derivadas do problema de otimização da função objetivo - encontradas para o otimizador. Apesar de os testes terem sido realizados sob a adoção da imagem original de velocidade como imagem modelo inserida no processo de otimização, foi possível notar como a imagem reconstruída se aproximou da imagem modelo à medida em que se incrementou, no otimizador, o peso referente à comparação entre tais imagens. Independentemente da escolha da norma e da transformada esparsificante utilizada, tanto a *PSNR* quanto a *SSIM* indicaram melhora na qualidade das imagens de contraste de fase reconstruídas, quando comparadas às originais, ao se incrementar o valor do referente peso.

Vale ressaltar que, conforme discutido anteriormente, o método proposto é válido enquanto balanceadas as influências de cada norma da função objetivo a ser minimizada. Ainda de acordo com as métricas adotadas, notou-se a degradação das imagens de fase - referência, *echo x* e *echo z* - com o aumento indiscriminado do referido peso sobre os demais. À medida que se atenuou a influência das medidas adquiridas via exame e da informação acerca da esparsidade dos sinais, as imagens de fase passaram a perder informação acerca das etapas intermediárias de aquisição, perdendo relevância para uma análise fora do contexto de contraste de fase.

O comprovado funcionamento do otimizador proposto neste trabalho expande o universo de

possibilidades de pesquisas e trabalhos na área de integração entre imageamento de fluxo por ressonância magnética e técnicas alternativas de quantificação de escoamento. Dentre os tópicos que não foram abordados neste trabalho e que servem de sugestão para futuros trabalhos encontram-se:

1. Determinar, de forma mais detalhada, o desempenho de técnicas de esparsificação de sinais, inclusive as não abordadas neste trabalho, sob diferentes parâmetros de reconstrução. Identificar, desta forma, as condições sob as quais o proposto algoritmo apresenta melhores resultados, definindo a norma, o método de esparsificação e o conjunto de valores para os pesos que otimizam a qualidade de reconstrução para dado problema;
2. Realizar experimentos e modificações no algoritmo proposto com o intuito de reduzir a quantidade de amostras do espaço k necessárias para a reconstrução, sob dada tolerância, das imagens de fluxo por contraste de fase;
3. Realizar testes com o método de reconstrução proposto inserindo-se, como imagem modelo contendo informação *a priori* de velocidade, imagens simuladas via DFC, visando expandir a aplicabilidade do método.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 BROWN, R. W.; CHENG, Y.-C. N.; HAACKE, E. M.; THOMPSON, M. R.; VENKATESAN, R. *Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.
- 2 MAZZOLA, A. A. Ressonância magnética: princípios de formação da imagem e aplicações em imagem funcional. *Revista Brasileira de Física Médica*, v. 3, n. 1, p. 117–129, 2009.
- 3 RISPOLI, V. d. C. *Simulações computacionais do escoamento cardiovascular guiadas por ressonância magnética*. 111 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2014.
- 4 World Health Organization. *World health statistics 2018: monitoring health for the SDGs, sustainable development goals*. 2018. Licence: CC BY-NC-SA 3.0 IGO.
- 5 CANCELA, D. M. G. O acidente vascular cerebral—classificação, principais consequências e reabilitação. *O portal do Psicólogo, Portugal*, p. 2–18, 2008.
- 6 JENSEN, J. A. Medical ultrasound imaging. *Progress in biophysics and molecular biology*, Elsevier, v. 93, n. 1-3, p. 153–165, 2007.
- 7 QAMAR, M.; READ, A.; SKIDMORE, R.; EVANS, J.; WELLS, P. Transcutaneous doppler ultrasound measurement of superior mesenteric artery blood flow in man. *Gut*, BMJ Publishing Group, v. 27, n. 1, p. 100–105, 1986.
- 8 BRYAN, R. N. *Introduction to the science of Medical Imaging*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- 9 WESTBROOK, C. *MRI at a Glance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016.
- 10 PELC, N. J.; HERFKENS, R. J.; SHIMAKAWA, A.; ENZMANN, D. R. et al. Phase contrast cine magnetic resonance imaging. *Magnetic resonance quarterly*, v. 7, n. 4, p. 229–254, 1991.
- 11 CLARKE, G. D.; HUNDLEY, W. G.; MCCOLL, R. W.; ECKELS, R.; CHANEY, D. S. C.; LI, H.-F.; PESHOCK, R. M. Velocity-encoded, phase-difference cine mri measurements of coronary artery flow: Dependence of flow accuracy on the number of cine frames. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Wiley Online Library, v. 6, n. 5, p. 733–742, 1996.
- 12 MAN, L.-C.; PAULY, J. M.; NISHIMURA, D. G.; MACOVSKI, A. Nonsubtractive spiral phase contrast velocity imaging. *Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, Wiley Online Library, v. 42, n. 4, p. 704–713, 1999.
- 13 GONZALEZ, E. G.; CARVALHO, J. L. Does phase contrast MRI provide the mean velocity of the spins within a voxel? In: CITESEER. *Proceedings of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*. [S.l.], 2014. v. 22, p. 2480.
- 14 TANG, C.; BLATTER, D. D.; PARKER, D. L. Accuracy of phase-contrast flow measurements in the presence of partial-volume effects. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 377–385, 1993.
- 15 LUSTIG, M.; DONOHO, D. L.; SANTOS, J. M.; PAULY, J. M. Compressed sensing MRI. *IEEE signal processing magazine*, v. 25, n. 2, p. 72, 2008.

- 16 JOSEPH, P. M. Sampling errors in projection reconstruction MRI. *Magnetic resonance in medicine*, Wiley Online Library, v. 40, n. 3, p. 460–466, 1998.
- 17 EDWARDS, J. Focus on compressive sensing [special reports]. *IEEE signal processing magazine*, IEEE, v. 28, n. 2, p. 11–13, 2011.
- 18 CANDÈS, E.; ROMBERG, J.; TAO, T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *arXiv preprint math/0409186*, 2004.
- 19 BARANIUK, R. G. Compressive sensing. *IEEE signal processing magazine*, v. 24, n. 4, 2007.
- 20 FOUCART, S.; RAUHUT, H. An invitation to compressive sensing. In: *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. New York, NY: Springer New York, 2013. p. 1–39.
- 21 MIOSSO, C. J.; BORRIES, R. V.; PIERLUISSI, J. H. Compressive sensing method for improved reconstruction of gradient-sparse magnetic resonance images. In: *Proceedings of the 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. [S.l.]: IEEE Press, 2009. p. 799–806.
- 22 MIOSSO, C. J. *Compressive sensing with prior information applied to magnetic resonance imaging*. Tese (Doutorado) — Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at El Paso, El Paso, TX, EUA, 2010.
- 23 LAUTERBUR, P. C.; LIANG, Z.-P. Magnetic resonance imaging with a priori constraints: possibilities and limitations. In: IEEE. *Proceedings of 18th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. [S.l.], 1996. v. 5, p. 2170–2171.
- 24 WU, J.; LIU, F.; JIAO, L.; WANG, X. Multivariate pursuit image reconstruction using prior information beyond sparsity. *Signal Processing*, Elsevier, v. 93, n. 6, p. 1662–1672, 2013.
- 25 BORRIES, R. V.; MIOSSO, C. J.; POTES, C. Compressed sensing using prior information. In: IEEE. *2007 2nd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*. [S.l.], 2007. p. 121–124.
- 26 MIOSSO, C. J.; BORRIES, R. von; ARGAEZ, M.; VELÁZQUEZ, L.; QUINTERO, C.; POTES, C. Compressive sensing reconstruction with prior information by iteratively reweighted least-squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 57, n. 6, p. 2424–2431, 2009.
- 27 LEI, M.; KLEINSTREUER, C.; TRUSKEY, G. Numerical investigation and prediction of atherogenic sites in branching arteries. *Journal of biomechanical engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 117, n. 3, p. 350–357, 1995.
- 28 STEINMAN, D. A. Image-based computational fluid dynamics: a new paradigm for monitoring hemodynamics and atherosclerosis. *Current Drug Targets-Cardiovascular & Hematological Disorders*, Bentham Science Publishers, v. 4, n. 2, p. 183–197, 2004.
- 29 MARSHALL, I.; ZHAO, S.; PAPATHANASOPOULOU, P.; HOSKINS, P.; XU, X. Y. MRI and CFD studies of pulsatile flow in healthy and stenosed carotid bifurcation models. *Journal of biomechanics*, Elsevier, v. 37, n. 5, p. 679–687, 2004.
- 30 STEINMAN, D. A.; TAYLOR, C. A. Flow imaging and computing: large artery hemodynamics. *Annals of biomedical engineering*, Springer, v. 33, n. 12, p. 1704–1709, 2005.
- 31 BOUSSEL, L.; RAYZ, V.; MARTIN, A.; ACEVEDO-BOLTON, G.; LAWTON, M. T.; HIGASHIDA, R.; SMITH, W. S.; YOUNG, W. L.; SALONER, D. Phase-contrast magnetic resonance imaging measurements in intracranial aneurysms in vivo of flow patterns, velocity fields, and wall shear stress: comparison with computational fluid dynamics. *Magnetic Resonance in Medicine: An Official*

Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine, Wiley Online Library, v. 61, n. 2, p. 409–417, 2009.

32 CANSTEIN, C.; CACHOT, P.; FAUST, A.; STALDER, A.; BOCK, J.; FRYDRYCHOWICZ, A.; KÜFFER, J.; HENNIG, J.; MARKL, M. 3D MR flow analysis in realistic rapid-prototyping model systems of the thoracic aorta: comparison with in vivo data and computational fluid dynamics in identical vessel geometries. *Magnetic Resonance in Medicine: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, Wiley Online Library, v. 59, n. 3, p. 535–546, 2008.

33 LONG, Q.; XU, X. Y.; ARIFF, B.; THOM, S. A.; HUGHES, A. D.; STANTON, A. V. Reconstruction of blood flow patterns in a human carotid bifurcation: a combined CFD and MRI study. *Journal of Magnetic Resonance Imaging: An Official Journal of the International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 299–311, 2000.

34 BUONOCORE, M. H. Algorithms for improving calculated streamlines in 3D phase contrast angiography. *Magnetic resonance in medicine*, Wiley Online Library, v. 31, n. 1, p. 22–30, 1994.

35 SONG, S. M.; NAPEL, S.; GLOVER, G. H.; PELC, N. J. Noise reduction in three-dimensional phase-contrast MR velocity measurements. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, Wiley Online Library, v. 3, n. 4, p. 587–596, 1993.

36 LIU, L.; FUNAMOTO, K.; HAYASE, T. Numerical experiment for ultrasonic-measurement-integrated simulation of developed laminar pipe flow using axisymmetric model. *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 3, n. 2, p. 101–115, 2008.

37 HASHEMI, R.; LISANTI, C.; BRADLEY, W. *MRI: The Basics*. 4. ed. Philadelphia, USA: Wolters Kluwer Health, 2017.

38 SINGER, J. Blood flow rates by nuclear magnetic resonance measurements. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 130, n. 3389, p. 1652–1653, 1959.

39 MANNING, W. J.; PENNELL, D. J. *Cardiovascular magnetic resonance*. [S.l.]: Elsevier Health Sciences, 2010.

40 BERNSTEIN, M. A.; KING, K. F.; ZHOU, X. J. *Handbook of MRI pulse sequences*. [S.l.]: Elsevier, 2004.

41 HAHN, E. L. Spin echoes. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 80, p. 580–594, Nov 1950.

42 HAHN, E. Detection of sea-water motion by nuclear precession. *Journal of geophysical research*, Wiley Online Library, v. 65, n. 2, p. 776–777, 1960.

43 CROOKS, L. et al. Nuclear magnetic resonance blood flow measurements in the human brain. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 221, n. 4611, p. 654–656, 1983.

44 REBERGEN, S. A.; WALL, E. E. van der; DOORNBOS, J.; ROOS, A. de. Magnetic resonance measurement of velocity and flow: technique, validation, and cardiovascular applications. *American heart journal*, Elsevier, v. 126, n. 6, p. 1439–1456, 1993.

45 O'DONNELL, M. NMR blood flow imaging using multiecho, phase contrast sequences. *Medical physics*, Wiley Online Library, v. 12, n. 1, p. 59–64, 1985.

46 CANDÈS, E.; ROMBERG, J.; TAO, T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Citeseer, 2005.

- 47 CANDÈS, E. J.; WAKIN, M. B. An introduction to compressive sampling [a sensing/sampling paradigm that goes against the common knowledge in data acquisition]. *IEEE signal processing magazine*, v. 25, n. 2, p. 21–30, 2008.
- 48 CHARTRAND, R.; YIN, W. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. In: IEEE. *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.], 2008. p. 3869–3872.
- 49 LIN, Z.; HE, J.; TANG, X.; TANG, C.-K. Fast, automatic and fine-grained tampered JPEG image detection via DCT coefficient analysis. *Pattern Recognition*, Elsevier, v. 42, n. 11, p. 2492–2501, 2009.
- 50 WANG, H.; KWONG, S.; KOK, C.-W. Efficient prediction algorithm of integer DCT coefficients for H. 264/AVC optimization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, IEEE, v. 16, n. 4, p. 547–552, 2006.
- 51 RAO, K. R.; YIP, P. *Discrete cosine transform: algorithms, advantages, applications*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- 52 KHAYAM, S. A. The discrete cosine transform (DCT): theory and application. *Michigan State University*, Citeseer, v. 114, 2003.
- 53 JENSEN, A.; COUR-HARBO, A. Ia. *Ripples in mathematics: the discrete wavelet transform*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.
- 54 DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1992. v. 61.
- 55 PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. [S.l.]: CRC press, 1980.
- 56 FERZIGER, J.; PERIĆ, M. Introduction to numerical methods. In: _____. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 1996. (Numerical methods : research and development), p. 21–36.
- 57 KWAK, Y.; NAM, S.; AKÇAKAYA, M.; BASHA, T. A.; GODDU, B.; MANNING, W. J.; TAROKH, V.; NEZAFAT, R. Accelerated aortic flow assessment with compressed sensing with and without use of the sparsity of the complex difference image. *Magnetic resonance in medicine*, Wiley Online Library, v. 70, n. 3, p. 851–858, 2013.
- 58 WANG, Y.; YANG, J.; YIN, W.; ZHANG, Y. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, SIAM, v. 1, n. 3, p. 248–272, 2008.
- 59 AVCIBAŞ, I.; SANKUR, B.; SAYOOD, K. Statistical evaluation of image quality measures. *Journal of Electronic imaging*, SPIE, v. 11, n. 2, p. 206–223, 2002.
- 60 WANG, Z.; BOVIK, A. C. Mean squared error: Love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. *IEEE signal processing magazine*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 98–117, 2009.
- 61 HORE, A.; ZIOU, D. Image quality metrics: PSNR vs. SSIM. In: IEEE. *2010 20th International Conference on Pattern Recognition*. [S.l.], 2010. p. 2366–2369.
- 62 HUNGER, R. *An introduction to complex differentials and complex differentiability*. [S.l.]: Munich University of Technology, Inst. for Circuit Theory and Signal Processing, 2007.

APÊNDICES

I. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO

Esta seção visa apresentar os passos realizados para solução matemática do problema de minimização da função objetiva apresentada na Eq.(3.1), resultante da formulação proposta para o problema de reconstrução de imagens de fluxo. A função objetivo, já introduzidos os pesos referentes ao método de *IRLS*, descritos pela Eq.(2.20), é dada por:

$$J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2\|_2^2 + \lambda_2 \|\mathbf{w}_1\mathbf{B}\mathbf{x}_1\|_2^2 + \lambda_2 \|\mathbf{w}_2\mathbf{B}\mathbf{x}_2\|_2^2 + \lambda_3 \|(\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M}) \odot \mathbf{m}\|_2^2 \quad (\text{I.1})$$

Reescrevendo a Eq.(I.1) de forma a expandir as normas ℓ_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \lambda_1 (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^H (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1) + \lambda_1 (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2)^H (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_2) \\ &+ \lambda_2 (\mathbf{w}_1\mathbf{B}\mathbf{x}_1)^H (\mathbf{w}_1\mathbf{B}\mathbf{x}_1) + \lambda_2 (\mathbf{w}_2\mathbf{B}\mathbf{x}_2)^H (\mathbf{w}_2\mathbf{B}\mathbf{x}_2) \\ &+ \lambda_3 (\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M})^H (\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Visto que deseja-se calcular x_1 e x_2 que minimizem a função objetiva, o passo seguinte consiste em derivar $J(x_1, x_2)$ com relação às variáveis x_1 e x_2 , separadamente, e igualar ambas expressões a zero com o intuito de encontrarmos seus pontos críticos. Ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} &= 0; \\ \frac{\partial J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Observe que a Eq.(I.2) contém o conjugado Hermitiano das variáveis de interesse \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Da teoria das variáveis complexas sabe-se que a derivada de um número complexo \bar{z} com relação a variável $z = x + jy$ não existe, em que j é a unidade imaginária e $x, y \in \mathbb{R}$. Neste sentido, as derivadas dadas na Eq.(I.3) são calculadas através dos operadores diferenciais de Wirtinger [62] que são dados por:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (\text{I.5})$$

Logo para um vetor de entradas complexas $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ considere a seguinte função

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}. \quad (\text{I.6})$$

Assim, as seguintes propriedades, com base nas derivadas vetoriais de Wirtinger, são válidas [62]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} &= \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{z}} & \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^T} &= \mathbf{z}^H \mathbf{A} \\ \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \bar{\mathbf{z}}} &= \mathbf{A} \mathbf{z} & \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^H} &= \mathbf{z}^T \mathbf{A}^T \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \bar{\mathbf{z}}} &= 0 & \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} &= 0 \end{aligned}$$

Outro aspecto importante consiste na derivação das expressões envolvendo a multiplicação ponto-a-ponto (“ \odot ”). Para o nosso caso, a expressão a ser derivada, como consequência da Eq.(I.2), consiste em:

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2)^H (\mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2). \quad (\text{I.7})$$

Desenvolvendo a expressão em I.7, tem-se:

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{x}_{11} \cdot x_{11} \cdot \bar{x}_{21} \cdot x_{21} + \bar{x}_{12} \cdot x_{12} \cdot \bar{x}_{22} \cdot x_{22} + \cdots + \bar{x}_{1n} \cdot x_{1n} \cdot \bar{x}_{2n} \cdot x_{2n} \quad (\text{I.8})$$

em que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}.$$

Adota-se ainda, neste trabalho, a convenção de que:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_{11}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{13}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{14}} \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_{21}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{22}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{23}} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{24}} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Desta forma, tem-se que a derivada da Eq.(I.8) pode ser dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1} = \bar{\mathbf{x}}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 \odot \mathbf{x}_2 \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2} = \bar{\mathbf{x}}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 \odot \mathbf{x}_1.$$

O resultado encontrado nas Eqs.(I.9), bem como as referidas propriedades definidas a partir da derivada de Wirtinger, já são suficientes para o cálculo das derivadas definidas na Eq.(I.3). Resolvendo primeiramente para a variável \mathbf{x}_1 , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} &= \lambda_1(\mathbf{x}_1^H \mathbf{A}^H \mathbf{A})^H - \lambda_1(\mathbf{b}_1^H \mathbf{A})^H \\ &+ \lambda_2(\mathbf{x}_1^H \mathbf{B}^H \mathbf{W}_1 \mathbf{B})^H \\ &+ \lambda_3(\bar{\mathbf{x}}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_2 \odot \mathbf{x}_2 \odot \mathbf{m}) + \lambda_3[(-\bar{\mathbf{M}}) \odot \bar{\mathbf{x}}_2 \odot \mathbf{m}] \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

sendo $\mathbf{W}_1 = \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{w}_1$.

Igualando a zero o resultado encontrado na Eq.(I.10) e realizando as manipulações necessárias, obtém-se, finalmente, o sistema linear a ser solucionado pelos algoritmos de reconstrução para encontrar a variável \mathbf{x}_1 :

$$[\lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}^H \mathbf{W}_1 \mathbf{B} + \lambda_3 \text{diag}(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_2 \odot \bar{\mathbf{x}}_2)] \mathbf{x}_1 = \lambda_3(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_2 \odot \bar{\mathbf{M}}) + \lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{b}_1. \quad (\text{I.11})$$

Através de um procedimento totalmente análogo pode-se determinar o sistema linear responsável por descrever a variável \mathbf{x}_2 , dado por:

$$[\lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B}^H \mathbf{W}_2 \mathbf{B} + \lambda_3 \text{diag}(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{x}}_1)] \mathbf{x}_2 = \lambda_3(\mathbf{m} \odot \mathbf{x}_1 \odot \bar{\mathbf{M}}) + \lambda_1 \mathbf{A}^H \mathbf{b}_2. \quad (\text{I.12})$$