



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**EFEITOS DO ACOPLAMENTO DE
METAESTRUTURAS NA ATENUAÇÃO DE
VIBRAÇÕES**

Por,

Mayara Carvalho Albuquerque

Brasília, 18 de dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**EFEITOS DO ACOPLAMENTO DE
METAESTRUTURAS NA ATENUAÇÃO DE
VIBRAÇÕES**

Por,
Mayara Carvalho Albuquerque

Relatório submetido como requisito parcial para a obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Adriano Todorovic Fabro, UnB/ENM (Orientador)

Prof. Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz, UnB/ENM

Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, UnB/ENM

Brasília, 18 de dezembro de 2020

Resumo

Os metamateriais possuem uma ampla gama de aplicações em diversas áreas que envolvem ondas eletromagnéticas e mecânicas. Na área de vibroacústica, o uso dos metamateriais envolve o acoplamento do mesmo em outras estruturas com o intuito de controlar os efeitos de ruído e vibração. Por isso, torna-se importante para sua aplicação analisar os efeitos que o acoplamento causa na propagação das ondas mecânicas. Inicialmente, neste trabalho, são apresentados os conceitos teóricos necessários para o estudo da propagação de ondas. Dentre os conceitos apresentados, destaca-se o conceito de curvas de dispersão e o dos coeficientes de reflexão e transmissão, que são os principais meios de análise utilizados para o estudo das estruturas propostas, neste trabalho. A metodologia utilizada para o cálculo dos coeficientes nos diferentes tipos de metaestruturas é o método da matriz de espalhamento que relaciona o estado de propagação da onda antes e depois da descontinuidade. Os modelos de metaestruturas propostas possuem diversos tipos de arranjos, junções e suportes.

Palavras-chaves: metaestruturas; acoplamento; atenuação de vibração e ruído; matriz de espalhamento.

Abstract

Metamaterials have a wide range of applications in many areas related with the analysis and modification of electromagnetic and mechanical waves. In the vibroacoustics field, metamaterials are used, generally, coupled to others kinds of structures in order to control and manipulate the effects of noise and vibration caused by a propagating mechanical wave. Hence, it is important for its application to analyze the effects that the coupling causes in the incident wave propagation. Firstly, in this project, the theoretical fundamentals required for the study of the propagation of waves in metastructures are reviewed and introduced. Among all, the concepts of dispersion curves and of the coefficients of reflexion and transmission stand out. Those two concepts will be employed as the main method of analysis for the proposed structures. The methodology applied for calculating the coefficients for the different kinds of metastructures is the method of the scattering matrix, which relates the state of propagation of the wave before and after the discontinuity. The models of metastructures proposed have different kinds of arrangements, junctions and supports.

Key-words: metastructures; coupling; noise, vibration and harshness; scattering matrix

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos	1
1.3	Metodologia	1
1.4	Organização do Trabalho	2
2	METAMATERIAIS	3
2.1	Metamateriais Eletromagnéticos	3
2.2	Metamateriais Acústicos	4
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
3.1	Representação das Oscilações	6
3.1.1	Representação complexa-exponencial do MH	7
3.2	Número de Onda e Velocidade de Fase	8
3.3	Curva de Dispersão	10
3.3.1	Velocidade de grupo	11
3.4	Transmissão e Reflexão da Onda	12
3.5	Propagação de Ondas em Sólidos	13
3.5.1	Ondas longitudinal em barras	14
3.5.2	Ondas de flexão em vigas	15
3.5.3	Propagação de ondas em metaestruturas com ressonadores	18
4	MODELAGEM MATEMÁTICA	21
4.1	Modelo Baseado em Propagação de Ondas	21
4.1.1	Deslocamentos e forças internas	22
4.1.2	Extremidades de uma estrutura	23
4.1.3	Acoplamentos de estruturas	24
4.1.4	Acoplamentos localizados	26
4.2	Modelos Propostos	27
4.2.1	Viga semi-infinita com apoio simples	27
4.2.2	Barras de materiais e seções transversais diferentes	28
4.2.3	Barras idênticas conectadas por massa pontual	29
4.2.4	Viga infinita com apoio simples	31
4.2.5	Viga apoiada sobre mola	33
4.2.6	Vigas semi-infinitas acopladas com ângulo entre elas	35

4.2.7	Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita	38
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	42
5.1	Análise Paramétrica	42
5.1.1	Barras de materiais e seções transversais diferentes	42
5.1.1.1	Variação da seção transversal	42
5.1.1.2	Variação do material	44
5.1.2	Barras idênticas conectadas por massa pontual	45
5.1.3	Vigas apoiadas sobre mola	49
5.1.4	Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo	51
5.1.5	Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita	53
5.2	Estudo dos Efeitos Causados na Estrutura Devido à Utilização de Metamateriais	57
5.2.1	Acoplamento de barras com seções transversais diferentes	58
5.2.2	Acoplamento de barras com materiais diferentes	59
5.2.3	Barras idênticas conectadas por massa pontual	61
5.2.4	Vigas apoiadas sobre mola	64
5.2.5	Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo	67
5.2.6	Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita	70
6	CONCLUSÃO	76
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	77
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A CÓDIGOS PARA O CÁLCULO DA MATRIZ DE ESPALHAMENTO	80
A.1	Modelo de vigas semi-infinitas acopladas com ângulo entre elas	80
A.2	Modelo de vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita	82

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Representação do movimento harmônico como a projeção de um fasor (RAO, 2011).	6
Figura 3.2 – Deslocamento, velocidade e aceleração como fasores (RAO, 2011).	8
Figura 3.3 – Representação fasorial de uma onda que se propaga com variações no espaço e no tempo (FAHY; GARDONIO, 2007).	9
Figura 3.4 – Comparação entre ω e k (FAHY; GARDONIO, 2007).	10
Figura 3.5 – Diferença entre as velocidades de grupo e de fase (SHAIK, 2019).	11
Figura 3.6 – Reflexão e transmissão de uma onda incidente.	13
Figura 3.7 – Propagação de uma onda longitudinal em uma barra de comprimento infinito.	14
Figura 3.8 – Curva de dispersão para uma onda longitudinal harmônica que se propaga ao longo de uma barra infinita.	15
Figura 3.9 – Propagação de uma onda de flexão em uma viga de pequena espessura.	16
Figura 3.10 – Curva de dispersão para uma onda flexural harmônica se propagando ao longo de uma viga de dimensões conhecidas.	17
Figura 3.11 – Modelo de metaestrutura com ressonadores acoplados.	18
Figura 3.12 – Curva de dispersão para ondas longitudinais e de flexão que se propagam em uma metaestrutura.	20
Figura 4.1 – Onda ao atingir extremidade da estrutura.	23
Figura 4.2 – Superposição de ondas refletidas e transmitidas em uma estrutura com um tipo de junção.	25
Figura 4.3 – Propagação de uma onda de flexão em um modelo de viga semi-infinito com apoio simples em uma extremidade.	27
Figura 4.4 – Propagação de onda longitudinal em um acoplamento de barras de diferentes propriedades.	28
Figura 4.5 – Modelo de duas barras conectadas por uma massa.	30
Figura 4.6 – Onda de flexão se propaga ao longo de uma viga infinita com apoio simples.	31
Figura 4.7 – Propagação de uma onda de flexão em uma viga apoiada por mola.	33
Figura 4.8 – Acoplamento angular de duas vigas semi-infinitas.	35
Figura 4.9 – Acoplamento entre vigas com um ângulo α_i em relação à viga horizontal.	38
Figura 5.1 – Efeito causado pela variação da seção transversal no acoplamento de duas barras de mesmo material.	43

Figura 5.2 – Variação da amplitude em um acoplamento de barras feitas de diferentes materiais.	45
Figura 5.3 – Variação da amplitude das ondas em função da massa m	46
Figura 5.4 – Efeito da frequência na amplitude das ondas transmitidas e refletidas para $m = 20 \text{ kg}$	47
Figura 5.5 – Efeito do comprimento de onda λ nas amplitudes das ondas transmitidas e refletidas para $m = 20 \text{ kg}$	47
Figura 5.6 – Variação da amplitude das ondas em função de m para uma frequência de 4×10^4 e raio de 10 cm	48
Figura 5.7 – Efeitos da mudança na amplitude para diferentes valores da constante de mola κ	49
Figura 5.8 – Amplitude das ondas de transmissão e reflexão em função da frequência para $\kappa = 80000 \text{ N/m}$	50
Figura 5.9 – Mudança na amplitude para diferentes valores de comprimento de onda λ para $\kappa = 80000 \text{ N/m}$	50
Figura 5.10 – Efeitos da mudança na amplitude das ondas de transmissão e de reflexão para uma frequência de 20 Hz	51
Figura 5.11 – Efeito causado nas amplitudes das ondas devido à variação do ângulo α de acoplamento.	52
Figura 5.12 – Comportamento da amplitude em função da frequência para $\alpha = \pi/4$	53
Figura 5.13 – Comportamento da amplitude das vigas semi-infinitas em função do ângulo de acoplamento. Os ângulos variam juntos com mesmo valor.	54
Figura 5.14 – Mudanças nas amplitudes das ondas das vigas semi-infinitas em função do ângulo α_2 para um ângulo α_1 mantido fixo em $-\pi/6$	55
Figura 5.15 – Variação da amplitude em função de uma mudança em α_1 e em α_2 . Ambos os ângulos variam, porém em intervalos diferentes.	56
Figura 5.16 – Variações na amplitude das ondas refletidas e transmitidas em função da frequência para as vigas semi-infinitas.	57
Figura 5.17 – Amplitude das ondas de transmissão e de reflexão para o acoplamento de duas barras de metamaterial com seções transversais diferentes.	58
Figura 5.18 – Mudança na amplitude para acoplamento de barras de diferentes materiais a uma barra de MLR.	60
Figura 5.19 – Mudança na amplitude para menores valores da razão E_1/E_2	60
Figura 5.20 – Relação entre amplitude e massa para o acoplamento de metamateriais conectados por uma massa entre eles.	62
Figura 5.21 – Relação entre a amplitude e a frequência para uma massa de 10 kg	63
Figura 5.22 – Região em que ocorre o máximo das amplitudes do gráfico de amplitude vs frequência. Visão ampliada.	64
Figura 5.23 – Relação entre a amplitude e a constante de mola κ para modelo de vigas de metamateriais apoiados por uma mola.	65

Figura 5.24–Amplitude em função da frequência para uma constante de mola fixa de 50000 N/m	66
Figura 5.25–Região em que ocorre o máximo das amplitudes. Visão ampliada.	67
Figura 5.26–Relação entre a amplitude e o ângulo α da estrutura inclinada feita com metamateriais.	68
Figura 5.27–Mudança na amplitude devido à frequência da estrutura para $\alpha = \pi/4$	69
Figura 5.28–Comportamento da amplitude em função dos ângulos $\alpha_{1,2}$ que variam dentro do mesmo intervalo.	71
Figura 5.29–Comportamento da amplitude em função apenas de α_2 para uma meta-estrutura. O ângulo α_1 foi mantido fixo em $\pi/6$	72
Figura 5.30–Variação da amplitude em função de uma mudança em α_1 e em α_2 para uma metaestrutura. Ambos os ângulos variam, porém em intervalos diferentes.	73
Figura 5.31–Mudança da amplitude em função da frequência para a metaestrutura. Os ângulos $\alpha_{1,2}$ são mantidos fixos.	74

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Propriedades de liga de aço SAE 1020.	43
Tabela 2 – Propriedades dos materiais.	44
Tabela 3 – Propriedades mecânicas do metamaterial utilizado.	57

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

A	Área [m^2]
E	Módulo de Young [Pa]
I	Momento de Inércia de área [m^4]
$M(x, t)$	Momento fletor [Nm]
$N(x, t)$	Força longitudinal [N]
$Q(x, t)$	Força de cisalhamento [N]
b	Base da seção transversal da viga [m]
h	Altura da seção transversal da viga [m]
c_f	Velocidade de fase [m/s]
c_g	Velocidade de grupo [m/s]
$g(x, t)$	Deslocamento de onda harmônica em função do espaço e do tempo [m]
k	Número de onda [rad/m]
$p(x, t)$	Força por unidade de comprimento [N/m]
$u(x, t)$	Deslocamento de onda longitudinal harmônica [m]
$w(x, t)$	Deslocamento de onda flexural harmônica [m]

Símbolos Gregos

ε	Permissividade elétrica [F/m]
θ	Posição angular [rad]
λ	Comprimento de onda [m]
μ_m	Permissividade magnética [H/m]
μ	Densidade linear [kg/m]
ρ	Densidade da viga [kg/m^3]

ω Frequência angular [rad/s]

Subscritos

N Onda evanescente

b Onda de flexão

l Onda longitudinal

i Onda incidente

r Onda refletida

t Onda transmitida

p Número do ressonador

r Ressonador

Sobrescritos

+

Sentido positivo de propagação

–

Sentido negativo de propagação

Números Adimensionais

A Magnitude do número complexo

Re Parte real

a Amplitude da onda

i Unidade imaginária do número complexo

r Coeficiente de reflexão

t Coeficiente de transmissão

z Número complexo

Ω Razão entre frequências angulares

ϵ Razão entre massas

T Matriz de espalhamento

1 Introdução

1.1 Motivação

Ao longo dos últimos anos, os metamateriais vêm mostrando notável potencial para aplicações em várias áreas da ciência e tecnologia. Os metamateriais se tornaram atraentes para diferentes indústrias por oferecerem a habilidade de criar, artificialmente propriedades novas personalizadas em um material que podem não existir na natureza (KODAMA; COUTU JR., 2017).

Uma grande parte dos estudos destinados ao desenvolvimento dos metamateriais está direcionada a propor diferentes arquiteturas e arranjos que melhoram o seu desempenho sob diferentes frequências e modos de onda. Poucos estudos tratam dos efeitos causados na atenuação de vibrações quando se realiza o acoplamento de metamateriais em estruturas, mesmo, sendo este o uso geral para os engenheiros mecânicos (FABRO; SAMPAIO; CURSI, 2019).

O acoplamento dos metamateriais a estruturas fontes e receptoras pode causar conversões de tipos de ondas que não foram, tipicamente, previstas no seu projeto, causando uma redução no desempenho da atenuação das vibrações. Dessa maneira, modelos adequados para o comportamento dinâmico de juntas e montagens mecânicas e a compreensão dos efeitos causados pelos acoplamentos nas amplitudes das ondas propagantes na estrutura se apresentam como um grande necessidade para a obtenção de avanços tecnológicos para sua aplicação.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal investigar os efeitos causados na atenuação de vibrações devido ao acoplamento de metamateriais em estruturas unidimensionais a partir de modelos analíticos de propagação de ondas em barras e vigas.

1.3 Metodologia

A metodologia empregada consiste em estudar os efeitos da propagação de ondas mecânicas em modelos de estruturas propostas por meio de uma modelagem matemática. Os modelos a serem desenvolvidos são compostos por barras ou vigas construídas com metamateriais do tipo localmente ressonantes com algum tipo de descontinuidade que é obtida devido à diferentes tipos de junções e/ou apoios existentes no modelo. Por meio

dos cálculos matemáticos a serem realizados, pretende-se obter relações que permitam calcular os coeficientes de transmissão e de reflexão para as diversas estruturas para que, depois, possa-se analisar o comportamento da estrutura.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho, pode ser dividido em três partes principais: revisão dos fundamentos teóricos, proposição e desenvolvimento dos modelos estruturais e análise dos modelos propostos.

Nos primeiros capítulos deste trabalho são apresentados de maneira clara e organizada todos os conceitos teóricos necessários para o entendimento do trabalho. No **Capítulo 2**, são introduzidos conceitos novos, não vistos ao longo do curso de Engenharia Mecânica, sobre o que é um metamaterial, como ele pode ser classificado, quais são suas principais características e principais aplicações em diversas áreas e também o seu desenvolvimento histórico.

No **Capítulo 3**, é feita uma revisão teórica sobre os conceitos importantes em propagação de ondas mecânicas. Apresenta-se como é feita a representação das oscilações de uma onda por meio de uma função exponencial e de um fasor (vetor rotativo), os conceitos de número de onda e das curvas de dispersão, os efeitos causados pelos fenômenos de transmissão e reflexão da onda em uma estrutura sólida, dentre outros.

O **Capítulo 4** contém todos os tipos de modelo que são propostos para análise. Pretende-se obter, como resultado, para cada um dos modelos uma expressão que permita determinar os coeficientes de transmissão e reflexão das ondas. O método matemático a ser utilizado para a obtenção dos resultados é o método da matriz de espalhamento. Os modelos propostos são compostos de estruturas sólidas feitas de metamateriais conectados com diferentes tipos de conexões e junções a outro metamaterial ou a outro tipo de material.

O **Capítulo 5** apresenta um estudo numérico de como as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas irão se comportar em função do tipo de acoplamento existente na estrutura. Para o estudo do intervalo de atenuação dos metamateriais, também será analisado o comportamento da amplitude em função da frequência da estrutura. Por fim, são expostas as principais conclusões obtidas neste trabalho.

2 Metamateriais

Os metamateriais são compósitos macroscópicos feitos de estruturas periódicas ou não periódicas, cujas propriedades mecânicas dependem de sua composição química e de seu arranjo estrutural mecânico (CUI; SMITH; RUOPENG, 2010). Com a utilização dos metamateriais, é possível criar novos materiais artificiais com propriedades que não são normalmente observadas na natureza.

2.1 Metamateriais Eletromagnéticos

Inicialmente, os metamateriais foram introduzidos para aplicações envolvendo ondas eletromagnéticas. O conceito dos metamateriais foi introduzido em 1967 pelo físico russo Victor Veselago que ambicionava criar um tipo de lente perfeita, que funcionaria como uma lente convergente plana (CAPOLINO, 2009). Veselago considerou e descreveu propriedades físicas que um determinado material deveria possuir para apresentar, valores negativos de permissividade elétrica (ϵ) e de permeabilidade magnética (μ_m) para o mesmo intervalo de frequência (KODAMA; COUTU JR., 2017; CAPOLINO, 2009). A permissividade elétrica é uma constante que descreve a maneira que determinado material irá se comportar sob a ação de um campo elétrico. Enquanto que a permeabilidade, mede a habilidade do material em aguentar um campo magnético dentro de si mesmo.

O material desenvolvido por Veselago veio a ser conhecido como Meio de Mão-Esquerda (traduzido do inglês, *Left-handed medium*) ou Meio Duplamente Negativo (CAPOLINO, 2009). A utilização do termo "metamaterial" só veio a ser empregado, posteriormente, em 1999 por Rodger M. Walser (CUI; SMITH; RUOPENG, 2010).

As propriedades de um metamaterial estão, em grande parte, diretamente relacionadas com os parâmetros geométricos de suas células unitárias estruturais, consideradas como os "átomos" e "moléculas" constituintes do material (CHATURVEDI, 2009). Essas células unitárias são compostas por partículas ressonadoras, cuja geometria é cuidadosamente projetada, tendo seu formato e tamanho ajustados para que o metamaterial apresente valores previamente desejados para suas propriedades após a interação com ondas eletromagnéticas de determinadas frequências. O tamanho dos elemento básicos das células unitárias deve ser muito menor que o comprimento de onda de operação para que a onda eletromagnética propagante interaja como se estivesse em um meio homogêneo. Especificamente, as dimensões dos ressonadores devem ter a mesma ordem de grandeza de frações do comprimento de onda da frequência de operação para que entrem em ressonância com o campo eletromagnético (MUNIZ, 2013).

Quando uma onda eletromagnética entra em um material, seu campo elétrico e

magnético interage com os elétrons e outros constituintes do material, causando com que eles oscilem e emitam sua própria onda eletromagnética. A soma macroscópica de todas as contribuições no material resultam em uma onda com mesma frequência porém com menor comprimento de onda que a onda original, o que causa uma redução ou, até, reversão do sinal da velocidade de fase da onda. A direção de propagação da onda vai depender dos valores de ε e μ_m do material: se $\varepsilon > 0$ e $\mu_m > 0$, a onda possuirá a mesma direção de propagação da original; se $\varepsilon < 0$ e $\mu_m < 0$, a onda se propagará na direção reversa; e se $\varepsilon\mu_m < 0$, não haverá propagação alguma da onda (HONGWEI; DU; PAI, 2010).

A maioria dos metamateriais eletromagnéticos são produzidos para possuírem valores negativos para ε e μ_m , o que faz com que o índice refrativo também seja negativo, sendo ideal para aplicações onde se deseja os efeitos de *cloaking* (manta de invisibilidade para ocultar objetos) e de *superlensing* (lente que possui resolução acima do limite de difração). Possíveis aplicações incluem fibras ópticas sem perdas de transmissão, lentes ópticas bastante finas, absorvedores eletromagnéticos, tecnologias para tornar objetos invisíveis, microscópios ópticos capazes de observarem átomos, dispositivos magnético artificial feito de materiais não magnéticos e etc (PAI; PENG; JIANG, 2013).

2.2 Metamateriais Acústicos

O ramo de aplicação dos metamateriais vêm cada vez mais se expandindo para diferentes áreas da física. Recentemente, cientistas passaram a fazer uma analogia entre ondas eletromagnéticas e ondas acústicas e elásticas, permitindo com que os metamateriais fossem desenvolvidos para aplicações na área de controle e manipulação de ondas mecânicas (HONGWEI; DU; PAI, 2010).

Os metamateriais acústicos podem ser utilizados em diversas aplicações na área de vibroacústica. Alguns tipos de metamateriais conseguem direcionar ou focar o som para uma localização específica e formar uma região sonora, como um tipo de *hotspot* de áudio. A partir desta função, é possível, por exemplo, na área médica, criar uma camada de metamaterial com o tamanho adequado para poder entrar no corpo de um paciente e permitir que as ondas do ultra-som sejam focadas apenas na região em que são necessárias. Pesquisadores também desenvolveram metamaterias que conseguem aprisionar ruídos e vibrações dentro da estrutura através dos ressonantes locais, evitando sua passagem. Eles conseguem ainda diminuir o som, isto é, transformar as ondas sonoras recebidas em qualquer outro campo sonoro desejado (BERGER, 2019).

De maneira similar ao que ocorre com os metamateriais eletromagnéticos, os metamateriais acústicos possuem subunidades estruturais que ressoam com as ondas mecânicas que se propagam nele para criar propriedades desejadas ao metamaterial. As principais grandezas utilizadas para a descrição do metamaterial acústico são o módulo de elasticidade E (módulo de Young) e a massa específica ρ (HONGWEI; DU; PAI, 2010).

Para a área de controle, manipulação e atenuação de ondas acústicas e elásticas, os metamateriais podem ser classificados como metamateriais localmente ressonantes (MLR), buraco negro acústico, metamaterial acústico tipo membrana e material metaporooso (JUNG et al., 2018). Dentre todos eles, este estudo será concentrado na aplicação dos metamateriais localmente ressonantes. Sua propriedade mais importante é conhecida como *bandgap*, que é o intervalo de frequências onde não há propagação da onda. Os intervalos de atenuação induzidos pelos MLR ocorrem em função do efeito de interferência causado pela interação entre as ondas propagantes e os ressonadores locais (JUNG et al., 2018). A vantagem da utilização dos MLR é a possibilidade de ampliar a banda de frequências a serem atenuadas com a simples adição de vários ressonadores, mantendo a mesma razão de massa (FABRO; SAMPAIO; CURSI, 2019).

Algumas das dificuldades encontradas na fabricação de metamateriais eletromagnéticos não são encontradas para os metamateriais acústicos, tornando a fabricação dos últimos, relativamente, mais fácil. Em contrapartida, na natureza existem materiais que possuem valores negativos de permissividade elétrica, enquanto que não há nenhum material natural que apresenta valor negativo para o módulo de Young ou para a massa específica (PAI; PENG; JIANG, 2013). Para fabricação de modelos de metamateriais localmente ressonantes, é necessária a utilização de técnicas caras de manufatura ainda em processo de desenvolvimento devido ao tamanho de suas sub-unidades que devem ser muito menor que o menor comprimento da onda que se propaga no meio (HONGWEI; DU; PAI, 2010).

3 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos teóricos fundamentais sobre a propagação de ondas mecânicas em estruturas sólidas necessários para o entendimento deste trabalho. Como principais referências, serão utilizados o livro do Rao (2011) e o livro do Fahy e Gardonio (2011). O uso de outras referências, além destas, será demarcado no texto.

3.1 Representação das Oscilações

As ondas mecânicas a serem estudadas oscilam de maneira periódica realizando um movimento harmônico que pode ser descrito por uma função trigonométrica (seno ou cosseno). É possível representar o movimento harmônico por meio de um vetor que interliga os pontos O e P com magnitude A que rotaciona no sentido anti-horário e com velocidade angular constante ω , como é mostrado na Figura 3.1. Isto se torna muito útil, porque é bem mais simples somar ou subtrair fasores do que equações.

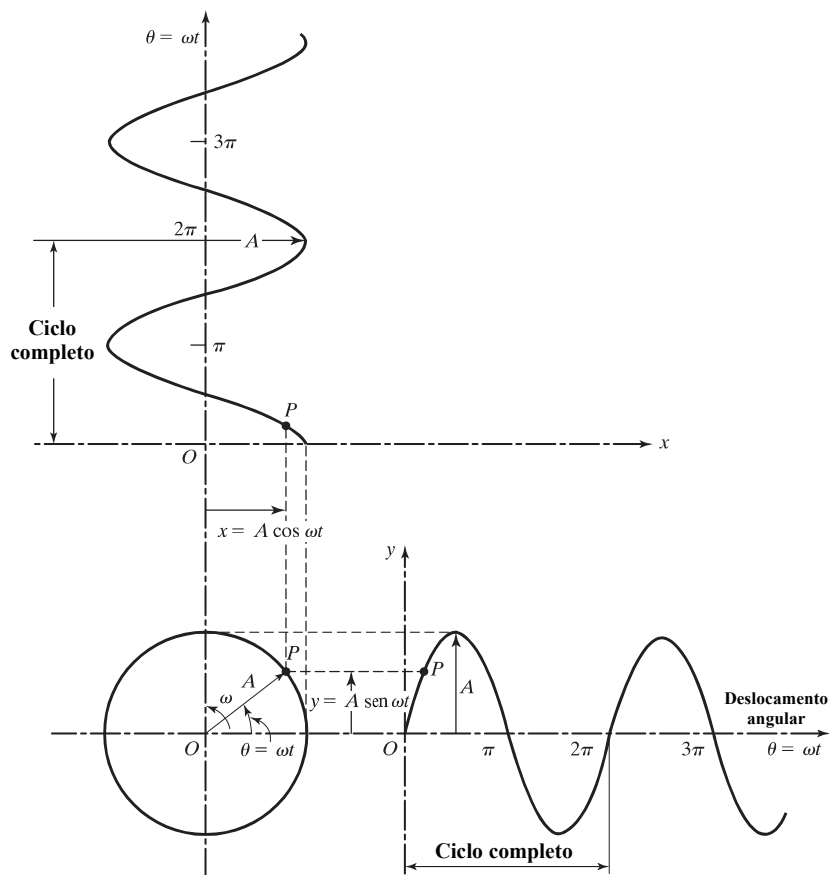


Figura 3.1 – Representação do movimento harmônico como a projeção de um fasor (RAO, 2011).

O método de representação vetorial exige que sejam descritos tanto o componente horizontal da oscilação como o vertical. Entretanto, para este caso, a movimentação no eixo y não possui nenhum significado físico visto que o movimento só ocorre em uma dimensão, porém será mesmo assim representada para que se possa definir o vetor rotativo (fasor) (CLAPHAM, 2006). Pela projeção do vetor nos eixos vertical e horizontal tem-se que $y = A \text{ sen}(\omega t)$ e $x = A \text{ cos}(\omega t)$.

Quando se lida com sistemas complexos, se torna bem mais conveniente descrever o movimento harmônico da onda a partir de uma função exponencial complexa devido as suas propriedades matemáticas que facilitam a resolução das equações diferenciais quando são acrescentados os termos referentes ao amortecimento e à vibração forçada.

3.1.1 Representação complexa-exponencial do MH

Fazendo uma analogia entre a representação fasorial do movimento harmônico (vide Figura 3.1) com o sistema de representação planar de um número complexo, é possível dizer que qualquer vetor \mathbf{x} no plano xy de magnitude A que rotaciona em sentido anti-horário com velocidade angular ω pode ser representado como um número complexo, na forma

$$\mathbf{x} = a + ib = A(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)). \quad (3.1)$$

Pela Fórmula de Euler, é possível fazer a relação entre as funções trigonométricas seno e cosseno e a função exponencial

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad (3.2)$$

onde $\cos(t)$ indica a parte real da função e $\sin(t)$ a parte imaginária.

Dessa maneira, o vetor \mathbf{x} pode ser reescrito como

$$\mathbf{x} = Ae^{i\omega t}. \quad (3.3)$$

Como foi dito anteriormente, para representar o movimento harmônico a partir de um fasor foi necessário considerar as movimentações em ambos os eixos x e y . Logo, para poder escrever a variação no tempo do deslocamento $g(t)$ é necessário considerar apenas a movimentação em x , isto é, a parte real da função harmônica complexa-exponencial (CLAPHAM, 2006), fazendo

$$g(t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}\}, \quad (3.4)$$

onde $\text{Re}[\cdot]$ significa "a parte real".

Diferenciando a Equação 3.4 em relação ao tempo, pode-se obter a expressão para a velocidade na representação complexa-exponencial

$$\dot{g}(t) = \text{Re}\{i\omega Ae^{i\omega t}\}. \quad (3.5)$$

Diferenciando novamente em função do tempo, obtém-se, agora, a aceleração

$$\ddot{g}(t) = \text{Re}\{-\omega^2 A e^{i\omega t}\}. \quad (3.6)$$

A representação fasorial das funções do deslocamento, velocidade e aceleração podem ser vistas na Figura 3.2.

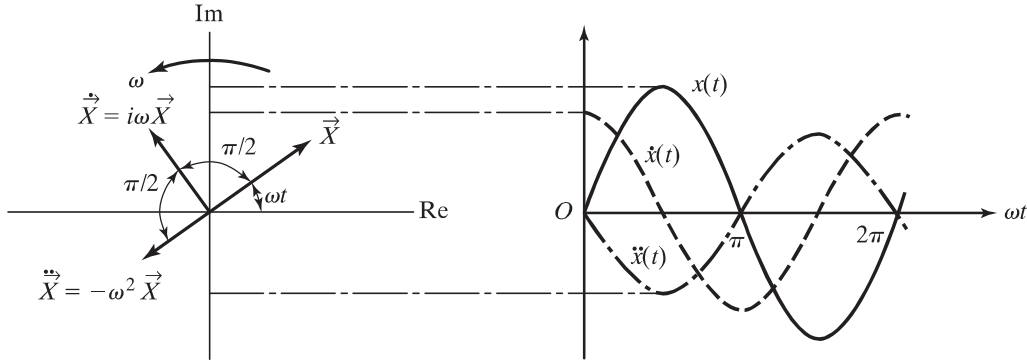


Figura 3.2 – Deslocamento, velocidade e aceleração como fasores (RAO, 2011).

3.2 Número de Onda e Velocidade de Fase

Para uma onda cuja velocidade de propagação é independente de sua magnitude e que se propaga em apenas uma dimensão do espaço x , uma simples perturbação harmônica gerada em um ponto do espaço se propagará de uma forma na qual o padrão de perturbação espacial também é senoidal no espaço. Este padrão espacial irá se propagar com uma velocidade c que é determinada pela forma cinética da perturbação, as propriedades do meio e qualquer força externa. Se o meio responder linearmente às perturbações, conforme a onda vai avançando, as perturbações em qualquer ponto do espaço passam a variar senoidalmente no tempo na mesma frequência que a da fonte da onda. Assumindo que a perturbação no ponto de geração é dado pela equação

$$g(0, t) = \text{Re}\{A e^{i\omega t}\}, \quad (3.7)$$

a fase da perturbação em um ponto a uma distância x_1 na direção de propagação vai estar atrasada com relação à fase na origem (em 0) de um ângulo igual ao produto da frequência angular ω da fonte e o tempo levado para a perturbação avançar a distância x_1 . Sabendo que este tempo será dado pela razão x_1/c , a função $g(x_1, t)$ pode ser representada pela Equação 3.9.

$$g(x_1, t) = \text{Re}\{A e^{i\omega t} e^{-i\omega x_1/c}\} \quad (3.8)$$

$$g(x_1, t) = \text{Re}\{A e^{i(\omega t - \omega x_1/c)}\} \quad (3.9)$$

A razão $-(\omega/c)$ representa mudança de fase por unidade de distância da mesma maneira que ω representa mudança de fase por unidade de tempo. Na Figura 3.3, é

ilustrado em um diagrama fasorial a combinação dos efeitos das variações no espaço e no tempo. O componente horizontal do fasor representa a perturbação $g(x, t)$, que pode ou não, corresponder fisicamente ao deslocamento na direção x dependendo do tipo da onda.

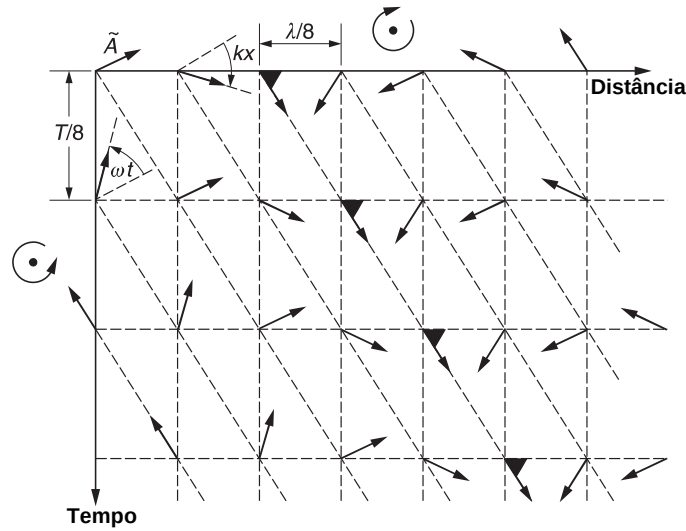


Figura 3.3 – Representação fasorial de uma onda que se propaga com variações no espaço e no tempo (FAHY; GARDONIO, 2007).

A velocidade c é conhecida como velocidade de fase da onda, ela passará a ser representada por c_f . Um observador que viaja na direção de propagação da onda com esta mesma velocidade, não consegue ver nenhuma mudança de fase.

O período espacial de uma onda harmônica simples é, comumente, descrito em função de seu comprimento de onda λ . Entretanto, é desejado que as variações espaciais também sejam descritas por uma variável que represente mudança de fase por unidade de distância, isto é, que represente a razão ω/c_f . No caso, esta variável é conhecida como número de onda, sendo geralmente denotada por k . Sendo um comprimento de onda correspondente a uma diferença de fase de 2π , é possível escrever as relações

$$k = \omega/c_f = 2\pi/\lambda. \quad (3.10)$$

O número de onda k representa a magnitude de um vetor que indica tanto a direção de propagação como a variação de fase ocorre no espaço. É possível fazer uma analogia entre a frequência temporal ω e o número de onda k , que, por sua vez, representa um tipo de frequência espacial. Tal analogia é mostrada na Figura 3.4.

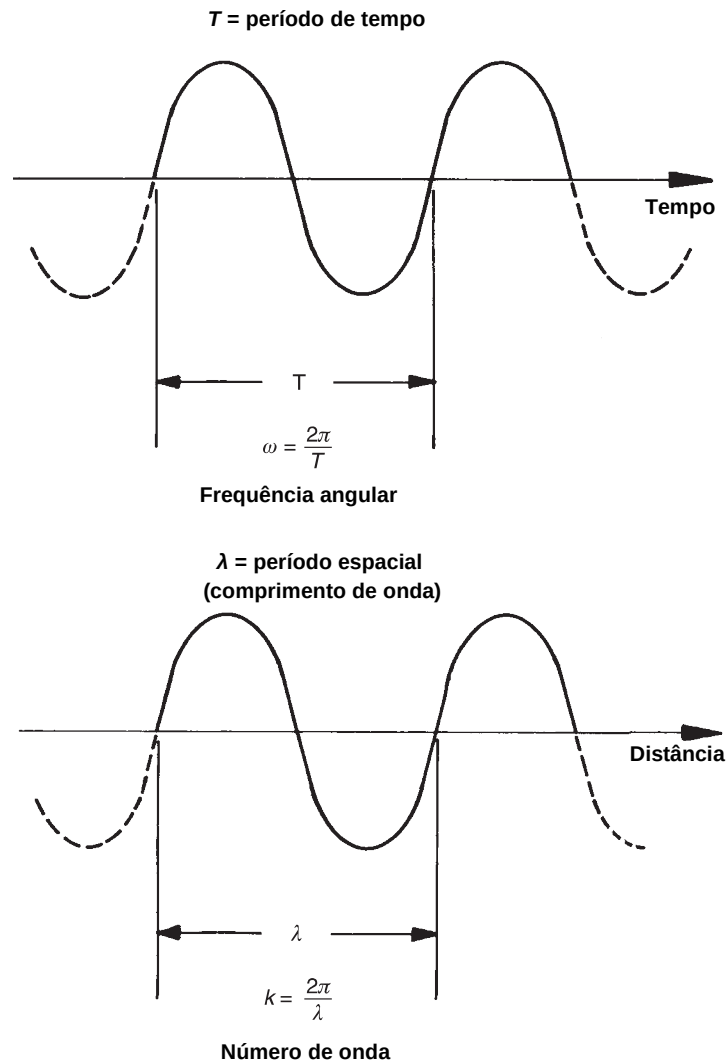


Figura 3.4 – Comparação entre ω e k (FAHY; GARDONIO, 2007).

Para facilitar a representação da direção de propagação das ondas, será considerada a seguinte convenção: uma onda harmônica simples que se propaga no sentido positivo da direção x será representada por

$$g^+(x, t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}e^{-ikx}\}, \quad (3.11)$$

enquanto que, uma onda que se propaga no sentido negativo da direção x será representada por

$$g^-(x, t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}e^{ikx}\}. \quad (3.12)$$

3.3 Curva de Dispersão

O número de onda k pode ser calculado pela Equação 3.10 em função da frequência angular e da velocidade de fase. A relação entre as grandezas k e ω é conhecida como relação de dispersão. Ela indica se uma perturbação gerada por uma fonte que é não-harmônica simples no tempo irá ou não se propagar através de um meio sem sofrer alterações na

sua forma básica espacial. Caso esta onda sofra alguma alteração, ela é dita como sendo dispersiva. Quando a velocidade de propagação de uma onda em um meio independe da frequência, este meio é dito como sendo não dispersivo. Em contrapartida, quando a velocidade de propagação depende da frequência, este meio é dito como sendo dispersivo.

A partir das curvas de dispersão, é possível entender as interações entre ondas em estruturas acopladas. Quando as curvas de dispersão de dois tipos de ondas se interceptam em algum ponto, além delas possuírem valores comuns de frequência e de número de onda, elas também possuem a mesma velocidade de fase e mesmo comprimento de onda.

3.3.1 Velocidade de grupo

Pela curva de dispersão, consegue-se obter informações sobre a velocidade em que a energia é transportada pela onda. Esta velocidade é conhecida como velocidade de grupo e é denotada por c_g . Conhecê-la se torna útil em análises de vibração que consideram o fluxo de energia da onda. Ela pode ser obtida por

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (3.13)$$

O conceito da velocidade de grupo e velocidade de fase podem acabar gerando confusão. Com a Figura 3.5, é possível ilustrar a diferença entre estas velocidades. A velocidade de fase c_f indica a velocidade em que a fase da onda se propaga no espaço. Enquanto que, por sua vez, a velocidade de grupo c_g , indica a velocidade em que o envelope das amplitudes da onda se propagam no espaço.

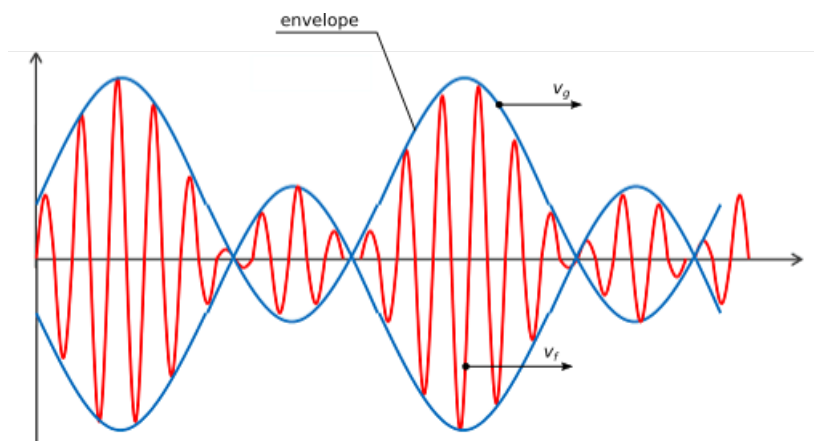


Figura 3.5 – Diferença entre as velocidades de grupo e de fase (SHAIK, 2019).

Analisando as Equações 3.10 e 3.13, é possível perceber que os valores das velocidades de fase e de grupo são iguais apenas para o caso em que a onda está se propagando em um meio não dispersivo.

3.4 Transmissão e Reflexão da Onda

Um onda ao incidir em algum tipo de fronteira, ou em alguma região de não uniformidade, sofre modificações na maneira de se propagar, resultando no aparecimento dos fenômenos conhecidos como refração, difração, dispersão e reflexão. O fenômeno de refração causa um desvio na direção de propagação da onda quando ela entra em um novo meio que possui uma velocidade de fase diferente. O fenômeno de difração envolve o efeito de distorção da propagação da onda sempre que é encontrado um obstáculo em sua trajetória. Já o fenômeno da dispersão se refere ao redirecionamento do fluxo de energia da onda para diversas direções. Por fim, o fenômeno da reflexão muda a direção da frente de onda, fazendo com que a onda retorne ao meio em que ela foi originada.

Todos estes fenômenos descritos podem ser observados em estruturas sólidas. Entretanto, o que apresenta maior importância prática no estudo das ondas mecânicas é o fenômeno da reflexão, pois a onda refletida pode interferir com a onda incidida, produzindo padrões de interferência construtiva ou destrutiva (NAVE, 2016), o que acaba por gerar novos conjuntos de frequências de oscilação da estrutura. Pegando como exemplo um viga não amortecida de comprimento infinitamente longo, esta viga pode vibrar livremente em qualquer valor de frequência. Agora, quando a viga é não amortecida com extremidades limitadas por algum tipo de descontinuidade, ela passa a vibrar apenas em suas frequências discretas naturais.

O que define se a interferência causada pela onda refletida vai ser construtiva ou destrutiva é a fase da onda refletida (NAVE, 2016). A reflexão da onda nas fronteiras do meio também leva a geração do fenômeno da ressonância. É importante frisar, que a ressonância está associada com vibração do tipo forçada gerada por algum estímulo externo, enquanto que as frequências naturais do sistemas são fenômenos associados com a vibração livre. Se um objeto é forçado a vibrar com sua frequência de ressonância, a resposta à excitação observada será de grande amplitude, podendo levar a falha na estrutura, mal funcionamento do sistema e outras consequências indesejadas.

Quando uma onda que se propaga livremente encontra alguma descontinuidade em alguma região do sistema cujas propriedades dinâmicas são diferentes, fica claro que a onda sofrerá algum tipo de alteração em sua propagação. Uma onda refletida deverá ser gerada para que o sistema satisfaça as condições de equilíbrio e de continuidade, isto é, a combinação entre a onda refletida e a onda incidente deve ser compatível com a onda transmitida além da descontinuidade.

Na Figura 3.6, a onda harmônica \mathbf{a}_i se propaga ao longo da estrutura. Ao atingir uma interface, parte da onda é refletida de volta na direção da origem (\mathbf{a}_r), enquanto a outra parte é transmitida para o restante da estrutura (\mathbf{a}_t).

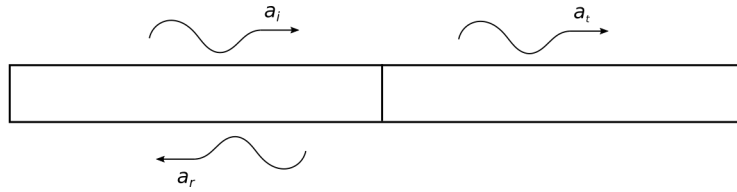


Figura 3.6 – Reflexão e transmissão de uma onda incidente.

Para quantificar cada uma das partes em que a onda incidente se divide, é possível definir o coeficiente de reflexão e o coeficiente de transmissão, que são dados, respectivamente, por

$$r = \frac{a_r}{a_i}, \quad (3.14)$$

$$t = \frac{a_t}{a_i}, \quad (3.15)$$

3.5 Propagação de Ondas em Sólidos

A equação governante do movimento de um sistema geral uni-dimensional não amortecido pode ser escrita como (HAGEDORN; DASGUPTA, 2007)

$$L(x)w(x, t) + \mu\ddot{w}(x, t) = p(x, t), \quad (3.16)$$

onde $L(x)$ é o operador diferencial de rigidez linear homogênea, μ a densidade linear, $p(x, t)$ a força atuante por unidade de comprimento e $w(x, t)$ o deslocamento da onda.

Assumindo que o movimento da onda seja de tipo harmônico, a equação do movimento passa a ser

$$L(x)w(x, t) + \mu\ddot{w}(x, t) = 0. \quad (3.17)$$

Com a substituição da equação de deslocamento da onda $w(x, t)$, é possível obter uma relação do tipo

$$D(k, \omega) = p(k^2) - \mu\omega^2 = 0, \quad (3.18)$$

onde $p(k^2)$ é um polinômio real em função de k^2 .

A Equação 3.18 é conhecida como sendo a equação de dispersão. Sua solução é o número de onda. Cada uma das soluções da curva de dispersão descreve uma das formas que a onda pode assumir ao se propagar, são elas:

- Onda propagante $\rightarrow k$ é puramente real;
- Onda evanescente $\rightarrow k$ é puramente imaginário;
- Onda com oscilação atenuada $\rightarrow k$ é complexo;

3.5.1 Ondas longitudinal em barras

As ondas longitudinais conseguem se propagar em grandes volumes de sólidos. A direção do seu deslocamento se dá no mesmo sentido da direção de propagação da onda. Considerando um onda longitudinal harmônica que se propaga ao longo de uma barra uniforme de comprimento infinito, como a mostrada na Figura 3.7. A barra possui módulo de Young E e a área de seção transversal A constantes ao longo de seu comprimento.

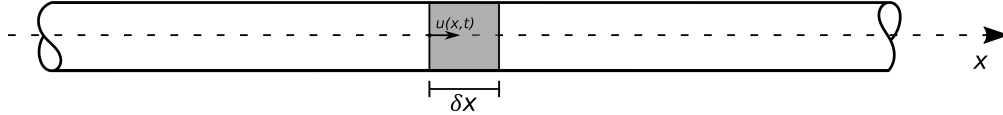


Figura 3.7 – Propagação de uma onda longitudinal em uma barra de comprimento infinito.

O operador $L(x)$ para estas condições é dado por (HAGEDORN; DASGUPTA, 2007)

$$L(x) = -\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d}{dx} \right], \quad (3.19)$$

e a onda longitudinal com amplitude unitária que se propaga ao longo da barra possui o deslocamento dado por

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.20)$$

Substituindo esse termo na Equação 3.17, obtém-se

$$-\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{d}{dx} \right] (e^{i(\omega t - kx)}) - \mu\omega^2 e^{i(\omega t - kx)} = 0. \quad (3.21)$$

Assumindo-se que área da seção transversal da barra é mantida constante ao longo de todo seu comprimento, ou seja, tem-se uma estrutura uniforme, pode se escrever

$$-EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{i(\omega t - kx)}) - \mu\omega^2 e^{i(\omega t - kx)} = 0. \quad (3.22)$$

Realizando as derivadas parciais e fazendo manipulações necessárias, obtém-se a equação característica

$$EAk^2 - \mu\omega^2 = 0, \quad (3.23)$$

que pode ser resolvida para o número de onda, de modo que

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu}{EA}} \rightarrow k = k_l, \quad (3.24)$$

onde k_l é conhecido como o número de onda longitudinal e é dado por

$$k_l = \omega\sqrt{\frac{\mu}{EA}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (3.25)$$

Assim, o campo de deslocamento para uma barra pode ser descrito por

$$u(x, t) = (a_l^+ e^{-ik_l x} + a_l^- e^{ik_l x}) e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

e as velocidades de fase e de grupo são dadas respectivamente por

$$c_{fl} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.27)$$

$$c_{gl} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = c_l. \quad (3.28)$$

Consegue-se ver que $c_{gl} = c_{fl}$, dessa maneira, pode-se concluir que ondas longitudinais harmônicas propagantes ao longo de uma barra são do tipo não dispersivas com velocidades de fase e de grupo independentes da frequência angular. Considerando propriedades comuns para aços, plota-se a curva de dispersão mostrada na Figura 3.8. Não foram necessários definir parâmetros geométricos para o modelo de barra, logo, conclui-se que a curva de dispersão será válida para uma onda longitudinal harmônica que se propaga ao longo de qualquer barra, seja qual forem suas dimensões desde que respeitadas as hipóteses do modelo utilizado. Analisando a curva de dispersão, nota-se também que a relação entre k_l e ω é inteiramente linear.

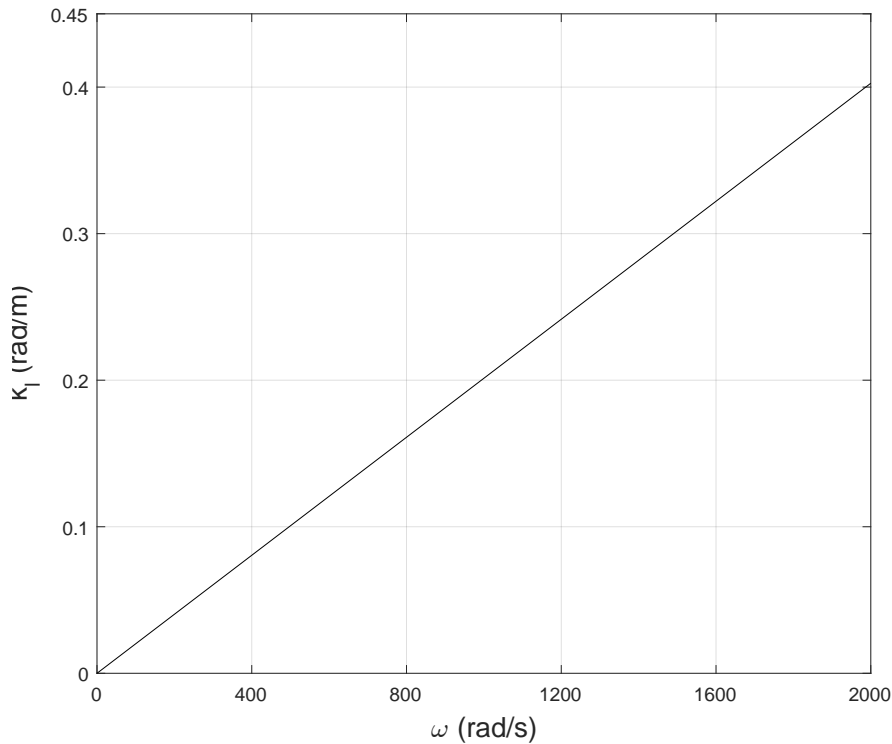


Figura 3.8 – Curva de dispersão para uma onda longitudinal harmônica que se propaga ao longo de uma barra infinita.

3.5.2 Ondas de flexão em vigas

Ondas de flexão se propagam sempre na direção perpendicular a da propagação da onda. Considerando, agora, a viga infinita mostrada na Figura 3.9, assume-se que esta viga seja do modelo Euler-Bernoulli, isto é, a viga possui um formato em prisma reto

com comprimento maior que as outras dimensões; os efeitos da inércia rotacional e da deformação envolvida no cisalhamento são desprezados; e a viga é constituída de material homogêneo linearmente elástico. Esta consideração não pode ser feita para valores altos de frequência, pois, nesse caso, deve-se considerar a deformação causada pelo cisalhamento e a inércia rotacional.

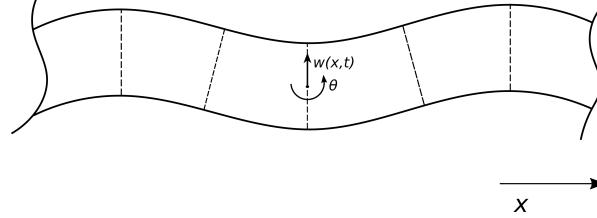


Figura 3.9 – Propagação de uma onda de flexão em uma viga de pequena espessura.

O operador $L(x)$ para uma viga infinita que sofre vibrações flexurais é definido como (HAGEDORN; DASGUPTA, 2007)

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right]. \quad (3.29)$$

Por sua vez, o deslocamento de uma onda harmônica de flexão que se propaga com amplitude unitária, é dado por

$$w(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.30)$$

Substituindo as Equações 3.29 e 3.30 na Equação governante para uma onda harmônica, obtém-se

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right] (e^{i(\omega t - kx)}) - \mu\omega^2 e^{i(\omega t - kx)} = 0. \quad (3.31)$$

Assumindo que o momento de inércia de área I é constante ao longo de toda a viga, assim como as outras propriedades E e μ , tem-se que

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} (e^{i(\omega t - kx)}) - \mu\omega^2 e^{i(\omega t - kx)} = 0. \quad (3.32)$$

Derivando a Equação 3.32 e realizando as manipulações necessárias, obtém-se que

$$k^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} \rightarrow k = \pm k_b \quad \text{ou} \quad k = \pm ik_b, \quad (3.33)$$

onde k_b é o número de onda flexural dado por

$$k_b = \sqrt{\omega} \left(\frac{\mu}{EI} \right)^{1/4} = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4}. \quad (3.34)$$

O campo de deslocamento da onda de flexão pode ser escrito como

$$w(x, t) = \left(a_b^+ e^{-ik_b x} + a_{bN}^+ e^{-k_b x} + a_b^- e^{ik_b x} + a_{bN}^- e^{k_b x} \right) e^{i\omega t}. \quad (3.35)$$

O primeiro e terceiro termo da Equação 3.35 representam a parte da onda que se propaga normalmente ao longo da viga. Enquanto que os outros dois termos (segundo e quarto) representam ondas evanescentes. Este tipo de onda decai exponencialmente com a distância e não carrega nenhuma forma de energia durante sua passagem.

Com o número de onda definido, é possível definir as velocidades de fase e velocidade de grupo, respectivamente, como

$$c_{fb} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/4}, \quad (3.36)$$

$$c_{gb} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2\sqrt{\omega} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/4} = 2c_{fb}. \quad (3.37)$$

Ambas as velocidades dependem da frequência, dessa maneira, já consegue-se intuir que ondas de flexão que se propagam em vigas são dispersivas.

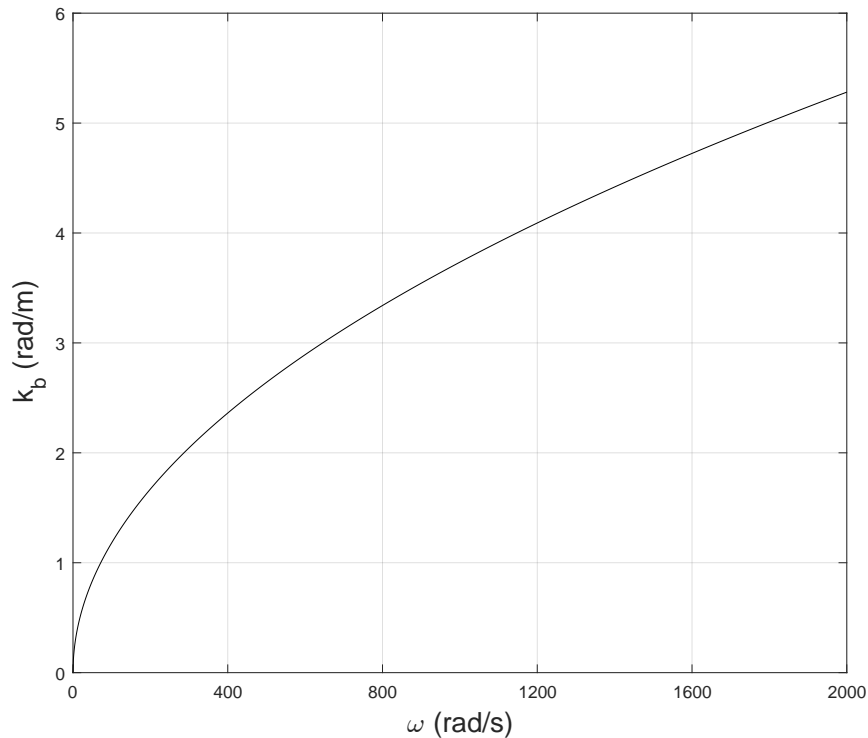


Figura 3.10 – Curva de dispersão para uma onda flexural harmônica se propagando ao longo de uma viga de dimensões conhecidas.

Diferentemente do obtido no modelo da Seção 3.5.1, a curva de dispersão para ondas flexurais harmônicas que se propagam ao longo de uma viga vai depender das dimensões da estrutura. Assim, considerando uma viga com 1 m de comprimento e seção retangular com 5 cm de altura e 1 cm de largura, plota-se a curva de dispersão mostrada na Figura 3.10. Foram consideradas propriedades comuns dos aços para ρ e E . Como pode ser visto, a curva de dispersão já não apresenta o mesmo comportamento linear de antes, evidenciando que a onda que se propaga ao longo da estrutura é dispersiva.

3.5.3 Propagação de ondas em metaestruturas com ressonadores

Os metamateriais são caracterizados pela presença de *bandgaps* sob frequências menores. *Bandgaps* são definidos como intervalos de frequência em que ondas elásticas ou acústicas não conseguem se propagar. Assim como foi feito para estruturas comuns, neste trabalho, torna-se importante obter uma relação geral que permita definir o número de onda nas metaestruturas localmente ressonantes. Para isso considera-se uma estrutura com um número S de ressonadores vibrando sob a mesma frequência. Esta é apenas uma consideração teórica que permite a realização dos cálculos, pois ressonadores reais dificilmente irão possuir a mesma frequência natural devido à defeitos na manufatura ou até por causa da maneira que os ressonadores estão conectados (SUGINO et al., 2017). As expressões que serão aplicadas podem ser utilizada para barras e vigas.

Apresenta-se de forma resumida a derivação da relação a partir da equação de movimento de uma onda harmônica que foi obtida por SOUZA et al. (2020).

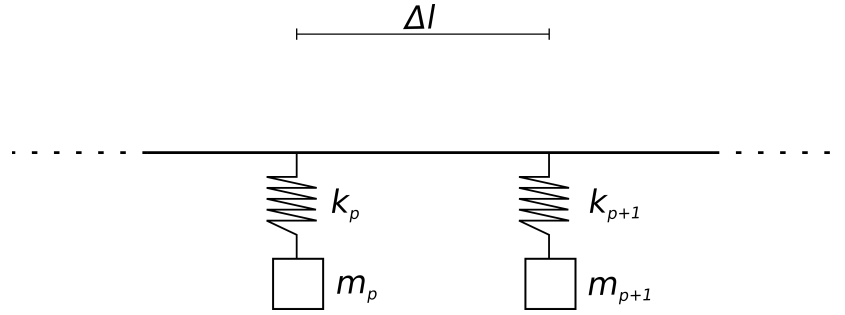


Figura 3.11 – Modelo de metaestrutura com ressonadores acoplados.

Considerando, inicialmente, o sistema contínuo descrito na Figura 3.11 com uma quantidade S de ressonadores periódicos acoplados. A equação de movimento para este sistema pode ser dada pela forma geral

$$L(x)w(x, t) + \mu\ddot{w}(x, t) - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \delta(x - x_p) = p(x, t). \quad (3.38)$$

Acrescenta-se, ainda, a relação adicional para cada um dos ressonadores, dada por

$$m_p \ddot{u}_p(t) + k_p u_p(t) + m_p \ddot{w}(x_p, t) = 0, \quad (3.39)$$

onde $u_p(t)$ representa o deslocamento de cada um dos ressonadores com massa m_p e rigidez k_p , acoplados na posição x_p e $\delta(x)$ representa a função delta de Dirac. Esta expressão foi originalmente proposta para tratar de análises modais em metaestruturas (SUGINO et al., 2017), porém também pode ser utilizada para definir a equação de dispersão para estruturas com ressonadores acoplados. Se for assumido movimento harmônico no tempo, é possível realizar as substituições de u_p e w e de suas derivadas e as Equações 3.38 e 3.39 passarão a obter a forma

$$L(x)W(x) - \omega^2 \mu W(x) - \sum_{p=1}^S k_p U_p \delta(x - x_p) = P(x), \quad (3.40)$$

$$-\omega^2 m_p U_p - \omega^2 m_p U(x_p) + k_p U_p = 0. \quad (3.41)$$

Assumindo que os ressonadores são idênticos e não irão alterar os modos de onda. Para um número grande o suficiente de ressonadores acoplados, é possível obter derivar a relação descrita na Equação 3.42 para uma onda harmônica.

$$L(-ik) - \mu\omega^2 \left(1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2}\right) = 0 \quad (3.42)$$

onde Ω e ϵ representam a razão entre as frequências angulares e a razão entre massas, respectivamente.

$$\Omega_r = \frac{\omega}{\omega_r} \quad (3.43)$$

$$\epsilon = \frac{m_p}{\mu\delta l} \quad (3.44)$$

Aplicando os operadores L adequados na Equação 3.42 e a resolvendo em função do número de onda, é possível obter os números de onda longitudinal e flexural efetivos, que são dados, respectivamente, por

$$k_{rl} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E} \left(1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2}\right)}, \quad (3.45)$$

$$k_{rb} = \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{\rho A}{EI} \left(1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2}\right)}. \quad (3.46)$$

Para regimes de frequência bem menores que a frequência natural do ressonador, isto é $\Omega \ll 1$, as Equações 3.45 e 3.46 podem ser simplificadas, obtendo a forma

$$k_{rl} \approx \omega \sqrt{\frac{\rho(1 + \epsilon)}{E}}, \quad (3.47)$$

$$k_{rb} \approx \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{\rho A(1 + \epsilon)}{EI}}, \quad (3.48)$$

indicando que a metaestrutura estará se comportando como uma estrutura simples, havendo apenas uma adição de massa que é devido à massa dos ressonadores acoplados.

Considerando, agora, regimes de frequência bem maiores que a frequência do ressonador, isto é, $\Omega \gg 1$, tem-se

$$k_{rl} \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{E} \left(1 - \frac{\epsilon}{\Omega_r^2}\right)} \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (3.49)$$

$$k_{rb} \approx \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{\rho A}{EI} \left(1 - \frac{\epsilon}{\Omega_r^2}\right)} \approx \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad (3.50)$$

que, por sua vez, são semelhantes aos números de onda que foram obtidos para barras axiais e vigas de Euler-Bernoulli. Logo, conclui-se que para uma onda com frequências que levam a $\Omega \gg 1$, uma metaestrutura irá se comportar como uma estrutura simples sem a adição de massa dos ressonadores.

Ainda, de acordo com SUGINO et al. (2017), é possível prever o intervalo de atenuação (ou, *bandgap*) de uma metaestrutura com um número de ressonadores infinitos, a partir da relação

$$f_r < f < f_r \sqrt{1 + \epsilon}, \quad (3.51)$$

em que f_r indica a frequência natural de oscilação dos ressonadores.

A partir da relação da Equação 3.51, é possível dizer que o intervalo de atenuação irá ter início quando a estrutura atinge a mesma frequência do ressonador. Quanto maior for o número de ressonadores, maior será a razão de massa ϵ , e, conseqüentemente, maior será a largura do intervalo de atenuação.

Para ondas longitudinal e de flexão que se propagam ao longo de uma estrutura feita de um metamaterial localmente ressonante, plota-se a curva de dispersão mostrada na Figura 3.12. Percebe-se que a relação entre o número de onda e a frequência angular é bem parecida com a que foi obtida nas Figuras 3.8 e 3.30 para a onda longitudinal e a de flexão, respectivamente. É apresentado apenas uma diferença nos valores atingidos para os números de onda, levando à conclusão de que os números de onda de uma metaestrutura são maiores do que os obtidos para uma estrutura comum para um mesmo valor da frequência angular.

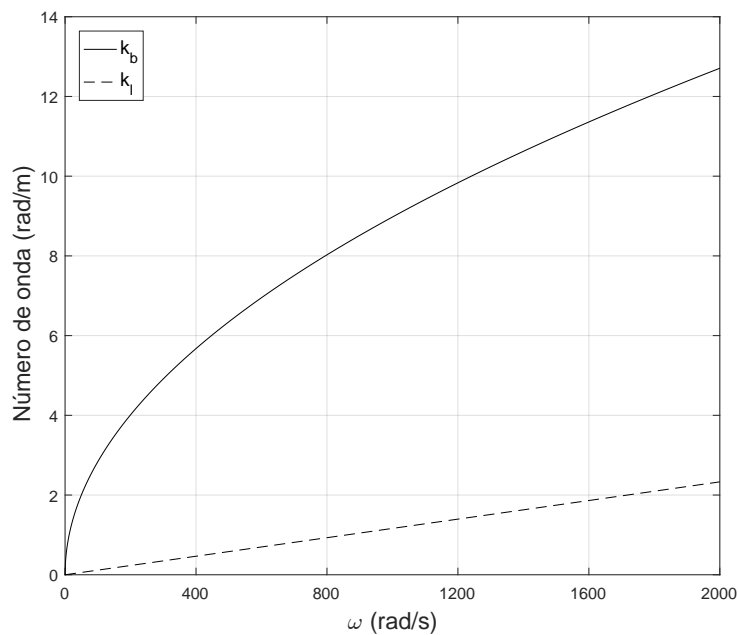


Figura 3.12 – Curva de dispersão para ondas longitudinais e de flexão que se propagam em uma metaestrutura.

4 Modelagem Matemática

Neste capítulo, serão propostos os modelos a serem analisados. Deseja-se definir os coeficientes de transmissão e de reflexão das ondas. Para isso, utiliza-se o método geral da matriz de espalhamento descrito por Harland, Mace e Jones (2001).

4.1 Modelo Baseado em Propagação de Ondas

Para determinar os coeficientes de reflexão e transmissão nas regiões onde há junções ou discontinuidades, o método da matriz de espalhamento relaciona o deslocamento e as forças internas causadas pelas ondas propagantes em uma seção transversal com as amplitudes da mesma. Com o intuito de simplificar a explicação, será suprimido a dependência do tempo sem que sejam comprometidos os resultados.

Primeiramente, é conveniente, para o desenvolvimento da solução, agrupar as amplitudes das ondas que se propagam pela estrutura em vetores de amplitude de ondas propagando-se na direção positiva e negativa. Assim, para uma estrutura com n tipos de ondas, os vetores das amplitudes positivas e negativas podem ser descritos, respectivamente, como

$$\mathbf{a}^+ = \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ a_2^+ \\ \vdots \\ a_n^+ \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_2^- \\ \vdots \\ a_n^- \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Os graus de liberdade e os esforços internos são utilizados para descrever o estado de uma seção transversal. Ambos podem ser descritos utilizando os vetores de amplitude de onda mostrados na seção anterior. Para isso, lembra-se que, anteriormente, foi possível definir o campo de deslocamento de uma barra $u(x, t)$ e de uma viga $w(x, t)$ como

$$u(x, t) = (a_l^+ e^{-ik_l x} + a_l^- e^{ik_l x}) e^{i\omega t}, \quad (4.2)$$

$$w(x, t) = (a_b^+ e^{-ik_b x} + a_{bN}^+ e^{-k_b x} + a_b^- e^{ik_b x} + a_{bN}^- e^{k_b x}) e^{i\omega t}. \quad (4.3)$$

Sabe-se que o momento fletor M , a força de cisalhamento Q e a força longitudinal N podem ser calculados por

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

$$Q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad (4.5)$$

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Partindo-se de um uma viga simples do tipo Euler-Bernoulli como exemplo, o deslocamento e a inclinação de uma seção transversal podem ser escrito em função dos vetores de amplitude de onda como

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^+ + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}^-, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \begin{bmatrix} -ik & k \end{bmatrix} \mathbf{a}^+ + \begin{bmatrix} ik & k \end{bmatrix} \mathbf{a}^-. \quad (4.8)$$

Da mesma maneira, a força de cisalhamento e o momento fletor de uma onda de flexão, são dados por

$$Q = EI \begin{bmatrix} -ik^3 & k^3 \end{bmatrix} \mathbf{a}^+ + EI \begin{bmatrix} ik^3 & -k^3 \end{bmatrix} \mathbf{a}^-, \quad (4.9)$$

$$M = EI \begin{bmatrix} -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^+ + EI \begin{bmatrix} -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \mathbf{a}^-. \quad (4.10)$$

4.1.1 Deslocamentos e forças internas

Nesse caso, também é conveniente agrupar todos os graus de liberdade de uma seção transversal em um vetor conhecido como *vetor de deslocamentos*, \mathbf{w} e também agrupar todos os esforços internos atuantes no *vetor de forças internas*, \mathbf{f} .

No caso geral, agrupando-se ondas longitudinais em barras com ondas de flexão em vigas, tem-se

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \\ u \end{Bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \\ N \end{Bmatrix}. \quad (4.12)$$

Já para uma viga de Euler-Bernoulli, esses vetores podem ser escritos como

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Define-se, agora, Ψ^+ e Ψ^- como as *matrizes de deslocamento* para ondas que se propagam na direção positiva ou negativa do eixo x . Essas matrizes são as que expressam

a relação entre os vetores de deslocamento e forças internas com o vetor de amplitude de onda, isto é

$$\mathbf{w} = \Psi^+ \mathbf{a}^+ + \Psi^- \mathbf{a}^-. \quad (4.15)$$

De maneira similar, Φ^+ e Φ^- são definidas como as *matrizes de forças internas* para ondas que se propagam na direção positiva ou negativa do eixo x. Assim,

$$\mathbf{f} = \Phi^+ \mathbf{a}^+ + \Phi^- \mathbf{a}^-. \quad (4.16)$$

As matrizes de sentido positivo podem ser relacionadas com as matrizes de sentido negativo pelas relações

$$\Psi^- = \psi \Psi^+, \quad (4.17)$$

$$\Phi^- = \phi \Phi^+, \quad (4.18)$$

onde ψ e ϕ são matrizes diagonais cujos componentes podem ser ± 1 . Elas podem, ainda, se relacionar como

$$\phi = -\psi. \quad (4.19)$$

Para um caso mais geral, as matrizes Ψ e Φ podem ser obtidas combinando as definições 4.11 e 4.12 com as relações 4.15 e 4.16. Fazendo isso para uma viga Euler-Bernoulli, obtém-se que

$$\Psi^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & -k \end{bmatrix}, \quad \Psi^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik & k \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\Phi^+ = \begin{bmatrix} -iEIk^3 & EIk^3 \\ -EIk^2 & EIk^2 \end{bmatrix}, \quad \Phi^- = \begin{bmatrix} iEIk^3 & -EIk^3 \\ -EIk^2 & EIk^2 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

4.1.2 Extremidades de uma estrutura

Uma onda de amplitude \mathbf{a}^+ incide sobre a estrutura mostrada na Figura 4.1. Ao atingir sua extremidade, a onda gera uma onda refletida de amplitude \mathbf{a}^- . É possível definir equações de equilíbrio a partir da relação

$$\mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes cujos elementos são dependentes da frequência e são complexos e \mathbf{w} e \mathbf{f} são os, respectivamente, os vetores de deslocamento e forças internas, como definido anteriormente.

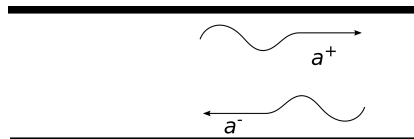


Figura 4.1 – Onda ao atingir extremidade da estrutura.

Foi visto no capítulo anterior, que a razão entre a onda refletida e a onda incidente é conhecida como o coeficiente de reflexão

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}^-}{\mathbf{a}^+}. \quad (4.23)$$

Partindo-se da Equação 4.22 e substituindo pelas definições de \mathbf{f} e \mathbf{w} dadas nas Equações 4.11 e 4.12, obtém-se a relação

$$\mathbf{A}(\Phi^+ \mathbf{a}^+ + \Phi^- \mathbf{a}^-) + \mathbf{B}(\Psi^+ \mathbf{a}^+ + \Psi^- \mathbf{a}^-) = 0. \quad (4.24)$$

Realizando algumas manipulações, tem-se que

$$\mathbf{a}^+(\mathbf{A}\Phi^+ + \mathbf{B}\Psi^+) + \mathbf{a}^-(\mathbf{A}\Phi^- + \mathbf{B}\Psi^-) = 0. \quad (4.25)$$

Utilizando a definição do coeficiente de reflexão e assumindo-se \mathbf{a}^+ não nulo, obtém-se

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}\Phi^- + \mathbf{B}\Psi^-) = -(\mathbf{A}\Phi^+ + \mathbf{B}\Psi^+) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{r} = -(\mathbf{A}\Phi^- + \mathbf{B}\Psi^-)^{-1}(\mathbf{A}\Phi^+ + \mathbf{B}\Psi^+). \quad (4.27)$$

A Equação 4.27 determina o coeficiente de reflexão em função das amplitudes das ondas incidentes e refletidas. Nos casos em que o resultado de \mathbf{r} dá uma matriz diagonal, indica-se que não ocorreu nenhuma conversão do tipo de onda. Particularmente, nesse trabalho podemos ter conversão entre ondas longitudinais e de flexão, propagantes e evanescente

4.1.3 Acoplamentos de estruturas

Conforme mencionado anteriormente, é comum que ocorram descontinuidades ao longo do comprimento de uma estrutura. Essas descontinuidades podem ser qualquer tipo de acoplamento como molas, amortecedores, mudança de seção ou de material e etc ou qualquer tipo de apoio. Tipicamente, uma onda, ao incidir sobre tais descontinuidade, é parcialmente refletida e parcialmente transmitida ao longo da estrutura. No geral, pode ocorrer uma conversão do tipo de onda.

Considerando-se o modelo da Figura 4.2. Duas vigas, a e b , são conectadas por uma junta j . A quantidade de modos de onda nas vigas a e b são n_a e n_b , respectivamente, sendo que n_a não é necessariamente igual a n_b . Ao atingir a junta de conexão, as ondas incidentes \mathbf{a}_j^+ e \mathbf{b}_j^- se dispersam e originam as ondas \mathbf{a}_j^- e \mathbf{b}_j^+ , que são combinações das ondas refletidas e transmitidas pelas ondas incidentes em cada uma das estruturas.

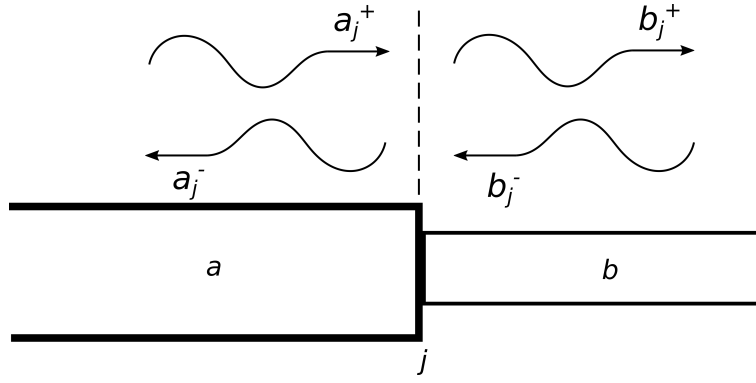


Figura 4.2 – Superposição de ondas refletidas e transmitidas em uma estrutura com um tipo de junção.

No ponto de junção entre as estruturas, os vetores de deslocamento e força interna para uma seção da estrutura a são dados por

$$\mathbf{w}_a = \Psi_a^+ \mathbf{a}_j^+ + \Psi_a^- \mathbf{a}_j^-, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{f}_a = \Phi_a^+ \mathbf{a}_j^+ + \Phi_a^- \mathbf{a}_j^-. \quad (4.29)$$

Similarmente, para uma seção da estrutura b , tem-se

$$\mathbf{w}_b = \Psi_b^+ \mathbf{b}_j^+ + \Psi_b^- \mathbf{b}_j^-, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{f}_b = \Phi_b^+ \mathbf{b}_j^+ + \Phi_b^- \mathbf{b}_j^-. \quad (4.31)$$

Como as estruturas a e b estão fisicamente conectadas, é possível definir as relações de continuidade

$$\mathbf{C}_a \mathbf{w}_a = \mathbf{C}_b \mathbf{w}_b, \quad (4.32)$$

e equilíbrio

$$\mathbf{E}_a \mathbf{f}_a = \mathbf{E}_b \mathbf{f}_b, \quad (4.33)$$

onde $\mathbf{C}_{a,b}$ são as matrizes chamadas de continuidade e $\mathbf{E}_{a,b}$ matrizes de equilíbrio.

Substituindo as definições dos vetores \mathbf{w} e \mathbf{f} nas Equações 4.32 e 4.33 e agrupando as equações, é possível obter a relação

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \Psi_a^- & \mathbf{C}_b \Psi_b^+ \\ -\mathbf{E}_a \Phi_a^- & \mathbf{E}_b \Phi_b^+ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^- \\ \mathbf{b}_j^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a \Psi_a^+ & -\mathbf{C}_b \Psi_b^- \\ \mathbf{E}_a \Phi_a^+ & -\mathbf{E}_b \Phi_b^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^+ \\ \mathbf{b}_j^- \end{Bmatrix}. \quad (4.34)$$

Assumindo que a matriz do lado esquerdo possui inversa, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^- \\ \mathbf{b}_j^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \Psi_a^- & \mathbf{C}_b \Psi_b^+ \\ -\mathbf{E}_a \Phi_a^- & \mathbf{E}_b \Phi_b^+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a \Psi_a^+ & -\mathbf{C}_b \Psi_b^- \\ \mathbf{E}_a \Phi_a^+ & -\mathbf{E}_b \Phi_b^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^+ \\ \mathbf{b}_j^- \end{Bmatrix}. \quad (4.35)$$

Nota-se que se utilizamos as definições dos coeficientes de reflexão e transmissão, Equações 3.14 e 3.15, e o conceito de superposição de ondas, as amplitudes \mathbf{a}_j^- e \mathbf{b}_j^+ também podem ser dadas por

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^- \\ \mathbf{b}_j^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{aa} & \mathbf{t}^{ba} \\ \mathbf{t}^{ab} & \mathbf{r}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j^+ \\ \mathbf{b}_j^- \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

onde \mathbf{r} e \mathbf{t} representam os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. Os sobrescritos indicam a onda incidente e a onda refletida ou transmitida.

A matriz da Equação 4.36 é conhecido como sendo a *matriz de espalhamento*, \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{aa} & \mathbf{t}^{ba} \\ \mathbf{t}^{ab} & \mathbf{r}^{bb} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Comparando as Equações 4.35 e 4.36, é possível criar uma nova definição matemática para os coeficientes de transmissão e reflexão

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^{aa} & \mathbf{t}^{ba} \\ \mathbf{t}^{ab} & \mathbf{r}^{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \Psi_a^- & \mathbf{C}_b \Psi_b^+ \\ -\mathbf{E}_a \Phi_a^- & \mathbf{E}_b \Phi_b^+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a \Psi_a^+ & -\mathbf{C}_b \Psi_b^- \\ \mathbf{E}_a \Phi_a^+ & -\mathbf{E}_b \Phi_b^- \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

O resultado da Equação 4.38 é valido para todos os casos gerais. É importante frisar que a ordem dos coeficientes de reflexão e de transmissão na matriz vai depender da maneira que os vetores de amplitude foram organizados.

4.1.4 Acoplamentos localizados

Como último caso, considere os fenômenos de reflexão e transmissão gerados numa junção que possui uma mola, massa ou acoplamento. Nessa situação, a equação de continuidade continuará sendo dada por

$$\mathbf{C}_a \mathbf{w}_a = \mathbf{C}_b \mathbf{w}_b, \quad (4.39)$$

enquanto que, a equação de equilíbrio passará a ser dada por

$$\mathbf{E}_b \mathbf{f}_b - \mathbf{E}_a \mathbf{f}_a = \mathbf{K} \mathbf{w}_a, \quad (4.40)$$

onde \mathbf{K} é conhecida como *matriz de rigidez dinâmica* que pode conter elementos complexos em função da frequência dependendo do tipo de acoplamento.

Fazendo as mesmas manipulações feitas para o caso anterior, obtém-se que os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser dados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}^{aa} & \mathbf{t}^{ba} \\ \mathbf{t}^{ab} & \mathbf{r}^{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_a \Psi_a^- & \mathbf{C}_b \Psi_b^+ \\ -(\mathbf{E}_a \Phi_a^- + \mathbf{K} \Psi_a^-) & \mathbf{E}_b \Phi_b^+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a \Psi_a^+ & -\mathbf{C}_b \Psi_b^- \\ (\mathbf{E}_a \Phi_a^+ + \mathbf{K} \Psi_a^+) & -\mathbf{E}_b \Phi_b^- \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

4.2 Modelos Propostos

Nesta seção, será aplicada toda a metodologia descrita para analisar diferentes tipos de estruturas com diferentes tipos de junções, descontinuidades e/ou acoplamentos. Os cálculos desenvolvidos para determinar os coeficientes de reflexão e de transmissão para cada um dos modelos serão feitos com auxílio do software MATLAB por envolverem operações matriciais um pouco complexas.

4.2.1 Viga semi-infinita com apoio simples

O primeiro modelo a ser estudado, é um modelo de uma viga semi-infinita sem amortecimento e com um apoio simples em sua extremidade, vide Figura 4.3. Uma onda de flexão harmônica se propaga com sentido positivo ao longo de todo seu comprimento. Esta onda, ao atingir a extremidade apoiada, é inteiramente refletida e transformada em uma onda de reflexão que se propaga com sentido contrário. Parte da onda incidente pode ter sido convertida em onda evanescente de amplitude a_N^- e parte em uma onda harmônica propagante de amplitude a^- . Para determinar os coeficientes de reflexão e transmissão será utilizado o procedimento descrito na Seção 4.1.2.

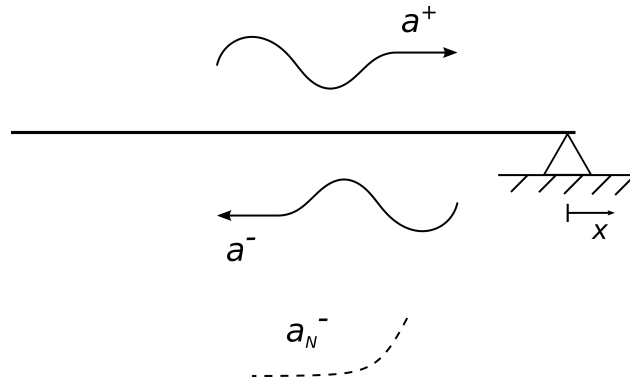


Figura 4.3 – Propagação de uma onda de flexão em um modelo de viga semi-infinita com apoio simples em uma extremidade.

A equação que descreve o deslocamento de onda na estrutura é dada por

$$w = a^+ e^{-ik_b x} e^{i\omega t} + (a^- e^{ik_b x} + a_N^- e^{k_b x}) e^{i\omega t}. \quad (4.42)$$

Primeiramente, define-se os vetores de amplitudes de onda como sendo

$$\mathbf{a}^+ = \begin{Bmatrix} a^+ \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^- = \begin{Bmatrix} a^- \\ a_N^- \end{Bmatrix}. \quad (4.43)$$

A partir de suas definições, as matrizes de deslocamento e forças internas para a posição $x = 0$ serão

$$\mathbf{\Psi}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\Phi^+ = \begin{bmatrix} -EIk_b^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi^- = \begin{bmatrix} -EIk_b^2 & EIk_b^2 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Devido ao apoio na posição $x = 0$ o deslocamento e o momento fletor são nulos. Dessa forma, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são dados por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Substituindo todas as incógnitas da Equação 4.27 e resolvendo as operações com o MATLAB, obtém-se

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

A partir desse resultado, conclui-se que a onda harmônica incidente é inteiramente convertida em uma outra onda harmônica propagante sem que seja gerada nenhuma parte evanescente.

4.2.2 Barras de materiais e seções transversais diferentes

Na Figura 4.4, é mostrada uma estrutura com duas barras feitas de materiais com propriedades diferentes. Essas barras são conectadas por uma junção na posição de $x = 0$. Um onda longitudinal de amplitude a_1^+ se propaga ao longo da barra 1. Ao atingir a interface que conecta as duas barras, parte da onda incidente se transforma numa onda de amplitude a_1^- que é refletida de volta para a barra 1, enquanto que a outra parte é transmitida para a estrutura 2 com uma amplitude a_2^+ .

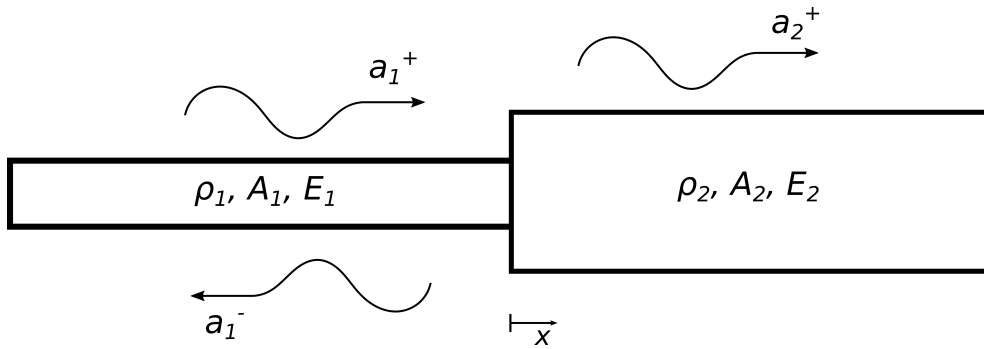


Figura 4.4 – Propagação de onda longitudinal em um acoplamento de barras de diferentes propriedades.

As equações que descrevem os campos de deslocamentos das ondas longitudinais são

$$u_1 = (a_1^+ e^{-ik_1 x} + a_1^- e^{ik_1 x}) e^{i\omega t}, \quad (4.48)$$

$$u_2 = a_2^+ e^{-ik_2 x} e^{i\omega t}. \quad (4.49)$$

Para obter os coeficientes de reflexão e transmissão, utiliza-se o procedimento de solução descrito na Seção 4.1.3. Os vetores de amplitude de onda para esta estrutura são dados por

$$\mathbf{a}_1^+ = \{a_1^+\}, \quad \mathbf{a}_1^- = \{a_1^-\}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \{a_2^+\}. \quad (4.50)$$

Na junção entre as duas barras, isto é, na posição $x = 0$, os vetores de deslocamento e de forças internas serão

$$\mathbf{w} = \{u\}, \quad \mathbf{f} = \{N\}. \quad (4.51)$$

Dessa maneira, as matrizes de deslocamento e de forças internas serão

$$\Psi_1^+ = \Psi_1^- = \Psi_2^+ = [1], \quad (4.52)$$

$$\Phi_1^+ = [-iE_1A_1k_1], \quad \Phi_1^- = [iE_1A_1k_1], \quad \Phi_2^+ = [-iE_2A_2k_2]. \quad (4.53)$$

As condições de contorno do modelo dizem que na posição 0 haverá equilíbrio da força normal e o deslocamento será nulo. Dessa forma, as matrizes de continuidade e equilíbrio serão

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{E}_2 = [1]. \quad (4.54)$$

Dessa maneira, é possível obter como resultado a matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2A_1E_1k_1 \\ A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2 \\ A_1E_1k_1 - A_2E_2k_2 \\ A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

donde exprime-se que os coeficientes serão

$$\mathbf{t} = \frac{2A_1E_1k_1}{A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2}, \quad \mathbf{r} = \frac{A_1E_1k_1 - A_2E_2k_2}{A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2}. \quad (4.56)$$

4.2.3 Barras idênticas conectadas por massa pontual

Na Figura 4.5 é mostrada duas barras que estão sendo conectadas por uma massa pontual m . Uma onda longitudinal de amplitude a_1^+ se propaga no sentido positivo de x . Quando atinge a massa, a onda incidente é parcialmente refletida e parcialmente transmitida para a outra barra. Considerando que não haverá nenhuma absorção da onda pela massa, ou seja, a conexão é conservativa, é preciso determinar os coeficientes de reflexão e transmissão para a estrutura. Para isso será utilizado os procedimentos descritos na Seção 4.1.4.

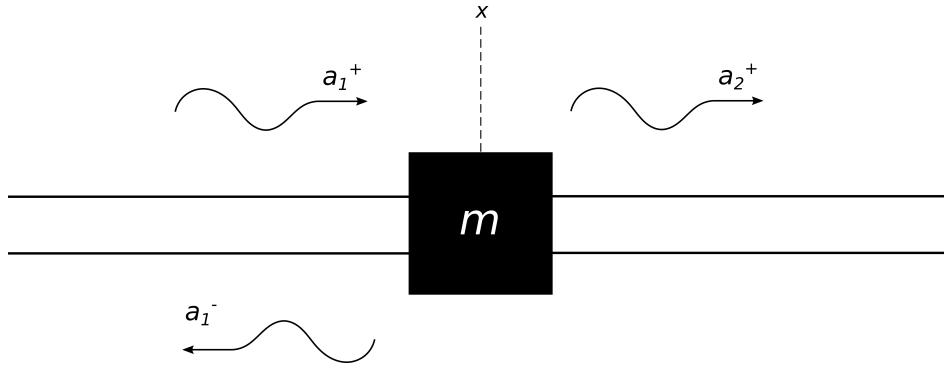


Figura 4.5 – Modelo de duas barras conectadas por uma massa.

As equações que descrevem o deslocamento das ondas na barra são

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_1^+ e^{-ik_1 x} + a_1^- e^{ik_1 x}) e^{i\omega t}, \\ u_2 &= a_2^+ e^{i(\omega t - k_1 x)}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Os vetores de amplitude e os vetores de deslocamento e de forças internas para a estrutura serão

$$\mathbf{a}_1^+ = \{a_1^+\}, \quad \mathbf{a}_1^- = \{a_1^-\}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \{a_2^+\}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{w} = \{u\}, \quad \mathbf{f} = \{N\}. \quad (4.59)$$

A conexão das barras com a massa causa, na posição $x = 0$, as condições de contorno:

- Condição de continuidade

$$u_1 = u_2 \quad (4.60)$$

- Equilíbrio de Forças

$$N_1 - N_2 = -m\omega^2 u_1 \quad (4.61)$$

Dessa maneira as matrizes de deslocamento e de forças internas e a matriz de rigidez serão dadas por

$$\Psi_1^+ = \Psi_1^- = \Psi_2^+ = [1], \quad (4.62)$$

$$\Phi_1^+ = [-iEAk_l], \quad \Phi_1^- = [iEAk_l], \quad \Phi_2^+ = [-iEAk_l], \quad (4.63)$$

$$\mathbf{K} = [m\omega^2] \quad (4.64)$$

e as matrizes de continuidade e de equilíbrio por

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = [1]. \quad (4.65)$$

Com as matrizes definidas, realizam-se os cálculos matriciais necessários com o MATLAB, obtendo o resultado para a matriz de espalhamento

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{-2EAk_l}{im\omega^2 - 2EAk_l} \\ \frac{-im\omega^2}{im\omega^2 - 2EAk_l} \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Como nesse caso, os coeficientes de transmissão e de reflexão serão

$$\mathbf{t} = \frac{-2EAk_l}{im\omega^2 - 2EAk_l}, \quad \mathbf{r} = \frac{-im\omega^2}{im\omega^2 - 2EAk_l}. \quad (4.67)$$

4.2.4 Viga infinita com apoio simples

Em uma viga infinita apoiada com um tipo de apoio simples, é incidida uma onda de amplitude \mathbf{a}_1^+ . Esta onda, assim que atinge o ponto de apoio, se dispersa e gera ondas de reflexão e transmissão. O modelo pode ser visto na Figura 4.6.

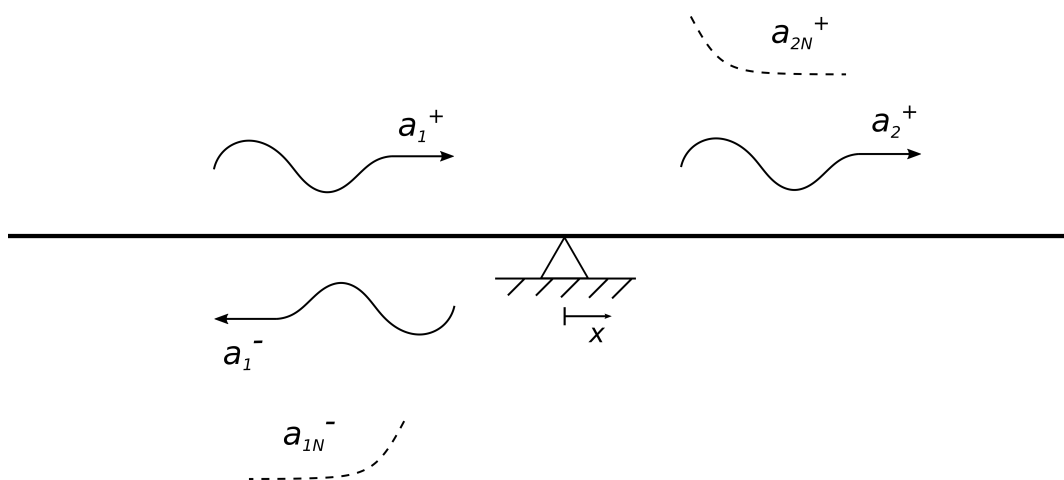


Figura 4.6 – Onda de flexão se propaga ao longo de uma viga infinita com apoio simples.

As equações que descrevem o deslocamento nas partes 1 e 2 da estrutura são

$$w_1 = (a_1^+ e^{-ik_b x} + a_1^- e^{ik_b x} + a_{1N}^- e^{k_b x}) e^{i\omega t}, \quad (4.68)$$

$$w_2 = (a_2^+ e^{-ik_b x} + a_{2N}^+ e^{-k_b x}) e^{i\omega t}. \quad (4.69)$$

As condições de contorno para este modelo no ponto de apoio ($x = 0$) serão:

- Deslocamento nulo

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0 \quad (4.70)$$

- Inclinação constante

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (4.71)$$

- Momento fletor constante

$$M_1 = M_2 \quad (4.72)$$

Os vetores de amplitude de onda e os vetores de deslocamento e de forçar internas serão

$$\mathbf{a}_1^+ = \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_{1N}^- \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \begin{Bmatrix} a_2^+ \\ a_{2N}^+ \end{Bmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \{M\}. \quad (4.74)$$

Dessa maneira, as matrizes de deslocamento e de forças internas serão dadas por

$$\Psi_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ik_b & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_b & k_b \end{bmatrix}, \quad \Psi_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik_b & k_b \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

$$\Phi_1^+ = [-EIk_b^2 \ 0], \quad \Phi_1^- = [-EIk_b^2 \ EIk_b^2], \quad \Phi_2^+ = [-EIk_b^2 \ EIk_b^2]. \quad (4.76)$$

A partir das condições de contorno, é possível definir as matrizes de equilíbrio e de continuidade como sendo

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = [1]. \quad (4.77)$$

Dessa maneira, obtém-se como resultado para a matriz de espalhamento

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1-i) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Do resultado temos que os coeficientes de reflexão e de transmissão serão, respectivamente

$$\mathbf{r} = \frac{a_1^-}{a_1^+} = \frac{-1}{2}(1+i), \quad \mathbf{r}_N = \frac{a_{1N}^-}{a_1^+} = \frac{-1}{2}(1-i), \quad (4.79)$$

$$\mathbf{t} = \frac{a_2^+}{a_1^+} = \frac{1}{2}(1-i), \quad \mathbf{t}_N = \frac{a_{2N}^+}{a_1^+} = \frac{-1}{2}(1-i). \quad (4.80)$$

4.2.5 Viga apoiada sobre mola

O modelo anterior estuda os efeitos causados nos coeficientes de reflexão e transmissão quando se tem uma estrutura com um apoio simples. Os resultados obtidos não dependem de nenhuma variável, são os mesmos independente das propriedades do apoio simples. O que aconteceria com os coeficientes se o suporte fosse trocado por uma mola? Considera-se, então, que esta mesma viga agora está apoiada por uma mola com constante elástica κ . Na Figura 4.7, é possível ver o esquema do modelo após o momento que a onda de flexão atinge a mola na posição $x = 0$.

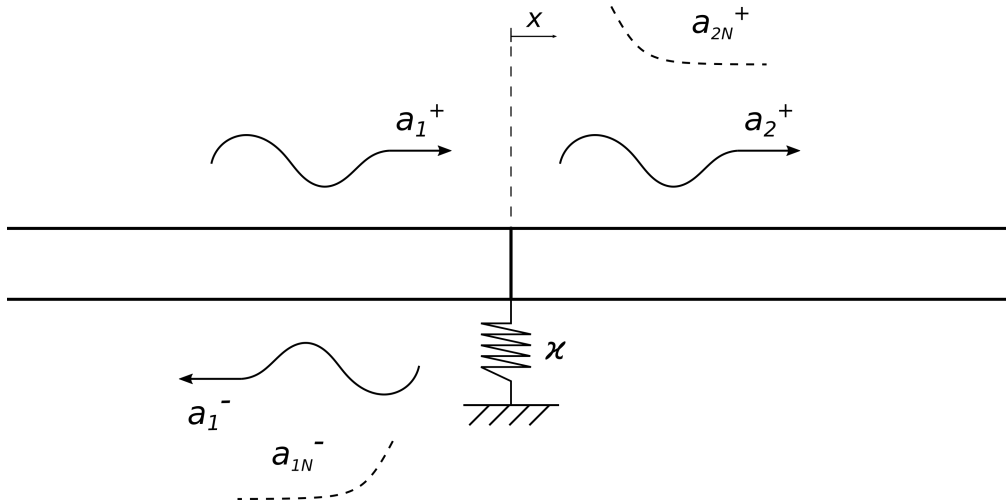


Figura 4.7 – Propagação de uma onda de flexão em uma viga apoiada por mola.

O deslocamento em pontos anterior e posterior ao acoplamento são dados, respectivamente, por

$$w_1 = (a_1^+ e^{-ik_b x} + a_1^- e^{ik_b x} + a_{1N}^- e^{k_b x}) e^{i\omega t}, \quad (4.81)$$

$$w_2 = (a_2^+ e^{-ik_b x} + a_{2N}^+ e^{-k_b x}) e^{i\omega t}. \quad (4.82)$$

A presença da mola faz com que na região do acoplamento ($x = 0$) ocorram as relações de contorno

- Continuidade no deslocamento

$$w_1 = w_2 \quad (4.83)$$

- Inclinação constante

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad (4.84)$$

- Momento fletor constante

$$M_1 = M_2 \quad (4.85)$$

- Equilíbrio de forças

$$Q_1 - Q_2 + F_\kappa = 0 \quad (4.86)$$

A força F_κ representa o esforço da mola e pode ser dada por

$$F_\kappa = -\kappa x. \quad (4.87)$$

Os vetores de amplitude da onda serão dados por

$$\mathbf{a}_1^+ = \{a_1^+\}, \quad \mathbf{a}_1^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_{1N}^- \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \begin{Bmatrix} a_2^+ \\ a_{2N}^+ \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

e o vetor de deslocamento e o vetor de forças internas serão

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix}. \quad (4.89)$$

Conseqüentemente, as matrizes de deslocamento e de forças internas se tornarão

$$\Psi_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ik_b & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_b & k_b \end{bmatrix}, \quad \Psi_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik_b & -k_b \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

$$\Phi_1^+ = \begin{bmatrix} -iEI k_b^3 & 0 \\ -EI k_b^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{bmatrix} iEI k_b^3 & -EI k_b^3 \\ -EI k_b^2 & EI k_b^2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2^+ = \begin{bmatrix} -iEI k_b^3 & EI k_b^3 \\ -EI k_b^2 & EI k_b^2 \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

As matrizes de continuidade e de equilíbrio dependem das condições de contorno. Assim, na região do acoplamento, as matrizes serão

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Como a mola causa um esforço na mola que interfere com a propagação da onda, será utilizado o método de Acoplamentos Localizados para a solução (Seção 4.1.4). Neste caso, a matriz de rigidez dinâmica depende das propriedades da mola, ela pode ser dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

Agora, que todas as matrizes estão definidas, pode-se partir para o cálculo da matriz de espalhamento. Substituindo, todas as variáveis no MATLAB obtém-se a matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{-\kappa}{4EI k_b^2} \\ \frac{\kappa}{4EI k_b^2} \\ \frac{4EI k_b^2 + \kappa}{4EI k_b^2} \\ \frac{-\kappa}{4EI k_b^2} \end{bmatrix}, \quad (4.94)$$

onde os coeficientes são

$$\mathbf{r} = \frac{-\kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{r}_N = \frac{\kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{t} = \frac{4EI k_b^2 + \kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{t}_N = \frac{-\kappa}{4EI k_b^2}. \quad (4.95)$$

4.2.6 Vigas semi-infinitas acopladas com ângulo entre elas

Partindo, agora, para um problema mais complexo. Estuda-se o modelo estrutural mostrado na Figura 4.8. Duas vigas semi-infinitas feitas de mesmo material e mesma seção transversal são acopladas no ponto O . Uma onda de flexão incide ao longo da primeira viga e se propaga no sentido positivo do eixo x_1 . Ao chegar no ponto de acoplamento, parte desta onda é refletida de volta e parte é transmitida para a outra viga. Devido ao ângulo α da segunda viga, ocorrerá também uma conversão do tipo de onda, isto é, serão transmitidas e refletidas ondas de flexão que irão se propagar nos planos (O, x_1, y_1) e (O, x_2, y_2) , e ondas longitudinais que irão se propagar ao longo dos eixos (O, x_1) e (O, x_2) .

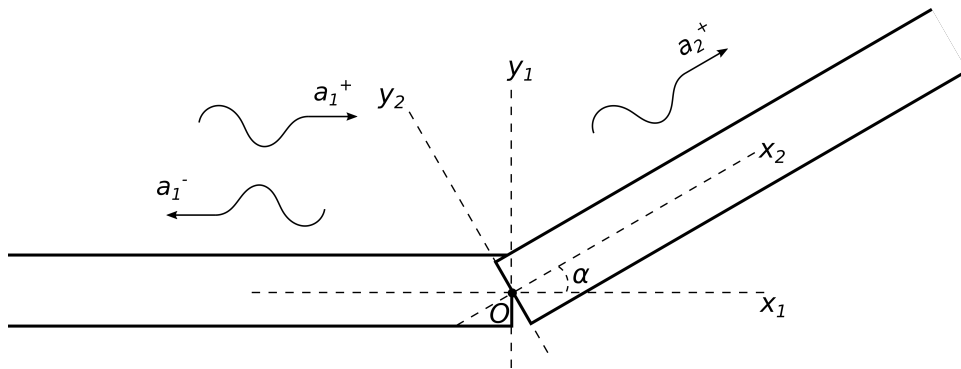


Figura 4.8 – Acoplamento angular de duas vigas semi-infinitas.

Primeiramente, defini-se as equações de deslocamento das ondas ao longo de ambas as vigas. Na viga 1 (posição $x_1 < 0$), além da onda incidente de flexão, uma onda propagante e uma outra evanescente são refletidas. Há ainda uma onda longitudinal causada também pelo fenômeno de reflexão. Dessa maneira, as equações de deslocamento para viga 1 serão dadas por

$$w_1 = a_1^+ e^{-ik_b x_1} + a_1^- e^{ik_b x_1} + a_{1N}^- e^{k_b x_1}, \quad (4.96)$$

$$u_1 = b_1^- e^{ik_l x_1}. \quad (4.97)$$

Já para a viga 2 (posição $x_2 > 0$), o fenômeno de transmissão faz com que sejam geradas ondas de flexão propagante e evanescente e uma outra onda longitudinal. As equações de deslocamento da viga 2, serão

$$w_2 = a_2^+ e^{-ik_b x_2} + a_{2N}^+ e^{-k_b x_2}, \quad (4.98)$$

$$u_2 = b_2^+ e^{-ik_l x_2}. \quad (4.99)$$

Para poder solucionar o problema e determinar os coeficientes de reflexão e de transmissão, utiliza-se das condições de continuidade e de equilíbrio no ponto do acoplamento entre as vigas O , isto é, na posição em que $x_1 = x_2 = 0$, tem-se:

- Equações de continuidade do deslocamento

$$w_2 = w_1 \cos \alpha + u_1 \sin \alpha \quad (4.100)$$

$$u_2 = -w_1 \sin \alpha + u_1 \cos \alpha \quad (4.101)$$

- Equação de continuidade angular

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \quad (4.102)$$

- Equilíbrio de esforços fletores

$$EI \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \quad (4.103)$$

- Equilíbrio de forças

$$-EI \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} = -EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \cos \alpha + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sin \alpha \quad (4.104)$$

$$EA \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \sin \alpha + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cos \alpha \quad (4.105)$$

Para este modelo, os vetores de deslocamento e de forças internas serão

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \\ u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \\ N \end{Bmatrix}. \quad (4.106)$$

Por sua vez, os vetores de amplitudes serão descritos como

$$\mathbf{a}_1^+ = \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_{1N}^- \\ b_1^- \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^+ = \begin{Bmatrix} a_2^+ \\ a_{2N}^+ \\ b_2^+ \end{Bmatrix}. \quad (4.107)$$

Neste caso, as matrizes de deslocamento e de forças internas serão do tipo 3×3 , sendo dadas por

$$\Psi_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -ik_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^+ = \begin{bmatrix} -iEI k_b^3 & 0 & 0 \\ -EI k_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

$$\Psi_1^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ ik_b & k_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{bmatrix} iEI k_b^3 & -EI k_b^3 & 0 \\ -EI k_b^2 & EI k_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & iEA k_l \end{bmatrix}, \quad (4.109)$$

$$\Psi_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -ik_b & -k_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2^+ = \begin{bmatrix} -iEIk_b^3 & EIk_b^3 & 0 \\ -EIk_b^2 & EIk_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -iEAk_l \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

A partir das condições de contorno, as matrizes de continuidade e de equilíbrio serão, respectivamente

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.111)$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.112)$$

Devido ao tamanho das matrizes definidas e de sua complexidade, é de se esperar que o resultado para a matriz de espalhamento seja grande e também complexo. Realizando os cálculos com ajuda do MATLAB, obtém-se que a matriz de espalhamento \mathbf{T} possui formato 6×3 , porém apenas a primeira coluna possui resultados diferentes de 0, o que é de se esperar.

Modela-se o problema para o cálculo da matriz de espalhamento, colocando as amplitudes das ondas de flexão e das ondas longitudinais transmitidas e refletidas em função da amplitude da onda incidente, seguindo a relação:

$$\begin{Bmatrix} a_2^+ \\ a_1^- \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \{ a_1^+ \}. \quad (4.113)$$

A partir da definição dada para os vetores de amplitude da Equação 4.107, os resultados da matriz de espalhamento irão fornecer os coeficientes de transmissão e de reflexão seguindo a ordem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_b \\ \mathbf{t}_{bN} \\ \mathbf{t}_l \\ \mathbf{r}_b \\ \mathbf{r}_{bN} \\ \mathbf{r}_l \end{bmatrix}, \quad (4.114)$$

onde os subscritos \mathbf{b} e \mathbf{l} indicam que o coeficiente se refere a onda de flexão ou a onda longitudinal, respectivamente.

Os resultados finais para os coeficientes de transmissão e de reflexão calculados possuem dependência do ângulo α . Foram obtidas equações muito grandes e complexas, por isso, torna-se não muito prático escrever o resultado obtido neste trabalho como foi feito para os outros modelos. Como também é mais interessante para este trabalho estudar

os efeitos causados pela mudança do ângulo α , decide-se por omitir os resultados da matriz de espalhamento. O código criado para sua obtenção está presente no Apêndice A.1. Ele foi feito no MATLAB utilizando o pacote simbólico para que os resultados aparecessem em função das variáveis.

4.2.7 Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita

A partir dos resultados obtido para o modelo descrito na Seção 4.2.6, acrescenta-se uma nova viga inclinada ao lado esquerdo da estrutura, obtendo o modelo mostrado na Figura 4.9. Cada uma das vigas possui um ângulo de inclinação em relação à horizontal. Estes ângulos não são necessariamente iguais entre si, por isso são denotados por variáveis diferentes. Uma onda de flexão de amplitude a_1^+ incide na primeira viga, a viga da esquerda, e se propaga para o restante da estrutura. Ao atingir a região de interface entre as vigas, ocorre o fenômeno de transmissão e reflexão de ondas e, ainda, conversão do modo de onda. As ondas transmitidas para a viga finita, ao atingirem a interface com a terceira viga também sofrerão o fenômeno de conversão e serão parcialmente transmitida para a terceira viga e parcialmente refletida de volta para a segunda viga até atingirem sua interface com a primeira viga. Visto que este modelo nada mais é do que uma junção do modelo da Seção 4.2.6 com sua versão espelhada, para a realização da modelagem, serão utilizadas as mesmas relações de continuidade e equilíbrio.

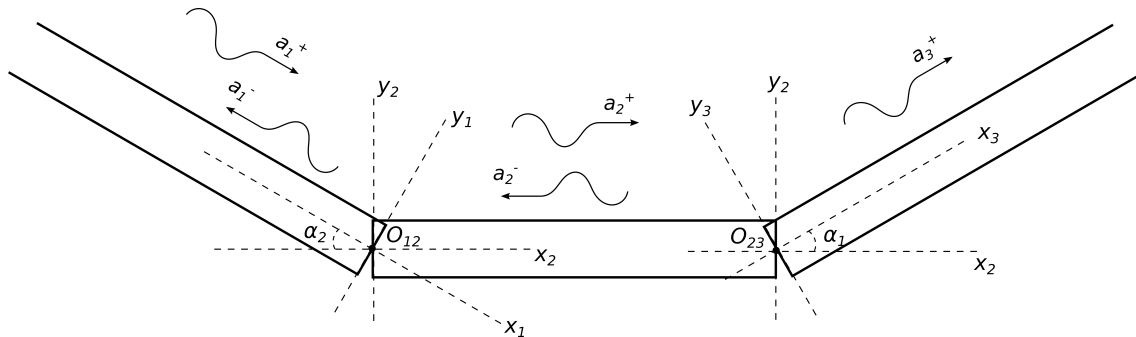


Figura 4.9 – Acoplamento entre vigas com um ângulo α_i em relação à viga horizontal.

Define-se que as ondas da primeira viga se propagam ao longo do plano $(O_{1,2}, x_1, y_1)$, as da segunda viga ao longo do plano (O, x_2, y_2) e da terceira viga ao longo do plano (O_{23}, x_3, y_3) . Para que se chegue a solução do problema, a modelagem será feita seguindo o sentido de propagação da onda incidente, isto é, primeiro define-se relações das ondas da primeira viga com as da segunda e, depois, das da terceira viga com a da segunda, para que, no fim, a partir das relações já definidas, possa-se relacionar também as ondas da terceira estrutura com a onda incidente. Pela Seção 4.2.6, foi determinado que na interface é possível definir as relações:

- Continuidade do deslocamento

$$w_2 = w_1 \cos \alpha_2 + u_1 \sin \alpha_2 \quad (4.115)$$

$$u_2 = -w_1 \text{sen } \alpha_2 + u_1 \text{cos } \alpha_2 \quad (4.116)$$

- Equação de continuidade angular

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \quad (4.117)$$

- Equilíbrio do momento fletor

$$EI \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \quad (4.118)$$

- Equilíbrio de forças

$$-EI \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} = -EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \text{cos } \alpha_2 + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \text{sen } \alpha_2 \quad (4.119)$$

$$EA \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \text{sen } \alpha_2 + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \text{cos } \alpha_2 \quad (4.120)$$

Estas mesmas relações podem ser utilizadas na interface entre a segunda e a terceira viga, gerando:

- Continuidade do deslocamento

$$w_3 = w_2 \text{cos } \alpha_1 + u_2 \text{sen } \alpha_1 \quad (4.121)$$

$$u_3 = -w_2 \text{sen } \alpha_1 + u_2 \text{cos } \alpha_1 \quad (4.122)$$

- Equação de continuidade angular

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \quad (4.123)$$

- Equilíbrio do momento fletor

$$EI \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} = EI \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \quad (4.124)$$

- Equilíbrio de forças

$$-EI \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3} = -EI \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} \text{cos } \alpha_1 + EA \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \text{sen } \alpha_1 \quad (4.125)$$

$$EA \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = EI \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} \text{sen } \alpha_1 + EA \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \text{cos } \alpha_1 \quad (4.126)$$

Realizando substituições e aplicando algumas identidades trigonométricas, é possível finalmente relacionar:

- Continuidade do deslocamento

$$w_3 = w_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + u_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.127)$$

$$u_3 = -w_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + u_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.128)$$

- Equação de continuidade angular

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \quad (4.129)$$

- Equilíbrio do momento fletor

$$EI \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} = EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \quad (4.130)$$

- Equilíbrio de forças

$$-EI \frac{\partial^3 w_3}{\partial x_3^3} = -EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.131)$$

$$EA \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + EA \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.132)$$

Com as condições de contorno já definidas, pode-se partir para a parte da modelagem. Como a estrutura está sujeita à propagação de ondas longitudinais e ondas de flexão, os vetores de deslocamento e de forças internas serão

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} Q \\ M \\ N \end{Bmatrix}. \quad (4.133)$$

e os vetores de amplitude serão

$$\mathbf{a}_1^+ = \begin{Bmatrix} a_1^+ \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1^- = \begin{Bmatrix} a_1^- \\ a_{1N}^- \\ b_1^- \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^+ = \begin{Bmatrix} a_3^+ \\ a_{3N}^+ \\ b_3^+ \end{Bmatrix}. \quad (4.134)$$

onde a representa as amplitudes das ondas de flexão e b das ondas longitudinais.

As matrizes de deslocamento e de forças internas serão

$$\Psi_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -ik_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^+ = \begin{bmatrix} -iEI k_b^3 & 0 & 0 \\ -EI k_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.135)$$

$$\Psi_1^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ ik_b & k_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{bmatrix} iEI k_b^3 & -EI k_b^3 & 0 \\ -EI k_b^2 & EI k_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & iEA k_l \end{bmatrix}, \quad (4.136)$$

$$\mathbf{\Psi}_3^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -ik_b & -k_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_3^+ = \begin{bmatrix} -iEIk_b^3 & EIk_b^3 & 0 \\ -EIk_b^2 & EIk_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -iEAk_l \end{bmatrix}. \quad (4.137)$$

E por fim, as matrizes de continuidade e de equilíbrio são definidas por

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.138)$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.139)$$

Com todas as matrizes definidas, pode-se realizar os cálculos para a obtenção da matriz de espalhamento \mathbf{T} . Os vetores são organizados de maneira que o resultado final apresentará os coeficientes de transmissão e reflexão das ondas longitudinais e de flexão seguindo a ordem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_b \\ \mathbf{t}_{bN} \\ \mathbf{t}_l \\ \mathbf{r}_b \\ \mathbf{r}_{bN} \\ \mathbf{r}_l \end{bmatrix}. \quad (4.140)$$

A matriz de espalhamento obtida para o modelo também é muito grande para ser reproduzida neste trabalho. Logo, será igualmente omitida. Porém, adianta-se que, os coeficientes de transmissão e os de reflexão das vigas irão depender dos ângulos α_1 e α_2 das vigas. O código criado para o cálculo da matriz de espalhamento também foi feito no MATLAB, ele está presente no Apêndice A.2.

5 Resultados Numéricos

Este capítulo se dedica a um estudo numérico do comportamento das amplitudes nas estruturas que foram modeladas. É estudado o efeito que uma mudança em determinada variável faz com o comportamento das ondas transmitidas e refletidas devido à descontinuidade. Inicialmente, os estudos serão feitos com vigas e barras de aço comum e, depois, com vigas e barras feitas de um metamaterial, para que se possa, assim, comparar as mudanças.

5.1 Análise Paramétrica

Com os resultados obtidos pela modelagem matemática de cada uma das estruturas, é possível perceber que em alguns casos, os coeficientes de transmissão e de reflexão dependem de algumas variáveis. Apenas dois dos modelos apresentados possuem coeficientes constantes com relação a qualquer mudança de propriedade da estrutura, são os modelos de viga com apoio simples. Todos os modelos restantes dependem de alguma outra variável, seja uma propriedade do material ou seja da descontinuidade. Nesta seção, deseja-se analisar o que ocorre com a amplitude das ondas transmitidas e das ondas refletidas quando ocorre alguma mudança nestas variáveis. Lembrando, que as amplitudes calculadas representam os coeficientes de transmissão e de reflexão, logo, estão todas em função da amplitude da onda incidente. As amplitudes consideradas serão dadas em módulo.

5.1.1 Barras de materiais e seções transversais diferentes

Os resultados dos coeficiente obtidos para o modelo de acoplamento entre estas duas barras dependem tanto das dimensões transversais das barras como também do material utilizado em cada uma delas. Deseja-se estudar qual seria o efeito causado por cada uma destas duas variáveis independente do efeito causado pela outra. Por isso, o estudo será dividido em partes.

5.1.1.1 Variação da seção transversal

Primeiramente, é estudado o que a diferença entre as áreas transversais de cada uma das barras causa na reflexão e na transmissão da onda longitudinal. Para isso, considera-se que as barras são feitas de mesmo material, no caso, aço SAE 1020. As principais propriedades do aço utilizado são dadas na Tabela 1. O raio da segunda barra é fixado como sendo de 300 mm enquanto o raio da primeira barra varia de 10 mm até 600 mm .

Utilizando o resultado da matriz de espalhamento dado na Equação 4.55, plota-se o gráfico que mostra a variação da amplitude das ondas de transmissão e de reflexão em função da razão entre as áreas, vide Figura 5.1. A frequência utilizada para a confecção do gráfico foi de 2000 Hz .

Tabela 1 – Propriedades de liga de aço SAE 1020.

E (GPa)	ρ (kg/m^3)
186	7870

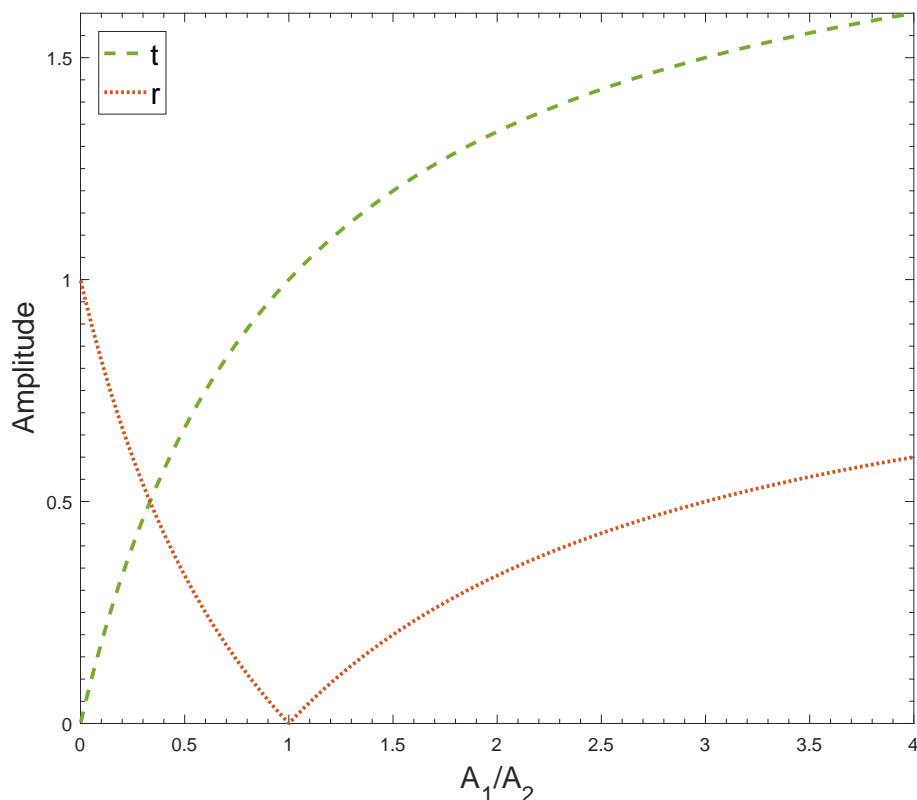


Figura 5.1 – Efeito causado pela variação da seção transversal no acoplamento de duas barras de mesmo material.

Observando os resultados mostrados no gráfico da Figura 5.1, é interessante notar, que assim que é obtido uma razão de áreas igual a 1, a amplitude da onda de reflexão se anula e a da onda de transmissão se torna igual a 1, indicando que a onda incidente foi inteiramente transmitida para a outra barra. Este é um resultado que era esperado e que comprova a confiabilidade da modelagem, pois quando as áreas são iguais quer dizer que não haverá nenhuma descontinuidade na estrutura, será apenas uma barra de mesma seção transversal e mesmo material, logo deve haver apenas transmissão da onda incidente.

Outro detalhe que se pode notar, é que quando a razão entre as áreas é nula, a amplitude de transmissão também se anula e a da reflexão, dessa vez, se torna igual a 1. Para que isto ocorra, $A_1 = 0$, só que esta não é uma situação real para o modelo. Logo,

conclui-se que, independente da razão de áreas, sempre uma parte da onda incidente será transmitida para a barra seguinte.

O comportamento do gráfico da Figura 5.1 indica que para razões de área menores que 1, a amplitude de reflexão irá decrescer até ser anulada, a partir daí, a amplitude passará a crescer conforme a razão de áreas também cresce. Por outro lado, a amplitude de transmissão está sempre crescendo, conforme a razão de áreas aumenta.

5.1.1.2 Variação do material

Considere, agora, o mesmo acoplamento entre duas barras, só que, dessa vez, as dimensões das barras serão mantidas fixas e iguais e será trocado apenas o material de uma dessas barras. Define-se que o raio das barras será de 500 mm e o material da segunda barra será uma liga de aço-carbono. Para que seja possível visualizar bem o comportamento da amplitude, foram escolhidos 7 materiais com diferentes propriedades entre si. Na Tabela 2, são dados as propriedades mecânicas necessárias de cada um desses materiais.

Tabela 2 – Propriedades dos materiais.

Material	E (GPa)	ρ (kg/m^3)
Magnésio	44	1740
Alumínio	70	2710
Latão	104	8500
Manganês	120	8500
Liga Cu+Ni	170	8880
Liga Aço-Carbono	210	7900
Tungstênio	410	19300

De acordo com o resultado obtido da matriz de espalhamento, que pode ser visto na Equação 5.1, quando se troca o material utilizado no acoplamento, serão alteradas duas propriedades que causam efeito na amplitude, o módulo de elasticidade e a massa específica, que é utilizada para o cálculo do valor de k . Decide-se por plotar o gráfico da amplitude em função da razão entre os módulos E_1 e E_2 . A frequência foi fixada com um valor de 2000 Hz . O resultado do gráfico é mostrado na Figura 5.2.

$$\mathbf{t} = \frac{2A_1E_1k_1}{A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2}, \quad \mathbf{r} = \frac{A_1E_1k_1 - A_2E_2k_2}{A_1E_1k_1 + A_2E_2k_2} \quad (5.1)$$

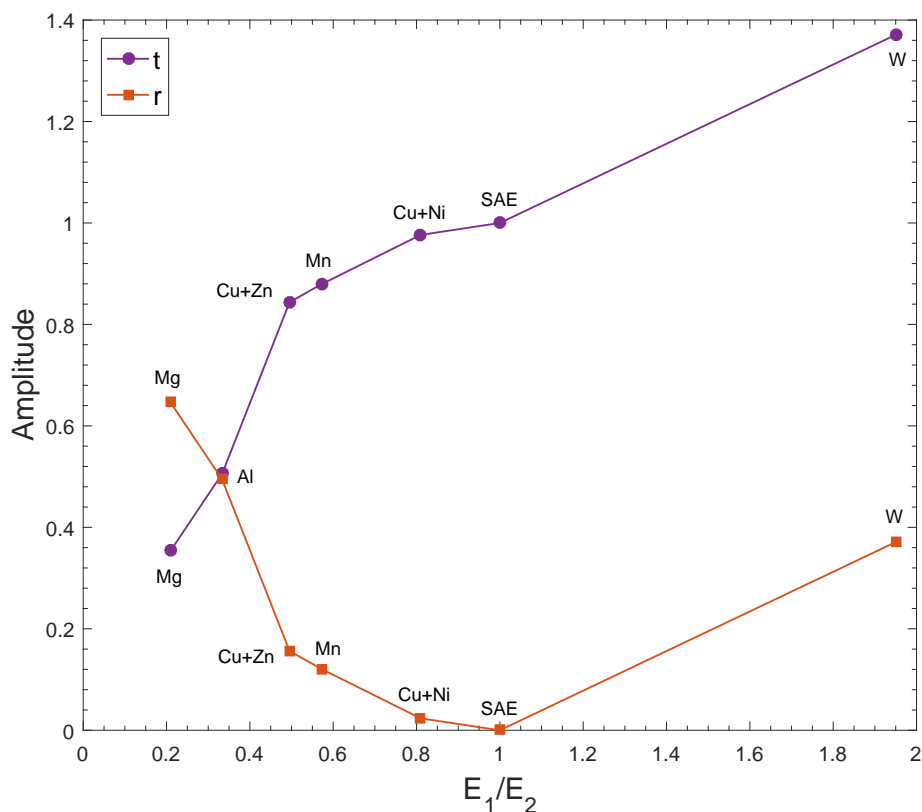


Figura 5.2 – Variação da amplitude em um acoplamento de barras feitas de diferentes materiais.

Quando o material das barras é o mesmo, isto é, quando $E_1/E_2 = 1$, é possível perceber que a amplitude de reflexão se torna 0 e a de transmissão 1. Como a descontinuidade do modelo era a mudança do material entre as barras, é natural que no momento que as barras passam a ser feitas de mesmo material, a onda não encontrará nenhum obstáculo e continuará se propagando ao longo de toda a estrutura sem ser refletida, como se as duas barras fossem na verdade uma só.

O comportamento do gráfico aparenta ser bem similar ao obtido quando variou-se apenas a área das barras de mesmo material, mostrado na Figura 5.1. Ambos atingem o eixo x, quando a razão entre as variáveis é 1 e ambas as curvas se cruzam quando a razão das variáveis é aproximadamente 0,3. Acredita-se que as diferenças que podem ser vistas, são devidas ao fato de que não é só o módulo E que está sendo variado na estrutura, a massa específica também está sendo alterada, e como pode ser visto pela Tabela 2, os valores das duas propriedades não estão sendo variados com o mesmo incremento, no caso da Liga de Cu e Ni e da de Aço-Carbono, por exemplo, enquanto o módulo E cresce, ρ decresce, fazendo com que a variação na amplitude das ondas seja pequena.

5.1.2 Barras idênticas conectadas por massa pontual

Para o modelo de acoplamento entre duas barras rígidas conectadas por uma massa, foi obtido que os coeficientes de transmissão e de reflexão são dados em função do peso da

massa pontual. Para investigar a relação, plota-se um gráfico no MATLAB para valores de massa que variam de 1 a 20 *kg*. Decide-se por fixar a frequência em 2000 *Hz* e utilizar barras de aço-carbono com raios de 10 *cm*.

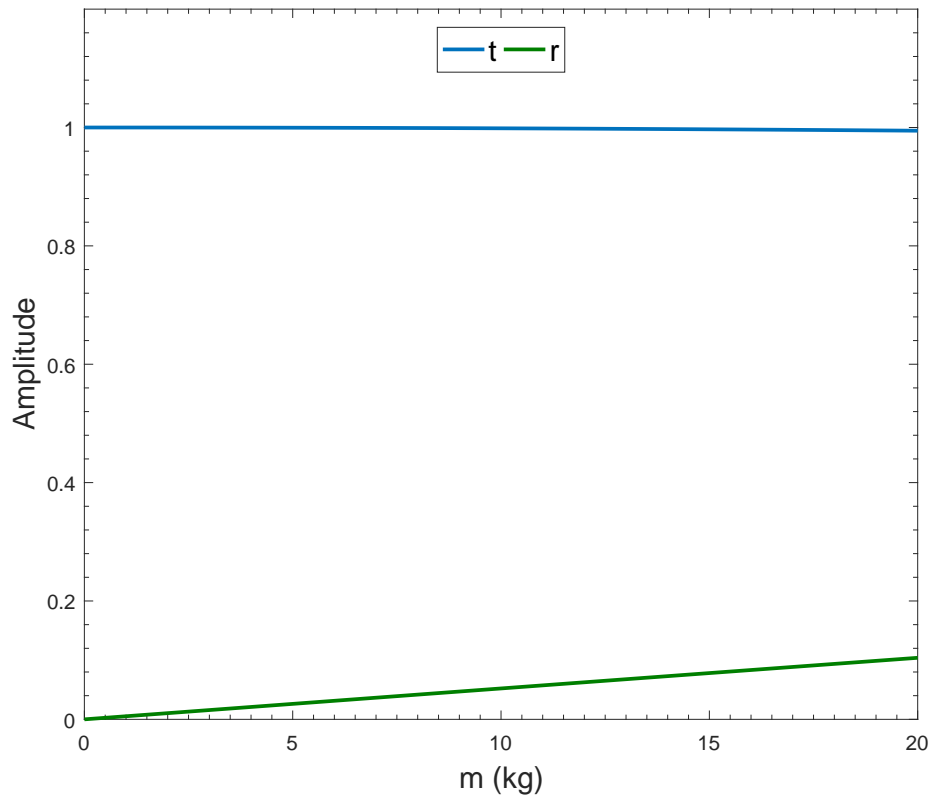


Figura 5.3 – Variação da amplitude das ondas em função da massa m .

Analisando os resultados, percebe-se que a amplitude da onda de transmissão não sofre quase nenhuma alteração, é praticamente constante, enquanto que a amplitude da onda de reflexão cresce bem pouco conforme o peso da massa vai aumentando. Estes resultados não batem com o esperado, pois pelo resultado da modelagem mostrado na Equação 5.2, esperava-se pelo menos que a amplitude de transmissão reduzisse conforme a massa fosse aumentando, visto que o termo da massa está no denominador. É possível que o problema esteja no valor de frequência escolhido, pois a amplitude do modelo também depende da frequência. Dessa maneira, plota-se a relação entre a amplitude e a frequência mostrada na Figura 5.4 e também a relação entre a amplitude e o comprimento de onda mostrado no gráfico semilog da Figura 5.5. Para a plotagem dos gráficos, foi considerado um valor fixo para a massa de 20 *kg*.

$$\mathbf{t} = \frac{-2EAk_l}{im\omega^2 - 2EAk_l}, \quad \mathbf{r} = \frac{-im\omega^2}{im\omega^2 - 2EAk_l} \quad (5.2)$$

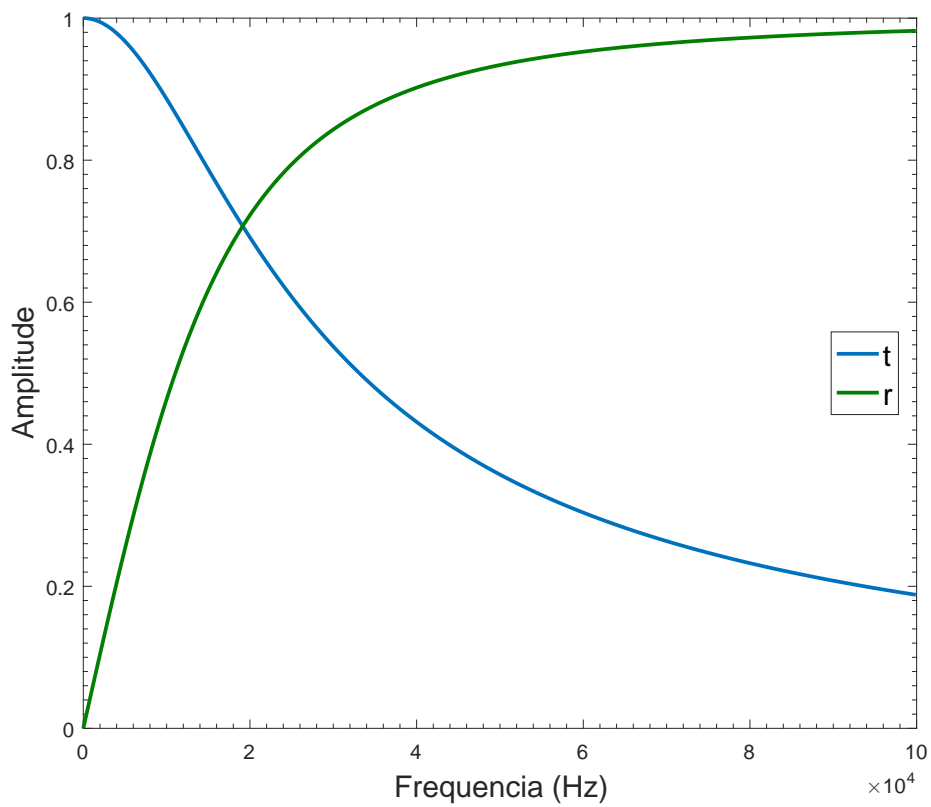


Figura 5.4 – Efeito da frequência na amplitude das ondas transmitidas e refletidas para $m = 20 \text{ kg}$.

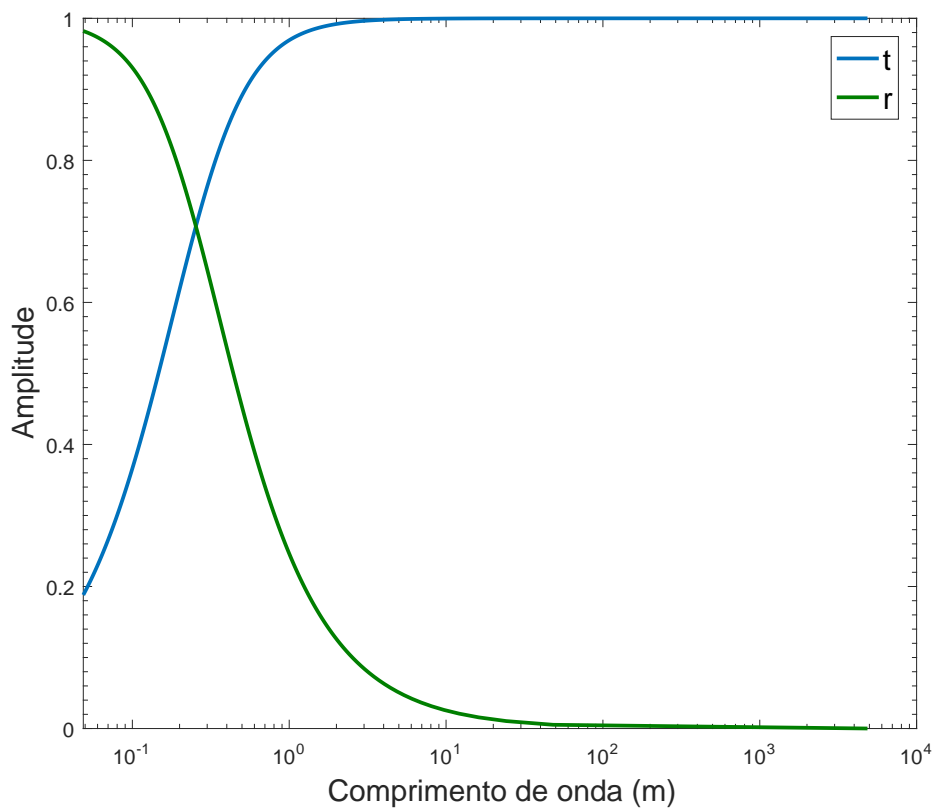


Figura 5.5 – Efeito do comprimento de onda λ nas amplitudes das ondas transmitidas e refletidas para $m = 20 \text{ kg}$.

Observando os gráficos das Figuras 5.4 e 5.5, nota-se que valores muito baixos de frequência geram um comprimento de onda muito elevado, com mais de 1 km . Para esse comprimento de onda, a amplitude das ondas é praticamente constante. Para valores mais altos da frequência, da ordem de 10^4 , o comprimento de onda é bem menor e em ambos os gráficos é possível ver mudanças na amplitude. Por isso, decide-se plotar novamente a amplitude em função da massa só que agora para um valor de frequência mais elevado de 4×10^4 , para que, assim, possa ser observado os efeitos que o peso da massa causa na transmissão e reflexão da estrutura. O gráfico pode ser visto na Figura 5.6. Nota-se que conforme a massa aumenta, a amplitude de transmissão é reduzida ao mesmo tempo que a de reflexão aumenta. O contrário ocorre quando a massa é mais leve, uma menor parte da onda incidente é refletida e uma maior parte transmitida. Este resultado está de acordo com o que se esperava. Conforme a massa vai aumentando, fica mais difícil para a onda continuar sua propagação com o mesmo sentido e se transmitir para a outra barra porque aumenta a resistência do meio, dessa maneira, uma fração maior da onda irá retornar de volta para a origem. Por esse mesmo motivo, pode-se intuir que quanto maior for a área e mais leve for a massa, maior será a transmissão e menor a reflexão. O contrário ocorrerá quanto menor for a área e mais pesada for a massa.

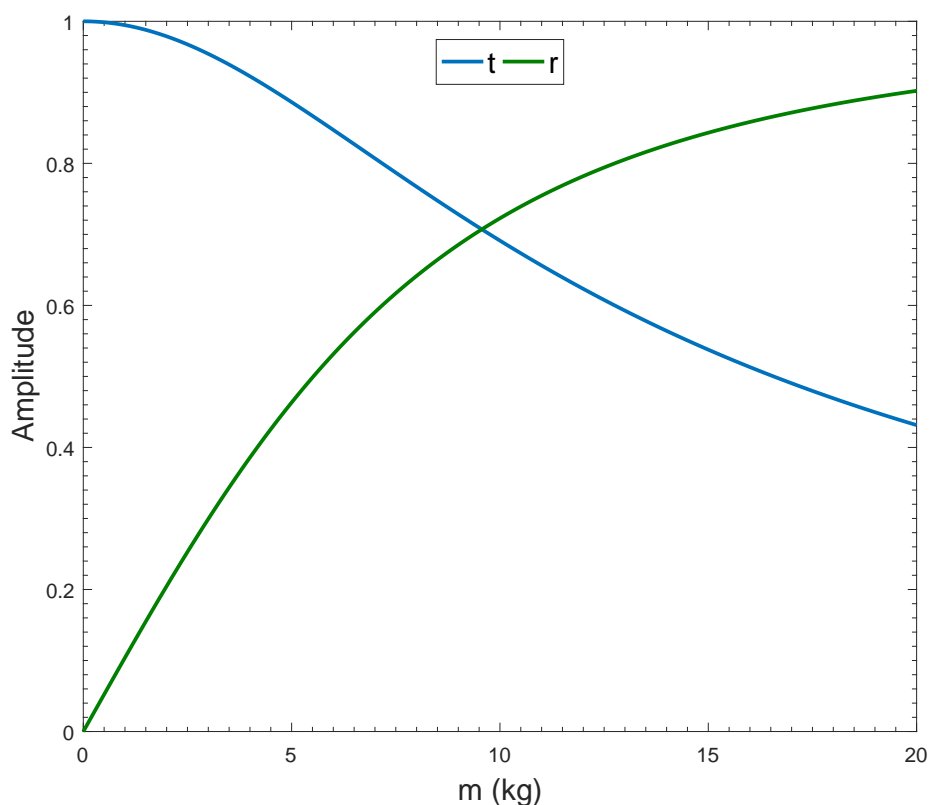


Figura 5.6 – Variação da amplitude das ondas em função de m para uma frequência de 4×10^4 e raio de 10 cm .

5.1.3 Vigas apoiadas sobre mola

Com a modelagem feita na Seção 4.2.5, ficou definido que os coeficientes de transmissão e de reflexão dependem das características da mola acoplada à estrutura, em específico, da constante de mola κ . O resultado final da modelagem é mostrado nas Equações 5.3.

$$\mathbf{r} = \frac{-\kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{r}_N = \frac{\kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{t} = \frac{4EI k_b^2 + \kappa}{4EI k_b^2}, \quad \mathbf{t}_N = \frac{-\kappa}{4EI k_b^2} \quad (5.3)$$

Deseja-se analisar os efeitos causados na amplitude quando se varia a constante de mola. Considerando uma viga feita de aço SAE 1020 com dimensões $10 \times 30 \text{ cm}$, é plotado o gráfico da amplitude em função da constante κ para uma frequência de 2000 Hz que pode ser visto na Figura 5.7.

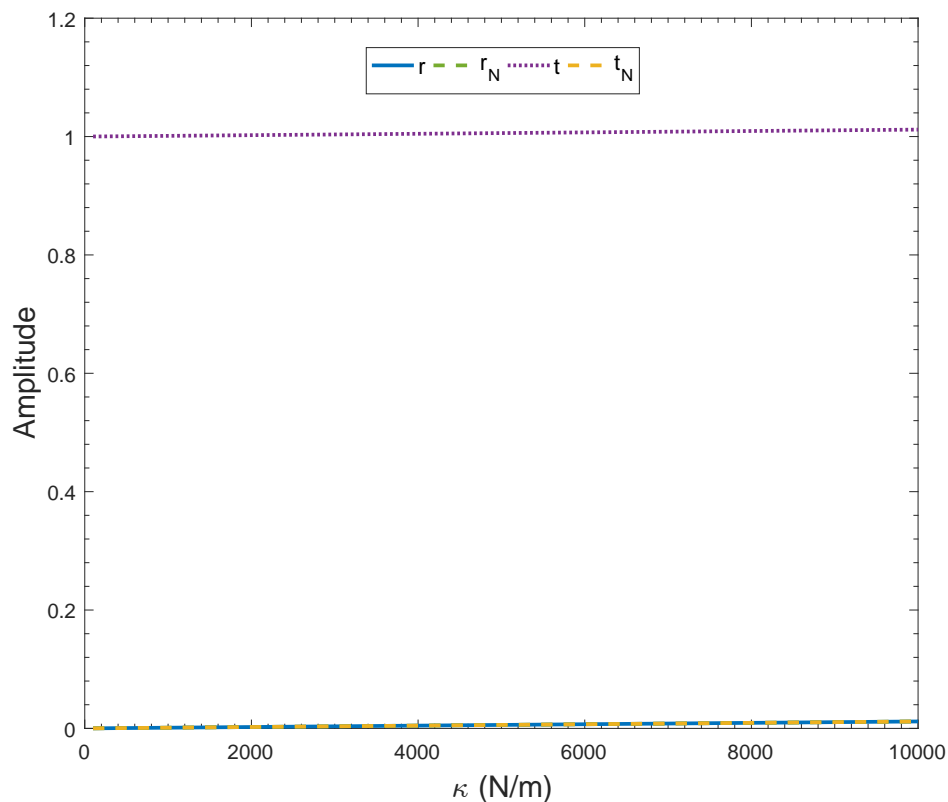


Figura 5.7 – Efeitos da mudança na amplitude para diferentes valores da constante de mola κ .

O resultado obtido pelo gráfico da Figura 5.7 possui o mesmo comportamento que o obtido na Seção 5.1.2 (Figura 5.3). As amplitudes são constantes e apenas a amplitude de transmissão possui um valor diferente de zero. Como foi dito anteriormente, este resultado pode ser explicado devido ao valor da frequência escolhido. Para que seja encontrado um outro valor adequado, precisa-se plotar gráficos que mostram a relação da amplitude com a frequência e com o comprimento de onda. Com o valor de κ fixado em 80000 N/m , foram plotados os gráficos das Figuras 5.8 e 5.9.

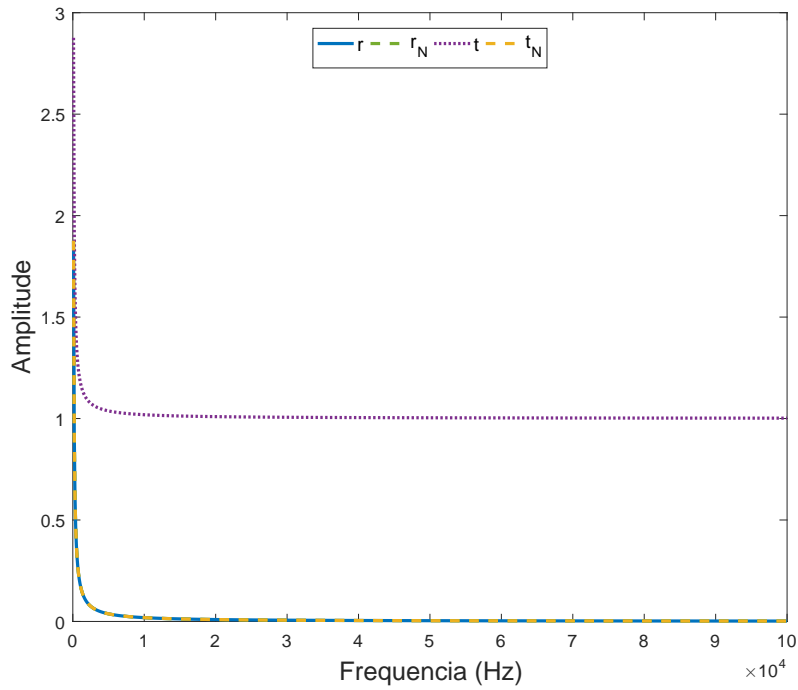


Figura 5.8 – Amplitude das ondas de transmissão e reflexão em função da frequência para $\kappa = 80000 \text{ N/m}$.

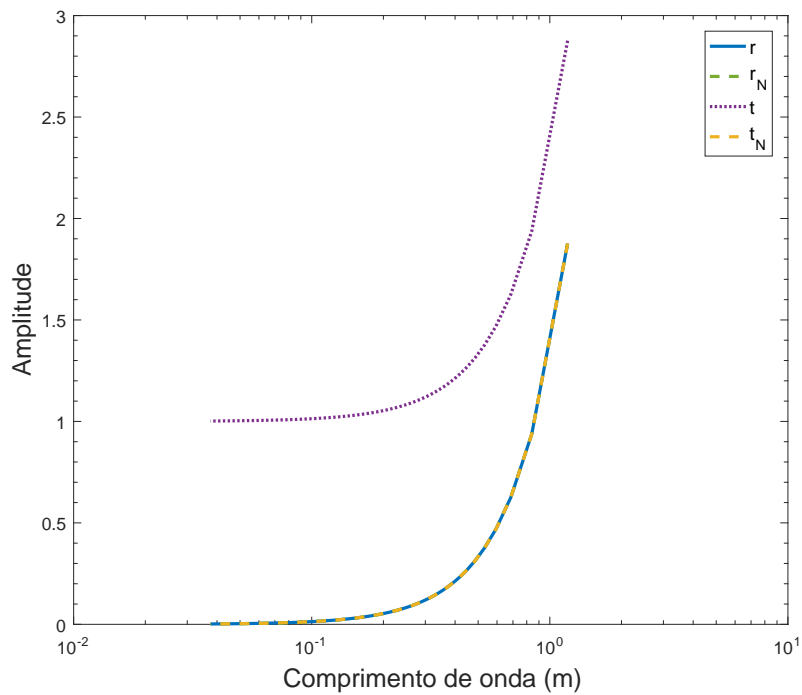


Figura 5.9 – Mudança na amplitude para diferentes valores de comprimento de onda λ para $\kappa = 80000 \text{ N/m}$.

É possível perceber que para valores mais altos de frequência e, conseqüentemente, valores menores do comprimento de onda, a amplitude é mantida contante. Só é possível enxergar variações para valores bem baixos na frequência. Quando se estava tentando plotar estes gráficos, percebeu-se também que quanto maior fosse a constante κ , mais evidente se tornam as variações na amplitude. Logo, o comportamento das ondas neste

modelo só podem ser visíveis para valores baixos de frequência e altos de κ . Ajusta-se a frequência do modelo para 20 Hz e plota-se novamente a relação da amplitude e κ . O gráfico é mostrado na Figura 5.10.

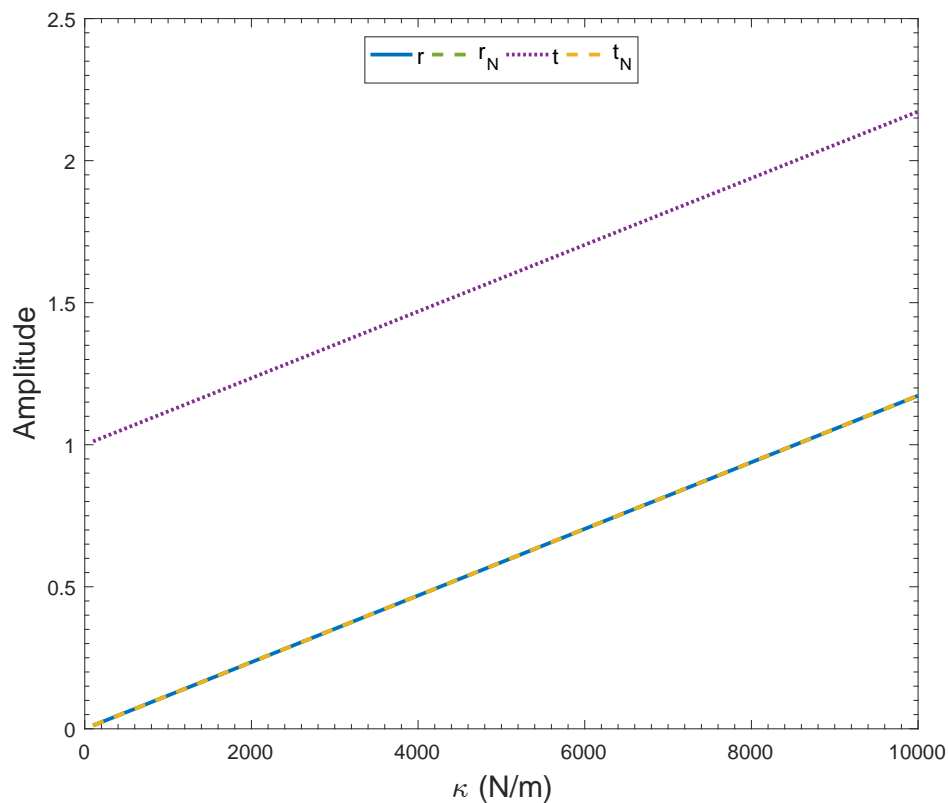


Figura 5.10 – Efeitos da mudança na amplitude das ondas de transmissão e de reflexão para uma frequência de 20 Hz .

O resultado mostrado no gráfico da Figura 5.10, segue o comportamento esperado pelas Equações 5.3. Como a constante de mola está sempre nos numeradores, quanto maior ela for e menor for a frequência, maior serão os coeficientes de transmissão e de reflexão. A partir destes resultados, chega-se a conclusão de que quando a onda atinge a região de conexão da mola, a onda não só passa a ser refletida e transmitida na estrutura, o esforço causado pela mola faz com que as amplitudes das mesmas ondas sejam aumentadas quanto maior for a constante κ .

5.1.4 Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo

Foi decidido por omitir os resultados obtidos para os coeficientes de reflexão e de transmissão na Seção 4.2.6 por eles serem extremamente longos, pois como dito anteriormente, é mais interessante para este trabalho estudar os efeitos causados na amplitude para diversos valores possíveis de α .

Considerando vigas de seção transversal retangular, que possuem 10 mm de largura e 50 mm de altura feitas da liga de aço-carbono SAE 1020. O acoplamento só permite

que o ângulo α atinja valores de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Dessa maneira, plota-se o gráfico da Figura 5.11 mostrando a relação da amplitude de acordo com as mudanças de ângulo para uma frequência fixa de 2000 Hz .

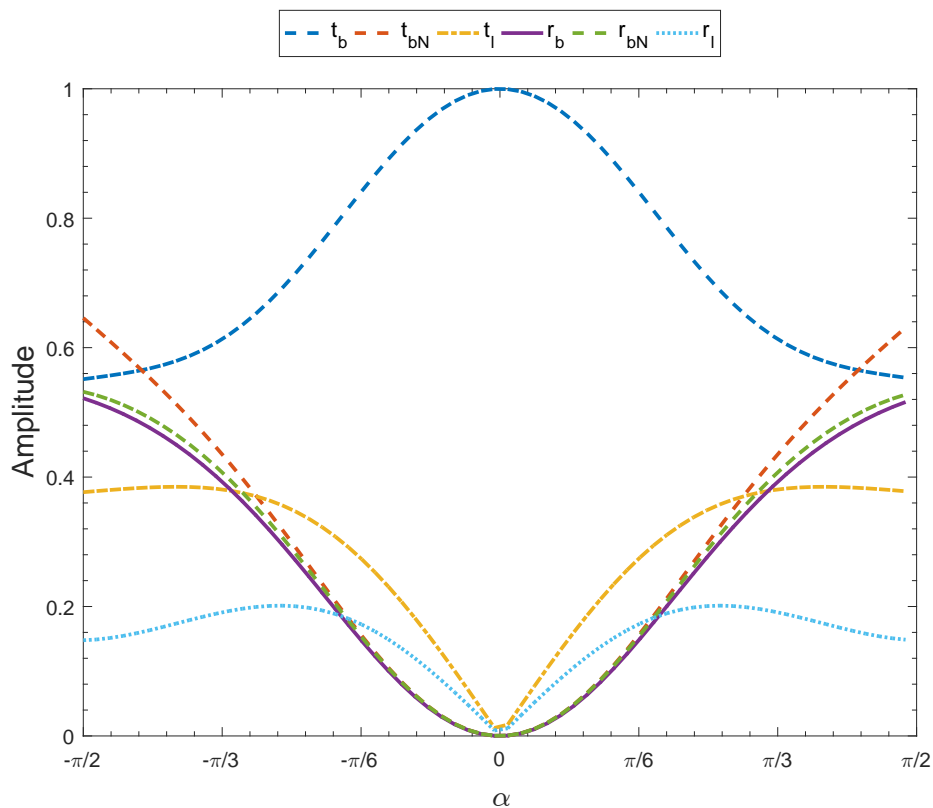


Figura 5.11 – Efeito causado nas amplitudes das ondas devido à variação do ângulo α de acoplamento.

Analisando os resultados, já é possível ver de início que todas as amplitudes são simétricas. No momento em que α é igual a zero, toda a onda incidente é transmitida como onda de flexão para a outra viga, nenhuma parte é refletida e não ocorre nenhuma transformação do modo da onda. Fisicamente, para este valor de α , a estrutura se comporta apenas como uma viga horizontal sem a descontinuidade causada pela mudança de ângulo.

Para $\alpha = \pi/2$ ou $\alpha = -\pi/2$, a amplitude de onda de flexão transmitida atinge seu valor mínimo, ao mesmo tempo que todas as outras amplitudes de reflexão e as de transmissão longitudinal e evanescente chegam aos seus valores máximos. Percebe-se que sempre haverá transmissão de uma onda de flexão para a outra estrutura em todos os ângulos de α possíveis. As amplitudes das ondas com coeficientes t_{bN} , t_l , r_b , r_{bN} e r_l aumentam conforme o ângulo se afasta de $\alpha = 0$, enquanto, que a amplitude da onda transmitida t_b , atinge valores menores.

Para visualizar o comportamento da amplitude em função da frequência, fixa-se o ângulo α como sendo $\pi/4$ e varia-se a frequência em um intervalo de 0 a $3 \times 10^4 \text{ Hz}$. O resultado é mostrado no gráfico da Figura 5.12.

Pelo gráfico, é possível perceber que conforme a frequência vai aumentando, os

coeficientes de transmissão t_b e t_l também aumentam. Os coeficientes t_{bN} , r_{bN} e r_b decrescem com o aumento da frequência. No início, para valores de frequência de até 3000 Hz , a amplitude da onda com coeficiente r_l cresce até aproximadamente $0,2$. Para valores acima de 3000 Hz , r_l passa a decrescer cada vez mais com o aumento da frequência. No geral, para valores muito altos, as ondas de flexão evanescentes apresentam um comportamento praticamente constante, enquanto que as amplitudes das ondas longitudinais ainda apresentam variações perceptíveis com o aumento da frequência.

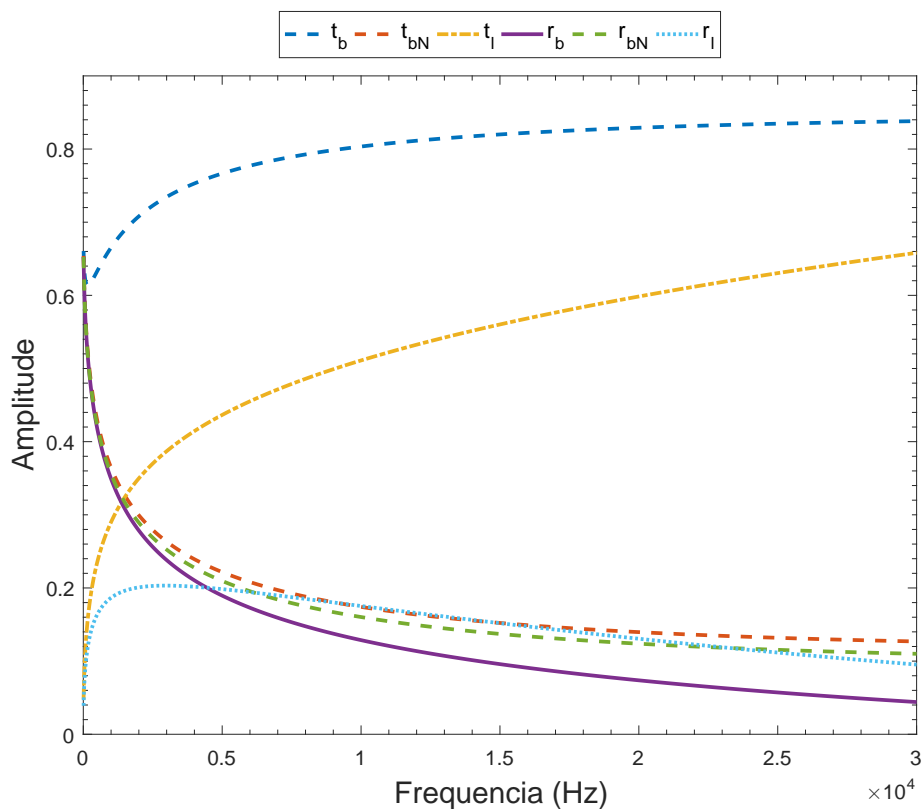


Figura 5.12 – Comportamento da amplitude em função da frequência para $\alpha = \pi/4$.

5.1.5 Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita

No modelo estrutural de acoplamento das três vigas em ângulo, encontrou-se que os coeficientes de transmissão e de reflexão das ondas longitudinais e das de flexão vão depender dos ângulos α_1 e α_2 da estrutura. Nesta seção, deseja-se fazer uma análise paramétrica que descreva bem o comportamento da amplitude em função das características da estrutura e da onda. As primeiras variáveis de estudo serão os ângulos e depois será analisado também o comportamento da amplitude em função da frequência. Serão utilizadas vigas de seção transversal retangular com dimensões $10 \times 50 \text{ mm}$ feitas de aço-carbono SAE 1020.

Para a estrutura, os ângulos podem variar no intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Para estudar os efeitos da amplitude em função destes ângulos, escolhe-se uma frequência para as ondas longitudinais e de flexão de 2000 Hz . Como são duas variáveis de dependência, serão estudados diferentes casos. Primeiro, plota-se o comportamento das amplitudes das vigas

semi-infinitas, considerando que ambos os ângulos estão variando juntos e sempre sendo iguais um ao outro. A variação da amplitude para este caso é mostrada na Figura 5.13.

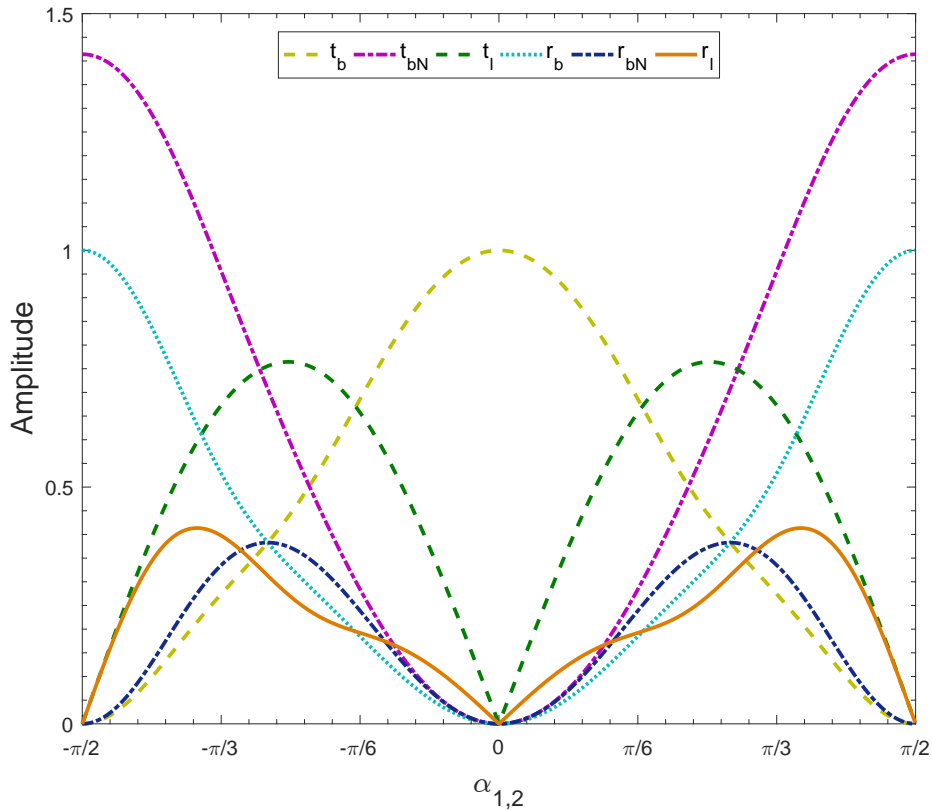


Figura 5.13 – Comportamento da amplitude das vigas semi-infinitas em função do ângulo de acoplamento. Os ângulos variam juntos com mesmo valor.

O comportamento de todas as amplitudes é completamente simétrico. Percebe-se que quando os ângulos da estrutura atingem $-\pi/2$ ou $\pi/2$, que é quando a estrutura apresenta o formato de U , os coeficientes das ondas t_{bN} e r_b aumentam atingindo seus máximos ao mesmo tempo que todos os outros coeficientes se anulam. Dessa maneira, ocorre apenas transmissão de uma onda evanescente e reflexão de uma onda de flexão. Para um valor de $\alpha_{1,2} = \pi/4$ ou $\alpha_{1,2} = -\pi/4$, maior parte da onda incidente está sendo transmitida para a última viga como uma onda longitudinal. Quando os ângulos se anulam, significa que a estrutura passa a ser completamente horizontal, e, neste caso, a onda é completamente transmitida ao longo da estrutura, sem haver reflexão ou conversão do tipo de onda ou geração de ondas evanescentes.

O comportamento da amplitude t_{bN} indica que quanto mais distante do ângulo 0 estiver $\alpha_{1,2}$, maior será o valor da amplitude. Um comportamento semelhante acontece com r_b . Por outro lado, o contrário ocorre com t_b , que atinge valores menores para ângulos mais distantes de 0. As outras amplitudes possuem dois máximos de amplitude. De maneira similar, as amplitudes crescem até atingir seu máximo e depois decrescem até atingir o 0 e o comportamento se repete até atingir seu outro máximo.

Comparando com o modelo que só possuía duas vigas em ângulo (vide Figura

5.11), uma coisa que se chama a atenção é que todos os coeficientes estão sempre abaixo de 1, porém com a adição da terceira viga, o coeficiente da onda evanescente sobre para aproximadamente 1,4 quando a estrutura forma um U . Deve haver alguma coisa neste formato que faz com que a amplitude da onda evanescente aumente tanto assim.

Interessa agora estudar o comportamento da amplitude em função da mudança de apenas um dos ângulos. Para isso, α_1 foi fixado como sendo $\pi/6$. As propriedades do material e o valor da frequência são mantidos os mesmos. Na Figura 5.14, é mostrado o gráfico da amplitude em função do ângulo α_2 .

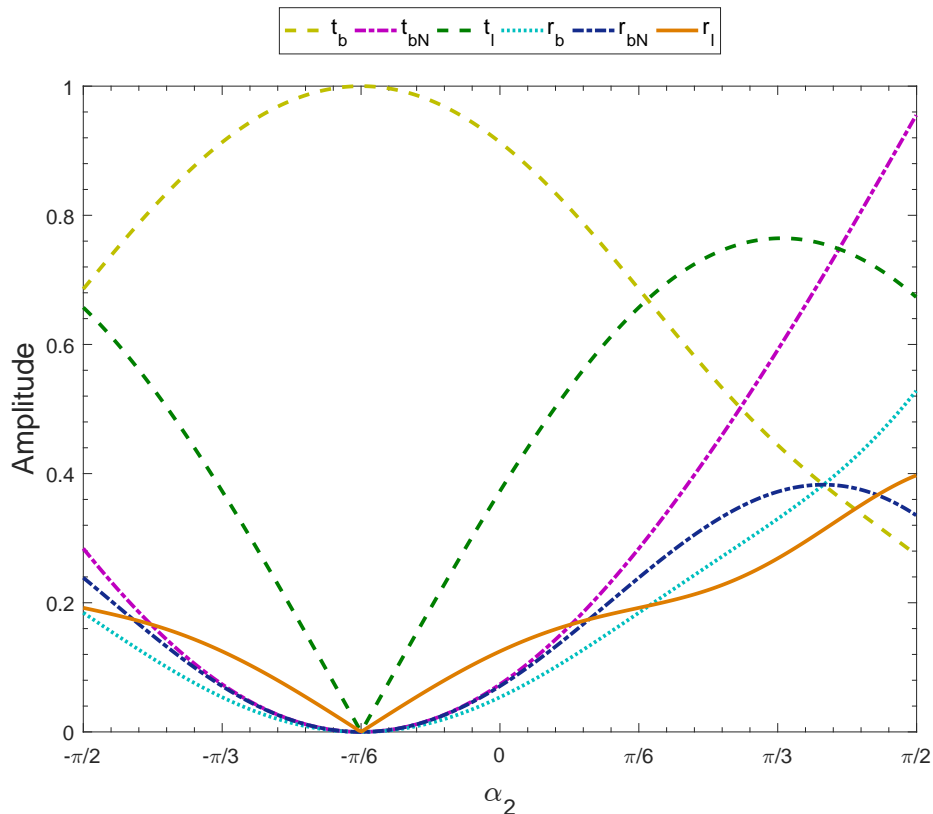


Figura 5.14 – Mudanças nas amplitudes das ondas das vigas semi-infinitas em função do ângulo α_2 para um ângulo α_1 mantido fixo em $-\pi/6$.

Pelo gráfico da Figura 5.14, é possível observar que quando o α_2 atinge $-\pi/6$, as amplitudes de reflexão e as de transmissão longitudinal e transmissão evanescente (t_{bN} , t_l , r_b , r_{bN} e r_l) se anulam e a onda incidente passa a ser apenas transmitida como onda de flexão. Isto ocorre porque o ângulo atingido por α_2 é o mesmo que o fixado para α_1 só que com sinal invertido. A onda incidente ao atingir a primeira interface entre as vigas 1 e 2, sofre os fenômenos de reflexão e transmissão e ocorre ainda a conversão do tipo da onda que gera ondas longitudinais também. Ao atingir a segunda interface entre as vigas 2 e 3, ocorrem as mesmas alterações na onda incidente, porém com sentido contrário e isso faz com que os efeitos na amplitude sejam anulados e a estrutura se comporte como se não houvesse nenhuma descontinuidade presente. O comportamento geral das amplitudes lembra um pouco o obtido no caso em que ambos os ângulos variaram juntos da Figura

5.13. Percebe-se que o que os diferencia é um deslocamento das curvas para a esquerda no eixo x e uma redução nos valores das amplitudes.

Por fim, o último caso que se deseja estudar é a maneira que a amplitude se comporta quando ambos os ângulos variam em intervalos diferentes. Decide-se por variar α_1 no intervalo de $[0, \pi/2]$ e α_2 no intervalo de $[-\pi/2, 0]$. Os gráficos plotados são mostrados na Figura 5.15.

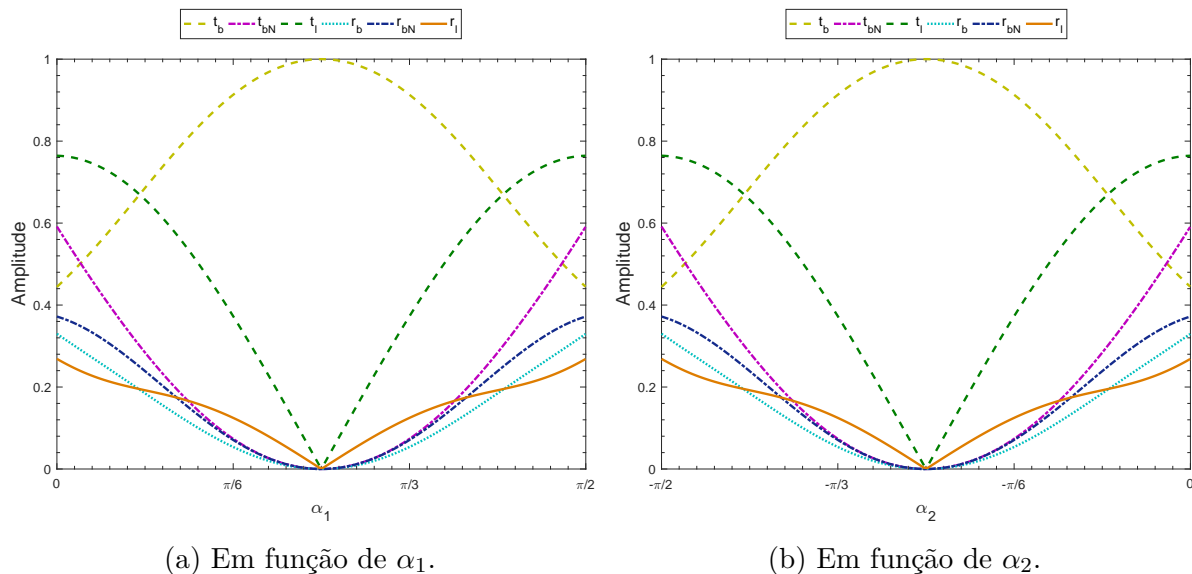


Figura 5.15 – Variação da amplitude em função de uma mudança em α_1 e em α_2 . Ambos os ângulos variam, porém em intervalos diferentes.

Na Figura 5.15a, é mostrado o comportamento das amplitudes em função de α_1 e na Figura 5.15b em função de α_2 . Nota-se que os gráficos são idênticos entre si e seu comportamento lembra muito ao obtido para o gráfico do modelo com duas vigas em ângulo que é mostrado na Figura 5.11. O que leva a se dizer que quando os ângulos variam em intervalos diferentes, a estrutura se comporta de maneira similar à estrutura com duas vigas semi-infinitas em ângulo, isto é para os valores de ângulo do intervalo utilizado. As curvas das amplitudes vão apresentar simetria em relação ao ângulo $\pi/4$ e $-\pi/4$, respectivamente. Estes valores são atingidos pelas vigas 1 e 3 no mesmo momento, isto é, quando α_1 é igual a $\pi/4$, α_2 será $-\pi/4$, isto explica o porque das amplitudes de t_{bN} , t_l , r_b , r_{bN} e r_l serem anuladas e a onda estar sendo apenas transmitida como onda de flexão para estes ângulos.

Segue-se, agora, para a análise do comportamento das amplitudes em função da frequência. Os ângulos α_1 e α_2 são fixados em $\pi/3$ e $\pi/4$, respectivamente e a frequência variada no intervalo de 0 a 20000 Hz . O gráfico plotado para as vigas semi-infinitas é mostrado na Figura 5.16. Observa-se que o coeficiente t_l é o mais afetado pela frequência. As ondas longitudinais apresentam o mesmo comportamento, estão sempre crescendo com a frequência, porém conforme a frequência aumenta para valores maiores, a taxa de crescimento se reduz. Enquanto isso, as ondas de flexão, que também possuem comportamento

similar entre si, decrescem dentro do intervalo de 0 a aproximadamente 4000 Hz e se tornam constantes para frequências acima.

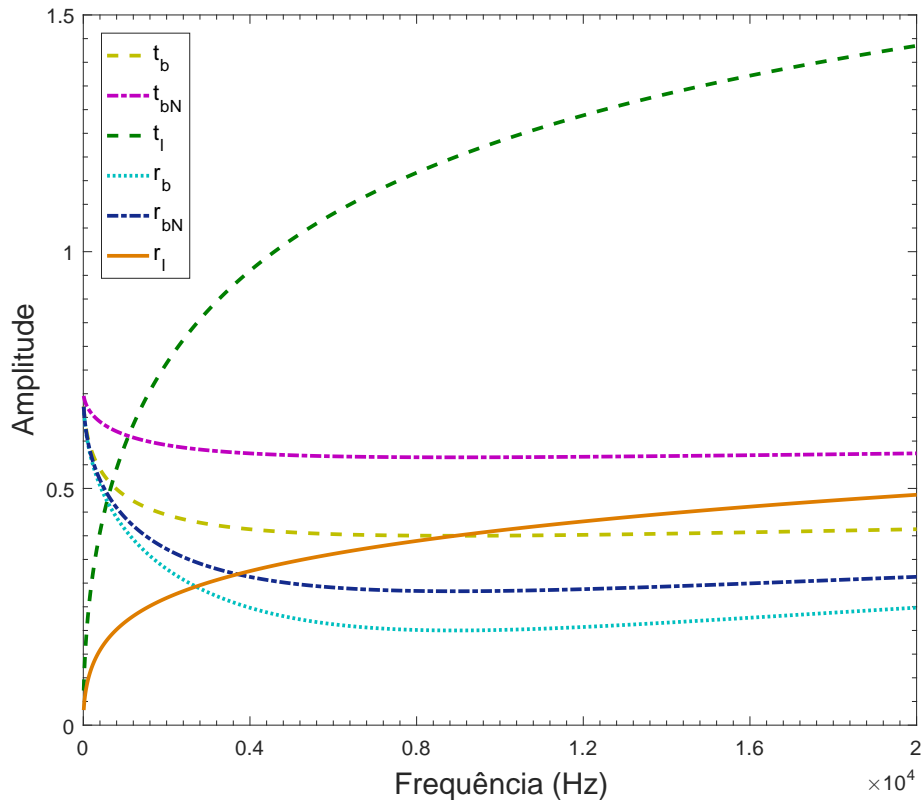


Figura 5.16 – Variações na amplitude das ondas refletidas e transmitidas em função da frequência para as vigas semi-infinitas.

5.2 Estudo dos Efeitos Causados na Estrutura Devido à Utilização de Metamateriais

Agora que se sabem os efeitos causados pelos acoplamentos nas amplitudes das ondas transmitidas e refletidas quando as estruturas são feitas de um material comum, pode-se estudar o que mudaria nas amplitudes a partir da aplicação de um metamaterial. A princípio, para que não haja a interferência de outras variáveis, os valores das frequências e das dimensões das barras ou vigas utilizadas em cada um dos modelos serão mantidos os mesmos. As principais propriedades do metamaterial localmente ressonante a ser utilizado nas análises são dadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades mecânicas do metamaterial utilizado.

E (GPa)	ρ (kg/m^3)	f_r (Hz)	ϵ
1	1000	2100	0,35

Além de alterar as principais propriedades mecânicas, o uso de metamateriais

também afeta a definição dos números de onda de flexão e longitudinal. Como mostrado na Seção 3.5.3, os números de onda para uma metaestrutura podem ser calculados com as expressões

$$k_{rl} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E} \left(1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2} \right)}, \quad (5.4)$$

$$k_{rb} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \left(1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2} \right)}, \quad (5.5)$$

onde ϵ é a razão de massas dada pela Tabela 3 e Ω_r a razão de frequências angulares ω/ω_r .

5.2.1 Acoplamento de barras com seções transversais diferentes

O primeiro modelo a ser analisado é o do acoplamento de duas barras com seções transversais diferentes. Substituindo as propriedades do material e fazendo as alterações necessárias no cálculo do número de onda, consegue-se plotar o gráfico que é mostrado na Figura 5.17.

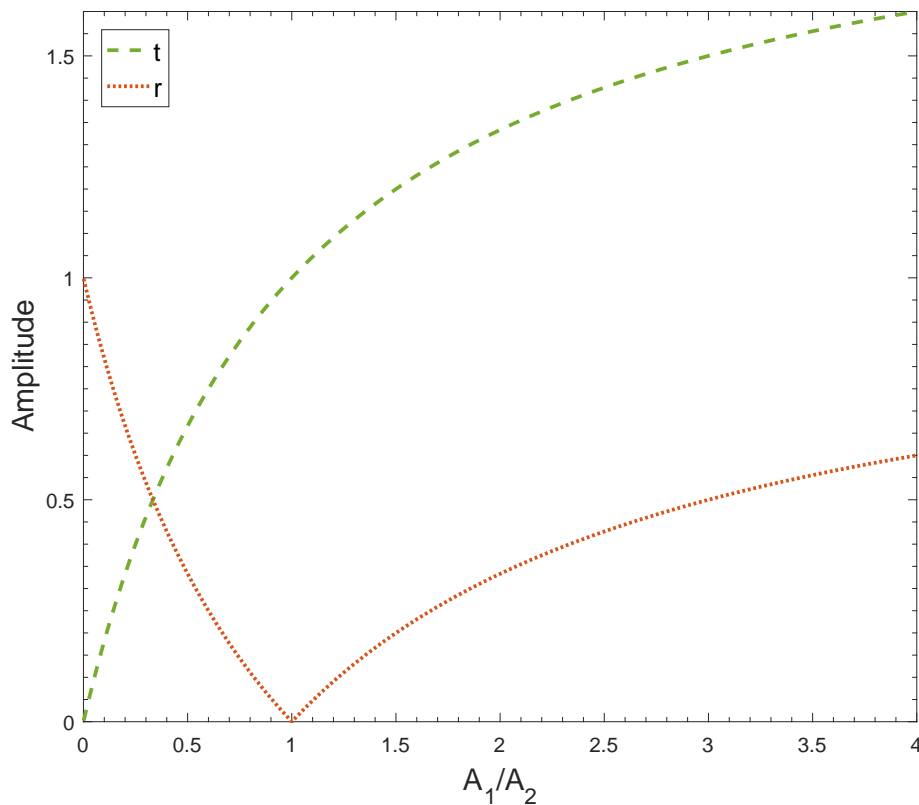


Figura 5.17 – Amplitude das ondas de transmissão e de reflexão para o acoplamento de duas barras de metamaterial com seções transversais diferentes.

Comparando os novos resultados com os obtidos utilizando aço como material (vide Figura 5.1), percebe-se que nada mudou de um gráfico para o outro. As amplitudes variam com o mesmo comportamento, atingindo os mesmos valores de amplitude para as mesmas razões de área. Foram testados outros valores de frequência para ver se ocorria

alguma alteração, mas o resultado foi mantido. Inicialmente, esperava-se que fosse ocorrer alguma mudança com a troca de material, porém, se pararmos para analisar a equação de modelagem, percebe-se que, de fato, este comportamento é coerente, pois quando o material das duas barras é o mesmo, $E_1 = E_2$ e $k_1 = k_2$ e isto, como pode ser visto nas Equações 5.6 e 5.7, faz com que estes termos possam ser isolados na equação e os resultados finais sejam dados apenas em função das áreas.

$$\mathbf{t} = \frac{2A_1Ek}{A_1Ek + A_2Ek} = \frac{2A_1Ek}{Ek(A_1 + A_2)} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{r} = \frac{A_1Ek - A_2Ek}{A_1Ek + A_2Ek} = \frac{Ek(A_1 - A_2)}{Ek(A_1 + A_2)} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad (5.7)$$

Se a amplitude for plotada em função da frequência, não será enxergada nenhuma variação. Dessa maneira, conclui-se que os coeficientes de amplitude dependem apenas da área transversal das barras. O comportamento será mantido sempre o mesmo para qualquer outro material utilizado e qualquer outro valor de frequência escolhido. Dessa maneira, chega-se a conclusão de que o uso de uma metaestrutura não causará alterações na amplitude.

5.2.2 Acoplamento de barras com materiais diferentes

Na Seção 5.1.1.2, foram escolhidos 7 materiais diferentes e estudado o comportamento que a amplitude teria com a conexão de cada um deles à outra barra de aço com mesmas dimensões. Agora, deseja-se fazer o mesmo só que para uma barra de metamaterial. Os materiais escolhidos serão os mesmos utilizados no estudo da Seção 5.1.1.2 mais o metamaterial localmente ressonante (MLR). Realizando as alterações necessárias no código, plota-se o gráfico da Figura 5.18 que mostra o comportamento da amplitude em função da razão dos módulos E_1 e E_2 dos materiais.

Comparando com o resultado obtido para o caso do aço, é possível perceber que os gráficos possuem comportamentos diferentes. Na Figura 5.18, as amplitudes estão praticamente constantes quando os materiais das barras são diferentes, havendo apenas um salto da troca do MLR pelo Mg. Isto parece ser devido ao fato de que há uma grande discrepância das propriedades dos materiais, que faz com que a razão entre os módulos de elasticidade chega a ser mais de 100 vezes maior do que foi para o aço. Se os materiais escolhidos tivessem propriedades com valores mais próximos com as do MLR, acredita-se que o comportamento entre eles poderia ser bem mais similar. Levando isto em conta, resolve-se plotar um outro gráfico que mostre o comportamento da amplitude para menores valores da razão E_1/E_2 . Dessa vez, não foram escolhidos materiais específicos, a matriz de espalhamento foi colocada em função da razão entre os módulos E_1 e E_2 e o seu valor foi variado de 0 a 4, o gráfico é mostrado na Figura 5.19.

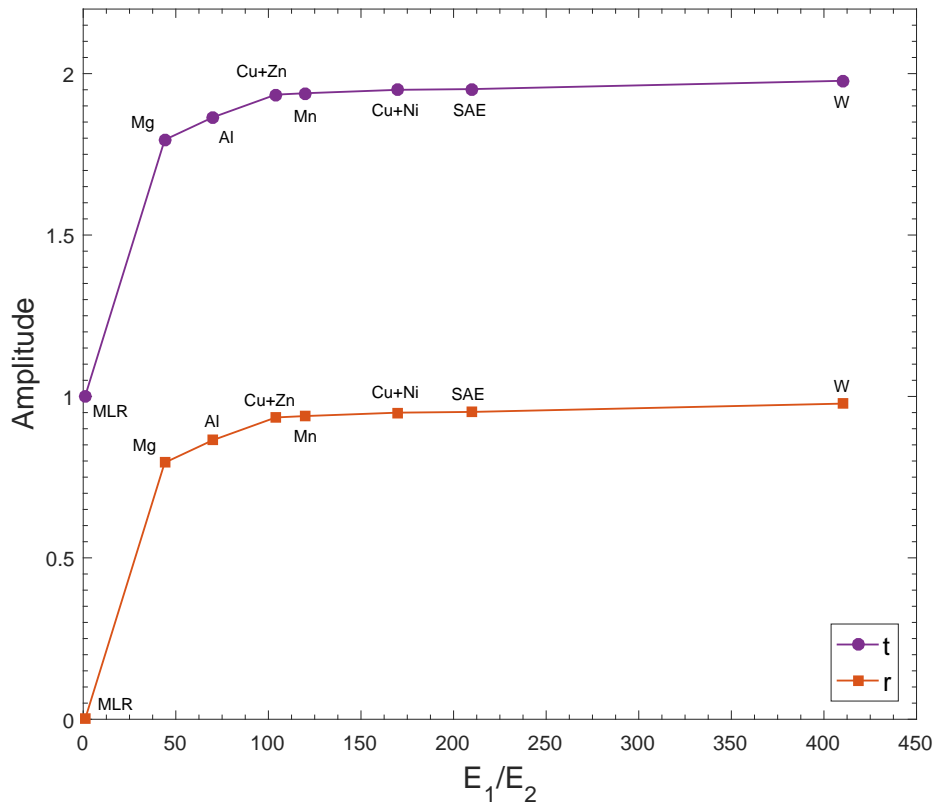


Figura 5.18 – Mudança na amplitude para acoplamento de barras de diferentes materiais a uma barra de MLR.

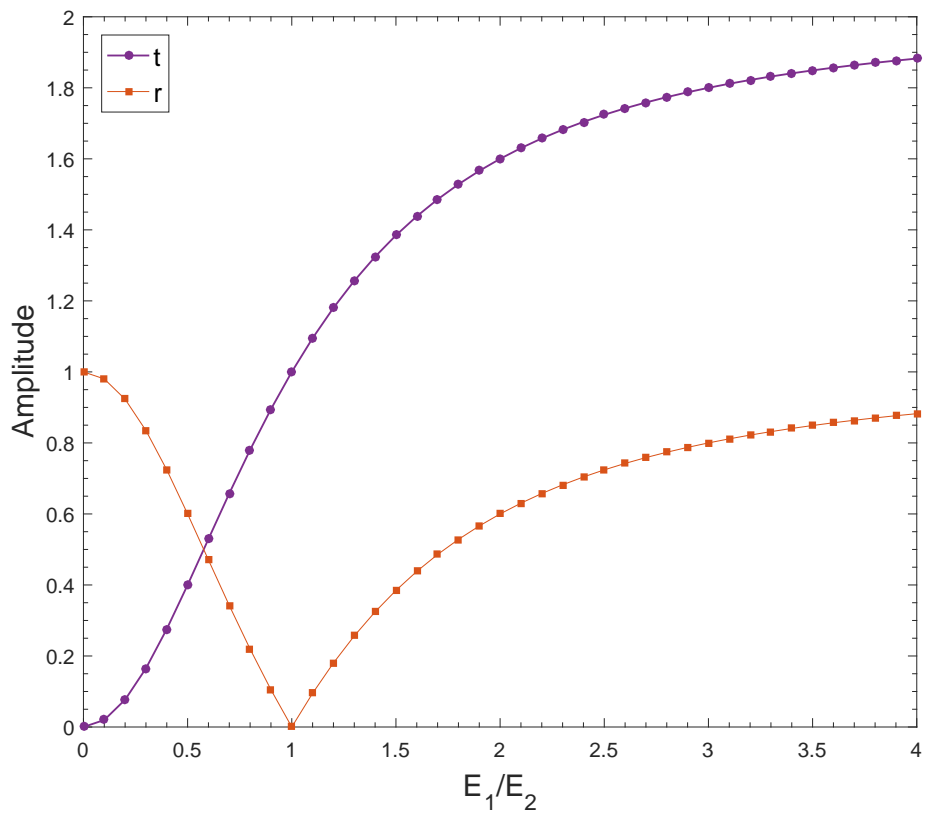


Figura 5.19 – Mudança na amplitude para menores valores da razão E_1/E_2 .

Observando o gráfico da Figura 5.19 e o comparando com o resultado obtido para o aço mostrado no gráfico da Figura 5.2, percebe-se que o comportamento é de fato semelhante. A diferença está apenas no fato de que os resultados do aço foram feitos para materiais reais cujas massas específicas não variam de um material para o outro da mesma maneira que seus módulos de elasticidade variam.

Os resultados mostrados no gráfico mostram ainda maior similaridade com os do caso em que se altera apenas a área e o material é mantido constante (vide Figura 5.17).

A partir das equações dos coeficientes obtidas na modelagem, quando as áreas das barras são as mesmas, é possível dizer que

$$\mathbf{t} = \frac{2AE_1k_1}{AE_1k_1 + AE_2k_2} = \frac{2E_1k_1}{E_1k_1 + E_2k_2}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{r} = \frac{AE_1k_1 - AE_2k_2}{AE_1k_1 + AE_2k_2} = \frac{E_1k_1 - E_2k_2}{E_1k_1 + E_2k_2}. \quad (5.9)$$

As Equações 5.8 e 5.9 são parecidas com as Equações 5.6 e 5.7, tendo como diferença apenas a multiplicação pelo número de onda, que é o que causa a diferença dos resultados entre os modelos. Fazendo, ainda, a substituindo pela definição do número de onda, e realizando algumas manipulações tem-se

$$\mathbf{t} = \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}. \quad (5.11)$$

Isto indica que neste modelo, os coeficientes de transmissão e de reflexão também não dependem da frequência escolhida e da presença do ressonador. Dependem apenas das propriedades dos materiais que irão afetar as amplitudes, por isso, que o acoplamento das barras no metamaterial apresentou comportamento similar ao acoplamento das barras no aço. Logo, a troca por uma metaestrutura também não causará mudança no comportamento das amplitudes.

5.2.3 Barras idênticas conectadas por massa pontual

Na Seção 5.1.2, utilizou-se para as barras de aço dois valores de frequência, o de 2000 Hz e o de 4×10^4 Hz. Nos resultados obtidos, a amplitude só mostrava alguma alteração de seu comportamento quando a frequência se tornava muita alta, na ordem de 10^4 . Para o estudo com os metamateriais, serão plotados os gráficos de amplitude em função da massa para esses dois valores de frequência para que se possa fazer a comparação. Os gráficos são mostrados na Figura 5.20.

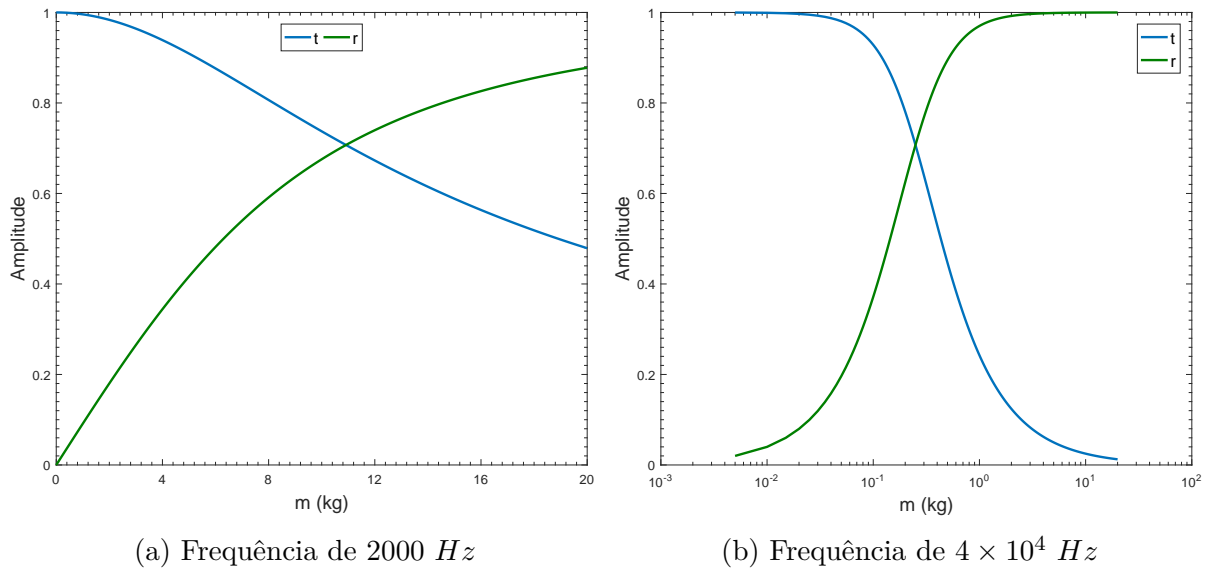


Figura 5.20 – Relação entre amplitude e massa para o acoplamento de metamateriais conectados por uma massa entre eles.

Com a utilização de metamateriais no modelo, já é possível observar mudanças na amplitude para a frequência de 2000 Hz. O comportamento apresentado é bem próximo do que se obteve para o aço para uma frequência de 4×10^4 Hz, conforme a massa aumenta, maior fica a parcela da onda incidente que é refletida pela massa e menor a parcela que é transmitida. Em contrapartida, quando a frequência aumenta para 4×10^4 Hz, a amplitude só sofre alterações para um pequeno intervalo de massa. O gráfico foi plotado em escala semi-log para que pudesse ficar mais perceptível as mudanças na amplitude. Quando $m = 0$ kg, só ocorre transmissão da onda e a reflexão é nula, já quando $m \approx 1$ kg a transmissão decresce rapidamente tendendo a 0 e a onda incidente passa a ser majoritariamente refletida pela massa. Comparando os resultados obtidos entre os dois materiais, percebe-se que as amplitudes das ondas transmitidas e refletidas não possuem o mesmo comportamento para o mesmo valor de frequência. Para que se possa visualizar as variações causadas na amplitude pelo acoplamento da massa na estrutura feita de aço, a frequência tem que atingir valores bem mais elevados. Já quando a estrutura é feita de metamaterial, as variações podem ser enxergadas para uma frequência 20 vezes menor.

Plota-se também a variação da amplitude em função da frequência da estrutura para uma massa com valor fixo. A relação pode ser vista na Figura 5.21.

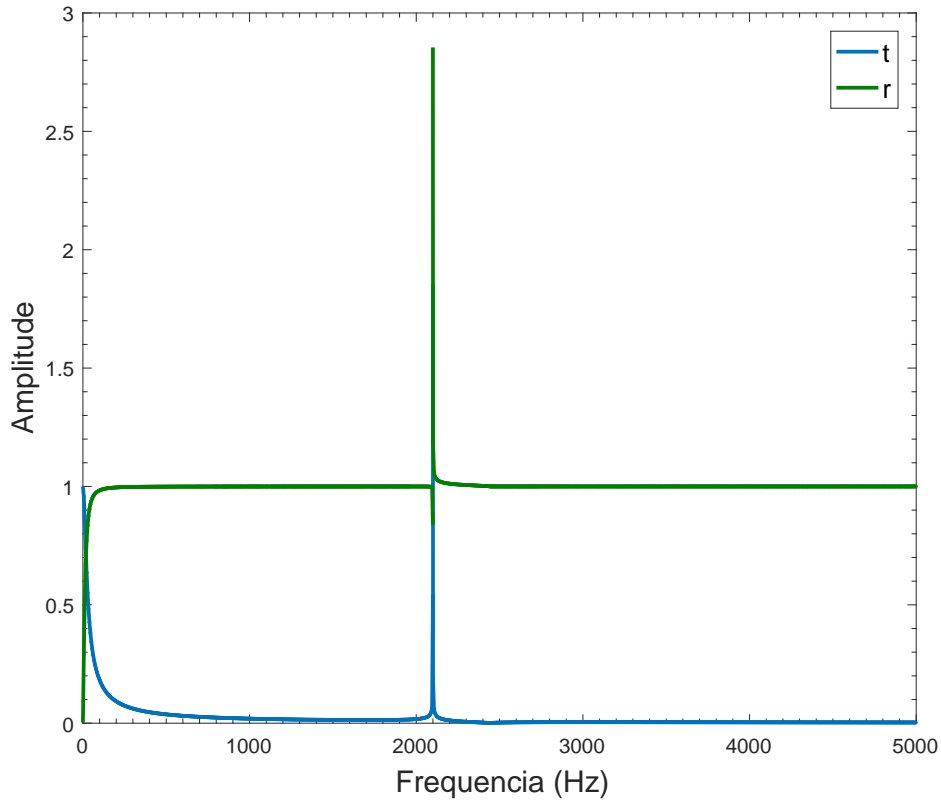


Figura 5.21 – Relação entre a amplitude e a frequência para uma massa de 10 *kg*.

O resultado obtido no gráfico da Figura 5.21 se diferencia muito do obtido para a estrutura de aço (vide Figura 5.4) devido à presença dos ressonadores. As amplitudes de frequência e transmissão são mantidas praticamente constantes no intervalo selecionado até o momento em que atingem um pico e ambas as amplitudes de reflexão e de transmissão são aumentadas. A amplitude de reflexão decresce um pouco e depois aumenta subitamente para valores elevados, enquanto que, a amplitude de transmissão apenas cresce. Foram ajustados os eixos para que fosse possível ver com mais detalhes esta região, o resultado é mostrado na Figura 5.22. Como pode-se perceber, o pico de amplitude ocorre exatamente para o mesmo valor de frequência do ressonador. O motivo para a ocorrência desta variação súbita na amplitude é devido ao efeito de atenuação dos ressonadores, isto é, quando a frequência da estrutura atinge o mesmo valor da frequência do ressonador ocorre a atenuação das ondas que estão se propagando na metaestrutura.

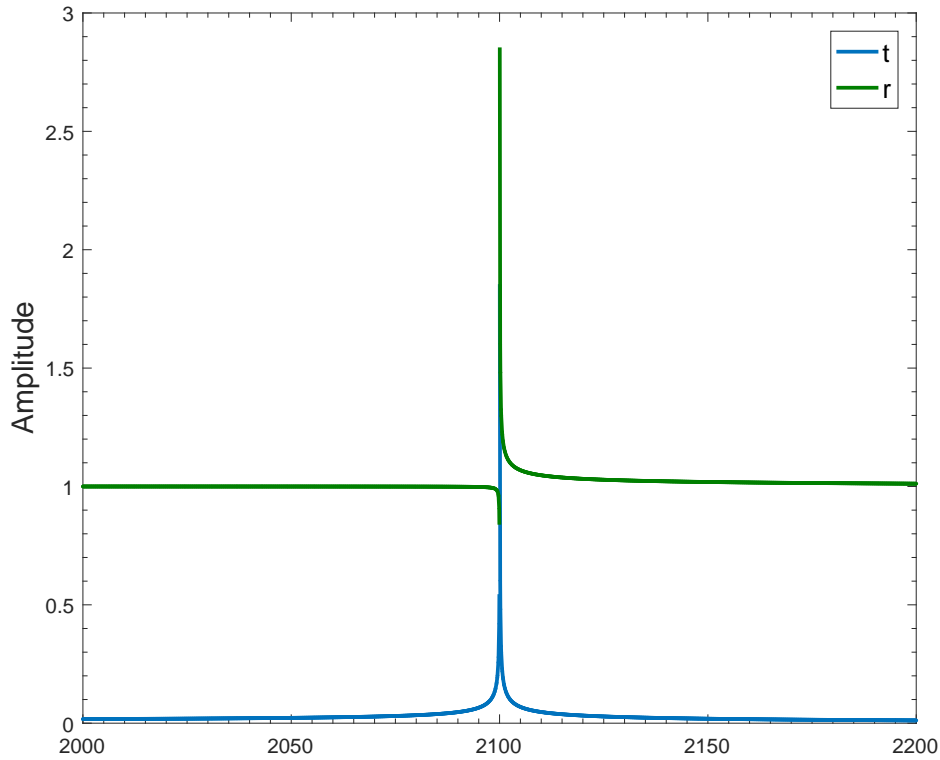


Figura 5.22 – Região em que ocorre o máximo das amplitudes do gráfico de amplitude vs frequência. Visão ampliada.

5.2.4 Vigas apoiadas sobre mola

O modelo de vigas de aço apoiadas em uma mola praticamente não mostrou nenhuma variação na sua amplitude para a frequência inicial de 2000 Hz . Os resultados só passaram a aparecer quando a frequência foi reduzida para valores inferiores de 20 Hz . Com a troca do aço por um metamaterial, tentou-se plotar a variação da amplitude para estas mesmas duas frequências. Para a frequência de 2000 Hz , o comportamento observado foi o mesmo, as amplitudes permaneceram constantes, sendo que apenas a amplitude de transmissão era diferente de 0. Enquanto isso, para a frequência de 20 Hz , a variação observada foi bem pequena, porém com comportamento similar à obtida para o caso anterior, mostrada na Figura 5.10. Para que pudesse enxergar melhor os efeitos a frequência foi reduzida um pouco mais para 10 Hz . No gráfico da Figura 5.23 é mostrado os efeitos causados na amplitude pelo acoplamento da mola.

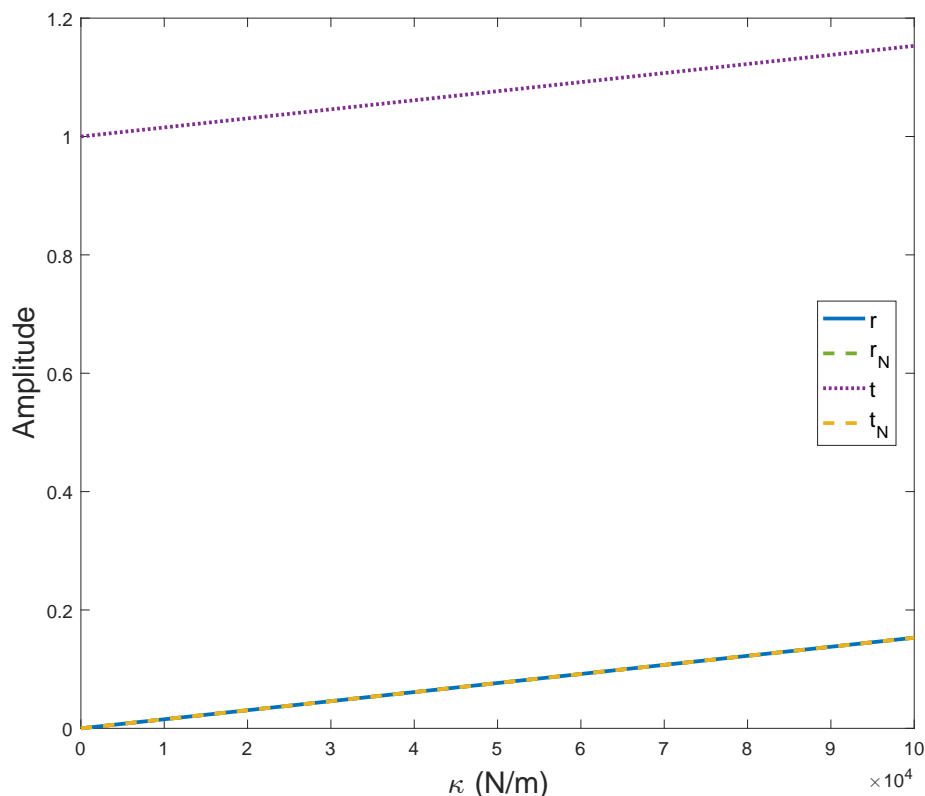


Figura 5.23 – Relação entre a amplitude e a constante de mola κ para modelo de vigas de metamateriais apoiados por uma mola.

Olhando para o gráfico da Figura 5.23, observa-se que a variação da amplitude é bem menor. Para o caso do aço, κ variou de um intervalo que ia de 0 até 10000 N/m e as amplitudes tiveram um incremento de aproximadamente 1 ao longo deste intervalo. Em contrapartida, para o caso da metaestrutura, foi utilizado um intervalo de κ que vai de 0 até 100000 N/m e a amplitude só teve um incremento de menos de 0,2 ao longo do intervalo. Pode-se dizer, então, que a metaestrutura é menos sensível às variações na amplitude do que a estrutura de aço, é preciso valores bem menores da frequência e de κ bem maiores para que seja observado o mesmo comportamento. Para tentar explicar este comportamento encontrado, recorre-se às equações de modelagem (vide Equações 5.3). Na maioria dos coeficientes, o módulo de elasticidade está apenas no denominador. Como há uma grande diferença entre os módulos de elasticidade do aço e do metamaterial, sendo que o do aço é muito maior, esperava-se, inicialmente, que o coeficiente atingisse valores maiores, porém não é só o módulo de elasticidade que muda de uma estrutura para a outra, a massa específica e o número de onda também estão sendo alterados. Devido ao fato de que a frequência do ressonador é bem maior que a frequência da onda incidente, o termo Ω_r é $\ll 1$, juntando isto ao fato de que o módulo de elasticidade também está no denominador, pode ocorrer um aumento no número de onda de uma estrutura para a outra. Na curva de dispersão, mostrada na Figura 3.12, que foi obtida para uma metaestrutura, tinha ficado evidente que para uma mesma frequência angular ocorre um aumento no número de onda com o uso de uma metaestrutura em comparação com o aço. Logo, é

possível concluir, que o motivo da amplitude variar bem menos na metaestrutura é por causa da frequência do ressonador que é muito alta se comparada com a frequência da estrutura.

No gráfico da Figura 5.24, é mostrado a relação entre a frequência e a amplitude para a metaestrutura com mola acoplada.

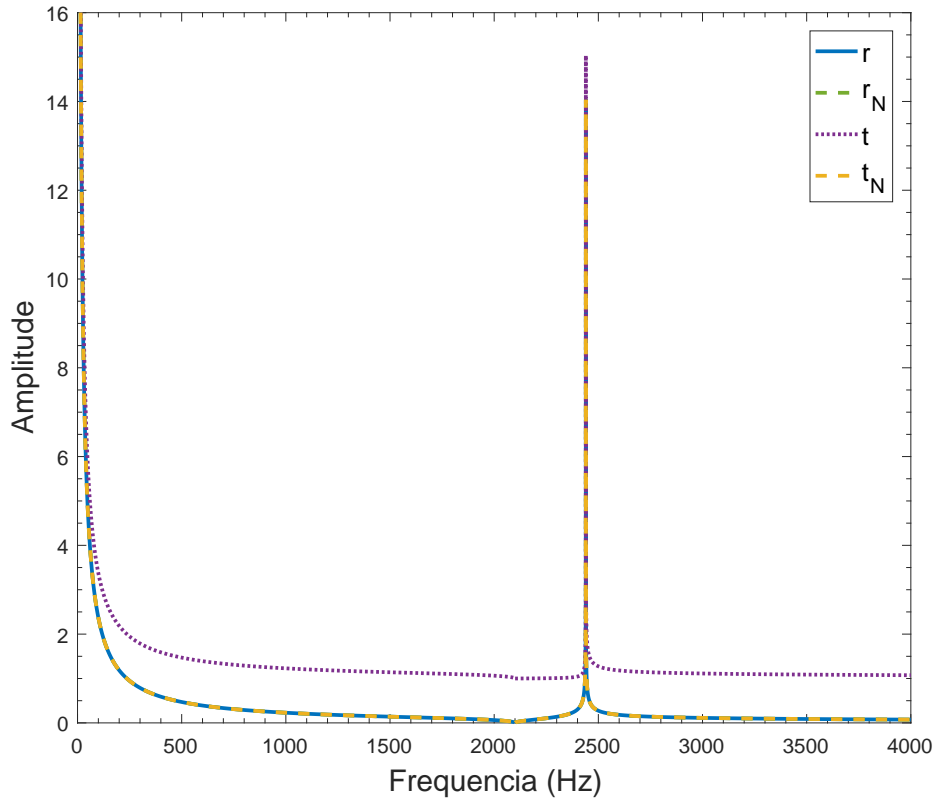


Figura 5.24 – Amplitude em função da frequência para uma constante de mola fixa de 50000 N/m .

Para os valores menores de frequência, o comportamento da amplitude se assemelha ao obtido para o caso em que se utilizou o aço na estrutura (vide Figura 5.4). Devido à presença do ressonador, ocorre um pico nas amplitudes das ondas. Todas as amplitudes crescem rapidamente. Inicialmente, esperava-se que este pico estivesse no mesmo valor da frequência do ressonador, que nem ocorreu para o caso da massa pontual, e não em um valor que é apenas próximo. A partir da relação da Equação 3.51, para uma frequência f_r de 2100 Hz , o fim do intervalo de atenuação previsto da metaestrutura, irá ocorrer para uma frequência de aproximadamente 2440 Hz , ajustando a escala do eixo x , consegue-se ver, a partir da Figura 5.25, que o pico está ocorrendo exatamente para este valor de frequência. Logo, os resultados estão dentro do previsto. Pode-se dizer que o pico está indicando a frequência de atenuação das ondas na metaestrutura.

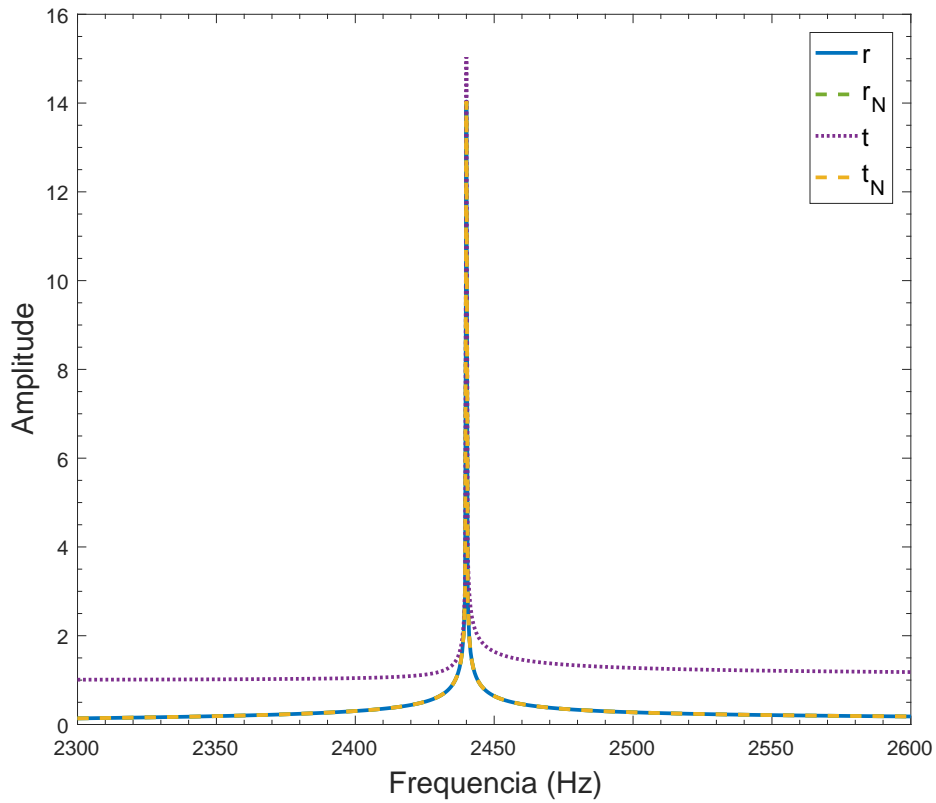


Figura 5.25 – Região em que ocorre o máximo das amplitudes. Visão ampliada.

5.2.5 Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo

Considerando vigas de mesma dimensão, porém agora feitas de metamaterial, plota-se o gráfico que evidencia a relação entre as amplitudes das ondas longitudinais e de flexão refletidas e transmitidas e α . O gráfico foi feito para o mesmo valor de frequência de 2000 Hz e ele é mostrado na Figura 5.26.

Para este modelo é um pouco mais complicado de se analisar as equações de modelagem, como foi feito nos outros casos, devido ao fato de que elas são muito grandes e com muitos termos. Dessa maneira, os resultados só podem ser analisados por meio do gráfico mostrado na Figura 5.26. Percebe-se que, para a metaestrutura, as amplitudes continuam apresentando um comportamento simétrico. Quando a inclinação da segunda viga atinge o valor de $\alpha = 0$, ocorre apenas transmissão da onda de flexão para a outra viga e quando $\alpha = \pi/2$ ou $\alpha = -\pi/2$, as amplitudes de t_{bN} , t_l , r_b , r_{bN} e r_l chegam no seus máximos, enquanto que a amplitude de t_b no seu valor mínimo.

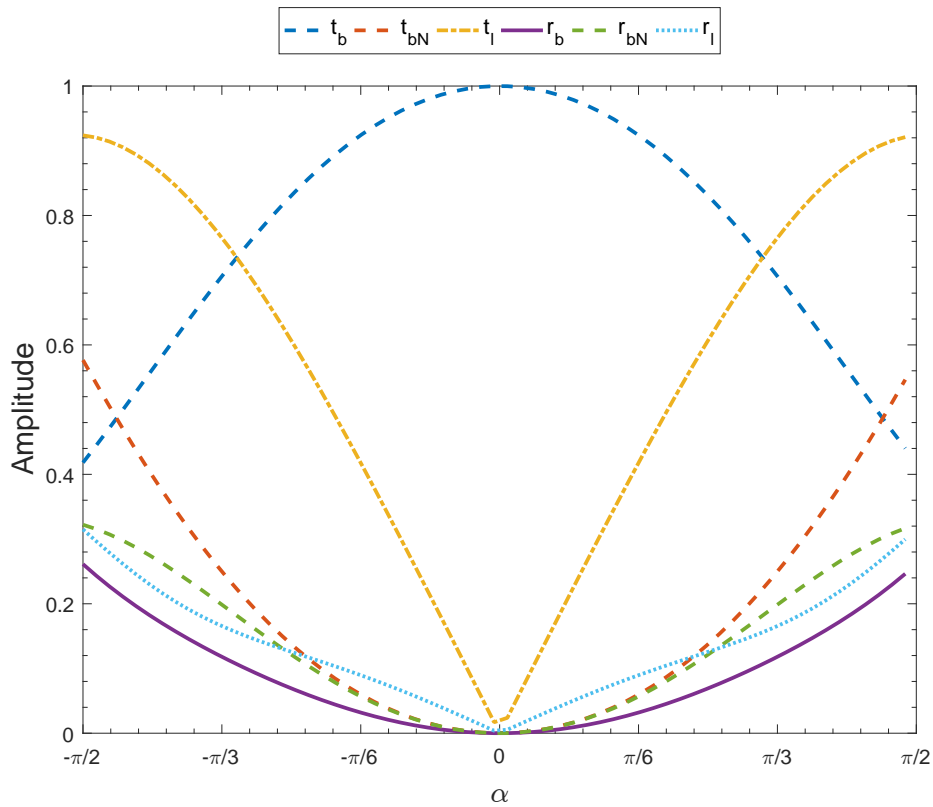


Figura 5.26 – Relação entre a amplitude e o ângulo α da estrutura inclinada feita com metamateriais.

Comparando com o resultado obtido com a utilização de vigas de aço, que foi mostrado na Figura 5.26, percebe-se que o comportamento dos gráficos não é exatamente o mesmo. As amplitudes t_b , t_l e r_l atingem valores maiores para um mesmo ângulo no caso da metaestrutura, enquanto que, as amplitudes t_{bN} , r_b e r_{bN} atingem valores menores. Foram testados outros valores de frequência e percebeu-se que para uma menor frequência de 500 Hz , a metaestrutura irá passar a apresentar exatamente os mesmos valores de amplitudes que foram obtidos para o aço.

Na Figura 5.27 é mostrado o gráfico que evidencia o comportamento da amplitude quando ocorre mudanças na frequência da onda incidente. Para sua confecção foi utilizado o mesmo valor de frequência do ressonador de 2100 Hz para as ondas longitudinais e de flexão e o ângulo da segunda viga foi fixado em $\pi/4$.

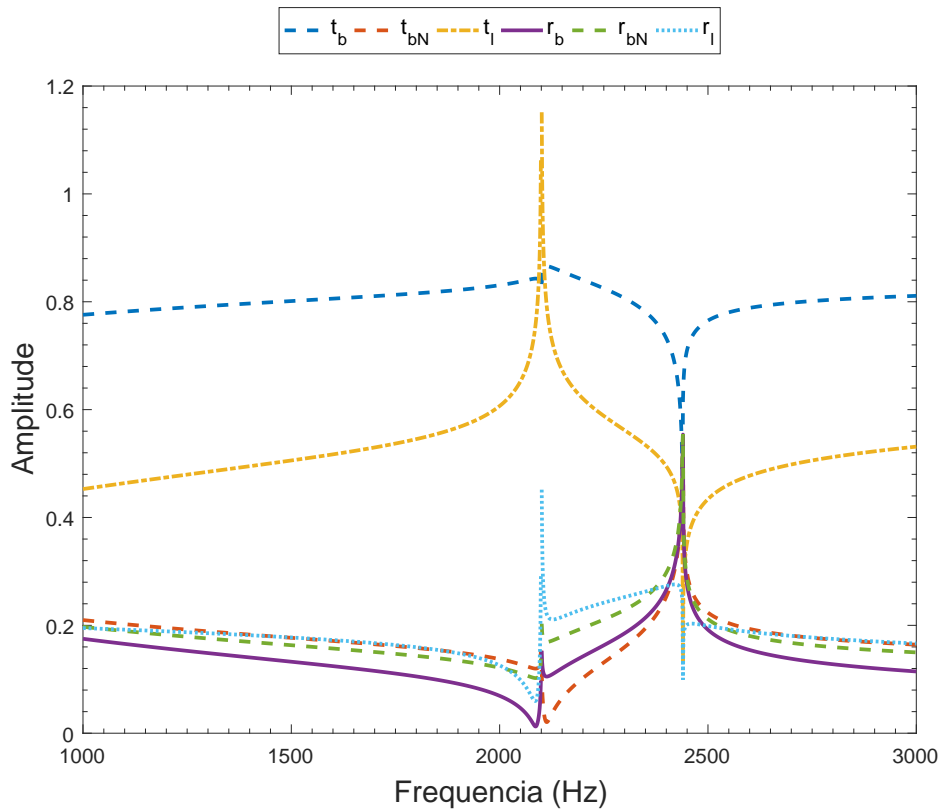


Figura 5.27 – Mudança na amplitude devido à frequência da estrutura para $\alpha = \pi/4$.

O resultado do gráfico se torna bem diferente do que foi encontrado para o caso das vigas feitas de aço que é mostrado na Figura 5.12. Esta mudança de comportamento é devido à presença dos ressonadores da metaestrutura.

É possível perceber, que no momento que a frequência se iguala à frequência do ressonador, ocorre um pico na amplitude. Outro pico ocorre na frequência de aproximadamente 2440 Hz . Para a frequência de 2100 Hz , a maioria das amplitudes das ondas transmitidas e das refletidas aumenta, a única exceção é a da onda de flexão transmitida, t_b , a amplitude dela passa por uma leve redução. Agora para a frequência de 2440 Hz , a amplitude das ondas t_{bN} , r_b e r_{bN} sofrem novamente um aumento, enquanto que todas as outras amplitudes decrescem.

Como foi definido pela Equação 3.51, já esperava-se que os picos ocorreriam para estes valores de amplitude. Para os resultados do modelo da mola, ocorre um pico de amplitude apenas para a frequência de 2440 Hz , na frequência de 2100 Hz , as amplitudes continuaram sem nenhuma variação. Em contrapartida, para o modelo da massa pontual só ocorreu um pico de amplitude para a frequência de 2100 Hz . Este é o primeiro modelo dos estudados que apresenta dois picos de amplitudes para estes dois valores de frequência. Pelo gráfico da Figura 5.27, percebe-se que os coeficientes das ondas de flexão aparentam ser mais afetados pela frequência de 2440 Hz do que a de 2100 Hz e os coeficientes das ondas longitudinais apresentam uma maior mudança para a frequência de 2100 Hz . Isto indica uma tendência de comportamento das ondas longitudinais e de flexão para este

metamaterial.

Dentro do intervalo de 2100 Hz a 2440 Hz , está ocorrendo uma região de transição da amplitude. A frequência de 2100 Hz indica o início intervalo de atenuação da metaestrutura e a frequência de 2440 Hz indica o fim da região de atenuação. Assim sendo, é possível dizer que as ondas de flexão são mais afetadas no fim do intervalo de atenuação, enquanto que as ondas longitudinais são mais afetadas no início do mesmo.

Por meio dos resultados obtidos, percebe-se que a utilização da metaestrutura altera significamente o comportamento da amplitude perante mudanças na frequência. Para mudanças do ângulo α , a amplitude pode apresentar comportamentos semelhantes dependendo do valor de frequência adotado.

5.2.6 Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita

Na Seção 5.1.5, foi estudado o comportamento das amplitudes das ondas transmitidas e refletidas para o caso em que a estrutura é feita de um aço simples. Deseja-se, nesta seção, estudar qual seria o comportamento com a utilização de um metamaterial.

O comportamento será estudado sob as mesmas condições:

1. Variando ambos os ângulos no mesmo intervalo
2. Variando apenas um ângulo enquanto o outro se mantém fixo
3. Variando ambos os ângulos em intervalos diferentes
4. Variando a frequência para ângulos fixos

Primeiramente, variou-se os ângulos dentro do intervalo de $[-\pi/2, \pi/2]$ com uma frequência fixa de 2000 Hz e plotou-se o comportamento da amplitude em função desses ângulos. Em todos os momentos, $\alpha_1 = \alpha_2$. O resultado é mostrado na Figura 5.28. Comparando com gráfico da Figura 5.13 obtido para um aço, o que mais chama atenção é o fato de que as amplitudes das ondas longitudinais de transmissão e de reflexão aumentaram bem mais na metaestrutura. As amplitudes das ondas de flexão chegaram a ter comportamentos bem próximos.

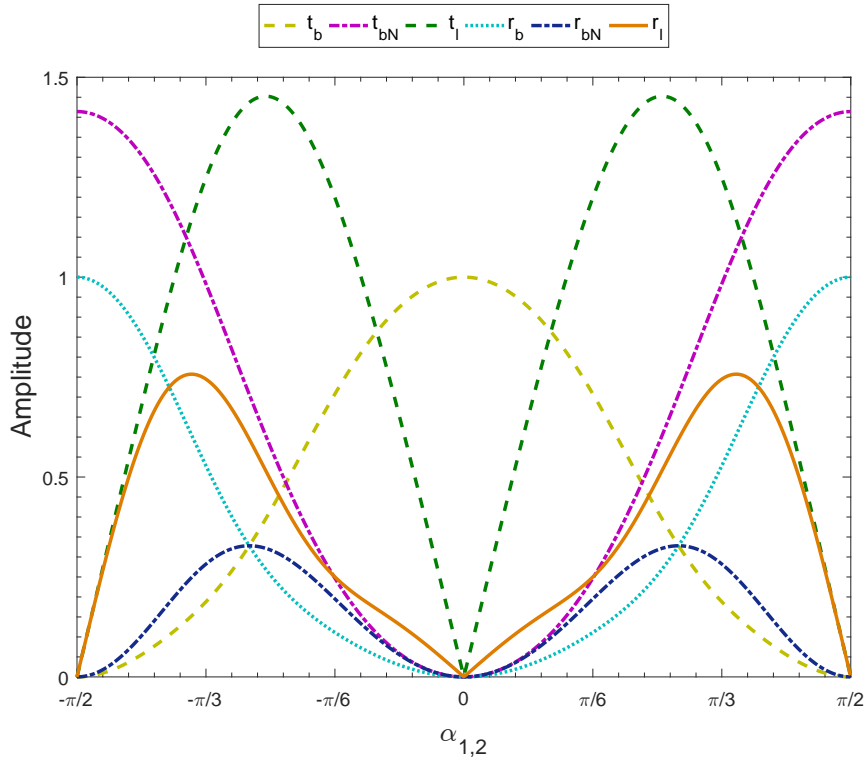


Figura 5.28 – Comportamento da amplitude em função dos ângulos $\alpha_{1,2}$ que variam dentro do mesmo intervalo.

O comportamento das amplitudes continuam bem simétricos. O valor máximo do coeficiente t_l é atingido para um ângulo de módulo $\pi/4$, enquanto que para o coeficiente r_l , ocorre para aproximadamente $\pi/3$. A onda que atinge menores valores para o coeficiente é a de reflexão evanescente. Ocorre uma redução nos valores de amplitude obtidos para o mesmo ângulo para as ondas t_b e r_{bN} .

Plotando, agora, o comportamento da amplitude em função apenas da variação de um dos ângulos, obtém-se o resultado mostrado no gráfico da Figura 5.29. O ângulo α_1 foi fixado como $\pi/6$ e a frequência utilizada foi de 2000 Hz .

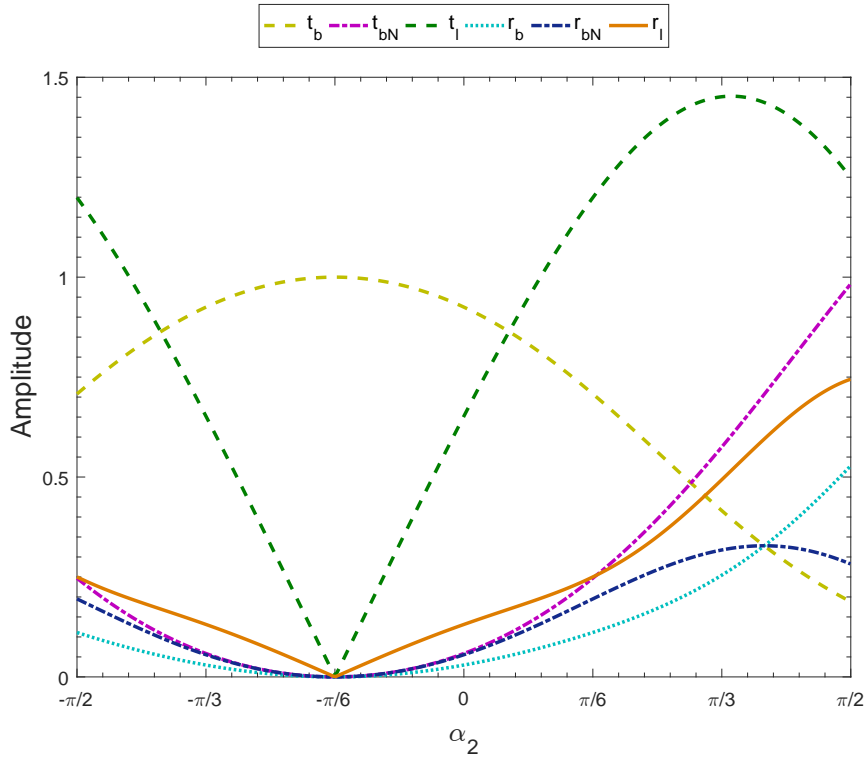


Figura 5.29 – Comportamento da amplitude em função apenas de α_2 para uma metastrutura. O ângulo α_1 foi mantido fixo em $\pi/6$.

Já se pode ver de início, que as ondas longitudinais de reflexão e de transmissão continuam sendo as mais afetadas pela metastrutura, é bem evidente o aumento de suas amplitudes. Olhando, para os valores das amplitudes, os coeficientes das ondas de flexão não parecem ter mudado muito com a utilização do metamaterial, consegue-se notar apenas uma leve mudança nos coeficiente r_b e r_{bN} na maneira que as curvas estão acentuadas, devido ao pequeno decréscimo de suas amplitudes.

Considerando novamente uma mudança em ambos os ângulos, só que desta vez em intervalos diferentes, α_1 variando dentre $[0, \pi/2]$ e α_2 dentre $[-\pi/2, 0]$, obtém-se os gráficos mostrados nas Figuras 5.30a e 5.30b para cada um dos ângulos.

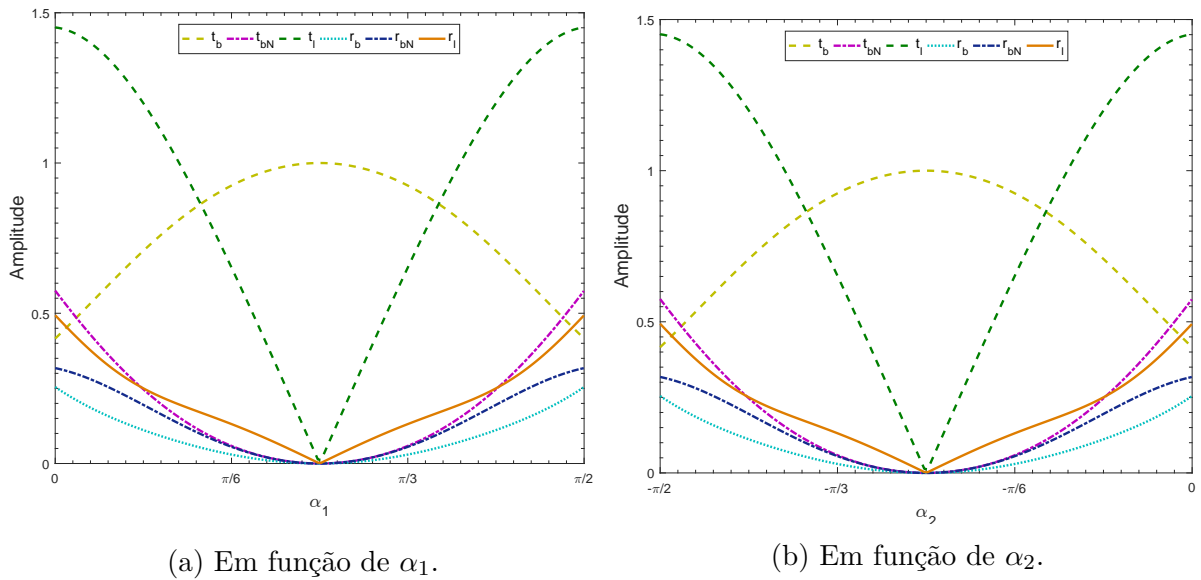


Figura 5.30 – Variação da amplitude em função de uma mudança em α_1 e em α_2 para uma metaestrutura. Ambos os ângulos variam, porém em intervalos diferentes.

O comportamento da amplitude em função de cada um dos ângulos é idêntico entre si, como é de se esperar. Comparando com os resultados obtidos com a utilização do aço (vide Figura 5.15), as ondas longitudinais continuam atingindo valores maiores na metaestrutura, enquanto que as ondas de flexão apresentam valores bem próximos. O resultado dos gráficos das Figuras 5.30 são bem parecidos com o do modelo anterior mostrado na Figura 5.26, havendo diferença apenas nas amplitudes de t_l e r_l .

Por fim, dessa vez, fixou-se os ângulos α_1 e α_2 como $\pi/4$ e a frequência foi variada no intervalo de 0 a 5000 Hz . Para valores de frequência acima deste intervalo, as amplitudes não apresentavam muita variação. O gráfico é mostrado na Figura 5.31.

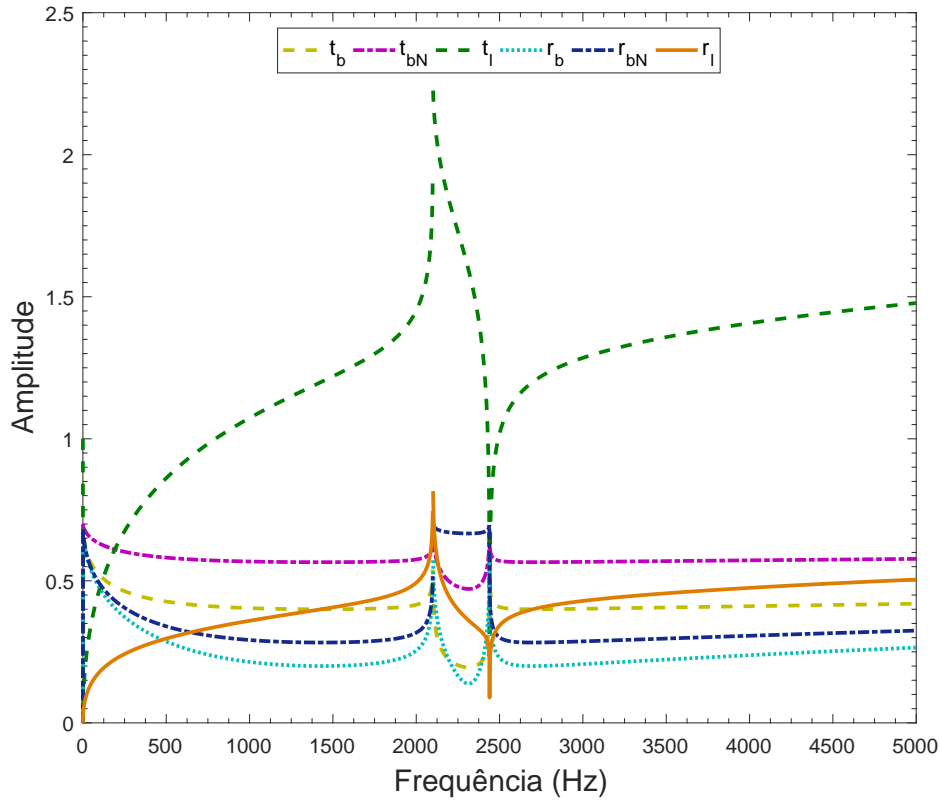


Figura 5.31 – Mudança da amplitude em função da frequência para a metaestrutura. Os ângulos $\alpha_{1,2}$ são mantidos fixos.

O comportamento da amplitude é completamente diferente do obtido na Figura 5.16 para o modelo feito de aço. Observa-se na Figura 5.31, que ocorrem dois picos nas amplitudes. O primeiro ocorre para a frequência de 2100 Hz , que é a frequência do ressonador. Todas as amplitudes crescem para esta frequência. Já o segundo pico, ocorre para a frequência de 2440 Hz . Desta vez, apenas as amplitudes de r_b e de t_{bN} crescem, o restante das amplitudes todas decrescem. Assim, que saem do intervalo de 2100 Hz e 2440 Hz , as amplitudes das ondas de flexão já passam a se manter praticamente constantes, para as amplitudes das ondas longitudinais consegue-se enxergar ainda um aumento fora deste intervalo. Como dito antes, as mudanças que ocorrem para estes valores de frequência são devido à presença dos ressonadores. A frequência de 2100 Hz indica o início do intervalo de atenuação e a frequência de 2440 Hz marca o fim.

A partir do gráfico da Figura 5.31, é possível perceber também que as ondas longitudinais são as mais afetadas pela presença dos ressonadores, os valores obtidos na amplitude de transmissão da onda longitudinal são bem maiores do que os obtidos em todas as outras. A amplitude da onda de reflexão longitudinal também apresenta um valor maior nos picos, porém mais próximo do obtido para as ondas de flexão.

Fazendo recapitulação dos resultados obtidos para este modelo, chega-se à conclusão de que as ondas longitudinais são as mais afetadas pelos ressonadores tanto para uma variação dos ângulos, quanto para uma variação nas frequências. No gráfico da amplitude

em função da frequência (Figura 5.31) é possível visualizar muito bem o que a presença dos ressonadores faz com a estrutura. Já no caso em que são variados apenas os ângulos para uma frequência fixa, a mudança do material fez com que não houvesse praticamente nenhuma mudança na maneira que as amplitudes estão variando, o que mudou foi um aumento da amplitude para um mesmo ângulo.

6 Conclusão

Neste trabalho, estudou-se o comportamento de ondas de flexão e ondas longitudinais que se propagam ao longo de modelos de viga ou barra que possuem algum tipo de descontinuidade, sejam elas a presença de um apoio ou um tipo de acoplamento. Estas descontinuidades interferem na maneira que as ondas vão se propagar ao longo da estrutura, gerando efeitos de reflexão ou até de conversão do tipo de onda. O principal objetivo do trabalho era estudar como estas estruturas se comportariam se fossem feitas de um metamaterial localmente ressonante (MLR), quais seriam os efeitos causados pela atenuação nas frequências e o que a presença dos ressonadores afetaria nos valores das amplitudes. O comportamento dos modelos foi, inicialmente, estudado para um material comum, o aço-carbono, para que se pudesse ter um banco de referência e estudar as mudanças causadas apenas pela emprego da metaestrutura.

Foram estudados ao todo 7 modelos diferentes: modelos de vigas com apoio simples e com apoio em mola, modelos de conexão de vigas em ângulo, modelo com uma massa pontual e modelo de barras com mudança de material e de seção transversal entre elas.

Os modelos de viga com apoios simples apresentaram resultados fixos que não dependiam de nenhuma variável, eram os mesmos pra qualquer tipo de material. Por isso, não foi possível realizar nenhuma análise paramétrica com eles, visto que os coeficientes eram sempre constantes. As amplitudes dos modelos restantes dependiam sempre de uma variável ou mais. Logo, com eles foi possível realizar análises paramétricas que indicavam mudanças no comportamento da amplitude em função da mudança da frequência e em função da mudança da variável causada pela descontinuidade.

De maneira geral, percebeu-se que quando havia a ausência da descontinuidade, as amplitudes das ondas de reflexão se anulavam e ocorria apenas a transmissão da onda incidente em sua forma original, este foi um resultado importante, pois permitiu comprovar a confiabilidade da modelagem.

Os primeiros modelos que apresentavam os efeitos da mudança de área e da mudança de materiais de barras, não apresentaram nenhuma variação quando passou-se a utilizar metamateriais. Estes modelos dependiam apenas da variável causada pela descontinuidade, isto é, da razão de áreas e da razão entre as propriedades do material, neste caso. Mudanças na frequência não causaram nenhuma variação da amplitude, ela sempre se manteve a mesma para qualquer valor de frequência. Os outros modelos todos apresentavam picos de amplitude quando a frequência coincidia com a frequência início e/ou fim do intervalo de atenuação. Logo, foi possível associar as frequências de pico como sendo as frequências de atenuação das amplitudes. Como estes modelos de barras não apresentavam nenhum pico de amplitude em função da frequência e nenhuma variação, foi possível concluir que a

utilização de um metamaterial não causa atenuação de suas amplitudes.

A presença dos ressonadores alteraram completamente a relação da frequência com a amplitude. O intervalo de atenuação tem início em 2100 Hz e termina em aproximadamente 2440 Hz . Percebeu-se que as ondas longitudinais dos modelos estudados foram mais afetadas pela frequência de 2100 Hz e as de flexão pela frequência de 2440 Hz . As curvas de amplitudes em função da variável causada pela descontinuidade, apresentaram comportamentos próximos quando ocorreu a troca da estrutura de aço por uma de metamaterial. Houve apenas aumento ou diminuição dos valores das amplitudes, porém muitas vezes, este comportamento dependia da frequência utilizada.

Foi possível observar nos modelos, que a troca do aço pela metaestrutura causou sempre um aumento nos coeficientes de transmissão e de reflexão das ondas longitudinais. Já as ondas de flexão, algumas aumentavam e outras diminuía a amplitude, porém nem sempre foi apresentada uma grande variação. O modelo da massa pontual, por exemplo, com a utilização da metaestrutura, os coeficientes que antes só variavam para frequências da ordem de 10^4 , apresentaram uma variação significativa para uma frequência 20 vezes menor. Os modelos das vigas em ângulo também evidenciaram um aumento significativo das amplitudes das ondas longitudinais para o mesmo valor de frequência. Dessa maneira, concluí-se, que, no geral, as ondas longitudinais foram sempre as mais afetadas pela metaestrutura.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Espera-se, que mais estudos surjam na área de acoplamento de metamateriais. Ainda existe uma ampla gama de acoplamentos muito utilizados nas indústrias que podem ser estudados no futuro. Seria interessante também estudar a junção de alguns dos modelos estudados neste trabalho, como por exemplo, como uma metaestrutura com formato de viga se comportaria se estivesse sendo apoiada em várias molas, ou até uma junção dos modelos da mola ou da massa pontual com o das vigas acopladas em ângulo ou qualquer outra combinação possível, visto que estas combinações também são possíveis de serem encontradas em algumas estruturas.

Referências

- BERGER, M. *What are metamaterials?* 2019. Disponível em: <<https://www.nanowerk.com/what-are-metamaterials.php>>. Acesso em: 5 oct. 2019. Citado na página 4.
- CAPOLINO, F. *Metamaterials Handbook: Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: CRC Press, 2009. Citado na página 3.
- CHATURVEDI, P. *Optical Metamaterials: Design, Characterization and Applications*. Dissertação (Mestrado) — University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, 2009. Citado na página 3.
- CLAPHAM, L. *Applied Physics: Introduction to Vibrations and Waves*. 2006. Disponível em: <<https://www.physics.queensu.ca/~lynann/lectures/>>. Acesso em: 21 set. 2019. Citado na página 7.
- CUI, T. J.; SMITH, D. R.; RUOPENG, L. *Metamaterials: Theory, Design, and Applications*. New York: Springer US, 2010. Citado na página 3.
- FABRO, A. T.; SAMPAIO, R.; CURSI, E. S. d. Wave attenuation in a metamaterial beam assembly with uncertainties. *DINAME 2019 - Proceedings of the XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2019. Disponível em: <<http://doi.org/10.13140/RG.2.2.16674.73921>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.
- FAHY, F.; GARDONIO, P. *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. 2. ed. Oxford: Elsevier, 2007. Citado 3 vezes nas páginas vi, 9 e 10.
- HAGEDORN, P.; DASGUPTA, A. *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Ltd., 2007. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 16.
- HARLAND, N.; MACE, B.; JONES, R. Wave propagation, reflection and transmission in tunable fluid-filled beams. *Journal of Sound and Vibration*, p. 735–754, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3316>>. Citado na página 21.
- HONGWEI, S.; DU, X.; PAI, P. F. Theory of metamaterial beams for broadband vibration absorption. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, p. 1085–1101, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1045389X10375637>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.
- JUNG, J.; KIM, H.-G.; GOO, S.; CHANG, K.-J.; WANG, S. Realisation of a locally resonant metamaterial on the automobile panel structure to reduce noise radiation. *Elsevier*, 2018. Citado na página 5.
- KODAMA, C. H.; COUTU JR., R. A. Thz metamaterial characterization using thz-tds, terahertz spectroscopy - a cutting edge technology. *IntechOpen*, 2017. Disponível em: <<https://www.intechopen.com/books/terahertz-spectroscopy-a-cutting-edge-technology/thz-metamaterial-characterization-using-thz-tds>>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.
- MUNIZ, L. V. *Projeto, Fabricação e Caracterização Experimental de Metamateriais Quirais para Biossensoriamento na Faixa de Micro-ondas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013. Citado na página 3.

NAVE, C. R. *Reflection of Sound*. 2016. Disponível em: <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/reflec.html#c1>>. Acesso em: 19 oct. 2019. Citado na página 12.

PAI, P. F.; PENG, H.; JIANG, S. Acoustic metamaterial beams based on multi-frequency vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 195–205, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.12.013>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.

RAO, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011. Citado 3 vezes nas páginas vi, 6 e 8.

SHAIK, A. *Amplitude Modulation*. 2019. Disponível em: <<https://www.physics-and-radio-electronics.com/blog/amplitude-modulation/>>. Acesso em: 26 oct. 2019. Citado 2 vezes nas páginas vi e 11.

SOUZA, M. R.; BELI, D.; FERGUSON, N. S.; de F. Arruda, J. R.; FABRO, A. T. A bayesian approach for wavenumber identification of metamaterial beams possessing variability. *Mechanical Systems and Signal Processing*, p. 106437, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106437>>. Citado na página 18.

SUGINO, C.; XIA, Y.; LEADENHAM, S.; RUZZENE, M.; ERTURK, A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, p. 104–123, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.004>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

A Códigos para o Cálculo da Matriz de Espalhamento

A.1 Modelo de vigas semi-infinitas acopladas com ângulo entre elas

```
% Universidade de Brasilia
% Departamento de Engenharia Mecanica
% -----
% Projeto de Graduação
%          ESTUDO DO ACOPLAMENTO DE METAESTRUTURAS
%          NA ATENUÇÃO DE VIBRAÇÕES
%
% Modelo: Vigas Semi-Infinitas Acopladas com ângulo entre elas
% Cálculo da matriz de espalhamento
%*****

clear all;
close all;
clc;

%>>>> Variáveis
syms kb kl E I A alpha;

% kb = número de onda de flexão
% kl = número de onda longitudinal
% E = módulo de elasticidade
% A = área transversal da viga
% alpha = ângulo de inclinação da segunda viga

%>>>> Definição das matrizes de deslocamento
Psi_1p=[1 0 0; -i*kb 0 0; 0 0 0];          %a_1^+
Psi_1n=[1 1 0; i*kb kb 0; 0 0 1];        %a_1^-
Psi_2p=[1 1 0; -i*kb -kb 0; 0 0 1];      %a_2^+

%>>>> Definição das matrizes de forças internas
Phi_1p=[-i*E*I*kb^3 0 0; -E*I*kb^2 0 0; 0 0 0];          %a_1^+
Phi_1n=[i*E*I*kb^3 -E*I*kb^3 0; -E*I*kb^2 E*I*kb^2 0; 0 0 i*E*A*kl]; %a_1^-
Phi_2p=[-i*E*I*kb^3 E*I*kb^3 0; -E*I*kb^2 E*I*kb^2 0; 0 0 -i*E*A*kl];%a_1^+

%>>>> Definição das matrizes de continuidade
C1=[cos(alpha) 0 sin(alpha); -sin(alpha) 0 cos(alpha); 0 1 0];
C2=[1 0 0; 0 0 1; 0 1 0];
```

```
%>>> Definição das matrizes de equilíbrio
E1=[0 1 0; cos(alpha) 0 sin(alpha); -sin(alpha) 0 cos(alpha)];
E2=[0 1 0; 1 0 0; 0 0 1];

%>>> Cálculo da matriz de espalhamento
H1=[C2*Psi_2p -C1*Psi_1n; E2*Phi_2p -E1*Phi_1n];
H2=[C1*Psi_1p; E1*Phi_1p];

T=H1\H2
```

A.2 Modelo de vigas semi-infinitas acopladas em ângulo a uma viga finita

```

-
% Universidade de Brasilia
% Departamento de Engenharia Mecanica
% -----
% Projeto de Graduação
%           ESTUDO DO ACOPLAMENTO DE METAESTRUTURAS
%           NA ATENUÇÃO DE VIBRAÇÕES
%
% Modelo: Vigas semi-infinitas acopladas em ângulo com viga infinita
% Cálculo da matriz de espalhamento
%*****

clc;
clear all;
close all;

%>>>> Variáveis
syms kb kl E I A alpha;

% kb = número de onda de flexão
% kl = número de onda longitudinal
% E = módulo de elasticidade
% A = área transversal da viga
% alpha = ângulo de inclinação da segunda viga
% I = momento de inércia da área

%>>>> Definição das matrizes de deslocamento
Psi_1p=[1 0 0; -i*kb 0 0; 0 0 0];          %a_1^+
Psi_1n=[1 1 0; i*kb kb 0; 0 0 1];        %a_1^-
Psi_3p=[1 1 0; -i*kb -kb 0; 0 0 1];      %a_2^+

%>>>> Definição das matrizes de forças internas
Phi_1p=[-i*E*I*kb^3 0 0; -E*I*kb^2 0 0; 0 0 0];          %a_1^+
Phi_1n=[i*E*I*kb^3 -E*I*kb^3 0; -E*I*kb^2 E*I*kb^2 0; 0 0 i*E*A*kl]; %a_1^-
Phi_3p=[-i*E*I*kb^3 E*I*kb^3 0; -E*I*kb^2 E*I*kb^2 0; 0 0 -i*E*A*kl]; %a_2^+

%>>>> Definição das matrizes de continuidade
C1=[cos(alpha1+alpha2) 0 sin(alpha1+alpha2); -sin(alpha1+alpha2) 0 cos(alpha1+alpha2)
0 1 0];
C2=[1 0 0; 0 0 1; 0 1 0];

%>>>> Definição das matrizes de equilíbrio
E1=[0 1 0; cos(alpha1+alpha2) 0 sin(alpha1+alpha2); -sin(alpha1+alpha2) 0 cos
(alpha1+alpha2)];
E2=[0 1 0; 1 0 0; 0 0 1];

%>>>> Cálculo da matriz de espalhamento
H1=[C2*Psi_3p -C1*Psi_1n; E2*Phi_3p -E1*Phi_1n];
H2=[C1*Psi_1p; E1*Phi_1p];

T=H1\H2;

```