

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTUDO DE ALGORITMO DE EQUALIZAÇÃO DE BAIXA  
COMPLEXIDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA  
PARA SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO COM SINALIZAÇÃO  
*FASTER-THAN-NYQUIST*

Nathália Barros Viana

Brasília, dezembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ESTUDO DE ALGORITMO DE EQUALIZAÇÃO DE BAIXA  
COMPLEXIDADE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA  
PARA SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO COM SINALIZAÇÃO  
*FASTER-THAN-NYQUIST*

Nathália Barros Viana

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia  
Elétrica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Eletricista*

Banca Examinadora

Prof. João Paulo Leite, ENE/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Paulo Henrique Portela de Carvalho,  
ENE/UnB  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Adoniran Judson de Barros Braga,  
ENE/UnB  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

## Agradecimentos

*A Deus, pela minha vida, família e amigos.*

*Aos meus pais, Tereza e Juca, pelo amor incondicional e por sempre acreditarem na minha capacidade. Agradeço, em especial, à minha mãe que me apoiou e me incentivou nos estudos em um momento que eu nem sabia o que era vestibular e que eu tenho certeza de que foi essencial para eu conseguir chegar onde cheguei.*

*Às minhas irmãs, Fernanda e Júlia, por serem minhas confidentes, minhas melhores amigas e tão essenciais na minha vida. Não posso deixar de agradecer também à minha outra irmã e melhor amiga, Gabrielle Everton, por tudo e tanto.*

*Ao professor João Paulo Leite, pela orientação e compreensão em aceitar finalizar a minha orientação depois do meu intercâmbio, por ser a pessoa a me apresentar a área das telecomunicações. Ao professor Marcelo Menezes, por todo o apoio, incentivo e pelas oportunidades de crescimento. Por todo conhecimento adquirido e por me introduzir ao mundo das pesquisas e congressos. A todos os professores com os quais tive prazer de conviver e que despertaram o meu interesse pela área das Exatas.*

*Ao tio Zé que me deu a minha primeira calculadora gráfica e ao Lucas Ferreira que me deu os seus livros de Engenharia Elétrica. Agradeço aos dois com muito carinho. Aos colegas de curso e estágios, pela convivência, amizade e aprendizado, em especial ao Vitor Serpa, João Vitor Leite, Nicolas Silva, Gabriel Duarte, Caio Martins e Leonardo Sandoval. Não posso deixar de agradecer também a uma pessoa muito especial que me acompanhou durante a maior parte dessa loucura que é o curso de Engenharia Elétrica.*

*À Universidade de Brasília, que proporcionou os melhores anos da minha vida, seja em Brasília, seja em Braga.*

*A eles e a muitos outros que fizeram parte da minha formação acadêmica e pessoal, o meu muito obrigada.*

*Nathália Barros Viana*

---

## RESUMO

Neste trabalho de conclusão de curso é realizado um estudo acerca da sinalização FTN (*Faster-than-Nyquist*) e do desempenho de sistemas que a empregam. A sua principal vantagem é a possibilidade de aumento em, aproximadamente, 25% da taxa de transmissão em comparação com sistemas que utilizam sinalização à taxa de Nyquist, sem que haja qualquer aumento da largura de banda ou perda de desempenho. Entretanto, para que isso seja possível, esse esquema gera um aumento da interferência interssimbólica (ISI) e da complexidade de processamento no demodulador. Com o intuito de mitigar a ISI, analisa-se um esquema de equalização no domínio da frequência (FDE) com baixa complexidade. Em cenários em que seriam exigidos equalizadores com número elevado de coeficientes (devido à elevada dispersão causada pelo canal de comunicação), a utilização da equalização no domínio da frequência se mostra computacionalmente mais factível. No esquema estudado, a interferência interssimbólica, que é introduzida pela sinalização FTN, é aproximada por um número finito de coeficientes em uma matriz de estrutura Toeplitz. É realizada a FFT (*fast Fourier transform*) e emprega-se o MMSE (do inglês, *minimum mean square error*) no domínio da frequência. O objetivo principal deste trabalho é avaliar o desempenho do sistema FTN com FDE. Resultados de simulação mostram que tal combinação é capaz de cancelar a ISI, atingindo um desempenho similar aos sistemas que utilizam a sinalização à taxa de Nyquist.

---

## ABSTRACT

In this work, it is conducted a study about the Faster-than-Nyquist (FTN) signaling and the performance of FTN systems. The main advantage of this signaling is the possibility to transmit almost 25% more bits per second in the same bandwidth than the Nyquist signaling, without affecting the error probability of bit. However, this is only achievable within the increase of the intersymbol interference (ISI) and the complexity of the demodulation. A scheme of low complexity frequency-domain equalization (FDE) is analyzed which is especially beneficial for a long channel tap FTN scenario. On this scheme, the ISI, that is introduced by the signaling, is approximated by a circulant matrix of finite-taps. A fast Fourier transform (FFT) operation is performed and a frequency-domain minimum mean square error (MMSE) equalizer is employed. The main objective is to evaluate, through simulations, the performance of FTN systems with FDE which is capable of attaining a near-optimal error-rate performance. The main objective of this work is to evaluate the performance of FTN systems. Simulation results indicate that this combination is capable of cancelling the ISI and of attaining a near-optimal error-rate performance.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	FASTER-THAN-NYQUIST	3
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	5
<b>2</b>	<b>COMUNICAÇÕES DIGITAIS</b>	<b>6</b>
2.1	INTRODUÇÃO	6
2.2	SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS	6
2.3	MAPEAMENTO EM SÍMBOLOS E MODULAÇÃO	7
2.4	CANAL E RUÍDO	8
2.5	CRITÉRIO DE NYQUIST PARA INTERFERÊNCIA INTERSIMBÓLICA NULA	10
2.6	EQUALIZAÇÃO	15
2.6.1	EQUALIZADOR DE MÍNIMO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO	16
2.7	ORTOGONALIDADE	18
2.8	DESEMPENHO	18
2.8.1	PROBABILIDADE DE ERRO DE <i>Bit</i>	18
2.8.2	DISTÂNCIA MÍNIMA E ENERGIA DE SÍMBOLO	21
2.9	CONCLUSÃO	23
<b>3</b>	<b>SINALIZAÇÃO FASTER-THAN-NYQUIST</b>	<b>25</b>
3.1	INTRODUÇÃO	25
3.2	DEFINIÇÃO	26
3.3	MODELAGEM DO SISTEMA	27
3.4	PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO	27
3.5	DISTÂNCIA MÍNIMA EM UM SISTEMA COM SINALIZAÇÃO DE NYQUIST	30
3.6	DISTÂNCIA MÍNIMA EM UM SISTEMA COM SINALIZAÇÃO FTN	33
3.7	LIMITE DE MAZO	42
3.8	CONCLUSÃO	44
<b>4</b>	<b>EQUALIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA FASTER-THAN-NYQUIST</b>	<b>46</b>
4.1	INTRODUÇÃO	46
4.2	MODELAGEM DO SISTEMA	47

4.3	EQUALIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	48
4.4	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL .....	53
4.5	PENALIDADES.....	54
4.6	DESEMPENHO .....	55
4.7	DISTÂNCIA MÍNIMA.....	60
4.8	ERRO DE MODELAGEM .....	62
4.9	CONCLUSÃO.....	65
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>66</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS .....	67
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>68</b>

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagramas de espaço de estados de constelações comumente utilizados para modulações BPSK/2PAM(a), 4PAM(b), QPSK/4QAM(c), 8PSK(d) e 16QAM(e). Adaptado de [1].	7
2.2	Esquemático do canal com ruído aditivo.	9
2.3	(a) Densidade espectral de potência $S_N(f)$ do ruído AWGN. (b) Autocorrelação $R_N(\tau)$ do ruído AWGN.	9
2.4	Esquemático do sistema de comunicação, com ênfase nas respostas impulsionais do transmissor ( $h_{TX}(t)$ ), canal ( $h_{CANAL}(t)$ ) e receptor ( $h_{RX}(t)$ ).	10
2.5	Espectro $A(f)$ para o caso $T_s < \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].	12
2.6	Espectro $A(f)$ para o caso $T_s = \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].	12
2.7	Espectro $A(f)$ para o caso $T_s > \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].	13
2.8	(a) Resposta no tempo do pulso cosseno levantado. (b) Resposta na frequência do pulso cosseno levantado. Adaptado de [2].	13
2.9	Esquemático de um equalizador linear no domínio do tempo. Adaptado de [3].	15
2.10	Sinalização binária antipodal com destaque para as regiões de decisão. Adaptada de [1].	20
2.11	Constelação de um sistema QPSK, com destaque para a distância mínima e energia de símbolo. Adaptado de [3].	22
3.1	Esquemático simplificado de um sistema de comunicação que emprega sinalização <i>Faster-than-Nyquist</i> . Adaptado de [4].	27
3.2	(a) Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência $\mathbf{a}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.	32
3.3	Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência $\mathbf{b}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.	32
3.4	(a) Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência $\mathbf{a}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.	34
3.5	Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência $\mathbf{b}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.	34
3.6	(a) Forma de onda do sinal erro $x_s(t)$ resultante da subtração do sinal $x_{\mathbf{a}}(t)$ e $x_{\mathbf{b}}(t)$ . (b) Forma de onda $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização de Nyquist com $\alpha = 1$ .	35
3.7	(a) Forma de onda do sinal erro $x_s(t)$ resultante da subtração do sinal $x_{\mathbf{a}}(t)$ e $x_{\mathbf{b}}(t)$ . (b) Forma de onda $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização FTN com $\alpha = 0,7$ .	35

3.8	(a) Forma de onda do sinal erro $x_s(t)$ resultante da subtração do sinal $x_a$ e $x_b$ . (b) Forma de onda $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização de Nyquist com $\alpha = 0$ . . . . .	38
3.9	(a) Forma de onda do sinal erro $x_s(t)$ resultante da subtração do sinal $x_a$ e $x_b$ . (b) Forma de onda $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização FTN com $\alpha = 0,7$ . . . . .	38
3.10	Comportamento da distância euclidiana $d^2$ ao variar o valor do fator de compressão $\alpha$ para 10 diferentes vetores de erro $e$ . . . . .	41
3.11	Comportamento da distância mínima em função do fator de compressão. Destaque para o limite de Mazo $\alpha = 0,802$ . Adaptado de [5]. . . . .	43
3.12	Distâncias euclidianas de uma sequência com quatro símbolos em função do fator de compressão. Destaque para a curva de distância mínima. . . . .	44
4.1	Esquemático simplificado do sistema faster-than-Nyquist. Adaptado de [4]. . . . .	47
4.2	Esquemático simplificado do mecanismo de CP para $N = 8$ e $\nu = 2$ . Sequência (a) representa os símbolos gerados. Sequência (b), os símbolos enviados, após o acréscimo do prefixo cíclico. Sequência (c), os símbolos recebidos, após a retirada do prefixo cíclico. . . . .	49
4.3	Esquemático simplificado do mecanismo de CP com destaque para os índices dos símbolos. Sequência (a) representa os símbolos enviados, após o acréscimo do prefixo cíclico. Sequência (b) representa os símbolos recebidos, após a retirada do prefixo cíclico. . . . .	50
4.4	Diagrama de blocos do transmissor e receptor de um sistema FTN que utiliza equalização no domínio da frequência. . . . .	53
4.5	Desempenho do sistema FTN com FDE, varia-se o fator de <i>roll-off</i> de $\beta = 0,3$ a $0,5$ . Considerou-se o tamanho do CP igual a 1 e 10 e um único fator de compressão $\alpha = 0,8$ . . . . .	56
4.6	Desempenho do sistema FTN com FDE, variando o fator de <i>roll-off</i> de $0,3$ a $0,5$ e o fator de compressão de $0,70$ a $0,80$ . Considerou-se o tamanho do CP igual a 1 e 10. . . . .	57
4.7	Desempenho do sistema FTN sem FDE e com FDE, mantendo fixos o fator de compressão em $0,8$ e o fator de <i>roll-off</i> em $0,3$ . Considerou-se três valores distintos de $\nu = 1,50$ e $512$ . . . . .	58
4.8	Relação entre $E_b/N_0$ efetiva e o coeficiente de compressão, para um sistema com $BER = 10^{-5}$ . Detalhe para o limite inferior que ocorre quando $\alpha = 1$ e não há ISI. . . . .	60
4.9	Quadrado da distância mínima para a situação com $\alpha = 0,8$ , $\beta = 0,3$ , $\nu = 0$ e $E_b/N_0 = 0$ . . . . .	61
4.10	Quadrado da distância mínima para a situação com $\alpha = 0,8$ , $\beta = 0,3$ , $\nu = 0$ e $E_b/N_0 = 10$ . . . . .	61
4.11	Quadrado da distância mínima para a situação com $\alpha = 0,8$ , $\beta = 0,3$ , $\nu = 0$ e $E_b/N_0 = 17$ . . . . .	62
4.12	Relação entre os parâmetros $\nu$ e $\alpha$ na modelagem do erro $\Delta\mathbf{H}$ . . . . .	64

# LISTA DE TABELAS

3.1	Vetores de erro $e$ e suas distâncias euclidianas para $\alpha = 0,7$ .....	39
4.1	Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.5 .....	55
4.2	Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.6 .....	57
4.3	Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.7 .....	58
4.4	Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.8. ....	59
4.5	Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.12 .....	64

# ABREVIATURAS

ACF	Função de autocorrelação
ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BER	<i>Bit Error Probability</i>
BPSK	<i>Binary Phase-Shift Keying</i>
CP	<i>Cyclic Prefix</i>
DTF	<i>Discrete Fourier Transform</i>
FDE	<i>Frequency Domain Equalization</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FTN	<i>Faster-than-Nyquist</i>
IFFT	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>
ISI	<i>Intersymbol Interference</i>
IoT	<i>Internet of Things</i>
LTE	<i>Long Term Evolution</i>
MAP	<i>Maximum a Posteriori Probability</i>
MIMO	<i>Multiple-input and Multiple-output</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>
OFDM	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
PSK	<i>Phase-Shift Keying</i>
QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
QoE	<i>Quality of Experience</i>
QoS	<i>Quality of Service</i>
QPSK	<i>Quadrature Phase Shift Keying</i>
SC	<i>Single Carrier</i>
SIC	<i>Successive Interference Cancellation</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
ZF	<i>Zero Forcing</i>
4G	Quarta Geração
5G	Quinta Geração

# LISTA DE SÍMBOLOS

$A(f)$	Réplicas do espectro dos filtros do transmissor, canal e receptor no domínio da frequência
$\mathbf{a}$	Sequência de símbolos
$\mathbf{b}$	Sequência de símbolos
$a_k$	$k$ -ésimo símbolo da sequência $\mathbf{a}$
$b_k$	$k$ -ésimo símbolo da sequência $\mathbf{b}$
$B$	Largura de banda
$B_b$	Largura de banda em banda base
$B_T$	Largura de banda em banda passante
$B_{min}$	Largura de banda mínima ocupada por um pulso da família do cosseno levantado
$D_m$	Região de decisão
$D_1$	Região de decisão do símbolo $\{+1\}$
$D_2$	Região de decisão do símbolo $\{-1\}$
$D_{m'}$	Região de decisão da mensagem $m'$
$d_{min}$	Distância mínima
$d[i, j(i)]$	Distância entre dois sinais que transmitem as sequências do par $[i, j(i)]$
$d^2$	Quadrado da distância euclidiana
$d_{min}^2$	Quadrado da distância mínima
$d(\mathbf{e})$	Distância euclidiana do vetor de erro $\mathbf{e}$
$E$	Energia do sinal FTN
$E_{s_k}$	Energia do símbolo $s_k$
$E_s$	Energia de símbolo
$E_b$	Energia de <i>bit</i>
$E_x$	Energia do sinal $x(t)$
$\mathbf{e}$	Vetor linha que corresponde à diferença entre duas sequências de símbolos
$e_k$	Diferença entre o $k$ -ésimo elemento de duas sequências
$e_l$	Diferença entre o $l$ -ésimo elemento de duas sequências
$\mathbf{e}_i$	Vetor linha dos coeficientes do equalizador MMSE
$\mathbf{e}_{opt}$	Vetor linha dos coeficientes ótimos do equalizador MMSE
$e_i$	Coeficientes do equalizador MMSE
$f$	Frequência
$g(t)$	Pulso formatador

$h_{TX}(t)$	Resposta impulsional do transmissor
$h_{CANAL}(t)$	Resposta impulsional do canal
$h_{RX}(t)$	Resposta impulsional do receptor
$h(t)$	Resposta impulsional dos filtros do transmissor, canal e receptor
$h_k$	Resposta impulsional dos filtros do transmissor, canal e receptor no $k$ -ésimo tempo de símbolo
$H(f)$	Função de transferência dos filtros do transmissor, canal e receptor
$\mathbf{H}$	Matriz que contém dos valores dos pulsos $h(t)$ sobrepostos
$\bar{\mathbf{H}}$	Matriz que representa ISI com coeficientes infinitos
$K$	Limite superior do somatório
$k$	Constante de Boltzmann
$l$	Quantidade de <i>bits</i> em um símbolo
$M$	Ordem da modulação
$\hat{m}$	Mensagem escolhida pelo receptor
$m$	Mensagem possível de ser transmitida
$m'$	Mensagem possível de ser transmitida diferente de $m$
$N_0$	Densidade espectral de potência unilateral do ruído
$N$	Quantidade de símbolos da sequência
$N_{simb}$	Quantidade de Símbolos em um intervalo de tempo
$n(t)$	Sinal do ruído AWGN
$\mathbf{n}$	Vetor coluna relativo ao ruído
$\mathbf{n}_f$	Sequência do ruído no domínio da frequência
$\mathbf{p}$	Correlação cruzada entre o sinal recebido e o transmitido
$P(\cdot)$	Probabilidade
$P_b$	Probabilidade de erro de <i>bit</i>
$P_d$	Termo de perda de taxa de transmissão de um sistema com FDE
$P_e$	Probabilidade de erro de símbolo
$P_{ef}$	Probabilidade entre dois sinais fixos
$P_{erro}$	Probabilidade de erro
$P_{acerto}$	Probabilidade de acerto
$P_{e m}$	Probabilidade de erro quando a mensagem $m$ é transmitida
$P_m$	Probabilidade de se enviar a mensagem $m$
$p$	Probabilidade de se enviar o símbolo $\{+1\}$ em um sistema com sinalização binária antipodal
$P_1$	Probabilidade de se enviar o símbolo $\{+1\}$ em um sistema com sinalização binária antipodal
$P_2$	Probabilidade de se enviar o símbolo $\{-1\}$ em um sistema com sinalização binária antipodal
$p_-(r)$	Densidade de probabilidade de enviar o símbolo $\{-1\}$
$p_+(r)$	Densidade de probabilidade de enviar o símbolo $\{+1\}$
$p_{\pm}(r)$	Densidade de observação condicionada à sequência inteira de símbolos

$Q(x)$	Distribuição cumulativa complementar
$\mathbf{Q}$	Matriz com autovalores de $\mathbf{H}$
$q(l,c)$	Elemento da matriz $\mathbf{Q}$ , linha $l$ e coluna $c$
$\mathbf{R}$	Matriz de correlação do sinal recebido
$R_N(\tau)$	Autocorrelação do ruído AWGN
$R_b$	Taxa de transmissão de <i>bits</i>
$R_s$	Taxa de transmissão de símbolos
$R_{b-info}$	Taxa de transmissão de <i>bits</i> de informação
$r(t)$	Sinal recebido pelo receptor
$r_{\mathbf{a}}(t)$	Sinal que transmite a sequência de símbolos $\mathbf{a}$
$r_m(t)$	Sinal que transmite a sequência de símbolos $s_m$
$r_n(t)$	Sinal que transmite a sequência de símbolos $s_n$
$r_{\mathbf{b}}(t)$	Sinal que transmite a sequência de símbolos $\mathbf{b}$
$\mathbf{r}$	Vetor linha do sinal recebido
$\mathbf{s}_m$	Vetor linha do sinal transmitido
$s_{m,x}$	Valor do símbolo $m$ no eixo das abscissas
$s_{n,x}$	Valor do símbolo $n$ no eixo das abscissas
$s_{m,y}$	Valor do símbolo $m$ no eixo das ordenadas
$s_{n,y}$	Valor do símbolo $n$ no eixo das ordenadas
$\mathbf{s}$	Vetor coluna de símbolos transmitidos
$\mathbf{s}_f$	Sequência do sinal transmitido no domínio da frequência
$\hat{s}_i$	Sequência de símbolos de saída do equalizador
$s_i$	Sequência de símbolos para transmissão
$s_n$	Símbolo no $n$ -ésimo tempo de símbolo
$S_N(f)$	Densidade espectral de potência do ruído AWGN no domínio da frequência
$T_K$	Temperatura ambiente, em Kelvin
$t$	Tempo
$T_b$	Tempo de <i>Bit</i>
$T_s$	Tempo de Símbolo
$T$	Tempo de Símbolo FTN
$T_w$	Matriz Toeplitz
$u_i$	Sequência de símbolo
$u_i^\pm$	Sinal que transmite a sequência de símbolo $u_i$
$\mathbf{W}$	Matriz diagonal do equalizador MMSE
$x(t)$	Sinal modulado transmitido
$x_n(t)$	Sinal $x(t)$ que transmite a sequência de símbolos $s_n$
$x_m(t)$	Sinal $x(t)$ que transmite a sequência de símbolos $s_m$
$x_a(t)$	Sinal que transmite uma sequência $s_a$ de símbolos
$x_b(t)$	Sinal que transmite uma sequência $s_b$ de símbolos
$x_1(t)$	Sinal que transmite o símbolo $\{+1\}$
$x_2(t)$	Sinal que transmite o símbolo $\{-1\}$
$X$	Possíveis símbolos de serem gerados

$y_i$	Sequência de símbolos de entrada do equalizador
$\mathbf{y}_i$	Vetor coluna da sequência de símbolos de entrada do equalizador
$y_k$	Sinal de saída do receptor no $k$ -ésimo tempo de símbolo
$\hat{y}$	Sinal recebido após a retirada do prefixo cíclico no sistema FDE
$\mathbf{y}_f$	Sequência do sinal $\hat{y}$ no domínio da frequência
$y(t)$	Sinal de saída do receptor
$z$	Sequência de saída do FDE
$\alpha$	Fator de compressão
$\alpha_0$	Fator de compressão correspondente ao limite de Mazo
$f_\Delta$	Excesso de banda
$\beta$	Fator de <i>roll-off</i>
$\delta(t)$	Impulso
$\Delta\mathbf{H}$	Erro de modelagem de um sistema FTN com FDE
$\eta(t)$	Sinal resultante da convolução do ruído com a resposta impulsional do receptor
$\eta_k$	Ruído na saída do receptor no $k$ -ésimo tempo de símbolo
$\eta_m$	Eficiência espectral
$\varepsilon_i$	Diferença entre o $i$ -ésimo símbolo da sequência de símbolos transmissão e da sequência de saída do equalizador
$\lambda(i, i)$	Elemento da matriz $\boldsymbol{\lambda}$ , linha $i$ e coluna $i$
$\mu$	Média da densidade de probabilidade
$\nu$	Memória do canal
$\mathcal{N}$	Densidade de probabilidade gaussiana
$\sigma^2$	Variância
$\sigma_2^2$	Variância da sequência $S_i$
$\theta$	Variável de integração
$\Xi(t)$	Resposta impulsional do filtro formatador e canal
$\Xi(z)$	Transformada Z da função de autocorrelação de $\xi(t)$
$\dagger$	Conjugado transposto
$h$	Hermitiano
$T$	Transposto
$*$	Conjugado
$[i, j(i)]$	Par dos respectivos termos do somatório

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

A expansão dos sistemas de comunicação digital tem sido intensa devido às diversas vantagens apresentadas ao compará-los com sistemas de comunicação analógica. A comunicação digital permite uma maior imunidade ao ruído, facilidade de incorporação de técnicas de processamento digital de sinais (códigos corretores de erro, codificação de fonte, criptografia), baixo custo, baixo consumo de potência, dentre outras facilidades [6].

Apesar desses benefícios, esses sistemas apresentam uma maior complexidade no processamento de sinais e também uma maior necessidade de sincronização. Além disso, os sinais digitais podem ocupar uma maior banda no espectro de frequência. Há, então, um *trade-off* no qual os principais fatores a serem ponderados são a potência do sinal, a largura de banda (ambas entendidas como limitações físicas fundamentais que controlam a taxa de transmissão e a qualidade do sinal) e a complexidade dos sistemas de transmissão e recepção, a qual pode tornar a implementação do sistema mais onerosa, tanto no quesito financeiro como de processamento computacional [2].

O crescimento, nas últimas décadas, da quantidade de aparelhos *smartphones* e *tablets*, além da expansão da chamada Internet das Coisas (em inglês, *Internet of Things*, IoT), contribuíram para a necessidade de desenvolvimento de uma nova geração do sistema de comunicação móvel que fosse capaz de suprir as crescentes demandas por taxa de transmissão, cobertura, mobilidade e número de dispositivos conectados.

A Quinta Geração (5G) dos sistemas de comunicações móveis configura-se como um ambicioso padrão que proporcionará cobertura extremamente abrangente, serviços customizados, melhoria da QoS (qualidade de serviço, do inglês, *quality of service*) e também da QoE (qualidade de experiência, do inglês, *quality of experience*), aumento da taxa de transmissão, diminuição da latência, dentre outras melhorias [7].

O *Ericsson Mobile Report* [8], relatório divulgado pela empresa Ericsson, prevê que a quantidade de tráfego global de dado móvel mensal, em 2019, será de 38 exabytes ( $10^{18}$  bytes) e a projeção para 2025 é que seja de 160 exabytes. Além disso, espera-se que, até 2025, 45% do tráfego total

de dados móveis seja feito pelo 5G.

Para que seja possível alcançar esses feitos, o 5G apresenta como um dos seus principais requisitos o alcance da taxa de, no mínimo, 20 Gbps no downlink o que representa um aumento de quase 20 vezes da taxa atingida pela Quarta Geração (4G) e latência de 1 ms, correspondendo a uma diminuição de 10 vezes em comparação com o padrão anterior. Busca-se também o aumento em cerca de 10 vezes da quantidade de aparelhos conectados à rede [7] [9]. Assim, este padrão tem como objetivo tornar a rede mais inteligente, segura e eficiente. Portanto, torna-se fundamental o desenvolvimento de novas tecnologias que sejam capazes de fornecer ao 5G os mecanismos que proporcionem os requisitos estabelecidos.

A demanda por largura de banda no espectro da frequência é diretamente proporcional à taxa de transmissão. Assim, taxas de transmissão mais elevadas provocam uma ocupação maior do espectro pelo sinal de transmissão. A tendência, então, seria o aumento da largura de banda indefinidamente para que fosse possível aumentar a taxa de transmissão. Entretanto, a largura de banda tem se mostrado, cada vez mais, como um fator limitante para as transmissões digitais por se tratar de um recurso finito cuja disponibilidade é definida por agências reguladoras.

No Brasil, a Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) é a agência reguladora que tem, dentre as suas atribuições, definir quais frequências do espectro estão destinadas para cada aplicação e quem tem permissão para transmitir em determinada banda. As operadoras dos sistemas móveis celular devem adquirir o direito de transmissão em determinadas faixas de frequência o que é economicamente oneroso, apesar de necessário. Novas faixas do espectro serão disponibilizadas para a transmissão do 5G (no Brasil, 700 MHz, 2,3 GHz, 3,5GHz e 26 GHz) as quais deverão ser adquiridas pelas operadoras [10]. Ainda assim, para maximização do lucro, deve-se buscar transmitir o máximo possível ocupando a mesma largura de banda.

Melhorar a eficiência espectral, entendida como a razão entre a taxa de transmissão e largura de banda, significa conseguir transmitir mais informação, ocupando a mesma banda no espectro ou, de maneira análoga, a mesma informação em uma banda menor. Assim, a eficiência espectral tornou-se uma métrica extremamente relevante de ser otimizada.

Na maioria dos sistemas de comunicação com portadora única, a melhoria da eficiência espectral advém do aumento da ordem da modulação pois, dessa maneira, mais *bits* são enviados em um único símbolo. Entretanto, constelações de ordem superior apresentam menos robustez em relação às imperfeições do canal, como não linearidades, o que pode ser crítico em sistemas de comunicação sem fio [11].

Outra potencial solução para conseguir atingir eficiências espectrais mais elevadas é aumentar a taxa do sinal transmitido para além da sinalização tradicional. Esse esquema de sinalização, proposto por J.E. Mazo em [5], é chamado de *Faster-than-Nyquist*.

## 1.2 Faster-than-Nyquist

Em sistemas de comunicação tradicionais, o critério de Nyquist para interferência intersimbólica (ISI) nula é satisfeito, sendo empregados pulsos ortogonais no intervalo  $T_s$ , enviados a uma taxa de, no máximo,  $1/T_s = 2B$  (taxa de Nyquist), em que  $T_s$  é o período de transmissão de um símbolo e  $B$  é a largura de banda base do sinal [2]. Essa estrutura permite a utilização de receptores simples e de baixa complexidade.

O sistema FTN baseia-se no aumento da taxa de transmissão para além desse limite definido por Nyquist, sem qualquer acréscimo de largura de banda. Assim, os símbolos são transmitidos a uma taxa  $1/T > 1/T_s$ , tal que  $T = \alpha T_s$ , em que  $0 < \alpha < 1$  e  $T$  é o tempo de símbolo FTN. Mais símbolos são transmitidos no mesmo intervalo de tempo, quando comparado com o esquema que utiliza a sinalização de Nyquist. Dessa maneira, há claramente um aumento da eficiência espectral (aumenta-se a taxa de transmissão e a largura de banda é mantida constante) e, como prejuízo, há a introdução de interferência intersimbólica pois o pulso que transmite um símbolo passa a estar presente nos instantes de amostragem de outras janelas temporais além da sua.

Conforme demonstrado por Mazo [5], ao utilizar uma sinalização FTN e pulsos formatadores  $\text{sinc}(t/T_s)$ , é possível atingir um aumento de até 25% na transmissão de *bits* por segundo, sem que haja um aumento da probabilidade de erro de *bit*, considerando a mesma banda requerida em sinalizações que utilizam a taxa de Nyquist. Nessa situação, considerou-se uma transmissão em um canal com ruído branco e aditivo (em inglês, *additive white gaussian noise*, AWGN). Provou-se, em [5], que a distância euclidiana a qual determina a probabilidade de erro de *bit* não é alterada até um certo valor crítico de fator de compressão  $\alpha$  o qual é chamado de limite de Mazo [12].

Além da eficiência espectral, a sinalização FTN também melhora a eficiência de energia uma vez que é possível transmitir mais símbolos, ocupando o mesmo espectro na frequência, sem que haja um aumento no consumo de potência. Esse é um aspecto extremamente relevante uma vez que a grande maioria dos dispositivos IoT apresentam um armazenamento limitado de energia pois são alimentados por bateria [12].

Desde que a sinalização FTN foi estudada pela primeira vez, em 1975, por Mazo [5], sua utilização e aplicabilidade não foram completamente determinadas. Um dos principais empecilhos foi a elevada complexidade requerida pelos sistemas de recepção pois a detecção ótima de um sistema FTN deve levar em consideração a sequência de símbolos como um todo e não somente um símbolo individualmente devido ao acréscimo proposital de interferência. Assim, tornou-se necessária a utilização de mecanismos de detecção ainda mais robustos e complexos, que fossem capazes de, no instante de detecção, reduzir a ISI ou, até mesmo, eliminá-la.

Durante as décadas seguintes, foram desenvolvidas novas tecnologias, principalmente de circuitos integrados e semicondutores, as quais possibilitaram a implementação de algoritmos mais complexos e a retomada dos estudos do FTN. As limitações de processamento e *hardware* estavam sendo, aos poucos, superadas [12].

A sinalização FTN foi investigada sob diferentes aspectos como, por exemplo, a sua utilização em sistemas não binários e no emprego de modulações não-lineares, além de análises no domínio da

frequência e considerando múltiplas portadoras. Também foram objetos de estudos a determinação da capacidade de Shannon para sistemas FTN [13] e o formato do pulso de transmissão que proporciona a melhor relação entre capacidade, desempenho e complexidade do sistema.

Na transmissão de símbolos em um sistema FTN, são empregados sinais não-ortogonais, os quais não satisfazem o critério de Nyquist para ISI nula. Devido ao surgimento inevitável de ISI, a equalização, um método efetivo para lidar com essa interferência, configurou-se como um dos aspectos mais importantes da sinalização FTN e, assim, foi extensivamente estudada ao longo dos anos. O entendimento de que a ISI de qualquer fonte poderia ser modelada por uma estrutura de treliça também incentivou o desenvolvimento de estudos e pesquisas nesta área [14].

Em [4], foram propostos mecanismos de detecção de símbolos baseados no algoritmo de Viterbi que conseguiu implementar, eficientemente, a estimação de sequência por máxima verossimilhança. Similarmente, [15] explorou um detector sub-ótimo com cancelamento de interferência sucessiva (em inglês, *successive interference cancellation*, SIC) a *posteriori*. Em [16], um novo tipo de M-algoritmo, o qual utiliza equalização turbo de baixa complexidade para lidar com intensa ISI foi proposto. Um novo método chamado de  $l_\infty$ -*minimization* foi desenvolvido, em [17], para recuperar símbolos binários não codificados e conseguiu atingir melhores relações entre probabilidade de erro e complexidade computacional quando comparado com [15]. Em [14], são propostos dois algoritmos BCJR para trabalharem junto, sendo um para retirar a ISI e o outro para decodificar os símbolos.

Entretanto, ao considerar cenários em que seriam exigidos equalizadores com muitos coeficientes, isto é, cenários em que o espalhamento do símbolo perdura por vários tempos de símbolo (*delay spread* elevado), esses métodos, baseados em operações no domínio do tempo, aumentam notadamente a complexidade de demodulação. Alcançar uma elevada taxa de transmissão FTN torna-se, assim, uma tarefa computacionalmente complexa [18].

A ISI que é gerada quando se utilizam pulsos  $\text{sinc}(t/T_s)$  é, teoricamente, infinita (estes pulsos são ilimitados no tempo). Dessa maneira, para que seja possível equalizar o sinal, ela deve ser truncada por um número limitado de coeficientes. Caso seja considerado um número elevado de coeficientes, o gasto de processamento torna-se muito elevado, porém caso seja considerado um número pequeno, a porção relevante de ISI não será cancelada e os símbolos não conseguirão ser detectados corretamente [4]. Uma solução mais atrativa para esse cenário é a equalização no domínio da frequência (em inglês, *Frequency Domain Equalization*, FDE) de baixa complexidade, proposto por S. Sugiura [19].

Este trabalho tem como objetivo o estudo da sinalização FTN e das principais métricas, como distância mínima e probabilidade de erro de *bit*, que influenciam o desempenho de sistemas FTN, em comparação com sistemas com sinalização à taxa de Nyquist. Além disso, propõe-se a investigação do algoritmo que implementa a FDE e emprega o MMSE (Equalizador de Mínimo Erro Quadrático Médio, em inglês, *minimum mean square error*, MMSE) no domínio da frequência e a análise do desempenho de sistemas FTN que utilizam essa equalização cuja principal vantagem é a baixa complexidade quando comparado com os equalizadores no domínio do tempo.

### 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho segue a seguinte estrutura: no Capítulo 2, há a exposição da fundamentação teórica acerca dos principais elementos de um sistema de comunicação, bem como algumas das suas principais características. São apresentadas também possíveis fontes de distorção do sinal transmitido, tais como, ruído AWGN e ISI, e alguns mecanismos de cancelamento dessas interferências. Para avaliação do desempenho de um sistema de comunicação, uma das principais métricas utilizada é a distância mínima a qual, conceitualmente, é explorada no Capítulo 2. O Capítulo 3 aborda a teoria relativa aos sistemas de comunicação que empregam sinalização FTN. São comparados o comportamento da distância mínima em um sistema com sinalização à taxa de Nyquist e com sinalização FTN. No Capítulo 4, por sua vez, é apresentado o algoritmo do equalizador no domínio da frequência que utiliza o MMSE, com destaque para as suas vantagens e desvantagens. É realizada uma análise, por meio de simulações com parâmetros com diferentes valores, do desempenho dos sistemas FTN que empregam essa equalização. Finalmente, no Capítulo 5, encerram-se os estudos, sendo apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Comunicações Digitais

### 2.1 Introdução

Para compreender o funcionamento da sinalização FTN, faz-se necessário o entendimento dos conceitos fundamentais relativos aos sistemas de comunicação. Na Seção 2.2, são apresentados os principais elementos que compõem estes sistemas e, na 2.3, os processos de mapeamento de *bits* em símbolos e modulação. O sinal deve ser transmitido de um transmissor a um receptor e, para isso, ele deve atravessar um canal. A Seção 2.4 analisa o tipo de canal mais usualmente empregado, o canal AWGN, e algumas das características do ruído AWGN.

Para entender o aumento de complexidade que a sinalização FTN proporciona ao sistema, faz-se necessário entender o que é a interferência interssmbólica, como ela influencia o sinal de informação e como mitigá-la. Assim, estudam-se esses aspectos nas seções 2.5 e 2.6.

Por fim, a Seção 2.8 analisa as principais métricas que influenciam o desempenho de um sistema de comunicação, tais como, distância mínima entre dois símbolos de uma constelação e probabilidade de erro de *bit* para que seja possível fazer uma análise comparativa entre diferentes sistemas.

### 2.2 Sistemas de Comunicações Digitais

Um sistema de comunicação digital tem como principal finalidade a transmissão de informações digitais de uma fonte a um receptor, através de um canal. Seus principais componentes são fonte, codificadores, modulador, canal, decodificadores e demodulador.

A fonte é responsável pela geração do sinal de informação e o transmissor pela sua codificação (de fonte e de canal), modulação e transmissão. O canal é o meio físico no qual o sinal está sendo transmitido e cuja principal influência é a distorção do sinal transmitido. Por fim, o receptor recebe o sinal enviado, realiza a sua decodificação, demodulação e detecção na tentativa de interpretar corretamente a mensagem enviada.

Na comunicação digital, as informações enviadas pertencem a um conjunto finito de mensagens (símbolos) e são transmitidas em uma sequência de janelas de tempo. Após atravessar o meio

físico, os sinais alcançam o receptor e ocorre ali o processamento de detecção e correção de erros para que se consiga interpretar o sinal recebido como os símbolos enviados.

## 2.3 Mapeamento em Símbolos e Modulação

A cada intervalo de tempo  $T_s$  (tempo de símbolo) é enviado um símbolo  $s_n$ , em que  $n$  corresponde ao  $n$ -ésimo símbolo no  $n$ -ésimo intervalo de tempo. Cada símbolo é formado por uma sequência de  $l$  bits que é então modulada e transmitida. Os bits são transmitidos a uma taxa  $R_b$ , em que  $R_b = 1/T_b$  e  $T_b$  é o intervalo de tempo de bit.

A taxa de transmissão de bits  $R_b$  é definida como a razão entre a quantidade de bits a serem transmitidos ( $N_{bits}$ ) e o intervalo de tempo disponível ( $T$ ). Já a taxa de símbolo  $R_s$  utiliza como referência a quantidade de símbolos a serem enviados ( $N_{simb}$ ) durante o mesmo intervalo de tempo. Assim,

$$R_b = \frac{N_{bits}}{T} = \frac{lN_{simb}}{T} = lR_s, \quad (2.1)$$

$$R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{l}{T_s} = lR_s. \quad (2.2)$$

O parâmetro  $M$ , chamado de ordem da modulação, define a quantidade máxima de diferentes símbolos que é possível de ser gerada, dada uma quantidade  $l$  de bits através da relação  $l = \log_2 M$ . A esse conjunto de todos os valores possíveis que cada símbolo pode assumir é dado o nome de constelação e algumas representações no diagrama de espaço de estados podem ser conferidas na Fig. 2.1. Os símbolos podem assumir a forma complexa em que o eixo  $x$  representa a parte real do símbolo e o eixo  $y$ , a imaginária.

O sistema BPSK (chaveamento binário de fase, do inglês, *binary phase-shift keying*) possui  $M = 2, l = 1$  e, assim, sua representação no diagrama da Fig. 2.1(a) apresenta dois pontos. Já, por exemplo, a modulação 16QAM, ilustrada na Fig. 2.1(e), apresenta 16 pontos,  $M = 16, l = 4$ .

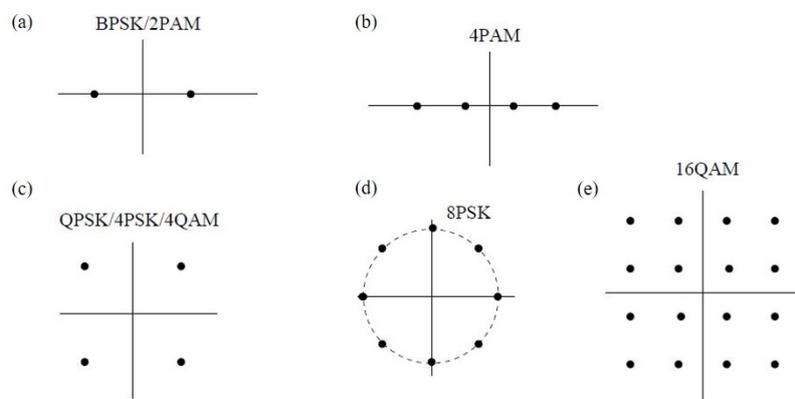


Figura 2.1: Diagramas de espaço de estados de constelações comumente utilizados para modulações BPSK/2PAM(a), 4PAM(b), QPSK/4QAM(c), 8PSK(d) e 16QAM(e). Adaptado de [1].

O mapeamento, dessa maneira, consiste exatamente nessa associação entre *bits* e símbolos. No caso binário e considerando uma sinalização antipodal, por exemplo, os *bits*  $\{0, 1\}$  são associados a símbolos  $\{-1, +1\}$ , respectivamente.

Os  $M$  diferentes símbolos são definidos a partir da técnica de modulação escolhida, a qual é dita  $M$ -ária. Um pulso é utilizado para formatar a sequência de símbolos gerada e os transforma em formas de ondas analógicas as quais são enviadas para o canal. A esse processo de transformação de símbolos em sinais analógicos é dado o nome de modulação [1].

Quando o sinal enviado  $x(t)$  depende linearmente dos símbolos transmitidos, a modulação é dita linear e a sua forma geral é dada por:

$$x(t) = \sum_n s_n g(t - nT_s) , \quad (2.3)$$

em que  $n$  é o índice do  $n$ -ésimo tempo de símbolo,  $s_n$  é o símbolo no  $n$ -ésimo tempo de símbolo e  $g(t)$  é o pulso formatador.

## 2.4 Canal e Ruído

Conforme o abordado previamente, o canal de comunicação é o meio físico utilizado para enviar o sinal do transmissor ao receptor [2]. Alguns exemplos de canal são a fibra óptica que transmite a informação por um feixe de luz modulado, os cabos que transmitem sinal elétrico e o meio livre, em casos de transmissão sem fio que utilizam antenas como sistemas radiantes.

Os canais de comunicação são, em sua grande maioria, limitados em banda. Os principais motivos para isso são as próprias características físicas do canal, como limitação da banda de transmissão de antenas ou alocação limitada de espectro para essa finalidade [20].

Em todos os casos, o canal comporta-se como um componente do sistema de transmissão que adiciona ruído e é responsável por outros tipos de degradações do sinal e interferências, conforme será analisado na Seção 2.5.

O ruído aditivo mais comum é o ruído térmico, presente nos componentes eletrônicos utilizados nos aparelhos que compõem o sistema de comunicação. A agitação dos elétrons devido ao aquecimento dos condutores e semicondutores gera sinais elétricos aleatórios nesses elementos que degradam o sinal transmitido. Esse ruído é chamado de AWGN (ruído gaussiano branco aditivo, do inglês, *additive white Gaussian noise*) por ser caracterizado estatisticamente por uma função densidade de probabilidade gaussiana (trata-se de um processo aleatório) e é dito "branco" por apresentar componentes em todo o espectro de frequência. Na prática, entretanto, nenhum ruído apresenta componentes em todo o espectro de frequência. Assim, considera-se apenas as componentes de frequência presentes na banda utilizada para transmissão.

Os diferentes meios físicos apresentam características muito distintas entre si e, para que haja a melhor representação matemática da realidade, devem existir diferentes modelos que caracterizam tais canais. Existem modelos lineares, não lineares, variantes no tempo, invariantes no tempo,

dentre outros. O modelo para o ruído AWGN é o predominantemente adotado nas análises dos sistemas de comunicação devido, principalmente, à sua presença em diversos tipos de canais e à sua simplicidade matemática, conforme o ilustrado na Fig. 2.2. O sinal  $r(t)$  representa o sinal recebido pelo receptor, após o sinal  $x(t)$  ser transmitido em um canal com ruído AWGN dado por  $n(t)$ .

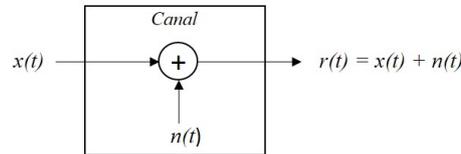


Figura 2.2: Esquemático do canal com ruído aditivo.

O modelo para o ruído AWGN considera um processo estacionário, gaussiano com média nula e cuja densidade espectral de potência  $S_N(f)$  é constantemente igual a  $\frac{N_0}{2}$  para todas as frequências, conforme a Fig.2.3(a), e é dada por:

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{kT_K}{2}. \quad (2.4)$$

em que  $T_K$  é a temperatura do ambiente em Kelvin e  $k$  é a constante de Boltzmann igual a  $38 \times 10^{-23}$  J/K. A autocorrelação do ruído AWGN é dada pela transformada inversa da sua densidade espectral de potência:

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (2.5)$$

Portanto, a autocorrelação entre duas amostras de ruído separadas por  $\tau \neq 0$  vale 0, como ilustrado na Fig. 2.3(b). Logo, duas amostras de um ruído AWGN são descorrelacionadas e estatisticamente independentes.

Outro tipo de ruído que deve ser analisado é o ruído colorido. Diferentemente do ruído branco, o ruído colorido apresenta uma densidade espectral de potência não constante, acrescentando diferentes quantidades de potência ao sinal transmitido, a depender da frequência.

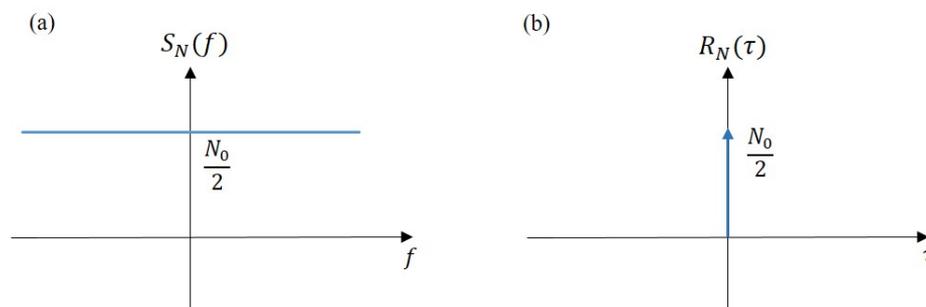


Figura 2.3: (a) Densidade espectral de potência  $S_N(f)$  do ruído AWGN. (b) Autocorrelação  $R_N(\tau)$  do ruído AWGN.

A autocorrelação entre amostras de instantes diferentes desse tipo de ruído é não nula o que aumenta a complexidade do modelo matemático. Muitas vezes são utilizados filtros para branquear o ruído colorido (do inglês, *noise-whitening filter*) para que se consiga detectar o sinal considerando o ruído como branco, sem degradação do desempenho do sistema [2]. Outra técnica comumente utilizada para mitigar os efeitos dispersivos e degradantes do canal é a utilização de equalizadores, como será analisado na Seção 2.6.

## 2.5 Critério de Nyquist para Interferência Intersimbólica Nula

Quando há a transmissão de um sinal limitado no tempo, em um canal que apresenta banda finita, há a dispersão do sinal e a geração de interferência intersimbólica (ISI). Ela ocorre devido ao espalhamento do pulso formatador do transmissor, além do intervalo de tempo  $T_s$  (tempo de símbolo) disponível para ele, e, conseqüentemente, há a sua interferência nos pulsos vizinhos. A depender da intensidade dessa interferência, pode haver erro na detecção do símbolo. Dessa maneira, deseja-se que as transmissões sejam livres de ISI.

Vale ressaltar que a interferência intersimbólica não é um tipo ruído pois as suas origens são distintas. A ISI advém, principalmente, de canais não ideais e distorcivos, enquanto que o ruído AWGN tem origem, principalmente, térmica.

Considere o sistema de comunicação, esquematizado na Fig. 2.4, que contém transmissor, canal e receptor. As suas respostas impulsivas são dadas, respectivamente, por  $h_{TX}(t)$ ,  $h_{CANAL}(t)$  e  $h_{RX}(t)$ . Vale ressaltar que  $h_{TX}(t)$  descreve o pulso formatador  $g(t)$  e a resposta impulsional  $h_{RX}(t)$  corresponde ao filtro casado, como será visto na Seção 2.6.

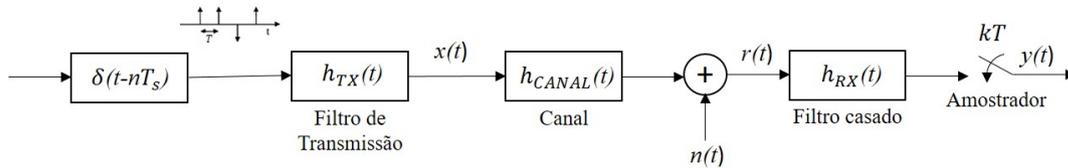


Figura 2.4: Esquemático do sistema de comunicação, com ênfase nas respostas impulsivas do transmissor ( $h_{TX}(t)$ ), canal ( $h_{CANAL}(t)$ ) e receptor ( $h_{RX}(t)$ ).

Considere também que na entrada do sistema há um trem de impulsos ponderados pelos símbolos  $s_n$  e que o ruído no canal é AWGN. Assume-se que o canal é limitado em banda  $B$ . A partir do esquemático e sabendo que, no domínio do tempo, o sinal de saída de um sistema linear é a convolução (operador representado pelo símbolo  $\{*\}$ ) do sinal de entrada com a resposta impulsional do sistema, tem-se:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \delta(t - nT_s) * h_{TX}(t) . \quad (2.6)$$

O sinal transmitido, dado pela Eq.(2.6), é o resultado da convolução da resposta impulsional

do transmissor com o trem de impulsos que carrega as informações dos símbolos modulados. Após passar pelo canal, o sinal pode ser escrito como:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \delta(t - nT_s) * h_{TX}(t) * h_{CANAL}(t) + n(t) . \quad (2.7)$$

O sinal recebido  $r(t)$ , por sua vez, passa pelo filtro de recepção:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \delta(t - nT_s) * h_{TX}(t) * h_{CANAL}(t) * h_{RX}(t) + n(t) * h_{RX}(t) . \quad (2.8)$$

Considerando  $h(t) = h_{TX}(t) * h_{CANAL}(t) * h_{RX}(t)$  e  $\eta(t) = n(t) * h_{RX}(t)$ , substituindo-se na Eq.(2.8),

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(t - nT_s) + \eta(t) . \quad (2.9)$$

Se o sinal  $y(t)$  for amostrado nos instantes  $t = kT_s, k = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se:

$$y(kT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(kT_s - nT_s) + \eta(kT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n h((k - n)T_s) + \eta(kT_s) . \quad (2.10)$$

Simplificando a notação da Eq.(2.10) e isolando o termo desejado  $a_k$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h_{k-n} + \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &= h_0 \left( s_k + \frac{1}{h_0} \sum_{\substack{n=0, \\ n \neq k}}^{\infty} s_n h_{k-n} + \frac{1}{h_0} \eta_k \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como  $h_0$  é um fator de escala arbitrário, escolhe-se o valor unitário. Deseja-se obter o valor amostrado no  $k$ -ésimo instante de tempo, ou seja,  $a_k$ . Assim,

$$y_k = s_k + \sum_{\substack{n=0, \\ n \neq k}}^{\infty} s_n h_{k-n} + \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Nota-se que o primeiro termo da Eq.(2.12) representa a informação desejada no instante  $k$ , o segundo, o efeito residual dos demais símbolos transmitidos (ISI) e o terceiro, a contribuição do ruído. Assim, para que haja interferência intersimbólica nula, basta que na  $k$ -ésima janela de amostragem, o único sinal presente seja o  $k$ -ésimo sinal  $a_k$ . Logo, deve-se obter:

$$h(t = kT_s) = h_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Assim, se o pulso  $h(t)$  satisfizer à relação dada pela Eq.(2.13), diz-se que o critério de Nyquist para ISI nula é satisfeito [2]. Portanto, a transformada de Fourier da Eq.(2.13) deve satisfazer:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(f + \frac{m}{T_s}\right) = A(f) = T_s, \quad (2.14)$$

em que  $H(f)$  é a transformada de Fourier de  $h(t)$ .

Como o canal apresenta largura de banda limitada a  $B$ , deve-se ter  $H_{CANAL}(f) = 0$ , para  $|f| > B$  e, conseqüentemente,  $H(f) = 0$ , para  $|f| > B$ , em que  $H_{CANAL}(f)$  é a transformada de Fourier de  $h_{canal}(t)$ . Assim, faz-se necessária a análise dos três possíveis casos:  $T_s < \frac{1}{2B}$ ,  $T_s = \frac{1}{2B}$  e  $T_s > \frac{1}{2B}$ .

No primeiro caso,  $A(f)$  consiste em réplicas não sobrepostas de  $H(f)$ , separadas por  $1/T_s$ , conforme a Fig. 2.5. A presença de ISI torna-se inevitável por não existir uma escolha de  $H(f)$  possível tal que  $A(f) \equiv T_s$ .

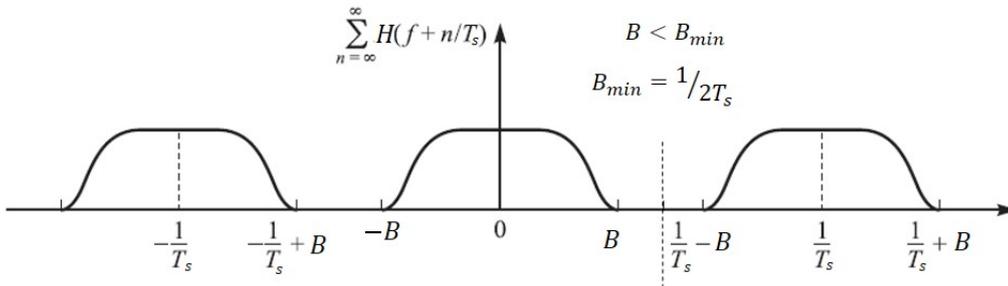


Figura 2.5: Espectro  $A(f)$  para o caso  $T_s < \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].

No segundo caso,  $A(f)$  é formado por réplicas de  $H(f)$  separadas por  $1/T_s$ , de acordo com a Fig.2.6. É fácil perceber que existe apenas uma escolha de  $H(f)$  possível tal que  $A(f) \equiv T_s$ . Assim,  $H(f) = T_s$ ,  $|f| < B$  corresponde a um pulso  $h(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ .

Dessa maneira, o menor valor de  $T_s$  para que não haja ISI é  $T_s = 1/2B$ . Esse pulso, entretanto, apresenta algumas dificuldades de implementação, como o fato de ser não causal e, conseqüentemente, um pulso não realizável e a sua lenta convergência para zero (a taxa de decaimento da  $\text{sinc}(t)$  é pequena, sendo proporcional a  $1/t$ , a qual não converge para um valor finito).

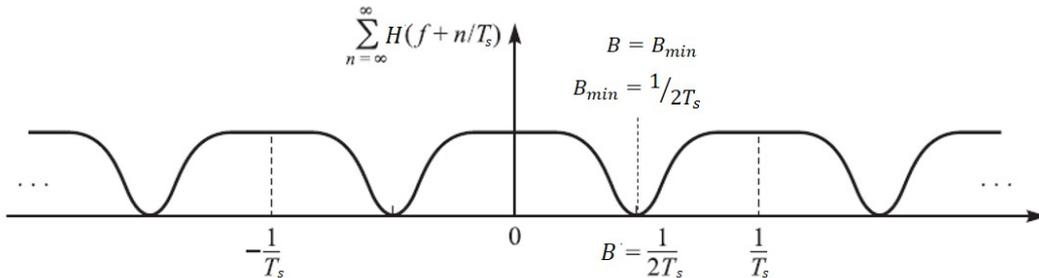


Figura 2.6: Espectro  $A(f)$  para o caso  $T_s = \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].

Nesse último caso, o espectro de  $A(f)$  é formado por réplicas de  $H(f)$  que se sobrepõem e estão afastadas por  $1/T_s$ , como na Fig. 2.7. Nesse caso, percebe-se que existe uma grande quantidade de possíveis escolhas de  $H(f)$ , tal que  $A(f) \equiv T_s$ .

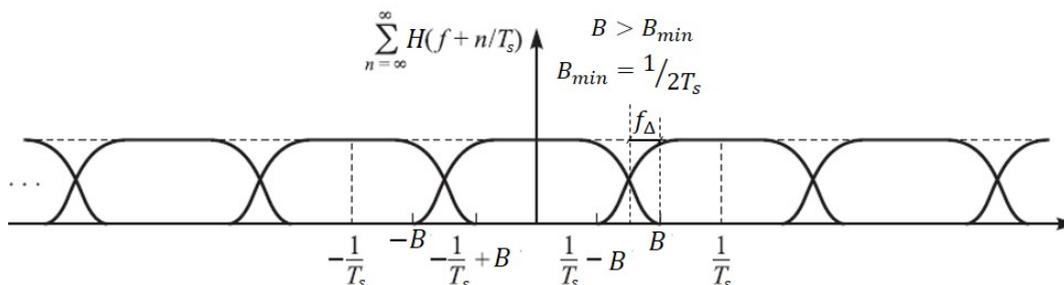


Figura 2.7: Espectro  $A(f)$  para o caso  $T_s > \frac{1}{2B}$ . Adaptado de [2].

Uma família de pulsos que tem sido extremamente utilizada e que satisfaz a esse terceiro caso é a família do cosseno levantado. As suas respostas no tempo e na frequência podem ser conferidas na Fig. 2.8(a) e na Fig. 2.8(b), respectivamente.

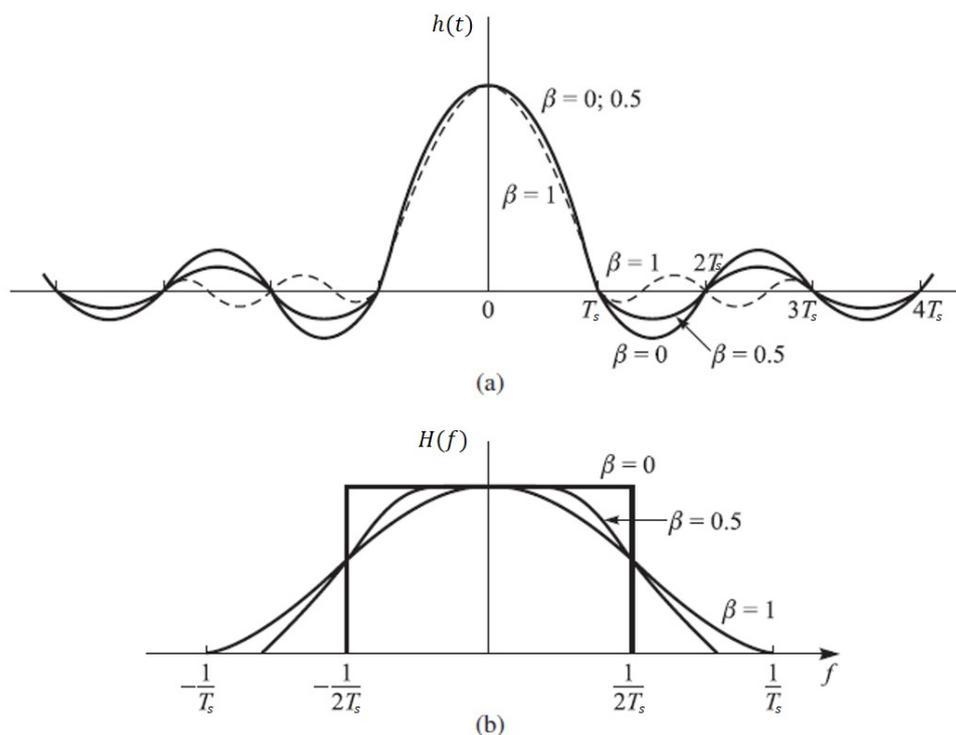


Figura 2.8: (a) Resposta no tempo do pulso cosseno levantado. (b) Resposta na frequência do pulso cosseno levantado. Adaptado de [2].

A família de pulsos do cosseno levantado pode ser descrita por:

$$H(f) = \begin{cases} T_s, 0 \leq |f| \leq (1 - \beta)/2T_s \\ \frac{T_s}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T_s}{\beta} (|f| - (1 - \beta)/2T_s) \right] \right\}, (1 - \beta)/2T_s \leq |f| \leq (1 + \beta)/2T_s \\ 0, |f| \geq (1 + \beta)/2T_s \end{cases} \quad (2.15)$$

em que  $\beta$  é o fator de *roll-off* e assume valores entre 0 e 1. A menor largura de banda possível ( $B_{min}$ ) ocupada por pulsos dessa família é  $1/2T_s$  e ocorre quando  $\beta = 0$ . O excesso de banda ( $f_\Delta$ ) é dado por uma porcentagem em relação à banda mínima e é representado pelo fator de *roll-off*. Assim,  $\beta = 0,3$ , por exemplo, representa 30% de excesso de banda. Quanto maior o fator de *roll-off*, maior é a banda ocupada pelo sinal e menor será o tempo de símbolo no domínio do tempo, como é possível observar na Fig. 2.8. A Eq.(2.16) relaciona esses parâmetros.

$$\beta = \frac{f_\Delta}{B_{min}}. \quad (2.16)$$

Pode-se determinar uma expressão para a largura de banda dessa família de pulsos, em que  $B_b$  é a largura de banda em banda base. Assim,

$$B_b = f_\Delta + B_{min}. \quad (2.17)$$

Isolando o termo  $f_\Delta$  da Eq.(2.16) e substituindo-o na Eq.(2.17), tem-se:

$$B_b = \beta B_{min} + B_{min}. \quad (2.18)$$

Como,  $B_{min} = 1/2T_s$ , esse termo pode ser escrito em função de  $R_s = 1/T_s$ . Dessa maneira, a Eq.(2.17) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} B_b &= \frac{(1 + \beta)R_s}{2} \\ &= \frac{1 + \beta}{2} \frac{R_b}{l} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A banda passante  $B_T$ , por sua vez, é o dobro da largura de banda base. A partir da Eq.(2.19), tem-se :

$$\begin{aligned} B_T &= 2B_b \\ &= (1 + \beta)R_s \\ &= (1 + \beta) \frac{R_b}{l}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dessa maneira, o produto entre as funções de transferências do transmissor e do receptor devem satisfazer Nyquist, ou seja, no instante de amostragem do  $k$ -ésimo símbolo, todos os pulsos devem ser nulos, excetuando o pulso de interesse ( $n = k$ ) e a taxa de transmissão não pode ser maior do que  $2B$ . Esse limite superior que garante uma transmissão livre de ISI é chamada de taxa de Nyquist ( $1/T_s = 2B = 2B_{min}$ ).

O pulso considerado para análise foi um pulso limitado no tempo que, por definição, apresenta uma largura de banda infinita. Ao sofrer a influência de um canal não ideal limitado em frequência, o espectro do pulso é suprimido e a interferência entre os espectros dos pulsos torna-se um fenômeno inevitável. Caso fosse considerado um pulso limitado na frequência e, conseqüentemente, com duração infinita no tempo, ter-se-ia o espalhamento do sinal para fora do intervalo inicialmente alocado para ele e, novamente, interferência entre os símbolos. Para contornar essa situação, provou-se que os símbolos não devem interferir um nos outros apenas nos instantes de amostragem do sinal, tanto no domínio da frequência, como no domínio do tempo, conforme a Eq.(2.13).

## 2.6 Equalização

Como visto, o canal empregado como conexão entre o transmissor e o receptor é um canal não ideal que degrada e acrescenta ruído ao sinal transmitido. Dessa maneira, há a necessidade de acrescentar recursos que mitiguem esses efeitos para que a detecção dos símbolos no receptor não seja prejudicada. Essas estruturas são denominadas equalizadores e estão presentes no sistema de recepção do sinal.

Equalizadores lineares são filtros lineares que invertem o efeito do canal. O produto da função de transferência do canal e do equalizador deve respeitar determinados critérios: ser uma constante ou minimizar o erro quadrático médio na saída do filtro [3]. A eliminação total das distorções introduzidas pelo canal não é estritamente necessária pois a detecção de sinais digitais baseia-se em tomadas de decisão (por exemplo, se o sinal é positivo ou negativo, no caso binário antipodal). Por isso, tolera-se, sem prejuízos, uma quantidade de interferência que não provoque uma escolha errada no detector.

Se o canal fosse estático e conhecido, seria simples construir um filtro que reduzisse as suas contribuições pois a sua função de transferência também seria conhecida. Entretanto, ele é, muitas vezes, dinâmico e desconhecido, como é o caso da atmosfera, em comunicações *wireless*. Assim, faz-se necessário o envio de pilotos com seqüências de treinamento (*bits* conhecidos) que possibilitam a estimação do canal.

Geralmente, o canal atenua algumas componentes de frequência do sinal transmitido e é função do equalizador tentar diminuir esses efeitos de degradação. Entretanto, na tentativa de compensá-los, o equalizador, indesejavelmente, amplifica ruído. Assim, a configuração de um equalizador ótimo deve assumir o compromisso entre a diminuição da ISI e a diminuição do ruído do canal [2].

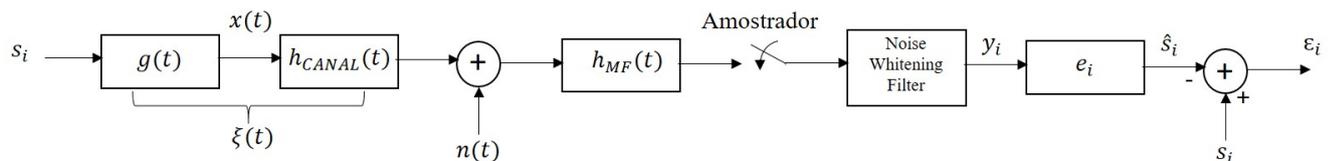


Figura 2.9: Esquemático de um equalizador linear no domínio do tempo. Adaptado de [3].

Considere a transmissão de uma sequência de símbolos  $\{s_i\}$  em um canal AWGN e a sequência disponível na entrada do equalizador  $\{y_i\}$ , conforme o esquematizado na Fig.2.9. A resposta impulsional do filtro formatador é dada por  $g(t)$ , a do canal por  $h_{CANAL}(t)$  e a do filtro casado por  $h_{MF}(t)$ . O sinal  $\xi(t)$  é a convolução entre as repostas impulsionais do filtro formatador e do canal e  $n(t)$  representa a participação do ruído AWGN. Deseja-se encontrar os  $2K + 1$  coeficientes FIR (resposta impulsional finita, em inglês, *finite impulse response*) do equalizador. Como o equalizador é linear, a sequência de saída  $\{\hat{s}_i\}$  pode ser escrita como uma combinação linear da sequência de entrada, dada por:

$$\hat{s}_i = \sum_{n=-K}^K e_n y_{i-n} . \quad (2.21)$$

Espera-se que a sequência de saída  $\{\hat{s}_i\}$  seja a mais próxima da de entrada  $\{s_i\}$  o possível. Assim, o desvio  $\varepsilon_i$ , dado pela Eq.(2.22), deve satisfazer  $\varepsilon_i = 0$  para  $N_0 = 0$  (Equalizador *Zero-Forcing*, ZF) ou  $E\{|\varepsilon_i|^2\} \rightarrow \min$  para quando  $N_0$  apresenta um valor finito (Equalizador de Mínimo Erro Quadrático Médio, MMSE) [3].

$$\varepsilon_i = s_i - \hat{s}_i . \quad (2.22)$$

A principal diferença entre o equalizador ZF e o MMSE é que o primeiro tem por objetivo zerar a ISI em um cenário em que não há ruído, enquanto que o MMSE considera a presença de ruído. O MMSE, equalizador escolhido na modelagem do sistema FTN, está descrito com mais detalhes na Seção a seguir.

### 2.6.1 Equalizador de Mínimo Erro Quadrático Médio

Este equalizador utiliza como critério para a definição de seus coeficientes a minimização do erro quadrático médio entre o sinal transmitido e a sua saída. Assim, a sua maior preocupação não é a redução de ISI, mas sim a diminuição da probabilidade de erro de *bit* [3]. Minimizar o erro quadrático médio significa também minimizar a potência do sinal erro que representa a ISI presente no sinal somada ao ruído.

O primeiro elemento presente no sistema de recepção é o filtro casado (*matched filter*), cuja principal função é a maximização da relação sinal ruído no instante de amostragem. Sua resposta impulsional é dada por  $h_{RX} = h_{MF}(t) = g^*(-t)$ , em que  $\{.*\}$  corresponde ao conjugado. Como o ruído é adicionado pelo canal, ele também passa pelo filtro casado e transforma-se em um ruído colorido na entrada do equalizador. Para torná-lo branco novamente e possibilitar a aplicação das técnicas de estimação linear ótima, há a presença de um filtro *noise-whitening* cuja função de transferência dada pela transformada Z é  $1/G^*(1/z^*)$ , em que  $G(z)$  é a transformada Z do pulso formatador  $g(t)$  [21].

O equalizador é um filtro linear com  $2K + 1$  coeficientes. A sequência estimada  $\{\hat{s}_i\}$  pode ser escrita como:

$$\hat{s}_i = \sum_{n=-K}^K e_n y_{i-n} = \mathbf{e}^T \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{e} , \quad (2.23)$$

em que  $\mathbf{y}_i = (y_i, y_{i-1}, \dots)^T$ . O símbolo  $\{\cdot\}^T$  representa operador de transposição.

Deseja-se minimizar o parâmetro  $MSE = \mathbb{E}\{|\varepsilon_i|^2\} = \mathbb{E}\{\varepsilon_i \varepsilon_i^*\}$ . Quando os símbolos assumem valores reais,  $MSE$  equivale, simplesmente, a  $\mathbb{E}\{\varepsilon_i^2\}$ . Entretanto, serão considerados símbolos que podem assumir valores complexos. Assim,

$$MSE = \mathbb{E}\{(s_i - \hat{s}_i)(s_i - \hat{s}_i)^*\}. \quad (2.24)$$

Substituindo-se a Eq.(2.23) na Eq.(2.24), tem-se:

$$\begin{aligned} MSE &= \mathbb{E}\{(s_i - \mathbf{y}_i^T \mathbf{e})(s_i^* - \mathbf{e}^\dagger \mathbf{y}_i^*)\} \\ &= \mathbb{E}\{s_i s_i^*\} - \mathbb{E}\{s_i \mathbf{e}^\dagger \mathbf{y}_i^*\} - \mathbb{E}\{s_i^* \mathbf{y}_i^T \mathbf{e}\} + \mathbf{e}^\dagger \mathbb{E}\{y_i^* y_i^T\} \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que o símbolo  $\{\cdot\}^\dagger$  representa a operação de conjugado do transposto.

Algumas análises podem ser realizadas, a partir dos quatro valores esperados obtidos pela Eq.(2.25). O primeiro termo da equação representa a variância  $\sigma_s^2$  de  $s_i$ , assumindo que  $s_i$  apresenta média nula. Já o segundo corresponde à correlação cruzada entre a sequência transmitida e a sequência na saída do equalizador. O último, por sua vez, equivale à matriz de correlação do sinal recebido,  $\mathbf{R} = \mathbb{E}\{y_i^* y_i^T\}$ .

O termo  $\mathbb{E}\{y_i^* s_i\}$ , da Eq.(2.25), equivale à correlação cruzada entre o sinal recebido e o transmitido e pode ser substituído por  $\mathbf{p}$ . A Eq.(2.25) pode ser reescrita como:

$$MSE = \sigma_s^2 - \mathbf{e}^\dagger \mathbf{p} - \mathbf{p}^\dagger \mathbf{e} + \mathbf{e}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{e}. \quad (2.26)$$

Para determinar os coeficientes ótimos  $\mathbf{e}_{\text{opt}}$  do equalizador, basta derivar da Eq.(2.26) em relação ao vetor dos coeficientes  $\mathbf{e}$  e igualar a zero. Esse resultado fornece a forma discreta da equação de "Wiener-Hopf":

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{e}_{\text{opt}} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{e}_{\text{opt}} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dessa maneira, são necessárias a matriz de correlação do sinal recebido  $\mathbf{R}$ , bem como a matriz de correlação cruzada entre o sinal recebido e o sinal transmitido  $\mathbf{p}$  para determinação dos coeficientes ótimos do equalizador MMSE.

No domínio da frequência e utilizando a Transformada  $Z$ , a concatenação do filtro *noise-whitening* com o equalizador apresenta função de transferência:

$$\tilde{E}(z) = \frac{1}{\Xi(z) + \frac{N_0}{\sigma_s^2}} \quad (2.28)$$

a qual representa a função de transferência do filtro de Wiener e que  $\Xi(z)$  é transformada  $Z$  da função de autocorrelação (ACF) de  $\xi(t)$ .

## 2.7 Ortogonalidade

Dois sinais distintos são ditos ortogonais quando o produto interno entre eles é zero [2], isto é,

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x(t)y^*(t) dt = 0. \quad (2.29)$$

Quando  $x(t)$  e  $y(t)$  equivalem ao mesmo sinal, a Eq.(2.29) é escrita como:

$$\begin{aligned} \langle x(t), x(t) \rangle &= \int x(t)x^*(t) dt \\ &= \int |x(t)|^2 dt \\ &= E_x. \end{aligned} \quad (2.30)$$

em que  $E_x$  equivale à energia do sinal. Logo, o produto interno de um sinal com ele mesmo nunca será zero pois este produto equivale à sua energia. Generalizando, dois sinais são ortogonais quando:

$$\langle x_n(t), x_m(t) \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ E_x, & m = n \end{cases} \quad (2.31)$$

Se os sinais forem ortogonais e possuírem energia unitária, eles são ditos ortonormais.

Um exemplo de sinais ortogonais são os pulsos da família cosseno levantado, ilustrados na Fig. 2.8. Em todos os intervalos de tempo múltiplos inteiros de  $T_s$ , o valor de todos os pulsos são nulos. Assim, esses pulsos são ortogonais no intervalo  $T_s$ . A ortogonalidade é uma propriedade importante pois ela influencia a quantidade de interferência interssimbólica que é gerada e, conseqüentemente, no desempenho dos sistemas de comunicação, como será visto na seção 2.8.

## 2.8 Desempenho

No sistema de recepção, o demodulador deve ser capaz de recuperar a sequência de símbolos que foi enviada pelo transmissor, a partir do sinal recebido. A frequência com que os erros entre essas duas sequências ocorrem é uma das possíveis métricas para avaliação do desempenho do sistema de recepção e, conseqüentemente, do sistema de comunicação. Mais precisamente, essa métrica mensura a probabilidade média de se errar um *bit* ( $P_b$ ). Um sistema com desempenho elevado é capaz de transmitir com pouca potência e ainda proporcionar uma probabilidade de erro de *bit* pequena. As seções 2.8.1 e 2.8.2 exploram as principais características que influenciam a  $P_b$ .

### 2.8.1 Probabilidade de Erro de *Bit*

Um modelo matemático para o sinal recebido, após ter passado por um canal AWGN, na forma vetorial, é dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}, \quad (2.32)$$

em que  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s}_m$  e  $\mathbf{n}$  são, respectivamente, os vetores linha  $1 \times N$  do sinal recebido, sinal transmitido e ruído AWGN. A quantidade de símbolos transmitidos é  $N$  e como existem  $M$  diferentes mensagens possíveis de serem transmitidas,  $1 \leq m \leq M$ .

O receptor recebe o vetor  $\mathbf{r}$  e, a partir dele, decide por qual mensagem  $m$  foi enviada. Se o receptor decidir pela mensagem  $\hat{m}$ , a probabilidade de se acertar essa mensagem é igual à probabilidade de ter se mandado, de fato,  $\hat{m}$ . Assim, a probabilidade de acerto pode ser escrita como:

$$P(\text{acertar a decisão} \mid \text{enviou-se } \mathbf{r}) = P(\hat{m} \text{ enviado} \mid \text{recebeu-se } \mathbf{r}) \quad (2.33)$$

Deseja-se minimizar a probabilidade de erro o que também significa maximizar a probabilidade de acerto pois  $P_{\text{erro}} = 1 - P_{\text{acerto}}$ .

O espaço de estados pode ser dividido em regiões de decisão de maneira que cada símbolo possui uma região de decisão. A região  $D_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ , é a região de decisão da mensagem  $m$  e equivale ao conjunto de todas as saídas do canal que são mapeadas na mensagem  $m$  pelo detector. Caso seja empregado um detector MAP (máxima probabilidade a *posteriori*, do inglês, *maximum a posteriori probability*), o conjunto das regiões de decisão constituem regiões ótimas e resultam na menor probabilidade de erro possível de ser obtida [2]. As regiões de decisão constituem uma partição do espaço vetorial associado. Para um detector MAP, tem-se:

$$D_m = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^N : P[m \mid \mathbf{r}] > P[m' \mid \mathbf{r}] \text{ para todos } 1 < m' < M \text{ e } m' \neq m \}. \quad (2.34)$$

De acordo com Eq.(2.34), o receptor decidirá por  $m$  se a probabilidade de se ter enviado  $m$  dado que se recebeu  $\mathbf{r}$  é maior do que a probabilidade de se ter enviado  $m'$  dado que se recebeu  $\mathbf{r}$ , para qualquer mensagem possível  $m'$ , tal que  $m' \neq m$  [2].

A probabilidade de erro  $P_e$  ocorre quando envia-se  $m$  e o vetor  $\mathbf{r}$  recebido não está contido dentro da região de decisão  $D_m$ . Ela pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{m=1}^M P_m P[\mathbf{r} \notin D_m \mid \mathbf{s}_m \text{ enviado}], \\ &= \sum_{m=1}^M P_m P_{e|m}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que  $P_m$  é a probabilidade de se enviar a mensagem  $m$  e  $P_{e|m}$  equivale à probabilidade de erro quando a mensagem  $m$  é transmitida e é definida como:

$$P_{e|m} = \sum_{\substack{1 \leq m' \leq M, \\ m' \neq m}}^M \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}. \quad (2.36)$$

Assim, substituindo a Eq.(2.36) na Eq.(2.35), tem-se:

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_m \sum_{\substack{1 \leq m' \leq M, \\ m' \neq m}}^M \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r} \mid \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}. \quad (2.37)$$

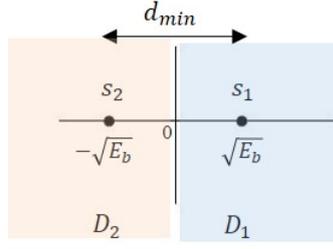


Figura 2.10: Sinalização binária antipodal com destaque para as regiões de decisão. Adaptada de [1].

A Eq.(2.37) fornece a probabilidade de erro de um símbolo [2]. Outro tipo de probabilidade de erro é a probabilidade de erro de *bit*  $P_b$ . Encontrar  $P_b$  é uma tarefa mais difícil pois requer o conhecimento de como as sequências de *bits* estão mapeadas. Porém, uma relação fácil de se obter é  $P_b \leq P_e \leq lP_b$ , em que  $l = \log_2(M)$ .

Considere, agora, uma sinalização binária antipodal, como ilustrado na Fig. 2.10. Apenas duas formas de onda são possíveis de serem transmitidas  $x_1(t) = x(t)$  e  $x_2(t) = -x(t)$ , as quais transmitem os símbolos  $\{-1, +1\}$ . As probabilidades de se enviarem as mensagens  $m_1$  e  $m_2$  são, respectivamente,  $p$  e  $1 - p$ .

Conforme será explicado na Seção 2.8.2, a representação vetorial desses símbolos pode ser dada por  $s_1 = \sqrt{E_s}$  e  $s_2 = -\sqrt{E_s}$ , em que  $E_s$  representa a energia do símbolo e a qual possui o mesmo valor da energia do *bit*  $E_b$ . Assim, a Eq.(2.37) é escrita como:

$$P_e = \sum_{m=1}^2 P_m \sum_{\substack{1 \leq m' \leq 2, \\ m' \neq m}}^2 \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}. \quad (2.38)$$

Desenvolvendo a Eq.(2.38), tem-se

$$\begin{aligned} P_e &= P_1 \int_{D_2} p(r | s_1) dr + P_2 \int_{D_1} p(r | s_2) dr \\ &= p \int_{D_2} p(r | \sqrt{E_b}) dr + (1 - p) \int_{D_1} p(r | -\sqrt{E_b}) dr. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para esse sistema, quando os símbolos são equiprováveis, o limiar das regiões de decisão é o ponto zero, ou seja, a origem. Assim, caso o vetor  $\mathbf{r}$  seja negativo, decide-se pelo símbolo  $\{-1\}$  e, caso contrário, pelo símbolo  $\{+1\}$ [2]. As regiões de decisão estão ilustradas na Fig.(2.10).  $D_2$  é a região de decisão do símbolo  $s_2$  e  $D_1$ , a do símbolo  $s_1$ .

$$P_e = p \int_{-\infty}^0 p(r | \sqrt{E_b}) dr + (1 - p) \int_0^{\infty} p(r | -\sqrt{E_b}) dr. \quad (2.40)$$

As probabilidades condicionais da Eq.(2.40) são ambas descritas pela densidade de probabilidade gaussiana. Entretanto, a densidade do primeiro termo apresenta média  $\sqrt{E_b}$  e variância  $N_0/2$

e a do segundo, média  $-\sqrt{E_b}$  e variância  $N_0/2$ . A presença de uma variância não nula advém da contribuição do ruído. Assim, a Eq.(2.40) pode ser escrita como:

$$P_e = p P \left[ \mathcal{N} \left( \sqrt{E_b}, N_0/2 \right) < 0 \right] + (1 - p) P \left[ \mathcal{N} \left( -\sqrt{E_b}, N_0/2 \right) > 0 \right]. \quad (2.41)$$

Em geral, se  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , então:

$$P[X > \alpha] = Q \left( \frac{\alpha - \mu}{\sigma} \right). \quad (2.42)$$

$$P[X < \alpha] = Q \left( \frac{\mu - \alpha}{\sigma} \right). \quad (2.43)$$

A partir das relações estabelecidas nas Eq.(2.42) e (2.43), a Eq.(2.41) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} P_e &= p Q \left( \frac{\sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0/2}} \right) + (1 - p) Q \left( \frac{\sqrt{E_b}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \\ &= Q \left( \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

A expressão  $E_b/N_0$  aparece na probabilidade de erro de diversos sistemas e é chamada de razão sinal ruído por *bit*, SNR por *bit*. Ela é a razão entre a energia do *bit* e a densidade espectral de potência unilateral do ruído, sendo proporcional à razão sinal ruído (SNR, do inglês, *signal-to-noise ratio*) do sistema. A razão  $E_b/N_0$  deve ser, no mínimo, igual à sensibilidade do receptor para que se consiga detectar os símbolos com baixa probabilidade de erro.

Conforme a Fig.2.10, a distância mínima desse sistema vale  $2\sqrt{E_b}$ . Assim, substituindo-a na Eq.(2.44), tem-se:

$$P_e = Q \left( \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right). \quad (2.45)$$

Como o sistema é binário, a probabilidade de erro do símbolo equivale à probabilidade de erro do *bit*, isto é,  $P_b = P_e$ . A Eq.(2.45) será utilizada posteriormente, no Capítulo 3.

Uma das métricas utilizadas para medir o desempenho do sistema, a probabilidade de erro de *bit*, é dependente da distância mínima a qual será estudada na Seção seguinte. Como a função  $Q(x)$  é uma função decrescente, quanto maior o seu argumento, menor é o seu resultado. Portanto, quanto maior a distância mínima, menor é a probabilidade de erro e maior é o desempenho do sistema.

## 2.8.2 Distância Mínima e Energia de Símbolo

A distância mínima é definida como a menor distância euclidiana entre dois símbolos de uma constelação em um diagrama de espaço de estados [22]. Ela é uma medida de quão vulnerável o sistema em análise é ao ruído. Quanto maior a distância entre os pontos da constelação, mais energia o sistema consegue absorver sem que haja o deslocamento do símbolo para fora da sua região

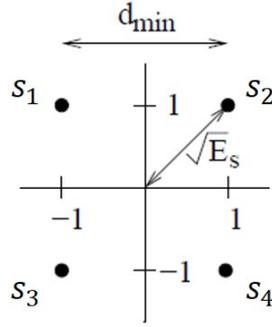


Figura 2.11: Constelação de um sistema QPSK, com destaque para a distância mínima e energia de símbolo. Adaptado de [3].

de decisão, ou seja, sem que seja feita uma decisão errada. Assim, menor é a vulnerabilidade do sistema ao ruído quanto maior for a distância mínima [1].

Considere o exemplo de uma modulação QPSK (chaveamento de fase em quadratura, do inglês, *quadrature phase shift keying*), ilustrado na Fig. 2.11, e que cada símbolo  $s_n$  pode ser escrito por um ponto  $(s_{n,x}, s_{n,y})$ , em que  $x$  corresponde ao eixo das abscissas e  $y$ , ao eixo das ordenadas. O ponto  $s_1$  equivale a  $(-1, 1)$ , o  $s_2$ , a  $(1, 1)$ , o  $s_3$ , a  $(-1, -1)$  e, finalmente, o  $s_4$ , a  $(1, -1)$ . Assim,

$$d_{min} = \min \left( \sqrt{(s_{m,x} - s_{n,x})^2 + (s_{m,y} - s_{n,y})^2} \right). \quad (2.46)$$

para todos as possíveis combinações de  $m$  e  $n$  distintos, em que  $m, n = 1, 2, 3$  e  $4$ .

A distância mínima deste exemplo é obtida a partir da Eq.(2.46). Existem apenas duas distâncias euclidianas diferentes as quais podem ser obtidas considerando, por exemplo, os símbolos  $\{s_1, s_4\}$  e  $\{s_1, s_3\}$ , conforme a Eq.(2.47). Existem outras combinações de símbolos que também geram as mesmas distâncias euclidianas.

$$\begin{aligned} d_{min} &= \min \left( \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - (-1))^2}, \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} \right) \\ &= \min \left( \sqrt{8}, \sqrt{4} \right) \\ &= 2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

É possível, também, relacionar a distância euclidiana com a energia  $E_{s_k}$  que o símbolo  $s_k$  possui pois a energia do símbolo é determinada a partir da distância do símbolo à origem por  $E_{s_k} = |s_k|^2$ . Para determinar a energia média de símbolo  $E_s$ , devem-se considerar as probabilidades de cada símbolo e as suas respectivas energias a qual é dada por [1]:

$$E_s = \sum_{k=1}^M P(s_k) E_{s_k}. \quad (2.48)$$

em que  $M$  corresponde à ordem da modulação. Dessa maneira, para o sistema QPSK da Fig.2.11,

a energia de um símbolo é dada por:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{E_{s_k}})^2 &= \left(\frac{d_{min}}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_{min}}{2}\right)^2 \\
 E_{s_k} &= \frac{d_{min}^2}{4} + \frac{d_{min}^2}{4} \\
 E_{s_k} &= \frac{d_{min}^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Considerando o sistema equiprovável, pode-se fazer a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 E_s &= \frac{1}{4} 4 \left(\frac{d_{min}^2}{4} + \frac{d_{min}^2}{4}\right) \\
 &= \frac{d_{min}^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

O aumento da distância mínima implica uma maior robustez ao ruído e na necessidade de um sistema com maior potência pois os símbolos precisam de uma maior energia para estarem mais distantes um dos outros no diagrama de espaço de estados. Assim, percebe-se que deve ser feita uma escolha entre desempenho e potência.

A distância mínima também pode ser determinada a partir da diferença entre sinais. A distância é mínima entre dois sinais que apresentam a maior chance de serem confundidos um pelo outro, durante a tomada de decisão [14]. Matematicamente, ela é definida como:

$$d_{min}^2 = \min \left( \int_{-\infty}^{\infty} |r_{\mathbf{a}}(t) - r_{\mathbf{b}}(t)|^2 dt \right), \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \tag{2.51}$$

em que  $r_{\mathbf{a}}(t)$  e  $r_{\mathbf{b}}(t)$  são duas formas de onda que transmitem duas sequências de símbolos distintas  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente. O desenvolvimento da Eq.(2.51) será melhor explorado na Seção 3.5.

## 2.9 Conclusão

Neste Capítulo, foram apresentados os principais conceitos relativos aos sistemas de comunicação necessários para um melhor entendimento dos Capítulos 3 e 4. Primeiramente, analisaram-se os processos de mapeamento e modulação do sinal de informação e também as características do ruído AWGN e a influência dele no sinal transmitido.

Em seguida, foi feito um estudo mais aprofundado sobre a interferência interssimbólica, suas origens e como garantir uma ISI nula no instante de amostragem, de acordo com o critério de Nyquist. Detalhou-se o processo de equalização, cuja principal função é a redução dos efeitos da interferência interssimbólica, enfatizando o modelo do equalizador MMSE.

Nas seções seguintes, abordou-se o desempenho do sistema a partir da relação entre a probabilidade de erro e a relação  $E_b/N_0$ , além da relação entre a distância mínima e a probabilidade de erro de *bit* para um sistema binário com sinalização antipodal.

No próximo Capítulo, serão apresentadas as principais formulações acerca da sinalização FTN, o comportamento da distância mínima para esse tipo de sistema e como ele é capaz de melhorar a eficiência espectral.

## Capítulo 3

# Sinalização Faster-than-Nyquist

### 3.1 Introdução

A eficiência espectral pode ser entendida como uma medida de quão eficientemente a largura de banda de um sistema de comunicação é aproveitada na transmissão de informação. Dessa maneira, para aumentar a eficiência espectral, faz-se necessária a diminuição da largura de banda (sem a alteração da taxa), o aumento da taxa (sem alteração da largura de banda) ou a diminuição da largura de banda e aumento da taxa. Neste trabalho, opta-se pela busca de mecanismos que sejam capazes de satisfazer a segunda opção, sem que haja qualquer alteração da ordem da modulação, mantendo os requisitos de SNR para dada probabilidade de erro de *bit*.

Neste contexto, a sinalização FTN surge como uma possível solução para melhorar a utilização da largura de banda, isto é, para transmitir mais informações ocupando o mesmo espaço no espectro, sem que haja o aumento da probabilidade de erro de *bit*, ou seja, sem que o sistema apresente um pior desempenho.

Como visto no Capítulo 2, a probabilidade de erro é uma métrica que mede o desempenho dos sistemas de comunicação e que depende da distância mínima. Assim, para garantir que um sistema com sinalização FTN apresente o mesmo desempenho do que um sistema com sinalização de Nyquist, deve-se determinar para quais situações a distância mínima entre dois sinais é mantida a mesma, o que é o enfoque desde Capítulo.

Na Seção 3.2, define-se formalmente a sinalização de Nyquist e na 3.3 é apresentada a modelagem do sistema. Na Seção 3.4, busca-se determinar um limite inferior para a probabilidade de erro de símbolo do sistema FTN. As seções seguintes exploram a métrica da distância mínima a qual é estritamente relacionada com a probabilidade de erro. Analisou-se, por comparações e exemplos, a distância mínima em um sistema com sinalização de Nyquist e com sinalização FTN em, respectivamente, 3.5 e 3.6. A Seção 3.8 reforça os principais resultados obtidos no Capítulo.

## 3.2 Definição

Como visto na Seção 2.5, para uma transmissão sem interferência interssimbólica em um canal com banda limitada  $B$ , devem-se utilizar pulsos que satisfaçam ao critério de Nyquist, isto é,  $g(iT_s) = 0$  para qualquer  $i$  inteiro e  $i \neq 0$  e a taxa máxima de transmissão deve ser de  $1/T_s = 2B$  símbolos por segundo, em que  $T_s$  é o intervalo de símbolo.

Entretanto, alguns questionamentos surgem. Seria possível transmitir a uma taxa mais elevada que a taxa de Nyquist, adicionando interferência interssimbólica de maneira controlada? Qual seria o limite desse aumento para que não se comprometa a detecção de símbolos? Seria possível encontrar um mecanismo de detecção cuja complexidade seja aceitável?

A fim de responder a algumas dessas perguntas, J.E. Mazo apresentou, em [5], a sinalização FTN. Essa sinalização propõe um aumento da taxa de transmissão para além da taxa de Nyquist, sem impor um aumento da largura de banda. Os símbolos passam a ser enviados a uma taxa não mais de  $1/T_s$ , mas sim de  $1/T$ , em que  $T = \alpha T_s$  com  $0 < \alpha < 1$ . O parâmetro  $\alpha$  é chamado de fator de compressão. Dessa maneira, diminui-se o intervalo de símbolo e, conseqüentemente, mais símbolos são enviados durante o mesmo intervalo de tempo, em comparação com o sistema que emprega sinalização de Nyquist e o aumento percentual da taxa, acima da taxa de Nyquist, é dado por  $100(1/\alpha - 1)\%$  [23].

Na situação em que  $\alpha = 1$ , o sistema de comunicação emprega sinalização de Nyquist. Logo, não há ISI pois utilizam-se pulsos  $g(t)$  ortogonais e a transmissão é realizada exatamente à taxa de Nyquist  $1/T_s = 2B$ .

Esse mecanismo tem como objetivo alterar a taxa em que os símbolos (já modulados em formas de ondas analógicas) são transmitidos. Dessa forma, trata-se de uma sinalização FTN e não uma modulação FTN. Como o pulso não é alterado, apenas a taxa, a largura de banda ocupada continua sendo a mesma.

A degradação da probabilidade de erro de *bit* em sistemas FTN torna-se inevitável. Como o intervalo de símbolo diminui, a energia  $E$  de cada símbolo FTN deve também diminuir para que seja mantida constante a relação de potência  $E_s/T_s = E/T$ , em que  $E_s$  é a energia de símbolo de um sistema com sinalização de Nyquist. Este é um fator imediato de redução do desempenho, como o analisado na Seção 2.8.1, mas que deve ser encarado como uma solução de compromisso (mesma potência média). Além disso, como a taxa do sistema é superior à Taxa de Nyquist, deve-se considerar a presença de ISI e de equalizadores que sejam capazes de mitigar os efeitos dessa interferência. Assim, sabendo que a probabilidade de erro do sistema será inferior à encontrada pela Eq.(2.45), pretende-se encontrar o limite inferior da probabilidade de erro de um sistema com sinalização FTN, o qual será desenvolvido na Seção 3.4, conforme [5]. Antes, porém, será descrito o modelo do sistema FTN na Seção 3.3.

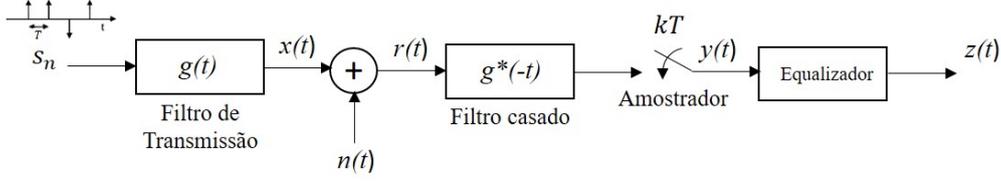


Figura 3.1: Esquemático simplificado de um sistema de comunicação que emprega sinalização *Faster-than-Nyquist*. Adaptado de [4].

### 3.3 Modelagem do Sistema

Considere um sistema de comunicação que utilize pulsos formatadores  $g(t)$  dado por:

$$g(t) = \frac{\text{sen}(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} = \text{sinc}(t/T_s), \quad (3.1)$$

para enviar símbolos binários com sinalização FTN em um canal com banda  $B = 1/2T_s$ , conforme o desenvolvido no Capítulo 2 e exemplificado na Fig. 3.1. Considera-se, para todos os desenvolvimentos realizados neste Capítulo, que o canal é AWGN e que utiliza-se uma sinalização antipodal, na qual os símbolos são independentes entre si e podem assumir apenas dois valores  $\{-1, 1\}$ .

Os símbolos transmitidos possuem a forma de uma onda analógica  $x(t) = \sum s_n g(t - nT)$ , em que  $s_n$  corresponde ao  $n$ -ésimo símbolo transmitido e  $T$ , ao intervalo de símbolo FTN. O sinal  $x(t)$ , ilustrado na Fig. 3.1, é obtido a partir da convolução entre o trem de impulsos que contém os símbolos  $s_n$  com o pulso de transmissão  $g(t)$ .

No receptor, recebe-se o sinal  $r(t) = x(t) + n(t)$ , em que  $n(t)$  representa o ruído AWGN com média nula e variância  $N_0$ . O sinal passa pelo filtro casado, cuja resposta impulsional é  $g^*(-t)$ , e é amostrado a um intervalo  $nT, n \in \mathbb{Z}$ . O sinal resultante  $y(t)$  pode ser expresso pela Eq.(3.2), em que  $h(t) = g(t) * g^*(-t)$  e  $\eta(t) = \int n(\tau)g^*(\tau - t)d\tau$ .

$$y(t) = \sqrt{E_s} \sum_n s_n h(t - nT) + \eta(t). \quad (3.2)$$

Note que o ruído  $n(t)$ , adicionado pelo canal, é uma variável aleatória com distribuição gaussiana,  $\mathcal{CN}(0, N_0)$ . Após a convolução com o filtro casado, ele torna-se um ruído colorido, com média nula e autocorrelação não nula dada por  $\mathbb{E}[\eta(mT)\eta^*(nT)] = N_0 h(mT - nT)$ , segundo o discutido na Seção 2.6.

### 3.4 Probabilidade de Erro de Símbolo

Assumindo que um detector ótimo é utilizado para detectar o  $k$ -ésimo símbolo de uma sequência, deseja-se determinar o limite inferior para a probabilidade de erro de *bit*. Como a sinalização é binária, os termos "símbolo" e "*bit*" correspondem, exatamente, ao mesmo elemento. O *bit* "0"

refere-se ao símbolo  $\{-1\}$  e o *bit* "1", ao símbolo  $\{+1\}$ .

Como cada símbolo é independente um do outro e pode assumir apenas dois valores possíveis, trata-se de um problema de teste de hipótese binário com iguais probabilidades *a priori*. A primeira hipótese é a de receber o sinal  $r$  dado que enviou-se o símbolo  $\{-1\}$  no  $k$ -ésimo intervalo de transmissão e a segunda é a de receber o sinal  $r$  dado que enviou-se o símbolo  $\{+1\}$  no  $k$ -ésimo intervalo. Assim, as duas hipóteses podem ser caracterizadas pelas densidades de probabilidade  $p_-(r)$  e  $p_+(r)$ , respectivamente. Uma maneira de escrever o limitante inferior para a probabilidade de erro do sistema é:

$$P_e = \frac{1}{2} \int \min[p_+(r), p_-(r)] dr. \quad (3.3)$$

Perceba que o termo  $1/2$  da Eq.(3.3) advém da consideração de símbolos binários equiprováveis. A integral  $\int p_+(r) dr$  corresponde à probabilidade de se receber o sinal  $r$ , dado que a hipótese do  $k$ -ésimo *bit* ser positivo é verdadeira, para todos os possíveis valores de  $r$ . Assim, na Eq.(3.3) calcula-se a probabilidade para cada hipótese e soma-se à probabilidade de erro a menor probabilidade encontrada. Isto é feito para todos os sinais  $r$  possíveis de serem recebidos.

Considere, agora,  $u_i^\pm(t)$  um caso particular de um dos  $2^N$  equiprováveis sinais que transmite uma das  $2^N$  seqüências possíveis, em que  $N$  é a quantidade de símbolos da seqüência. Dessa maneira,

$$p_\pm(r) = \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} p_\pm^i(r), \quad (3.4)$$

em que  $p_\pm^i(r)$  é densidade de observação condicionada à seqüência inteira. Para exemplificar e facilitar o entendimento, considere  $N = 2$  e  $2^N = 4$ . Os sinais  $u_i^\pm(t)$  serão representados pelas seqüências de símbolos  $u_i$ . Todas as quatro possíveis seqüências de símbolos de serem recebidas são:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 & -1 \\ u_2 &= -1 & +1 \\ u_3 &= +1 & -1 \\ u_4 &= +1 & +1 \end{aligned}$$

Se a primeira hipótese for verdadeira, isto é, se o  $k$ -ésimo *bit* da seqüência for  $\{-1\}$  e considerando  $k = 1$ , as possíveis seqüências que podem ser geradas são  $u_1$  e  $u_2$ . A densidade de

probabilidade  $p_-(r)$ , simplificando a notação, pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
p_-(r) &= P(\text{gerar}\{-1, -1\}) P(\text{receber}\{-1, -1\}|\text{gerou}\{-1, -1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{-1, -1\}) P(\text{receber}\{+1, -1\}|\text{gerou}\{-1, -1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{-1, +1\}) P(\text{receber}\{-1, +1\}|\text{gerou}\{-1, +1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{-1, +1\}) P(\text{receber}\{+1, +1\}|\text{gerou}\{-1, +1\}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p^i(\text{receber}\{\text{seq } i\}|\text{gerou}\{-1, X\}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p_-^i(r)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

O parâmetro  $X$  corresponde aos possíveis símbolos que podem ser gerados,  $\{-1, 1\}$ . Perceba que o símbolo  $p(\cdot)$  representa a densidade de probabilidade e o  $P(\cdot)$ , a probabilidade. Além disso, a única fonte possível de erro é erro no *bit*  $k$ . De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
p_+(r) &= P(\text{gerar}\{+1 - 1\}) P(\text{receber}\{+1, -1\}|\text{gerou}\{+1, -1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{+1, -1\}) P(\text{receber}\{-1, -1\}|\text{gerou}\{+1, -1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{+1, +1\}) P(\text{receber}\{+1, +1\}|\text{gerou}\{+1, +1\}) + \\
&+ P(\text{gerar}\{+1, +1\}) P(\text{receber}\{-1, +1\}|\text{gerou}\{+1, +1\}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p^i(\text{receber}\{\text{seq } i\}|\text{gerou}\{+1, X\}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 p_+^i(r)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Combinando a Eq.(3.3) e a Eq.(3.4) e utilizando o fato de que o mínimo entre dois somatórios que possuem quantidades iguais de termos é, pelo menos, tão grande quanto a soma do menor elemento do  $i$ -ésimo termo de cada sequência, tem-se

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^N} \int \min \left( \sum_{i=1}^{2^N} p_+^i(r), \sum_{j=1}^{2^N} p_-^j(r) \right) dr \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} \min [p_+^i(r), p_-^{j(i)}(r)] dr.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vale ressaltar que, como qualquer termo em uma série pode ocupar qualquer ordem sem que o resultado seja alterado, faz-se necessário manter a correspondência entre os respectivos termos dos dois somatórios da Eq.(3.7). Para isso, foram utilizados os pares  $[i, j(i)]$ .

Sabe-se que probabilidade de erro  $P_{ef}$  entre dois sinais fixos é dada por:

$$P_{ef} = \frac{1}{2} \int \min [p_+^i(r), p_-^{j(i)}(r)] dr. \tag{3.8}$$

A Eq.(3.8) pode ser descrita pela função  $Q(d[i, j(i)]/\sqrt{2N_0})$ , em que

$$d^2(i, j) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_+^i(r) - u_-^j(t)] dt \quad (3.9)$$

representa o quadrado da distância euclidiana entre as duas sequências que diferem-se apenas na  $k$ -ésima posição. A função  $Q(x)$  é a distribuição cumulativa complementar dada por [24]:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt. \quad (3.10)$$

Dessa maneira, a Eq.(3.7) pode ser reescrita como:

$$P_e \geq \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} Q\left(\frac{d[i, j(i)]}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (3.11)$$

para qualquer conjunto de par  $[i, j(i)]$ .

Para que se tenha o limite inferior da probabilidade de erro, considera-se a situação em que a função  $Q(x)$ , dada pela Eq.(3.11), é máxima, isto é, o seu argumento é mínimo. Deseja-se, dessa maneira, encontrar a menor distância euclidiana entre dois sinais, ou seja, a distância mínima  $d_{min}$ .

### 3.5 Distância Mínima em um Sistema com Sinalização de Nyquist

Uma das métricas utilizadas para determinar a imunidade do sistema ao ruído é a distância mínima  $d_{min}$ , conforme visto na Seção 2.8.2. Ela pode ser definida como a menor distância euclidiana obtida a partir de duas formas de onda  $r_{\mathbf{a}}(t)$  e  $r_{\mathbf{b}}(t)$  que transmitem duas sequências de símbolos distintas  $\mathbf{a}=[s_a]$  e  $\mathbf{b}=[s_b]$ , respectivamente. Neste primeiro desenvolvimento, é considerada a sinalização de Nyquist e na Seção 3.6, a sinalização FTN.

$$\begin{aligned} d_{min}^2 &= \min \left( \int_{-\infty}^{\infty} |r_{\mathbf{a}}(t) - r_{\mathbf{b}}(t)|^2 dt \right) \\ &= \min \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{a=1}^N s_a g(t - aT) - \sum_{b=1}^N s_b g(t - bT) \right|^2 dt \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ambos os índices  $a$  e  $b$  da Eq.(3.12) começam em 1 e terminam em  $N$ , sendo  $N$  o tamanho da sequência transmitida. Assim, é possível unir os dois somatórios em apenas um e diferenciar os símbolos de cada sequência por  $s_k^a$  e  $s_k^b$  para  $s_a$  e  $s_b$ , respectivamente.

$$d_{min}^2 = \min \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N (s_k^a - s_k^b) g(t - kT) \right|^2 dt \right). \quad (3.13)$$

Sabendo que  $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ , pode-se escrever a Eq.(3.13) como:

$$d_{min}^2 = \min \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N (s_k^a - s_k^b) g(t - kT) \right) \left( \sum_{l=1}^N (s_l^a - s_l^b) g(t - lT) \right)^* dt \right]. \quad (3.14)$$

Como considera-se uma modulação BPSK, os símbolos assumem apenas valores reais e, então,  $(s_l^a - s_l^b) = (s_l^a - s_l^b)^*$ . Realizando a multiplicação entre os termos da Eq.(3.14), tem-se:

$$d_{min}^2 = \min \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (s_k^a - s_k^b) (s_l^a - s_l^b) g(t - kT) g^*(t - lT) dt \right]. \quad (3.15)$$

Como os pulsos  $g(t)$  são ortogonais no intervalo de tempo  $T_s$  e  $T_s = T$ , a integral no tempo do termo  $g(t - kT)g^*(t - lT)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ , é não nula apenas quando  $k = l$ . Assim, a Eq.(3.15) pode ser escrita como:

$$d_{min}^2 = \min \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_k (s_k^a - s_k^b)^2 |g(t - kT)|^2 \right) dt \right]. \quad (3.16)$$

O termo  $(s_k^a - s_k^b)^2$  da Eq.(3.16) independe da variável  $t$  e, portanto, pode ser retirado da integral.

$$d_{min}^2 = \min \left[ \sum_k (s_k^a - s_k^b)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |g(t - kT)|^2 dt \right]. \quad (3.17)$$

A integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$  equivale à energia  $E$  do pulso  $g(t)$ . Dessa maneira, substituindo a integral por  $E$  na Eq.(3.17), tem-se:

$$d_{min}^2 = \min \left[ \sum_k (s_k^a - s_k^b)^2 E \right]. \quad (3.18)$$

Nesse caso, a distância mínima ocorre quando há a alteração de apenas um *bit* entre as formas de onda analisadas, isto é, quando  $s_k^a$  e  $s_k^b$  apresentam polaridades opostas [23]. Logo,

$$d_{min}^2 = (-1 - 1)^2 E = 4E. \quad (3.19)$$

Para ilustrar esse desenvolvimento, considere o exemplo de duas sequências distintas de símbolos  $\mathbf{a} = [-1, 1, 1, -1]$  e  $\mathbf{b} = [-1, 1, -1, -1]$ , as quais diferem-se em apenas um *bit*, o terceiro.

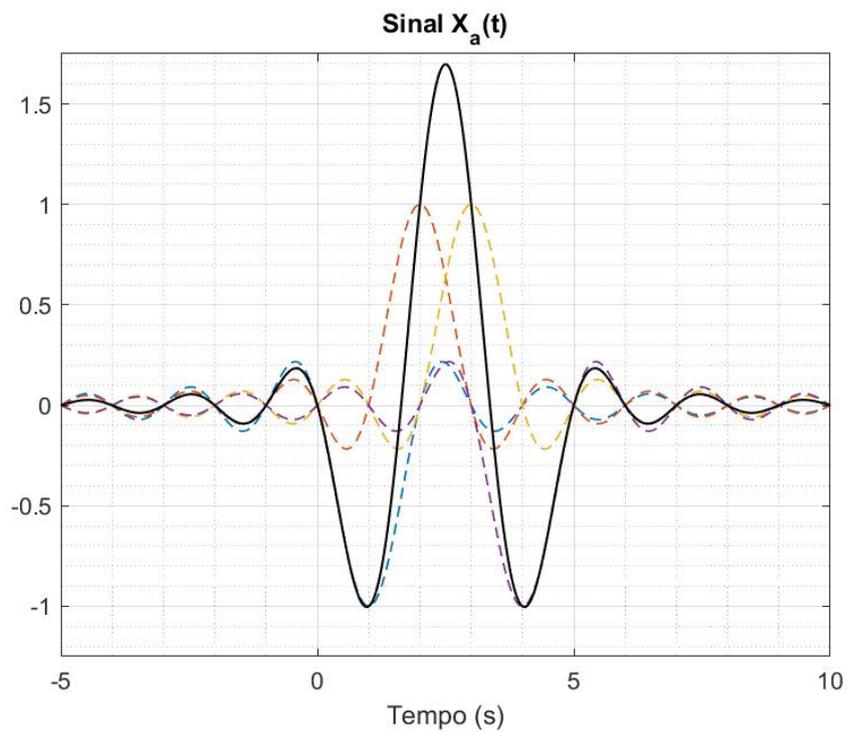


Figura 3.2: (a) Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência  $\mathbf{a}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.

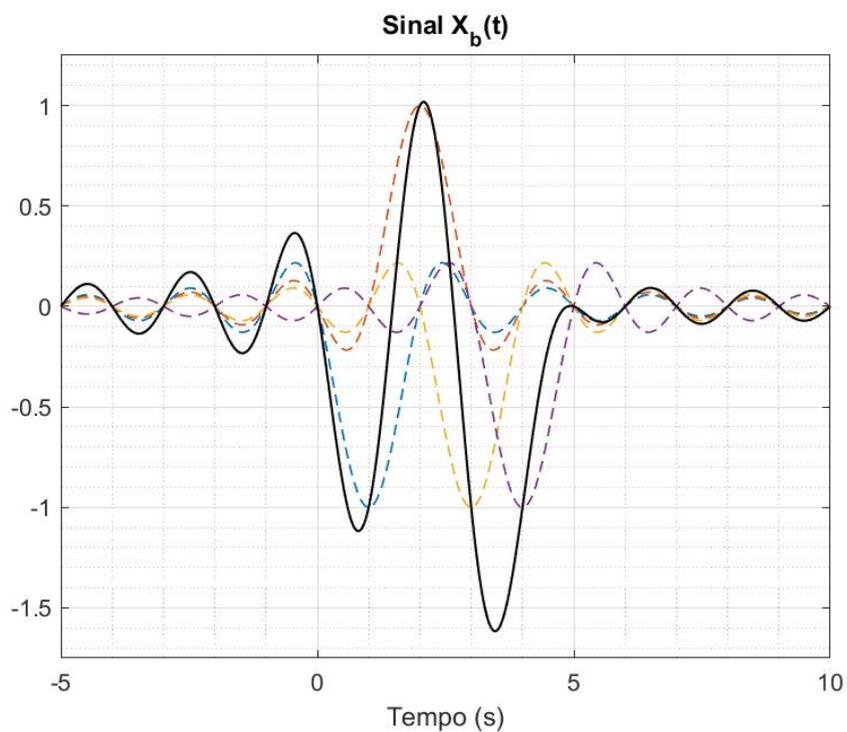


Figura 3.3: Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência  $\mathbf{b}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.

As formas de onda que transmitem, no canal, as sequências de símbolos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são, respectivamente,  $x_{\mathbf{a}}(t)$  e  $x_{\mathbf{b}}(t)$ , e estão ilustradas nas Fig. 3.2 e 3.3. Em cada gráfico, as formas de onda que transmitem os símbolos estão tracejadas, enquanto que o seu somatório (sinal que de fato é enviado ao canal) está destacado. O pulso  $g(t)$  utilizado foi um pulso  $\text{sinc}(t/T_s)$ , ortogonal no intervalo  $T_s$ , com  $T_s = 1$ , conforme a Eq.(3.1). O sinal transmitido  $x_n(t)$  possui a forma  $x_n(t) = \sum_n s_n g(t - nT)$ , com  $T = 1$ .

Neste primeiro exemplo, foi considerado um sistema de transmissão de Nyquist, isto é,  $\alpha = 1$  e  $T = T_s$ . Note que o  $k$ -ésimo pulso, de ambas as Fig. 3.2 e 3.3, é nulo em todos os instantes de tempo inteiro, exceto no  $k$ -ésimo instante de amostragem, fato este que confirma a ortogonalidade entre os pulsos.

Para fins de simplificação, a presença do filtro casado não foi considerada. Como esse filtro apresenta uma resposta impulsional que também é ortogonal ao pulso  $g(t)$ , esta simplificação não proporciona erros de interpretação. Além disso, considerou-se um canal ideal que não acrescenta qualquer tipo de ruído ao sinal.

### 3.6 Distância Mínima em um Sistema com Sinalização FTN

Para ilustrar o sistema com sinalização FTN, as mesmas sequências binárias  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são transmitidas por pulsos  $x_n(t) = \sum_n s_n g(t - nT)$ , em que  $T = \alpha T_s$ . Considera-se, neste exemplo,  $T_s = 1$  e  $\alpha = 0,7$ . De maneira análoga à situação anterior, as Fig. 3.4 e 3.5 representam as formas de onda de transmissão de cada símbolo individualmente e com o seu somatório. A Fig. 3.4 e 3.5 correspondem às formas de onda da sequência binária  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente.

No instante de amostragem do  $k$ -ésimo símbolo, em ambas as Fig. 3.4 e 3.5, há a presença de mais de uma forma de onda, ou seja, a forma de onda que transmite o  $k$ -ésimo símbolo sofre interferência das formas de onda dos demais símbolos, o que corresponde à ISI. Matematicamente, essa relação é obtida considerando o sinal amostrado:

$$x_n(kT) = \sum_n s_n g(kT - nT). \quad (3.20)$$

Substituindo-se  $T$  por  $\alpha T_s$ , na Eq.(3.20), tem-se:

$$x_n(kT) = \sum_n s_n g((k - n)\alpha T_s). \quad (3.21)$$

Como o argumento  $(k - n)\alpha$  não é um número inteiro, os sinais  $x_{\mathbf{a}}(t)$  e  $x_{\mathbf{b}}(t)$  são não ortogonais. O produto  $g(t - kT)g^*(t - lT)$  presente na Eq.(3.15) apresenta termos não nulos com  $k \neq l$  que correspondem à parcela de interferência interssimbólica gerada, em conformidade com o exposto na Seção 2.7.

A distância euclidiana entre os sinais  $x_{\mathbf{a}}(t)$  e  $x_{\mathbf{b}}(t)$  pode ser obtida a partir da energia do sinal erro  $x_s(t)$ , resultante da subtração entre  $x_{\mathbf{a}}(t)$  e  $x_{\mathbf{b}}(t)$ , ao utilizar a Eq.(2.51).

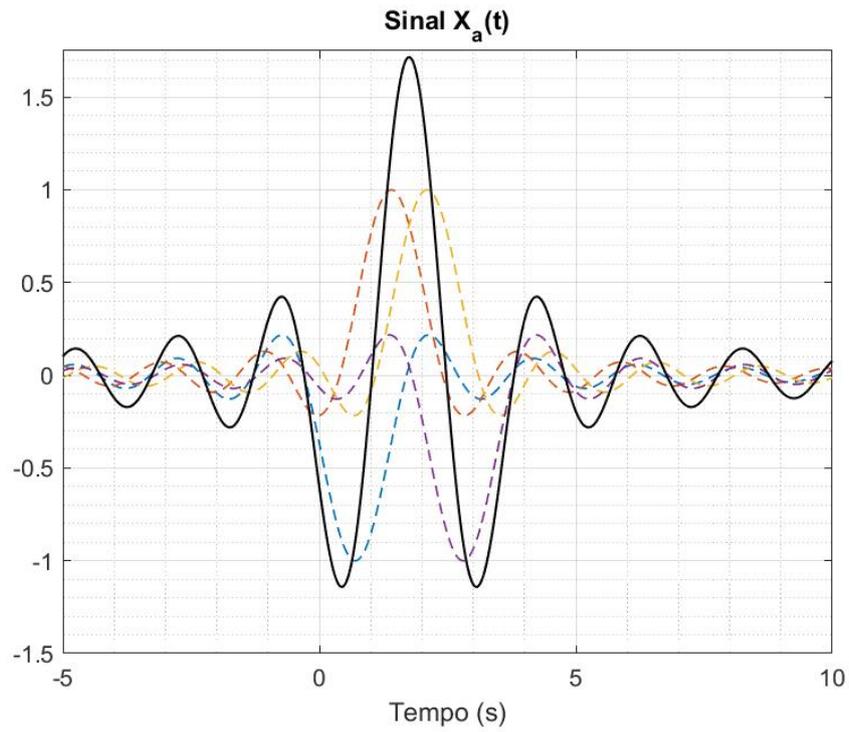


Figura 3.4: (a) Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência  $\mathbf{a}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.

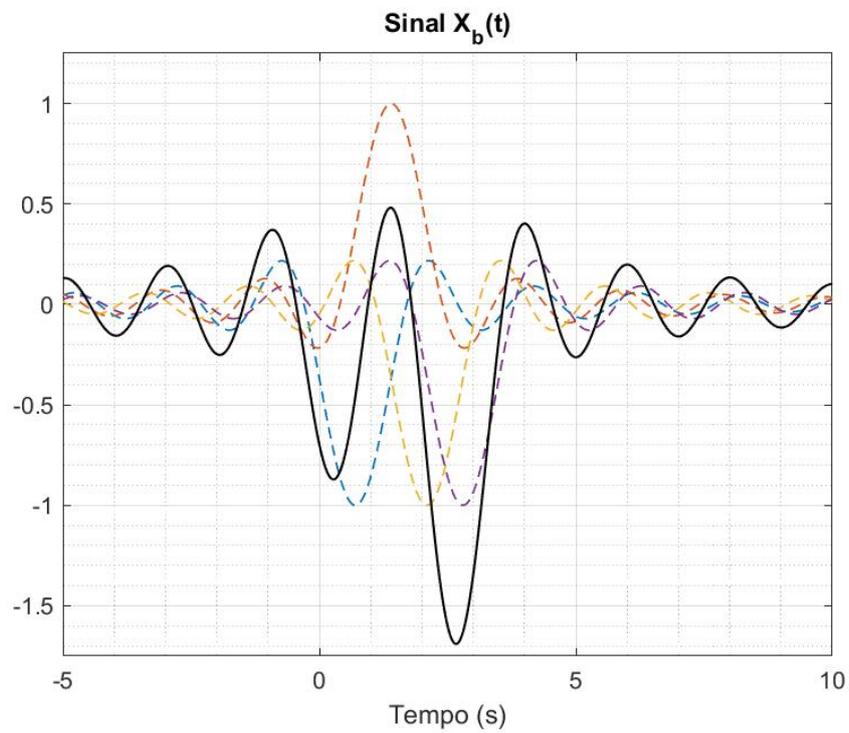


Figura 3.5: Formas de onda que transmitem cada símbolo da sequência  $\mathbf{b}$ , com destaque para a forma de onda resultante do seu somatório.

Para a situação com sinalização de Nyquist, a energia do sinal erro  $x_s(t)$ , ilustrado na Fig. 3.6(a), corresponde à área do módulo do sinal  $x_s^2(t)$  da Fig. 3.6(b) e ao quadrado da distância euclidiana. O resultado encontrado de  $d_{min}^2$  foi de 4, o que está em conformidade com a Eq.(3.19) pois a energia do pulso  $g(t)$  utilizado é unitária. Vale ressaltar que, neste tipo de sinalização, a distância euclidiana encontrada entre as sequências **a** e **b** equivale à distância mínima entre **a** e qualquer outra sequência que apresente apenas um *bit* de diferença, bem como da **b**, sob a mesma condição.

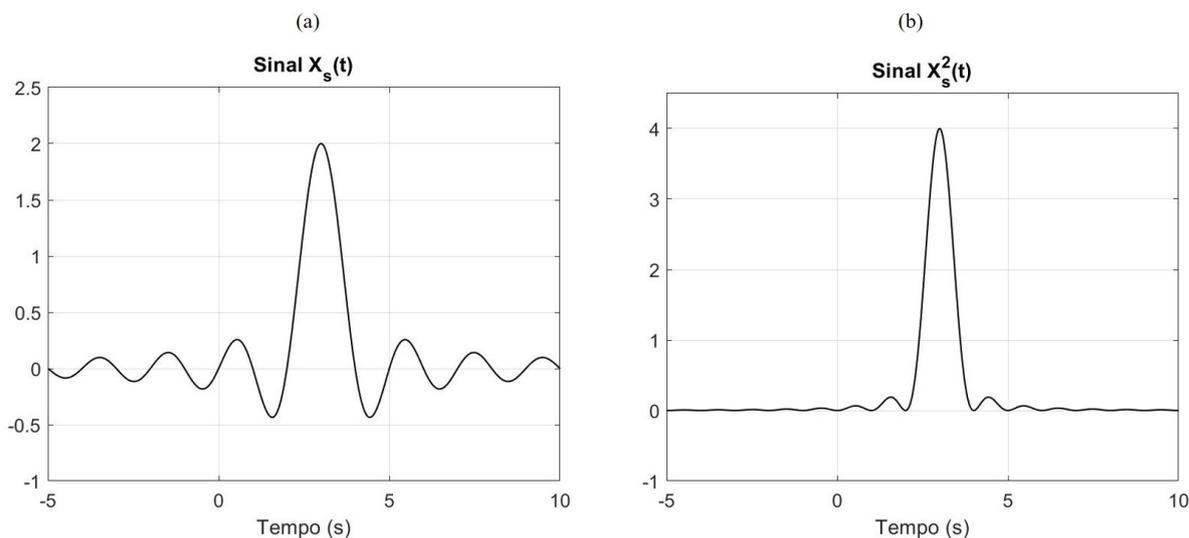


Figura 3.6: (a) Forma de onda do sinal erro  $x_s(t)$  resultante da subtração do sinal  $x_a(t)$  e  $x_b(t)$ . (b) Forma de onda  $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização de Nyquist com  $\alpha = 1$ .

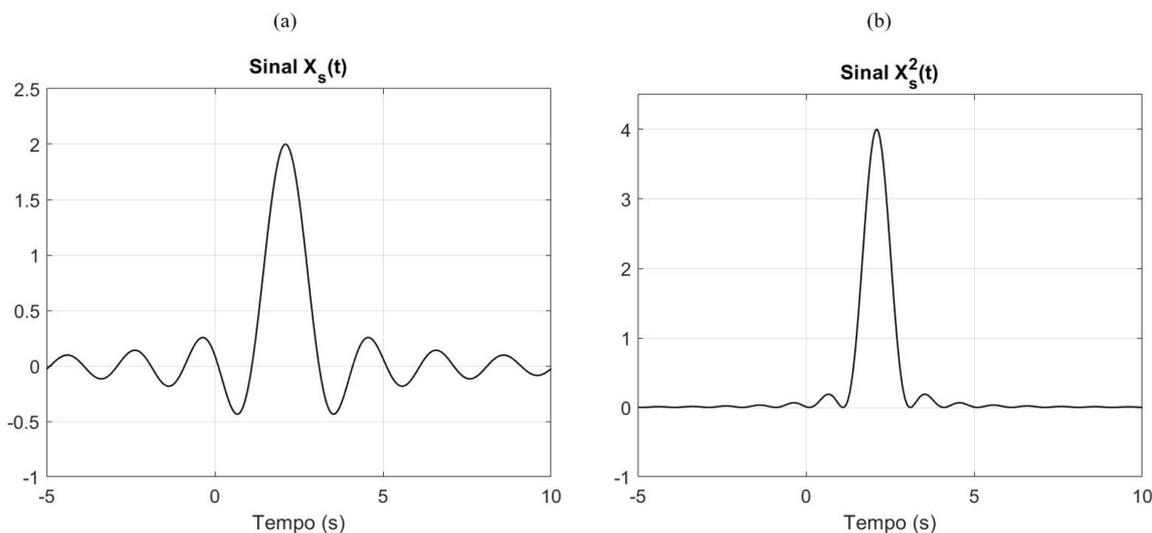


Figura 3.7: (a) Forma de onda do sinal erro  $x_s(t)$  resultante da subtração do sinal  $x_a(t)$  e  $x_b(t)$ . (b) Forma de onda  $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização FTN com  $\alpha = 0,7$ .

Para a situação em que se emprega sinalização FTN, utilizam-se, para análise, os sinais da Fig. 3.7 e obtém-se que o quadrado da distância euclidiana também vale 4. A indagação que surge é: como que um sistema FTN, que propõe um envio de símbolos em um intervalo cada vez

menor, com geração proposital de interferência interssimbólica e utilização de pulsos não ortogonais, consegue manter uma distância mínima de 4, ou seja, apresentar um mesmo desempenho que um sistema com sinalização de Nyquist? Para responder a essa pergunta, considere o desenvolvimento a seguir.

É possível reescrever a Eq.(3.18) em formato matricial:

$$d^2 = \sum_k \sum_l e_k e_l h((k-l)T) = \mathbf{e} \mathbf{H} \mathbf{e}^T = d^2(\mathbf{e}), \quad (3.22)$$

em que  $\mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  é um vetor linha  $1 \times N$  que corresponde à diferença entre as sequências  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . O seu  $k$ -ésimo elemento é dado por  $e_k = a_k - b_k$  (no caso binário,  $e_k \in \{0, \pm 2\}$ ) e  $N$  corresponde ao tamanho da sequência de símbolos. A matriz  $\mathbf{H}$ , cujos elementos são  $[h_{ij} = h((i-j)T)]$ , é uma matriz Toeplitz formada pelos valores dos pulsos  $h(t)$  sobrepostos durante o instante de amostragem  $nT, n \in \mathbb{Z}$ .

Uma matriz Toeplitz é uma matriz  $w \times w$ , tal que  $T_w = [t_{l,c} ; l, c = 0, 1, \dots, w-1]$  e  $t_{l,c} = t_{l-c}$  [25]. A sua estrutura é dada por:

$$\begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(w-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{w-1} & & & \dots & t_0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Na notação matricial, é utilizado o pulso  $h(t)$ , enquanto que nos desenvolvimentos anteriores, o pulso  $g(t)$ . Conforme já explicado, não há perda de generalidade pois ambos tratam-se de pulsos ortogonais da família do cosseno levantado.

Dessa maneira, a partir da Eq.(3.22), é possível estimar, numericamente, a distância Euclidiana entre sinais  $r(t)$  que utilizam diferentes pulsos formatadores, diferentes sequências e constelações, tal que  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ . A distância mínima, dada pela Eq.(3.24), é obtida a partir da menor distância euclidiana, quando consideradas todas as sequências binárias possíveis [4]:

$$d_{min} = \frac{d(\mathbf{e})}{2\sqrt{E_b}}, \quad (3.24)$$

em que  $E_b$  corresponde à energia por *bit* de informação e é igual a  $E_s$  apenas no caso binário.

Ainda analisando as sequências  $\mathbf{a} = [-1, 1, 1, -1]$  e  $\mathbf{b} = [-1, 1, -1, -1]$ , a Eq.(3.22) é dada por:

$$d_{min}^2 = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (a_k - b_k)(a_l - b_l)h((k-l)T), \quad (3.25)$$

Três condições devem ser satisfeitas para que o somatório da Eq.(3.25) seja não nulo. Os termos  $(a_k - b_k)$ ,  $(a_l - b_l)$  e  $h((k-l)T)$  devem todos ser diferentes de zero. Caso exista  $k$  tal que  $(a_k - b_k) \neq 0$ , existe também um  $l$  tal que  $(a_l - b_l) \neq 0$ . Assim, de fato, apenas duas condições devem

ser satisfeitas: pelo menos um *bit* das sequências deve apresentar polaridade oposta e  $((k-l)\alpha)$  deve ser inteiro igual a zero ou igual a qualquer outro número não inteiro.

Expandindo o somatório da Eq.(3.25) relativo ao índice  $l$ , tem-se:

$$d_{min}^2 = \sum_{k=1}^4 (a_k - b_k) \{ (a_1 - b_1)h((k-1)T) + (a_2 - b_2)h((k-2)T) + (a_3 - b_3)h((k-3)T) + (a_4 - b_4)h((k-4)T) \}. \quad (3.26)$$

Para as dadas sequências  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  que diferem apenas no terceiro símbolo, a Eq.(3.26) pode ser escrita como:

$$d_{min}^2 = \sum_{k=1}^4 (a_k - b_k)(a_3 - b_3)h((k-3)T) \quad (3.27)$$

$$= (a_3 - b_3)(a_3 - b_3)h((3-3)T). \quad (3.28)$$

Assim,  $d_{min}^2 = \{1 - (-1)\}\{1 - (-1)\}\{h(0)\} = 4$  o que corresponde exatamente ao resultado encontrado no exemplo anterior. Vale ressaltar que não foi especificado o tipo de sinalização. Tanto para sinalização de Nyquist quanto para sinalização FTN, o resultado é o mesmo uma vez que  $h((3-3)\alpha T_s) = h((3-3)T_s) = 1$ .

Matricialmente, conforme Eq.(3.25), tem-se:

$$\begin{aligned} d_{min}^2 &= \mathbf{e} \mathbf{H} \mathbf{e}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h(0) & h(-T) & h(-2T) & h(-3T) \\ h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) \\ h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) \\ h(3T) & h(2T) & h(T) & h(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2h(2T) & 2h(T) & 2h(0) & 2h(-T) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \times h(0) \times 2 \\ &= 4. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considere, agora, as sequências binárias  $\mathbf{a} = [1, -1, 1, -1]$  e  $\mathbf{b} = [-1, 1, -1, 1]$  que diferem-se em todos os *bits*. A forma de onda do sinal erro  $x_s(t)$  e do sinal  $x_s^2(t)$ , com sinalização de Nyquist e FTN, estão ilustradas nas figuras Fig. 3.8 e 3.9, respectivamente. O fator de compressão utilizado neste exemplo também foi de 0,7. Ao se considerar o sistema com sinalização de Nyquist, a energia do sinal erro, que equivale ao quadrado da distancia euclidiana, foi de 16, enquanto, com a sinalização FTN, foi de 3,3267.

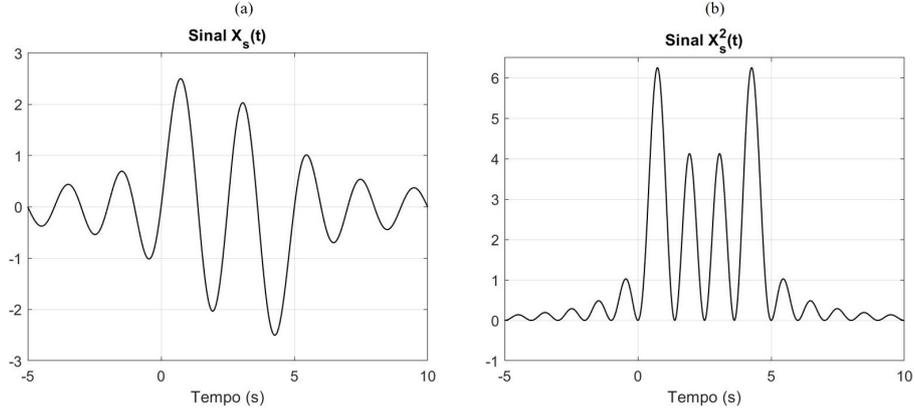


Figura 3.8: (a) Forma de onda do sinal erro  $x_s(t)$  resultante da subtração do sinal  $x_a$  e  $x_b$ . (b) Forma de onda  $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização de Nyquist com  $\alpha = 0$ .

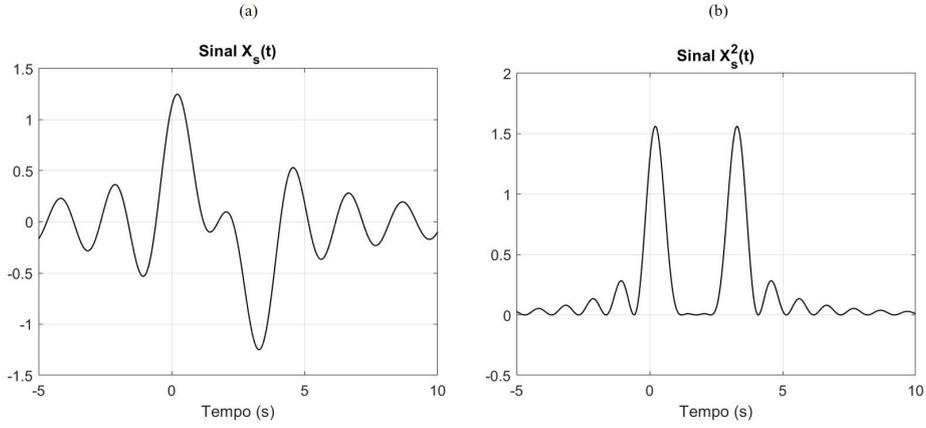


Figura 3.9: (a) Forma de onda do sinal erro  $x_s(t)$  resultante da subtração do sinal  $x_a$  e  $x_b$ . (b) Forma de onda  $x_s^2(t)$ . Empregou-se sinalização FTN com  $\alpha = 0,7$ .

Para esse novo exemplo de seqüências binárias, a Eq.(3.22), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 d_{min}^2 &= \mathbf{e} \mathbf{H} \mathbf{e}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h(0) & h(-T) & h(-2T) & h(-3T) \\ h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) \\ h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) \\ h(3T) & h(2T) & h(T) & h(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Recordando que  $h(t) = g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ ,  $T = 0,7T_s$  e substituindo-os na Eq.(3.30), tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{min}^2 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0,3679 & -0,2162 & 0,0468 \\ 0,3679 & 1 & 0,3679 & -0,2162 \\ -0,2162 & 0,3679 & 1 & 0,3679 \\ 0,0468 & -0,2162 & 0,3679 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
 &= 3,3363. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Tabela 3.1: Vetores de erro  $e$  e suas distâncias euclidianas para  $\alpha = 0,7$ .

	Vetor de erro $e$	Quadrado da Distância Euclidiana $d^2$
(a)	0 0 0 -2	4
(b)	0 0 2 -2	5,0569
(c)	0 -2 2 0	5,0569
(d)	0 2 2 0	10,9431
(e)	2 0 0 2	8,3747
(f)	-2 0 -2 2	6,9523
(g)	2 0 2 -2	6,9523
(h)	-2 2 0 2	6,9523
(i)	2 -2 2 -2	3,3363
(j)	2 2 -2 -2	22,028

Perceba que a pequena diferença entre o quadrado das distâncias euclidianas determinadas graficamente e matricialmente, 3,3267 e 3,3363, respectivamente, é devido às aproximações computacionais e pode ser considerada desprezível.

O resultado  $d^2 = 16$ , obtido com sinalização de Nyquist, corresponde exatamente ao número de *bits* distintos entre as sequências multiplicado pelo valor do quadrado da distância mínima ( $d_{min}^2 = 4$ ). Este fato ocorre devido à ortogonalidade dos pulsos e é facilmente observado na relação matricial dada no desenvolvimento relativo à Eq.(3.29).

A Tabela 3.1 relaciona alguns dos possíveis vetores de erro  $e$  para sequências com 4 símbolos e os respectivos quadrados das suas distâncias euclidianas, considerando  $\alpha = 0,7$ . Para a composição da tabela, foi utilizado o método matricial devido à sua rapidez computacional.

Diferentemente do sistema com sinalização de Nyquist, a distância mínima de um sistema com sinalização FTN não ocorre quando há a divergência de apenas um *bit* entre as sequências, mas sim quando há diferenças de polaridade entre *bits* vizinhos. A posição relativa entre os símbolos distintos na sequência também é um fator relevante para o valor da distância euclidiana, como é possível constatar na Tabela 3.1. Ela influencia a quantidade de ISI que é gerada e, conseqüentemente, a forma de onda do sinal e distância euclidiana.

Quando os elementos vizinhos do sinal de erro apresentam polaridades opostas, a distância euclidiana é menor em comparação quando eles apresentam a mesma polaridade (exemplos das linhas (c) e (d)). Além disso, os exemplos das linhas (i) e (j) confirmam a importância da posição relativa entre os elementos com polaridades opostas na determinação da distância euclidiana.

Vale ressaltar, ainda, que distância euclidiana apresenta certas propriedades. Sequências de erro com apenas polaridades opostas, isto é,  $(e, -e)$ , geram a mesma distância euclidiana pois esta é uma métrica que leva em consideração a energia do sinal erro. Por exemplo, os vetores de erro  $[-2 \ 0 \ -2 \ 2]$  e  $[2 \ 0 \ 2 \ -2]$  possuem ambos  $d_{min}^2 = 6,9523$ , conforme a Tabela 3.1, linhas (f) e (g).

Além disso, a análise das linhas (b) e (c) confirmam o fato da distância euclidiana não depender

da posição absoluta dos símbolos distintos, mas sim da posição relativa e, por isso, esses dois vetores de erro apresentam também a mesma distância euclidiana.

Outra propriedade é a da simetria. Considere dois vetores de erro entre duas sequências de  $N$  símbolos dados por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , cujo  $i$ -ésimo elemento de cada sequência é  $e_{1,i}$  e  $e_{2,i}$ , respectivamente. Apresentarão a mesma distância euclidiana aqueles vetores de erro que possuírem  $e_{1,i} = e_{2,N+1-i}$ . Um exemplo são os vetores de erro das linhas  $(g)$  e  $(h)$  da Tabela 3.1.

Conforme o estabelecido na Eq.(3.24) e a partir do teste com todas os possíveis vetor de erro  $\mathbf{e}$ , o quadrado da distância mínima de um sistema que emprega sinalização FTN para transmitir uma sequência de 4 símbolos binários é 3,3363 e ocorre quando o sinal de erro é  $\mathbf{e} = [2 \ -2 \ 2 \ -2]$  ou  $\mathbf{e} = [-2 \ 2 \ -2 \ 2]$ . Dessa maneira, o resultado encontrado na Eq.(3.29) não corresponde ao quadrado da distância mínima do sistema com sinalização FTN, mas sim ao quadrado de uma das distâncias euclidianas possíveis de serem obtidas.

Na Fig.3.10 estão representados o comportamento da distância euclidiana em função do fator de compressão  $\alpha$  para cada um dos vetores de erro utilizados na Tabela 3.1. A Fig. 3.10(a) corresponde ao vetor  $(a)$  da Tabela 3.1, a Fig. 3.10(b), ao vetor  $(b)$  da Tabela 3.1, e assim por diante.

Percebe-se que o comportamento da distância euclidiana em função de  $\alpha$  é distinto para cada vetor de erro, exceto para os das linhas  $(f)$ ,  $(g)$  e  $(h)$  pois estes, de acordo com as propriedades mencionadas anteriormente, apresentam as mesmas distâncias euclidianas. Para estes vetores, há a presença de um ponto de mínimo para a distância euclidiana para determinado valor de  $\alpha$ . Qualquer outro fator de compressão, provoca um aumento na distância.

Para os vetores de erro das linhas  $(b)$ ,  $(c)$  e  $(i)$  a diminuição do fator de compressão implica, necessariamente, em uma diminuição da distância euclidiana. Para o vetor em  $(d)$ , ocorre exatamente o oposto. Conforme o demonstrado previamente (exemplo em que há erro em apenas um símbolo da sequência), a distância euclidiana para o vetor  $(a)$  é mantida constante. Em contrapartida, nos vetores  $(e)$  e  $(j)$ , há um valor máximo que a distância euclidiana pode assumir e depois ela começa a diminuir à medida em que o fator de compressão é alterado. Já os erros especificados nas linhas  $(f)$ ,  $(g)$  e  $(h)$ , cujas distâncias euclidianas apresentam o mesmo comportamento, possuem um ponto de mínimo e qualquer variação a partir deste ponto, aumenta a distância euclidiana.

A partir da análise dos gráficos da Fig. 3.10, é possível perceber que, a depender do fator de compressão adotado, o vetor de erro que apresenta a distância mínima e o próprio valor da distância mínima podem variar. Caso tivesse sido escolhido  $\alpha = 0,9$ , o quadrado da distância mínima seria 4 e o vetor que o originaria seria o  $(a)$ ,  $[0 \ 0 \ 0 \ -2]$ , ou qualquer outro que apresentasse as propriedades previamente citadas, tais como, os vetores de erro  $[0 \ -2 \ 0 \ 0]$  ou  $[2 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Assim, fica evidente que encontrar a distância mínima, em um sistema FTN, é um problema de teste exaustivo da distância euclidiana de todos os possíveis vetores de erro para um determinado fator de compressão.

O emprego da sinalização FTN degrada o sistema ao acrescentar ISI e essa degradação é refletida na diminuição da distância mínima quando comparada com sistemas clássicos, conforme

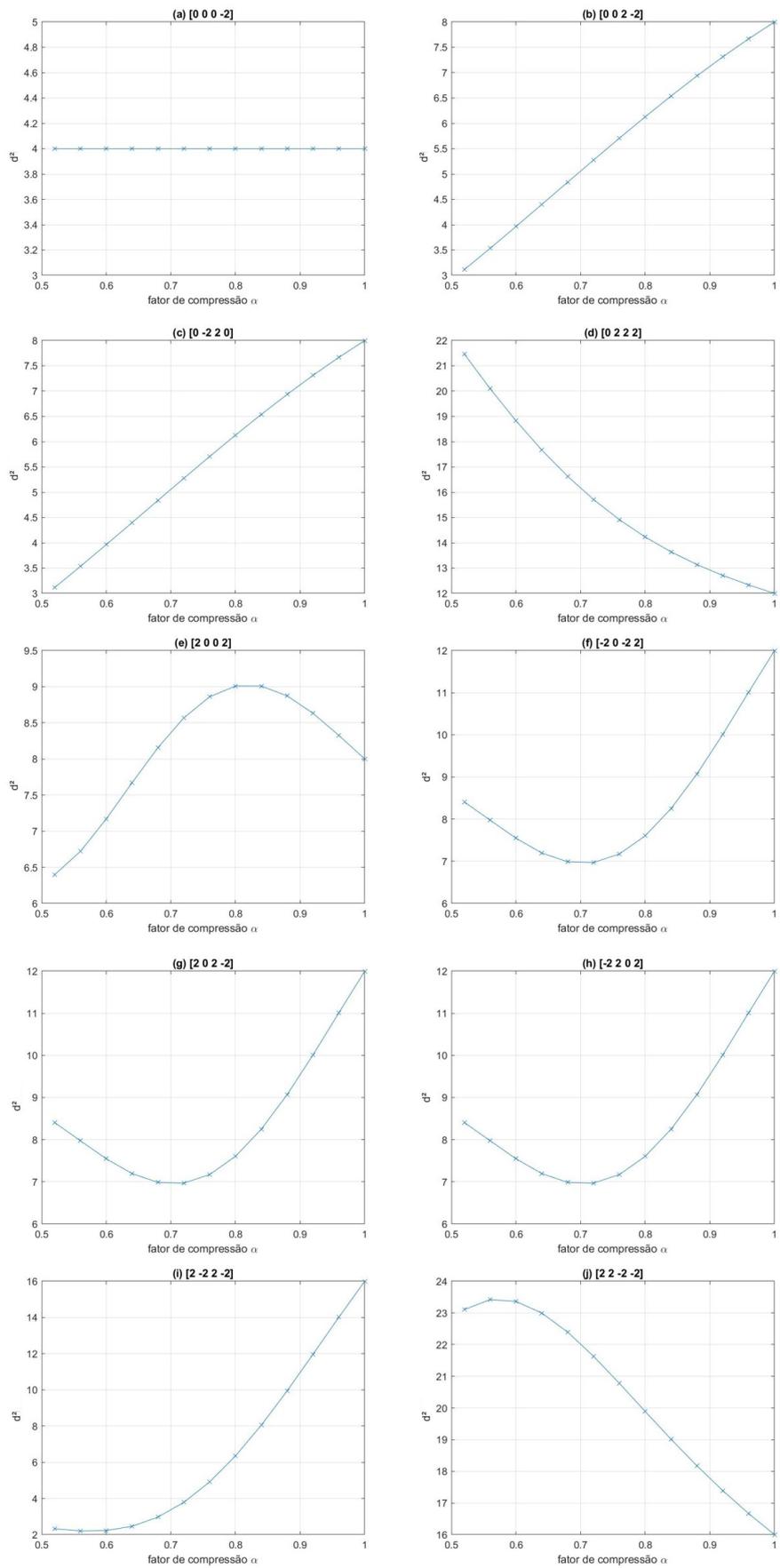


Figura 3.10: Comportamento da distância euclidiana  $d^2$  ao variar o valor do fator de compressão  $\alpha$  para 10 diferentes vetores de erro  $e$ .

o esperado. A indagação que surge é: existe algum limite em que seja possível comprimir o intervalo de transmissão de símbolo sem que haja qualquer aumento na probabilidade de erro do sistema? Isto é, existe um valor mínimo do fator de compressão que possibilite que a distância mínima não seja degradada?

### 3.7 Limite de Mazo

Mazo, ainda em [5], propõe que a distância mínima normalizada deve satisfazer a seguinte relação:

$$\frac{d_{min}^2}{4E} = \inf_{s_l = \pm 1, 0} \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} \left| 1 - \sum_{l=1}^N s_l e^{il\theta} \right|^2 d\theta, \quad (3.32)$$

em que  $s_l$  é proporcional à diferença entre os símbolos binários de duas sequências  $r_m$  e  $r_n$  e pode assumir os valores  $\{-1, 0, 1\}$ , quando devidamente colocado em escala. A Eq. 3.32 pode ser aproximada por:

$$\frac{d_{min}^2}{4E} = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} \left| 1 + \sum_{l=1}^K (-1)^l e^{il\theta} \right|^2 d\theta. \quad (3.33)$$

Deseja-se encontrar o menor fator de compressão  $\alpha_0$  que ainda possibilite uma distância mínima de  $4E$  (distância mínima de um sistema clássico). A variável  $K$  é obtida a partir de simulações exaustivas e considera o melhor valor de  $K$  que minimiza a Eq. (3.33), para um  $K$  não muito grande [5].

A Eq.(3.33), para um intervalo próximo de 1, é aproximada por  $K = 7$  e pode ser escrita como [23]:

$$\frac{1}{2\pi\alpha_0} \int_{-\pi\alpha_0}^{\pi\alpha_0} \left| 1 - \sum_{l=1}^7 (-1)^{l+1} e^{il\theta} \right|^2 d\theta = \frac{4E}{4E} = 1. \quad (3.34)$$

O valor de  $\alpha_0$  que soluciona a Eq.(3.33) é  $\alpha_0 = 0,802$ , o qual é denominado limite de Mazo [5].

Quando o fator de compressão torna-se menor do que o limite de Mazo, a distância euclidiana diminui e, conseqüentemente, a distância mínima torna-se menor do que  $4E$ , ou seja, há uma diminuição da distância mínima em comparação com o caso com sinalização de Nyquist. Ela decresce, entretanto, somente até um certo ponto de maneira a ser impossível alcançar uma distância mínima de zero [23].

A relação entre a distância euclidiana normalizada ( $d^2/4E$ ) e o fator de compressão pode ser conferido no gráfico da Fig. 3.11, o qual foi obtido a partir da Eq.(3.33), para diferentes valores de  $K$ , os quais estão especificados em cada ponto do gráfico. Os valores de distância euclidiana foram obtidos por testes exaustivos e referem-se à menor distância encontrada [5].

O resultado obtido por Mazo considerou a utilização de um pulso  $sinc(t/T_s)$ . John Anderson provou, em [14], que o valor do limite de Mazo pode ser estendido para  $\alpha_0 = 0,703$ , caso fosse

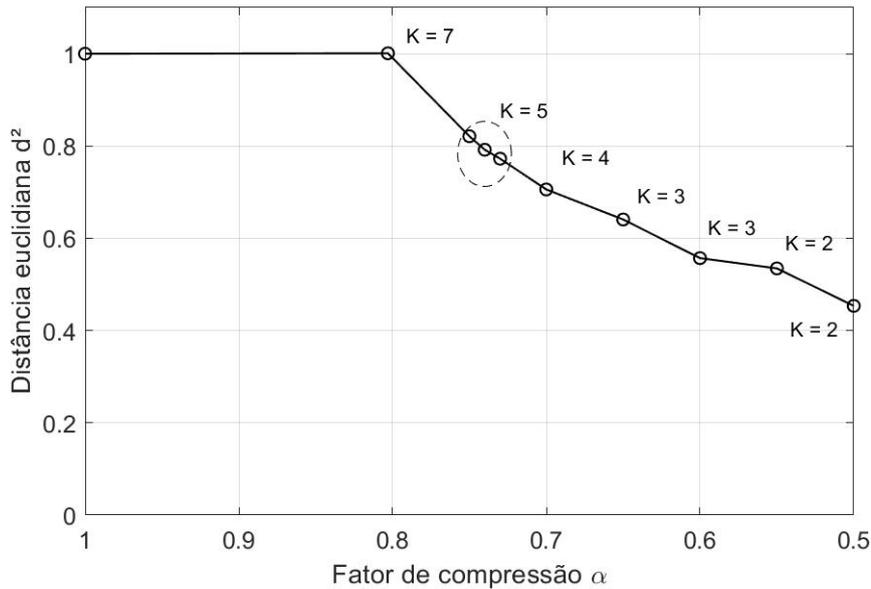


Figura 3.11: Comportamento da distância mínima em função do fator de compressão. Destaque para o limite de Mazo  $\alpha = 0,802$ . Adaptado de [5].

considerado um pulso da família do cosseno, com fator de *roll-off* de 0,3. Assim, considerando os fatores de compressão no limite de Mazo, para o primeiro e segundo pulso, o aumento da taxa de transmissão é de, respectivamente, 24,53% e 42,24%, com a mesma probabilidade de erro e utilizando a mesma largura de banda que no sistema com sinalização de Nyquist, para cada caso. Apesar do aumento da largura de banda no caso em que há a utilização de um pulso com fator de *roll-off* igual a 0,3, a eficiência espectral sofre um aumento de, respectivamente, 24,53% e 38,10% para os casos com  $\beta = 0$  e  $\beta = 0,3$ .

Considere, ainda, o exemplo da Seção 3.5 de uma sequência com quatro símbolos. O gráfico da Fig. 3.12 ilustra as curvas de todas as possíveis quadrados das distâncias euclidianas, em função do fator de compressão, com destaque para o seu limite inferior, o qual corresponde à distância mínima. É possível perceber que à medida em que o fator de compressão aumenta, o vetor de erro que proporciona a distância mínima é alterado. De  $\alpha = 1$  a 0,72, o vetor é o  $[0 \ 0 \ 0 \ -2]$ , de  $\alpha = 0,72$  a 0,56 é o  $[2 \ -2 \ 2 \ 0]$  e, por fim, de  $\alpha = 0,56$  a 0,5 é o  $[2 \ -2 \ 2 \ -2]$ . Os vetores de erro escolhidos poderiam ser substituídos por qualquer outro que satisfizesse alguma das propriedades da distância mínima mencionadas anteriormente.

Ainda analisando a Fig. 3.12, a distância mínima começa a decair a partir de  $\alpha = 0,728$  o que não corresponde ao limite de Mazo ( $\alpha = 0,802$ ). Assim, fica evidente que existe um vetor de erro, com outra quantidade de símbolos, que produz uma distância mínima inferior à obtida com a sequência de quatro símbolos e esse é o vetor utilizado na determinação da distância mínima da Fig. 3.11. Este fato corrobora a ideia de ser necessário um teste numérico com inúmeros vetores de erro com padrões de erro distintos.

A não alteração da  $d_{min}$  até o limite de Mazo, seguido da sua diminuição progressiva, é um

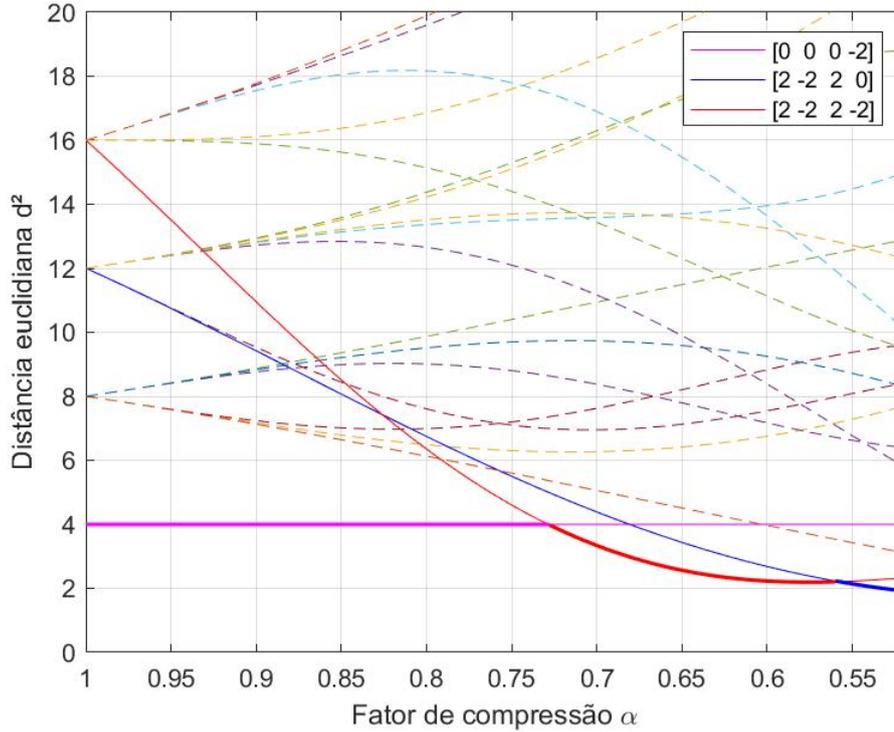


Figura 3.12: Distâncias euclidianas de uma sequência com quatro símbolos em função do fator de compressão. Destaque para a curva de distância mínima.

comportamento típico da distância mínima para qualquer pulso  $g(t)$  e ocorre também com modulações não lineares. Esse é um aspecto que contribui imensamente para o aumento da complexidade do receptor [14].

### 3.8 Conclusão

A sinalização FTN consiste em aumentar a taxa de transmissão, a partir do envio de símbolos em um intervalo de tempo inferior a  $T_s$ . Este sistema não satisfaz ao critério de Nyquist para interferência interssimbólica nula e, assim, há a presença de ISI a qual degrada o sistema.

Diferentemente dos sistemas que empregam sinalização de Nyquist, nos sistemas FTN, a ocorrência de mais de um erro nos símbolos das sequências transmitidas pode proporcionar a diminuição da distância mínima. Isso influencia diretamente no aumento da probabilidade de uma sequência de símbolos ser confundida por outra no receptor e, conseqüentemente, da ocorrência de erros de detecção.

A distância mínima, em sistemas FTN, é um fator que depende da posição relativa entre os símbolos que sofreram erro durante a transmissão, do fator de compressão  $\alpha$  utilizado e também da quantidade de erro que foi gerada. Assim, a computação da distância mínima, nesses sistemas, é um processo muito mais complexo do que nos sistemas com sinalização de Nyquist pois deve ser realizada uma comparação exaustiva entre a distância euclidiana de todas as possíveis vetores de

erro e a determinação do mínimo dentre elas.

Entretanto, é possível empregar a sinalização FTN sem que haja a diminuição da distância mínima, quando comparado com o sistema de Nyquist, utilizando equalizadores ótimos. O limite de Mazo corresponde ao menor fator de compressão que garante esta situação e equivale a  $\alpha = 0,802$  quando utilizam-se pulsos  $g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ . Ao enviar símbolos neste limite, há um aumento de, aproximadamente, 25% da taxa de transmissão, sem que haja qualquer aumento da largura de banda e da probabilidade de erro. Dessa maneira, a sinalização FTN configura-se como uma estratégia muito interessante para melhoria da eficiência espectral.

## Capítulo 4

# Equalização no Domínio da Frequência de um Sistema Faster-than-Nyquist

### 4.1 Introdução

No Capítulo 3, foi introduzida a teoria de sistemas de comunicação com sinalização FTN. Analisou-se o comportamento de algumas métricas importantes para avaliação do desempenho do sistema, tais como, distância mínima e probabilidade de erro.

Um dos principais desafios da sinalização FTN é o aumento da complexidade do demodulador. O sistema de recepção deve possuir equalizadores que sejam capazes de diminuir a interferência interssimbólica, no instante de amostragem do sinal, para que seja possível a detecção correta do símbolo.

Entretanto, diferentemente dos sistemas com sinalização de Nyquist que empregam equalizadores, nos sistemas FTN, há a introdução da problemática relativa à memória do canal. A detecção ótima não é mais uma detecção símbolo a símbolo, mas sim de uma sequência, conforme discutido no Capítulo 3, pois cada símbolo influencia o outro. O receptor deve ter conhecimento desde o primeiro símbolo da sequência enviada até o último, no instante de detecção, visto que a ISI gerada é infinita. Portanto, há um aumento considerável de processamento computacional para que a decisão da sequência enviada seja tomada com minimização de erros.

Ainda assim, a utilização de equalizadores configura-se como uma estratégia viável devido ao fato de se tratar de um sistema binário, em que a quantidade de valores que os símbolos  $s_n$  podem assumir é finita. A ISI que um símbolo gera pode ser, aproximadamente, limitada a um número  $2\nu$  de símbolos, o que possibilita a sua modelagem matemática.

Uma das possíveis abordagens para equalização de baixa complexidade de um sistema que emprega sinalização FTN é a equalização no domínio da frequência. Um aspecto importante é que a sua complexidade não aumenta com a memória do canal, mas sim com a quantidade de símbolos por bloco que é enviada, e, portanto, torna-se um bom mecanismo para ser utilizado quando há um elevado *delay spread*.

Neste Capítulo, pretende-se analisar o desempenho deste sistema, considerando, como critério, a BER (probabilidade de erro de *bit*, do inglês, *bit error probability*). Para isso, na Seção 4.2 é estabelecido o modelo do sistema FTN que será utilizado para estudo e na Seção 4.3 é apresentado o algoritmo da FDE. Para analisar o funcionamento da FDE, suas vantagens e desvantagens, a Seção 4.4 aborda a complexidade computacional desse método, a 4.5 trata das penalidades que são introduzidas, principalmente relativas à taxa de transmissão, e na Seção 4.6 é feita uma análise do desempenho dos sistemas de comunicação, utilizando parâmetros com diferentes valores. Além disso, a Seção 4.7 explora a distância mínima para esse tipo de transmissão e a Seção 4.8, o erro de modelagem que é gerado. Por fim, a Seção 4.9 conclui o assunto.

## 4.2 Modelagem do Sistema

Considere o sistema de comunicação ilustrado na Fig. 4.1. No transmissor, cada símbolo é gerado independentemente e é obtido a partir dos esquemas de modulação M-PSK (modulação por chaveamento de fase, do inglês, *phase-shift keying*) ou M-QAM (modulação de amplitude em quadratura, do inglês, *quadrature amplitude modulation*). Os símbolos  $s_n$ , em que o subíndice  $n$  refere-se ao  $n$ -ésimo símbolo, passam por um filtro de transmissão  $g(t)$ , antes de serem enviados ao canal AWGN. Assume-se que  $g(t)$  é um pulso ortogonal em  $T_s$ , limitado à banda  $B$  Hz, conforme o diagrama de blocos da Fig. 4.1.

Para que a transmissão seja livre de interferência intersimbólica, o critério de Nyquist, demonstrado na Seção 2.5, estabelece que os pulsos  $g(t)$  devem ser ortogonais entre si e que a taxa máxima de transmissão (Taxa de Nyquist) deve ser dada por  $1/T_s = 2B$  símbolos por segundo.

Com o objetivo de aumentar a taxa de transmissão, os símbolos passam a ser gerados a cada intervalo de tempo  $T = \alpha T_s$ , em que  $\alpha$  é o fator de compressão que assume valores entre 0 e 1. Dessa maneira, são enviados mais símbolos, considerando o mesmo intervalo de tempo, do que no método tradicional. Naturalmente, a transmissão de símbolos acima da taxa de Nyquist, isto é, uma transmissão com taxa maior do que  $2B$ , introduz ISI, conforme o visto na Seção 2.5.

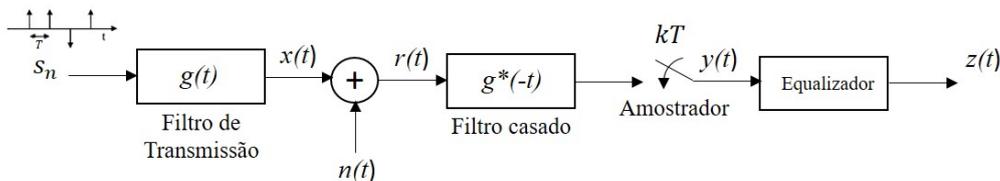


Figura 4.1: Esquemático simplificado do sistema faster-than-Nyquist. Adaptado de [4].

O sinal  $x(t)$ , ilustrado na Fig. 4.1, é dado pela convolução entre o trem de impulsos que contém os símbolos  $s_n$  com o pulso de transmissão. No receptor, o sinal amostrado, após passar pelo filtro casado, pode ser expresso pela Eq.(4.1), em que  $h(t) = \int g(\tau)g^*(\tau - t)d\tau$  e a contribuição do ruído é dada por  $\eta(t) = \int n(\tau)g^*(\tau - t)d\tau$ . O ruído branco é representado por  $n(t)$ , sendo uma variável aleatória com distribuição gaussiana com média nula e variância  $N_0$ ,  $\mathcal{CN}(0, N_0)$ . A energia média

dos símbolos transmitidos é dada por  $E_s$  [19].

$$y(t) = \sqrt{E_s} \sum_n s_n h(t - nT) + \eta(t). \quad (4.1)$$

Assumindo sincronismo perfeito entre o transmissor e o receptor, o  $k$ -ésimo sinal amostrado no receptor pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} y_k &= y(kT) \\ &= \sqrt{E_s} \sum_n s_n h(kT - nT) + \eta(kT). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Isolando, na Eq.(4.2), o símbolo que deseja-se detectar, tem-se:

$$y_k = \sqrt{E_s} s_k h(0) + \sqrt{E_s} \sum_{n \neq k} s_n h(kT - nT) + \eta(kT). \quad (4.3)$$

Segundo o discutido na Seção 3.3, apesar do canal ser AWGN, após o ruído passar pelo filtro casado  $g^*(-t)$ , ele torna-se colorido e, assim, apresenta uma autocorrelação não-nula dada por  $\mathbb{E}[\eta(mT)\eta^*(nT)] = N_0 h(mT - nT)$ .

O primeiro termo da Eq.(4.3) corresponde ao símbolo de interesse no instante  $kT$ , o segundo caracteriza a contribuição da ISI e o terceiro é a componente do ruído. Assim, deve-se encontrar um mecanismo de equalização que seja capaz de reduzir a contribuição do segundo e terceiro termos no instante de decisão.

### 4.3 Equalização no Domínio da Frequência

O método de equalização estudado para compensar a ISI causada pela sinalização FTM é o FDE (equalização no domínio da frequência, do inglês *frequency domain equalization*), conforme o desenvolvido em [19]. Nesse esquema, considera-se que a memória do canal é dada pelo parâmetro  $2\nu$ , ou seja, a influência do  $k$ -ésimo símbolo perdura do símbolo  $(k - \nu)$  até o  $(k + \nu)$ , em que  $\nu$  é um número positivo. Os símbolos modulados são agrupados em blocos de  $N$  e adiciona-se, após cada bloco, um prefixo cíclico (do inglês, *cyclic prefix*, CP) de comprimento  $2\nu$ , os quais correspondem aos  $2\nu$  primeiros símbolos do bloco. Assim, o receptor recebe um bloco de tamanho  $N + 2\nu$  e remove os primeiros e os últimos  $\nu$  símbolos. Para ilustrar esse esquema, considerou-se o exemplo de um bloco com  $N = 8$  e  $\nu = 2$ , conforme a Fig. 4.2. Esse exemplo será utilizado diversas vezes durante este Capítulo.

Este prefixo cíclico tem uma função semelhante ao prefixo cíclico utilizado no OFDM (multiplexação por divisão de frequências ortogonais, do inglês, *orthogonal frequency division multiplexing*). Procura-se a simplificação dos processos de estimação do canal e equalização no domínio da frequência, valendo-se das propriedades das matrizes circulantes, como será visto mais adiante. A estrutura circulante é obtida, justamente, a partir da repetição de uma parte do bloco de símbolos e, daí, a importância do CP.

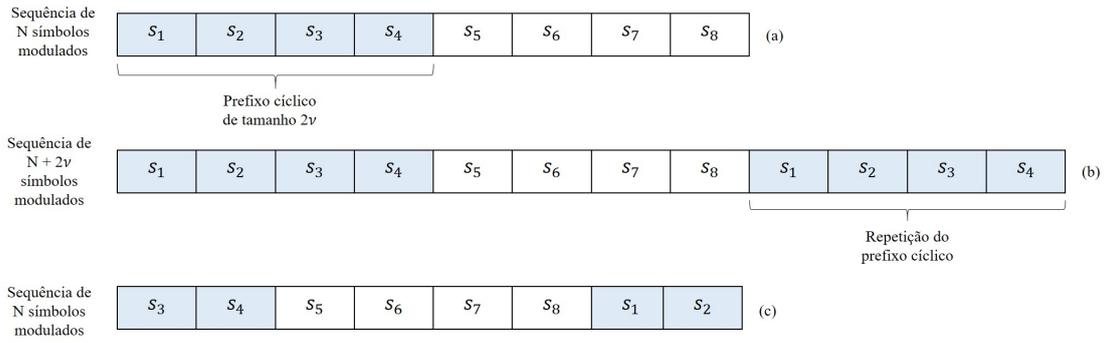


Figura 4.2: Esquemático simplificado do mecanismo de CP para  $N = 8$  e  $\nu = 2$ . Sequência (a) representa os símbolos gerados. Sequência (b), os símbolos enviados, após o acréscimo do prefixo cíclico. Sequência (c), os símbolos recebidos, após a retirada do prefixo cíclico.

O sinal recebido, após a retirada do prefixo cíclico, pode ser aproximado pela relação matricial:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= [y_0, \dots, y_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N \\ &= \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que  $\mathbf{s} = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$  é o bloco de de símbolos transmitidos correspondente à sequência (a) da Fig. 4.2 e  $\mathbf{n} = [\eta_0, \dots, \eta_{N-1}]^T \in \mathbb{C}^N$  representa as componentes de ruído que foram adicionadas pelo canal, após o filtro casado.

A matriz  $\mathbf{H}$  é uma matriz  $N \times N$  que apresenta uma estrutura circulante, isto é, cada linha  $k$ , com  $k = 1, \dots, N$ , é formada pelo deslocamento cíclico de  $k - 1$  posições de uma mesma lista de elementos a qual é dada pela primeira linha [25]. Perceba que a matriz (4.5) corresponde a um caso especial das matrizes Toeplitz, especificadas em (3.23).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & h_0 & h_1 & & \\ h_{N-2} & h_{N-1} & h_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ h_1 & & & \dots & h_0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Os autovalores de uma matriz circulantes corresponde à DFT (transformada Discreta de Fourier, do inglês, *discrete Fourier transform*) da sua primeira linha e, conseqüentemente, a primeira linha da matriz corresponde à DFT inversa dos autovalores. É possível, também, decompor uma matriz circulante  $\mathbf{H}$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^h, \quad (4.6)$$

em que  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  corresponde aos autovetores de  $\mathbf{H}$  e o elemento da linha  $l$  e coluna  $c$  de  $\mathbf{Q}$  pode ser calculado por  $q_{(l,c)} = (1/\sqrt{N}) \exp[-2\pi j(k-1)(l-1)/N]$ . O símbolo  $\{^T\}$  corresponde ao operador conjugado e o  $\{^h\}$ , ao operador conjugado transposto também chamado de Hermitiano.

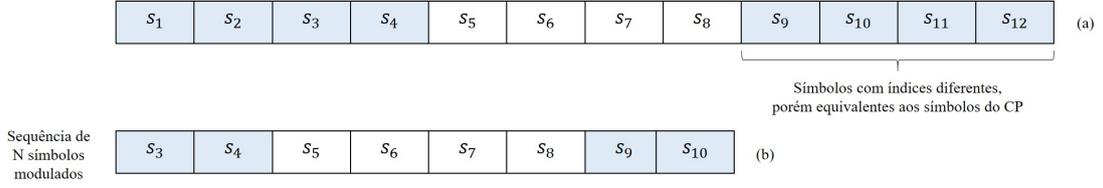


Figura 4.3: Esquemático simplificado do mecanismo de CP com destaque para os índices dos símbolos. Sequência (a) representa os símbolos enviados, após o acréscimo do prefixo cíclico. Sequência (b) representa os símbolos recebidos, após a retirada do prefixo cíclico.

A matriz  $\mathbf{H}$  é obtida a partir da Eq.(4.3), considerando a energia média de símbolo  $E_s$  unitária uma vez que  $E_s = E_b l$  e utiliza-se um esquema de modulação BPSK ( $l = 1$  e  $E_b = 1$ ).

Antes de prosseguir, entretanto, faz-se necessário um esclarecimento a respeito dos subíndices utilizados. Na Fig. 4.2(a), tem-se a sequência de símbolos modulados que foram gerados. Note que o símbolo  $s_1$  corresponde ao primeiro símbolo gerado, o  $s_2$ , ao segundo e, assim por diante, até o oitavo símbolo gerado  $s_8$ . Antes de serem enviados, a sequência recebe mais  $2\nu$  símbolos, os quais correspondem ao CP, conforme a sequência (b) da Fig. 4.2.

Contudo, ao acrescentar o prefixo cíclico, o primeiro símbolo repetido ( $s_1$ ) torna-se o nono símbolo ( $s_9$ ) a ser transmitido, conforme a Fig. 4.3(a). No receptor, após a retirada do CP, o primeiro símbolo não corresponde mais ao  $s_1$ , mas sim ao  $s_3$ , assim como o último não corresponde mais ao  $s_8$ , mas sim ao  $s_{10}$ , como na Fig. 4.3(b). Observe que os símbolos  $s_9$  e  $s_{10}$  são iguais aos símbolos  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente, de maneira que as Figs. 4.2(c) e 4.3(b) são equivalentes.

A partir da Eq.(4.3), para  $N = 8$  e  $\nu = 2$ , os símbolos podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
s_3 &= s_1 h(2T) + s_2 h(T) + s_3 h(0) + \dots + s_9 h(-6T) + s_{10} h(-7T) + s_{11} h(-8T) + s_{12} h(-9T) \\
s_4 &= s_1 h(3T) + s_2 h(2T) + s_3 h(T) + \dots + s_9 h(-5T) + s_{10} h(-6T) + s_{11} h(-7T) + s_{12} h(-8T) \\
s_5 &= s_1 h(4T) + s_2 h(3T) + s_3 h(2T) + \dots + s_9 h(-4T) + s_{10} h(-5T) + s_{11} h(-6T) + s_{12} h(-7T) \\
s_6 &= s_1 h(5T) + s_2 h(4T) + s_3 h(3T) + \dots + s_9 h(-3T) + s_{10} h(-4T) + s_{11} h(-5T) + s_{12} h(-6T) \\
s_7 &= s_1 h(6T) + s_2 h(5T) + s_3 h(4T) + \dots + s_9 h(-2T) + s_{10} h(-3T) + s_{11} h(-4T) + s_{12} h(-5T) \\
s_8 &= s_1 h(7T) + s_2 h(6T) + s_3 h(5T) + \dots + s_9 h(-T) + s_{10} h(-2T) + s_{11} h(-3T) + s_{12} h(-4T) \\
s_9 &= s_1 h(8T) + s_2 h(7T) + s_3 h(6T) + \dots + s_9 h(0) + s_{10} h(-T) + s_{11} h(-2T) + s_{12} h(-3T) \\
s_{10} &= s_1 h(9T) + s_2 h(8T) + s_3 h(7T) + \dots + s_9 h(T) + s_{10} h(0) + s_{11} h(-T) + s_{12} h(-2T)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora, para encontrar a matriz  $\mathbf{H}$ , basta agrupar, em cada linha, os somatórios que apresentam termos em comum. Para isso, deve ser levado em consideração os símbolos que apresentam subíndices diferentes, mas que são equivalentes, como discutido previamente. A matriz  $\mathbf{H}$  resultante é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} h(2T) + h(-6T) & h(T) + h(-7T) & h(0) + h(-8T) & h(-T) + h(-9T) & h(-2T) & h(-3T) & h(-4T) & h(-5T) \\ h(3T) + h(-5T) & h(2T) + h(-6T) & h(T) + h(-7T) & h(0) + h(-8T) & h(-T) & h(-2T) & h(-3T) & h(-4T) \\ h(4T) + h(-4T) & h(3T) + h(-5T) & h(2T) + h(-6T) & h(T) + h(-7T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) & h(-3T) \\ h(5T) + h(-3T) & h(4T) + h(-4T) & h(3T) + h(-5T) & h(2T) + h(-6T) & h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) \\ h(6T) + h(-2T) & h(5T) + h(-3T) & h(4T) + h(-4T) & h(3T) + h(-5T) & h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) \\ h(7T) + h(-T) & h(6T) + h(-2T) & h(5T) + h(-3T) & h(4T) + h(-4T) & h(3T) & h(2T) & h(T) & h(0) \\ h(8T) + h(0) & h(7T) + h(-T) & h(6T) + h(-2T) & h(5T) + h(-3T) & h(4T) & h(3T) & h(2T) & h(T) \\ h(9T) + h(T) & h(8T) + h(0) & h(7T) + h(-T) & h(6T) + h(-2T) & h(5T) & h(4T) & h(3T) & h(2T) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Considerando que a memória do canal é finita, símbolos distantes (para a direita ou para a esquerda) de mais de  $\nu$  unidades de tempo, em relação ao símbolo que deseja-se detectar, possuem a sua interferência zerada. Portanto,  $h(qT) = 0$ , para  $|q| > \nu = 2$  e a matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) \\ h(-2T) & 0 & 0 & 0 & h(2T) & h(T) & h(0) & h(-T) \\ h(-T) & h(-2T) & 0 & 0 & 0 & h(2T) & h(T) & h(0) \\ h(0) & h(-T) & h(-2T) & 0 & 0 & 0 & h(2T) & h(T) \\ h(T) & h(0) & h(-T) & h(-2T) & 0 & 0 & 0 & h(2T) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

a qual claramente apresenta uma estrutura circulante. Os elementos  $h(0)$  correspondem ao pulso do símbolo que deseja-se detectar. Como foi considerado, na exemplificação, um valor de  $\nu = 2$ , nota-se que contribuem para  $\hat{y}$ , dado pela Eq.(4.4), apenas os dois pulsos que estão direita e à esquerda de  $h(0)$ , os quais justamente provocam interferência intersimbólica e correspondem à memória do canal. A influência de todos os outros símbolos é zerada.

Vale ressaltar que o pulso utilizado é um pulso que corresponde a uma função par e, assim,  $h(t) = h(-t)$ . Além disso, percebe-se que a multiplicação de  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{s}$  fornece a sequência  $(c)$  da Fig. 4.2, ou seja, nessa multiplicação já está incluída as operações de acréscimo e retirada do CP do sinal mensagem.

A matriz da Eq.(4.9) corresponde à matriz  $\mathbf{H}$  para  $N = 8$  e  $\nu = 2$ . Para encontrar a matriz  $\mathbf{H}$  geral, basta lembrar que ela é circulante e, dessa maneira, pode ser completamente definida a partir da sua primeira linha. Após encontrar a primeira linha, deve-se deslocá-la para obter as linhas restantes. A primeira linha  $h_{(1)}$  é um vetor de dimensão  $1 \times N$  cujos coeficientes são definidos pela Eq.(4.10), encontrada a partir da generalização da Eq.(4.3).

$$h_{(1)} = [h(\nu T), \dots, h(0), \dots, h(-\nu T), 0, \dots, 0] \quad (4.10)$$

A matriz  $\mathbf{\Lambda}$  da Eq.(4.6) é uma matriz diagonal cujo elemento  $(k, k)$  está associado ao  $k$ -ésimo coeficiente FFT (transformada rápida de Fourier, do inglês, *fast Fourier transform*) da primeira

linha da matriz  $\mathbf{H}$ , como demonstrado em [26]. Como esta é uma matriz circulante, os elementos da diagonal de  $\mathbf{\Lambda}$  equivalem aos seus autovalores.

O sinal recebido no domínio do tempo, após a retirada do prefixo cíclico, corresponde à sequência (c) da Fig. 4.2. Para transformá-lo em um sinal no domínio da frequência, basta aplicar nele a DFT, o que corresponde a multiplicá-lo por  $\mathbf{Q}^h$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_f &\approx \mathbf{Q}^h \hat{\mathbf{y}} \\
&= \mathbf{Q}^h (\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}) \\
&= \mathbf{Q}^h (\mathbf{Q}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^h \mathbf{s} + \mathbf{n}) \\
&= \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}_f + \mathbf{n}_f,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

em que  $\mathbf{s}_f$  e  $\mathbf{n}_f$  correspondem, respectivamente, aos vetores do sinal e ruído no domínio da frequência. Nesta manipulação, foi utilizado o conhecimento de que  $\mathbf{Q}$  é uma matriz unitária e, portanto, tem-se  $\mathbf{Q}^h \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

Utiliza-se o equalizador MMSE aplicado ao domínio da frequência (MMSE-FDE). Ele é representado pela matriz diagonal  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , cujos elementos podem ser encontrados a partir da Eq.(4.12) e são equivalentes ao demonstrado na Seção 2.6.1.

$$w_{(i,i)} = \frac{\lambda_{(i,i)}^*}{(|\lambda_{(i,i)}|^2 + N_0)} \tag{4.12}$$

Após a eliminação da ISI, deve-se retornar ao domínio do tempo pela multiplicação por  $\mathbf{Q}^T$ . Finalmente, tem-se o vetor do sinal recuperado no receptor  $\hat{\mathbf{s}}$  dado pela Eq.(4.13). Essas operações são implementadas eficientemente ao explorar a estrutura diagonal de  $\mathbf{W}$ , como em [19].

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{y}_f = \mathbf{Q}^T \mathbf{W} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{s}_f + \mathbf{n}_f) \tag{4.13}$$

A Fig.4.4 representa o diagrama de blocos do sistema de transmissão e recepção de um sistema FTN com os seus principais componentes. A sequência de *bits* é mapeada em símbolos  $\{-1, 1\}$  e a sequência de símbolos é dividida em blocos de tamanho  $N$ . A cada bloco, acrescenta-se um CP e cada símbolo é transformado em um sinal analógico, a partir da sua multiplicação com o pulso  $g(t)$ . O somatório de todos os  $N + 2\nu$  pulsos, é enviado ao canal, com sinalização FTN. Após passar pelo canal AWGN, o sinal recebido, o qual equivale ao sinal transmitido adicionado de ISI e ruído, passa por um filtro casado. Em seguida, amostra-se o sinal recebido e tiram-se os pulsos equivalentes aos símbolos do CP e forma-se o sinal representado pelo vetor  $\hat{\mathbf{y}}$  que é resultado do somatório de  $N$  pulsos, de ruído e de ISI. É realizada a FFT desse sinal e o sinal resultante, representado pelo vetor  $\mathbf{y}_f$  no domínio da frequência, vai para o bloco do equalizador MMSE-FDE. Após a equalização, é feita a IFFT (transformada rápida de Fourier inversa, do inglês, *inverse fast Fourier transform*) para retornar para o domínio do tempo e o sinal caracterizado pelo vetor  $\mathbf{z}$ , é, enfim, demodulado.

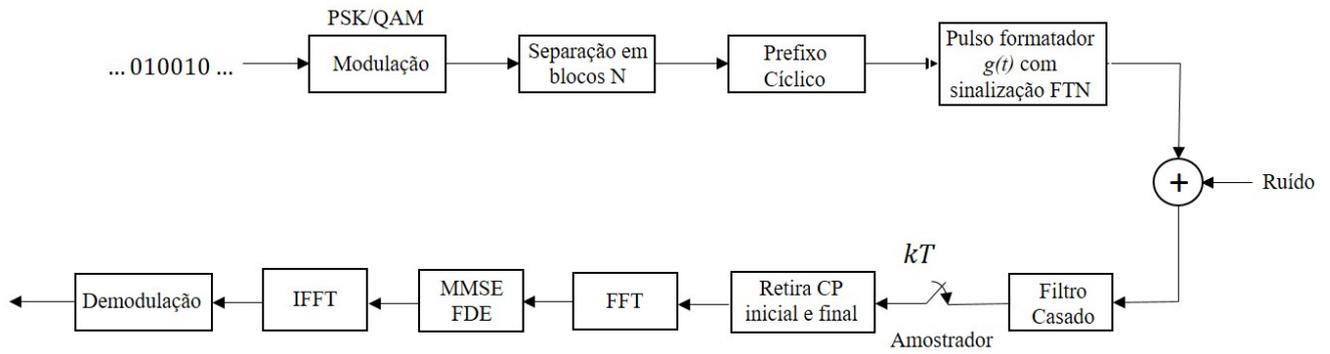


Figura 4.4: Diagrama de blocos do transmissor e receptor de um sistema FTN que utiliza equalização no domínio da frequência.

## 4.4 Complexidade Computacional

Como discutido previamente, o aumento da taxa de transmissão, devido à diminuição do intervalo de símbolo, gera, propositadamente, ISI. Essa interferência aumenta a complexidade do demodulador, o qual deve encontrar mecanismos para detecção ótima do sinal recebido.

Quanto mais espalhado em relação à sua janela temporal um símbolo estiver, maior é a ISI gerada, ou seja, quanto maior o valor de  $\nu$ , maior é a interferência que um símbolo gera no outro. Conseqüentemente, maior é a complexidade de demodulação uma vez que ela cresce exponencialmente com o tamanho da memória do canal, quando considerada uma equalização no domínio do tempo, como o algoritmo de Viterbi, por exemplo.

A equalização no domínio da frequência, por sua vez, não apresenta uma complexidade dependente da memória do canal o que a configura como uma solução preferível em cenários em que o *delay spread* é muito elevado e há a necessidade de equalizadores com muitos coeficientes. Como é o caso, por exemplo, de sistemas que empregam FTN.

Na FDE, a complexidade do demodulador é imposta, predominantemente, pelo tamanho do bloco  $N$  uma vez que é realizada a FFT. A tendência natural, então, seria tentar diminuir o valor de  $N$  o tanto quanto possível. Entretanto, essa tática acabaria por diminuir muito a taxa de transmissão de *bits* úteis e a eficiência espectral, como será visto na Seção 4.5. Assim, deve-se escolher um valor de  $N$  grande o suficiente para não comprometer exageradamente o desempenho do sistema, mas pequeno o suficiente para não aumentar a complexidade e o tempo de demodulação.

Como alguns passos da equalização no domínio da frequência consistem em realizar as operações FFT e IFFT, outro requisito para o valor de  $N$  é que ele seja uma potência de 2 para otimizar as operações. Dessa maneira, escolheu-se o valor de  $N = 1024$  para a análise do desempenho do sistema, como será melhor justificado na Seção 4.5.

Vale ressaltar também que a complexidade do sistema mantém-se inalterada quanto ao tamanho da constelação  $M$ .

## 4.5 Penalidades

A facilidade de implementação introduzida pela utilização de um prefixo cíclico traz como consequência a transmissão de *bits* que não são, de fato, informação. Dessa maneira, há uma redução da taxa de transmissão de *bits* de informação  $R_{b-info}$  a qual é dada por:

$$R_{b-info} = R_b \frac{N}{N + 2\nu}, \quad (4.14)$$

em que  $N$  é o tamanho do bloco,  $\nu$  é a memória do canal e  $R_b$  é a taxa de transmissão de *bits* do sistema, considerando tanto *bits* de informação como de CP. Note que o termo  $P_d = N/(N + 2\nu)$  representa a perda de taxa de devido à inserção do CP.

A eficiência espectral  $\eta_s$  é definida como:

$$\eta_s = \frac{R_{b-info}}{B}, \quad (4.15)$$

em que  $B$  é a banda ocupada. Sabendo ainda que a banda ocupada é dada pela Eq. (2.20) e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} B &= (1 + \beta) R_s \alpha \\ &= (1 + \beta) \frac{R_b}{l} \alpha. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo a Eq.(4.16) na Eq.(4.15), tem-se:

$$\eta_s = \left( R_b \frac{N}{N + 2\nu} \right) \left( \frac{1}{(1 + \beta) \frac{R_b}{l} \alpha} \right), \quad (4.17)$$

em que  $\beta$  é o fator de *roll-off* e  $l$  é dado por  $\log_2 M$ , sendo  $M$  a ordem da modulação. A Eq.(4.17) pode ser simplificada, obtendo-se:

$$\eta_s = \frac{N}{N + 2\nu} \frac{1}{\alpha} \frac{l}{(1 + \beta)} \text{ [bits/s/Hz]}. \quad (4.18)$$

Além da penalidade de taxa e eficiência espectral, existe também a penalidade de potência a qual corresponde a  $10 \log_{10}[(N + 2\nu)/N]$  dB. Esses efeitos negativos tornam-se desprezíveis à medida em que aumenta-se o tamanho do bloco  $N$  pois faz o termo de redução  $N/(N + 2\nu)$  tender a 1. Isso ocorre, de maneira semelhante, com o OFDM com SC (portadora única, do inglês *single-carrier*) combinado com FDE o qual foi adotado no padrão LTE (do inglês, *Long Term Evolution*) [19].

A escolha de um valor de  $N = 1024$ , considerando  $\nu = 10$  e  $\nu = 1$  (que são os valores utilizados para análise do desempenho na Seção 4.6), resulta em um termo de redução  $P_d$  de, respectivamente, 99,81% e 98,08%, os quais estão bem próximos de 100%. Assim, a penalidade introduzida com  $N = 1024$  é inferior à vantagem de redução do custo computacional.

## 4.6 Desempenho

O desempenho do sistema baseia-se na relação entre BER e  $E_b/N_0$ . Assim, apresenta melhor desempenho aquele sistema que, para uma dada BER, necessite de uma menor relação  $E_b/N_0$  ou o sistema que, para um dado  $E_b/N_0$ , possua a menor BER, segundo o discutido na Seção 2.8.1. A métrica empregada é  $E_b/N_0$  e não  $E_s/N_0$  para levar em consideração a perda proporcionada pelo acréscimo do CP, conforme o analisado na Seção 4.5, e permitir uma melhor comparação em relação ao cenário no qual não há sinalização FTN ( $\alpha = 0$ ).

Considera-se para este primeiro estudo do desempenho do sistema, um pulso  $h(t)$  da família do cosseno levantado que possui um fator de *roll-off* variando de  $\beta = 0,3$  a  $0,5$ . A modulação empregada é BPSK ( $M = 2$  e  $l = 1$ ) e o receptor emprega FDE no seu sistema de recepção. O sistema foi analisado sob duas condições:  $\nu = 1$  e  $\nu = 10$ , enquanto o tamanho do bloco  $N$  foi mantido constante e igual a 1024, conforme o justificado nas seções 4.4 e 4.5. Além disso, o transmissor e o receptor são equipados com uma única antena e considera-se um canal AWGN, conforme o desenvolvido na Seção 4.2. Os parâmetros de simulação também podem ser conferidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.5 .

Parâmetro	Valor
$E_b/N_0$	0 a 18 dB
Fator de compressão $\alpha$	0,8
Fator de <i>roll-off</i> $\beta$	0,3; 0,4; 0,5
Memória do canal $\nu$	1 e 10
Tamanho do bloco $N$	1024
Ordem da modulação $M$	2

A Fig 4.5 apresenta as curvas que relacionam a probabilidade de erro de *bit* e a razão  $E_b/N_0$  do sistema, considerando um único fator de compressão igual a  $\alpha = 0,8$ . Além disso, há a presença também a curva do desempenho do sistema para a situação em que  $\alpha = 0$  e no qual foi empregado um detector ML (máxima verossimilhança, do inglês, *maximum likelihood*). Essa curva, ilustrada pelos pontos "x", representa a situação em que emprega-se a sinalização de Nyquist, sem a presença de ISI, e determina o limite inferior da BER.

A partir da Fig. 4.5, é possível realizar duas análises principais. Primeiramente, as curvas com maiores fatores de *roll-off* encontram-se mais próximas do limite estabelecido. Este comportamento pode ser explicado a partir de três abordagens distintas.

O critério de Nyquist para ISI nula propõe um sistema em que o espectro do sinal que carrega a informação de um símbolo é sobreposto com o espectro dos sinais dos símbolos vizinhos, conforme o desenvolvido na Seção 2.5. Assim, quanto maior o fator de *roll-off*, maior é a banda ocupada pelo sinal e, conseqüentemente, mais próximo da sobreposição das réplicas o sistema se encontra. Essa aproximação de espectros significa se aproximar do caso em que a ISI é nula e, portanto, uma

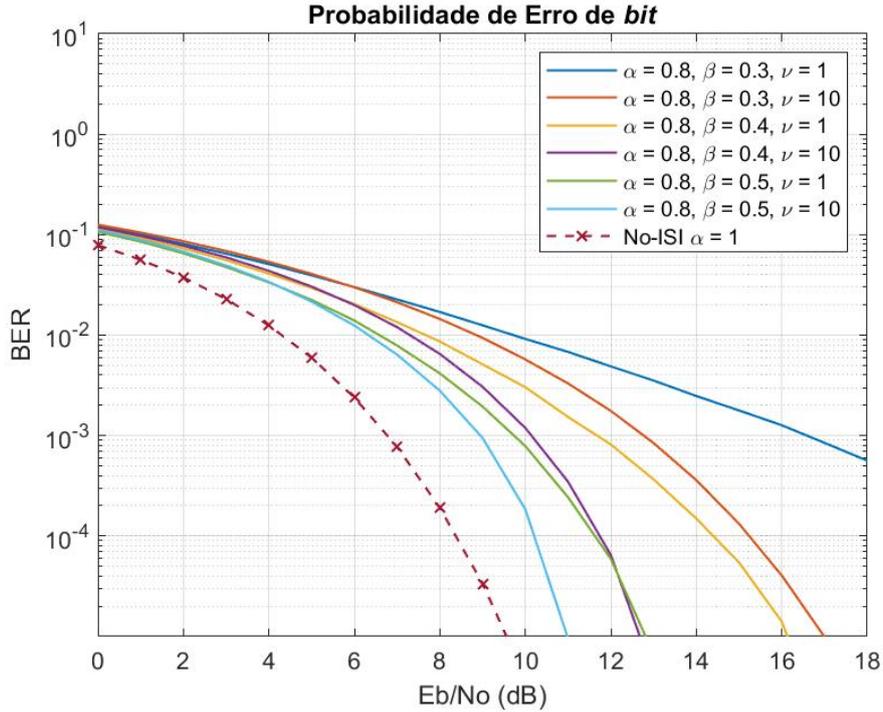


Figura 4.5: Desempenho do sistema FTN com FDE, varia-se o fator de *roll-off* de  $\beta = 0,3$  a  $0,5$ . Considerou-se o tamanho do CP igual a 1 e 10 e um único fator de compressão  $\alpha = 0,8$ .

melhora de desempenho. Uma relação análoga pode ser feita para o domínio do tempo. Quanto maior a banda ocupada pelo sinal na transmissão de um símbolo, mais rápido o símbolo se extingue no tempo e, logo, menor é a sua duração. Da mesma maneira, menor é a ISI gerada e melhor é o desempenho do sistema.

Esse resultado também pode ser obtido matematicamente. Conforme visto na Seção 4.3, a ISI é modelada pela matriz  $\mathbf{H}$ . Para fins de simplificação, mas sem perda de generalidade, considere apenas a primeira linha de  $\mathbf{H}$  do exemplo ilustrado na Fig. 4.2 ( $N = 8, \nu = 2$ ), a qual é obtida a partir da Eq.(4.9).

$$h_{(1)} = [h(2T), h(T), h(0), h(-T), h(-2T), 0, 0, 0] \quad (4.19)$$

A primeira linha de  $\mathbf{H}$  é dada por  $h_{(1)}^1$  na situação em que  $\alpha = 0,8, \beta = 0,3$  e  $\nu = 10$  e por  $h_{(1)}^2$  para  $\alpha = 0,8, \beta = 0,5$  e  $\nu = 10$ , as quais correspondem às curvas laranja e azul claro, respectivamente. Assim, é possível mostrar, matematicamente, a diferença de intensidade da ISI, comparando as duas situações.

$$h_{(1)}^1 = [-0,1515, 0,2215, 1, 0,2215, -0,1515, 0, 0, 0] \quad (4.20)$$

$$h_{(1)}^2 = [-0,0981, 0,2008, 1, 0,2008, -0,0981, 0, 0, 0] \quad (4.21)$$

Deve-se ressaltar que a influência que um símbolo vizinho gera no símbolo que deseja-se amostrar ( $s_3$ ) é superior na Eq.(4.20) do que na Eq.(4.21) uma vez que  $|-0,1515| > |0,0981|$  e  $|0,2215| > |0,2008|$  o que, de fato, implica em uma maior ISI no sistema com menor  $\beta$  e, portanto, um pior desempenho.

A segunda análise decorre da comparação entre curvas com prefixos cíclicos com tamanhos diferentes. Na Fig.(4.5), para um mesmo fator de *roll-off*, as curvas com  $\nu = 10$  apresentam um desempenho melhor quando comparadas com as curvas com  $\nu = 1$ . Teoricamente, a ISI que um símbolo transmitido por um sistema FTN gera é infinita. Assim, utilizar um valor elevado de  $\nu$  significa que estão sendo consideradas, na equalização, interferências entre símbolos mais distâtes e, conseqüentemente, entre mais símbolos. Logo, mais ISI está considerada e mitigada, fato este que diminui a probabilidade de erro para uma dada relação  $E_b/N_0$ .

Tabela 4.2: Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.6 .

Parâmetro	Valor
$E_b/N_0$	0 a 18 dB
Fator de compressão $\alpha$	0,7; 0,75; 0,8
Fator de <i>roll-off</i> $\beta$	0,3; 0,4; 0,5
Memória do canal $\nu$	1 e 10
Tamanho do bloco $N$	1024
Ordem da modulação $M$	2

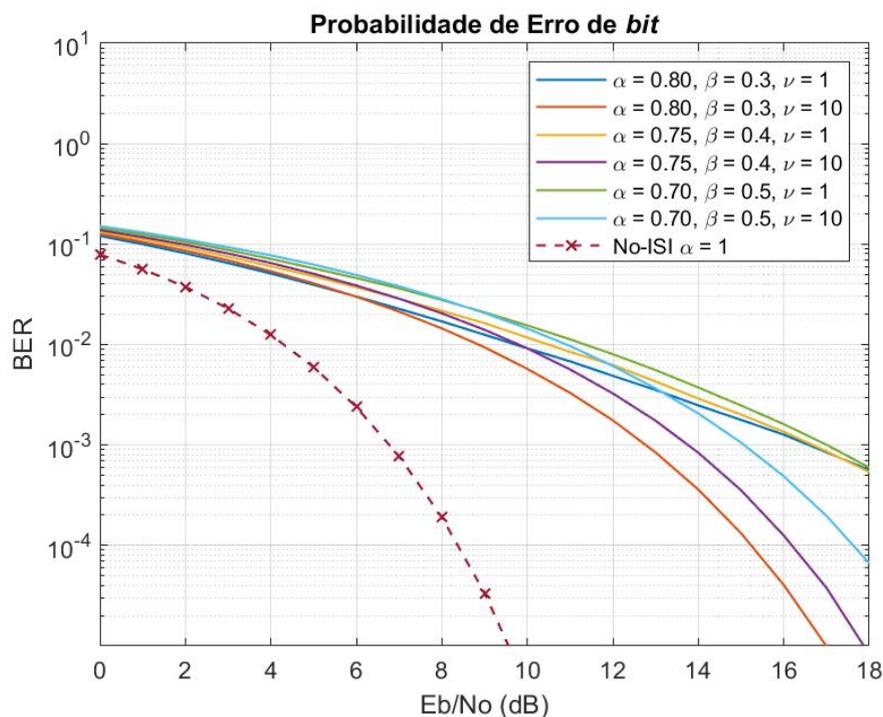


Figura 4.6: Desempenho do sistema FTN com FDE, variando o fator de *roll-off* de 0,3 a 0,5 e o fator de compressão de 0,70 a 0,80. Considerou-se o tamanho do CP igual a 1 e 10.

O gráfico da Fig. 4.6 considera uma variação do fator de compressão  $\alpha$  de 0,7 a 0,8, em passos de 0,05, e o restante de seus parâmetros de simulação são dados na Tab. 4.2. Conforme a Fig. 4.5, as curvas com  $\nu = 10$  da Fig. 4.6 apresentam melhor desempenho quando comparadas às curvas com  $\nu = 1$  que apresentam os mesmos valores de fator de compressão e *roll-off*. Além disso, para menores fatores de compressão, a distância mínima é menor e a probabilidade de erro de *bit* é maior pois mais símbolos são mandados no mesmo intervalo de tempo e, assim, há uma maior ISI. Isto pode ser conferido ao comparar curvas das Fig.(4.5) e (4.6) que apresentam os mesmos  $\nu$  e  $\beta$  e diferentes  $\alpha$ .

A Fig. 4.7 permite a comparação do sistema com o equalizador e sem o equalizador, para o mesmo fator de compressão  $\alpha = 0,8$  e fator de *roll-off*  $\beta = 0,3$ . Para a situação com equalizador,

Tabela 4.3: Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.7 .

Parâmetro	Valor
$E_b/N_0$	0 a 18 dB
Fator de compressão $\alpha$	0,8
Fator de <i>roll-off</i> $\beta$	0,3
Memória do canal $\nu$	1; 50; 512
Tamanho do bloco $N$	1024
Ordem da modulação $M$	2

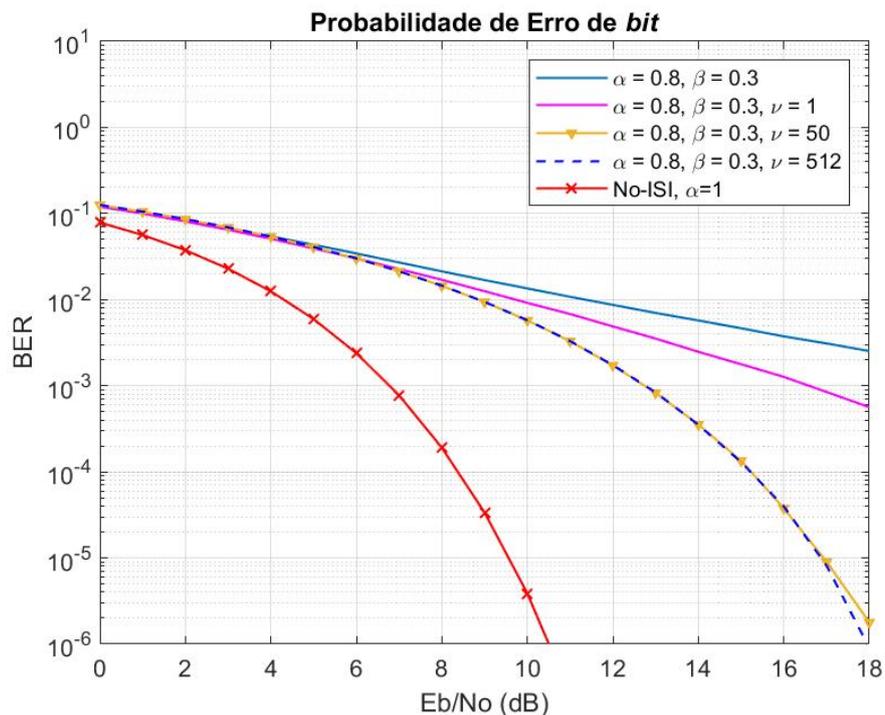


Figura 4.7: Desempenho do sistema FTN sem FDE e com FDE, mantendo fixos o fator de compressão em 0,8 e o fator de *roll-off* em 0,3. Considerou-se três valores distintos de  $\nu = 1, 50$  e 512.

foram considerados três valores diferentes de  $\nu$ ,  $\nu = 1, 50$  e  $\nu = 512$ , conforme a Tabela 4.3. Como esperado, as curvas com equalizador encontram-se mais próximas do limite de BER do que a curva sem equalizador. Assim, a introdução do equalizador proporciona uma melhoria no desempenho do sistema.

Um aspecto interessante a respeito do resultado obtido na Fig.(4.7) é o fato do desempenho, utilizando  $\nu = 50$  e  $\nu = 512$ , ser o mesmo. Isso indica que, ao usar  $\nu = 50$ , todo o acréscimo de ISI já estava sendo considerado na equalização de maneira que aumentar o  $\nu$  não provocou nenhuma melhoria no desempenho. Esse resultado também será analisado na Seção 4.8

Além disso, conforme analisado anteriormente, o aumento de  $\nu$  também contribui para um melhor desempenho. Até mesmo para a situação que considera uma memória de canal curta ( $\nu = 1$ ), o equalizador garante uma menor probabilidade de erro quando comparado com o caso em que ele não é empregado. Entretanto, a consideração de  $\nu = 50$ , apesar de melhorar o desempenho, provoca uma redução na taxa de transmissão pois o termo de redução  $Pd$  passa a valer 91,10% o que é inferior aos valores encontrados na Seção 4.5. Ainda assim, para um fator de compressão de 0,8, o aumento da eficiência espectral para um sistema FTN com FDE e  $\nu = 50$  é de 13,88%.

É possível, dessa maneira, determinar o maior valor de  $\nu$  que ainda proporciona um aumento da eficiência espectral. Para  $N = 1024$  e  $\alpha = 0,8$ , o maior valor de  $\nu$  é 127 o qual provoca um aumento de 0,16%.

É possível observar também que, para a curva sem equalizador, o aumento da potência, a qual pode ser obtida a partir do aumento de  $E_b/N_0$ , não provoca alterações relevantes na probabilidade de erro. Isso prova que o aumento de potência não resolve o problema da ISI e que deve-se, de fato, utilizar um equalizador.

Tabela 4.4: Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.8.

Parâmetro	Valor
$BER$	$10^{-5}$
Fator de compressão $\alpha$	0,75 a 1
Fator de <i>roll-off</i> $\beta$	0,3 a 0,5
Memória do canal $\nu$	1 e 10

Até agora, a  $E_b/N_0$  analisada referia-se a energia dos *bits* enviados considerando o CP. A Fig. 4.8, por sua vez, considera apenas os *bits* de informação transmitidos e, assim, uma  $E_b/N_0$  efetiva. Os parâmetros de simulação deste gráfico podem ser conferidos na Tabela 4.4, o valor do fator de compressão variou de  $\alpha = 0,75$  a 1, em passos de 0,05. A BER foi mantida constante e igual a  $10^{-5}$ .

A linha tracejada da Fig. 4.8 ilustra o limite inferior de  $E_b/N_0$  o qual representa a situação em que não há ISI e  $\alpha = 1$ . Em um cenário com  $\alpha$  próximo de 1, não há qualquer perda significativa de  $E_b/N_0$  (comparação com limite inferior para quando não há ISI). Entretanto, à medida em que diminui-se o fator de compressão, maiores tornam-se as perdas e a necessidade por uma maior relação  $E_b/N_0$  para que se mantenha a mesma BER uma vez que mais interferência está sendo

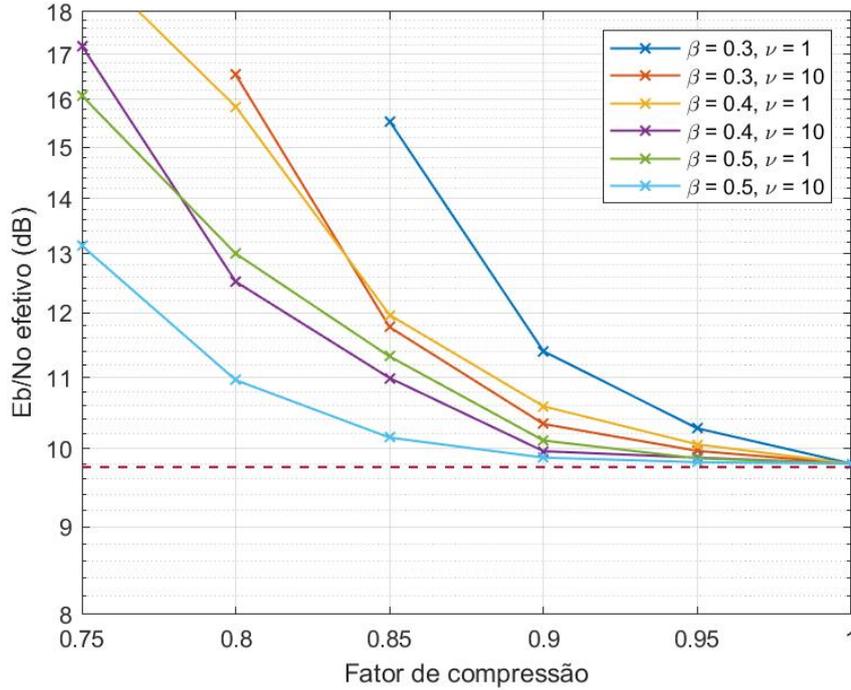


Figura 4.8: Relação entre  $E_b/N_0$  efetiva e o coeficiente de compressão, para um sistema com  $BER = 10^{-5}$ . Detalhe para o limite inferior que ocorre quando  $\alpha = 1$  e não há ISI.

introduzida ao sistema.

## 4.7 Distância Mínima

Conforme visto no capítulo 3, a determinação da distância mínima para sistemas de comunicação que utilizam a sinalização FTN deve considerar o mínimo da distância euclidiana entre dois sinais. Para a sua análise, considerou-se a curva da Fig. 4.5 que apresenta fator de compressão  $\alpha = 0,8$ , fator de *roll-off*  $\beta = 0,3$  e  $\nu = 10$ . Foram investigadas apenas as situações com  $E_b/N_0$  igual a 0 dB, 10 dB e 17 dB as quais estão representadas nas Fig. 4.9, 4.10 e 4.11. Os gráficos destas figuras relacionam a quantidade de blocos de tamanho  $N = 1024$  que apresentam determinado quadrado da distância euclidiana.

É possível perceber que quanto menor a relação  $E_b/N_0$ , maior é a distância euclidiana encontrada nos diversos blocos. Na Fig. 4.9, nenhum bloco foi transmitido completamente sem erro pois não foi encontrada uma distância euclidiana igual a 0. A distância mínima foi de 4 o que corresponde a um erro de apenas um símbolo em qualquer posição do bloco.

Já na Fig. 4.10, houve uma considerável diminuição dos valores da distância euclidiana o que corresponde a uma melhoria do desempenho do sistema, como é observado na Fig. 4.5. Igualmente ao caso anterior, a distância mínima encontrada foi de 4 e todos os blocos apresentaram, pelo menos, erro em um símbolo.

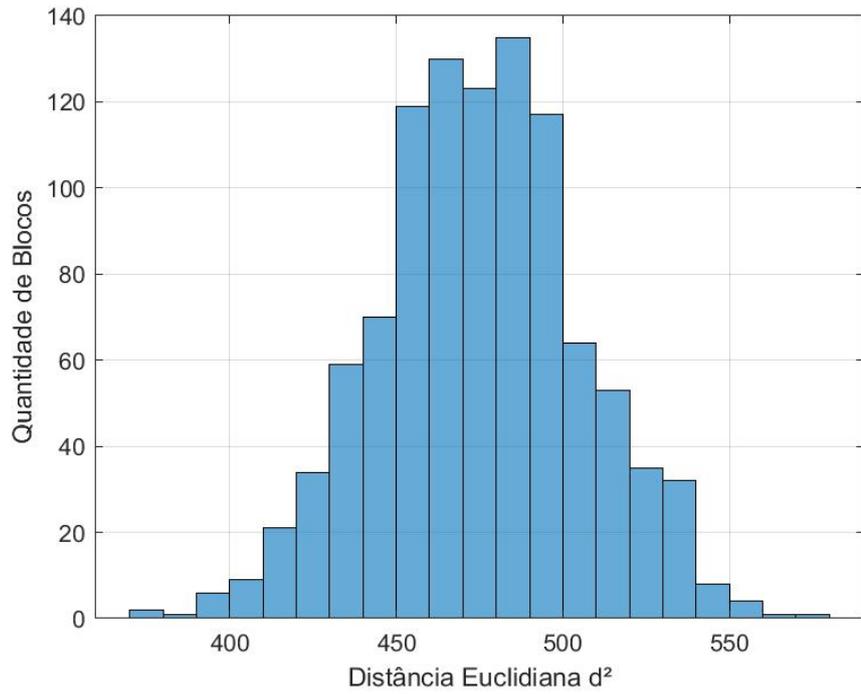


Figura 4.9: Quadrado da distância mínima para a situação com  $\alpha = 0,8$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\nu = 0$  e  $E_b/N_0 = 0$ .

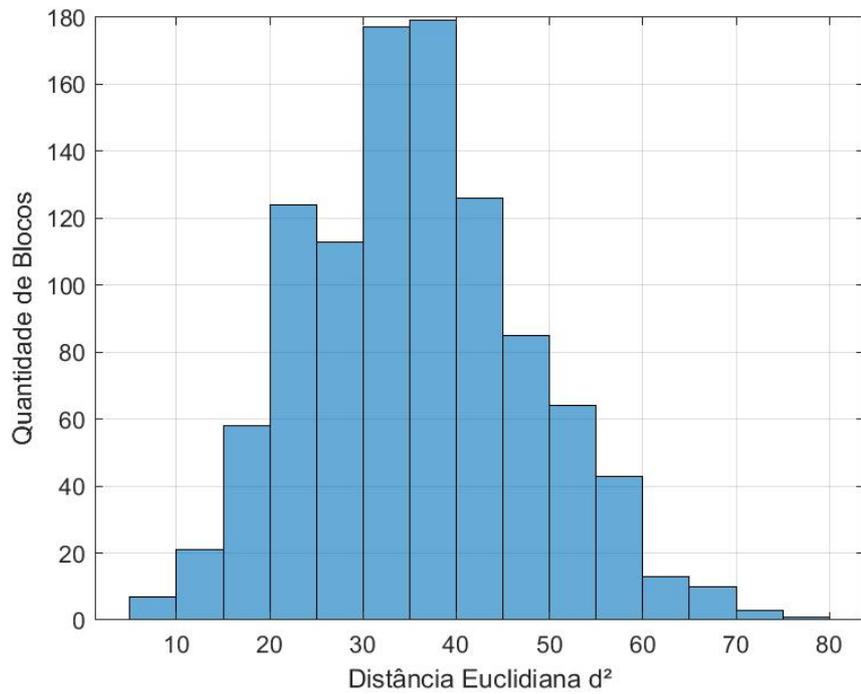


Figura 4.10: Quadrado da distância mínima para a situação com  $\alpha = 0,8$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\nu = 0$  e  $E_b/N_0 = 10$ .

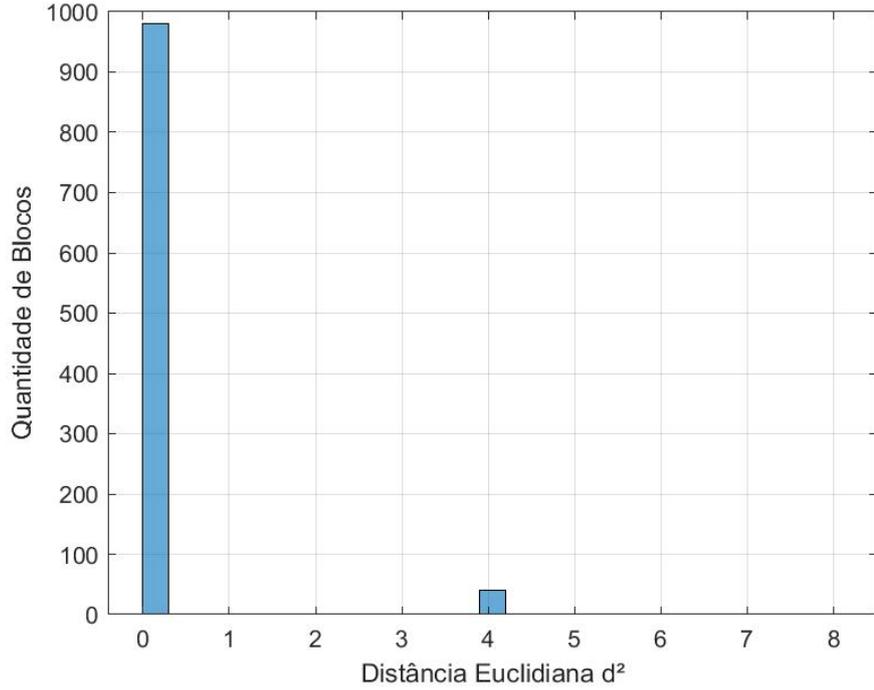


Figura 4.11: Quadrado da distância mínima para a situação com  $\alpha = 0,8$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\nu = 0$  e  $E_b/N_0 = 17$ .

Por fim, para um sistema com  $E_b/N_0 = 17$  dB, o desempenho é substancialmente melhorado em relação aos casos anteriores, como era de se esperar. Na Fig. 4.11, o quadrado da distância mínima encontrado também foi de 4. Entretanto, nesta transmissão, mais de 95% dos blocos foram transmitidos sem erro, isto é,  $d^2 = 0$ .

## 4.8 Erro de Modelagem

Um dos principais pressupostos para a equalização desenvolvida na Seção 4.3 foi a de uma memória do canal  $\nu$  finita, ou seja, um símbolo interfere em um número limitado de outros símbolos. Isso, teoricamente, não ocorre. De acordo com o visto no Capítulo 2, um sinal limitado em banda é ilimitado no tempo. Assim, a influência de um símbolo persiste em todos os símbolos subsequentes.

Na prática, entretanto, a depender do decaimento do pulso formatador, a interferência de um símbolo no outro torna-se cada vez menos relevante à medida em que maior é a distância entre eles, como é o caso do pulso utilizado  $g(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ , conforme o ilustrado na Fig. 2.8. Assim, a suposição original torna-se válida com um pequeno erro de modelagem.

Ainda para o exemplo da Fig. 4.2, para  $N = 8$ , a matriz  $\mathbf{H}$ , obtida da Eq(3.2), que leva em consideração a contribuição que a transmissão de um símbolo gera em todos os demais é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}
h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) & h(-9T) + h(-1T) & h(-10T) + h(-2T) & h(-11T) + h(-3T) & h(-12T) + h(-4T) & h(-13T) + h(-5T) \\
h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) & h(-9T) + h(-1T) & h(-10T) + h(-2T) & h(-11T) + h(-3T) & h(-12T) + h(-4T) \\
h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) & h(-9T) + h(-1T) & h(-10T) + h(-2T) & h(-11T) + h(-3T) \\
h(-3T) + h(5T) & h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) & h(-9T) + h(-1T) & h(-10T) + h(-2T) \\
h(-2T) + h(6T) & h(-3T) + h(5T) & h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) & h(-9T) + h(-1T) \\
h(-1T) + h(7T) & h(-2T) + h(6T) & h(-3T) + h(5T) & h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) & h(-8T) + h(0) \\
h(0) + h(8T) & h(-1T) + h(7T) & h(-2T) + h(6T) & h(-3T) + h(5T) & h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T) & h(-7T) + h(T) \\
h(T) + h(9T) & h(0) + h(8T) & h(-1T) + h(7T) & h(-2T) + h(6T) & h(-3T) + h(5T) & h(-4T) + h(4T) & h(-5T) + h(3T) & h(-6T) + h(2T)
\end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Na obtenção da matriz da Eq.(4.22), considerou-se o maior valor de  $\nu$  possível, ou seja, o maior número de símbolos vizinhos que a transmissão de um símbolo específico pode influenciar. O valor de  $\nu$  apresenta uma restrição devido ao tamanho do CP o qual deve ser, no máximo, o valor  $N$  do bloco ( $2\nu = N$ ). Assim, o maior valor que  $\nu$  pode assumir é  $\nu = N/2$  e, para o exemplo especificado,  $\nu = 8/2 = 4$ .

A primeira linha da matriz dada pela Eq.(4.22) representa as contribuições de todos os símbolos na determinação do símbolo  $s_3$  no receptor. Assim, percebe-se que ele é influenciado desde o símbolo  $s_1$  até o  $s_{16}$ , sendo que este último equivale ao símbolo  $s_8$ , conforme o explicado na Seção 4.3. A expressão de  $s_3$  é dada por:

$$\begin{aligned}
s_3 = & s_1(h(-6T) + h(2T)) + s_2(h(-7T) + h(T)) + s_3(h(-8T) + h(0)) + \\
& + s_4(h(-9T) + h(-1T)) + s_5(h(-10T) + h(-2T)) + s_6(h(-11T) + h(-3T)) + \\
& + s_7(h(-12T) + h(-4T)) + s_8(h(-13T) + h(-5T)). \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Considerando  $\alpha = 0,8$  e  $h(t) = \text{sinc}(t/T_s)$ , a Eq.(4.23) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
s_3 = & s_1(0,039 - 0,1892) + s_2(-0,0541 + 0,2339) + s_3(0,0473 + 1) + \\
& + s_4(-0,026 + 0,2339) + s_5(0 - 0,1892) + s_6(0,0213 + 0,1261) + \\
& + s_7(-0,0315 + 0,0585) + s_8(0,0291 + 0). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Na Eq.(4.24), os termos  $h(qT)$  que apresentam os maiores valores de  $|q|$  provocam uma menor interferência no símbolo de interesse, como explicado previamente.

Ao zerar os termos  $h(qT)$  da Eq.(4.22), tal que  $|q| > \nu$  e  $\nu = 2$  (retornando ao exemplo da Fig. 4.2), obtém-se exatamente a matriz  $\mathbf{H}$  da Eq.(4.9).

O erro potencial de modelagem pode ser aproximado por:

$$\Delta \mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} - \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (4.25)$$

em que  $\bar{\mathbf{H}}$  representa a ISI com coeficientes infinitos e  $\mathbf{H}$ , a matriz que é realmente utilizada pelo equalizador.

Tabela 4.5: Parâmetros de simulação para obtenção do gráfico da Fig.4.12 .

Parâmetro	Valor
Fator de compressão $\alpha$	0 a 1
Fator de <i>roll-off</i> $\beta$	0,4
Memória do canal $\nu$	1, 5, 10, 20 e 50
Tamanho do bloco $N$	1024
Ordem da modulação $M$	2

Obtém-se o gráfico da Fig.4.12 levando em consideração um sistema FTN com um fator de *roll-off*  $\beta = 0,4$ . O fator de compressão variou de  $\alpha = 0$  a 1 para 5 diferentes valores da memória do canal. Os parâmetros restantes podem ser conferidos na Tabela 4.5.

Como é possível observar no gráfico da Fig. 4.12, o erro  $\Delta\mathbf{H}$  aumenta à medida em que o fator de compressão  $\alpha$  diminui. Cada curva da Fig. 4.12 é obtida a partir da utilização de uma matriz  $\mathbf{H}$  que considera um mesmo valor de  $\nu$ , isto é, considera-se que a ISI está espalhada por um número fixo de símbolos. Assim, à medida em que diminui-se o fator de compressão  $\alpha$ , adiciona-se mais ISI no sistema, ou seja, aqueles símbolos que antes apresentavam ISI desprezível agora passam a possuir ISI relevante. Logo, a aproximação de  $\tilde{\mathbf{H}}$  por  $\mathbf{H}$  torna-se mais infiel pois cada vez mais ISI existente no sistema não está sendo considerada em  $\mathbf{H}$  e, conseqüentemente, não está sendo eliminada. Este fato aumenta o erro de modelagem.

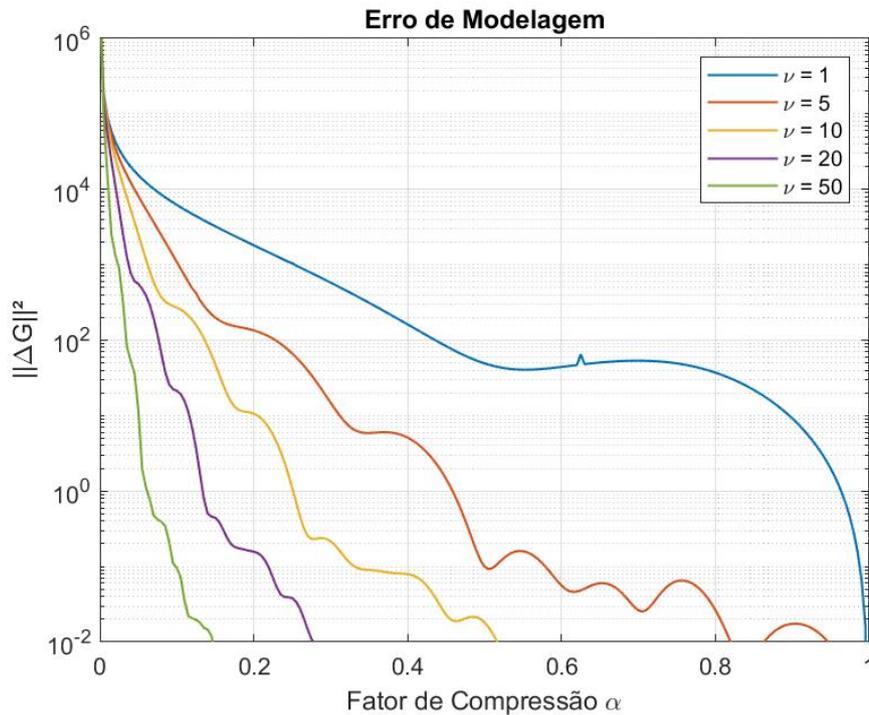


Figura 4.12: Relação entre os parâmetros  $\nu$  e  $\alpha$  na modelagem do erro  $\Delta\mathbf{H}$ .

As curvas da Fig.4.12 apresentam oscilações pois os diferentes padrões de erro apresentam

distâncias mínimas com comportamentos distintos para cada fator de compressão. Portanto, a equalização e, conseqüentemente, o erro de modelagem associado a ela varia não linearmente.

Observando a relação entre os tamanhos do prefixo cíclico e o erro de modelagem, nota-se que quanto menor o prefixo, maior é o erro, dado um mesmo valor de  $\alpha$ . Isso ocorre porque valores pequenos de  $\nu$  não são capazes de modelar completamente a influência da ISI, por ela ter se espalhado por mais símbolos do que o inicialmente considerado. Dessa maneira, é necessária uma escolha de  $\nu$  que seja suficientemente grande para englobar o efeito da ISI em todos os símbolos nos quais ela ainda é relevante.

## 4.9 Conclusão

A utilização da sinalização FTN em sistemas de comunicação tem como consequência o aumento da taxa de transmissão e também da complexidade de processamento do receptor. Considerar uma ISI truncada a um número limitado de símbolos da sequência enviada possibilita a utilização de equalizadores com uma complexidade computacional reduzida e que, ainda assim, proporcionam uma melhora no desempenho do sistema, quando comparados com o caso FTN sem equalizador.

Dessa maneira, a equalização no domínio da frequência garante uma baixa complexidade quando comparada, principalmente, aos equalizadores no domínio do tempo que utilizam muitos coeficientes, pois ela depende, principalmente, do tamanho  $N$  do bloco que será transmitido [19].

Na FDE, deve-se escolher um tamanho apropriado do prefixo cíclico ( $2\nu$ ) que otimize o sistema. Deseja-se que ele não seja pequeno o suficiente para não gerar um grande erro de modelagem e comprometer a detecção da sequência, mas também não se deve escolher um valor muito elevado para que não haja um custo excessivo de processamento e perda de eficiência espectral.

Como visto na Seção 4.6, o desempenho deste sistema depende do valor do fator de compressão  $\alpha$  e também do fator de *roll-off*  $\beta$  do pulso formatador. Quanto maiores forem os seus valores, melhor será o desempenho do sistema, porém menor será a eficiência espectral.

Quando o atraso é um fator crítico para a aplicação na qual é utilizada o sistema FTN com FDE, o custo de processamento deve ser reduzido para diminuir a latência e, conseqüentemente, deve-se empregar um tamanho de bloco  $N$  menor. Caso fosse preferível um sistema com maior taxa, o tamanho do bloco poderia ser aumentado e o fator de compressão reduzido. Essas escolhas estariam sujeitas, ainda, à BER mínima que o receptor é capaz de suportar.

Logo, no projeto do equalizador no domínio da frequência, devem-se escolher os parâmetros  $\nu$ ,  $\beta$ ,  $N$  e  $\alpha$  que otimizam o sistema a depender da sua aplicação. Assim, esta equalização configura-se como uma estratégia de baixa complexidade que garante um desempenho quase-ótimo nos sistemas FTN.

# Capítulo 5

## Conclusão

Alguns recursos de comunicação, especialmente largura de banda, tem se tornado cada vez mais escassos. Como os sistemas de comunicação modernos continuam requisitando um aumento da taxa de transmissão, houve a necessidade de desenvolver novas tecnologias que fossem capazes de aumentar a eficiência espectral, mesmo que isto implicasse em uma maior complexidade de processamento. Este trabalho estuda a sinalização FTN, uma das possíveis propostas para este problema.

Em um primeiro momento, foram apresentados, no Capítulo 1, as principais motivações para o estudo da sinalização FTN e, em seguida, no Capítulo 2, a fundamentação teórica a respeito de sistemas de comunicação clássicos a qual é necessária para uma melhor compreensão do sistema FTN.

No Capítulo 3, foi realizado um estudo da sinalização FTN e do comportamento de uma das suas principais métricas, a distância mínima, para que fosse possível avaliar o desempenho deste sistema. Descobriu-se que a distância mínima não é alterada até um valor crítico de fator de compressão (limite de Mazo), que vale 0,802, quando utiliza-se um pulso  $\text{sinc}(t)$ . Portanto, é possível atingir um aumento na taxa de transmissão de aproximadamente 25% sem qualquer aumento na largura de banda e sem perda de desempenho com a utilização de detectores ótimos. Entretanto, atingir a distância mínima mencionada tornou-se uma tarefa árdua devido à presença de ISI que é, teoricamente, infinita. Assim, fez-se necessária a utilização de equalizadores robustos que aumentam a complexidade do sistema pois a detecção ótima é de uma sequência e não mais símbolo a símbolo, como ocorre na sinalização de Nyquist .

O Capítulo 4, por sua vez, aborda o desempenho de um sistema FTN que emprega equalização no domínio da frequência. O FDE modela a ISI por uma matriz circulante (considera uma ISI com uma quantidade finita de coeficientes) e explora as suas propriedades para realizar uma FFT eficiente. Em seguida, utiliza-se um equalizador MMSE no domínio da frequência para a eliminação da ISI.

Alguns parâmetros que influenciam o desempenho do sistema FTN são o fator de *roll-off* e o fator de compressão. Apresenta um melhor desempenho aqueles sistemas FTN que, para um mesmo fator de compressão, tiverem um maior fator de *roll-off* ou que, para um mesmo fator de

*roll-off*, apresentarem um maior fator de compressão.

O mecanismo propõe a inserção de um CP que causa penalidades de taxa de transmissão pois os *bits* transmitidos não são todos de informação. O tamanho deste prefixo é dependente do tamanho da memória do canal  $\nu$ . Assim, quanto maior for  $\nu$ , maior deverá ser o tamanho do CP para que ele consiga retirar a parcela mais relevante de ISI presente no sinal.

É realizado também um estudo acerca da complexidade e do erro de modelagem devido à FDE. A complexidade da demodulação é proporcional ao tamanho do bloco que será transmitido. Portanto, a utilização da FDE é preferível quando comparada com equalizações no domínio do tempo, principalmente, em cenários em que a memória do canal é elevada pois a sua complexidade não depende desse fator. Posto isso, a equalização no domínio da frequência configura-se como um equalizador de baixa complexidade que apresenta um desempenho quase-ótimo em sistemas FTN.

## 5.1 Trabalhos Futuros

A sinalização FTN configura-se como uma promissora área de estudo por ainda apresentar diversos desafios. Outras propostas que podem ser exploradas em futuros trabalhos são descritas a seguir:

- Estudo do formato de pulso  $h(t)$  pois o fato de o limite de Mazo ser distinto para cada pulso utilizado proporciona diferentes capacidade, desempenho e complexidade do sistema. Assim, é necessário encontrar uma solução de compromisso;
- Investigação de algoritmos mais avançados e eficientes que determinem o limite de Mazo para diferentes pulsos e formato de informação;
- Implementação de *hardware* dos sistemas de recepção e transmissão;
- Estudo do desempenho dos sistemas FTN com diferentes equalizadores sob diferentes condições de canal, isto é, considerando outros modelos de canal, como desvanecimento plano e desvanecimento seletivo;
- Aplicabilidade da sinalização FTN em sistemas multiportadora (OFDM, por exemplo);
- Estudo a respeito do emprego de pré-codificação para melhoria do desempenho dos sistemas com sinalização FTN;
- Estudo acerca da utilização da sinalização FTN em sistemas MIMO (*multiple-input and multiple-output*).

# BIBLIOGRAFIA

- [1] Madhow, U., *Fundamentals of Digital Communication*. Cambridge University Press, Nova Iorque, E.U.A, 2008.
- [2] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing Fourth Edition*. Academic Press, London, UK, 2007.
- [3] Molisch, Andreas, *Wireless Communications*. 2011.
- [4] A. D. Liveris and C. N. Georghiadis, “Exploiting faster-than-nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, pp. 1502–1511, Sep. 2003.
- [5] J. E. Mazo, “Faster-than-nyquist signaling,” *Bell Syst. Technical J.*, vol. 54, pp. 1451–1462, October 1975.
- [6] B. P. Lathi and Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicas e Digitais Modernos*. LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2012.
- [7] Eiman Mohyeldin, “Minimum Technical Performance Requirements for IMT-2020 radio interface(s) - ITU-R Workshop on IMT-2020 terrestrial radio interfaces.” .
- [8] Ericsson Company, “Ericsson Mobility Report November 2019.” <https://www.ericsson.com/4acd7e/assets/local/mobility-report/documents/2019/emr-november-2019.pdf>.
- [9] ETSI - European Telecommunications Standard Institute, “Why do We need 5g?.” <https://www.etsi.org/technologies/5g?jjj=1575395351054>.
- [10] O Estado de S. Paulo, “Anatel adia novamente abertura de consulta sobre edital do leilão de 5G.” <https://link.estadao.com.br/noticias/cultura-digital,anatel-adia-novamente-abertura-de-consulta-sobre-edital-do-leilao-de-5g,79003080404>.
- [11] 18th International Conference, NEW2AN 2018, and 11th Conference, ruSMART 2018. Springer.
- [12] J. Fan, S. Guo, X. Zhou, Y. Ren, G. Y. Li, and X. Chen, “Faster-than-nyquist signaling: An overview,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 1925–1940, 2017.
- [13] J. A. F. Rusek, “Constrained capacities for faster-than-nyquist signaling,” *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 55, no. 2, pp. 764–775, 2001.

- [14] John B. Anderson, *Bandwidth Efficient Coding*. Wiley-IEEE Press, 2017.
- [15] F. Rusek and J. B. Anderson, “Multistream faster than nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, pp. 1329–1340, May 2009.
- [16] J. A. A. Prlja, “Reduced-complexity receivers for strongly narrowband intersymbol interference introduced by faster-than-nyquist signaling,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 60, no. 9, pp. 2591–2601, 2012.
- [17] H. F. M. Han, M. Jin, “Binary symbol recovery via ‘1 minimization in faster than nyquist signaling systems,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 20, pp. 5282–5293, 2014.
- [18] Y. G. Yoo and J. H. Cho, “Asymptotic Optimality of Binary Faster-than-Nyquist Signaling,” *IEEE Communications Letters*, vol. 14, pp. 788–790, Sep. 2010.
- [19] S. Sugiura, “Frequency-domain equalization of faster-than-nyquist signaling,” *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 2, pp. 555–558, October 2013.
- [20] Barreto, A.N., “Apostila de Comunicações Digitais.” <http://www.ene.unb.br/andre/teaching/files/ComDig/Apostila/Cap%2002%20Transmiss%C3%A3o%20Digital.pdf>.
- [21] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. 2005.
- [22] Cioffi, J., “Part 1 - Signal Processing and Detection.” [https://web.stanford.edu/group/cioffi/ee379a/course\\_reader/chap1.pdf](https://web.stanford.edu/group/cioffi/ee379a/course_reader/chap1.pdf).
- [23] J. E. Mazo and H. J. Landau, “On the minimum distance problem for faster-than-nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, pp. 1420–1427, Nov 1988.
- [24] Steven M. Kay, *Fundamentals os Statistical Signal Processing Volume II Detection Theory*. Prentice Hall PTR, 1998.
- [25] Gray, R. M., “Toeplitz and Circulant Matrices: A review.” <https://ee.stanford.edu/gray/toeplitz.pdf>.
- [26] N. Al-Dhahir, “Single-carrier frequency-domain equalization for space-time block-coded transmissions over frequency-selective fading channels,” *IEEE Communications Letters*, vol. 5, pp. 304–306, July 2001.