



## **TRABALHO DE GRADUAÇÃO**

APLICAÇÃO DE INCERTEZAS NA INÉRCIA  
PARA UMA PLATAFORMA DE SIMULAÇÃO DE  
MOVIMENTO DE PEQUENOS SATÉLITES

**Daniel Ramos Braga**

Brasília, dezembro de 2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

## TRABALHO DE GRADUAÇÃO

# APLICAÇÃO DE INCERTEZAS NA INÉRCIA PARA UMA PLATAFORMA DE SIMULAÇÃO DE MOVIMENTO DE PEQUENOS SATÉLITES

**Daniel Ramos Braga**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Eletricista

### **Banca Examinadora**

Prof. João Yoshiyuki Ishihara, Dr., UnB/ENE  
(Orientador)

---

Prof. Renato Alves Borges, Dr., UnB/ENE  
(Co-orientador)

---

Prof. Henrique Cezar Ferreira, Dr., UnB/ ENE  
(Examinador Interno)

---



## **Agradecimentos**

*Agradeço à minha mãe, aquela cujos esforços para garantia do bem estar dos filhos são simplesmente incessantes.*

*Agradeço ao meu irmão, exemplo diário de determinação e perseverança.*

*Agradeço aos meus avós, cujo apoio em minha criação foi de importância inigualável.*

*Agradeço aos meus tios, tias, primo e primas, aqueles que demonstram a coesão e união da família, sempre incrivelmente receptivos.*

*Agradeço ao meu padrasto, aquele que, apesar da não consanguinidade, trata-me como um filho próprio.*

*Agradeço aos amigos próximos, por todos momentos de descontração e manutenção da saúde mental.*

*Agradeço aos professores Renato e Ishihara, assim como também ao colega Rodrigo, por todo o apoio dado no processo de finalização do presente trabalho.*

*“[...]And the stars look very different today[...]*”

*David Bowie*

---

## RESUMO

É de extrema importância, para o estabelecimento de simulações acuradas de movimentos rotacionais em ambiente de microgravidade, que ocorra o balanceamento do simulador, isto é, a movimentação do centro de massa da estrutura em movimento à uma região suficientemente próxima, ou igual, ao centro de rotação, reduzindo-se, drasticamente, a interferência de torques gravitacionais. O centro de massa do simulador pode ser movido às proximidades do centro de rotação através de massas móveis cujos posicionamentos devem ser ajustados às localizações corretas, de acordo com a aplicação que deseja-se estipular. Determinação e controle de atitude acurados são imprescindíveis à missões que visam o lançamento e manutenção do satélite em condições corretas. Entretanto, é de extrema incoerência e dificuldade a realização de testes de determinação e controle de atitude em processo de voo do elemento aeroespacial. Desse modo, são utilizados simuladores fixados em terra. Entretanto, o ambiente terrestre é extremamente divergente daqueles nos quais os satélites serão lançados e estarão operando, criando-se diversas dificuldades à realização de simulações em solo. Simuladores, em solo, de satélites, possuem diversas aplicações industriais e educacionais, por exemplo, a verificação funcional de mudanças no projeto do satélite, integração e correção de erros entre *hardware* e *software*, teste de algoritmos de determinação e controle de atitude, criação de novas propostas e, conseqüentemente, teste físico relacionados a algoritmos de determinação e controle de atitude e, também, o ensino experimental de métodos de controle de satélites em ambiente laboratorial. O trabalho realizado visa uma análise geral do cenário envolvendo a simulação da movimentação de satélites em ambientes livres de torque, incluindo explicações sobre a estrutura simuladora presente em laboratório LAICA, a representação da rotação de sistemas de eixos coordenados, também em notação de quatérnions, e uma introdução às equações de movimento. Após a análise teórica, são propostas mudanças analíticas que visam uma maior generalidade aos modelos matemáticos usados no balanceamento da plataforma de ar.

Palavras-chave: plataforma de ar, atitude, balanceamento, politopo, momento de inércia, incertezas.

---

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 Contextualização .....	1
1.2 Definição do Problema .....	2
1.3 Simulação de Movimentos Rotacionais - Plataforma de Ar (Air Bearing Table) .....	11
1.3.1 Sistemas Planares .....	3
1.3.2 Sistemas Rotacionais – Topo de Mesa e Guarda-chuva .....	4
1.3.3 Otimizações de Ambiente .....	6
1.3.4 Plataforma de Ar – LAICA .....	7
1.4 Unidade de Massa Móvel e Drivers .....	8
1.2 Objetivos do Projeto .....	11
<b>2 REPRESENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO EM SISTEMA TRIDIMENSIONAL</b> .....	<b>12</b>
2.1 Coordenadas Independentes de um Corpo Rígido .....	12
2.2 Transformações Ortogonais .....	16
2.3 Propriedades Formais da Matriz de Transformação .....	19
2.4 Ângulos de Euler .....	20
2.5 Teorema de Euler para a Movimentação de Corpos Rígidos .....	23
2.5.1 Taxa de Variação Temporal de um Vetor .....	27
2.6 Algoritmo eCompass de Compensação de Tilt .....	27
<b>3 PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS E RESULTADOS</b> .....	<b>32</b>
3.1 Momento de Inércia .....	32
3.2 Produto de Inércia .....	33
3.3 Tensor de Inércia .....	33
3.4 Momento de Inércia Relacionado a um Eixo Arbitrário .....	34
3.5 Equações de Movimento .....	35
3.5.1 Equação de Movimento - Young .....	35
3.5.2 Equação de Movimento Simplificada – Young .....	36
3.6 Representação Politópica .....	38
3.6.1 Conjuntos Convexos .....	38
3.7 Proposição Analítica – Representação Politópica .....	40
3.8 Resultados .....	43
<b>4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	<b>54</b>
4.1 Conclusão .....	54
4.2 Método da Perturbação .....	55
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>57</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esquemático e estrutura real responsável por expelir o ar pressurizado (Rybus, 2013) .....	3
Figura 2. Visão geral de simulador de microgravidade por tecnologia planar (Rybus, 2013) .....	4
Figura 3. Formações "topo de mesa", "guarda-chuva" e seus respectivos eixos .....	4
Figura 4. Uma das primeiras plataformas de ar esféricas a ser completamente conhecida a não ser mantida na confidencialidade (Schwartz, 2003) .....	5
Figura 5. Na parte superior, formação "halteres" genérica e seus respectivos eixos. Na parte inferior, Plataforma tri axial em "halteres" desenvolvida pela Universidade de Michigan (Schwartz, 2003) .....	6
Figura 6. À esquerda, estrutura real contendo base côncava e a calota esférica. À direita, esquemático da estrutura real demonstrando seus respectivos graus de liberdade. (PI, 2018c). .....	8
Figura 7. Esquemático do funcionamento do motor de passos. (CHAPMAN, 2013).....	9
Figura 8. Esquemático de motor de passos. (CHAPMAN, 2013).....	10
Figura 9. Motor de passos SKU: 1124090, 42BY GH4803-DC. (OZYAGCILAR, 2015).....	11
Figura 10. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980). .....	13
Figura 11. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980). .....	13
Figura 12. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980). .....	14
Figura 13. Rotação de eixos coordenados em cenário bidimensional. (GOLDSTEIN, 1980). .....	18
Figura 14. Representação gráfica de operação de transformação como rotação de um vetor, ou seja, em papel ativo. (GOLDSTEIN, 1980).....	19
Figura 15. Efeito de inversão ou reflexão de eixos através da transformação em questão. (GOLDSTEIN, 1980).....	20
Figura 16. Rotações definidoras dos ângulos de Euler. (GOLDSTEIN, 1980). .....	22
Figura 17. Demonstrativo do elemento diferencial de massa. (HIBBELER, 2010).....	32
Figura 18. Na imagem da esquerda, o plano y-z é um exemplo de plano de simetria, enquanto que na imagem da direita, os planos x-z e y-z são, ambos, planos de simetria. (HIBBELER, 2010). .....	33
Figura 19. Demonstrativo do eixo sobre o qual deseja-se calcular o novo momento de inércia. (HIBBELER, 2010).....	35
Figura 20. Representação de diferentes tipos de conjuntos em um espaço bidimensional. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).....	38
Figura 21. Representação do invólucro convexo de dois conjuntos no espaço bidimensional. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).....	39
Figura 22 - Esquemático tridimensional da mesa com as massas móveis. ....	43
Figura 23 - Região de excursão, em R3, do valor de $I_{xx}$ com a movimentação das massas móveis em z e em y.....	45
Figura 24 - Região de excursão, em R3, do valor de $I_{yy}$ com a movimentação das massas móveis em x e em z.....	46
Figura 25 - Região de excursão, em R3, do valor de $I_{zz}$ com a movimentação das massas móveis em x e em y. ....	47
Figura 26 - Esquemático de um paralelepípedo genérico gerado por um produto cartesiano de intervalos.....	52



# LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Especificações do motor de passos LAICA. ....	10
Tabela 2. Estimativas de componentes do vetor $\mathbf{r}$ obtidos em [Silva, 2018].. ....	52



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A movimentação de uma espaçonave rígida, basicamente, pode ser caracterizada através de sua posição, velocidade e atitude. Os termos posição e velocidade descrevem a movimentação translacional do centro de massa de uma espaçonave e fazem parte de uma área do conhecimento comumente denominada de mecânica celestial, determinação orbital, ou, até mesmo, navegação espacial, dependendo-se de quais parâmetros do problema estão sendo prioritariamente enfatizados. Já a atitude é responsável pela descrição da movimentação rotacional do corpo rígido em torno do próprio centro de massa. [Wertz, 1978].

Tentativas quanto à previsibilidade da movimentação orbital de objetos celestes são um dos ramos mais antigos da ciência, como um todo, tendo sido, até mesmo, a motivação inicial de grande parte do trabalho de Isaac Newton. Entretanto, apesar do fato de que a exploração da movimentação de objetos celestes é algo extremamente antigo, os maiores avanços quanto à determinação e controle de atitude surgiram a partir do lançamento do Sputnik, em 4 de outubro de 1957, caracterizando uma grande dicotomia. A análise de atitude pode ser dividida em três cenários básicos, a determinação, a predição e o controle.

A determinação de atitude é o processo no qual ocorre a computação da orientação da espaçonave relativamente a um referencial inercial, ou então, até mesmo, a objetos de interesse, como a própria Terra. A determinação de atitude tipicamente envolve diversos tipos de sensores que podem ser utilizados na realização de mensuras precisas, as quais serão utilizadas em diversas espécies de algoritmos de determinação. A limitação de acuracidade geralmente está associada à combinação de procedimentos de processamento e o hardware da espaçonave.

A predição de atitude é o processo no qual pode-se estabelecer uma suposição das futuras orientações da espaçonave através da utilização de modelos dinâmicos que possam extrapolar o que denomina-se de histórico de atitude, isto é, como a atitude de uma espaçonave comportou-se partindo de determinadas situações iniciais. As dificuldades associadas ao método de predição de atitude residem na possível falta de conhecimento profundo perante torques aplicados e advindos do próprio ambiente no qual o corpo está inserido e a acuracidade e viabilidade do modelo matemático de dinâmica de espaçonaves que está sendo proposto.

Já o controle de atitude é o processo no qual visa-se estabelecer a orientação de uma espaçonave a uma direção especificada e previamente determinada. O controle de atitude pode ser subdividido em duas grandes áreas – estabilização de atitude, na qual há a manutenção de uma orientação existente, e controle de manobra de atitude, na qual há o controle perante reorientações da espaçonave de uma atitude a outra. Entretanto, as duas grandes áreas não são completamente distintas e independentes, já que, por exemplo, a estabilização de uma espaçonave com um de seus eixos apontando diretamente à Terra demanda uma constante alteração em suas respectivas orientações inercias. O fator limitante mais comumente presente em um cenário de controle de atitude é, tipicamente, o desempenho na manobra da estrutura física e a eletrônica associada às técnicas de controle. Métodos convenientes para categorização de espaçonaves envolvem os procedimentos pelos quais seus respectivos movimentos são estabilizados, de modo que o mais simples de todos acaba por envolver a rotação da espaçonave. O momento angular de uma espaçonave estabilizada através de rotação permanecerá aproximadamente fixo em espaço inercial por longos períodos de tempo, já que os torques externos que o afetam são, na maioria dos casos, suficientemente pequenos e desprezíveis. Caso a orientação de três eixos coordenados mutuamente normais da espaçonave necessite de controle, então pode-se dizer que a espaçonave é estabilizada em três eixos. Agora, alguma forma de controle ativo faz-se necessária, já que os torques estabelecidos pelo ambiente no qual o corpo está inserido, apesar de serem pequenos, causarão variações vagarosas na orientação da espaçonave. Espaçonaves estabilizadas em três eixos podem ser referenciadas em sistemas referenciais fixos, espaço inercial, ou então em sistemas referenciais em rotação.

É fácil verificar que existe a necessidade de um método físico pelo qual tais procedimentos de determinação, predição e controle de atitude possam ser simulados sem que haja a necessidade de um lançamento, de fato, situação muito custosa e na qual não se pode dar ao luxo de cometimento de erros.

É exatamente nesse momento que a plataforma de ar LAICA, analisada em detalhes em capítulos posteriores, mostra seu verdadeiro valor. Pode-se estabelecer, em terra, simulações que visam a análise completa da movimentação de nano satélites em ambiente, virtualmente, de microgravidade. Além da plataforma de ar, em si, existem diversas outras estruturas a ela acopladas que auxiliam a boa realização dos mais diversos tipos de experimento.

## **1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

É de extrema importância, para o estabelecimento de simulações acuradas de movimentos rotacionais em ambiente de microgravidade, que ocorra o balanceamento do simulador, isto é, a movimentação do centro de massa da estrutura em movimento à uma região suficientemente próxima, ou igual, ao centro de rotação, reduzindo-se, drasticamente, a interferência de torques gravitacionais. O centro de massa do simulador pode ser movido às proximidades do centro de rotação através de massas móveis cujos posicionamentos devem ser ajustados às localizações corretas, de acordo com a aplicação que deseja-se estipular. Determinação e controle de atitude acurados são imprescindíveis à missões que visam o lançamento e manutenção do satélite em condições corretas. Entretanto, é de extrema incoerência e dificuldade a realização de testes de determinação e controle de atitude em processo de voo do elemento aeroespacial. Desse modo, são utilizados simuladores fixados em terra. Entretanto, o ambiente terrestre é extremamente divergente daqueles nos quais os satélites serão lançados e estarão operando, criando-se diversas dificuldades à realização de simulações em solo. Simuladores, em solo, de satélites, possuem diversas aplicações industriais e educacionais, por exemplo, a verificação funcional de mudanças no projeto do satélite, integração e correção de erros entre hardware e software, teste de algoritmos de determinação e controle de atitude, criação de novas propostas e, conseqüentemente, teste físico relacionados a algoritmos de determinação e controle de atitude e, também, o ensino experimental de métodos de controle de satélites em ambiente laboratorial.

A replicação exata de um ambiente espacial é muito complicada, principalmente pelas condições de vácuo. Assim, busca-se, através das simulações em ambiente laboratorial, uma aproximação tal que possa fornecer resultados suficientemente próximos daquilo que a teoria, de fato, propusera. Geralmente, tem-se uma simulação em software, utilizando-se dados obtidos através de diversos sensores como, por exemplo, magnetômetros e acelerômetros, pela aplicação de movimentações à estrutura física do satélite de teste. Verificou-se que plataforma de ar podem ser de extrema importância para com testes de dinâmica de satélites em ambientes livres de torque, permitindo a movimentação, virtualmente, sem atrito em três eixos coordenados. Assim como já foi falado, o problema está no fato de que o centro de massa do simulador deve localizar-se suficientemente próximo ao centro de rotação a título de redução do torque gravitacional e incremento dos períodos de oscilação, tanto quanto possível, sem que que instabilidade seja introduzida ao sistema.

Em suma, o problema reside na proposição de modelos matemáticos de balanceamento e em suas respectivas implementações computacionais, gerando resultados mais e mais precisos.

## **1.3 SIMULAÇÃO DE MOVIMENTOS ROTACIONAIS - PLATAFORMA DE AR (AIR BEARING TABLE)**

A técnica de utilização de ar entre superfícies para redução drástica do atrito vem sendo utilizada nos mais diversos ramos da indústria aeroespacial, a título de auxílio quanto à determinação de atitude e métodos efetivos de controle, desde os primórdios de um período histórico de extrema importância quanto ao estabelecimento de novos tipos de conhecimentos científicos e criação de novíssimas tecnologias, a guerra fria. Mediante uma forte batalha ideológica entre sistemas socioeconômicos antagônicos, capitalismo dos Estados Unidos da América e socialismo soviético, a indústria aeroespacial, sobretudo, crescia como nunca, na tentativa de que o primeiro homem fosse levado à Lua.

Experimentos que envolvem a necessidade de um ambiente de microgravidade, sendo realizados em território terrestre, devido, logicamente, a todas as interferências externas, como, por exemplo, forças de resistência do ar e gravitacional, não são facilmente implementados e, tampouco, fornecem-nos resultados completamente corretos. Certamente, a utilização da técnica de plataforma de ar não fornecer-

nos-á um cenário de microgravidade, em si, entretanto, perceber-se-á um ambiente de torque mínimo no qual experimentos de alto nível de precisão de resultados poderão ser realizados, tornando-se uma das principais e favoritas técnicas de estudiosos para com experimentos de controle e dinâmica de aeronaves. A técnica consiste, basicamente, na passagem de ar pressurizado através de pequenos orifícios localizados na superfície do material fixo. A partir do fluxo de ar pressurizado, forma-se uma fina camada entre a superfície fixa e a superfície móvel, de tal modo que a pressurização deva ser suficientemente grande a fim de que a sustentação da superfície móvel possa ser garantida. Dessa maneira, o fino filme de ar teria um papel denominado de lubrificante, visto que estaria promovendo a redução de atrito entre duas superfícies com movimento relativo entre si. Um ótimo exemplo de plataforma de ar, bastante difundido e comumente conhecido, é a mesa de hóquei, onde o disco cilíndrico possui dois graus de liberdade de movimentação. As plataformas esféricas são as mais comumente utilizadas no campo aeroespacial para definição da atitude de determinados elementos, já que possui a capacidade de promover movimentação rotacional sem restrições. A tecnologia consiste, basicamente, em duas seções esféricas concêntricas porém de diferentes raios, de tal modo que entre as duas seções, ter-se-á a camada de ar que permitirá a movimentação praticamente sem atrito.

No decorrer do capítulo, falar-se-á de dois dos principais tipos de plataformas esféricas e explicar-se-á em qual cenário a bancada presente no laboratório de aplicação e inovação em ciências aeroespaciais da Universidade de Brasília se encaixa, incluindo-se detalhes específicos.

### 1.3.1 SISTEMAS PLANARES

A movimentação planar, a qual pode ser caracterizada através de um grau de liberdade rotacional e dois graus de liberdade translacionais, possui diversas aplicações na área do conhecimento aeroespacial como, por exemplo, o encontro e encaixe de determinados elementos em ambiente de microgravidade. Na maioria dos casos, o corpo de teste, em si, carrega seu respectivo volume de ar pressurizado em determinados compartimentos e expelle-o, através de uma peça de carbono poroso, produzindo seu próprio colchão de ar, permitindo que paire sobre uma superfície plana.[Schwartz, 2003].

O carbono poroso permite que o fluxo de ar por seus poros seja praticamente uniforme, na totalidade de sua superfície, e, em caso de falha no suprimento de ar pressurizado, tal material não causará danos à superfície sobre a qual a estrutura plana.

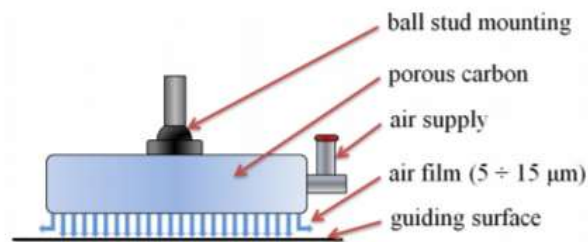


Figura 1. Esquemático e estrutura real responsável por expelir o ar pressurizado (Rybus, 2013)

Em estudos mais modernos, sistemas planares vêm sendo utilizados em tópicos bastante pertinentes, por exemplo, o encontro de elementos aeroespaciais em órbita para a captura e manobra de satélites não funcionais, ao invés de serem simplesmente descartados, já que, em muitos casos, demandam elevadíssimos custos de produção; a redução de vibrações em um braço robótico articulado durante uma manobra determinada; o voo em formação de elementos aeroespaciais, entre outros.

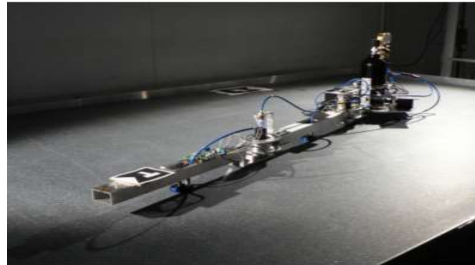


Figura 2. Visão geral de simulador de microgravidade por tecnologia planar (Rybus, 2013)

### 1.3.2 SISTEMAS ROTACIONAIS – TOPO DE MESA E GUARDA-CHUVA

As plataformas de ar esféricas ideais, teoricamente, permitiram que sua carga útil tivesse movimentação angular sem restrições, em um sistema de coordenadas de três eixos. As construções de formato “topo de mesa” e “guarda-chuva” certamente promoveriam a possibilidade de rotação livre quanto ao eixo  $z$ , entretanto, a partir do momento em que considera-se os outros dois eixos,  $x$  e  $y$ , verificar-se-ia que há de fato, restrições de movimentação, tipicamente restrita a ângulos menores do que o valor angular de  $\pm 90^\circ$ . Sistemas “topo de mesa” são, usualmente, montados sobre a face plana de uma estrutura semiesférica, enquanto que sistemas “guarda-chuva” são caracterizados por uma estrutura esférica completa com uma haste saindo de sua superfície. Conectado à haste, o platô no qual os componentes a serem analisados serão posicionados (Vide Figura 2.1). É válido verificar que, para a análise em questão, considera-se o eixo  $z$  paralelo ao vetor de gravidade. [Schwartz, 2003].

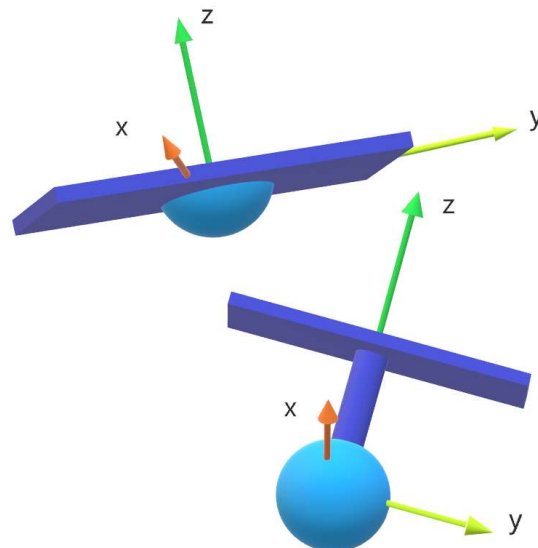


Figura 3. Formações “topo de mesa”, “guarda-chuva” e seus respectivos eixos.

Os primeiros sistemas rotacionais a surgirem eram, quase em sua totalidade, propriedades confidenciais governamentais ou propriedades confidenciais de alguma das grandes empresas que até então dominavam o mercado.

Sendo assim, documentações descritivas abertas eram, simplesmente, de extrema raridade. Entretanto, os documentos descritivos disponíveis do período já demonstravam imensa capacidade tecnológica, entre as décadas de 60 e 70.

Tentava-se, intensamente, a manutenção do centro de massa da carga útil coincidindo com o centro de rotação da estrutura, minimizando-se, assim, possíveis efeitos gravitacionais intrinsecamente ligados à realização de experimentos de simulação de microgravidade em terra. As estruturas eram projetadas com rigidez suficientemente grande para que não houvesse alteração de atitude e os sensores, de modo geral, eram projetados, especificamente, para funcionamento preciso em quaisquer cenários de movimentação. Muitos detalhes de projeto e produção de tais sistemas rotacionais foram completamente perdidos, de tal modo que, muitas máquinas atuais não fornecem as mesmas condições de estabilidade que antigas poderiam prover. Muitos fabricantes atuais acabam por tentar reproduzir métodos de produção que eram anteriormente aplicados a fim de que as boas características que existiam possam ser recuperadas na modernidade.

O primeiro sistema do qual tem-se o conjunto completo de informações é esférico e de três eixos, desenvolvido, em 1959, na entidade *Army Ballistic Missile Agency*. Esse sistema, no estilo “guarda-chuva”, provia uma liberdade de total rotação, com relação ao eixo  $z$ , e apresentava, como angulações máximas atingidas em  $x$  e  $y$ , os valores de  $\pm 120^\circ$ , para uma carga útil de, aproximadamente, 408Kg. Funcionamento esse que atrai muita atenção, até mesmo comparado a parâmetros atuais. A figura abaixo mostra uma foto de época do sistema em questão.

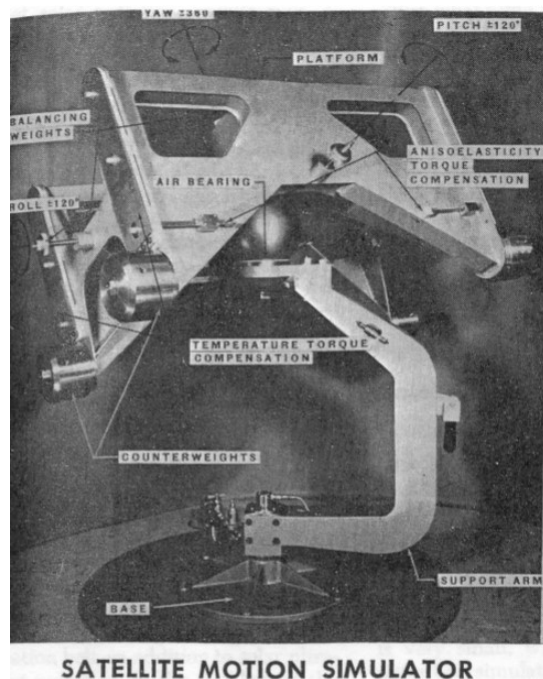


Figura 4. Uma das primeiras plataformas de ar esféricas a ser completamente conhecida a não ser mantida na confidencialidade (Schwartz, 2003)

Além dos modelos supracitados, pode-se verificar, também, a existência de uma outra topologia de sistemas rotacionais, a denominada topologia de “halteres”. As plataformas de ar em “halteres” caracterizaram uma grande revolução na forma de como ambientes de torques gravitacionais praticamente nulos eram simulados, de modo que, agora, ter-se-ia a possibilidade de rotação, sem restrições, de uma carga útil em mais de um eixo do sistema de coordenadas em utilização. Apesar de as formações em “topo de mesa” e “guarda-chuva” serem de extrema utilidade em experimentos visando dinâmica rotacional não linear, existe uma série de outras condições de voo de elementos aeroespaciais cujas simulações não eram propriamente realizáveis a partir de suas respectivas utilizações, ou seja, usando-se apenas um único grau de liberdade completo.

Um importante exemplo a ser dado é o equipamento de testes em plataforma de ar de três eixos coordenados, desenvolvido pela Universidade de Michigan já no final da década de 90.

A estrutura consiste em uma esfera de, aproximadamente, 28 centímetros de diâmetro, produzida pela empresa *Space Electronics, Incorporated*, de tal modo que por seu centro passa haste, a qual acaba também por suportar, em suas extremidades, dois platôs nos quais peças podem ser acopladas para os testes de rotação. A haste é oca, de tal modo que a fiação advinda do equipamento por ventura montado nos platôs não interferirá nos possíveis movimentos da carga útil a serem realizados pelo sistema. A configuração “halteres”, aqui, restringe a movimentação de um dos eixos coordenados em uma angulação de  $\pm 45^\circ$ , enquanto que os demais eixos coordenados permanecem completamente livres de quaisquer restrições de movimento. Magnetômetros, acelerômetros e contadores de giros tri axiais são acoplados ao equipamento a título de realização das medições básicas.

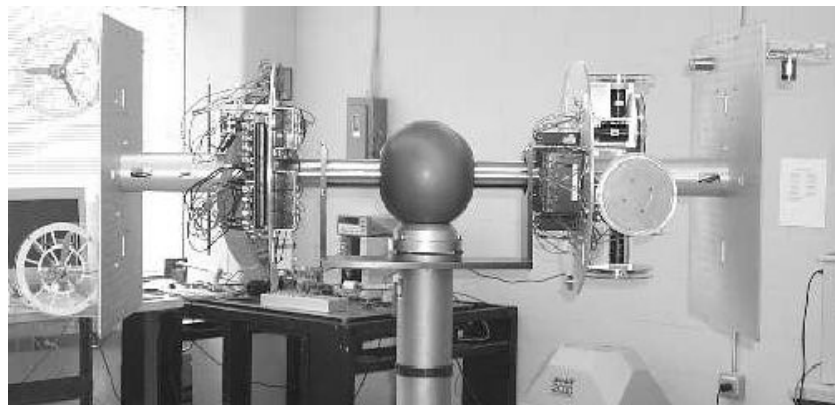
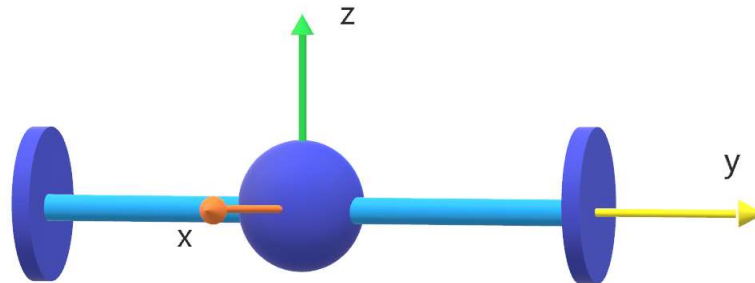


Figura 5. Na parte superior, formação “halteres” genérica e seus respectivos eixos. Na parte inferior, Plataforma tri axial em “halteres” desenvolvida pela Universidade de Michigan (Schwartz, 2003)

Como informação adicional, ainda existem os sistemas denominados de combinatórios, os quais, como o próprio nome já nos diz, combinam a funcionalidade de sistemas planares e rotacionais, podendo gerar, dessa maneira, mais de seis graus de liberdade sem restrições. Resumidamente, tem-se estruturas de plataforma de ar esféricas flutuando ao longo de um piso plano.

### 1.3.3 OTIMIZAÇÕES DE AMBIENTE

Assim como já anteriormente falado, é de grande importância, em simulações de ambiente de microgravidade sendo realizadas em Terra, a anulação dos efeitos de forças associadas ao torque gravitacional que agem no sistema de teste. Entretanto, tal anulação em nada será efetiva caso torques de naturezas diversificadas, que não a gravitacional, continuem a agir. Dessa maneira, necessita-se, constantemente, desenvolver métodos que possam, gradativamente, mitigar essas outras espécies de torques de distúrbio, causando, muitas vezes, grande complexidade quanto à montagem do ambiente laboratorial no qual o maquinário será inserido. A literatura no ramo aeroespacial define quanto principais classes de torques de distúrbio e algumas de suas principais origens, assim como abaixo: [Schwartz, 2003].



- i. Torques advindos da própria plataforma, causados, principalmente, por desequilíbrios estáticos e dinâmicos, anisotropia, mais precisamente, flexão da plataforma através dos movimentos rotacionais causando mudança de atitude, instabilidade dos materiais constituintes (*stress*, temperatura, humidade, evaporação), o gradiente de gravidade e a movimentação do próprio equipamento.
- ii. Torques advindos da estrutura responsável por expelir o ar pressurizado, causados, principalmente, por efeitos aerodinâmicos de não uniformidade da espessura da camada de ar e choque exacerbado das moléculas de ar com a estrutura sob a qual a camada de ar está inserida, *i.e.*, pressurização muito elevada.
- iii. Torques advindos do ambiente, causados, principalmente, por correntes de ar, campos magnéticos externos, vibrações e pressão de radiação, *i.e.*, pressão realizada em objetos através da radiação eletromagnética sobre eles incidente.
- iv. Torques advindos do sistema de teste, causados, principalmente, por mal posicionamento de fios, alterações na massa do sistema, engates mal estabelecidos, reposicionamentos de componentes base e descarregamento residual de baterias.

Torques dos grupos (i) e (iv) podem ser mitigados através de um projeto bem planejado e a materialização do que foi previamente estipulado com precisão, qualidade de construção e boa escolha da matéria-prima. Já para o torque associado ao grupo (ii), atualmente, sabe-se que já são pouquíssimo atuantes em sistemas de plataforma de ar modernos, causando efeitos mínimos e, na maioria dos casos, que podem ser completamente negligenciados. Por último, os torques supracitados como grupo (iii) são os mais dificilmente removidos em termos de experimentação e que mais demandam tempo e gastos quanto a planejamento para que possam assumir o *status* de desprezíveis. Diversas instalações da *NASA*, por exemplo, utilizam câmaras a vácuo para que os efeitos de resistência do ar e térmicos possam ser desprezados por completo. Entretanto, caso câmaras a vácuo não possam ser utilizadas como solução, fato que ocorre em situações nas quais necessitamos de um cenário tripulado, o controle minucioso de circulação de ar e térmico faz-se necessário. Em adição, muitas instalações, localizadas em regiões de elevada atividade sísmica, constroem seus respectivos ambientes laboratoriais sendo suportados por molas pneumáticas.

Como apanhado das informações aqui fornecidas, a utilização de sistemas planares é aconselhável e ideal para simulações experimentais que envolvem a dinâmica entre dois veículos aeroespaciais. Técnicas de manobras orbitais, entre elas, voo em formação, encontro e encaixe de veículos, podem ser testadas e aprimoradas antes que ocorra, de fato, um lançamento. Enquanto isso, plataformas esféricas têm suas utilizações aconselhadas em experimentos nos quais deseja-se incorporar técnicas avançadas de controle de atitude, entre elas, rastreamento de posição e compensação de dinamismo não modelado. Combinações de técnicas planares e esféricas podem replicar, com precisão, situações de baixo torque.

#### 1.3.4 PLATAFORMA DE AR – LAICA

A plataforma de ar presente no laboratório de aplicação e inovação em ciências aeroespaciais da Universidade de Brasília é do tipo rotacional esférica, de configuração em “topo de mesa”, produzida pela empresa *Nelson Air Corp* e cujo nome oficial é dado por *PIglide HB Hemispherical Air Bearing A-655*. A família *PIglide HB Hemispherical Air Bearing* de equipamentos produzidos pelo fabricante, constituída de calotas esféricas de diferentes diâmetros, é caracterizada por plataformas de ar passivas que promovem movimentos sem atrito, ou de baixíssimo atrito, em três graus de liberdade. A rotação com relação ao eixo  $z$  é ilimitada, enquanto que a rotação com relação aos demais eixos coordenados,  $x$  e  $y$ , é limitada à angulação de  $\pm 45^\circ$ . É válido ressaltar que o sistema não deve ser montado ou entrar em funcionamento sem que o fornecimento de ar esteja devidamente ligado e funcionando propriamente. A não presença do filme de ar causará contato direto entre os metais constituintes das estruturas, podendo provocar estragos permanentes que comprometerão o bom funcionamento de atuações futuras. Caso os usuários mantenham as estruturas sempre limpas e evitem choques, quedas ou batidas que possam comprometer a geometria geral dos elementos, o sistema funcionará anos a fio com a mesma precisão. Para a higienização, é aconselhável a utilização de panos ou lenços livres de fiapos, embebidos em isopropanol ou acetona, com o suprimento de ar sempre ligado. Deve-se evitar, ao máximo, o contato direto da mão com o metal, já que as digitais depositarão óleos corpóreos na estrutura e, conseqüentemente, o acúmulo de poeira.

A calota esférica, constituída de alumínio AL6061, caracterizado pelo processo de anodização dura, isto é, deposição de camadas duras de óxido de alumínio em meio ácido e baixa temperatura, gerando superfícies de grande resistência ao desgaste e boa capacidade de deslize, possui um diâmetro de 175mm e flutua sobre uma base côncava com seis orifícios, equidistantes em ângulo e com relação ao ponto de mínimo da concavidade, responsáveis por expelir o ar constituinte do fino filme. Mediante dados fornecidos pelo próprio fabricante, a faixa de funcionamento de pressão com a qual o sistema pode entrar em funcionamento, sem possíveis prejuízos, vai desde o valor de 30psi ao valor máximo permitido de 90psi (207Kpa a 621KPa), sendo o valor nominal igual a 80psi.

Ao ser expelido à uma pressão de 60psi, a camada de ar consegue suportar massas até 100Kg, enquanto que, subindo o valor de pressão ao nominal, passa-se a suportar uma massa de, aproximadamente, 165,6Kg.

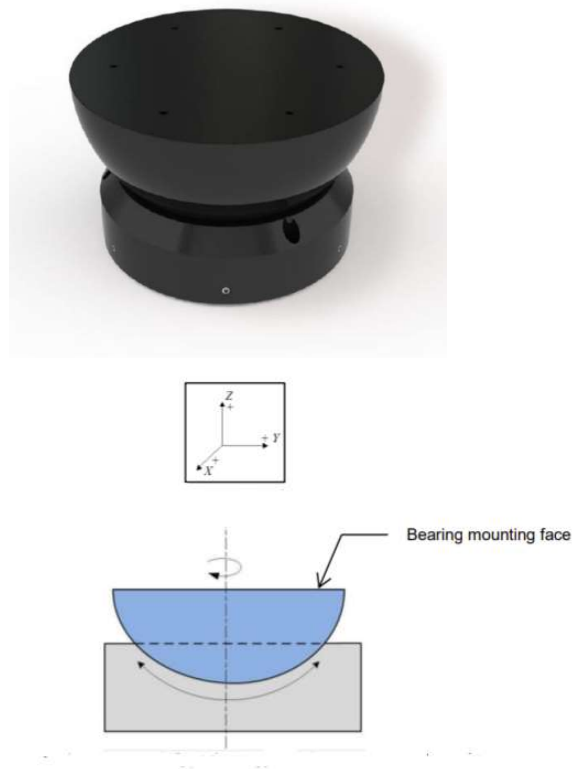


Figura 6. À esquerda, estrutura real contendo base côncava e a calota esférica. À direita, esquemático da estrutura real demonstrando seus respectivos graus de liberdade. (PI, 2018c).

O consumo de ar dá-se por um valor menor que 1,0 *Standard Cubic Feet per Minute, SCFM*, mais precisamente, menor que um pé cúbico por minuto, ou ainda, menor que 0,000472 metros cúbicos por segundo, de tal modo que o ar fornecido ao sistema deve ser limpo, isto é, não deve possuir partículas poluentes maiores que 1 micrômetro (*ISO 8573-1 Class 1*), livre de partículas oleoginosas (*ISO 8573-1 Class 1*) e ainda seco, *i.e.*, ponto de orvalho acontecendo à uma temperatura de  $-15^{\circ}\text{C}$  (*ISO 8573-1 Class 3*).

#### 1.4 UNIDADE DE MASSA MÓVEL E DRIVERS

As unidades de massa móvel, em um total de três, são utilizadas para alterar a distribuição de massa da mesa, provocando um deslocamento do centro de massa, a fim de que ocorra o balanceamento da estrutura em movimento rotacional. Para que as unidades de massa possam se movimentar, são utilizados motores de passo.

Um motor de passo é um tipo especial de motor síncrono capaz de girar um número específico de graus, de acordo com os diferentes pulsos elétricos recebidos em sua unidade de controle. É um motor bastante utilizado em sistemas de controle mediante suas respectivas precisões. [Chapman, 2013]

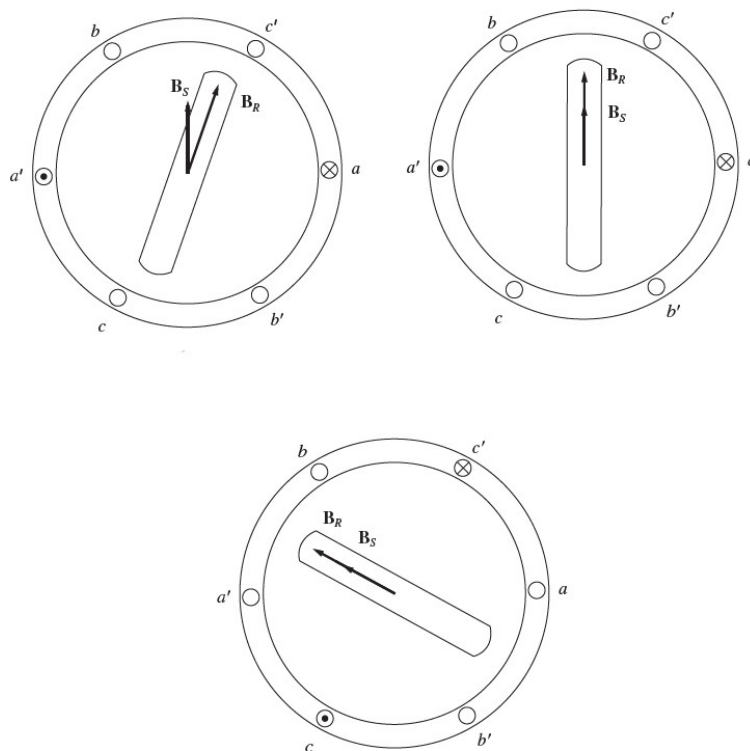


Figura7. Esquemático do funcionamento do motor de passos. (CHAPMAN, 2013).

A figura acima mostra um estator trifásico de dois polos com um rotor de ímã permanente. Caso uma tensão seja aplicada à fase *a* do estator, e nenhuma tensão for aplicada às fases *b* e *c*, um conjugado induzido será caracterizado no rotor, até o momento em que ocorre o alinhamento entre os campos magnéticos do rotor e do estator,  $B_R$  e  $B_S$ , respectivamente. Assumindo-se, agora, que a fase *a* é desligada e que aplica-se uma tensão negativa em *c*, o novo campo magnético do estator girará em  $60^\circ$  com relação ao campo magnético anteriormente estabelecido, enquanto que o rotor girará seguindo-o, de modo que os campos magnéticos fiquem, novamente alinhados. Caso o número de pólos seja aumentado, teremos menores deslocamentos angulares do rotor nos momentos em que ocorrer o desalinhamento de campos magnéticos do rotor e do estator. Por exemplo, se o motor tiver oito pólos, o ângulo mecânico do eixo do motor irá girar em  $15^\circ$  a cada passo. A relação entre a velocidade do motor, em rotações por minuto, e o número de pulsos por minuto torna-se

$$n_m = \frac{1}{3P} n_{\text{pulsos}} \quad (34)$$

em que  $n_{\text{pulsos}}$  corresponde ao número de pulsos por minuto.

Há dois tipos básicos de motores de passo, diferenciando-se entre si apenas pelo modo como o rotor é construído, são eles o motor de ímã permanente e o motor de relutância. O motor de passo do tipo de ímã permanente tem um rotor, obviamente, de ímã permanente, enquanto que o motor de passo do tipo de relutância tem rotor ferromagnético que não é um ímã permanente. O motor de ímã permanente, de modo geral, produz mais conjugado do que um motor de relutância, já que, no ímã permanente, o conjugado surge mediante campo magnético permanente do rotor e também devido aos efeitos de relutância. Motores de passo de relutância são, frequentemente, construídos com um enrolamento do estator de quatro fases no lugar do enrolamento trifásico descrito no exemplo de motor de passo genérico anteriormente dado, já que pode produzir um conjugado mais intenso.

Se o estator de um motor de passos tiver N fases, então 2N pulsos serão necessários para cada rotação elétrica do rotor. Assim sendo, a relação entre a velocidade do motor em rotações por minuto e o número de pulsos por minuto será

$$n_m = \frac{1}{NP} n_{\text{pulsos}} \quad (35)$$

Motores de passo são muito úteis em sistema de controle, como já dito, e posicionamento, porque suas respectivas unidades de controle podem conhecer tanto a velocidade quanto a posição exata do rotor, visto que os deslocamentos angulares são muito bem estabelecidos, sem necessidade de monitoramento do eixo do motor.

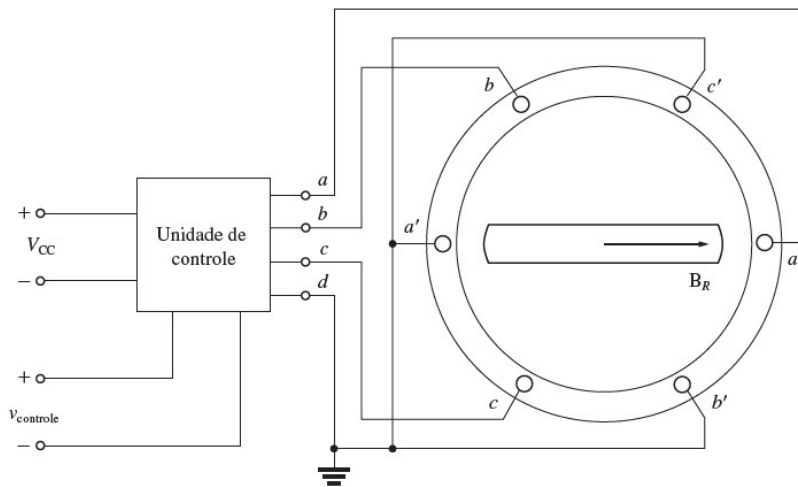


Figura 8. Esquemático de motor de passos. (CHAPMAN, 2013).

Constituindo o método de deslocamento das massas móveis, na plataforma LAICA, tem-se motores de passo, produzidos pela empresa Kysan Electronics, de modelo “SKU: 1124090” e “Mfg: 42BY GH4803-DC”. Especificações relativas ao motor de passos Kysan, abaixo.

Tabela 1. Especificações do motor de passos LAICA.

<b>Propriedades Elétricas</b>	
Tensão Nominal	4,2 V
Corrente por Fase	1,5 A
Resistência por Fase	$2,8 \pm 10\% \Omega$
Indutância por Fase	$4,8 \pm 20\% \text{ mH}$
Número de Fases	2
<b>Propriedades Mecânicas</b>	
Ângulo por Passo	$1,8^\circ$
Torque	5,5 Kg.cm

Como unidade de controle dos motores de passo, utilizou-se um *driver* de motor de passos baseado no circuito integrado A4988, produzido pela empresa *Allegro MicroSystems, Inc.*

O A4988 é um driver de motor construído para que tenha fácil modo de operação, operando juntamente a motores bipolares em modos de degrau completo, meio degrau, um quarto de degrau, um oitavo de degrau e, por último, um dezesseis avos de degrau, com uma capacidade máxima de saída de 35 V para a tensão elétrica e  $\pm 2$  A para a corrente elétrica.

Também inclui um regulador de corrente elétrica, o qual possui a capacidade de operar em modos de decaimento lento ou misto, sendo que o modo de decaimento misto resulta em uma redução no ruído audível do motor, aumenta a precisão dos degraus e reduz a dissipação de energia.



Figura 9. Motor de passos SKU: 1124090, 42BY GH4803-DC. (OZYAGCILAR, 2015).

## 1.5 OBJETIVOS DO PROJETO

O presente trabalho visa o estabelecimento de novas proposições matemáticas associadas a métodos de balanceamento de plataformas de ar responsáveis pela caracterização de testes de movimentação de pequenos satélites inseridos em ambiente de microgravidade. O método de balanceamento faz alusão ao estabelecimento da maior proximidade possível entre o centro de rotação e o centro de massa do sistema considerado, a fim de que um menor braço de alavanca esteja sendo, assim, caracterizado, diminuindo-se, desse modo, possíveis torques indesejados ao elemento aeroespacial, por exemplo, torques gravitacionais, que, quanto maiores, fariam, certamente, com que os períodos de oscilação do elemento aeroespacial fossem um tanto menores. Mais especificamente, objetiva-se a introdução de incertezas à grandeza inércia, presente nas equações de balanceamento, a fim de que regiões de incertezas, isto é, as regiões contendo todos os possíveis pontos pelos quais um determinado sistema pode excursionar em determinada situação de variação dos parâmetros incertos, possam ser espacialmente determinadas, podendo-se considerar espaços vetoriais das mais diversas dimensões.

## 2 REPRESENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO EM SISTEMA TRIDIMENSIONAL

*Um corpo rígido pode ser definido como um sistema de pontos de massa sujeito às restrições holônomas que as distâncias entre quaisquer pares de pontos de massa pertencentes ao corpo permanecem constantes ao longo do movimento. Apesar de ser apenas uma idealização para resolução de problemas físicos, o conceito é de extrema aplicabilidade, fazendo-se necessária a apresentação do tema com mais profundidade. Aqui, discutir-se-á a cinemática do corpo rígido, isto é, a natureza e características de seus respectivos movimentos. As técnicas matemáticas associadas à cinemática de corpo rígido podem ser estendidas à diversas áreas do conhecimento, principalmente em modelagens aeroespaciais.*

### 2.1 COORDENADAS INDEPENDENTES DE UM CORPO RÍGIDO

Antes do estabelecimento da discussão perante a movimentação de corpos rígidos, necessita-se, primeiro, estabelecer quantas coordenadas independentes são necessárias para especificar tal tipo de cenário. Um corpo rígido contendo  $N$  partículas pode ter, desse modo,  $3N$  graus de liberdade, sendo, entretanto, bastante reduzidos pelas restrições matemáticas, as quais podem ser caracterizadas por equações da seguinte forma

$$r_{ij} = c_{ij}. \quad (1)$$

Aqui,  $r_{ij}$  caracteriza a distância entre a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima partículas constituintes do corpo rígido, enquanto que a variável  $c$  representa diferentes valores de constantes, dependendo-se de quais duas partículas estão sendo analisadas. O grau de liberdade do sistema não pode ser obtido, simplesmente, calculando-se a subtração entre o valor de  $3N$  e o número de equações de restrições, visto que existem  $(1/2)N(N-1)$  equações possíveis, na forma anteriormente citada, as quais excedem o valor de  $3N$  para  $N$  suficientemente grande. Vale ressaltar que as equações de restrições matemáticas não são todas independentes entre si. Para um ponto fixo no corpo rígido, faz-se desnecessária a especificação de sua respectiva distância a todos os outros pontos do corpo, de modo que é necessário, unicamente, a caracterização da distância de tal ponto fixo a outros três pontos não colineares entre si. Assim que as posições de três das partículas do corpo são determinadas, as restrições fixarão as posições de todas as demais partículas restantes. O número de graus de liberdade, desse modo, não pode ser maior que nove, analisando-se as proposições anteriormente fornecidas. Além disso, os três pontos de referência também não são, entre eles, totalmente independentes. Existem, de fato, três equações de restrições de rigidez a eles impostas,

$$r_{12} = c_{12} \quad (2)$$

$$r_{23} = c_{23} \quad (3)$$

$$r_{13} = c_{13}, \quad (4)$$

as quais reduzem o número de graus de liberdade a seis. Para estabelecer-se o posicionamento de uma determinada partícula, são necessárias três coordenadas, considerando-se um cenário tridimensional. Entretanto, assim que o ponto 1 é fixado, o ponto 2 pode ser, apenas, especificado por duas coordenadas, já que seu posicionamento é agora restrito à casca esférica de uma esfera centrada no próprio ponto 1.

Com esses dois pontos determinados, o ponto de número 3 possui apenas um grau de liberdade, podendo, apenas, rotacionar quanto ao eixo unindo os outros dois pontos de número 1 e 2. Assim, um total de seis coordenadas faz-se suficiente. [Goldstein, 1980].

Um corpo rígido no espaço, então, necessita de seis coordenadas independentes para especificação de seus respectivas configurações, não importando quantas partículas nele existem. Podem existir outras restrições ao corpo que não as restrições de rigidez, por exemplo, considerando-se a movimentação do corpo unicamente em um plano, ou com um ponto fixo. Nesses casos, os graus de liberdade serão novamente reduzidos, assim como as coordenadas independentes. Verificar-se-á que a configuração de um corpo rígido é completamente determinada impondo-se a localização de um sistema de coordenadas cartesianas fixado no próprio corpo rígido, relativo aos eixos coordenados que caracterizam o espaço externo. Três coordenadas serão necessárias para caracterização da origem do sistema de eixos associados ao corpo rígido, enquanto que as outras três coordenadas serão necessárias para

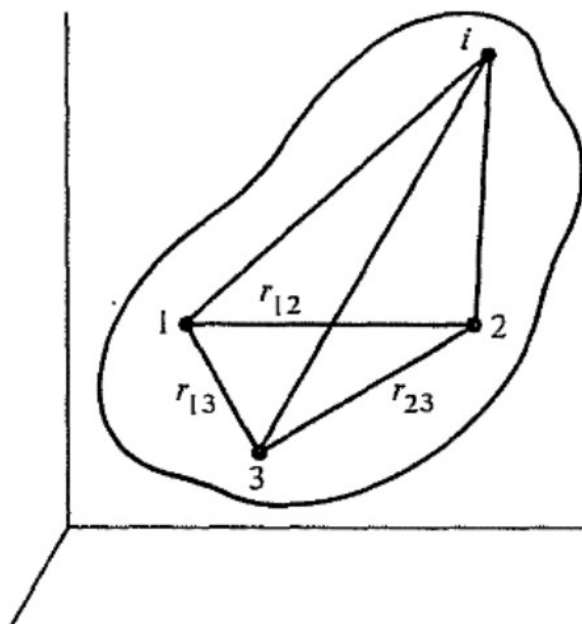


Figura 7. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980).

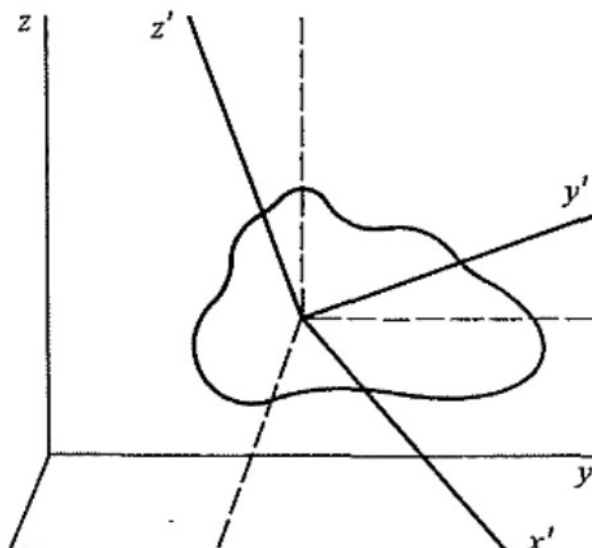


Figura 11. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980).

caracterização da orientação dos eixos hachurados relativamente a um sistema de coordenadas paralelo aos eixos externos, mas com a mesma origem fixada pelos próprios eixos hachurados.

Existem vários métodos pelos quais pode-se especificar a orientação de um sistema cartesiano de eixos relativo a outro sistema de eixos com a mesma origem. Aqui, serão utilizados os cossenos direcionais dos eixos hachurados relativamente aos dos eixos não hachurados. Assim, o eixo  $x'$ , por exemplo, poderia ser especificado por seus respectivos três cossenos direcionais,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , com respeito aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Os vetores unitários ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  serão dados por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , enquanto que os vetores  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  e  $\mathbf{k}'$  terão o mesmo efeito para os eixos hachurados. Os cossenos direcionais serão, assim, definidos como

$$\alpha_1 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} \quad (5)$$

$$\alpha_2 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} \quad (6)$$

$$\alpha_3 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}, \quad (7)$$

já que, para vetores unitários, suas normas são, conseqüentemente, iguais a um, assim como o produto entre elas. O vetor  $\mathbf{i}'$  pode ser expresso em termos de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  através da relação matemática

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \quad (8)$$

Ou então

$$\mathbf{i}' = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}. \quad (9)$$

De modo similar, os cossenos direcionais do eixo  $y'$  com respeito aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , representados por  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , podem ser representados por

$$\mathbf{j}' = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}. \quad (10)$$

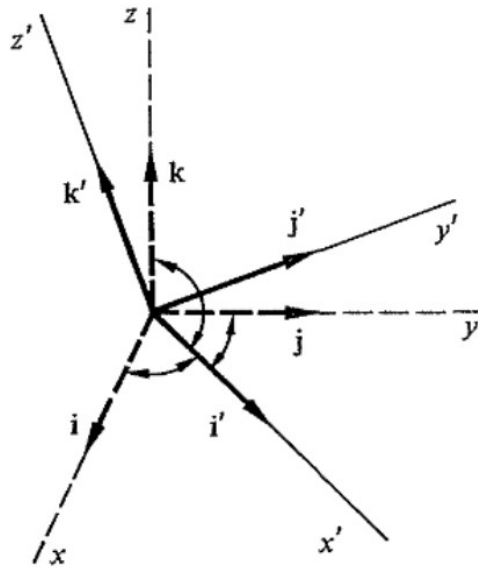


Figura 82. Representação gráfica dos cossenos direcionais do sistema de eixos do corpo com relação a um sistema de eixos externos. (GOLDSTEIN, 1980).

Pode-se estender a análise previamente feita a fim de que a equação abaixo também seja obtida, os cossenos direcionais do eixo  $z'$  com respeito aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , representados por  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ .



$$\mathbf{z}' = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}. \quad (11)$$

O conjunto dos nove cossenos direcionais anteriormente fornecidos descreve, completamente, a orientação de  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  relativamente aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Pode-se reverter o processo a título de representação dos vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  em termos dos eixos hachurados. Pode-se escrever que

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}')\mathbf{k}' \quad (12)$$

ou então

$$\mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i}' + \beta_1 \mathbf{j}' + \gamma_1 \mathbf{k}' \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = \alpha_2 \mathbf{i}' + \beta_2 \mathbf{j}' + \gamma_2 \mathbf{k}' \quad (14)$$

$$\mathbf{k} = \alpha_3 \mathbf{i}' + \beta_3 \mathbf{j}' + \gamma_3 \mathbf{k}'. \quad (15)$$

Os cossenos direcionais também fornecem as relações entre as coordenadas de um determinado ponto em um sistema específico, para as coordenadas do mesmo ponto em outro sistema caracterizado. As coordenadas de um ponto em um sistema são as componentes de um vetor posição, dado por  $\mathbf{r}$ , ao longo dos eixos do sistema. As coordenadas são fornecidas por

$$x' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (16)$$

$$y' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}') = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad (17)$$

$$z' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}') = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \quad (18)$$

Caso os eixos hachurados sejam tidos como fixos no corpo rígido, os novos cossenos direcionais serão funções do tempo, a medida que o corpo tem suas orientações alteradas ao longo do movimento estabelecido. Assim sendo, os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser considerados como variáveis as quais descrevem, instantaneamente, a orientação do corpo rígido, relativo a um sistema de eixos coordenados fixado no espaço, entretanto, com origem coincidindo com a origem do sistema de eixos do corpo. É válido verificar que, os vetores de base em ambos os sistemas coordenados são ortogonais entre si e possuem norma unitária, isto é,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (19)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (21)$$

e

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad (22)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad (23)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \quad (24)$$

Em termos dos coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , tem-se

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = 0 \quad \text{para } l, m = 1, 2, 3; l \neq m \quad (25)$$

$$\alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 = 1 \quad \text{para } l = 1, 2, 3. \quad (26)$$

As duas equações imediatamente anteriormente fornecidas são responsáveis pela redução do número de quantidades independentes de nove a três.

Pode-se ainda, realizar a combinação de equações utilizando-se o símbolo de *Kronecker*,  $\delta_{lm}$ , matematicamente definido por

$$\delta_{lm} = 1, \text{ para } l = m \quad (27)$$

$$\delta_{lm} = 0, \text{ para } l \neq m. \quad (28)$$

Assim, as equações podem ser reescritas como

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}. \quad (29)$$

Não é possível um conjunto de equações lagrangeanas de movimento e subsequentes com os nove cossenos direcionais como coordenadas generalizadas. Para esse propósito, deve ser usado um conjunto de três funções independentes dos cossenos direcionais, entre eles e um dos mais importantes, o conjunto dos ângulos de Euler. A utilização dos cossenos direcionais estabelece a prova de vários teoremas sobre a movimentação de corpos rígidos com muito mais facilidade e elegância, sendo, assim, uma ferramenta importantíssima.

## 2.2 TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

Para maior facilidade de notação, adotar-se-á de coordenadas assim como abaixo. [Goldstein, 1980].

$$x \rightarrow x_1 \quad (30)$$

$$y \rightarrow x_2 \quad (31)$$

$$z \rightarrow x_3 \quad (32)$$

Assim, as equações dos cossenos direcionais para os eixos coordenados  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , tornam-se

$$x_1' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \quad (33)$$

$$x_2' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}') = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \quad (34)$$

$$x_3' = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}') = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \quad (35)$$

As equações anteriormente fornecidas constituem um grupo de transformadas, formando um exemplo de transformação linear, ou também, como podem ser chamadas, transformações vetoriais, definidas através de:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad (36)$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad (37)$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \quad (38)$$

tal que  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , assim por diante, são um conjunto de constantes, independentes de  $x$  ou  $x'$ . A título de simplificação de notação, de agora em diante, introduzir-se-á a seguinte convenção. Sempre que um índice ocorrer duas ou mais vezes em um termo, estará implícito, que, sem quaisquer outros símbolos, os termos deverão ser somados ao longo de todos possíveis valores do índice. Assim, as equações acima tornam-se equivalentes a

$$x_i' = a_{ij}x_j, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (39)$$

ou seja, para a primeira equação, coloca-se  $i$  e  $j$  iguais a um, mantendo  $i$  fixo e igual a um, coloca-se  $j$  igual a dois e soma-se o novo termo ao termo anterior com ambos os valores de índice iguais a um, e assim por diante. Para troca de equações, isto é, caracterização das equações de  $x_2'$  e  $x_3'$ , varia-se o valor de  $i$  e segue-se os procedimentos anteriormente estipulados.

As equações de relação entre os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  também pode ser reescritas mediante nova notação. Já que ambos os sistemas de coordenadas são cartesianos, a magnitude de um vetor é dada em termos da soma dos quadrados de suas componentes. Como o vetor permanece inalterado, independentemente de qual sistema de coordenadas esteja sendo utilizado, no momento, a magnitude do vetor é necessariamente a mesma em ambos os sistemas. A não variação da magnitude do vetor pode ser dada por

$$x'_i x'_i = x_i x_i . \quad (40)$$

O lado esquerdo da equação torna-se

$$a_{ij} x_j a_{ik} x_k . \quad (41)$$

De modo que a igualdade só será atendida caso o lado direito da equação torne-se

$$a_{ij} a_{ik} = 1, \text{ para } j = k \quad (42)$$

$$a_{ij} a_{ik} = 0, \text{ para } j \neq k, \quad (43)$$

ou então

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \text{ para } j, k = 1, 2, 3. \quad (44)$$

A fórmula acima caracteriza uma transformação linear e é denominada de condição de ortogonalidade. Desse modo, a transição desde coordenadas fixadas no espaço a coordenadas fixadas no corpo rígido, com origem comum, é atingida por meio de uma transformação ortogonal, assim como exposto. A matriz de transformação, aqui escrita como  $\mathbf{A}$ , é composta pelos elementos de transformação e é dada pela estrutura abaixo.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Considere, por exemplo, o movimento de um corpo em um plano, fazendo com que os sistemas de coordenadas sejam bidimensionais. Como existem apenas duas dimensões, a matriz de transformação será dada através de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (46)$$

e

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \text{ para } j, k = 1, 2. \quad (47)$$

Apenas um parâmetro independente é necessário para especificação da transformação. Uma transformação bidimensional de um sistema cartesiano a outro sistema cartesiano corresponde, nada mais, nada menos, que uma própria rotação dos eixos no plano, de modo que a rotação pode ser caracterizada através do ângulo de rotação  $\phi$ .

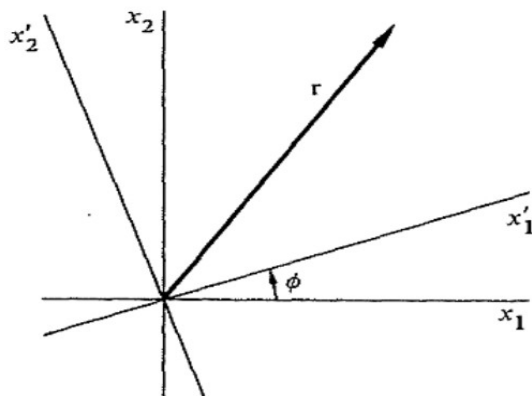


Figura 13. Rotação de eixos coordenados em cenário bidimensional. (GOLDSTEIN, 1980).  
As equações de transformação, para uma rotação bidimensional são

$$x_1' = \cos(\phi) x_1 + \text{sen}(\phi) x_2 \quad (48)$$

$$x_2' = -\text{sen}(\phi) x_1 + \cos(\phi) x_2, \quad (49)$$

portanto,

$$a_{11} = \cos(\phi) \quad (50)$$

$$a_{12} = \text{sen}(\phi) \quad (51)$$

$$a_{21} = -\text{sen}(\phi) \quad (52)$$

$$a_{22} = \cos(\phi), \quad (53)$$

e assim

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

As três condições de ortogonalidade tornam-se

$$1 = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} \quad (55)$$

$$1 = a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} \quad (56)$$

$$0 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}. \quad (57)$$

Substituindo pelos valores de  $a$ , tem-se

$$\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi) = 1 \quad (58)$$

$$\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1 \quad (59)$$

$$\cos(\phi)\text{sen}(\phi) - \text{sen}(\phi)\cos(\phi) = 0 \quad (60)$$

A matriz de transformação, aqui, pode ser vista como um operador o qual permite que tenhamos a transformação dos eixos não hachurados aos eixos hachurados, e vice-versa.

Vale ressaltar que, também aqui, a matriz de transformação atua, somente, nos sistemas de coordenadas, o vetor é apenas passado de um sistema ao outro, permanecendo inalterado em sua natureza. Há, também, a possibilidade de utilização da matriz de transformação para alteração da natureza do próprio vetor, ao invés de ter-se transformações nos sistemas de eixos coordenados. Na situação bidimensional, por exemplo, poder-se-ia ter a rotação do vetor  $\mathbf{r}$ , por um ângulo  $\phi$ , caracterizando-se, assim, um novo vetor  $\mathbf{r}'$ . A utilização da matriz de transformação alterando a natureza dos vetores possui aplicação mais difundida. Caso a transformação esteja associada, unicamente, à atuação nos sistemas de eixos coordenados, e não nos vetores, tem-se um denominado papel passivo, enquanto que, caso a transformação esteja associada, unicamente, à alteração dos vetores ou outras quantidades físicas, em detrimento de alterações nos sistemas de coordenadas, tem-se o denominado papel ativo.

No papel passivo, tem-se a seguinte relação matemática, de tal modo que os parênteses determinam a não alteração na natureza do vetor, isto é, a matriz de transformação opera nas componentes vetoriais no sistema de eixos não hachurados e obtêm-se as componentes vetoriais no sistema de eixos hachurados.

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (61)$$

No papel ativo, os parênteses são retirados, cuja interpretação deve ser estabelecida como a geração de um novo vetor a partir do operador de transformação.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (62)$$

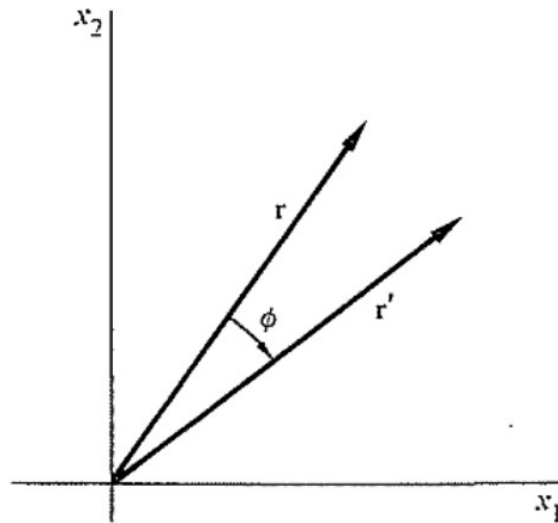


Figura 19. Representação gráfica de operação de transformação como rotação de um vetor, ou seja, em papel ativo. (GOLDSTEIN, 1980).

## 2.3 PROPRIEDADES FORMAIS DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

Considerar-se-á um cenário no qual sucessivas transformações ocorram, em outras palavras, pode-se interpretar tal fato como sendo uma junção de movimentos seguidos, estabelecidos pelo corpo rígido estudado. A primeira transformação de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  será dada pela matriz de transformação  $\mathbf{B}$ , [Goldstein, 1980].

$$x'_k = b_{kj}x_j, \quad (63)$$

enquanto que a transformação posterior, de  $\mathbf{r}'$  a  $\mathbf{r}''$ , será dada pela matriz de transformação  $\mathbf{A}$ ,

$$x_i'' = a_{ik}x'_k. \quad (64)$$

A relação entre  $x_i''$  e  $x_j$  pode ser dada através das duas equações, tornando-se:

$$x_i'' = a_{ik}b_{kj}x_j. \quad (65)$$

Fazendo

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}, \quad (66)$$

tem-se, finalmente,

$$x_i'' = c_{ij}x_j. \quad (67)$$

A sucessiva aplicação de duas transformações ortogonais,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , é equivalente à aplicação de um única transformação ortogonal  $\mathbf{C}$ . Simbolicamente, o operador  $\mathbf{C}$  pode ser considerado como o produto dos dois operadores,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , de tal modo que os elementos  $c_{ij}$  constituintes da matriz de transformação serão obtidos através da matriz quadrada caracterizada pela multiplicação de ambas as matrizes.

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad (68)$$

Para a multiplicação de duas matrizes de transformação, a ordem deve ser levada em conta, de tal modo que caso tenha-se, primeiramente, a transformação  $\mathbf{A}$  depois a transformação  $\mathbf{B}$ , ter-se-á uma situação diferente caso a transformação  $\mathbf{B}$  fosse cronologicamente anterior à matriz de transformação  $\mathbf{A}$ . Já para um produto de três ou mais matrizes, a multiplicação é associativa, isto é, a ordem de multiplicação não é importante.

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB} \quad (69)$$

e

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \quad (70)$$

## 2.4 ÂNGULOS DE EULER

Assim como já foi dito, os nove coeficientes  $a_{ij}$  não são suficientes como coordenadas generalizadas, já que não são quantidades independentes. As seis relações que expressam as condições de ortogonalidade reduzem o número de elementos independentes a três. Além do princípio de ortogonalidade entre os elementos das matrizes de transformação, há também outro requisito básico para caracterização do movimento de corpos rígidos. Verificar-se-á que uma matriz ortogonal cujo determinante é igual a -1 não poderá representar a movimentação física de um corpo rígido. Considerar-se-á uma simples matriz, cujo determinante é igual a -1.

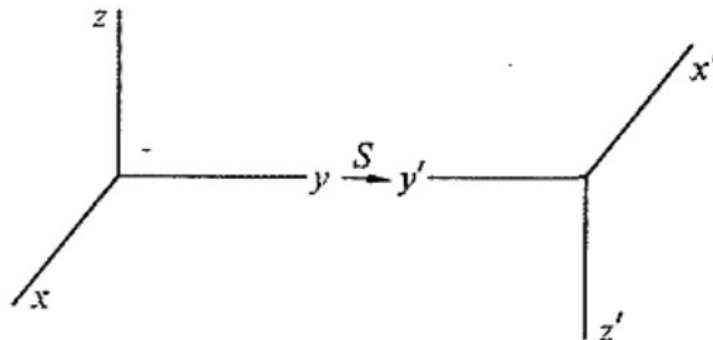


Figura 15. Efeito de inversão ou reflexão de eixos através da transformação em questão. (GOLDSTEIN, 1980).

A matriz de transformação  $S$ , aquela cujo determinante é igual a  $-1$ , tem o efeito de troca de sinal de cada uma das componentes de um vetor ou eixos coordenados, efeito também denominado de inversão ou reflexão dos eixos coordenados. [Goldstein, 1980].

É fácil verificar que a modificação de eixos coordenados assim como ocorre em uma situação de inversão ou reflexão não é possível para modificações rígidas na orientação dos eixos coordenados. Desse modo, uma inversão nunca corresponderá a um deslocamento físico de um corpo rígido. Para qualquer matriz que pode ser escrita como um produto de  $S$  com outra matriz cujo determinante positivo e igual a  $1$ , a análise de inconsistência é mantida e determina-se que é impossível que tal matriz possa caracterizar o movimento de um corpo rígido. Desse modo, a transformação representativa a movimentação de um corpo rígido deve restringir-se a matrizes cujos determinantes são iguais ao valor positivo de  $1$ . Outro método analítico para a verificação da proposta acima parte do fato de que a matriz de transformação deve surgir continuamente da matriz unitária, a qual, certamente, possui determinante igual a  $1$ , positivo. Seria completamente incompatível com a condição de continuidade do movimento ter um determinante matricial tendo seus valores alterados de  $+1$  a  $-1$  em um determinado instante de tempo. As matrizes de transformação cujos determinantes são iguais a  $+1$  são denominadas de próprias, enquanto que as matrizes de transformação cujos determinantes são iguais a  $-1$  são determinadas de impróprias, por motivos agora óbvios.

A fim de que se tenha uma descrição do movimento de corpos rígidos na formulação lagrangeana de mecânica, necessitar-se-á do estabelecimento de três parâmetros independentes que possam especificar a orientação do corpo rígido de tal modo que a matriz ortogonal correspondente tenha determinante igual ao valor positivo de  $1$ . Só quando tais condições forem atendidas pode-se, de fato, obter as equações lagrangeanas de movimento. Uma boa diversidade de tais parâmetros á foram propostos, entretanto, um dos mais difundidos, certamente, são os ângulos de Euler. Aqui, mostrar-se-á o que são os ângulos de Euler e como elementos de matrizes ortogonais de transformação podem ser, por eles, definidos e reescritos. A partir da definição da situação de transformação entre sistemas coordenados diferenciados, através de três específicas rotações, estabelecidas e uma ordem específica, são definidos os ângulos de Euler como sendo os três sucessivos ângulos de rotação. Dentro de certos limites, a escolha dos ângulos de rotação é arbitrária. Na descrição da teoria, serão adotados padrões muito aplicados em mecânica espacial, aplicada e, frequentemente, em físicas molecular e do estado sólido da matéria.

A sequência aplicada é iniciada através da rotação do sistema inicial de eixos coordenados,  $xyz$ , por um ângulo  $\phi$ , rotação essa anti-horária e em torno do eixo  $z$ , originando um novo sistema de eixos coordenados, denominado de  $\xi\eta\zeta$ . No segundo momento, o sistema de eixos coordenados  $\xi\eta\zeta$  é então rotacionado em torno do eixo  $\xi$ , de maneira também anti-horária por um ângulo de  $\theta$ , originando o novo sistema de eixos coordenados denominado de  $\xi'\eta'\zeta'$ . O eixo  $\xi'$  caracteriza a intersecção dos planos  $xy$  e  $\xi'\eta'$ , sendo denominado de linha de nós. Por último, o sistema de eixos coordenados  $\xi'\eta'\zeta'$  é rotacionado, de maneira anti-horária e por um ângulo de  $\psi$ , em torno do eixo  $\zeta'$ , produzindo o novo sistema de eixos coordenados  $x'y'z'$ . Os ângulos de Euler,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  completamente especificam a orientação do sistema coordenado  $x'y'z'$  com relação ao sistema  $xyz$  e, desse modo, podem servir como as três coordenadas generalizadas.

Os elementos da matriz de transformação completa,  $A$ , podem ser obtidos através do produto triplo das três matrizes de transformação características das rotações anteriormente caracterizadas. A rotação inicial em torno de  $z$  pode ser descrita pela matriz  $D$

$$\xi = D\mathbf{x}, \quad (71)$$

onde  $\xi$  e  $\mathbf{x}$  correspondem a matrizes de tipo coluna. De modo similar, a transformação de  $\xi\eta\zeta$  a  $\xi'\eta'\zeta'$  pode ser dada pela matriz  $C$ ,

$$\xi' = C\xi, \quad (72)$$

enquanto que a última rotação é representada pela matriz  $B$ ,

$$\mathbf{x}' = B\xi'. \quad (73)$$

A matriz relativa à transformação completa é dada por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (74)$$

tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{BCD}. \quad (75)$$

A matriz  $\mathbf{D}$ , rotação em torno de  $z$  por um ângulo  $\phi$ , é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

enquanto que  $\mathbf{C}$ , rotação em torno de  $\zeta$  por um ângulo de  $\theta$ , é fornecida como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (77)$$

e, por último,  $\mathbf{B}$ , rotação em torno de  $\zeta'$  por um ângulo  $\psi$ , é dada por

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

O produto entre as matrizes pode ser escrito, matematicamente, como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\ \cos \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\text{sen } \theta \cos \phi \\ \text{sen } \theta \text{sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (114)$$

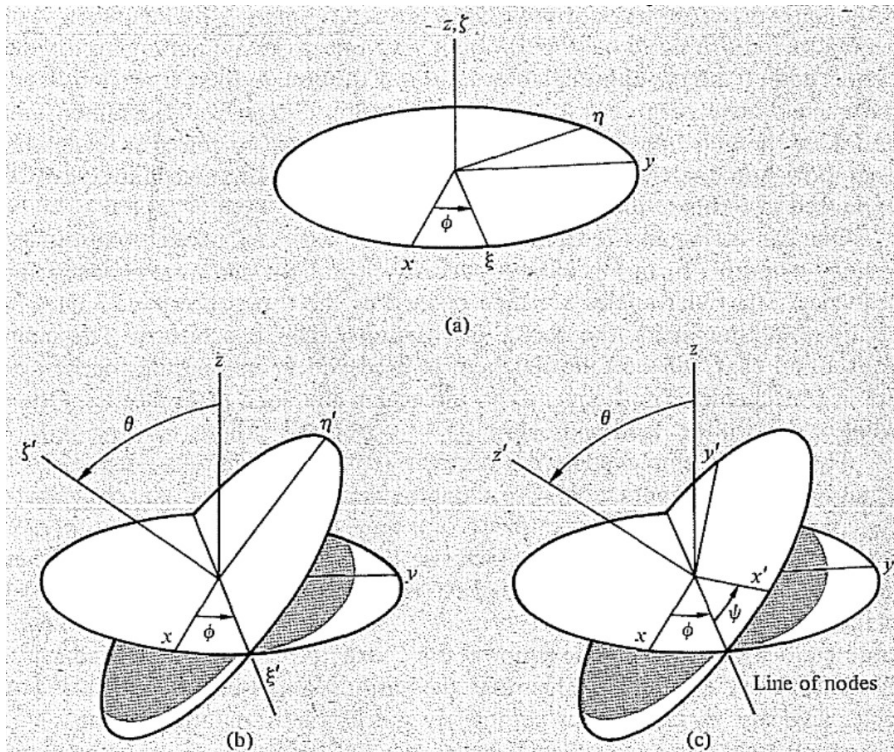


Figura 16. Rotações definidoras dos ângulos de Euler. (GOLDSTEIN, 1980).



A sequência de rotações utilizada para definição da orientação final dos eixos coordenados é, até certo ponto, arbitrária. A rotação inicial poderia, por exemplo, ter sido tomado em torno de qualquer um dos três eixos cartesianos. Nas próximas duas rotações, a única limitação existente é de que as rotações não podem ser tomadas em torno de um mesmo eixo coordenado. Assim, um total de doze cenários possíveis existem na empreitada de determinação dos ângulos de Euler. Os dois cenários mais frequentemente abordados diferem, apenas, quanto à decisão sobre em torno de qual dos eixos coordenados ter-se-á a segunda rotação. Em mecânica quântica, física nuclear e física da partícula, é mais comum a segunda rotação ser realizada em torno do eixo  $y$  intermediário, sendo denominada de *convenção-y*. A abordagem detalha nesse texto é denominada de *convenção-x*. Uma terceira convenção é utilizada em aplicações de engenharia relacionadas à orientação de veículos em movimento como, por exemplo, aeronaves e satélites. Ambas as convenções  $x$  e  $y$  possuem a desvantagem de que, caso os eixos hachurados e não hachurados sejam muito próximos um ao outro, os ângulos  $\psi$  e  $\phi$  tornam-se virtualmente indistinguíveis. Para que tal dificuldade seja mitigada, todas as três rotações são tomadas em torno de diferentes eixos. A primeira rotação é estabelecida ao redor do eixo vertical, originando o ângulo de guinada. A segunda, acontece em torno do eixo comumente tido como  $y$ , originando o ângulo de arfagem, e, por último, a rotação acontece ao redor do eixo  $x$ , originando o ângulo de rolagem. Pelo fato de que todos os eixos estão envolvidos nas rotações, tal sequência será denominada de *convenção-xyz*, também denominada de ângulos de *Tait-Bryan*. Utilizando-se a *convenção-xyz*, tem-se a matriz de rotação completa dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \psi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \quad (79)$$

## 2.5 TEOREMA DE EULER PARA A MOVIMENTAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS

As discussões acima fornecem importantes ferramentas matemáticas para caracterização completa da movimentação de corpos rígidos, visto que, em qualquer instante de tempo, a orientação do corpo pode ser especificada através de uma transformação ortogonal, cujos elementos podem ser representados em termos de parâmetros que mais convém no momento, como, por exemplo, os ângulos de Euler. Com o passar do tempo, o corpo pode continuar se movimentando, tendo suas orientações alteradas e fazendo com que a matriz de transformação seja, também, uma função do tempo, isto é,  $\mathbf{A}(t)$ . Para a situação inicial, instante de tempo em que  $t = 0$ , faz-se com que os eixos do corpo coincidam com os eixos representativos do espaço, de modo que a matriz de transformação será, assim, uma matriz identidade. Representar-se-á por:

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{I}. \quad (80)$$

Em qualquer outro instante de tempo, a matriz de transformação será, de modo geral, diferente da matriz de transformação identidade e, pelo fato de que o movimento físico deve ser sempre contínuo, a matriz de transformação  $\mathbf{A}(t)$  também deve ser uma função contínua do tempo. Diz-se que a matriz de transformação evolui continuamente, partindo-se da transformação identidade.

**Teorema de Euler:** O deslocamento geral de um corpo rígido com um ponto fixo caracteriza uma rotação com relação a algum dos eixos coordenados. [Goldstein, 1980].

Caso o ponto fixo seja tomado como sendo a origem do sistema de eixos coordenados do corpo, então o deslocamento do corpo não envolverá translações dos próprios eixos do corpo, as únicas mudanças serão quanto às orientações. O teorema proposto por Euler diz que, o sistema de eixos coordenados do corpo, para qualquer instante de tempo  $t$ , poderá ser obtido realizando-se, apenas, uma rotação do conjunto inicial de eixos. Em suma, o operador matriz transformação que descreve a movimentação do corpo rígido, aqui, estará sempre associado a eventos rotacionais. É característica básica de uma rotação o fato de que uma direção, sempre o eixo de rotação, não é afetado pelas operações de transformação. Assim, quaisquer vetores que estejam localizados ao longo do eixo de rotação precisam, necessariamente, ter as mesmas componentes em ambos os sistemas de eixos coordenados, antes e depois da rotação. As condições de ortogonalidade garantirão que as magnitudes dos vetores não sejam afetadas a partir do momento que as transformações passam a ser aplicadas. Quer-se dizer que, pelo teorema de Euler, existe um vetor  $\mathbf{R}$  possuindo as mesmas componentes em ambos os sistemas coordenados. Matematicamente,

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} = \mathbf{R} \quad (81)$$

De modo mais generalizado, pode-se escrever a equação acima como

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} = \lambda \mathbf{R}, \quad (82)$$

tal que  $\lambda$  representa uma determinada constante, podendo ser complexa. Os valores de  $\lambda$  para os quais a equação acima apresenta solução são denominados de valores característicos ou autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ . Agora, com a introdução da equação dos valores característicos, pode-se considerar o teorema de Euler como: a matriz real ortogonal que especifica os movimentos físicos de um corpo rígido, com um ponto fixo, sempre terá seus valores característicos, ou autovalores, como sendo positivos e iguais a 1. Reescrevendo a equação de autovalores, tem-se

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (83)$$

ou, de forma expandida,

$$(a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \quad (84)$$

$$a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z = 0 \quad (85)$$

$$a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z = 0. \quad (86)$$

Acima, três equações homogêneas para obtenção das componentes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do autovetor  $\mathbf{R}$ . Entretanto, as equações acima não são capazes de determinar valores específicos para cada uma das componentes do autovetor, e sim relações entre as mesmas componentes. Fisicamente, tal fato corresponde à situação de que apenas a direção do autovetor pode ser fixada, permanecendo a magnitude indeterminada. Para determinação dos coeficientes multiplicativos das componentes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do autovetor  $\mathbf{R}$ , faz-se o cálculo da equação secular da matriz, isto é,

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (87)$$

De modo geral, a equação secular possuirá três raízes com três autovetores associados. Aqui, será aplicada uma mudança quanto à notação das fórmulas, de modo que, agora,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  serão representados por  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ . Utilizando-se tal notação, os componentes do autovetor podem ser caracterizados como  $X_{ik}$ , de modo que o primeiro índice,  $i$ , representa a componente particular do autovetor, enquanto que o segundo índice,  $k$ , representa qual dos autovetores está sendo considerado. Reescrevendo o sistema dado acima, tem-se

$$\sum_j a_{ij}X_{jk} = \lambda_k X_{ik}, \quad (88)$$

ou

$$\sum_j a_{ij}X_{jk} = \sum_j X_{ij}\delta_{jk} \lambda_k. \quad (89)$$

No lado esquerdo, tem-se, de modo matricial, a multiplicação de uma matriz  $\mathbf{A}$  mediante uma matriz  $\mathbf{X}$ , enquanto que, no lado direito, tem-se o produto de  $\mathbf{X}$  com uma matriz cujo  $jk$ -ésimo elemento é representado por  $\delta_{jk}\lambda_k$ . Considerar-se-á a matriz  $\lambda$  como sendo

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Assim, de modo matricial, a equação de somatórios pode ser reescrita como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\lambda \quad (91)$$

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \lambda \quad (92)$$

O teorema de Euler pode ser provado pelo uso das propriedades de ortogonalidade da matriz transposta  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Considera-se

$$(\mathbf{A} - 1)\tilde{\mathbf{A}} = 1 - \tilde{\mathbf{A}}. \quad (93)$$

Calculando os determinantes em ambos os lados da equação, tem-se

$$|\mathbf{A} - 1||\tilde{\mathbf{A}}| = |1 - \tilde{\mathbf{A}}|. \quad (94)$$

Como já foi visto, para descrição da movimentação de um corpo rígido, a matriz  $\mathbf{A}(t)$  deve corresponder a uma matriz de transformação própria, de modo que seu determinante, assim como o determinante de sua matriz transposta, devem ser iguais ao valor positivo de 1. O determinante de uma matriz particular é o mesmo que o determinante da mesma matriz particular quando negativa. Seja  $\mathbf{B}$  uma matriz  $n$  por  $n$ , é sabido que

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|. \quad (95)$$

Já que trabalha-se em um espaço tridimensional e, conseqüentemente,  $n = 3$ , é fácil verificar que, haverá rotação própria, se e somente se

$$|\mathbf{A} - 1| = |1 - \mathbf{A}| = 0. \quad (96)$$

Verifica-se que, na prova do teorema de Euler, a dimensão do espaço no qual se está trabalhando é de extrema importância. Em espaços cujas dimensões são pares, o teorema de Euler não é suportado. Assim, para um espaço bidimensional, por exemplo, não existem vetores, no espaço, que permanecem inalterados por uma rotação.

Agora, determinar-se-ão as propriedades dos autovalores em três dimensões. Será considerado que o autovalor  $\lambda_3$  equivale a +1. Sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz de transformação própria,

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (97)$$

Em adição, como  $\mathbf{A}$  é uma matriz real, então caso  $\lambda$  seja uma solução da equação secular anteriormente proposta, o complexo conjugado do parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda^*$ , também deverá ser uma solução da mesma equação secular. Se um determinado autovalor  $\lambda_i$  é complexo, seu autovetor correspondente,  $\mathbf{R}_i$ , também será, de modo geral, complexo. Vale ressaltar que, até o momento, a análise teórica ainda não havia abordado propriedades de vetores complexos sendo submetidos a transformações ortogonais reais, de modo que, algumas modificações devem ser estabelecidas para adequação da teoria. O quadrado da magnitude de um vetor complexo é dado pelo produto entre o vetor transposto e seu conjugado, ou seja,  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}^*$ . Submetido a transformação ortogonal real, o quadrado da magnitude permanece invariante, isto é,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R}^* = (\mathbf{AR})^T \mathbf{AR}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AR}^* = \mathbf{R}^T \mathbf{R}^*. \quad (98)$$

Supõe-se, agora, que  $\mathbf{R}$  é um autovetor complexo, correspondente a um autovalor também complexo  $\lambda$ . Então,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R}^* = \lambda \lambda^* \mathbf{R}^T \mathbf{R}^*, \quad (99)$$

cenário com o qual a seguinte conclusão é estabelecida:

$$\lambda \lambda^* = 1. \quad (100)$$

Caso os autovalores sejam reais, conclui-se que:

- i. Todos os autovalores são iguais ao valor positivo de 1 e, assim, a matriz de transformação é a matriz de identidade;
- ii. Um autovalor do espaço tridimensional é igual ao valor positivo de 1, enquanto que os outros dois assumem o valor de -1. Essa transformação pode ser, fisicamente, analisada como uma inversão de dois eixos coordenados enquanto o terceiro é mantido inalterado.

Caso nem todos os autovalores sejam reais, adiciona-se a seguinte proposição:

- i. Um autovalor é igual ao valor positivo de 1, enquanto que os demais são conjugados, um com relação ao outro, através da aplicação da fórmula de Euler para notação de números complexos.

Os cossenos direcionais dos eixos de rotação podem ser obtidos fazendo-se  $\lambda = 1$  e resolvendo o sistema abaixo para  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

$$(a_{11} - 1)X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0 \quad (101)$$

$$a_{21}X + (a_{22} - 1)Y + a_{23}Z = 0 \quad (102)$$

$$a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - 1)Z = 0. \quad (103)$$

É possível a modificação da matriz  $\mathbf{A}$  para que um sistema de eixos coordenados no qual o eixo  $z$  coincida com o eixo de rotação seja atingido. Em tal sistema,  $\mathbf{A}'$  representa a rotação em torno do eixo  $z$ , por um ângulo equivalente a  $\Phi$ . Desse modo,

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \text{sen } \Phi & 0 \\ -\text{sen } \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

O traço da matriz  $\mathbf{A}'$  é dado por:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}') = 1 + 2 \cos \Phi. \quad (105)$$

Assume-se que o traço é invariante submetendo-se ao processo de transformação anteriormente estipulado, ou seja, rotação em torno do eixo  $z$ , por um ângulo equivalente a  $\Phi$ . Assim,

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = 1 + 2 \cos \Phi, \quad (106)$$

fórmula a qual fornece o valor do ângulo  $\Phi$  em termos dos elementos da matriz cujo traço está sendo determinado. O ângulo de rotação  $\Phi$  também é identificado como a fase dos autovalores complexos  $\lambda$ , já que a soma dos autovalores corresponde ao traço de  $\mathbf{A}$  em sua forma diagonal. Pelo teorema de Euler e pelas propriedades dos autovalores:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{j\Phi} + e^{-j\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi. \quad (107)$$

Percebe-se que, no cenário no qual todos os autovalores são reais, tem-se, apenas, uma situação especial do caso em que  $\mathbf{A}$  possui autovalores complexos. Caso todos os autovalores sejam iguais a +1, o ângulo de rotação  $\Phi$  é dado por 0 e, caso tenha-se um autovalor duplo igual a -1, o ângulo de rotação  $\Phi$  é dado por  $\pi$ . Após toda a matemática apresentada, introduz-se, finalmente, um corolário associado ao teorema de Euler.

**Corolário de Chasles:** A movimentação mais generalizada de um corpo rígido é caracterizada por uma translação e por uma rotação.

## 2.5.1 TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DE UM VETOR

Em muitos casos, é de elevada conveniência expressar o vetor de velocidade angular em termos dos ângulos de Euler e suas respectivas derivadas temporais. A rotação infinitesimal geral associada a  $\omega$  pode ser dividida em três sucessivas rotações infinitesimais de velocidades angulares iguais a

$$\omega_\phi = \dot{\phi} \quad (108)$$

$$\omega_\theta = \dot{\theta} \quad (109)$$

$$\omega_\psi = \dot{\psi}. \quad (110)$$

Em consequência da propriedade vetorial das rotações infinitesimais, o vetor  $\omega$  pode ser obtido através da soma dos três vetores de velocidade angular, separadamente. Infelizmente, as direções  $\omega_\phi$ ,  $\omega_\theta$  e  $\omega_\psi$  não são simetricamente dispostas, já que  $\omega_\phi$  encontra-se ao longo do eixo espacial  $z$ ,  $\omega_\theta$  encontra-se ao longo da linha de nós  $e$ , por último,  $\omega_\psi$  encontra-se ao longo do eixo do corpo  $z'$ .

Entretanto, as matrizes de transformações ortogonais **B**, **C** e **D**, fornecidas previamente na obtenção dos ângulos de Euler, podem ser usadas para obtenção das componentes desses vetores ao longo de qualquer conjunto de eixos que se queira. O conjunto de eixos coordenados do corpo mostra-se o mais útil para analisar e discutir as equações de movimento, de modo que as componentes de  $\omega$  serão nele obtidas. Como  $\omega_\phi$  é paralelo ao eixo espacial  $z$ , suas componentes ao longo dos eixos do corpo são dadas através da aplicação da transformação ortogonal completa,  $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ :

$$(\omega_\phi)_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad (111)$$

$$(\omega_\phi)_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (112)$$

$$(\omega_\phi)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta. \quad (113)$$

A linha de nó, correspondente à direção de  $\omega_\theta$ , coincide com o eixo  $\zeta'$ , de modo que as componentes de  $\omega_\theta$ , com relação aos eixos coordenados do corpo, são caracterizadas, apenas, pela aplicação da última transformação ortogonal **B**:

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi \quad (114)$$

$$(\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta} \sin \psi \quad (115)$$

$$(\omega_\theta)_{z'} = 0. \quad (116)$$

Nenhuma transformação é necessária aos componentes de  $\omega_\psi$ , os quais já se localizam ao longo do eixo  $z'$ . Adicionando tais termos das velocidades angulares separadas entre si, as componentes de  $\omega$  com relação ao sistema de eixos coordenados do corpo são

$$(\omega)_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (117)$$

$$(\omega)_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (118)$$

$$(\omega)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (119)$$

## 2.6 ALGORITMO ECOMPASS DE COMPENSAÇÃO DE TILT

O algoritmo *eCompass* de compensação de *tilt* utiliza um acelerômetro e um magnetômetro, ambos com sistemas de medição em três eixos coordenados, de tal modo que o acelerômetro é responsável pela medição das componentes da força gravitacional terrestre, enquanto que o magnetômetro será responsável pelas medições das componentes do campo geomagnético.

O acelerômetro e o magnetômetro precisam estar fixados em uma mesma estrutura física para que suas respectivas orientações sejam simultaneamente alteradas com a orientação da estrutura que os contém. Como a posição da estrutura que suporta o acelerômetro e o magnetômetro é, na maioria das vezes, arbitrária, as medidas serão funções das três leituras do acelerômetro e das três leituras possíveis do magnetômetro. O algoritmo tem como prioridade o cálculo dos três ângulos básicos definidores da orientação da estrutura em estudo, a qual também contém o acelerômetro e o magnetômetro, rolagem, arfagem e guinada. Considerar-se-á a posição inicial do acelerômetro,  $\mathbf{G}_r$ , e do magnetômetro,  $\mathbf{B}_r$ , como sendo equivalentes aos seguinte vetores

$$\mathbf{G}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (120)$$

e

$$\mathbf{B}_r = B \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}, \quad (121)$$

de tal modo que a aceleração da gravidade é, aproximadamente, igual a  $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , B faz alusão à intensidade do campo geomagnético, a qual varia de acordo com a localidade global onde se está localizado e  $\delta$  faz alusão ao ângulo de inclinação do campo geomagnético, medido para baixo do horizonte, e varia desde valores de  $-90^\circ$ , no sul magnético terrestre, a valores de  $+90^\circ$ , no norte magnético terrestre. Ao longo da explicação do algoritmo, será verificado que não serão necessários os valores de intensidade de campo geomagnético nem ângulo de inclinação do campo para que o algoritmo funcione com precisão, visto que tais valores são cancelados nos processos de cálculo de ângulos. As matrizes de transformação, aqui, serão dadas através das seguinte estruturas, visto que, diferentemente das provas de ângulo de Euler apresentadas no trabalho, as rotações em torno dos eixos são definidas de maneira horária. [Ozyagcilar, 2015]

$$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (124)$$

As leituras no acelerômetro,  $\mathbf{G}_c$ , e no magnetômetro,  $\mathbf{B}_c$ , do corpo em estudo, após as três rotações em torno dos eixos  $z$ ,  $y$  e  $x$ , respectivamente, serão escritas, matematicamente, como

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{G}_r = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (125)$$

e

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{B}_r = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)B \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}. \quad (126)$$

Assume-se que o corpo não está submetido a acelerações lineares e que o sinal do acelerômetro,  $\mathbf{G}_c$ , é função da gravidade e da orientação do corpo, unicamente. O algoritmo não funcionará com precisão caso o corpo contendo o acelerômetro esteja submetido a uma aceleração linear.

Assume-se também que os efeitos dos campos magnéticos gerados pelo núcleo interno duro terrestre e o núcleo líquido mais externo são desprezíveis. Caso os efeitos magnéticos do núcleo interno sólido fossem considerados, dever-se-ia considerar um vetor aditivo na equação do magnetômetro após as rotações, isto é,

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{B}_r + \mathbf{V} = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \quad (127)$$

O algoritmo *eCompass* de compensação de *tilt*, primeiramente, calcula os ângulos de arfagem e rolagem através das medições do acelerômetro pela multiplicação da fórmula matemática do acelerômetro,  $\mathbf{G}_c$ , após as rotações, pelas matrizes de transformação inversas de arfagem e rolagem,  $\mathbf{R}_y(-\theta)$  e  $\mathbf{R}_x(-\psi)$ , respectivamente.

Assim, ter-se-á

$$\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\psi)\mathbf{G}_c = \mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\psi) \begin{pmatrix} G_{cx} \\ G_{cy} \\ G_{cz} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad (128)$$

de modo que  $G_{cx}$ ,  $G_{cy}$  e  $G_{cz}$  são as componentes gravitacionais medidas pelo acelerômetro.

Substituindo os valores das matrizes de transformação inversas na fórmula:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{cx} \\ G_{cy} \\ G_{cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad (129)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{cx} \\ G_{cy} \\ G_{cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Realizando a multiplicação matricial e escrevendo o sistema na forma de equações, pode-se perceber que a componente em  $y$  é responsável pela definição de ângulo de rolagem, isto é,

$$G_{cy} \cos \psi - G_{cz} \sin \psi = 0 \quad (131)$$

$$G_{cy} \cos \psi = G_{cz} \sin \psi \quad (132)$$

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{G_{cy}}{G_{cz}} \quad (133)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{G_{cy}}{G_{cz}} \right), \quad (134)$$

e a componente em  $x$  é responsável pela definição do ângulo de arfagem como

$$G_{cx} \cos \theta + G_{cy} \sin \theta \sin \psi + G_{cz} \sin \theta \cos \psi = 0 \quad (135)$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left( \frac{-G_{cx}}{G_{cy} \sin \psi + G_{cz} \cos \psi} \right) \quad (136)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{-G_{cx}}{G_{cy} \sin \psi + G_{cz} \cos \psi} \right). \quad (137)$$

Com a definição dos ângulos de rolagem e arfagem, passa-se à fórmula matemática da situação inicial do magnetômetro, multiplicando-a, também, pelas matrizes inversas de transformação em  $x$  e em  $y$ .

$$\mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \mathbf{R}_y(-\theta) \mathbf{R}_x(-\psi) (\mathbf{B}_c - \mathbf{V}) \quad (138)$$

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \delta \\ -\sin \phi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{cx} - V_x \\ B_{cy} - V_y \\ B_{cz} - V_z \end{pmatrix} \quad (139)$$

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \delta \\ -\sin \phi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{cx} - V_x \\ B_{cy} - V_y \\ B_{cz} - V_z \end{pmatrix} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \delta \\ -\sin \phi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (B_{cx} - V_x) \cos \theta + (B_{cy} - V_y) \sin \theta \sin \psi + (B_{cz} - V_z) \sin \theta \cos \psi \\ (B_{cy} - V_y) \cos \psi - (B_{cz} - V_z) \sin \psi \\ -(B_{cx} - V_x) \sin \theta + (B_{cy} - V_y) \cos \theta \sin \psi + (B_{cz} - V_z) \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{fx} \\ B_{fy} \\ B_{fz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (141)$$

O vetor composto por  $B_{fx}$ ,  $B_{fy}$  e  $B_{fz}$  representa as componentes do magnetômetro após correções para o *offset* dos efeitos do campo magnético do núcleo duro e após os processos inversos de rotação ao plano em que  $\theta = \psi = 0$ .

Através das componentes em  $x$  e em  $y$ , tem-se

$$B \cos \phi \cos \delta = B_{fx} \quad (142)$$

e

$$B \sin \phi \cos \delta = -B_{fy}. \quad (143)$$

Assim,

$$\tan \phi = \frac{-B_{fy}}{B_{fx}} = \left( \frac{(B_{cz} - V_z) \sin \psi - (B_{cy} - V_y) \cos \psi}{(B_{cx} - V_x) \cos \theta + (B_{cy} - V_y) \sin \theta \sin \psi + (B_{cz} - V_z) \sin \theta \cos \psi} \right) \quad (144)$$



e

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{-B_{fy}}{B_{fx}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{(B_{cz} - V_z) \operatorname{sen} \psi - (B_{cy} - V_y) \cos \psi}{(B_{cx} - V_x) \cos \theta + (B_{cy} - V_y) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + (B_{cz} - V_z) \operatorname{sen} \theta \cos \psi}\right).\end{aligned}\tag{145}$$

### 3 PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS E RESULTADOS

Para a análise cinemática de movimentação de corpos rígidos em espaços de eixos coordenados tridimensionais, às vezes, dever-se-á realizar o cálculo de até seis quantidades inerciais, os momentos e produtos de inércias, descrevendo, desse modo, a distribuição de massa para um corpo, relativa a um determinado sistema de eixos coordenados com orientação e ponto de origem especificados.

#### 3.1 MOMENTO DE INÉRCIA

Considerar-se-á o corpo mostrado na figura abaixo (Figura 48.). O momento de inércia para um elemento diferencial de massa  $dm$  do corpo, com relação a quaisquer um dos três eixos coordenados, é definido, como o produto da massa do elemento diferencial pelo quadrado da menor distância possível entre o eixo coordenado considerado e o próprio elemento diferencial de massa. Por exemplo, na figura, verifica-se que o elemento diferencial de massa está localizado na aresta de um paralelepípedo, assim, o momento de inércia diferencial do elemento com relação ao eixo coordenado  $x$  é dado por [Hibbeler, 2010]

$$dI_{xx} = r_x^2 dm = (y^2 + z^2) dm. \quad (146)$$

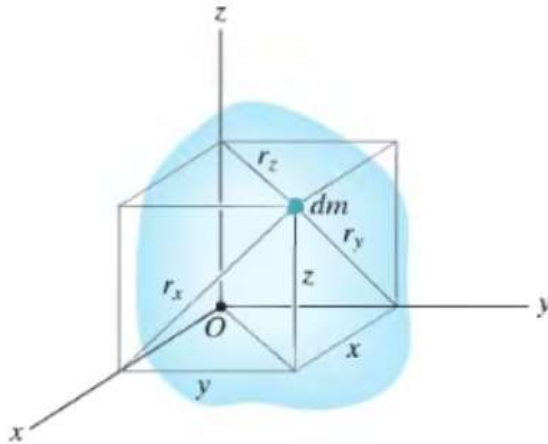


Figura 17. Demonstrativo do elemento diferencial de massa. (HIBBELER, 2010).

O momento de inércia, de fato, pode ser determinado a partir da integração do elemento diferencial de momento de inércia ao longo de toda a massa do corpo considerado. Desse modo, associadas a cada um dos eixos coordenados em questão,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as expressões matemáticas abaixo podem ser escritas:

$$I_{xx} = \left( \int r_x^2 dm \right)_m = \left( \int (y^2 + z^2) dm \right)_m \quad (147)$$

$$I_{yy} = \left( \int r_y^2 dm \right)_m = \left( \int (x^2 + z^2) dm \right)_m \quad (148)$$

$$I_{zz} = \left( \int r_z^2 dm \right)_m = \left( \int (x^2 + y^2) dm \right)_m. \quad (149)$$

O momento de inércia é, desse modo, sempre positivo, já que faz alusão à integração de um produto entre elementos sempre positivos, os elementos diferenciais de massa, e a soma do quadrado das distâncias.

### 3.2 PRODUTO DE INÉRCIA

O produto de inércia, para um elemento diferencial  $dm$ , com relação a um conjunto de dois planos ortogonais pode ser definido como o produto entre a massa do elemento diferencial e as menores distâncias, perpendiculares aos planos, entre os planos e o próprio elemento diferencial. Considerando-se a figura representativa do elemento de massa anteriormente fornecida, pode-se dizer que essa distância é  $x$  para o plano  $y-z$ ,  $y$  para o plano  $x-z$  e  $z$  para o plano  $x-y$ . Assim, [Hibbeler, 2010]

$$dI_{xy} = dI_{yx} = xy \, dm \quad (150)$$

$$dI_{yz} = dI_{zy} = yz \, dm \quad (151)$$

$$dI_{xz} = dI_{zx} = xz \, dm. \quad (152)$$

Agora, os elementos diferenciais de produto de inércia são integrados na totalidade da massa do corpo considerado, de modo que

$$I_{xy} = I_{yx} = \left( \int xy \, dm \right)_m \quad (153)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \left( \int yz \, dm \right)_m \quad (154)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \left( \int xz \, dm \right)_m. \quad (155)$$

Ao contrário do momento de inércia, o qual é sempre positivo, assim como já foi dito, o produto de inércia pode ser, também, negativo, de tal modo que o resultado final depende dos sinais algébricos das duas coordenadas que estão sendo utilizadas na integração, as quais variam uma independentemente da outra. Em particular, caso um, ou até mesmo os dois planos ortogonais sejam planos de simetria para com o elemento de massa, o produto de inércia associado a tais planos será nulo. Em tal cenário, os elementos de massa ocorrerão em pares, de modo que cada um dos elementos constituintes do par localizar-se-á em um dos lados do plano de simetria, em um lado do plano de simetria o produto de inércia será positivo, enquanto que, do outro lado, o produto de inércia será negativo, tornando a soma, dessa maneira, igual a zero.

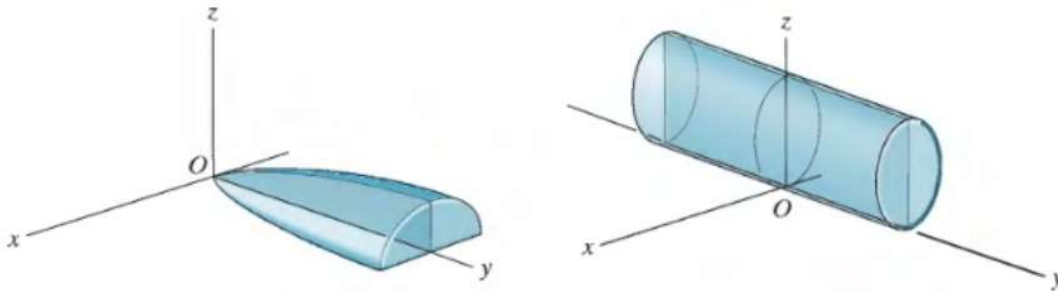


Figura 18. Na imagem da esquerda, o plano  $y-z$  é um exemplo de plano de simetria, enquanto que na imagem da direita, os planos  $x-z$  e  $y-z$  são, ambos, planos de simetria. (HIBBELER, 2010).

### 3.3 TENSOR DE INÉRCIA

As propriedades inerciais de um corpo são completamente descritas através de nove termos, dentre os quais seis termos são independentes entre si, constituintes do que denomina-se tensor de inércia. O tensor de inércia tem os valores de seus termos constituintes alterados a partir do momento em que são

consideradas diferentes orientações do corpo rígido ao qual está associado, isto é, diferentes localizações da origem e orientações do sistema de eixos coordenados associados ao corpo rígido. O tensor de inércia é definido através da seguinte formulação: [Hibbeler, 2010]

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (156)$$

De modo geral, para um determinado ponto, pode-se especificar uma determinada combinação de inclinação de eixos para a qual os produtos de inércia com relação ao corpo são iguais a zero, quando calculados relativamente a esses eixos. Em tal cenário, diz-se que o tensor de inércia é diagonalizado, podendo ser escrito da seguinte maneira simplificada:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (157)$$

A matriz simplificada contém, unicamente, os momentos de inércia ditos principais, ou seja, os momentos de inércia tomados com respeito aos eixos de inércia principais, de modo que um dos momentos de inércia principais representa o mínimo momento de inércia para o corpo, enquanto que um outro representa o máximo momento de inércia para o corpo. Existem muitos casos nos quais os eixos principais de inércia podem ser determinados por inspeção. Caso os eixos coordenados estejam posicionados de modo que dois dos três planos ortogonais sejam planos de simetria, então todos os produtos de inércia, calculados com relação aos eixos que geram os dois planos ortogonais de simetria, são identicamente nulos e, dessa maneira, serão considerados eixos de inércia principais.

### 3.4 MOMENTO DE INÉRCIA RELACIONADO A UM EIXO ARBITRÁRIO

Considera-se um corpo cujos nove elementos constituintes do tensor de inércia já foram determinados, com relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tendo a origem localizada no ponto  $O$ . Deseja-se determinar o momento de inércia do corpo com relação ao eixo  $Oa$ , o qual possui uma direção matematicamente caracterizada pelo vetor unitário  $\mathbf{u}_a$ . Definindo-se  $I_{Oa}$  como a integração do produto entre o elemento diferencial de massa,  $dm$ , e o quadrado da distância  $b$ , caracterizada como a distância perpendicular entre  $dm$  e  $O$ , e o posicionamento do elemento diferencial através do vetor  $\mathbf{r}$ , então o momento de inércia pode ser definido como [Hibbeler, 2010]

$$I_{Oa} = \left( \int |\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}|^2 dm \right)_m = \left( \int (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) dm \right)_m. \quad (158)$$

Tendo

$$\mathbf{u}_a = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}, \quad (159)$$

e

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (160)$$

então

$$\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_y z - u_z y) \mathbf{i} + (u_z x - u_x z) \mathbf{j} + (u_x y - u_y x) \mathbf{k}. \quad (161)$$

Substituindo-se na integral acima e já realizando-se as operações devidas de produto escalar, ter-se-á

$$I_{Oa} = \left( \int [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2] dm \right)_m \quad (162)$$

$$\begin{aligned}
&= u_x^2 \left( \int (y^2 + z^2) dm \right)_m + u_y^2 \left( \int (x^2 + z^2) dm \right)_m + u_z^2 \left( \int (x^2 + y^2) dm \right)_m \\
&- 2u_x u_y \left( \int xy dm \right)_m - 2u_y u_z \left( \int yz dm \right)_m - 2u_z u_x \left( \int zx dm \right)_m \quad (163)
\end{aligned}$$

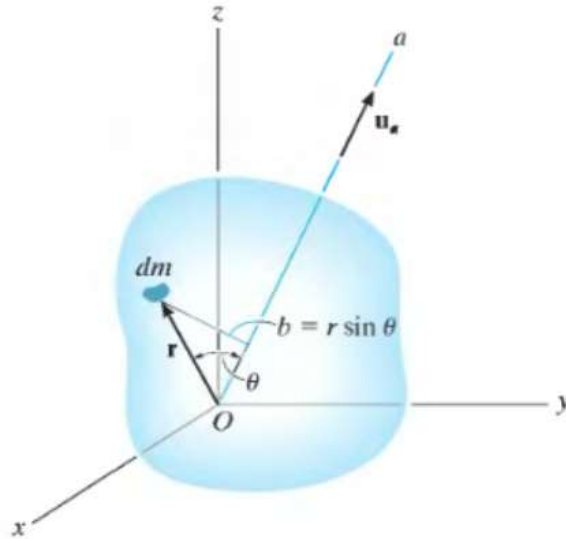


Figura 19. Demonstrativo do eixo sobre o qual deseja-se calcular o novo momento de inércia. (HIBBELER, 2010).

Assim:

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x. \quad (164)$$

### 3.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

#### 3.5.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO – YOUNG

A equação de Young [Young, 1998] é proposta a fim de que ocorra o balanceamento de plataformas de ar que simulam a movimentação de pequenos satélites, em terra, inseridos em ambientes sem a presença de atrito. O balanceamento refere-se ao processo de movimentação do centro de massa às proximidades do centro de rotação, reduzindo-se, assim a presença de torques gravitacionais. O centro de massa é movido às proximidades do centro de rotação através de mudanças na pose da plataforma regidas pela movimentação de massas móveis a ela acopladas, realizando-se, desse modo, também, a possível simulação da atuação de propulsores do elemento aeroespacial, os quais também teriam a mesma finalidade de mudança de pose e, conseqüentemente, o respectivo balanceamento.

A movimentação de um corpo rígido em torno de um ponto estacionário que não seja o próprio ponto do centro de massa pode ser descrita, de modo matricial, como

$$\dot{\omega} = (\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}), \quad (165)$$

de modo que as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser definidas por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} mr_y^2 + mr_z^2 + I_{xx} & -mr_x r_y + I_{xy} & -mr_x r_z + I_{xz} \\ -mr_x r_y + I_{xy} & mr_x^2 + mr_z^2 + I_{yy} & -mr_y r_z + I_{yz} \\ -mr_x r_z + I_{xz} & -mr_y r_z + I_{yz} & mr_x^2 + mr_y^2 + I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (166)$$

onde  $r_x$ ,  $r_y$  e  $r_z$  são as componentes de um vetor  $\mathbf{r}$  definido desde o centro de rotação, *i.e.*, o ponto fixo ao redor do qual o corpo rígido rotaciona, ao centro de massa e  $m$ , a massa do sistema,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{prop\ x} \\ M_{prop\ y} \\ M_{prop\ z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_x \omega_x^2 \\ -B_y \omega_y^2 \\ -B_z \omega_z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mgr_y \cos \psi \cos \theta + mgr_z \sin \psi \cos \theta \\ mgr_x \cos \psi \cos \theta + mgr_z \sin \theta \\ -mgr_x \sin \psi \cos \theta + mgr_y \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (167)$$

onde  $M_{prop\ x}$ ,  $M_{prop\ y}$  e  $M_{prop\ z}$  correspondem às componentes do momento gerado pelos propulsores da aeronave,  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  correspondem às componentes do arrasto aerodinâmico,  $g$  corresponde à aceleração da gravidade,  $\psi$  corresponde ao ângulo de rolagem,  $\theta$ , o ângulo de rotação e, por último,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (168)$$

em que

$$B_1 = [(-2mr_y r_z + I_{zy})\omega_y^2 + (2mr_y r_z - I_{yz})\omega_z^2 + (-mr_x r_z + I_{xz})\omega_x \omega_y + (mr_x r_y - I_{xy})\omega_x \omega_z + (mr_y^2 - mr_z^2 - I_{yy} + I_{zz})\omega_y \omega_z], \quad (169)$$

$$B_2 = [(2mr_x r_z - I_{zx})\omega_x^2 + (-2mr_x r_z + I_{xz})\omega_z^2 + (mr_y r_z - I_{zy})\omega_x \omega_y + (-mr_x^2 - mr_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\omega_x \omega_z + (-mr_x r_y + I_{xy})\omega_y \omega_z], \quad (170)$$

$$B_3 = [(-2mr_x r_y + I_{xy})\omega_x^2 + (2mr_x r_y - I_{xy})\omega_y^2 + (-mr_y r_z + I_{yz})\omega_x \omega_z + (-mr_x r_z + I_{xz})\omega_y \omega_z + (mr_x^2 - mr_y^2 - I_{xx} + I_{yy})\omega_x \omega_y], \quad (171)$$

sendo  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  as componentes do vetor velocidade angular.

### 3.5.2 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO SIMPLIFICADA – YOUNG

A equação de Young, anteriormente fornecida, pode ser consideravelmente simplificada a partir de determinadas imposições a serem realizadas. Caso as variáveis  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{r}$ , os produtos de inércia e  $\mathbf{B}$  forem assumidos consideravelmente pequenos, quando comparados aos demais termos, assumindo-se também que o vetor  $\mathbf{M}_{prop}$  é nulo, as equações de movimento podem ser dadas através de [Young, 1998]

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{I_{xx}} (-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \psi \cos \theta) \\ \frac{mg}{I_{yy}} (r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \theta) \\ \frac{mg}{I_{zz}} (-r_x \sin \psi \cos \theta - r_y \sin \theta) \end{pmatrix}. \quad (172)$$

Para que ocorra o balanceamento da plataforma através da identificação e ajuste dinâmicos do centro de massa, processo capaz de estabelecer com que o centro de massa seja movido a um ponto consideravelmente próximo ao centro de rotação, na ordem de 0,005 mm de distância, as equações de movimento simplificadas para a velocidade angular devem ser utilizadas. As equações podem ser individualmente integradas ao longo de um curto período de tempo a partir da consideração de que os ângulos de arfagem e rotação permanecem praticamente constantes ao longo desse mesmo período de tempo. Após a integração, as três equações conterão, apenas, três incógnitas, associadas às componentes do vetor  $\mathbf{r}$ , aquele que parte do centro de rotação e dirige-se ao ponto do centro de massa. As equações, após integração, são escritas como

$$\begin{aligned} (\omega_{y_{t2}} - \omega_{y_{t1}}) &= \frac{mg\Delta t}{2I_{yy}} [((\cos \psi \cos \theta)_{t2} + (\cos \psi \cos \theta)_{t1})r_x \\ &+ ((\sin \theta)_{t2} + (\sin \theta)_{t1})r_z] \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} (\omega_{x_{t2}} - \omega_{x_{t1}}) &= -\frac{mg\Delta t}{2I_{xx}} [((\cos \psi \cos \theta)_{t2} + (\cos \psi \cos \theta)_{t1})r_y \\ &- ((\sin \psi \sin \theta)_{t2} + (\sin \psi \cos \theta)_{t1})r_z] \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} (\omega_{z_{t2}} - \omega_{z_{t1}}) &= -\frac{mg\Delta t}{2I_{zz}} [((\sin \psi \cos \theta)_{t2} + (\sin \psi \cos \theta)_{t1})r_x + \\ &((\sin \theta)_{t2} + (\sin \theta)_{t1})r_y]. \end{aligned} \quad (175)$$

Em formato matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & 0 & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \quad (176)$$

tal que

$$\Phi_{12} = -\frac{mg\Delta t}{2I_{xx}} ((\cos \psi \cos \theta)_{t2} + (\cos \psi \cos \theta)_{t1}) \quad (177)$$

$$\Phi_{13} = \frac{mg\Delta t}{2I_{xx}} ((\sin \psi \cos \theta)_{t2} + (\sin \psi \cos \theta)_{t1}) \quad (178)$$

$$\Phi_{21} = \frac{mg\Delta t}{2I_{yy}} ((\cos \psi \cos \theta)_{t2} + (\cos \psi \cos \theta)_{t1}) \quad (179)$$

$$\Phi_{23} = \frac{mg\Delta t}{2I_{yy}} ((\sin \theta)_{t2} + (\sin \theta)_{t1}) \quad (180)$$

$$\Phi_{31} = -\frac{mg\Delta t}{2I_{zz}} ((\sin \psi \cos \theta)_{t2} + (\sin \psi \cos \theta)_{t1}) \quad (181)$$

$$\Phi_{32} = -\frac{mg\Delta t}{2I_{zz}} ((\sin \theta)_{t2} + (\sin \theta)_{t1}). \quad (182)$$

De maneira condensada, pode-se dizer que:

$$\Delta\Omega = \Phi \mathbf{r}. \quad (183)$$

A equação pode ser resolvida para  $\mathbf{r}$  utilizando-se o método dos mínimos quadrados. As matrizes da equação anterior podem ser expandidas para diferentes instantes de tempo, originando

$$\begin{pmatrix} (\Delta\omega_x)_{t0} \\ (\Delta\omega_y)_{t0} \\ (\Delta\omega_z)_{t0} \\ (\Delta\omega_x)_{t1} \\ (\Delta\omega_y)_{t1} \\ (\Delta\omega_z)_{t1} \\ (\Delta\omega_x)_{t2} \\ (\Delta\omega_y)_{t2} \\ (\Delta\omega_z)_{t2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\Phi_{12})_{t0} & (\Phi_{13})_{t0} \\ (\Phi_{21})_{t0} & 0 & (\Phi_{23})_{t0} \\ (\Phi_{31})_{t0} & (\Phi_{32})_{t0} & 0 \\ 0 & (\Phi_{12})_{t1} & (\Phi_{13})_{t1} \\ (\Phi_{21})_{t1} & 0 & (\Phi_{23})_{t1} \\ (\Phi_{31})_{t1} & (\Phi_{32})_{t1} & 0 \\ 0 & (\Phi_{12})_{t2} & (\Phi_{13})_{t2} \\ (\Phi_{21})_{t2} & 0 & (\Phi_{23})_{t2} \\ (\Phi_{31})_{t2} & (\Phi_{32})_{t2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (184)$$

A equação aumentada pode ser reescrita como

$$\Delta\Omega_L = \Phi_L \mathbf{r}. \quad (185)$$

Calculando-se para  $\mathbf{r}$ , tem-se:

$$\mathbf{r} = [\Phi_L^T \Phi_L]^{-1} \Phi_L^T \Delta\Omega_L. \quad (186)$$

## 3.6 REPRESENTAÇÃO POLITÓPICA

### 3.6.1 CONJUNTOS CONVEXOS

Um conjunto  $C$  é dito convexo caso o segmento de reta entre dois pontos quaisquer pertencentes a  $C$  também pertença, de maneira total, a  $C$ , isto é, caso, para quaisquer  $x_1$  e  $x_2 \in C$  e para qualquer  $\sigma$  contido no intervalo  $0 \leq \sigma \leq 1$ , então

$$\sigma x_1 + (1 - \sigma)x_2 \in C. \quad (187)$$

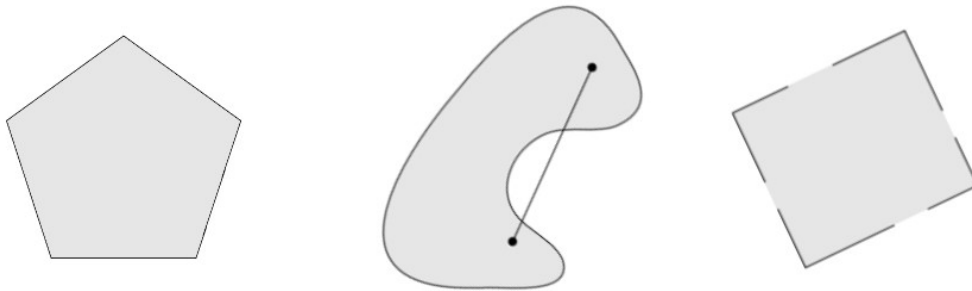


Figura 10. Representação de diferentes tipos de conjuntos em um espaço bidimensional.

Na figura acima, o pentágono localizado na esquerda, incluindo-se suas respectivas bordas, caracteriza um conjunto convexo. No centro, o conjunto não é convexo, visto que o segmento de reta unindo dois pontos pertencentes ao conjunto não pertence inteiramente ao próprio conjunto. Na direita, o quadrado contém alguns pontos de suas respectivas bordas, entretanto, não todos. Caso fosse tomando um segmento de reta de um ponto da borda pertencente ao conjunto a outro ponto da borda não pertencente ao conjunto, verificar-se-ia que o conjunto em questão, também, não é convexo. Resumidamente, um conjunto é convexo se cada ponto a ele pertencente pode ser visto por outro ponto a ele também pertencente por um caminho desobstruído, com o termo desobstruído significando dentro do conjunto considerado.

Denomina-se um ponto definido da forma  $\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_k x_k$ , onde  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k = 1$  e  $\sigma_i \geq 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , de combinação convexa dos pontos  $x_1, \dots, x_k$ . A combinação convexa de determinados pontos pode



ser vista como uma espécie de mistura ou média ponderada, com  $\sigma_i$  determinando a parcela participativa de cada elemento  $x_i$  na mistura total. A carcaça ou invólucro convexo de um conjunto  $C$ , escrito como  $\mathbf{conv} C$ , é o conjunto de todas as possíveis combinações convexas em  $C$ , *i.e.*,

$$\mathbf{conv} C = \{\sigma_1 x_1 + \dots + \sigma_k x_k \mid x_i \in C, \sigma_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sigma_1 + \dots + \sigma_k = 1\}. \quad (188)$$

Como o nome sugere, o invólucro convexo  $\mathbf{conv} C$  é sempre convexo e representa o menor conjunto convexo que contém  $C$ . Se  $B$  é um conjunto convexo que contém  $C$ , então  $\mathbf{conv} C \subseteq B$ .

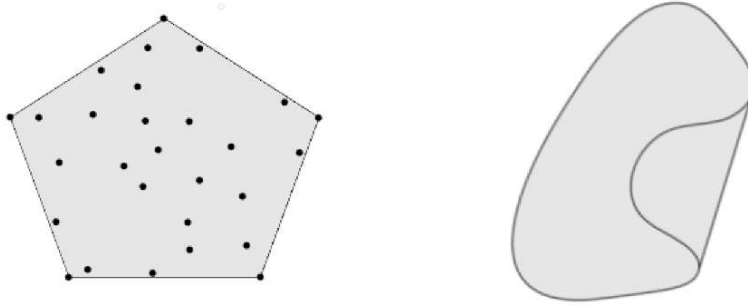


Figura 11. Representação do invólucro convexo de dois conjuntos no espaço bidimensional.

Para a imagem representativa dos invólucros convexas, na esquerda, temos a representação da carcaça convexa para um conjunto de quinze diferentes pontos, caracterizando um pentágono. Na direita, a envoltória convexa do conjunto que havia sido anteriormente caracterizado como não convexo.

A ideia de combinações convexas pode ser generalizada a somas infinitas, integrais e distribuições de probabilidade. Supõe-se que  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , satisfazem

$$\sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i = 1, \quad (189)$$

sendo  $x_1, x_2, \dots \in C$ , onde  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  é convexo. Desse modo,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i x_i \in C, \quad (190)$$

caso a série convirja. Do modo mais generalizado possível, supõe-se que  $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaz  $p(x) \geq 0$  para todo  $x \in C$  e  $\int_C p(x) dx = 1$ , onde  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  é convexo. Assim,

$$\int p(x) x dx \in C, \quad (191)$$

caso a integral exista.

Pode-se dizer, assim, finalmente, que um polítopo  $P$  é, nada mais, nada menos, o invólucro convexo de um conjunto  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  de pontos em um espaço  $\mathbf{R}^d$ , tal que

$$P = \text{conv } C := \left\{ \sum_{i=1}^k \sigma_i x_i \mid \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \sigma_i = 1 \right\}. \quad (192)$$

### 3.7 PROPOSIÇÃO ANALÍTICA – REPRESENTAÇÃO POLITÓPICA

Espaçonaves e satélites, de modo geral, possuem custos de produção elevadíssimos, fato que estabelece a grande necessidade prévia do estudo detalhado do comportamento de tais equipamentos em ambiente de microgravidade, antes mesmo que sejam lançados. Quaisquer erros analíticos mediante a aplicação da teoria à realidade podem gerar cenários catastróficos, incluindo a perda total dos elementos aeroespaciais construídos com muito tempo, dinheiro e mão-de-obra despendidos. A previsibilidade da movimentação do elemento aeroespacial em determinada região do espaço deve ser, de fato, a maior e mais sólida possível, evitando-se situações completamente não desejadas. Como visto através da exteriorização da teoria envolvida, os momentos de inércia e, conseqüentemente, a matriz tensor de inércia possuem papel de extrema relevância no ramo da cinemática e dinâmica de corpos rígidos, incluindo-se, sobretudo, a área do conhecimento de estudos aeroespaciais. Sem a caracterização correta do tensor de inércia, certamente, as equações de movimento retornariam dados divergentes daqueles que realmente deveriam estar sendo obtidos e, dessa maneira, a previsibilidade do movimento do elemento aeroespacial cairia por terra, literalmente.

A matriz tensor de inércia da plataforma de ar LAICA, sem as massas móveis, foi obtida através de um *computer-aided design software* (CAD *software*®), através da modelagem computacional da estrutura completa, assim como também da especificação das características básicas de cada um dos materiais constituintes. Com todas as informações em mãos, incluindo-se, por exemplo, o formato dos componentes, suas respectivas dimensões, disposições para com a estrutura geral e noção exata de seus respectivos materiais constituintes, a fim de que tenha-se a obtenção de densidade e propriedades afins, o programa é capaz de, utilizando-se métodos numéricos, estimar a matriz requerida. O resultado computacional foi equivalente a:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,265 & -0,014 & -0,035 \\ -0,014 & 0,246 & -0,018 \\ -0,035 & -0,018 & 0,427 \end{pmatrix} [Kg.m^2]. \quad (193)$$

Verifica-se que a matriz calculada via *software* apresenta-se, à primeira vista, de acordo com o que a teoria, de fato, propõe, ou seja, a troca na ordem dos subscritos representativos dos momentos de inércia não altera o valor da grandeza, *i.e.*, por exemplo,  $I_{yx} = I_{xy}$ , e assim por diante, além de que a matriz apresenta-se, também, de certo modo, diagonalizada, já que os valores de momento de inércia associados à diagonal principal são, aproximadamente, dez vezes maiores, em valores absolutos, que os momentos de inércia fora da diagonal principal.

Apesar do fato de que a matriz tensor de inércia possa ter sido corretamente caracterizada pelo programa computacional, a proposição da utilização de incertezas politópicas no tensor de inércia traz, de fato, uma maior capacidade de generalidade associada à teoria que está sendo aplicada, isto é, não mais trabalha-se com uma matriz fixa, previamente pronta e imutável, trabalha-se, agora, com uma matriz cujos elementos podem excursionar em determinados intervalos estipulados, com limitantes inferiores e superiores para cada um dos elementos, separadamente, originando-se, assim um polítopo matricial caracterizado através da delimitação dos vértices que podem ser originados. Considerando-se a matriz

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (194)$$

limita-se a excursão dos valores de cada um dos elementos constituintes a

$$\text{mín}[I_{xx}] \leq I_{xx} \leq \text{máx}[I_{xx}] \quad (195)$$

$$\text{mín}[I_{xy}] \leq I_{xy} \leq \text{máx}[I_{xy}] \quad (196)$$

$$\text{mín}[I_{xz}] \leq I_{xz} \leq \text{máx}[I_{xz}] \quad (197)$$

$$\text{mín}[I_{yy}] \leq I_{yy} \leq \text{máx}[I_{yy}] \quad (198)$$

$$\text{mín}[I_{yz}] \leq I_{yz} \leq \text{máx}[I_{yz}] \quad (199)$$

$$\text{mín}[I_{zz}] \leq I_{zz} \leq \text{máx}[I_{zz}]. \quad (200)$$

Como as matrizes características dos vértices do politopo matricial são determinadas através de todas as possíveis combinações entre os valores de máximos e mínimos de cada um dos elementos independentes, a utilização da matriz tensor de inércia assim como fornecida acima geraria um politopo matricial contendo  $2^6$  vértices. Utilizando-se o princípio da diagonalização do tensor de inércia, restariam apenas três elementos independentes entre si, reduzindo-se, desse modo, drasticamente, a quantidade de possíveis combinações representativas de vértices do politopo matricial. Mais especificamente, existiriam, agora e unicamente,  $2^3$  vértices. A simplificação foi realizada pelo fato de que, na obtida equação simplificada de Young (321), os produtos de inércia não mais estão sendo considerados por terem sido ditos consideravelmente pequenos [Young, 1998]. Matematicamente:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (201)$$

tal que

$$\text{mín}[I_{xx}] \leq I_{xx} \leq \text{máx}[I_{xx}] \quad (202)$$

$$\text{mín}[I_{yy}] \leq I_{yy} \leq \text{máx}[I_{yy}] \quad (203)$$

$$\text{mín}[I_{zz}] \leq I_{zz} \leq \text{máx}[I_{zz}]. \quad (204)$$

As matrizes características dos vértices do politopo octogonal seriam:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} \text{máx}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (205)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} \text{mín}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (206)$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \text{máx}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{mín}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (207)$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} \text{máx}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{mín}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (208)$$

$$\mathbf{I}_5 = \begin{pmatrix} \text{mín}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{mín}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{máx}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (209)$$

$$\mathbf{I}_6 = \begin{pmatrix} \text{mín}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{máx}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{mín}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (210)$$

$$\mathbf{I}_7 = \begin{pmatrix} \text{máx}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{mín}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{mín}[I_{zz}] \end{pmatrix} \quad (211)$$

$$\mathbf{I}_8 = \begin{pmatrix} \text{mín}[I_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & \text{mín}[I_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & \text{mín}[I_{zz}] \end{pmatrix}. \quad (212)$$

De modo que as matrizes tensor de inércia obtidas através da combinação convexa das matrizes de vértice estariam contidas no interior do polítopo octogonal ou em suas bordas. Matematicamente, as matrizes obtidas por combinação convexa seriam dadas por

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{I}_i \mid \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \sigma_i = 1 \right\}. \quad (213)$$

Assim sendo, todas as equações associadas ao movimento de corpos rígidos que possuíssem a matriz tensor de inércia em sua constituição básica poderiam ser reescritas através da utilização do tensor de inércia em formato politópico, caso linearizadas, situação na qual as incertezas politópicas podem ser aplicadas. Aqui, não serão analisadas técnicas diferenciadas de linearização de equações diferenciais.

Soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares existem apenas para um número limitado de classes especiais de equações diferenciais. De modo geral, assim como já foi proposto anteriormente, deve-se estabelecer um método no qual as soluções são matematicamente aproximadas por caminhos alternativos. Existem, basicamente, dois métodos, diferentes entre si, capazes de realizar determinadas aproximações quando sistemas não lineares estão sendo analisados, são eles, os métodos numéricos e os assintóticos, de modo que, entre os assintóticos, encontra-se a teoria da perturbação. Dever-se-á considerar uma equação de espaço de estados, comumente encontrada em vários ramos da engenharia,  $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$ , de modo que a variável  $\varepsilon$  é um parâmetro escalar suficientemente pequeno e, considerando-se determinadas condições, a equação possui uma solução exata  $x(t, \varepsilon)$ .

O principal objetivo de um método assintótico faz alusão à obtenção de uma solução aproximada, de formato  $\hat{x}(t, \varepsilon)$ , de modo que o erro assintótico, isto é, a subtração entre a solução exata e a solução aproximada,  $x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t, \varepsilon)$ , seja, também, suficientemente pequeno, para baixos valores de  $|\varepsilon|$ . A significância prática de métodos assintóticos está na revelação de propriedades estruturais básicas da equação de espaço de estados para pequenos valores absolutos da variável  $\varepsilon$ , *i.e.*,  $|\varepsilon|$ . Mais especificamente, métodos assintóticos revelam uma estrutura de escala múltipla de tempo, inerente a vários problemas práticos, de modo que algumas variáveis variam, no tempo, de forma mais rápida que outras, estabelecendo-se, assim, por exemplo, a classificação de variáveis em rápidas e lentas.

### 3.8 RESULTADOS

Primeiramente, calcular-se-ão os momentos de inércia da mesa LAICA (Figura 52.), incluindo-se, agora, as massas móveis, as quais, para  $x$  e  $y$ , podem excursionar de uma extremidade à outra de seus respectivos eixos de mobilidade, medindo, cada um, 14 cm cada, enquanto que a massa em  $z$  pode ter sua respectiva altura alterada nas mesmas medidas de um dos eixos de mobilidade de massas móveis pertencentes ao plano  $xy$ , isto é, pode ter sua altura alterada em 14 centímetros, considerando-se todo o intervalo de excursão. Aqui, utilizar-se-á a hipótese de que as massas móveis são pontos materiais e, dessa maneira, suas respectivas matrizes de tensor de inércia também serão diagonalizadas, contendo, unicamente, os momentos de inércia principais, *i.e.*,

$$\mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} I_{x(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{x(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x(z)} \end{pmatrix} \quad (214)$$

$$\mathbf{I}_y = \begin{pmatrix} I_{y(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{y(z)} \end{pmatrix} \quad (215)$$

$$\mathbf{I}_z = \begin{pmatrix} I_{z(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{z(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z(z)} \end{pmatrix}. \quad (216)$$

De modo que a matriz de tensor de inércia do sistema completo, ou seja, a união entre a mesa e as massas móveis pode ser, matematicamente, dada por

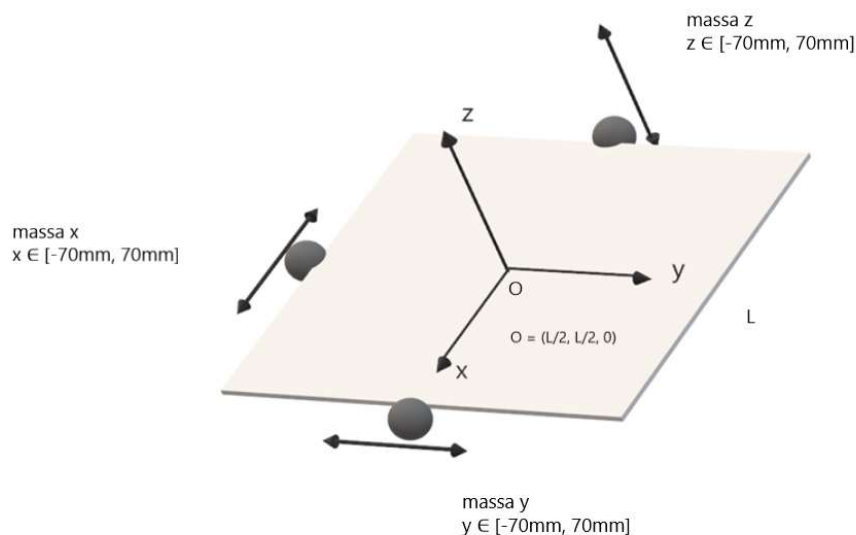


Figura 12. Esquemático tridimensional da mesa com as massas móveis.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_x + \mathbf{I}_y + \mathbf{I}_z \quad (217)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,265 & 0 & 0 \\ 0 & 0,246 & 0 \\ 0 & 0 & 0,427 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{x(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{x(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x(z)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{y(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{y(z)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{z(x)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{z(y)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z(z)} \end{pmatrix} \quad (218)$$

$$= \begin{pmatrix} (0,265 + I_{x(x)} + I_{y(x)} + I_{z(x)}) & 0 & 0 \\ 0 & (0,246 + I_{x(y)} + I_{y(y)} + I_{z(y)}) & 0 \\ 0 & 0 & (0,427 + I_{x(z)} + I_{y(z)} + I_{z(z)}) \end{pmatrix}. \quad (219)$$

Calculando-se a matriz tensor de inércia em  $x$ ,  $\mathbf{I}_x$ , por aplicação direta da definição de momento de inércia, considerando-se a variação de posição das massas desde  $-70\text{mm}$  a  $70\text{mm}$ , de acordo com o referencial adotado no centro da mesa, ter-se-á

$$I_{x(x)} = \int r_{xx}^2 dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \int dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_x \quad (220)$$

$$I_{x(y)} = \int r_{xy}^2 dm = x^2 \int dm = x^2 m_x \quad (221)$$

$$I_{x(z)} = \int r_{xz}^2 dm = \left(x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) \int dm = \left(x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_x, \quad (222)$$

tais que  $r_{xx}$ ,  $r_{xy}$  e  $r_{xz}$  representam a distância da massa movimentando-se em  $x$  aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $L$  representa o tamanho de um dos lados de mesa e  $m_x$  representa a massa da própria massa móvel movimentando-se em  $x$ . Em  $y$ , o processo se repete como

$$I_{y(x)} = \int r_{yx}^2 dm = y^2 \int dm = y^2 m_y \quad (223)$$

$$I_{y(y)} = \int r_{yy}^2 dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \int dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_y \quad (224)$$

$$I_{y(z)} = \int r_{yz}^2 dm = \left(y^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) \int dm = \left(y^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_y, \quad (225)$$

e também em  $z$ , como

$$I_{z(x)} = \int r_{zx}^2 dm = z^2 \int dm = z^2 m_z \quad (226)$$

$$I_{z(y)} = \int r_{zy}^2 dm = \left(z^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) \int dm = \left(z^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_z \quad (227)$$

$$I_{z(z)} = \int r_{zz}^2 dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \int dm = \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_z. \quad (228)$$

Assim,

$$I_{xx} = (0,265 + I_{x(x)} + I_{y(x)} + I_{z(x)}) = 0,265 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_x + y^2 m_y + z^2 m_z \quad (229)$$

$$I_{yy} = (0,246 + I_{x(y)} + I_{y(y)} + I_{z(y)}) = 0,246 + x^2 m_x + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_y + \left(z^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_z \quad (230)$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= (0,427 + I_{x(z)} + I_{y(z)} + I_{z(z)}) \\ &= 0,427 + \left(x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_x + \left(y^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) m_y + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m_z. \end{aligned} \quad (231)$$

Para cada um dos termos da matriz tensor de inércia, anteriormente fornecidos, pode-se verificar, em  $\mathbf{R}^3$ , a partir da variação das próprias coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja, o posicionamento de cada uma das massas móveis ao longo de seus respectivos eixos de mobilidade, a região na qual cada um dos termos de momento de inércia estará inserido.

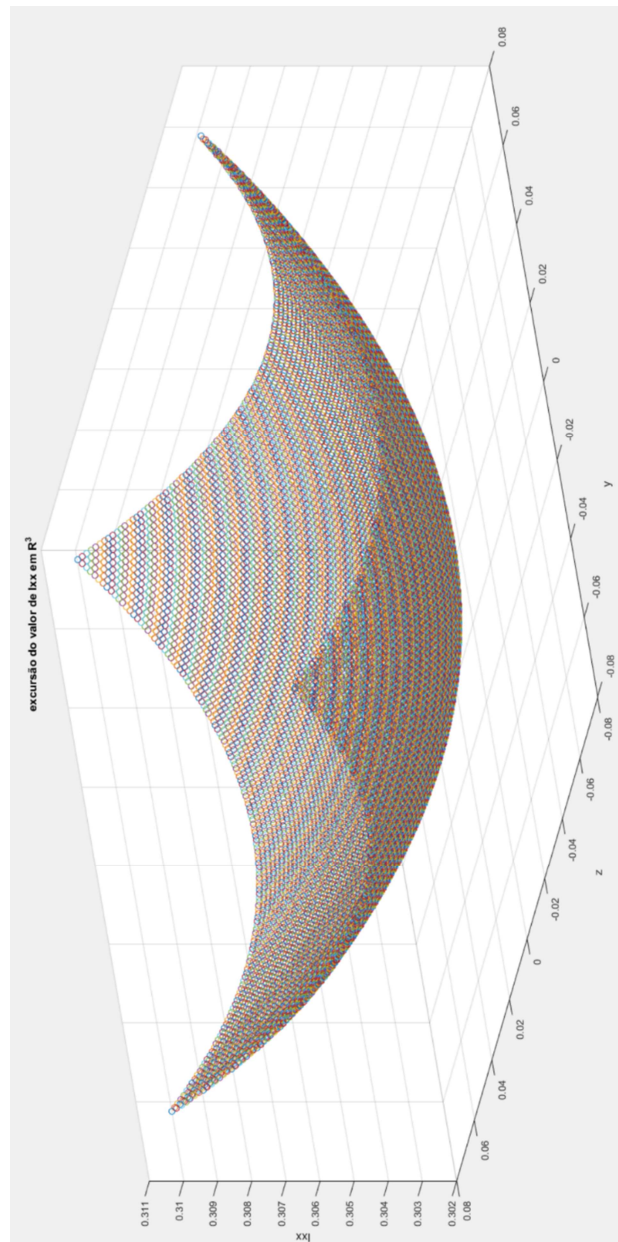


Figura 13 - Região de excursão, em  $\mathbf{R}^3$ , do valor de  $I_{xx}$  com a movimentação das massas móveis em  $z$  e em  $y$ .

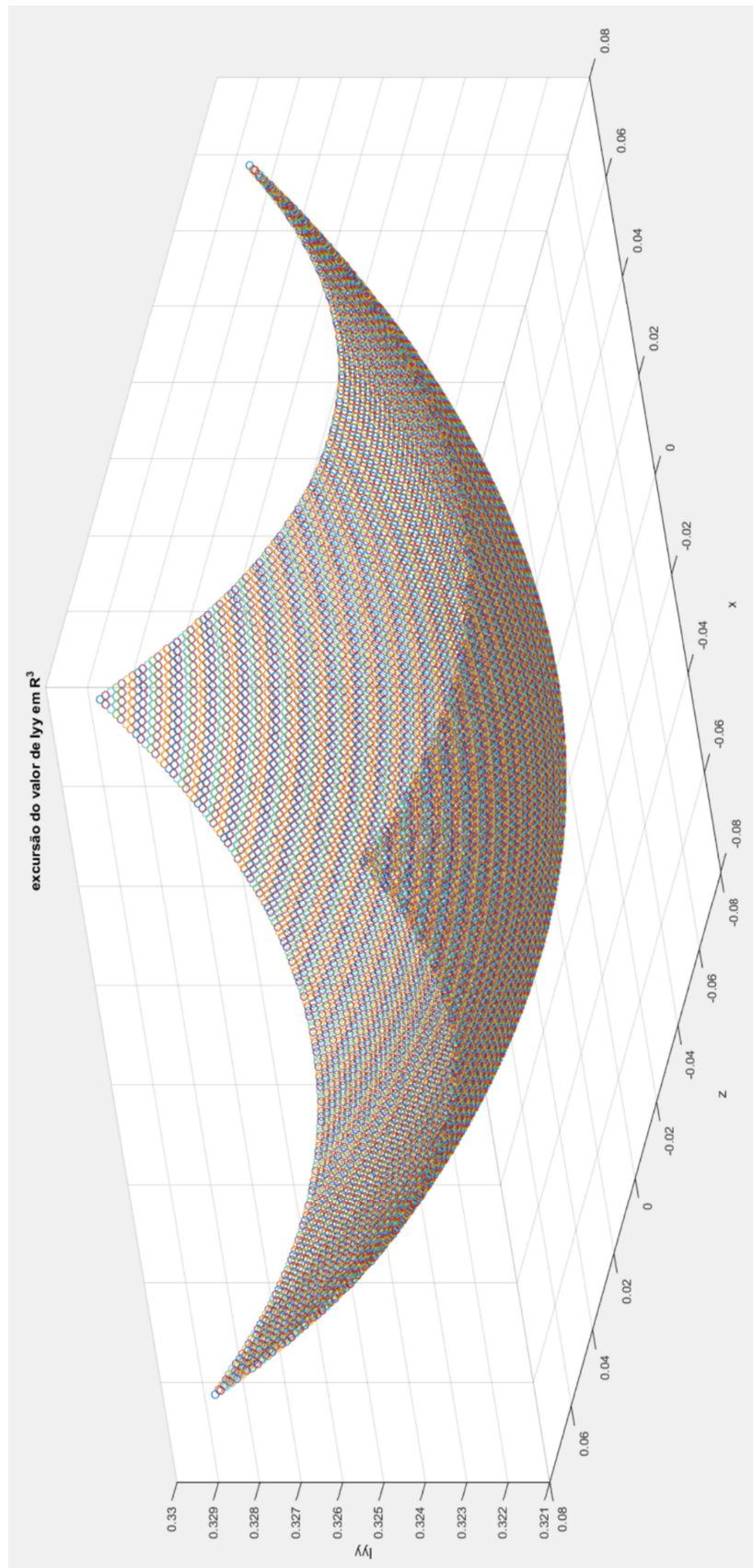


Figura 14 - Região de excursão, em  $\mathbf{R}^3$ , do valor de Iyy com a movimentação das massas móveis em x e em z.



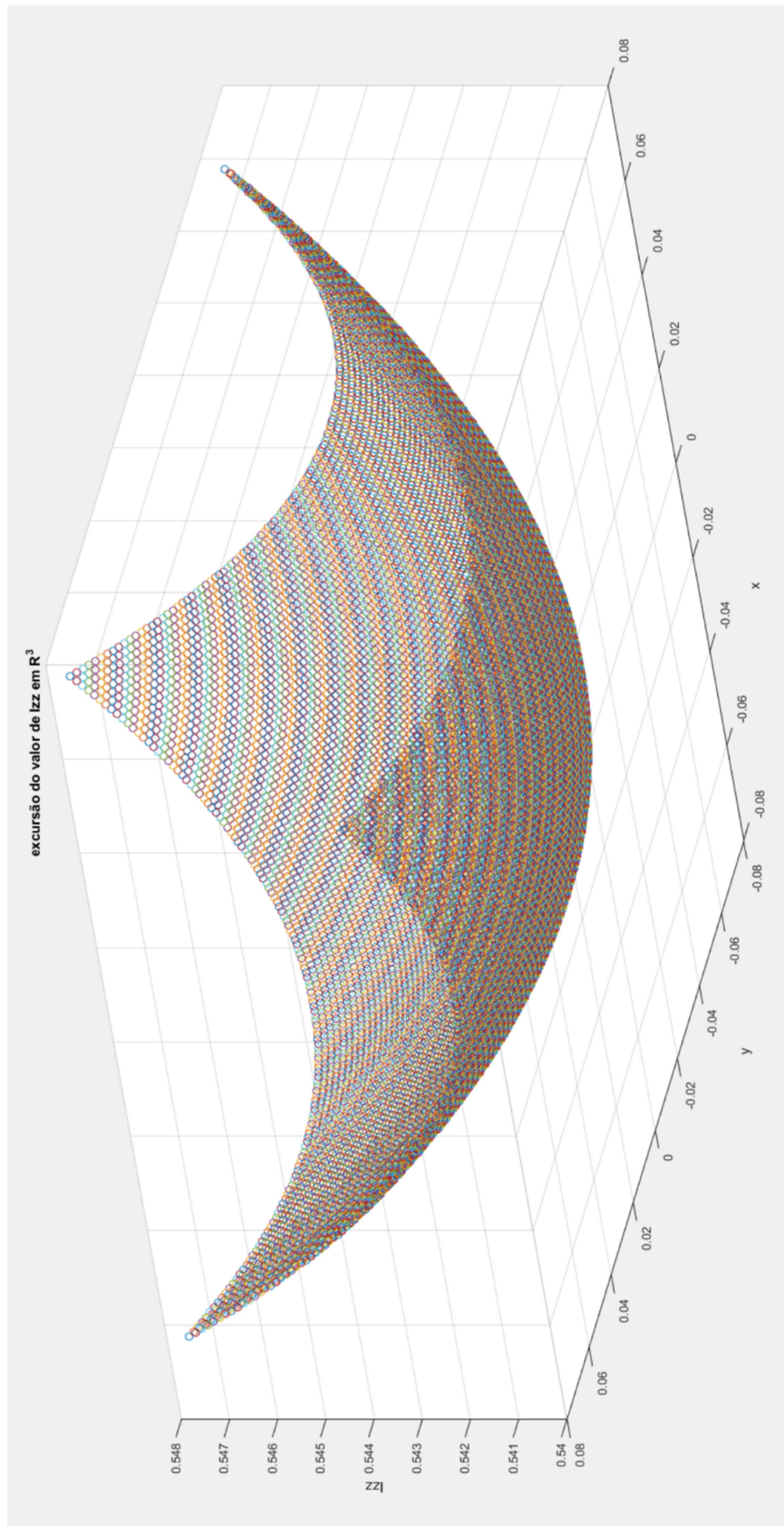


Figura 15 - Região de excursão, em  $\mathbf{R}^3$ , do valor de Izz com a movimentação das massas móveis em x e em y.

A aplicação de incertezas que permeiam a teoria também pode ser estendida, por exemplo, à equação simplificada de *Young*. Primeiramente, considerar-se-á a equação assim como anteriormente exposta, ou seja,

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{I_{xx}}(-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \psi \cos \theta) \\ \frac{mg}{I_{yy}}(r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \theta) \\ \frac{mg}{I_{zz}}(-r_x \sin \psi \cos \theta - r_y \sin \theta) \end{pmatrix}, \quad (232)$$

de modo que pode-se escrever a equação simplificada como um produto de matrizes, isto é,

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{mg}{I_{xx}} \cos \psi \cos \theta & \frac{mg}{I_{xx}} \sin \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \cos \psi \cos \theta & 0 & \frac{mg}{I_{yy}} \sin \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \psi \cos \theta & -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad (233)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{C} \mathbf{r}. \quad (234)$$

A matriz  $\mathbf{C}$ , aqui assim chamada, está teoricamente contida em um espaço de nove dimensões, entretanto, como todos os elementos da diagonal principal são nulos, a matriz reduz-se a uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior, podendo ser, simplificada, representada em um espaço vetorial de seis dimensões. Pode-se, desse modo, reescrever os elementos não nulos da matriz como os elementos constituintes de um vetor contido em  $\mathbf{R}^6$ , ou seja,

$$\text{vec}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{I_{xx}} \cos \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{xx}} \sin \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \sin \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \cos \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (235)$$

Considerando-se uma pose fixa, isto é, para determinados valores de ângulos  $\psi$  e  $\theta$  fixos e, também, sabendo-se os valores de  $m$ , a massa da mesa juntamente às massas móveis, assim como também  $g$ , a aceleração da gravidade local, introduz-se incertezas nas inércias, de modo que estejam excursionando em intervalos delimitados, obviamente, por limitantes inferiores e superiores. Reescrevendo o vetor dado acima, tem-se

$$\text{vec}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{I_{xx}} \cos \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{xx}} \sin \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \sin \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \cos \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau \frac{mg}{I_{xx}} \\ \varphi \frac{mg}{I_{xx}} \\ v \frac{mg}{I_{yy}} \\ \tau \frac{mg}{I_{yy}} \\ -\varphi \frac{mg}{I_{zz}} \\ -v \frac{mg}{I_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (236)$$

de tal modo que

$$-\tau \frac{mg}{I_{xx}} \in \left[ -\tau \frac{mg}{\text{mín}[I_{xx}]}, -\tau \frac{mg}{\text{máx}[I_{xx}]} \right] \quad (237)$$

$$\varphi \frac{mg}{I_{xx}} \in \left[ \varphi \frac{mg}{\text{máx}[I_{xx}]}, \varphi \frac{mg}{\text{mín}[I_{xx}]} \right] \quad (238)$$

$$v \frac{mg}{I_{yy}} \in \left[ v \frac{mg}{\text{máx}[I_{yy}]}, v \frac{mg}{\text{mín}[I_{yy}]} \right] \quad (239)$$

$$\tau \frac{mg}{I_{yy}} \in \left[ \tau \frac{mg}{\text{máx}[I_{yy}]}, \tau \frac{mg}{\text{mín}[I_{yy}]} \right] \quad (240)$$

$$-\varphi \frac{mg}{I_{zz}} \in \left[ -\varphi \frac{mg}{\text{mín}[I_{zz}]}, -\varphi \frac{mg}{\text{máx}[I_{zz}]} \right] \quad (241)$$

$$-v \frac{mg}{I_{zz}} \in \left[ -v \frac{mg}{\text{mín}[I_{zz}]}, -v \frac{mg}{\text{máx}[I_{zz}]} \right]. \quad (242)$$

Assim, pode-se concluir que o vetor caracterizado pelos elementos de fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{C}$  está, com certeza, localizado em uma determinada região do espaço vetorial de seis dimensões, caracterizada, matematicamente, pelo produto cartesiano entre os seis intervalos anteriormente fornecidos, gerados pela introdução da incerteza nos valores de inércia. Desse modo, diz-se que

$$\text{vec}(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} -\tau \frac{mg}{I_{xx}} \\ \varphi \frac{mg}{I_{xx}} \\ v \frac{mg}{I_{yy}} \\ \tau \frac{mg}{I_{yy}} \\ -\varphi \frac{mg}{I_{zz}} \\ -v \frac{mg}{I_{zz}} \end{pmatrix} \in \left[ -\tau \frac{mg}{\text{mín}[I_{xx}]}, -\tau \frac{mg}{\text{máx}[I_{xx}]} \right] \times \dots \times \left[ -v \frac{mg}{\text{mín}[I_{zz}]}, -v \frac{mg}{\text{máx}[I_{zz}]} \right] \quad (243)$$

Resumidamente, não mais estariam sendo considerados pontos completamente determinados e certos, trabalhar-se-ia, agora, com regiões nas quais os possíveis valores de aceleração angular estariam contidos em regiões de possibilidade.

Tal análise permite que técnicas de controle, por exemplo, venham a ser aplicadas em regiões de excursão e não em pontos determinados de operação. Caso, por ventura, o ponto de operação não seja propriamente conhecido, pelos mais diversos motivos envolvidos no cenário em questão, pode-se ainda manter o funcionamento bem comportado do sistema, visto que, englobando a região de possibilidades, caracterizada pelas incertezas, engloba-se todos os possíveis pontos de operação mediante variações. Como a região considerada possui seis dimensões, análises gráficas em um sistema de eixos coordenados tridimensional não faz-se possível.

Através de um programa computacional, utilizando-se *matlab*®, foram verificados os limites inferior e superior de cada um dos elementos da diagonal principal do tensor de inércia, para o conjunto mesa e massas móveis (Figura 52.), a partir da variação da posição de cada uma das próprias massas móveis. Considerando-se que o lado  $L$  da mesa possui cerca de 44 centímetros, que as massas  $m_x = m_y = m_z$ , de cada uma das massas móveis são equivalentes entre si e aproximadamente iguais a 0,78 Kg, que as massas móveis podem excursionar em, aproximadamente, 14 centímetros ao longo de seus respectivos eixos de movimentação, excursão de -70mm a 70mm, de acordo com o posicionamento da origem do sistema de eixos (Figura 52.), e que, finalmente, a massa total do sistema, mesa e massas móveis,  $m$ , é de cerca de 14 Kg, descobriu-se que

$$0,3028 \leq I_{xx} \leq 0,3104 \quad (244)$$

$$0,3215 \leq I_{yy} \leq 0,3291 \quad (245)$$

$$0,5403 \leq I_{zz} \leq 0,5479. \quad (246)$$

Com tais valores em mãos, a título da mera ilustração da excursão em intervalos, escreveu-se cada uma das matrizes, triangular inferior e triangular superior, como vetores tridimensionais e, a cada dimensão, *i.e.*, termos constituintes das matrizes triangulares, os termos de momento de inércia em seus respectivos denominadores foram variados, considerando-se os resultados anteriormente expostos dos possíveis valores de momento de inércia. Vale ressaltar que os ângulos,  $\psi$  e  $\theta$ , massa total do sistema,  $m$ , e aceleração da gravidade,  $g$ , estão sendo mantidos constantes nas fórmulas (396) e (397), fazendo com que as únicas incógnitas sejam os momentos de inércia variando ao longo dos intervalos anteriormente estipulados, (393) a (395). Assim, ter-se-ia um produto entre um coeficiente multiplicativo constante, para cada pose considerada, e o momento de inércia do denominador sendo variado. Para a matriz superior, fez-se a consideração que

$$\text{vec}(\mathbf{M}_{\text{sup}}) = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{I_{xx}} \cos \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{xx}} \text{sen } \psi \cos \theta \\ \frac{mg}{I_{yy}} \text{sen } \theta \end{pmatrix}, \quad (247)$$

enquanto que, para a matriz inferior, fez a consideração, analogamente, que

$$\text{vec}(\mathbf{M}_{\text{inf}}) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{I_{yy}} \cos \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \text{sen } \psi \cos \theta \\ -\frac{mg}{I_{zz}} \text{sen } \theta \end{pmatrix}. \quad (248)$$

Considerando-se, por exemplo, uma pose aleatória e fixa de  $\psi = \pi/7$  e  $\theta = \pi/8$ , a massa da mesa juntamente às massas móveis sendo  $m = 14\text{Kg}$  e a aceleração da gravidade local como sendo  $g = 9,78\text{m/s}^2$ , os intervalos de excursão abaixo puderam ser calculados, tanto para a matriz triangular superior quanto para a matriz triangular inferior.

$$-\tau \frac{mg}{I_{xx}} \in [-376,3883; -367,1726] \quad (249)$$

$$\varphi \frac{mg}{I_{xx}} \in [176,8210; 181,2591] \quad (250)$$

$$v \frac{mg}{I_{yy}} \in [159,2131; 162,9767], \quad (251)$$

para a triangular superior e

$$\tau \frac{mg}{I_{yy}} \in [346,3093; 354,4958] \quad (252)$$

$$-\varphi \frac{mg}{I_{zz}} \in [-101,5829; -100,1738] \quad (253)$$

$$-v \frac{mg}{I_{zz}} \in [-96,9776; -956324], \quad (254)$$

para a triangular inferior.

Assim sendo, realizando-se o produto cartesiano entre os intervalos anteriormente obtidos, a região de incertezas relativa à matriz **C**, em um espaço vetorial de seis dimensões, pode ser caracterizada.

Além disso, para a mesma equação simplificada de *Young* (397), pode-se, por exemplo, dizer que, sem mesmo que seja escrita em formato matricial, assim como foi aqui realizado, a análise com inserção de incertezas não só também é válida como gera um vetor em espaço vetorial de três dimensões, já que existem três equações para caracterização da aceleração angular. Isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{I_{xx}} (-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \psi \cos \theta) \\ \frac{mg}{I_{yy}} (r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sin \theta) \\ \frac{mg}{I_{zz}} (-r_x \sin \psi \cos \theta - r_y \sin \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}. \quad (255)$$

Para um vetor **r** fixo e uma pose fixa, variando-se o momento de inércia de acordo com os intervalos de incerteza, é fácil a verificação de que cada uma das equações corresponderá, também, a um intervalo de incerteza. Por fim, ter-se-á um vetor, tridimensional, cujas dimensões são, de fato, intervalos de incertezas. O produto cartesiano entre três intervalos, assim como proposto, gera um paralelepípedo em sistema de eixos tridimensional, de modo que, quanto maior o volume do paralelepípedo, para um determinado valor do vetor **r**, maiores são as incertezas associadas à grandeza aceleração angular. O paralelepípedo encontra-se centrado no ponto representado pelo vetor **r**. Matematicamente:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \in [\text{mín}[\Omega_x], \text{máx}[\Omega_x]] \times [\text{mín}[\Omega_y], \text{máx}[\Omega_y]] \times [\text{mín}[\Omega_z], \text{máx}[\Omega_z]], \quad (256)$$

Graficamente, de modo genérico, ter-se-ia a figura abaixo.

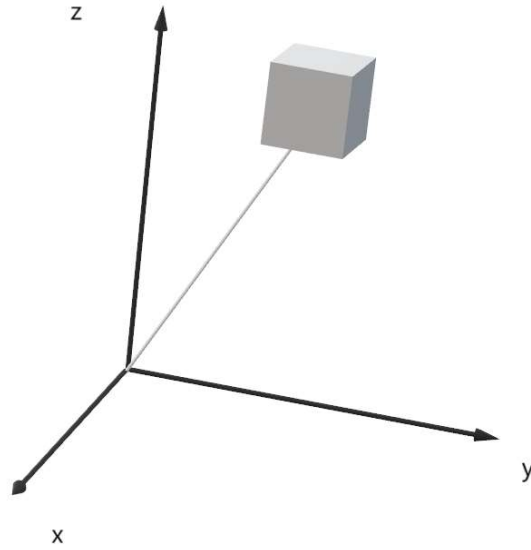


Figura 26. Esquemático de um paralelepípedo genérico gerado por um produto cartesiano de intervalos.

Em [Silva, 2018] alguns vetores do centro de rotação ao centro de massa da mesa LAICA,  $\mathbf{r}$ , foram estimados através de métodos computacionais, aplicando-se a teoria de filtros, entre eles, o filtro de *Kalman*, o filtro estendido de *Kalman* e o filtro *unscented* de *Kalman*. Em termos numéricos, os resultados obtidos por [Silva, 2018] foram:

Tabela 2. Estimativas de componentes do vetor  $\mathbf{r}$  obtidos em [Silva, 2018].

Tipo de Filtro	Componentes Vetoriais		
	$r_x$ [mm]	$r_y$ [mm]	$r_z$ [mm]
Filtro de <i>Kalman</i> (KF)	0,4647498458	0,1486030602	-2,9139714047
Filtro de <i>Kalman</i> Estendido (EKF)	0,4507034361	0,1551217675	-2,6196104581
Filtro <i>unscented</i> de <i>Kalman</i> (UKF)	0.372554138	0.120294185	-2.5180617614

Utilizando-se a equação (255), juntamente ao valores das componentes de  $\mathbf{r}$  previamente fornecidas (Tabela 2.), pode-se fixar determinados valores de ângulo de arfagem e rolagem, isto é, uma determinada pose da plataforma de testes,  $\psi = \pi/7$  e  $\theta = \pi/8$ , e, assim, calcular os intervalos de excursão de cada um dos termos constituintes do vetor  $\mathbf{\Omega}$  a partir da introdução da incerteza na inércia.

Primeiramente, para o filtro de *Kalman*, verificou-se que

$$\frac{mg}{I_{xx}}(-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \psi \cos \theta) \in [-0,5966; -0,5820] \quad (257)$$

$$\frac{mg}{I_{yy}}(r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \theta) \in [-0,3168; -0,3095] \quad (258)$$

$$\frac{mg}{I_{zz}}(-r_x \sen \psi \cos \theta - r_y \sen \theta) \in [-0,0629; -0,0621] \quad (259)$$

Reescrevendo a equação simplificada de *Young* em ambiente *matlab*, pode-se calcular, por exemplo, para o valor de  $\mathbf{r}$  anteriormente citado em uma pose fixa genérica,  $\psi = \pi/7$  e  $\theta = \pi/8$ , o volume do paralelepípedo caracterizado pelo produto cartesiano dos intervalos de máximos e mínimos de cada um dos elementos constituintes do vetor tridimensional de aceleração angular, da seguinte maneira:

$$\text{vol} = |(\text{máx}[\Omega_x] - \text{mín}[\Omega_x]) * (\text{máx}[\Omega_y] - \text{mín}[\Omega_y]) * (\text{máx}[\Omega_z] - \text{mín}[\Omega_z])|. \quad (260)$$

O volume encontrado, para o filtro de *Kalman* foi equivalente a

$$\text{vol(KF)} = 9,3310 * 10^{-8} m^3. \quad (261)$$

Repetindo o processo ao filtro estendido de *Kalman*, tem-se:

$$\frac{mg}{I_{xx}}(-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \psi \cos \theta) \in [-0,5446; -0,5313] \quad (262)$$

$$\frac{mg}{I_{yy}}(r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \theta) \in [-0,2729; -0,2666] \quad (263)$$

$$\frac{mg}{I_{zz}}(-r_x \sen \psi \cos \theta - r_y \sen \theta) \in [-0,0621; -0,0613]. \quad (244)$$

Aplicando-se a mesma fórmula do cálculo do volume de incertezas

$$\begin{aligned} \text{vol(EKF)} &= |(\text{máx}[\Omega_x] - \text{mín}[\Omega_x]) * (\text{máx}[\Omega_y] - \text{mín}[\Omega_y]) * (\text{máx}[\Omega_z] - \text{mín}[\Omega_z])| \\ &= 7,2425 * 10^{-8} m^3. \end{aligned} \quad (265)$$

Finalmente, para o filtro *unscented* de *Kalman*, tem-se

$$\frac{mg}{I_{xx}}(-r_y \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \psi \cos \theta) \in [-0,5124; -0,4999] \quad (266)$$

$$\frac{mg}{I_{yy}}(r_x \cos \psi \cos \theta + r_z \sen \theta) \in [-0,2843; -0,2777] \quad (267)$$

$$\frac{mg}{I_{zz}}(-r_x \sen \psi \cos \theta - r_y \sen \theta) \in [-0,0506; -0,0499], \quad (268)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \text{vol(UKF)} &= |(\text{máx}[\Omega_x] - \text{mín}[\Omega_x]) * (\text{máx}[\Omega_y] - \text{mín}[\Omega_y]) * (\text{máx}[\Omega_z] - \text{mín}[\Omega_z])| \\ &= 5,7783 * 10^{-8} m^3. \end{aligned} \quad (269)$$

Isto é, para determinadas escolhas de  $\mathbf{r}$ , tem-se paralelepípedos de incertezas de volumes diferentes entre si, fazendo com que sua escolha deva ser muito bem estabelecida, através de métodos de otimização, para que o paralelepípedo gerado seja o menor possível. É fácil verificar que, através de (397) e (398), caso duas componentes do vetor  $\mathbf{r}$  sejam nulas, ou seja, vetor localizado em cima de algum dos três eixos coordenados, uma das componentes do vetor aceleração angular também será igual a zero e, conseqüentemente, o volume de incertezas também será igual a zero, já que um dos intervalos de excursão característicos do produto cartesiano será nulo.

# 4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

## 4.1 CONCLUSÃO

O presente trabalho inicia-se através de uma breve análise histórica do desenvolvimento das plataformas de ar como estruturas que permitem a realização de sólidos e confiáveis experimentos de simulação de movimentos de pequenos satélites. Entretanto, para que tais experimentos possam ser realizados de maneira devida, as plataformas de ar utilizadas devem, de fato, apresentar bom balanceamento, isto é, uma distância otimizada entre o centro de rotação, ponto ao redor do qual o corpo em questão rotaciona, e o centro de massa do próprio corpo, fazendo com que o período de oscilação do elemento aeroespacial estudado seja suficientemente grande. Maiores distâncias entre o centro de rotação e o centro de massa darão origem a maiores braços de alavanca, de modo que, por exemplo, forças gravitacionais associadas ao ambiente no qual o elemento será inserido após lançamento darão origem a torques gravitacionais indesejados muito mais elevados do que em uma situação na qual o braço de alavanca entre os dois pontos é reduzido. Logo após o capítulo de introdução, há um capítulo no qual apresenta-se a representação de corpos rígidos em rotação para sistemas de eixos coordenados tridimensionais, teoria importantíssima na análise de equações do movimento como, por exemplo, a equação generalizada de *Young* e sua respectiva simplificação. Por último, tem-se o capítulo de proposições matemáticas e resultados, no qual introduz-se os conceitos associados à inércia assim como também o princípio matemático da representação politópica e incertezas.

Simulações, em terra, de elementos aeroespaciais que, por ventura, serão em algum momento lançados, são importantíssimas e devem ser realizadas nas melhores condições atingíveis em um determinado local e momento. Muitas dessas estruturas demandam muitíssimo tempo de construção e mão-de-obra extremamente especializada, fazendo com que os preços de produção e estabelecimento de estudos relacionados possam atingir níveis elevadíssimos. É extremamente preferível que tais investimentos monetários e cognitivos não sejam desperdiçados em situações como, por exemplo, um lançamento mal realizado, ou o monitoramento e controle de satélites sendo realizados de maneira incorreta. É imprescindível o estabelecimento de técnicas precisas de determinação de atitude assim como também métodos de controle que possam ser, de determinado modo, relativamente imunes a situações adversas que possam surgir, por exemplo, o mal funcionamento de importantes sensores responsáveis pela coleta de dados que devem ser processados em tempo real. É justamente por isso que a introdução de incertezas na modelagem matemática faz-se interessante. Caso existam as tais situações adversas mencionadas, não estar-se-ia utilizando cenários de controle para um ponto específico de operação, e sim para regiões espacialmente determinadas, nas quais todos os possíveis pontos de operação estariam contidos. Dessa maneira, caso técnicas de controle pudessem ser aplicadas a toda a região de incertezas, mesmo que menos precisas, ter-se-ia uma maior segurança e conservadorismo quanto ao funcionamento da estrutura em questão. Entretanto, as regiões de incertezas podem, muitas vezes, ter difícil concepção e visualização, já que não são restritas ao espaço vetorial tridimensional, isto é, dependem das dimensões do problema que está sendo tratado.

As incertezas foram, aqui, introduzidas na matriz tensor de inércia, tanto pelo fato de que a caracterização da matriz de inércias, unicamente da mesa, ou seja, desconsiderando-se as massas móveis, deu-se através de métodos numéricos de programas computacionais *CAD* assim como também pelo fato de que a excursão das massas móveis da plataforma de testes em seus respectivos eixos de mobilidade certamente alteram as propriedades de inércia do sistema, de modo geral. Como o programa computacional *CAD* calcula o tensor de inércia através do modelo que foi computacionalmente gerado pelo próprio usuário no momento de utilização, é plausível que erros humanos tenham sido introduzidos pelos mais diversos motivos, como, por exemplo, modelagem incorreta. Uma possível falta de conhecimento perante a posição exata das massas móveis também justifica a utilização de incertezas na modelagem matemática do problema.

No capítulo de proposições matemáticas e resultados, verificou-se a importância do produto cartesiano entre intervalos de incerteza na determinação da possível região de excursão, independentemente da dimensão do espaço vetorial. Além disso, foram comparados diferentes volumes de regiões de incertezas que podem ser gerados através de variações no vetor  $\mathbf{r}$ , responsável pela caracterização da distância



entre o centro de rotação e o centro de massa, de modo que o menor volume de incertezas esteve associado ao vetor  $\mathbf{r}$  estimado através da utilização do filtro *unscented* de Kalman (UKF).

As denominadas técnicas de incertezas politópicas não são aplicáveis em situações de modelagem matemática não linear, fazendo-se necessária a aplicação do conceito de incertezas através de outras teorias, como, por exemplo, as teorias de perturbação. Espera-se que a aplicação de incertezas às variáveis da plataforma de simulação de movimentos rotacionais em ambiente de microgravidade, localizada no laboratório LAICA, possa gerar frutos futuros em novos trabalhos que ainda estão por vir.

## 4.2 MÉTODO DA PERTURBAÇÃO

Considerar-se-á o mesmo sistema anteriormente proposto, ou seja,

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad (269)$$

de modo que  $f: [t_0, t_1] \times D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tão suave quanto se queira em seus argumentos ao longo do domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Supõe-se que é desejada a solução da equação de estado para um determinado estado inicial dado por

$$x(t_0) = \eta(\varepsilon). \quad (270)$$

O objetivo do método da perturbação é a exploração do quão pequeno o parâmetro  $\varepsilon$  de perturbação pode ser de tal modo que soluções aproximadas desejáveis possam ser obtidas, para valores absolutos do parâmetro de perturbação suficientemente pequenos. Fazendo-se o parâmetro de perturbação, por exemplo igual a zero, obtém-se o problema nominal, ou seja, como se não estivesse sendo inicialmente perturbado,

$$\dot{x} = f(t, x, 0), x(t_0) = \eta_0, \quad (271)$$

onde  $\eta_0 = \eta(0)$ . Supõe-se que o problema admite uma única solução  $x_0(t)$ , definida no intervalo  $[t_0, t_1]$ , sendo  $x_0(t) \in D \forall t \in [t_0, t_1]$ . A proximidade das soluções do sistema não perturbado e do sistema perturbado advém da continuidade de soluções com respeito aos estados e parâmetros iniciais. De modo particular, prova-se que existe uma constante positiva  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$  para a qual  $\forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ , o problema possuirá uma única solução  $x(t, \varepsilon)$  pertencente ao intervalo  $[t_0, t_1]$ . Para tal, também existe uma outra constante positiva  $k$  que satisfaz

$$\|x(t, \varepsilon) - x_0(t)\| \leq k|\varepsilon|, \forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_1, \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (272)$$

Quando o erro de aproximação satisfaz as condições impostas pela equação imediatamente anterior, diz-se que o erro é de ordem  $O(\varepsilon)$  e escreve-se que

$$x(t, \varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon), \quad (273)$$

isto é, a norma do erro é menor do que o valor  $k|\varepsilon|$ , para valores positivos da constante  $k$ , independente do parâmetro de distúrbio  $\varepsilon$ . O fato de que ambas as variáveis são independentes entre si garante a situação de que, caso existam decréscimos visualizados em  $|\varepsilon|$ , também verificar-se-ão decréscimos em  $k|\varepsilon|$ . Em outras palavras, para um valor suficientemente pequeno associado a  $|\varepsilon|$ , também será estabelecido um erro suficientemente pequeno. Dada uma tolerância  $\delta$ , a norma do erro será menor que  $\delta \forall |\varepsilon| \leq \delta/k$ . Uma aproximação  $O(\varepsilon^2)$  respeitará a tolerância  $\delta \forall |\varepsilon| \leq (\delta/k_2)^{1/2}$ , uma aproximação  $O(\varepsilon^3)$  fará o mesmo  $\forall |\varepsilon| \leq (\delta/k_3)^{1/3}$ , e assim por diante. De modo generalizado, pode-se estabelecer que, para um parâmetro de perturbação  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, um erro de ordem  $n$ ,  $O(\varepsilon^n)$ , será menor que um erro de ordem  $m$ ,  $O(\varepsilon^m)$ , caso  $n$  seja maior do que  $m$ , já que

$$\frac{k_1 |\varepsilon|^n}{k_2 |\varepsilon|^m} < 1, \forall |\varepsilon| < \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{(n-m)}}. \quad (274)$$

Além da introdução de incertezas em situações não lineares através do método de perturbação, pode-se, além disso, realizar proposições quanto ao fato de que equações de movimento, como as equações de Young, (314) e (381), podem ser reescritas através da utilização de quatérnions, podendo, de fato, gerar novas formulações interessantes à teoria.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAFRUIT. L3GD20H Triple-Axis Gyro Breakout Board - L3GD20/L3G4200 Upgrade - L3GD20H. **ADAFRUIT**, 2018. Disponível em: <<https://www.adafruit.com/product/1032>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- ALLEGRO. DMOS Microstepping Driver with Translator and Overcurrent Protection. **POLULO**, rev. 5. Disponível em: <[https://www.pololu.com/file/0J450/a4988\\_DMOS\\_microstepping\\_driver\\_with\\_translator.pdf](https://www.pololu.com/file/0J450/a4988_DMOS_microstepping_driver_with_translator.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- ATECORP. Single-Output, Autoranging. **ATECORP**, 2006. Disponível em: <[https://www.atecorp.com/atecorp/media/pdfs/data-sheets/agilent-6030a\\_datasheet.pdf](https://www.atecorp.com/atecorp/media/pdfs/data-sheets/agilent-6030a_datasheet.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex Optimization**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, The Pitt Building, Trumpington Street, 2004.
- BREWER, M. R.; USAF, C. **CUBESAT ATTITUDE DETERMINATION AND HELMHOLTZ CAGE DESIGN**. 2012. Dissertação (Mestrado) - Department of the Air Force Air University, Wright-Patterson Air Force Base: Air Force Institute of Technology, EUA, 2012.
- CHAPMAN, S. J. **FUNDAMENTOS DE MÁQUINAS ELÉTRICAS**. 5. ed. New York: AMGH, 2013.
- DIGI. Digi Xbee® S1 802.15.4 Rf Modules. **DIGI**, 2018. Disponível em: <[https://www.digi.com/pdf/ds\\_xbeemultipointmodules.pdf](https://www.digi.com/pdf/ds_xbeemultipointmodules.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- FANO, R. M.; CHU, L. J.; ADLER, R. B. **ELECTROMAGNETIC FIELDS: Energy and Forces**. 2 ed. Local: John Wiley & Sons, Inc, ago, 1963.
- GOLDSTEIN, H. **CLASSICAL MECHANICS**. 2. ed. Reading, Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, 1980.
- GUIMARÃES, F. C. et al. Aplicação do Filtro de Kalman para a Determinação de Atitude de Plataforma de Testes de Pequenos Satélites. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 13. 2017, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre, 4 out. 2017, p. 1784-1789.
- HENK, M.; RICHTER-GEBERT, J.; ZIEGLER, G. M. **BASIC PROPERTIES OF CONVEX POLYTOPES**. Institut für Mathematik, Alemanha, 2018. Disponível em: <<http://page.math.tu-berlin.de/~henk/preprints/henk%20richtergerbert%20ziegler&basic%20properties%20of%20convex%20polytopes.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- HENRION, D. **ROBUST STABILITY ANALYSIS: Polytopic Uncertainty**. Graduate Course on Polynomial Methods for Robust Control Part II.1., França, out./nov. 2001. Disponível em: <<http://homepages.laas.fr/henrion/courses/polyrobust/polyrobustII1.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- HIBBELER, R. C. **Engineering Mechanics Dynamics**. 12. ed. Upper Saddle River, NJ 07458: Prentice Hall, 2010.
- HONEYWELL. Smart Digital Magnetometer HMR2300. **HONEYWELL**, 2012. Disponível em: <<https://aerocontent.honeywell.com/aero/common/documents/myaerospacecatalog-documents/Missiles-Munitions/HMR2300.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- HYAT, W. H.; BUCK JR., J. A. **ENGINEERING ELECTROMAGNETICS**. 6. ed. Boston: McGraw Hill Companies, 2001.
- JAMES, R. **WERTZ AND MEMBERS OF THE TECHNICAL STAFF ATTITUDE SYSTEMS OPERATION COMPUTER SCIENCE CORPORATION: Spacecraft Attitude Determination and Control**. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1978.
- KHALIL, H. K. **NONLINEAR SYSTEMS**. 3. ed. Prentice Hall, Upper Saddle River: New Jersey 07458, 2002.
- KUIPERS, J. B. **QUATERNIONS AND ROTATION SEQUENCES: A Primer with Application to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999.
- KYSANELECTRONICS. **RELEASE FOR PRODUCTION**. 2015. 1 gráfico. Disponível em: <<http://www.kysanelectronics.com/graphics/1124090-8.3.15.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- KYSANELECTRONICS. **STEPPER MOTORS**. 2015. Disponível em: <[http://www.kysanelectronics.com/Products/datasheet\\_display.php?recordID=7850](http://www.kysanelectronics.com/Products/datasheet_display.php?recordID=7850)>. Acesso em: 4 dez. 2018.

- LOIOLA, J. V. L. **CAMPARISONS OF FILTERING METHODS FOR ATTITUDE DETERMINATION OF MICROSATELLITES**. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Tecnologia: Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, jul. 2018.
- LOIOLA, J. V. L. et al. Development of a Hardware-In-The-Loop Test Platform For Nanosatellites Adcs Integrated With An Ukf. **IAA-AAS-CU**, Roma, v., n. p.1-9, 6 dez. 2017.
- LOIOLA, J. V. L. et al. 3 Axis simulator of the Earth magnetic field. 2018 IEEE Aerospace Conference, Big Sky v., n., p. 1-8, 2014.
- MACINTYRE ELECTRONIC DESIGN ASSOCIATES (MEDA). **HCS01CL OPERATION AND MAINTENANCE MANUAL**. Virginia, EUA: MEDA, maio 2006. Disponível em: <<ftp://meda.com/pub/HCS01CL%20O&M%20Manual%20Rev%20A.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- mar. 2018.
- NASA. Measuring Earth's Magnetism. **NASA EARTH OBSERVATORY**, 2014. Disponível em: <<https://earthobservatory.nasa.gov/images/84266/measuring-earths-magnetism>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- OZYAGCILAR, T. Calibrating an eCompass in the Presence of Hard- and Soft-Iron Interference. **FREESCALE SEMICONDUCTOR**, nov. 2015. Disponível em: <<https://www.nxp.com/docs/en/application-note/AN4246.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- OZYAGCILAR, T. Implementing a Tilt-Compensated eCompass using Accelerometer and Magnetometer Sensors. **FREESCALE SEMICONDUCTOR**, nov. 2015. Disponível em: <[https://cache.freescale.com/files/sensors/doc/app\\_note/AN4248.pdf](https://cache.freescale.com/files/sensors/doc/app_note/AN4248.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. **CARACTERIZAÇÕES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação Universidade Estadual de Campinas, 2. sem. 2009. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~sala225/ia360/2s09/PDF/incertezas.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PHYSICXS. HELMHOLTZ COILS. **PHYSICXS**, Prescott, EUA. Disponível em: <<http://physicxs.pr.erau.edu/HelmholtzCoils/>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PI. PIglide Air Preparation Kit User Manual. **PI**, EUA, 11 maio 2017. Disponível em: <[https://www.pi-usa.us/fileadmin/user\\_upload/physik\\_instrumente/files/user\\_manuals/A-80x\\_UserManual\\_A801D0001.pdf](https://www.pi-usa.us/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/user_manuals/A-80x_UserManual_A801D0001.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PI. PIglide Filter and Air Preparation Kits. **PI**, EUA, 26 nov. 2018a. Disponível em: <[https://www.pi-usa.us/fileadmin/user\\_upload/physik\\_instrumente/files/datasheets/A-80x-Datasheet.pdf](https://www.pi-usa.us/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/datasheets/A-80x-Datasheet.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PI. PIglide HB Hemispherical Air Bearings User Manual. **PI**, EUA, 8 ago. 2016. Disponível em: <[https://www.pi-usa.us/fileadmin/user\\_upload/physik\\_instrumente/files/user\\_manuals/A-65x\\_UserManual\\_A65XD0001.pdf](https://www.pi-usa.us/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/user_manuals/A-65x_UserManual_A65XD0001.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018b.
- PI. PIglide HB: Hemispherical Air Bearing. **PI**, EUA, 31 jan. 2018c. Disponível em: <[https://www.pi-usa.us/fileadmin/user\\_upload/physik\\_instrumente/files/datasheets/A-65x-Datasheet.pdf](https://www.pi-usa.us/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/datasheets/A-65x-Datasheet.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- PISACANE, V. L. **THE SPACE ENVIRONMENT AND ITS EFFECTS ON SPACE SYSTEMS**. Reston, VA: AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2008.
- PLOEG, L. C. V. **DESENVOLVIMENTO DE SISTEMA PARA SIMULAÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE EM ÓRBITAS BAIXAS**. 2017. Graduação (Monografia) - Faculdade de Tecnologia – Departamento de Engenharia Elétrica: Universidade de Brasília, Brasília, 2017.
- PUSKA. Tarifa: Catálogo 2016. **PUSKA**, 2016. Disponível em: <[https://www.puska.com/content/dam/brands/Puska/Puska/Catalogo\\_tarifa\\_PUSKA\\_2016\\_tcm1063-3551051.pdf](https://www.puska.com/content/dam/brands/Puska/Puska/Catalogo_tarifa_PUSKA_2016_tcm1063-3551051.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- RUDD, E. M.; CRAIG, J. R. Optimum Spacing of Square and Circular Coil Pairs. **REVIEW OF SCIENTIFIC INSTRUMENTS**, v.39, n.1372, p. 1372-1374, 13 maio 1968. DOI:10.1063/1.1683678.
- RYBUS, T. et al. New Planar Air-Bearing Microgravity Simulator for Verification of Space Robotics Numerical Simulations and Control Algorithms. **ROBOTICS**, Polônia, 2013. Disponível em: <[http://robotics.estec.esa.int/ASTRA/Astra2013/Papers/rybus\\_2811164.pdf](http://robotics.estec.esa.int/ASTRA/Astra2013/Papers/rybus_2811164.pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2018.

- SILVA, R. C. **FILTERING AND ADAPTIVE CONTROL FOR BALANCING A NANOSATELLITE TESTBED**. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica: Universidade de Brasília, jul. 2018.
- SILVA, R. C.; ULISSES, A. R. **SIMULADOR DE SISTEMA DE DETERMINAÇÃO E CONTROLE DE ATITUDE DE PEQUENOS SATÉLITES**. 2015. Graduação (Monografia) – Faculdade de Tecnologia – Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- ST LIFE AUGMENTED. Ultra-compact high-performance eCompass module: 3D accelerometer and 3D magnetometer. **ST**, nov. 2013, DocID018771 Rev 2. Disponível em: <<https://www.st.com/resource/en/datasheet/DM00027543.pdf>>. Acesso em: 4 dez. 2018.
- YOUNG, J. S. **DEVELOPMENT OF AN AUTOMATIC BALANCING SYSTEM FOR A SMALL SATELLITE ATTITUDE CONTROL SIMULATOR**. 1998. Dissertação (Mestrado) -Utah State University, Logan, Utah: Department of Mechanical and Aerospace Engineering, EUA, 1998.
- SCHWARTZ, J. L.; PECK, M. A.; HALL, C. D.; **HISTORICAL REVIEW OF SPACECRAFT SIMULATOR**. 2003. AAS 03-125. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. Vol. 26, No. 4 – August 2003. p. 1-19.