
**AVALIAÇÃO DE GRANDEZAS ELÉTRICAS EM
DIFERENTES REPRESENTAÇÕES**

VICTOR DO PRADO BRASIL

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

AVALIAÇÃO DE GRANDEZAS ELÉTRICAS EM
DIFERENTES REPRESENTAÇÕES.

VICTOR DO PRADO BRASIL

ORIENTADOR: ANÉSIO DE LELES FERREIRA FILHO
CO-ORIENTADOR: JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

BRASÍLIA/DF: JULHO - 2017.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

AVALIAÇÃO DE GRANDEZAS ELÉTRICAS EM
DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

VICTOR DO PRADO BRASIL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA.

APROVADA POR:

Prof. João Yoshiyuki Ishihara, PhD. (ENE-UnB)
(Presidente da Banca - Co-orientador)

Prof. Francisco Damasceno Freitas, PhD. (ENE-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Prof. Jorge Andrés Cormane Angarita, PhD. (ENE-UnB-Gama)
(Examinador Interno)

BRASÍLIA/DF, 04 DE JULHO DE 2017.

FICHA CATALOGRÁFICA

BRASIL, VICTOR DO PRADO

AVALIAÇÃO DE GRANDEZAS ELÉTRICAS

EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES. [Distrito Federal] 2017.

xiv, 66p., 297 mm (ENE/FT/UnB, Engenheiro Eletricista, Engenharia Elétrica)

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Grandezas Elétricas

2. Desequilíbrio

3. Tensores

4. Quatérnios

I. ENE/FT/UnB

II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BRASIL, V. P. (2017). Avaliação de Grandezas Elétricas em Diferentes Representações. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 66p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Victor do Prado Brasil.

TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO: AVALIAÇÃO DE GRANDEZAS ELÉTRICAS EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES.

GRAU / ANO: Engenheiro Eletricista / 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste trabalho de conclusão de curso e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Victor do Prado Brasil
SMDB conjunto 26, Lago Sul, Brasília.
71.680-260 Brasília - DF - Brasil.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo cuidado constante com a minha vida. Agradeço por ter me dado consciência do meu pecado e da minha necessidade de salvação. Agradeço por me livrar de uma crise existencial e me dar um objetivo de vida.

Agradeço também aos meus pais Joaquim Brasil Neto e Ana Eunice Prado, que sempre me incentivaram a ser melhor e me dedicar àquilo que amo. Eles sempre estiveram ao meu lado, sempre escutaram meus problemas e sempre procuraram contribuir com soluções. Sem meus pais, não teria tido todo o suporte que tive para chegar até aqui.

Agradeço à minha namorada Julyana por acreditar em mim e estar sempre ao meu lado também. Obrigado pelo cuidado com a minha vida e por me auxiliar nas minhas escolhas.

Agradeço especialmente ao meu orientador, prof. Anésio Leles, que me introduziu ao tema e me deu a oportunidade de fazer este trabalho. Obrigado por ter me apresentado à área de qualidade da energia e por ter me dado todo o suporte para a pesquisa.

Agradeço ao meu co-orientador, prof. João Ishihara, por ter se empenhado, mesmo o tema não sendo parte direta de sua linha principal de pesquisa. Obrigado pelas várias ideias e comentários motivadores.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os meus colegas de faculdade. Obrigado por trilharem o caminho da engenharia elétrica ao meu lado. Obrigado por terem partilhado das mesmas dificuldades que eu e por me terem prestado apoio e suporte. Foram apenas alguns anos, mas levarei cada um de vocês no coração pelo resto da vida.

RESUMO

Avaliação das Grandezas Elétricas em Diferentes Representações

Autor: Victor do Prado Brasil

Orientador: Anésio de Leles Ferreira Filho

Co-Orientador: João Yoshiyuki Ishihara

Brasília, julho de 2017

De acordo com a literatura, o estudo de grandezas elétricas (tais como tensão, corrente, impedância e potência) iniciou-se por meio de análise no domínio do tempo. Assim, a avaliação de circuitos de segunda ordem demandava a resolução de equações diferenciais. Em função disso, os fasores foram introduzidos como ferramenta de análise de circuitos elétricos. Entretanto, ainda hoje, a representação do fator de potência e da potência reativa de circuitos elétricos trifásicos desequilibrados por meio de fasores não está totalmente consolidada.

Recentemente, duas ferramentas denominadas tensores e quatérnios têm sido empregadas com o objetivo de propor um filtro ativo de potência, e assim corrigir o fator de potência da carga e suas não-linearidades. Com estas ferramentas, as grandezas elétricas podem ser redefinidas.

Considerando os aspectos ora citados, surgiu a ideia de desenvolvimento deste trabalho que objetiva comparar o uso de fasores, tensores e quatérnios para a representação das grandezas elétricas monofásicas e trifásicas.

Para tanto, as tensões, correntes, impedâncias e potências são inicialmente definidas empregando-se fasores, tensores e quatérnios. Em seguida, são propostos cinco estudos de caso. Em cada estudo de caso é analisado um circuito e comparadas as representações propostas.

Com quatérnios e tensores, é possível definir a potência reativa trifásica instantânea (\mathbf{Q}) para sistemas equilibrados e desequilibrados. Os elementos de \mathbf{Q} são capazes de representar a presença de indutores ou capacitores, assim como o desequilíbrio na carga.

Este trabalho, portanto, identifica as principais vantagens e desvantagens da aplicação de fasores, tensores e quatérnios em circuitos elétricos monofásicos e trifásicos equilibrados e desequilibrados.

ABSTRACT

Electrical Quantities Evaluation In Different Representations

Author: Victor do Prado Brasil

Supervisor: Anésio de Leles Ferreira Filho

Co-Supervisor: João Yoshiyuki Ishihara

Brasília, July of 2017

According to the literature, the study of electrical quantities (such as voltage, current, impedance and power) began with analysis in the time domain. Therefore, solving second order circuits involved solving differential equations. As a result, phasors were introduced as an electrical circuit analysis tool. However, the representation of power factor and reactive power for three-phase unbalanced systems is not yet well established.

Recently, tensors and quaternions have been employed in order to apply an active power filter (APF) to correct the power factor and load non-linearities. With these tools, electrical quantities can be redefined.

Considering these aspects, this work proposes a comparison between phasors, tensors and quaternions for single and three-phase electrical quantities representations.

Voltages, currents, impedances and powers are initially defined employing phasors, tensors and quaternions. Subsequently, five cases are introduced. In each of them, a circuit is analysed and the proposed representations are compared.

Utilising quaternions and tensors, it is possible to define the instantaneous reactive power (\mathbf{Q}) for three-phase systems. The elements of \mathbf{Q} are able of representing the presence of inductors and/or capacitors, as well as load unbalance.

This work, therefore, identifies the main advantages and disadvantages of applying phasors, tensors and quaternions in single and three-phase electrical circuits, in both balanced and unbalanced conditions.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	2
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	2
2	CONCEITOS E DEFINIÇÕES	4
2.1	CIRCUITOS MONOFÁSICOS EM REGIME SENOIDAL	4
2.1.1	Tensão e Corrente	4
2.1.2	Potência Instantânea	4
2.1.3	Potência Ativa	6
2.1.4	Potência Reativa	6
2.1.5	Potência Aparente	7
2.2	CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM REGIME SENOIDAL	7
2.2.1	Tensão e Corrente	7
2.2.2	Potência Instantânea	8
2.2.3	Potência Ativa	9
2.2.4	Potência Aparente	9
2.2.5	Potência Reativa	9
2.3	FASORES	10
2.4	TEORIA VETORIAL	11
2.4.1	Norma de um Vetor	11
2.4.2	Produto interno	12
2.4.3	Produto Vetorial	12
2.5	TENSORES	13
2.5.1	Produto Tensorial	13
2.5.2	Tensor Simétrico e Anti-simétrico	13
2.5.3	Tensor Dual	14
2.6	QUATÉRNIOS	14
2.6.1	Definição	14
2.6.2	Produto de Quatérnios	15

2.6.3	Norma	15
2.6.4	Conjugado	16
2.6.5	Inverso	16
2.6.6	Quatérnio de Rotação	16
2.7	ESTADO DA ARTE	17
2.7.1	QUATÉRNIOS	17
2.7.2	TENSORES	19
3	RESULTADOS E ANÁLISES	23
3.1	METODOLOGIA	23
3.2	GRANDEZAS ELÉTRICAS MONOFÁSICAS	25
3.2.1	Base de Fasores	25
3.2.2	Base de Quatérnios	26
3.2.3	Base de Tensores	28
3.3	GRANDEZAS ELÉTRICAS TRIFÁSICAS	28
3.3.1	Base de Fasores	28
3.3.2	Base de Quatérnios	29
3.3.3	Base de Tensores	33
3.4	ESTUDOS DE CASO	34
3.4.1	Equilibrado Puramente Resistivo Trifásico	35
3.4.2	Equilibrado RLC Série Trifásico	38
3.4.3	Desequilibrado Puramente Resistivo Trifásico	42
3.4.4	Desequilibrado RLC Série Trifásico	46
3.4.5	Desequilibrado RLC Trifásico com Estrela Aterrada	49
4	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	54
4.1	CONCLUSÕES GERAIS	54
4.2	RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	56
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
	APÊNDICES	59
A	Código Matlab	60

Lista de Figuras

2.1	Representação genérica de um circuito monofásico linear.	5
2.2	Representação genérica de um circuito trifásico com neutro.	7
2.3	Configurações básicas de circuitos trifásicos (estrela e triângulo).	8
2.4	Representação de um fasor girante e a sua parte real.	10
2.5	Representação genérica de um vetor tridimensional.	11
2.6	Ilustração das regras de produto vetorial.	12
2.7	Exemplo de rotação. (a) Ilustra os vetores antes da rotação. (b) Vetores após a rotação.	17
3.1	Circuito trifásico com ligação em estrela flutuante, adotado para a resolução dos estudos de caso.	24
3.2	Produto entre o quatérnio de tensão e de corrente. Fonte: [6].	27
3.3	Ilustração dos quatérnios de impedância e de potência monofásicos. Fonte: [6].	28
3.4	Lugar geométrico das tensões e quatérnio girante.	30
3.5	Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.1.	36
3.6	Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.1.	37
3.7	Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.1.	38
3.8	Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.2.	40
3.9	Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.2.	41
3.10	Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.2.	41
3.11	Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.2.	42
3.12	Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.3.	44

3.13	Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.3.	45
3.14	Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.3.	45
3.15	Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.3. . .	46
3.16	Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.4.	48
3.17	Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.4.	48
3.18	Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.4. . .	49
3.19	Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.5	50
3.20	Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.5	51
3.21	Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.5	52
3.22	Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.5 . .	52

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIações

$v(t)$: tensão elétrica monofásica no instante t .	[V]
$i(t)$: corrente elétrica monofásica no instante t .	[A]
$p(t)$: potência elétrica monofásica no instante t .	[W]
f : frequência elétrica.	[Hz]
$\omega = 2\pi f$: frequência elétrica angular.	[$\frac{rad}{s}$]
$T = \frac{1}{f}$: período da função.	[s]
RMS: raiz do valor quadrático médio (<i>Root Mean Squared</i>).	
V : tensão <i>RMS</i> .	[V]
I : corrente <i>RMS</i> .	[A]
\bar{V} : fasor de tensão.	[V]
\bar{I} : fasor de corrente.	[A]
\bar{S} : potência complexa.	[VA]
\bar{S}_{abc} : potência complexa trifásica.	[VA]
$v_a(t)$: tensão elétrica da fase a no instante t .	[V]
$i_a(t)$: corrente de linha da fase a no instante t .	[A]
$p_a(t)$: potência da fase a no instante t .	[W]
$p_{abc}(t)$: potência trifásica no instante t .	[W]
$p_p(t)$: potência ativa instantânea.	[W]
$p_q(t)$: potência reativa instantânea.	[W]
P : potência ativa.	[W]
Q : potência reativa.	[VA _r]

S : potência aparente.	[VA]
P_{abc} : potência ativa trifásica.	[W]
Q_{abc} : potência reativa trifásica.	[VA r]
S_{abc} : potência aparente trifásica.	[VA]
\mathbf{x} : vetor tridimensional.	
\mathbf{v} : vetor de tensão.	
\mathbf{i} : vetor de corrente.	
\mathbf{q} : vetor de potência reativa instantânea.	
$ \mathbf{x} $: norma de um vetor.	
$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$: produto escalar entre os vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 .	
$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$: produto vetorial entre \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 .	
\mathbf{v}' : vetor transposto.	
$\hat{\mathbf{T}}$: tensor.	
$\hat{\mathbf{S}}$: tensor de potência instantânea.	[VA]
$\hat{\mathbf{Q}}$: tensor de potência reativa instantânea.	[VA r]
\otimes : produto tensorial.	
LGT: Lugar Geométrico das Tensões.	
LGC: Lugar Geométrico das Correntes.	
$\tilde{\mathbf{A}}$: quatérnio A.	
$\tilde{\mathbf{V}}$: quatérnio de tensão.	[V]
$\tilde{\mathbf{I}}$: quatérnio de corrente.	[A]
$\tilde{\mathbf{S}}$: quatérnio de potência.	[VA]
$ \tilde{\mathbf{A}} $: norma do quatérnio A.	

\tilde{A}^* : conjugado do quatérnio A .

\tilde{A}^{-1} : inverso do quatérnio A .

\tilde{A} : parte escalar do quatérnio A .

\vec{A} : parte vetorial do quatérnio A .

$\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\tilde{\mathbf{q}}_2$ e $\tilde{\mathbf{q}}_3$: vetores ortonormais do espaço tridimensional.

$\mathbb{H}\mathbb{R}$: espaço Hamiltoniano, formado pelos quatérnios.

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção serão discutidos a motivação, os objetivos e a estrutura do presente trabalho.

1.1 MOTIVAÇÃO

O estudo de fenômenos naturais, tais como a corrente elétrica, a tensão observada em uma pilha ou ainda o aquecimento de um condutor, pode ser simplificado caso seja adotada uma representação matemática adequada. Por exemplo, a representação de um número complexo em forma polar simplificou as operações de divisão e multiplicação. Com base nisso, foi desenvolvida a teoria de fasores, a qual permitiu que circuitos elétricos de segunda ordem em regime senoidal permanente sejam resolvidos apenas com operações algébricas, evitando a resolução de equações diferenciais. Outro exemplo é a descrição no domínio da frequência, por meio das transformadas de Fourier e de Laplace, de um sinal temporal. Essa representação é muito vantajosa devido ao fato de uma convolução no domínio do tempo poder ser transformada em um simples produto no domínio da frequência, facilitando o estudo e a aplicação de técnicas de controle.

Nesse contexto, o uso de vetores e tensores têm sido recentemente discutido e estudado [16, 17, 2, 8, 28, 22, 9, 26, 23, 27], visando-se uma representação adequada para sistemas de potência trifásicos equilibrados e desequilibrados. Em geral, os sinais de tensão trifásicos instantâneos são escritos como elementos de um vetor tridimensional, assim como as correntes.

Outra representação possível, alvo do presente estudo, é por meio dos quatérnios. A primeira aplicação dessa ferramenta na engenharia elétrica foi feita por James Clerk Maxwell, em seu tratado sobre eletricidade e magnetismo [19]. Alguns anos depois, J. Willard Gibbs e Oliver Heaviside criaram o cálculo vetorial (i.e., o cálculo diferencial e integral sobre vetores) [10], e com isso a teoria de Maxwell foi reescrita para a forma como é atualmente apresentada [14].

Dessa forma, a teoria de quatérnios ficou pouco explorada no contexto da enge-

nharia elétrica por muitos anos. Recentemente, entretanto, têm surgido vários estudos que resgatam o uso dessa teoria. Muitos desses trabalhos concluem que, com o avanço computacional, o uso de quatérnios pode ser uma ferramenta promissora para certas análises [24], [20], [18], [21], [5], [6]. Este trabalho pretende abordar a caracterização das grandezas elétricas monofásicas e trifásicas nas representações por meio de fasores, tensores e quatérnios, fazendo-se uma análise comparativa entre estas três ferramentas.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo analisar sinais de tensão, corrente e potência, assim como a modelagem de impedâncias, por meio de fasores, tensores e quatérnios. Deseja-se comparar essas representações apontando suas vantagens e suas desvantagens. Para isso, serão definidas cada uma das grandezas nessas representações e em seguida serão analisados circuitos trifásicos equilibrados puramente resistivos, equilibrados com resistores, indutores e capacitores (RLC), trifásicos desequilibrados resistivos e depois desequilibrados RLC. Ao final serão comparados os resultados obtidos com cada representação.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho é dividido em seis partes principais: introdução, conceitos e definições, estado da arte, métodos e materiais, resultados, conclusões e recomendações.

No capítulo de conceitos e definições são apresentados os conceitos elétricos monofásicos e trifásicos no domínio do tempo. Em seguida são apresentados os conceitos de fasores, vetores, tensores e quatérnios.

No capítulo de estado da arte, é apresentado um breve resumo do estado da arte sobre o uso de tensores e quatérnios na engenharia elétrica.

No capítulo de métodos e materiais é apresentada a abordagem para realizar este trabalho. Primeiro, apresenta-se o procedimento para caracterizar as grandezas elétricas nas representações propostas. Em seguida, são apresentados cinco estudos de caso, assim como a abordagem para a análise. Como ferramenta para os cálculos e resolução dos circuitos foi utilizado o *software* de simulação computacional *MATLAB_R2017a*[25].

No capítulo de resultados apresenta-se como se dá a representação das grandezas elétricas (tensão, corrente e potência) em cada uma das bases. Além disso, é apresentada também sugestão de impedância na base de quatérnios para circuitos equilibrados. Em seguida, são apresentados os resultados numéricos da análise dos estudos de caso, e as representações propostas são comparadas.

Por fim, no último capítulo são apresentadas as conclusões obtidas a partir dos estudos de caso. Nesse capítulo também são propostos temas para trabalhos futuros.

2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

2.1 CIRCUITOS MONOFÁSICOS EM REGIME SENOIDAL

2.1.1 Tensão e Corrente

Um circuito monofásico linear genérico pode ser representado pela Figura 2.1. Percebe-se que na carga, o sentido da corrente é contrário ao da tensão, notação que será utilizada ao longo deste trabalho. Pela linearidade do circuito, a corrente $i(t)$ deve ser da mesma família de funções de $v(t)$. Em um circuito monofásico alternado, a tensão é dada pela Eq.(2.1).

$$v(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \theta_v) \quad (2.1)$$

Logo, em regime permanente, a corrente é expressa pela Eq.(2.2).

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \quad (2.2)$$

A relação entre V e I e entre θ_v e θ_i está relacionada ao conceito de impedância do circuito. Nas próximas subseções, serão explorados os conceitos de potência.

2.1.2 Potência Instantânea

A potência instantânea é definida como sendo o produto entre tensão e corrente. Após algumas manipulações algébricas, chega-se à Eq.(2.3) [15].

$$p(t) = VI [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad (2.3)$$

Assim, uma parte da potência é invariante no tempo, enquanto que a outra oscila com o dobro da frequência de excitação, i.e. 2ω . Pela notação adotada, se $p(t)$ for positivo, então a carga está consumindo potência. Caso contrário, ela estará fornecendo. Desenvolvendo o termo $\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$, pode-se reescrever $p(t)$ conforme a Eq.(2.4).

$$p(t) = VI \cos(\theta_v - \theta_i) [1 + \cos(2(\omega t + \theta_i))] - VI \sin(\theta_v - \theta_i) \sin(2(\omega t + \theta_i)) \quad (2.4)$$

Assim, define-se a potência ativa instantânea, Eq.(2.5), e a potência reativa instantânea, Eq.(2.6).

$$p_p(t) = VI \cos(\theta_v - \theta_i) [1 + \cos(2(\omega t + \theta_i))] \quad (2.5)$$

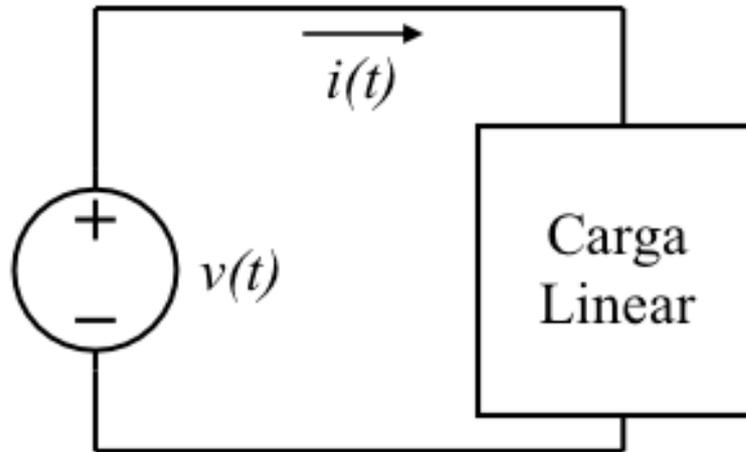


Figura 2.1: Representação genérica de um circuito monofásico linear.

$$p_q(t) = -VI \text{sen}(\theta_v - \theta_i) \text{sen}(2(\omega t + \theta_i)) \quad (2.6)$$

A componente ativa é produzida pela componente da corrente em fase com a tensão e está relacionada ao consumo médio da carga. A componente reativa, por sua vez, é devida à componente ortogonal e está relacionada à energia armazenada nos campos magnéticos, elétricos ou nos movimentos de cargas mecânicas, no caso de motores [1].

Exemplo

Considere uma fonte de tensão $v(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t)$ alimentando um resistor $R = 1 \Omega$. Assim, a corrente é dada pelas Eqs.(2.7 e 2.8).

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (2.7)$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad (2.8)$$

Calculando as potências ativa instantânea e reativa instantânea, chega-se às Eqs.(2.9 a 2.11).

$$p_p(t) = 4\cos(0 - 0) [1 + \cos(2(\omega t + 0))] \quad (2.9)$$

$$p_p(t) = 4 [1 + \cos(2\omega t)] \quad (2.10)$$

$$p_q(t) = -4\text{sen}(0 - 0)\text{sen}(2(\omega t + 0)) \quad (2.11)$$

Percebe-se, portanto, que a média da potência instantânea ativa é igual à potência ativa. Além disso, a potência instantânea reativa é constante e igual a zero, como esperado dado que o circuito não possui elementos reativos (capacitores e/ou indutores).

Exemplo

Considere uma fonte de tensão $v(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t)$ alimentando um capacitor $C = 1 F$, a uma frequência $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Assim, a corrente no circuito é dada pelas Eqs.(2.12 e 2.13).

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.12)$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(t + 90^\circ) \quad (2.13)$$

Calculando as potências ativa instantânea e reativa instantânea, chega-se às Eqs.(2.14 a 2.17).

$$p_p(t) = 4\cos(0 - 90) [1 + \cos(2(t + 90))] \quad (2.14)$$

$$p_p(t) = 0 [1 + \cos(2t)] = 0 \quad (2.15)$$

$$p_q(t) = -4\sin(0 - 90)\sin(2(t + 90)) \quad (2.16)$$

$$p_q(t) = -4\sin(90)\sin(2t). \quad (2.17)$$

Percebe-se que a potência instantânea ativa é constante e igual a zero, pois não há elementos resistivos no circuito. Além disso, a amplitude da potência instantânea reativa é igual à potência reativa fornecida pelo capacitor.

2.1.3 Potência Ativa

A potência média relativa a $p(t)$, expressa pela Eq.(2.18), também é denominada potência ativa (P). Ela representa efetivamente a taxa de energia consumida em um período de tempo T [3].

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = VI\cos(\theta_v - \theta_i) \quad (2.18)$$

Dessa forma, $p_p(t)$ pode ser reescrita conforme a Eq.(2.19).

$$p_p(t) = P [1 + \cos(2(\omega t + \theta_i))] \quad (2.19)$$

Portanto a potência ativa é o valor médio de $p_p(t)$.

2.1.4 Potência Reativa

A potência reativa é definida como sendo a amplitude de $p_q(t)$, Eq.(2.20). Ou ainda, pode ser definida como a parte imaginária da potência complexa (conforme será apresentado na seção 3.2.1), sendo também chamada de potência em quadratura [15].

$$Q = VI\sin(\theta_v - \theta_i) \quad (2.20)$$

Q está associada ao armazenamento de energia por parte dos elementos reativos do circuito (capacitor e indutor) [3].

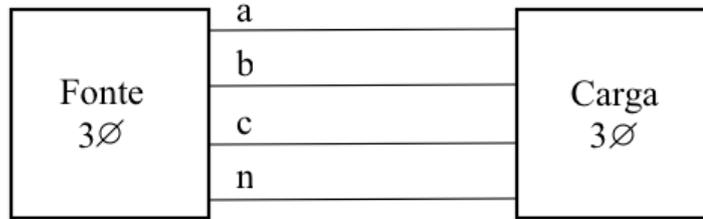


Figura 2.2: Representação genérica de um circuito trifásico com neutro.

2.1.5 Potência Aparente

A potência aparente (S) é definida como a magnitude da potência complexa [15], ou simplesmente como o produto entre V e I , Eq.(2.21).

$$S = VI \quad (2.21)$$

Das subseções 2.1.3 e 2.1.4, obtém-se a relação da Eq.(2.22), a qual relaciona a potência ativa e a reativa com a aparente.

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (2.22)$$

2.2 CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM REGIME SENOIDAL

2.2.1 Tensão e Corrente

Um circuito trifásico linear genérico é representado pela Figura 2.2, podendo ser dotado ou não do condutor neutro.

As tensões entre fases são denominadas de tensões de linha, e são denotadas por $v_{ab}(t)$ (neste caso é expressa a tensão entre a fase a e b) ou em termos do valor *RMS* V_{ab} . As correntes em cada condutor que conecta fonte e carga são chamadas de correntes de linha. Uma carga trifásica pode ser constituída por três impedâncias monofásicas ligadas em estrela (Y) ou em delta (Δ), conforme a Figura 2.3. Denomina-se corrente de fase a corrente que passa por cada impedância da carga. De forma geral, as tensões das fases (i.e. a tensão entre uma fase e um ponto neutro do circuito), sem a presença de harmônicas, podem ser expressas pelas Eqs.(2.23 a 2.25). Em um circuito equilibrado, as amplitudes das tensões de cada fase são iguais e estão defasadas de

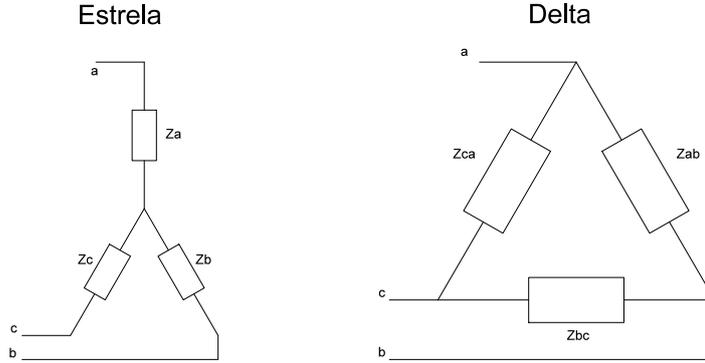


Figura 2.3: Configurações básicas de circuitos trifásicos (estrela e triângulo).

120° elétricos entre si (i.e. $\phi_b = \phi_c = 0$). Em uma condição de carga equilibrada, as correntes atendem ao mesmo critério anterior.

$$v_a(t) = V_a \cos(\omega t) \quad (2.23)$$

$$v_b(t) = V_b \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \phi_b) \quad (2.24)$$

$$v_c(t) = V_c \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \phi_c) \quad (2.25)$$

Portanto, o circuito trifásico equilibrado pode ser interpretado como 3 monofásicos equivalentes. Sendo assim, todos os conceitos previamente apresentados podem ser facilmente estendidos ao caso trifásico.

2.2.2 Potência Instantânea

Analogamente ao caso monofásico, a potência de cada fase é definida como sendo o produto entre tensão e corrente de cada fase, conforme as Eqs.(2.26 a 2.28), e a potência trifásica é definida como a soma delas, Eq.(2.30) [1].

$$p_a(t) = VI [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad (2.26)$$

$$p_b(t) = VI \left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3} + \theta_v + \theta_i\right) \right] \quad (2.27)$$

$$p_c(t) = VI \left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} + \theta_v + \theta_i\right) \right] \quad (2.28)$$

Utilizando a identidade da Eq.(2.29),

$$\cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \quad (2.29)$$

chega-se à Eq.(2.30).

$$p_{abc}(t) = 3VI \cos(\theta_v - \theta_i). \quad (2.30)$$

Percebe-se, portanto, que em um circuito equilibrado a potência trifásica é invariante no tempo, enquanto que a potência em cada fase varia com o dobro da frequência de excitação. Dessa forma, a definição de potência instantânea reativa não é imediata como foi na seção 2.1.2. Ela é possível apenas com o uso dos tensores e quatérnios, como será feito nas seções 3.3.2 e 3.3.3.

2.2.3 Potência Ativa

A potência ativa trifásica é definida como a média da potência instantânea, Eq.(2.31).

$$P_{abc} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{abc}(t) dt = 3VI \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (2.31)$$

Dessa forma, percebe-se que a potência ativa trifásica é igual à instantânea, no caso de um circuito equilibrado.

2.2.4 Potência Aparente

De forma análoga à apresentada na seção 2.1.5 (caso monofásico), a potência aparente trifásica é definida pela relação entre a soma das potências ativa e reativas de cada fase, conforme a Eq.(2.32). Com o circuito equilibrado tem-se a Eq.(2.33).

$$S_{abc} = \sqrt{P_{abc}^2 + Q_{abc}^2} \quad (2.32)$$

$$S_{abc} = 3VI \quad (2.33)$$

2.2.5 Potência Reativa

Analogamente ao caso monofásico, a potência trifásica reativa pode ser definida como a potência ortogonal à ativa. Assim, chega-se às Eqs.(2.34 e 2.35).

$$Q_{abc} = \sqrt{S_{abc}^2 - P_{abc}^2} \quad (2.34)$$

$$Q_{abc} = 3VI \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (2.35)$$

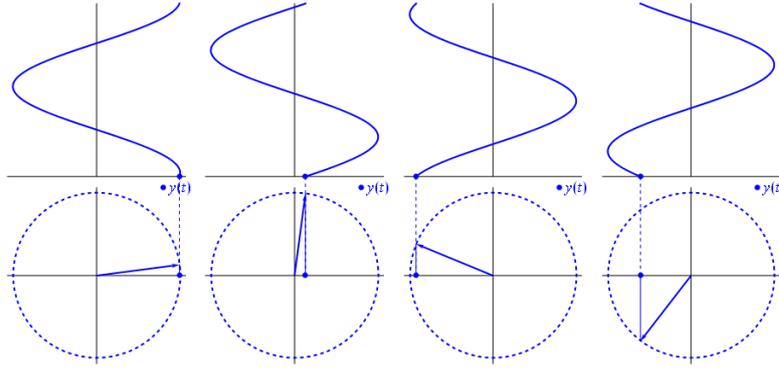


Figura 2.4: Representação de um fasor girante e a sua parte real.

2.3 FASORES

Em um circuito linear, aplicam-se os princípios da homogeneidade e da superposição. Assim, ao invés de aplicar uma entrada $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ e calcular a resposta $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$, pode-se aplicar a entrada complexa $\bar{V} = V_M e^{j\omega t}$ e calcular a saída $\bar{I} = I_M e^{j\omega t + \phi}$, cuja parte real é a resposta desejada [15]. A essas grandezas complexas dá-se o nome de fasor. Observando o comportamento de \bar{V} ao longo do tempo, obtém-se a Figura 2.4. Por isso dá-se o nome de fasor girante para essas entidades.

Como \bar{V} e \bar{I} possuem o termo $e^{j\omega t}$ em comum, é usual omiti-lo ao longo das contas e da representação - como mostra a Eq.(2.37) -, sendo mostrado apenas ao final dos cálculos. Ao fazer essa omissão, é como se fosse escolhido um instante de tempo para análise. Dessa forma, os fasores representam adequadamente circuitos em regime estacionário. Além disso, é usual considerar o valor RMS e não a amplitude máxima do sinal. Assim, esse procedimento transforma equações diferenciais em simples equações algébricas, conforme mostram as Eq.(2.36 a 2.38), e por isso é muito útil na análise de circuitos.

$$\bar{V} = V e^{j\omega t} e^{\theta_v} \quad (2.36)$$

$$\bar{V} = V / \theta_v \quad (2.37)$$

$$\bar{V}' = j\omega \bar{V} \quad (2.38)$$

2.4 TEORIA VETORIAL

Um vetor tridimensional (\mathbf{x}) pode ser interpretado como uma seta da origem do espaço tridimensional até o ponto definido pelas coordenadas do vetor, conforme a

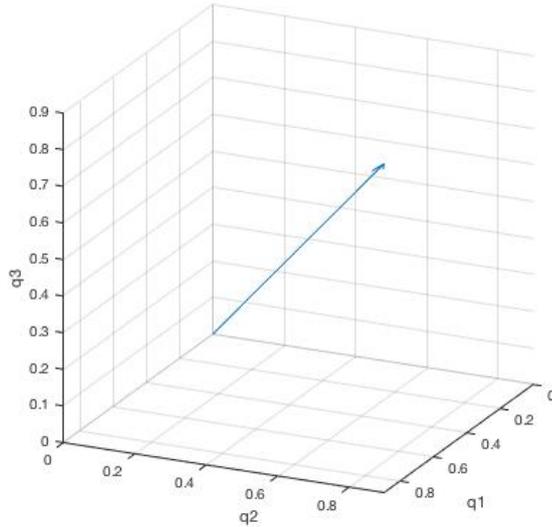


Figura 2.5: Representação genérica de um vetor tridimensional.

Figura 2.5. A representação matemática é dada pela Eq.(2.39), em que x_1 , x_2 e x_3 são números reais e \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 e \mathbf{q}_3 são a base do espaço vetorial.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3 \quad (2.39)$$

A soma entre dois vetores é calculada termo a termo, assim como a subtração. A multiplicação de um vetor por um número, i.e. um escalar, é feita termo a termo. Já a multiplicação entre dois vetores pode ser de dois tipos, conforme detalhado nas seções 2.4.2 e 2.4.3.

2.4.1 Norma de um Vetor

A partir da representação gráfica, pode-se definir a norma de um vetor como sendo o comprimento da seta. Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, a norma é dada pela Eq.(2.40).

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.40)$$

Os conceitos a serem explorados nesta seção se aplicam a vetores de n dimensões, com n pertencendo aos naturais.

2.4.2 Produto interno

O produto interno ou produto escalar entre dois vetores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + y_3\mathbf{q}_3$ é definido como a soma dos produtos termo a termo, conforme

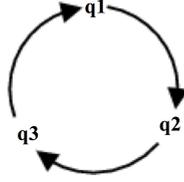


Figura 2.6: Ilustração das regras de produto vetorial.

a Eq.(2.41).

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (2.41)$$

Note que o resultado do produto interno resulta em um escalar e não em um vetor. Além disso, decorre dessa definição a propriedade ilustrada na Eq.(2.42).

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 \quad (2.42)$$

2.4.3 Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + y_3\mathbf{q}_3$ é definido conforme as Eqs.(2.43 e 2.44).

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{q}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{q}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{q}_3 \quad (2.44)$$

O produto vetorial também pode ser calculado utilizando o produto cíclico ilustrado na Figura 2.6. Um produto no sentido horário resulta em um termo positivo, por exemplo, $\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$. Caso o produto seja no sentido anti-horário o termo será negativo, por exemplo, $\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3$.

Assim, o produto vetorial resulta em um vetor. Além disso, o produto vetorial é não comutativo.

2.5 TENSORES

Os tensores constituem um objeto geométrico [11]. Um escalar e um vetor são considerados tensores de ordem 0 e ordem 1, respectivamente. O vetor pode ser

interpretado como uma operação que leva de um ponto a outro. Um tensor de ordem 2 pode ser encarado como uma operação que transforma um vetor em outro. Assim, os tensores são definidos como objetos geométricos que realizam transformações. Um vetor no espaço tridimensional é especificado por $3 = 3^1$ números reais. De forma geral, um tensor de ordem n em um espaço de dimensão N possui N^n componentes [4].

2.5.1 Produto Tensorial

Os tensores de segunda ordem podem ser obtidos a partir do produto tensorial (denotado pelo símbolo \otimes) entre dois vetores, conforme a Eq.(2.45).

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} v_1 b_1 & v_1 b_2 & v_1 b_3 \\ v_2 b_1 & v_2 b_2 & v_2 b_3 \\ v_3 b_1 & v_3 b_2 & v_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

O produto tensorial pode ser encarado também como uma multiplicação matricial, como mostra a Eq.(2.46).

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}\mathbf{b}' \quad (2.46)$$

2.5.2 Tensor Simétrico e Anti-simétrico

Um tensor $\hat{\mathbf{T}}$ pode ser reescrito como a soma do seu tensor simétrico e do anti-simétrico, conforme a Eq.(2.47).

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}^{\text{sim}} + \hat{\mathbf{T}}^{\text{anti}} \quad (2.47)$$

Um tensor é dito simétrico se $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}'$. Equivalentemente, um tensor é dito anti-simétrico se $\hat{\mathbf{T}} = -\hat{\mathbf{T}}'$. Assim, para calcular a parte simétrica e anti-simétrica de um tensor, utilizam-se as Eqs.(2.48 e 2.49).

$$\hat{\mathbf{T}}^{\text{sim}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}') \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{T}}^{\text{anti}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}') \quad (2.49)$$

Os tensores simétricos podem ou não possuir a sua diagonal composta por elementos não nulos. Já os tensores anti-simétricos, possuem a sua diagonal nula e

os elementos da parte diagonal superior são iguais ao negativo dos da parte inferior, conforme mostra a Eq.(2.50).

$$\widehat{\mathbf{T}}^{\text{anti}} = \begin{bmatrix} 0 & T_{12}^{\text{anti}} & T_{13}^{\text{anti}} \\ -T_{12}^{\text{anti}} & 0 & T_{23}^{\text{anti}} \\ -T_{13}^{\text{anti}} & -T_{23}^{\text{anti}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.5.3 Tensor Dual

A qualquer tensor de segunda ordem tridimensional anti-simétrico $\widehat{\mathbf{V}}$, pode-se associar um vetor \mathbf{v} , conforme a Eq.(2.51) [4].

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} [(V_{23} - V_{32}) \mathbf{q}_1 + (V_{31} - V_{13}) \mathbf{q}_2 + (V_{12} - V_{21}) \mathbf{q}_3] \quad (2.51)$$

Esse vetor, carregará as mesmas informações que o tensor, haja vista que há apenas três informações distintas.

2.6 QUATÉRNIOS

A “divisão” entre dois vetores de mesma direção pode ser definida como um escalar que indica a relação entre as normas dos vetores. Entretanto, se um vetor for inclinado em relação ao outro, a “divisão” deles certamente é um não-escalar [12]. Para isso, inicialmente, foi introduzida a teoria de quatérnios. Suas aplicações, entretanto, são diversas. Uma de suas principais aplicações é a execução de rotações, conforme será explicado na seção 2.6.6.

2.6.1 Definição

Utilizando-se quatro escalares, define-se quatérnio como o quociente entre dois vetores. Os quatérnios formam o espaço hamiltoniano, representado pelo símbolo $\mathbb{H}\mathbb{R}$. Um quatérnio pode ser representado pela sua forma quadrinomial padrão, conforme a Eq.(2.52), em que w , x , y e z são reais e $\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\tilde{\mathbf{q}}_2$ e $\tilde{\mathbf{q}}_3$ são a base de $\mathbb{H}\mathbb{R}$ [12].

$$\tilde{\mathbf{A}} = w + x\tilde{\mathbf{q}}_1 + y\tilde{\mathbf{q}}_2 + z\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (2.52)$$

A Eq.(2.52) pode ser reescrita conforme a Eq.(2.53), em que $\tilde{A} = w$ é a parte escalar de $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\vec{A} = x\tilde{\mathbf{q}}_1 + y\tilde{\mathbf{q}}_2 + z\tilde{\mathbf{q}}_3$ é a parte vetorial.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A} + \vec{A} \quad (2.53)$$

Se $\tilde{A} = 0$, o quatérnio é dito puramente vetorial.

As operações de soma, assim como subtração, são realizadas termo a termo. A multiplicação e as demais propriedades serão vistas nas próximas seções.

2.6.2 Produto de Quatérnios

A principal equação para o cálculo com quatérnios foi definida em 1843 por William Rowan Hamilton e está ilustrada na Eq.(2.54).

$$\tilde{\mathbf{q}}_1^2 = \tilde{\mathbf{q}}_2^2 = \tilde{\mathbf{q}}_3^2 = \tilde{\mathbf{q}}_1\tilde{\mathbf{q}}_2\tilde{\mathbf{q}}_3 = -1 \quad (2.54)$$

A partir da Eq.(2.54), é possível definir uma fórmula geral para o produto entre dois quatérnios, $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$, conforme a Eq.(2.55).

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{A}\tilde{B} - \vec{A} \cdot \vec{B}) + \tilde{A}\vec{B} + \vec{A}\tilde{B} + \vec{A} \times \vec{B} \quad (2.55)$$

A Tabela 2.1 apresenta de forma ilustrativa a operação de multiplicação entre dois quatérnios, sendo que a operação é executada na seguinte ordem: elemento da coluna multiplicado pelo da linha.

Tabela 2.1: Regras de multiplicação entre quatérnios.

Multiplicação	\tilde{w}	$\tilde{\mathbf{q}}_1$	$\tilde{\mathbf{q}}_2$	$\tilde{\mathbf{q}}_3$
\tilde{w}	\tilde{w}^2	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_1$	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_2$	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_3$
$\tilde{\mathbf{q}}_1$	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_1$	-1	$\tilde{\mathbf{q}}_3$	$-\tilde{\mathbf{q}}_2$
$\tilde{\mathbf{q}}_2$	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_2$	$-\tilde{\mathbf{q}}_3$	-1	$\tilde{\mathbf{q}}_1$
$\tilde{\mathbf{q}}_3$	$\tilde{w}\tilde{\mathbf{q}}_3$	$\tilde{\mathbf{q}}_2$	$-\tilde{\mathbf{q}}_1$	-1

2.6.3 Norma

A norma de $\tilde{\mathbf{A}} = w + x\tilde{\mathbf{q}}_1 + y\tilde{\mathbf{q}}_2 + z\tilde{\mathbf{q}}_3$ é definida pela Eq.(2.56).

$$|\tilde{\mathbf{A}}| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.56)$$

Assim, de forma similar aos vetores, a norma representa o comprimento desse elemento.

2.6.4 Conjugado

Define-se conjugado de $\tilde{\mathbf{A}}$ conforme a Eq.(2.57).

$$\tilde{\mathbf{A}}^* = \tilde{A} - \vec{A} \quad (2.57)$$

Note que se $\tilde{A} = 0$, então $\tilde{\mathbf{A}}^* = -\tilde{\mathbf{A}}$. Além disso, o produto de $\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}$ se relaciona com a norma de $\tilde{\mathbf{A}}$ por meio da Eq.(2.58).

$$\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^* = |\tilde{\mathbf{A}}|^2 \quad (2.58)$$

2.6.5 Inverso

Define-se o inverso de $\tilde{\mathbf{A}}$ a partir da Eq.(2.59).

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = 1 \quad (2.59)$$

Dessa forma, utilizando a propriedade da Eq.(2.58), chega-se à Eq.(2.60).

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}^*}{|\tilde{\mathbf{A}}|^2} \quad (2.60)$$

2.6.6 Quatérnio de Rotação

Um quatérnio puramente vetorial usualmente representa um ponto no espaço. Seja $\tilde{\mathbf{x}} = v_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 + v_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 + v_3 \tilde{\mathbf{q}}_3$ um quatérnio representativo de um vetor no espaço tridimensional. A rotação de $\tilde{\mathbf{x}}$ em torno de um eixo qualquer definido pela direção de um quatérnio $\tilde{\mathbf{d}}$ com um ângulo de rotação θ_r , é dada pela Eq.(2.61), em que $\tilde{\mathbf{R}} = \cos(\frac{\theta_r}{2}) + \tilde{\mathbf{d}} \text{sen}(\frac{\theta_r}{2})$ é o quatérnio de rotação.

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{rot}} = \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{R}}^* \quad (2.61)$$

Exemplo

Seja \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} três quatérnios, puramente vetoriais, paralelos a $\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\tilde{\mathbf{q}}_2$ e $\tilde{\mathbf{q}}_3$, respectivamente. Assim, a rotação de $+120^\circ$ desses elementos em torno do eixo $\vec{d} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mathbf{q}}_3}{\sqrt{3}}$ é dada pelas Eqs.(2.62 a 2.64).

$$\vec{x}_{\text{rot}} = \left(\cos(60^\circ) + \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \vec{x} \left(\cos(60^\circ) - \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \quad (2.62)$$

$$\vec{y}_{\text{rot}} = \left(\cos(60^\circ) + \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \vec{y} \left(\cos(60^\circ) - \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \quad (2.63)$$

$$\vec{z}_{\text{rot}} = \left(\cos(60^\circ) + \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \vec{z} \left(\cos(60^\circ) - \vec{d} \text{sen}(60^\circ) \right) \quad (2.64)$$

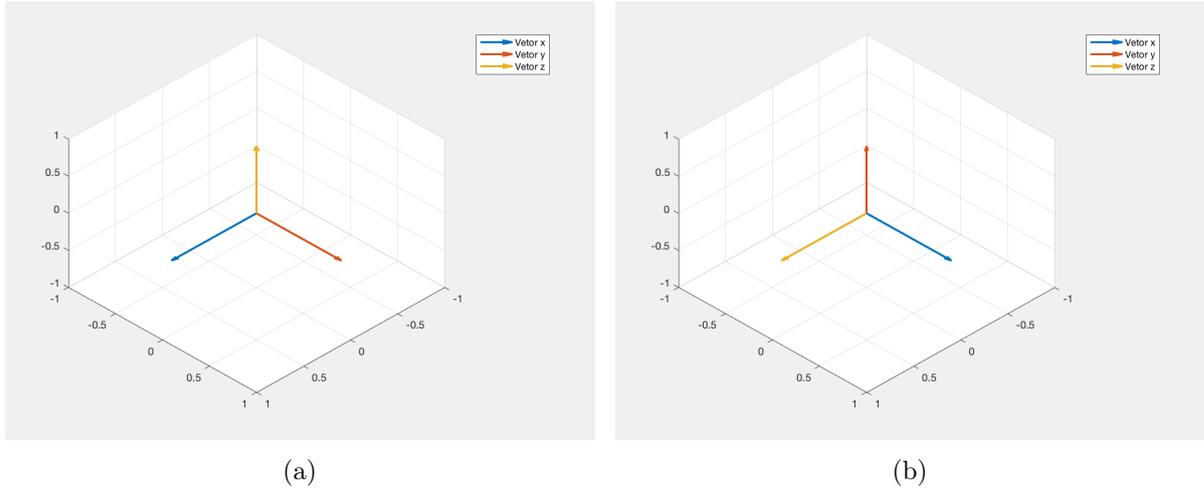


Figura 2.7: Exemplo de rotação. (a) Ilustra os vetores antes da rotação. (b) Vetores após a rotação.

A Figura 2.7 apresenta o resultado dessa rotação, percebe-se que os vetores trocam de eixos, o que é um resultado conhecido na teoria de rotações. Além disso, nota-se que um ângulo positivo representa uma rotação anti-horária ao observar-se o elemento no sentido contrário à direção de \vec{d} .

2.7 ESTADO DA ARTE

2.7.1 QUATÉRNIOS

Os quatérnios foram descobertos em 1843 por William Rowan Hamilton na busca de expressar adequadamente pontos no espaço tridimensional [13]. No espaço bidimensional, a solução era o uso de números complexos, os quais já tinham todas as operações bem consolidadas. Uma tentativa foi utilizar conjuntos de 3 números reais, porém a multiplicação e a divisão entre esses conjuntos era problemática. Assim, para solucionar esse problema, Hamilton propôs um conjunto de quatro números, um real e mais três com características semelhantes à unidade imaginária. Nessa nova base foi possível definir as operações matemáticas básicas.

A primeira aplicação de quatérnios em engenharia elétrica foi feita em 1865 por James Clerk Maxwell em seu tratado sobre eletricidade e magnetismo [19]. Ele escreveu as equações que governam os campos elétricos e magnéticos e as forças envolvidas para cada eixo separadamente, chegando, assim, a 20 equações. Utilizando quatérnios, ele conseguiu agrupar as equações dos três eixos em uma só, simplificando a apresentação das fórmulas. Entretanto, a criação do cálculo diferencial e integral sobre vetores levou

J. Willard Gibbs [10] e Oliver Heaviside [14] a reformular a teoria eletromagnética para a forma atualmente apresentada, com operações bem mais simples que o produto de quatérnios.

Em 2013, N. Barry resgata o uso de quatérnios no contexto da engenharia elétrica. Em seu artigo, “*Electrical circuit analysis using four dimensional complex numbers, in the form of quaternions*” [5], ele sugere uma forma de expressar grandezas elétricas monofásicas com quatérnios, e mostra como resolver circuitos monofásicos, conforme será mostrado na seção 3.2. O autor parte de um circuito RLC série e aplica a Lei de Kirchoff das tensões. Em seguida ele reescreve a equação resultante utilizando quatérnios. Para isso ele utiliza um eixo para a corrente e outro para a sua derivada e para a carga. Assim, com uma equação que relaciona os quatérnios de tensão e corrente, o autor define o quatérnio monofásico de impedância. Por fim, ele define o quatérnio de potência como o produto da tensão com o conjugado da corrente. Mostra-se também como as grandezas monofásicas aparecem em diferentes planos. Essa abordagem, apesar de muito interessante, não é vantajosa em relação à resolução tradicional por meio de fasores, pois as operações de multiplicação e divisão são mais complexas e não trazem nenhum resultado adicional.

Em 2014, Oleg V. Nos publicou dois trabalhos intitulados de “*Control Strategy of Active Power Filter for Ineffective Instantaneous Power Compensation*” [20] e “*Control Strategy of Inactive Instantaneous Power Compensation in Quaternion Basis*” [18]. Nesses trabalhos, o autor mostra a separação da potência instantânea em componentes ativa e reativa. Além disso, é sugerida uma estratégia de controle para um filtro ativo de potência (APF). Nesses artigos também é mostrada a aplicação desse método para uma carga trifásica não linear desequilibrada.

No primeiro artigo, o autor define os quatérnios de tensão e corrente trifásicos. Em seguida, ele define o quatérnio de potência instantânea trifásica e explora os conceitos físicos relacionados a cada componente desse elemento. Define-se também as componentes ativa e reativa do quatérnio de corrente. O artigo apresenta uma equação para as correntes de compensação, i.e., as correntes que somadas às consumidas pela carga, fornecem as correntes de linha com o formato desejado. Em seguida, o autor apresenta os resultados obtidos para uma simulação com uma carga não linear desequilibrada. Percebe-se que o controle é capaz de corrigir as não linearidades das correntes de linha, o desequilíbrio das correntes e o fator de potência visto pela fonte. Por fim, comparando com os métodos atuais de controle, tais como o controle baseado na teoria

p - q , o controle utilizando quatérnios é bem mais rápido e simples, não necessitando de *hardwares* de alta performance.

No segundo artigo, o autor detalha alguns aspectos referentes ao controle proposto no artigo anterior. É apresentado um diagrama de blocos para extrair a corrente de compensação, assim como uma tabela contendo os parâmetros dos elementos que compõem o filtro ativo. Por último, o autor realiza uma simulação semelhante à do artigo anterior, porém com uma carga diferente. Percebe-se que a distorção harmônica nas correntes é consideravelmente reduzida com o uso do filtro, assim como o fator de potência é elevado a praticamente 1. As conclusões apresentadas nesse artigo são semelhantes às do anterior.

Em 2015, Oleg V. Nos apresentou mais um artigo, “*Control Strategy of Shunt Active Power Filter Based on an Algebraic Approach*” [21]. Nesse artigo, o autor detalha melhor alguns resultados teóricos dos dois artigos anteriores, por exemplo a equação da corrente de compensação. São apresentados mais resultados de simulações, corroborando as conclusões dos artigos anteriores.

Outro trabalho utilizando quatérnios em sistemas de potência é de Danilo P. Mandic e Sayed Pouria Talebi intitulado “*A Quaternion Frequency Estimator for Three-Phase Power Systems*”. Com o objetivo de estimar de forma acurada a frequência fundamental de um sistema trifásico equilibrado ou desequilibrado, o artigo busca utilizar os quatérnios para obter uma forma de representar e trabalhar com as três fases simultaneamente. Utilizando cálculo diferencial sobre o espaço $\mathbb{H}\mathbb{R}$, é derivado um estimador de espaço de estados utilizando o filtro de Kalman estendido a quatérnios (QEKF). O estimador desenvolvido é comparado com outro, o qual utiliza um sinal complexo obtido a partir da transformada de Clarke. Percebe-se ao final das simulações que o novo modelo possui uma resposta com menor sobressinal e menor tempo de assentamento quando da presença do desequilíbrio de tensões ou da mudança de frequência.

2.7.2 TENSORES

Conforme a definição presente na seção 2.5, matrizes que realizam transformações de vetores são definidas como tensores de segunda ordem. A partir do uso de fasores na resolução de circuitos trifásicos, foram definidas diversas matrizes, tais como as de indutância, capacitância e resistência, as quais permitem transformar um vetor constituído pelos fasores das correntes de cada fase em um vetor de fasores das tensões.

Essas matrizes podem, portanto, serem denominadas de tensores. Semelhantemente, a matriz de Fortescue transforma um vetor de tensões (de linha ou de fase) em um vetor composto pelas componentes simétricas. Assim, os tensores são uma ferramenta utilizada com frequência em conjunto com os fasores. Entretanto, a nomenclatura de tensores é usualmente utilizada para transformações no domínio do tempo, como será feito neste trabalho.

Um dos primeiros trabalhos a introduzir o uso de tensores data de 1934, “*The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery*” [16], em que Kron descreve o uso dos tensores para análise de máquinas elétricas rotativas. Lynn, em seu trabalho “*The Tensor Equations of Electrical Machines*” [17], resgata vários trabalhos que utilizam as noções introduzidas por Kron, assim como faz uma análise do desenvolvimento do assunto em máquinas elétricas, analisando em detalhes as diferenças entre termos tensoriais e não-tensoriais nas equações das máquinas.

Alguns anos depois, os tensores foram utilizados na análise de grandezas elétricas para caracterizar a potência reativa instantânea de sistemas elétricos e obter técnicas de controle que seriam capazes de corrigir o fator de potência da carga, assim como suas não linearidades. Esses artigos trazem aspectos relevantes quanto às definições e análise das grandezas elétricas, o qual é o objetivo deste trabalho.

Um artigo pioneiro nesse sentido foi o “*Instantaneous Reactive Power Compensators Comprising Switching Devices without Energy Storage Components*” [2]. Nesse trabalho, considera-se um sistema trifásico. As correntes e tensões são tratadas como vetores de espaço e em seguida aplica-se a transformada de Clarke (alfa-beta). Define-se então potência instantânea ativa (ou a potência instantânea real) como a soma do produto escalar das tensões e correntes. Define-se também a potência instantânea reativa como sendo a soma do produto vetorial entre as tensões e as correntes. A partir dessas definições, o autor decompõe as correntes em termos responsáveis pela potência ativa e reativa, assim como termos relacionados à frequência fundamental e suas múltiplas. Mostra-se então como projetar um filtro para correção do fator de potência e diminuição dos harmônicos. Entretanto, o proposto só se aplica a sistemas a três fios sem componente zero, além de não se aplicar ao caso monofásico.

A partir do trabalho de Akagi *et al.* (1984), J. Willems estendeu o conceito de potência instantânea ativa/real e reativa para sistemas polifásicos em seu trabalho “*A New Interpretation of the Akagi-Nabae Power Components for Nonsinusoidal Three-*

phase Situations” [28]. Willems utilizou as tensões e correntes como vetores com a mesma dimensão do número de fases, conforme a abordagem utilizada por Czarnecki [7], e utilizou o princípio da ortogonalidade para separar as partes reais e reativas das correntes. Dessa forma, o autor mostrou que os resultados apresentados por Akagi são facilmente obtidos anulando-se a componente zero do sistema. Além disso, as definições de potência podem ser estendidas para sistemas polifásicos (incluindo os monofásicos).

Em 1996, Peng *et al.* publicaram o trabalho “*Generalized Instantaneous Reactive Power Theory for Three-phase Power Systems*” [22]. Utilizando a mesma abordagem utilizada por Willems, o objetivo era explorar a fundo o conceito de potência instantânea reativa, mostrando seus termos, significado físico e propriedades. Os autores também compararam as representações de potência obtidas a partir das grandezas de fase e das grandezas obtidas da transformada de Clarke (alfa-beta-zero). Nesse trabalho, foi considerado apenas o caso trifásico a três fios.

Em 2004, Dai *et al.* repetiram o procedimento, feito por Peng [22], para sistemas polifásicos em seu artigo “*Generalized Theory of Instantaneous Reactive Quantity for Multiphase Power System*” [9]. A principal motivação era consolidar uma forma de definir a potência reativa instantânea para sistemas polifásicos. Como Peng e Willems haviam utilizado vetores, a definição da potência reativa não estava clara para sistemas com mais de três fases. Dessa forma, Dai *et al.* utilizaram o conceito de tensores. Assim, o produto vetorial fica claro para vetores com dimensões superiores a três. Nesse artigo, foram mostradas as propriedades dessa definição, assim como a possível aplicação dessa teoria para o projeto de filtro de potência.

Em 2009, Salmerón e Herrera, em seu artigo “*Instantaneous reactive power theory—A general approach to poly-phase systems*” [23], repetiram o procedimento adotado por Dai *et al.*, para esclarecer como é feito o cálculo das potências, assim como a prova das propriedades, em sistemas com mais de três fases.

Em 2009, Ustariz *et al.* publicaram o artigo “*Evaluación, Interpretación y Visualización de la Potencia Instantánea en Sistemas Eléctricos*” [26], no qual define-se o tensor potência elétrica. Esse tensor é decomposto em suas parcelas simétricas e anti-simétricas. Em seguida, esse tensor é analisado sobre um cubo unitário (assim como é feito nos estudos de deformações), relacionando o conceito elétrico de potência com a forma e posição desse cubo. Mostra-se que a variação volumétrica está relacionada com a potência instantânea ativa, assim como a reativa está relacionada com o ângulo

rotacionado.

Em 2010, Ustariz *et al.* publicaram o artigo “*Tensor analysis of the instantaneous power in electrical networks*” [27]. A partir das expressões definidas em [26], os autores desenvolvem uma estratégia de compensação da potência reativa e das harmônicas. São feitas quatro simulações, nas quais fica evidente o bom funcionamento do filtro.

3 RESULTADOS E ANÁLISES

3.1 METODOLOGIA

Nesta seção apresenta-se a metodologia desenvolvida para obtenção dos resultados presentes neste trabalho.

Partindo-se da literatura, foram analisadas as grandezas monofásicas e trifásicas nas três representações em estudo. No caso monofásico, são apresentadas as definições de tensão, corrente, impedância e potência com fasores e quatérnios. Com tensores, entretanto, a representação é igual à apresentada na seção 2.1, e por isso não é repetida na seção 3.2.3. A representação em quatérnios é de acordo com os trabalhos de N. Barry [5] e [6].

No caso trifásico, é apresentada a representação clássica por meio de fasores. Em seguida, apresenta-se a representação por meio de quatérnios. As definições de tensão, corrente e potência são baseadas nos trabalhos de O. V. Nos [20], [21] e [18]. Adicionalmente, desenvolve-se a representação de impedâncias trifásicas a partir de uma comparação entre os lugares geométricos descritos pelo quatérnio de tensão e por um fasor. Por fim, apresenta-se as tensões, correntes e potências por meio de tensores simplesmente repetindo e analisando as definições existentes na literatura descrita na seção 2.7.2.

Por fim, são propostos cinco estudos de caso a fim de verificar e ratificar os conceitos teóricos desenvolvidos. Para execução dos estudos de caso foi utilizado um *software* de simulação computacional (*MATLAB_R2017a, The MathWorks Inc., Natick, MA, 2017*).

Em cada um dos estudos, as grandezas elétricas são calculadas por meio de fasores e em seguida apresentadas nas três representações em estudo. Como as definições de potência em quatérnios e tensores são dadas no domínio do tempo, as correntes instantâneas são calculadas pela parte real da multiplicação de e^{jwt} pelo respectivo fasor. Adicionalmente, utilizam-se figuras para facilitar a análise. São apresentados e analisados os lugares geométricos das tensões (LGT) e das correntes (LGC). Apresenta-se

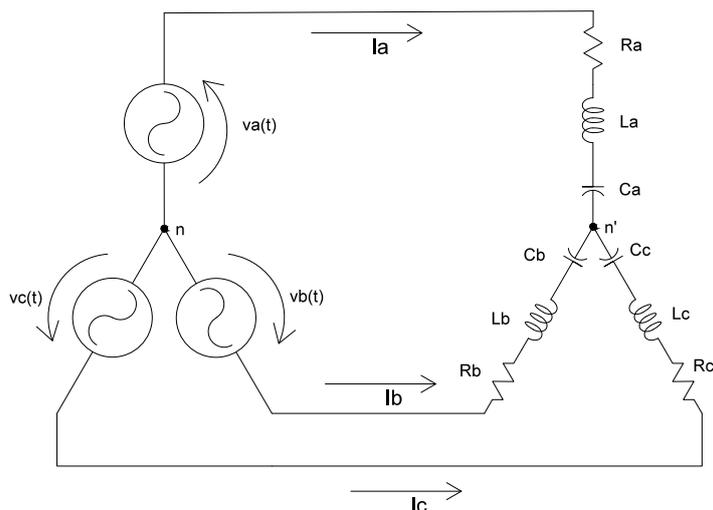


Figura 3.1: Circuito trifásico com ligação em estrela flutuante, adotado para a resolução dos estudos de caso.

ainda as componentes ativas e reativas das correntes. Ao decorrer dos estudos de caso, mostra-se a equivalência entre as representações com tensores e quatérnios. Por fim, compara-se cada uma das representações, destacando-se as suas vantagens e desvantagens.

Para os quatro primeiros estudos de caso com circuitos trifásicos, considera-se a ligação em estrela flutuante mostrada na Figura 3.1. O último estudo considera a ligação em estrela aterrada, pois esta ligação altera as condições de contorno das correntes de linha. Os resultados para a ligação em delta podem ser obtidos de forma análoga ao procedimento aqui adotado, ou fazendo-se a conversão delta estrela da carga.

Como será apresentado nas seções 3.2 e 3.3, é possível definir um quatérnio de impedância para circuitos monofásicos e trifásicos equilibrados. Dessa forma, nos estudos de caso desequilibrados, a corrente será calculada utilizando fasores e convertida para o domínio do tempo, uma vez que a modelagem de uma impedância em quatérnios se torna demasiadamente complexa. Para obtenção dos resultados foi desenvolvido o script apresentado no Apêndice A.

3.2 GRANDEZAS ELÉTRICAS MONOFÁSICAS

3.2.1 Base de Fasores

Em um circuito monofásico linear, conforme ilustrado na Figura 2.1, a tensão e a corrente são dadas pelas Eqs.(2.1 e 2.2), respectivamente. Em termos de fasores, a tensão e a corrente podem ser reescritas, assumindo $\theta_v = 0^\circ$, de acordo com as Eqs.(3.1 e 3.2).

$$\bar{V} = V \angle 0^\circ \quad (3.1)$$

$$\bar{I} = I \angle \theta_i \quad (3.2)$$

Assumindo uma carga RLC série, a tensão $v(t)$ é dada pela Eq.(3.3). Utilizando fasores e aplicando a Eq.(2.38), chega-se às Eqs.(3.4 e 3.5).

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.3)$$

$$\bar{V} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \bar{I} \quad (3.4)$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (3.5)$$

A impedância (\bar{Z}) do circuito é definida pela relação entre os fasores de tensão e de corrente, conforme a Eq.(3.6). Para um circuito RLC série, a impedância é dada pela Eq.(3.7).

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad (3.6)$$

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (3.7)$$

Percebe-se que \bar{Z} é dado pela soma das impedâncias de cada elemento, pois estão ligados em série. Além disso, a parte real corresponde aos elementos resistivos do circuito, enquanto que a parte imaginária corresponde aos reativos.

Define-se ainda a potência complexa como o produto entre os fasores da tensão e do conjugado da corrente, conforme a Eq(3.8). A partir dessa definição, pode-se obter a potência ativa, reativa e aparente definidas nas seções 2.2.3, 2.2.5 e 2.2.4, conforme a

Eq.(3.9). Segue-se que, devido à ortogonalidade entre os componentes, vale a Eq.(3.10).

$$\bar{S} = \bar{V} \bar{I}^* \quad (3.8)$$

$$\bar{S} = S/\theta_v - \theta_i = P + jQ \quad (3.9)$$

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (3.10)$$

A partir da Eq.(3.9), percebe-se que se os fasores de tensão e corrente estiverem em fase, i.e. $\theta_v = \theta_i$, há apenas potência ativa. Caso eles sejam ortogonais, i.e. $\theta_v = \theta_i \pm 90^\circ$, há apenas a componente de potência reativa. Dessa forma, diz-se que a parcela da corrente ortogonal à tensão é responsável pela potência reativa, enquanto que a parcela paralela é responsável pela ativa.

3.2.2 Base de Quatérnios

A abordagem apresentada nessa seção é baseada em [5] e [6]. Seja $\tilde{\mathbf{V}}$ e $\tilde{\mathbf{I}}$ um quatérnio de tensão e corrente, respectivamente, no plano $\tilde{\mathbf{q}}_1\tilde{\mathbf{q}}_2$, conforme as Eqs.(3.11 e 3.12).

$$\tilde{\mathbf{V}} = V \cos(\theta_v)\tilde{\mathbf{q}}_1 + V \text{sen}(\theta_v)\tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mathbf{I}} = I \cos(\theta_i)\tilde{\mathbf{q}}_1 + I \text{sen}(\theta_i)\tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (3.12)$$

Ao realizar o produto da tensão com o conjugado da corrente, chega-se às Eqs.(3.13 a 3.15).

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{I}}^* = (V \cos(\theta_v)\tilde{\mathbf{q}}_1 + V \text{sen}(\theta_v)\tilde{\mathbf{q}}_2)(-I \cos(\theta_i)\tilde{\mathbf{q}}_1 - I \text{sen}(\theta_i)\tilde{\mathbf{q}}_2) \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = [VI \cos(\theta_v)\cos(\theta_i) + VI \text{sen}(\theta_v)\text{sen}(\theta_i)] + [-VI \cos(\theta_v)\text{sen}(\theta_i) + VI \text{sen}(\theta_v)\cos(\theta_i)] \tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.14)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = P + Q\tilde{\mathbf{q}}_3 = VI \cos(\theta_v - \theta_i) + VI \text{sen}(\theta_v - \theta_i)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.15)$$

A Figura 3.2, adaptada de [6], ilustra esse resultado.

Em um circuito RLC série, a tensão $v(t)$ é dada pela Eq.(3.3). Sabe-se que em condições de operação senoidal, a corrente é ortogonal à sua derivada e à sua integral. Assim, pode-se adotar o quatérnio de corrente, Eq.(3.16), no eixo $\tilde{\mathbf{q}}_2$ e a carga, Eq.(3.17), no eixo $\tilde{\mathbf{q}}_1$.

$$\tilde{\mathbf{I}}(t) = i(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (3.16)$$

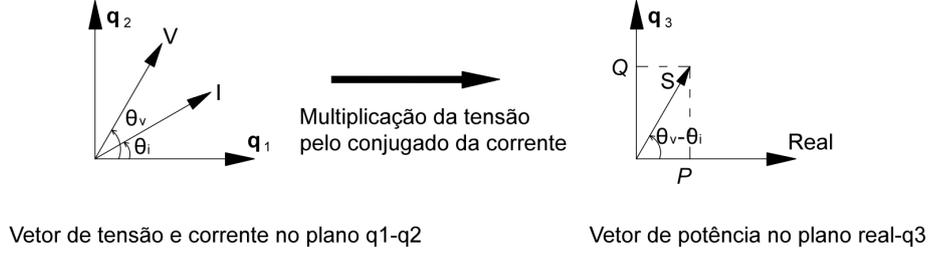


Figura 3.2: Produto entre o quatérnio de tensão e de corrente. Fonte: [6].

$$\int \tilde{\mathbf{i}}(t) dt = \int i(t) dt \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (3.17)$$

Como a carga e a derivada da corrente são paralelas, vale a Eq.(3.18).

$$\frac{d\tilde{\mathbf{i}}(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt} \tilde{\mathbf{q}}_1. \quad (3.18)$$

Assim, o quatérnio de tensão é dado pela Eq.(3.19).

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = Ri(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + \left(\frac{1}{C} \int i(t) dt + L \frac{di(t)}{dt} \right) \tilde{\mathbf{q}}_1. \quad (3.19)$$

Como o circuito é monofásico, as Eqs.(2.1 e 2.2) são aplicáveis. Em [5] e [6], o autor considera funções senoidais ao invés de cossenoidais; o resultado, porém, é análogo. Assim, aplica-se a Eq.(3.20).

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = R\sqrt{2}I \cos(wt + \theta_i) \tilde{\mathbf{q}}_2 + \left(\frac{\sqrt{2}I}{wC} \text{sen}(wt + \theta_i) - \sqrt{2}wLI \text{sen}(wt + \theta_i) \right) \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (3.20)$$

e o valor RMS de $\tilde{\mathbf{V}}(t)$ é dado pela Eq.(3.21).

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left(R\tilde{\mathbf{q}}_2 + \left(\frac{1}{wC} - wL \right) \tilde{\mathbf{q}}_1 \right) I \quad (3.21)$$

Multiplicando à direita a Eq.(3.21) por $\tilde{\mathbf{q}}_2^{-1}\tilde{\mathbf{q}}_2$, define-se o quatérnio de impedância $\tilde{\mathbf{Z}}$, tal que $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{I}}$, como mostra a Eq.(3.22). Note que essa definição é um pouco diferente da presente nos artigos [5] e [6]. Nesses artigos o autor define a impedância como o quatérnio de tensão dividido pelo valor escalar RMS da corrente, de forma que a impedância fique no mesmo plano da corrente. Na definição proposta neste trabalho, a impedância fica no mesmo plano da potência, além disso a parte real representa elementos resistivos e a parte complexa os reativos, de forma similar aos fasores.

$$\tilde{\mathbf{Z}} = R + \left(wL - \frac{1}{wC} \right) \tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.22)$$

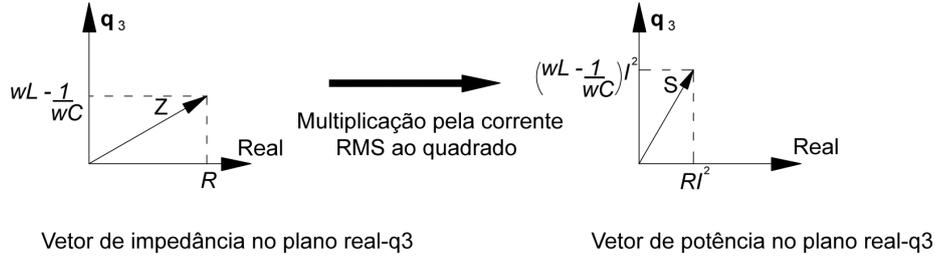


Figura 3.3: Ilustração dos quatérnios de impedância e de potência monofásicos. Fonte: [6].

Dessa forma, a potência quaterniônica pode ser reescrita de acordo com as Eqs.(3.23 a 3.25).

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{I}}^* = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{I}}(-I\tilde{\mathbf{q}}_2) \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{Z}}I^2 \quad (3.24)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = RI^2 + \left(wL - \frac{1}{wC} \right) I^2 \tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.25)$$

Esse resultado está ilustrado na Figura 3.3.

3.2.3 Base de Tensores

Conforme será visto adiante na seção 3.3.3, as grandezas elétricas com base em tensores utilizam as tensões e correntes no domínio do tempo. Assim, a representação monofásica com tensores é idêntica à representação temporal das grandezas elétricas já exploradas na seção 2.1, e portanto não serão rerepresentadas nesta seção.

3.3 GRANDEZAS ELÉTRICAS TRIFÁSICAS

3.3.1 Base de Fasores

Em um sistema trifásico equilibrado de sequência direta, as tensões de fase (com referência a um ponto neutro) são dadas pelas Eqs.(2.23, 2.24 e 2.25), em que $V_a = V_b = V_c$ e $\phi_b = \phi_c = 0$. Dessa forma, as grandezas relacionadas a cada fase serão similares, porém com um defasagem de $\pm 120^\circ$ elétricos.

Os circuitos trifásicos possuem duas configurações básicas, delta (Δ) e estrela flutuante (Y), ilustradas na Figura 2.3. As duas configurações são análogas e é possível transformar uma carga em estrela para delta e vice-versa. Há ainda uma terceira configuração, a estrela aterrada. Nessa configuração o nó que interliga as fases é aterrado,

permitindo a existência de uma quarta corrente denominada corrente do neutro. Dessa forma, considera-se neste trabalho circuitos em estrela flutuante e aterrada; a análise, não obstante, é facilmente estendida a circuitos em delta.

O cálculo das correntes é feito por fase conforme o procedimento ilustrado na seção 3.2.1. Assim, pode-se definir a potência complexa trifásica utilizando-se fasores, conforme ilustrado nas Eqs.(3.26 a 3.29); a Eq.(3.29), entretanto, só é válida em circuitos equilibrados.

$$\overline{S_{abc}} = \overline{V_a I_a^*} + \overline{V_b I_b^*} + \overline{V_c I_c^*} \quad (3.26)$$

$$\overline{S_{abc}} = S_{abc}/\theta = P_{abc} + jQ_{abc} \quad (3.27)$$

$$S_{abc}^2 = P_{abc}^2 + Q_{abc}^2 \quad (3.28)$$

$$\overline{S_{abc}} = 3\overline{V_a I_a^*} \quad (3.29)$$

3.3.2 Base de Quatérnios

Nesta seção serão apresentadas as definições, em quatérnios, de tensão, corrente e potência presentes na literatura. Adicionalmente, será proposto um modelo de impedância trifásica e será feita uma análise geométrica das tensões e correntes.

A partir das tensões e correntes instantâneas, define-se os quatérnios de tensão e corrente, puramente vetoriais, conforme Eqs.(3.30 e 3.31).

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = v_a(t)\tilde{\mathbf{q}}_1 + v_b(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + v_c(t)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}(t) = i_a(t)\tilde{\mathbf{q}}_1 + i_b(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + i_c(t)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.31)$$

Como $\tilde{\mathbf{V}}(t)$ é puramente vetorial, pode-se obter uma representação gráfica da tensão ao longo de um período, conforme ilustrado na Figura 3.4.

Na abordagem tradicional de circuitos monofásicos utilizando fasores, o lugar geométrico representado pelo fasor instantâneo de tensão é ilustrado na Figura 2.4. Percebe-se a semelhança entre o LGT de fasores no caso monofásico (Figura 2.4) e o de quatérnios no caso trifásico equilibrado (Figura 3.4). Assim como a tensão monofásica é expressa por um fasor girante, pode-se dizer que a tensão trifásica é expressa por um quatérnio girante. Dessa forma, serão desenvolvidos alguns conceitos de quatérnios para solidificar essa analogia.

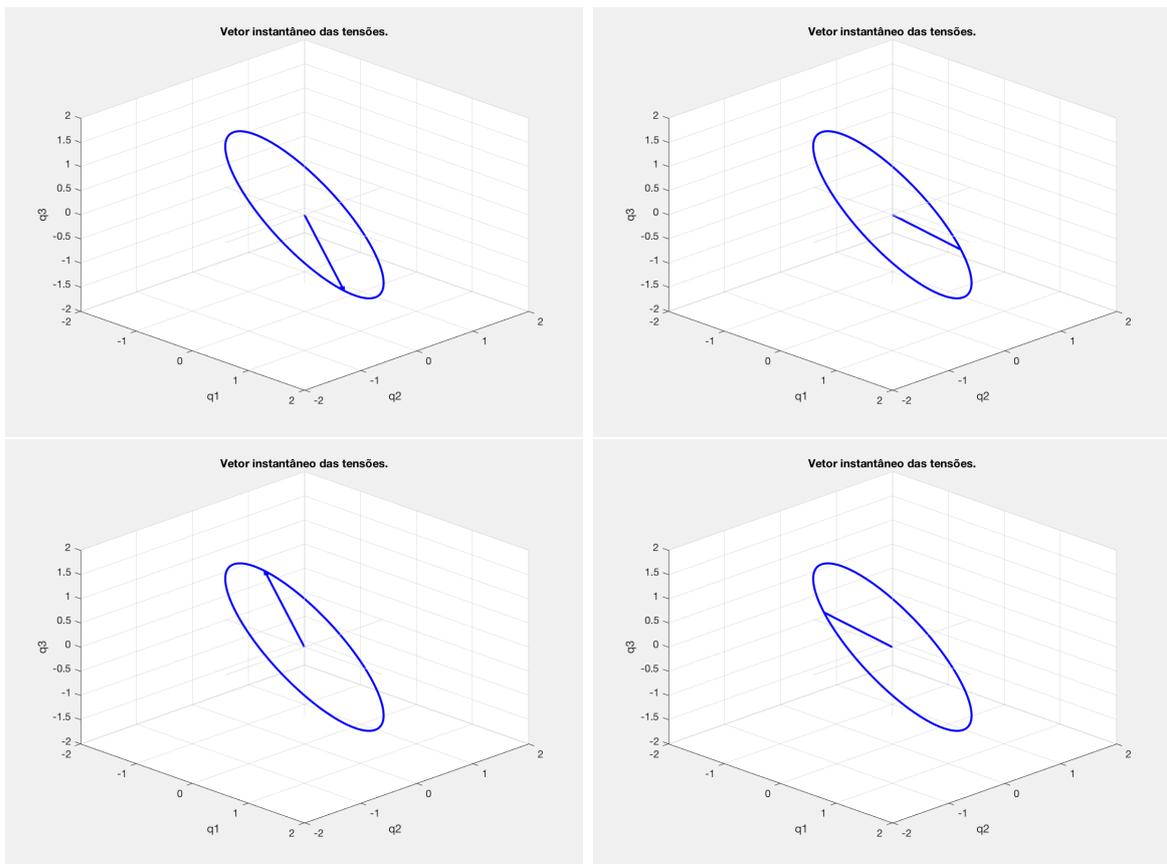


Figura 3.4: Lugar geométrico das tensões e quatérnio girante.

Assim, como o quatérnio de tensão descreve uma rotação e a álgebra de quatérnios é adequada para descrever esse tipo de movimento, propõe-se, neste trabalho, reescrever o quatérnio de tensão, conforme a Eq.(3.32), em que $\mathbf{R} = e^{\frac{\tilde{\mathbf{n}}\omega t}{2}}$ e $\tilde{\mathbf{n}}$ é o vetor perpendicular ao plano das tensões.

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{V}}(0)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t), \quad (3.32)$$

Note que esse quatérnio varia ao longo do tempo, por meio de uma rotação. Para simplificar a notação será feita a seguinte substituição: $\tilde{\mathbf{V}}(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0$. O quatérnio $\tilde{\mathbf{n}}$ pode ser obtido a partir da Eq.(3.33)

$$\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\text{vect}\left(\tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{V}}(t+\delta t)\right)}{|\tilde{\mathbf{V}}(t)||\tilde{\mathbf{V}}(t+\delta t)|} \quad (3.33)$$

Por conveniência, utiliza-se $\delta t = \frac{\pi}{2\omega}$ na Eq.(3.33), de forma que o produto $\tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{V}}(t+\delta t)$ seja puramente vetorial.

A derivada de um fador (\bar{V}) é dada pela Eq.(2.38). A derivada de $\tilde{\mathbf{V}}(t)$ é dada pelas Eqs.(3.34 a 3.46).

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}(t)}{dt} = v'_a(t)\tilde{\mathbf{q}}_1 + v'_b(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + v'_c(t)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.34)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}(t)}{dt} = \frac{d\left(\tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{V}}_0\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\right)}{dt} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}'(t) = \tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{V}}_0\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) + \tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{V}}_0\tilde{\mathbf{R}}^{-1'}(t) \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}'(t) = \tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{V}}(t) + \tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1'}(t) \quad (3.37)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) = 1 \quad (3.38)$$

$$\frac{d\left(\tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\right)}{dt} = 0 \quad (3.39)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) + \tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1'}(t) = 0 \quad (3.40)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}'(t) = \tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{V}}(t) - \tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) \quad (3.41)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}'(t) = \tilde{\mathbf{n}}\frac{\omega}{2}\tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (3.42)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) = \tilde{\mathbf{n}}\frac{\omega}{2} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

Assim, utilizando as propriedades de não comutatividade da Eq.(2.55), têm-se as Eqs.(3.45 e 3.46).

$$\tilde{\mathbf{V}}'(t) = 2\tilde{\mathbf{R}}'(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{V}}(t) \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}'(t) = \tilde{\mathbf{n}}\omega\tilde{\mathbf{V}}(t) \quad (3.46)$$

Comparando as Eqs.(2.38 e 3.46), percebe-se que ambas são muito similares, e apresentam a vantagem de transformar derivadas em produtos. No caso trifásico, porém, a unidade imaginária j é substituída pelo quatérnio $\tilde{\mathbf{n}}$.

O quatérnio de corrente pode ser definido a partir das correntes de linha ou de fase. Considerando as correntes de linha, o quatérnio é dado pela Eq.(3.47).

$$\tilde{\mathbf{I}}(t) = i_a(t)\tilde{\mathbf{q}}_1 + i_b(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + i_c(t)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.47)$$

Os resultados para as correntes são análogos aos obtidos para as tensões.

Define-se ainda, o quatérnio de impedância trifásica a partir da Eq.(3.48).

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{I}}(t) \quad (3.48)$$

Isolando $\tilde{\mathbf{Z}}$, chega-se à Eq.(3.49). Devido à Eq.(3.46) será possível obter o quatérnio de impedâncias para resistores, indutores e capacitores em circuitos equilibrados sob alimentação equilibrada, conforme será feito nos estudos de casos.

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{I}}^{-1}(t) \quad (3.49)$$

A potência instantânea em quatérnios é dada pelas Eqs.(3.50).

$$\tilde{\mathbf{S}}(t) = \tilde{\mathbf{V}}(t)\tilde{\mathbf{I}}(t) = -p_{abc}(t) + \tilde{\mathbf{q}}(t) \quad (3.50)$$

A parte escalar de $\tilde{\mathbf{S}}(t)$ representa o negativo da potência ativa instantânea trifásica, enquanto que a parte vetorial de $\tilde{\mathbf{S}}(t)$ representa o vetor de potência reativa instantânea trifásica. Os termos de $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \vec{S}(t)$ são dados pelas Eqs.(3.51 a 3.54).

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = q_a(t)\tilde{\mathbf{q}}_1 + q_b(t)\tilde{\mathbf{q}}_2 + q_c(t)\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.51)$$

$$q_a(t) = v_b(t)i_c(t) - v_c(t)i_b(t) \quad (3.52)$$

$$q_b(t) = v_c(t)i_a(t) - v_a(t)i_c(t) \quad (3.53)$$

$$q_c(t) = v_a(t)i_b(t) - v_b(t)i_a(t) \quad (3.54)$$

Note que como $\tilde{\mathbf{V}}(t)$ e $\tilde{\mathbf{I}}(t)$ são puramente vetoriais, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ é simplesmente o produto vetorial entre eles. Se a carga for equilibrada, $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ será paralelo a $\tilde{\mathbf{n}}$, pois as tensões e as correntes estarão no mesmo plano e o produto vetorial entre elas será um vetor normal a esse plano, i.e. paralelo a $\tilde{\mathbf{n}}$.

Decorre das propriedades de ortogonalidade dos elementos que constituem a base do espaço $\mathbb{H}\mathbb{R}$ a Eq.(3.55), semelhante à definição com fasores, porém no domínio do tempo.

$$|\tilde{\mathbf{S}}(t)|^2 = p_{abc}(t)^2 + |\tilde{\mathbf{q}}(t)|^2 \quad (3.55)$$

Desenvolvendo a Eq.(3.55) conforme as Eqs.(3.56 e 3.57), chega-se à Eq.(3.58).

$$p_{abc}(t)^2 = v_a^2 i_a^2 + v_b^2 i_b^2 + v_c^2 i_c^2 + 2v_a v_b i_a i_b + 2v_b v_c i_b i_c + 2v_c v_a i_c i_a \quad (3.56)$$

$$|\tilde{\mathbf{q}}(t)|^2 = v_a^2 i_b^2 + v_b^2 i_c^2 + v_c^2 i_a^2 + v_a^2 i_c^2 + v_b^2 i_a^2 + v_c^2 i_b^2 - 2v_a v_b i_a i_b - 2v_b v_c i_b i_c - 2v_c v_a i_c i_a \quad (3.57)$$

$$|\tilde{\mathbf{S}}(t)| = |\tilde{\mathbf{V}}(t)| |\tilde{\mathbf{I}}(t)| \quad (3.58)$$

Além disso, a potência ativa instantânea é gerada pela componente de corrente paralela à tensão, a qual também é denominada de corrente instantânea ativa e pode ser obtida a partir da Eq.(3.59). A potência reativa, por sua vez, é gerada pela componente de corrente ortogonal à tensão, também denominada corrente instantânea reativa, e é dada pela Eq.(3.60). Dessa forma, vale a Eq.(3.61).

$$\tilde{\mathbf{I}}_p(t) = \tilde{\mathbf{V}}(t)^{-1} \tilde{S}(t) \quad (3.59)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_q(t) = \tilde{\mathbf{V}}(t)^{-1} \tilde{S}(t) \quad (3.60)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}(t) = \tilde{\mathbf{I}}_p(t) + \tilde{\mathbf{I}}_q(t) \quad (3.61)$$

Analisando-se os lugares geométricos, percebe-se que como as tensões estão equilibradas, a Eq.(3.62) é válida. Além disso, ela determina que o quatérnio de tensão está contido no plano $\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mathbf{q}}_3}{\sqrt{3}}$. Nas cargas em estrela flutuante (ou em delta), a soma das correntes de linha deve ser igual a zero devido à lei de Kirchoff das correntes. Assim, as correntes para cargas em estrela flutuante obedecem à Eq.(3.63) e o quatérnio de corrente está, portanto, no mesmo plano das tensões. Caso a alimentação do circuito seja desequilibrada, o vetor $\tilde{\mathbf{n}}$ se altera. Além disso, nas cargas em estrela aterrada o plano das correntes se altera com o desequilíbrio tanto da carga quanto da alimentação.

$$v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0 \quad (3.62)$$

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0 \quad (3.63)$$

Se a tensão e a corrente constituírem o mesmo lugar geométrico a menos de um fator de escala, então o circuito é equilibrado, e toda a potência reativa é devida aos

indutores e capacitores. Se o circuito estiver desequilibrado, a corrente será distorcida em relação à tensão (ou não estará mais no mesmo plano ou a forma será diferente) e consequentemente a componente reativa será não nula, mesmo se o circuito não possuir indutores e capacitores. Dessa forma, a componente reativa inclui o desequilíbrio da carga, assim como os elementos capazes de armazenar energia.

Assim, pode-se utilizar os quatérnios para a resolução (no caso equilibrado) e análise de circuitos trifásicos, de forma similar ao uso de fasores, conforme será feito nos estudos de caso.

3.3.3 Base de Tensores

Os vetores de tensão e corrente são definidos conforme as Eqs.(3.30 e 3.31). O tensor potência elétrica instantânea é definido conforme a Eq.(3.64).

$$\widehat{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{v}(t) \otimes \mathbf{i}(t) \quad (3.64)$$

O tensor anti-simétrico de $\widehat{\mathbf{S}}(t)$ é dado pela Eq.(3.65), em que os termos $q_a(t)$, $q_b(t)$ e $q_c(t)$ são definidos pelas Eqs.(3.52 a 3.54). Percebe-se que este tensor é proporcional ao tensor potência reativa instantânea ($\widehat{\mathbf{Q}}(t)$).

$$\widehat{\mathbf{S}}^{\text{anti}}(t) = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{Q}}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & q_c(t) & -q_b(t) \\ -q_c(t) & 0 & q_a(t) \\ q_b(t) & -q_a(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Pela propriedade de tensor dual, conforme visto na seção 2.5.3, pode-se obter o vetor potência reativa instantânea $\mathbf{q}(t)$, o qual é igual ao definido com o uso de quatérnios, conforme a Eq.(3.51). O tensor simétrico de $\widehat{\mathbf{S}}(t)$ é dado pela Eq.(3.66).

$$\widehat{\mathbf{S}}^{\text{sim}}(t) = \begin{bmatrix} v_a i_a & \frac{1}{2}(v_a i_b + v_b i_a) & \frac{1}{2}(v_a i_c + v_c i_a) \\ \frac{1}{2}(v_b i_a + v_a i_b) & v_b i_b & \frac{1}{2}(v_b i_c + v_c i_b) \\ \frac{1}{2}(v_c i_a + v_a i_c) & \frac{1}{2}(v_c i_b + v_b i_c) & v_c i_c \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Ainda não há um significado físico associado aos elementos da diagonal superior e inferior do tensor simétrico da potência instantânea. A diagonal, entretanto, representa as potências ativas de cada linha. Assim, a potência ativa instantânea trifásica é dada pelo traço $tr(\widehat{\mathbf{S}}(t))$.

Para obter a componente de corrente paralela à tensão, i.e., a corrente instantânea ativa, utiliza-se a Eq.(3.67). Note que o vetor de corrente ativa instantânea pode

ser obtido tanto por meio de quatérnios quanto por meio de tensores. Caso as tensões estejam equilibradas, tem-se que $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}V$.

$$\mathbf{i}_p(t) = \frac{p_{abc}(t)}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad (3.67)$$

Semelhantemente, a corrente instantânea reativa pode ser obtida utilizando-se a Eq.(3.68) ou simplesmente a Eq.(3.61).

$$\mathbf{i}_q(t) = \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\widehat{\mathbf{Q}}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \quad (3.68)$$

Como os vetores de tensão, corrente instantânea ativa e reativa, potência reativa obtidos por meio de tensores e quatérnios são iguais, estes serão apresentados apenas uma vez em cada estudo de caso.

3.4 ESTUDOS DE CASO

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos a partir do procedimento descrito na seção 3.1.

3.4.1 Equilibrado Puramente Resistivo Trifásico

Seja uma carga puramente resistiva em que R é o valor da resistência em cada fase, i.e. $R_a = R_b = R_c = R$, e $L_a = L_b = L_c = 0$ e $C_a = C_b = C_c \rightarrow \infty$. Assim, serão obtidos os resultados para este estudo de caso considerando-se $R = 1,3859\Omega$.

Como o circuito é equilibrado, a tensão no nó n' é igual a zero. Assim, as tensões de cada fase são dadas pelas correntes de cada fase multiplicadas por R . Dessa forma, na representação com fasores, têm-se as Eqs.(3.69 a 3.71).

$$\overline{I}_a = \frac{\overline{V}_a}{R} \approx 158,74 \text{ A} \quad (3.69)$$

$$P_{abc} = 3VI \cos(\theta_v - \theta_i) \approx 104,77 \text{ kW} \quad (3.70)$$

$$Q_{abc} = 3VI \sin(\theta_v - \theta_i) = 0 \quad (3.71)$$

Note que são apresentados valores médios ao longo do tempo. Além disso, as correntes de cada fase são calculadas individualmente.

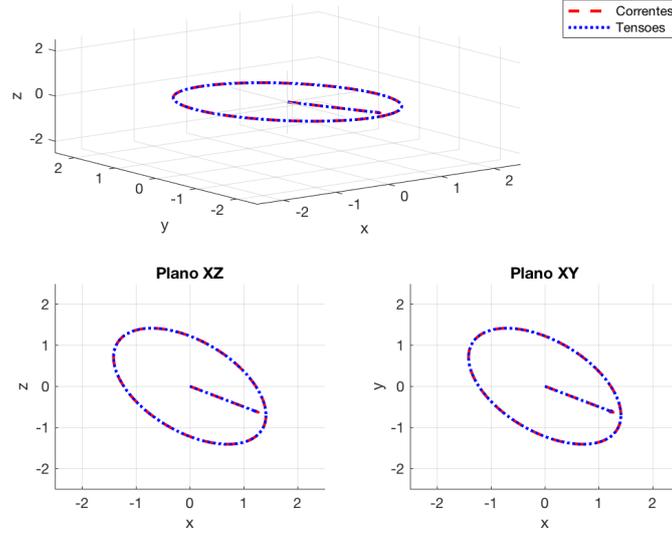


Figura 3.5: Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.1.

Utilizando quatérnios, a tensão, definida na Eq.(3.30), é reescrita a partir do quatérnio de corrente, conforme a Eq.(3.72).

$$\tilde{\mathbf{V}} = R\tilde{\mathbf{I}} \quad (3.72)$$

Comparando a Eq.(3.72) com a Eq.(3.48), percebe-se que neste caso o quatérnio de impedância é puramente real e igual à resistência R . Assim, a corrente é dada pela Eq.(3.73).

$$\tilde{\mathbf{I}} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{R} \quad (3.73)$$

Nessa formulação, as correntes das três fases são calculadas simultaneamente. Além disso, o lugar geométrico das correntes será igual ao das tensões, exceto por um fator de escala.

A Figura 3.5 ilustra o comportamento dos quatérnios de tensão e corrente, em que x , y e z representam os quatérnios $\tilde{\mathbf{q}}_1$, $\tilde{\mathbf{q}}_2$ e $\tilde{\mathbf{q}}_3$ respectivamente. Como as tensões estão equilibradas e a carga está em estrela flutuante, as Eqs.(3.62 e 3.63) são válidas. Portanto, o quatérnio de corrente está no mesmo plano da tensão, conforme ilustrado na Eq.(3.73) e como se pode observar na figura.

Dessa forma, a potência reativa (dada pelo produto vetorial) será paralela ao

quatérnio $\tilde{\mathbf{n}}$. De fato, sempre que as tensões estiverem equilibradas e a carga estiver em estrela flutuante ou em delta, essa condição se aplica.

Aplicando-se as Eqs.(3.50 a 3.54), chega-se às Eqs.(3.74 e 3.75).

$$p_{abc}(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \approx 104,77 \text{ kW} \quad (3.74)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = 0\tilde{\mathbf{q}}_1 + 0\tilde{\mathbf{q}}_2 + 0\tilde{\mathbf{q}}_3 \text{ kVAr} \quad (3.75)$$

Percebe-se que a potência ativa instantânea é constante e igual ao valor calculado com fasores, como previsto. Além disso, a potência reativa instantânea é constante e igual a zero, como esperado, uma vez que o circuito está equilibrado e não há elementos reativos.

Utilizando tensores, tem-se as Eqs.(3.76 a 3.79).

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{Z}}\mathbf{i} \quad (3.77)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt)] & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt + \frac{2\pi}{3})] & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt - \frac{2\pi}{3})] \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Como o vetor de corrente é sempre paralelo ao de tensão, a impedância é simplesmente um fator de escala. Além disso, o tensor de potência instantânea é composto apenas pela parcela simétrica, sendo que o traço dele corresponde à potência ativa instantânea, que nesse caso é igual à calculada com fasores.

A Figura 3.6 traz as informações sobre as potências ativa e as componentes do vetor de potência reativa de forma gráfica. Percebe-se que a potência ativa instantânea é constante e a reativa é nula.

A Figura 3.7 ilustra os componentes da parte simétrica do tensor de potência instantânea. Destaca-se que os elementos possuem valor médio negativo de diferente de zero. Além disso, eles não são iguais entre si, apesar do circuito ser equilibrado e

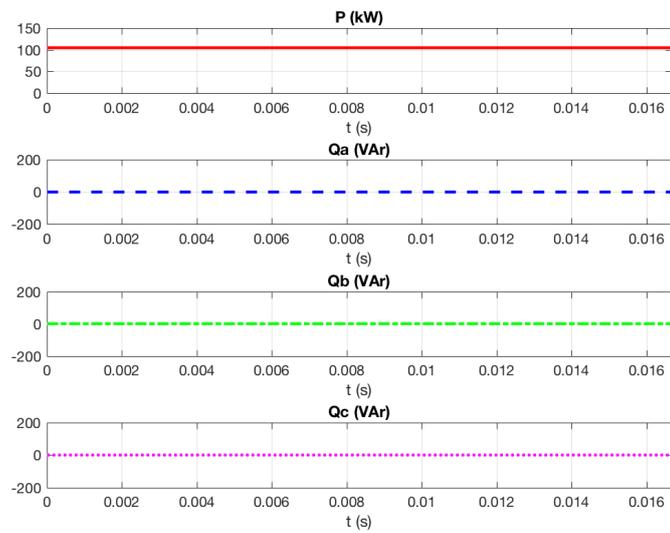


Figura 3.6: Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.1.

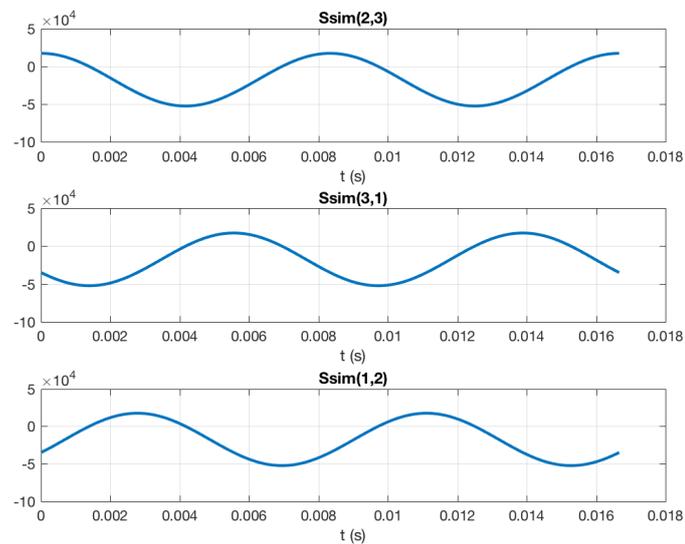


Figura 3.7: Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.1.

puramente resistivo. Assim, não há ainda uma atribuição física ao significado desse elemento.

As correntes instantâneas ativa e reativa são dadas pelas Eqs.(3.80 e 3.81). Como o circuito está equilibrado e é puramente resistivo, a potência reativa é igual a zero (como esperado), assim a corrente instantânea reativa é igual a zero também.

$$\tilde{\mathbf{I}}_p(t) = \sqrt{2}I \cos(wt) \tilde{\mathbf{q}}_1 + \sqrt{2}I \cos\left(wt - \frac{2\pi}{3}\right) \tilde{\mathbf{q}}_2 + \sqrt{2}I \cos\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right) \tilde{\mathbf{q}}_3 = \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.80)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_q(t) = 0\tilde{\mathbf{q}}_1 + 0\tilde{\mathbf{q}}_2 + 0\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.81)$$

Neste estudo de caso, o resultado apresentado pelas três representações é exatamente igual. Dessa forma, a representação por meio de fasores é suficiente e mais simples, sendo portanto mais adequada.

3.4.2 Equilibrado RLC Série Trifásico

Neste estudo de caso será considerado um circuito com resistores, indutores e capacitores conectados em série. Os valores adotados são $R_a = R_b = R_c = R = 100\Omega$, $L_a = L_b = L_c = L = 1H$ e $C_a = C_b = C_c = C = 1mF$.

Resolvendo por meio de fasores, chega-se às Eqs.(3.82 a 3.86).

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a}{R + jwL - j\frac{1}{wC}} \quad (3.82)$$

$$\bar{I}_b = \bar{I}_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.83)$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_a e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.84)$$

$$P_{abc} = 3VI \cos(\theta_v - \theta_i) \approx 96,72W \quad (3.85)$$

$$Q_{abc} = 3VI \sin(\theta_v - \theta_i) \approx 362,05Var \quad (3.86)$$

Percebe-se que as correntes não estarão mais em fase com as tensões, dado que há elementos reativo no circuito. Dessa forma também, a potência reativa é não nula.

No domínio do tempo, as equações que regem a corrente são dadas pelas Eq.(3.87 e 3.88).

$$v_a(t) = Ri_a(t) + \frac{1}{C} \int i_a(t) dt + L \frac{di_a(t)}{dt} \quad (3.87)$$

$$\frac{dv_a(t)}{dt} = R \frac{di_a(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_a(t) + L \frac{d^2 i_a(t)}{dt^2} \quad (3.88)$$

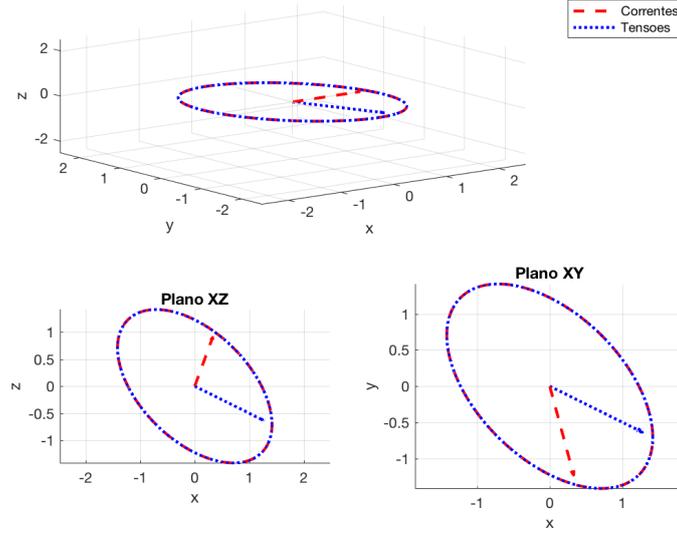


Figura 3.8: Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.2.

Em forma de quatérnios, tem-se as Eqs.(3.89 a 3.93).

$$\tilde{\mathbf{n}}w\tilde{\mathbf{V}} = \left(R\tilde{\mathbf{n}}w + \frac{1}{C} + \tilde{\mathbf{n}}^2w^2L \right) \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.89)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left(R - \frac{\tilde{\mathbf{n}}}{wC} + \tilde{\mathbf{n}}wL \right) \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.90)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = R - \frac{\tilde{\mathbf{n}}}{wC} + \tilde{\mathbf{n}}wL \quad (3.91)$$

$$p_{abc}(t) \approx 96,72W \quad (3.92)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) \approx -209,03\tilde{\mathbf{q}}_1 - 209,03\tilde{\mathbf{q}}_2 - 209,03\tilde{\mathbf{q}}_3 \quad (3.93)$$

Percebe-se que é possível definir um quatérnio de impedância trifásica de forma similar a uma impedância monofásica com fasores, em que a parte real representa os elementos resisivos do circuito e a parte imaginária os reativos. Além disso, o quatérnio de impedância representa uma rotação do quatérnio de corrente em torno do eixo $\tilde{\mathbf{n}}$.

A Figura 3.8 ilustra o comportamento dos quatérnios de tensão e corrente. Observa-se que o quatérnio de corrente é, de fato, rotacionado em relação ao de tensão, como ilustrado na Eq.(3.91). Nota-se ainda que as tensões e correntes estão no mesmo plano, como esperado, uma vez que a alimentação é equilibrada e a carga está em estrela flutuante.

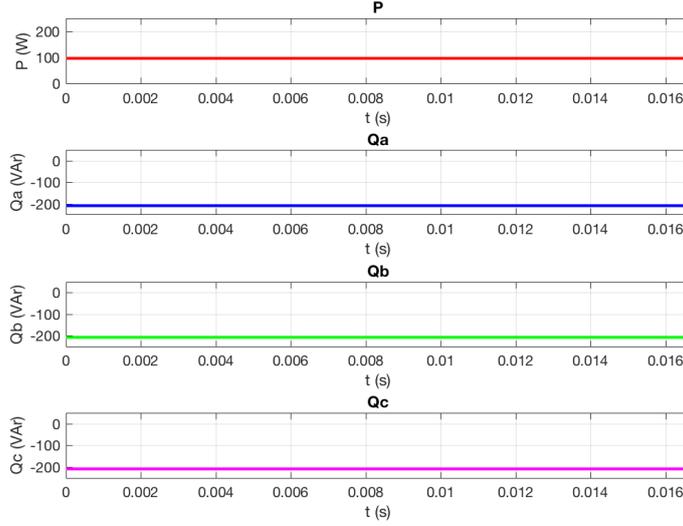


Figura 3.9: Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.2.

Utilizando tensores, obtém-se os resultados expressos pelas Eqs.(3.94 e 3.95).

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt)] & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt + \frac{2\pi}{3})] & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & \frac{P}{3} [1 + \cos(2wt - \frac{2\pi}{3})] \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} \approx \begin{bmatrix} 0 & -209,03 & 209,03 \\ 209,03 & 0 & -209,03 \\ -209,03 & 209,03 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Percebe-se que, no caso trifásico, a potência reativa trifásica instantânea expressa por meio dos tensores é equivalente à expressa por meio de quatérnios. Além disso, o tensor de impedância torna-se complicado de modelar, uma vez que realizar rotações com tensores é não trivial.

A Figura 3.9 traz as informações sobre as potências ativa e as componentes do vetor de potência reativa. Como esperado nos circuitos equilibrados, as potências são constantes. Além disso, a potência ativa instantânea corresponde à calculada por meio de fasores, enquanto que a norma da potência reativa instantânea é constante e igual ao valor calculado com fasores.

A Figura 3.10 ilustra o comportamento dos elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea. Percebe-se que os componentes desse tensor possuem valor médio pequeno (como foi possível constatar ao calcular a média de cada um)

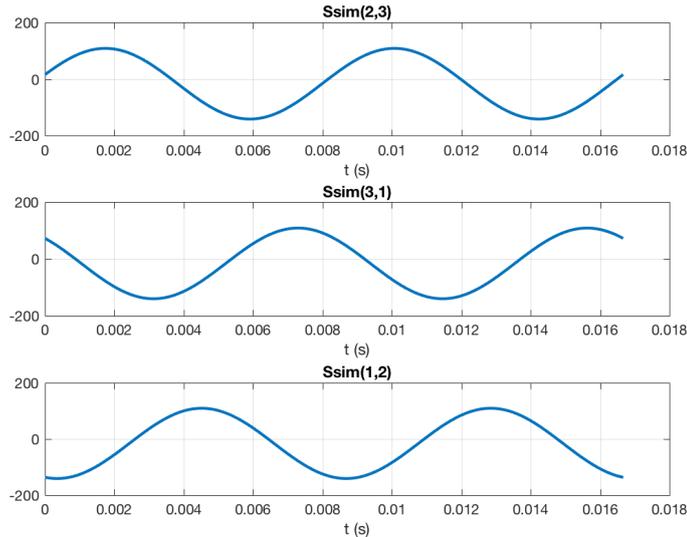


Figura 3.10: Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.2.

e oscilam com o dobro da frequência do circuito, mesmo com o circuito equilibrado. Nota-se também que os elementos não são iguais entre si.

As correntes instantâneas ativa e reativa obtidas são mostradas na Figura 3.11. Percebe-se que, de fato, as componentes ativas estão em fase, i.e. paralelas, com as tensões, enquanto que as reativas são ortogonais.

Novamente, a informação obtida em cada representação é equivalente. Dessa forma, o uso de fasores é mais simples e mais adequado neste caso.

3.4.3 Desequilibrado Puramente Resistivo Trifásico

Neste estudo de caso será considerado um circuito desequilibrado puramente resistivo, i.e. $L_a = L_b = L_c = 0$ e $C_a = C_b = C_c \rightarrow \infty$. Será considerado também $R_a = R_b = 1,3018\Omega$ e $R_c \rightarrow \infty$, ou seja, não há carga na fase “c”.

Para aplicar o script desenvolvido, deve-se notar que a tensão sobre R_a e R_b é a diferença de tensão entre as fases “a” e “b”. Além disso, a corrente de linha da fase “b” é igual ao negativo da fase “a”, haja vista que a soma das correntes em n’ é igual a zero. A partir deste estudo de caso a obtenção das correntes instantâneas será feita a partir de fasores, i.e. multiplicando o fasor por $e^{j\omega t}$ e retirando-se a parte real.

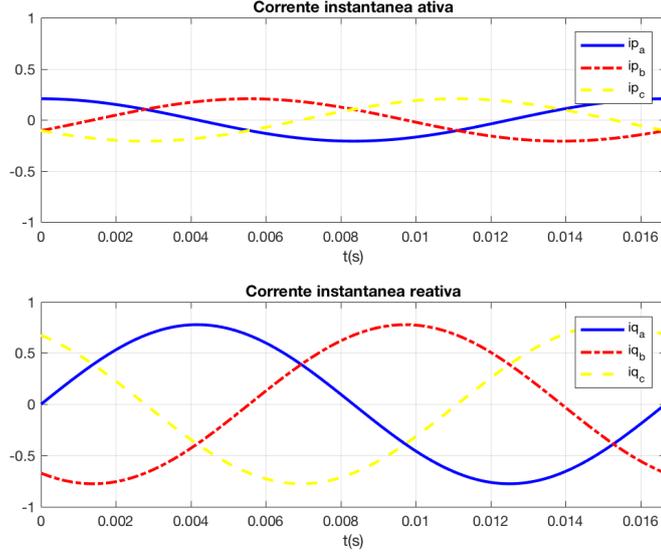


Figura 3.11: Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.2.

Assim, para a representação por meio de fasores, obtém-se as Eqs.(3.96 a 3.99).

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a - \bar{V}_b}{R_a + R_b} \quad (3.96)$$

$$\bar{I}_b = -\bar{I}_a \quad (3.97)$$

$$P_{abc} \approx 115 \text{ kW} \quad (3.98)$$

$$Q_{abc} = 0 \quad (3.99)$$

As potências ativa e reativa trifásicas não trazem nenhuma informação sobre o desequilíbrio da carga. Essa informação é expressa apenas nas amplitudes e nos ângulos das correntes.

Utilizando quatérnios, calcula-se a potência conforme a Eq.(3.100).

$$\begin{aligned} \tilde{S} \approx & -111,5 - 111,5\cos(2wt - 1,047) + 64,4\cos(2wt - 2,62)\tilde{\mathbf{q}}_1 \\ & 64,4\cos(2wt - 2,62)\tilde{\mathbf{q}}_2 + 64,4\cos(2wt - 2,62)\tilde{\mathbf{q}}_3 \text{ kVA} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Percebe-se que a potência ativa instantânea oscila com o dobro da frequência de excitação do sistema, além disso seu valor médio é igual à potência ativa calculada por meio dos fasores, como esperado. As componentes da potência reativa instantânea, por sua vez, são iguais e possuem valor médio nulo.

A Figura 3.12 ilustra o lugar geométrico dos quatérnios de tensão e corrente. É possível perceber como a corrente é distorcida em relação aos casos equilibrados. Entretanto, apenas a forma dela foi modificada, continuando no plano das tensões. Dessa

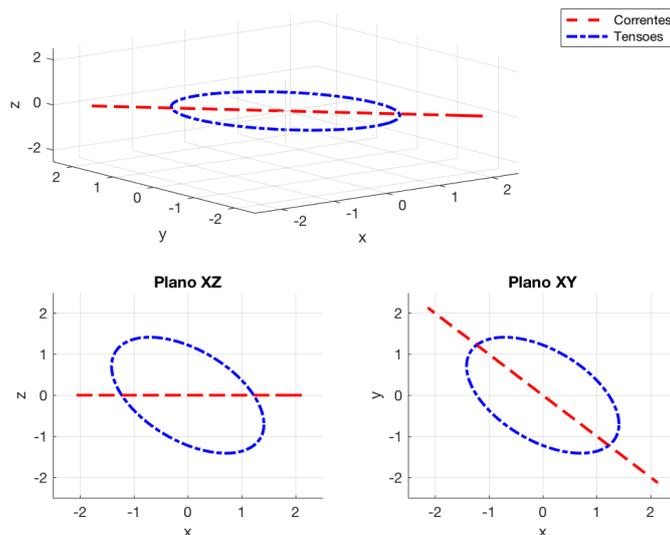


Figura 3.12: Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.3.

forma, a modelagem de uma impedância em quatérnios torna-se muito complicada, uma vez que precisa incorporar elementos de distorção assim como de rotação (caso a carga possua elementos reativos ou esteja ligada em estrela aterrada ou alimentada por tensões desequilibradas), e foge, portanto, do objetivo principal deste trabalho. Assim, ela não será calculada.

Aplicando tensores, as informações da potência instantânea ativa e da reativa são iguais às obtidas com quatérnios. Assim, elas serão apresentadas graficamente, assim como os elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea.

A Figura 3.13 apresenta de forma gráfica as informações sobre as potências ativa e as componentes do vetor de potência reativa. Percebe-se que a potência instantânea ativa trifásica não é constante, pois o circuito é desequilibrado. Além disso, a potência reativa instantânea oscila em torno de zero, mesmo o circuito sendo apenas resistivo. Isso se deve ao fato de que pela definição, essa potência representa também desequilíbrios. O valor médio da norma da potência reativa, porém, está relacionado com a presença de elementos reativos, e neste caso é igual a zero, como esperado. Nota-se ainda que a potência reativa é paralela ao vetor $\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mathbf{q}}_3}{\sqrt{3}}$, devido ao fato de as tensões estarem equilibradas e as correntes obedecerem à Eq.(3.63).

A figura 3.14 apresenta a parte simétrica do tensor de potência instantânea. Percebe-se que nesse caso, os elementos desse tensor possuem valor médio não nulo e

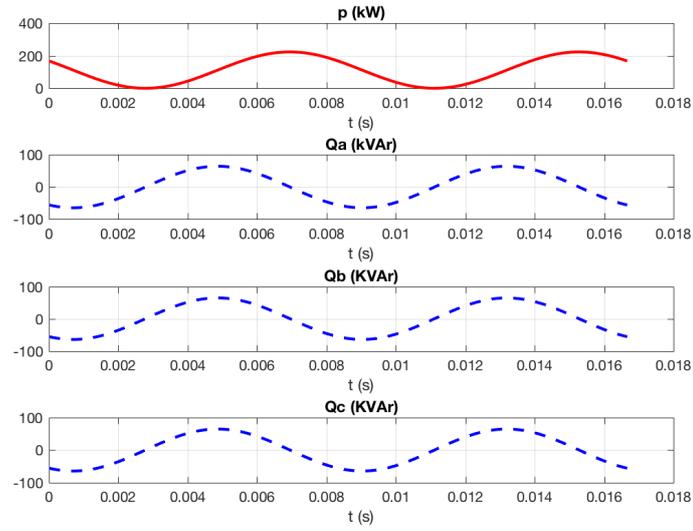


Figura 3.13: Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.3.

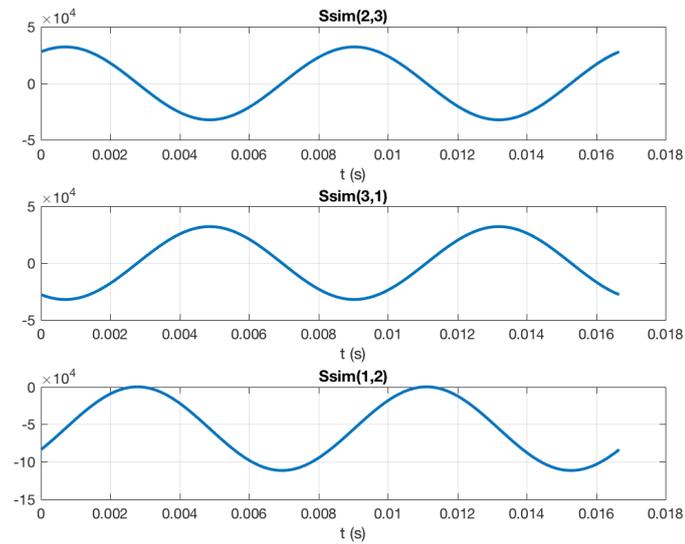


Figura 3.14: Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.3.

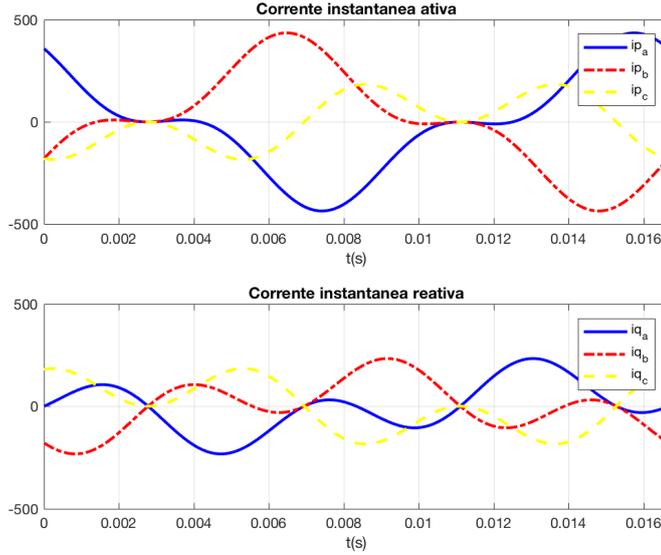


Figura 3.15: Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.3.

oscilam com o dobro da frequência de excitação, assim como ocorreu no caso equilibrado. Além disso, o elemento S_{12} possui valor médio significativamente maior que os outros. Ressalta-se que esse elemento não depende da corrente na fase “c”, onde está o desequilíbrio. Entretanto, ainda não é possível atribuir nenhum significado físico a esses componentes.

Utilizando os conceitos de ortogonalidade e as Eqs.(3.67 e 3.61), calculam-se as correntes instantâneas ativa e reativa, como mostra a Figura 3.15. A partir da figura, percebe-se que as componentes ativa e reativa da fase “c” são iguais, porém defasadas de 180° como esperado, uma vez que a corrente nessa fase é nula. Percebe-se também que as componentes da corrente ativa não são puramente cossenoidais, mas são dotadas de harmônicas de terceira ordem. Isso se deve ao fato de p_{abc} não ser constante. Semelhantemente, a corrente instantânea reativa também é dotada de harmônicas.

A representação por meio de fasores neste caso permite identificar o desequilíbrio apenas por meio das correntes ou conhecendo-se a carga. Assim por meio dos tensores e quatérnios há informação adicional, como por exemplo a representação do desequilíbrio por meio da variação da potência instantânea ativa e reativa. Além disso, com essas bases é possível decompor as correntes em suas componentes ativas e reativas a partir de medições das tensões e correntes. Ressalta-se que, em termos computacionais, a utilização dos quatérnios e dos tensores é equivalente. Sendo assim, essas duas são as mais adequadas para esse caso.

3.4.4 Desequilibrado RLC Série Trifásico

Considerando a Figura 3.1, adota-se neste estudo de caso os mesmo valores adotados na seção 3.4.2; a fase “c” da carga, entretanto, está aberta, i.e. $R_c, L_c \rightarrow \infty$ e $C_c = 0$.

Utilizando fasores, obtém-se as Eqs.(3.101 a 3.105).

$$\bar{I}_a = -\bar{I}_b = \frac{\bar{V}_a - \bar{V}_b}{R_a + j \left(\omega L_a - \frac{1}{\omega C_a} \right)} \quad (3.101)$$

$$\bar{I}_a \approx 0,6954 \angle -45,04^\circ \text{ A} \quad (3.102)$$

$$\bar{I}_c = 0 \text{ A} \quad (3.103)$$

$$P_{abc} \approx 48,36 \text{ W} \quad (3.104)$$

$$Q_{abc} \approx 181,02 \text{ VAR} \quad (3.105)$$

Analisando as correntes, nota-se que o circuito está desequilibrado, sendo que o problema deve se encontrar na fase “c” (o que de fato é), uma vez que esta possui um valor discrepante das demais. Como há elementos resistivos e reativos, a potência ativa e a reativa são diferentes de zero, como esperado.

Utilizando tensores e quatérnios, chega-se aos mesmos valores para o vetor de potência reativa instantânea, ilustrado nas Eqs.(3.106 e 3.107). Percebe-se que a potência instantânea reativa é perpendicular ao plano das tensões e que o valor médio de sua norma é igual ao calculado por meio dos fasores. Além disso, ela está no sentido negativo do vetor $\tilde{\mathbf{n}}$, o que representa um consumo de reativo, devido à definição.

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) \approx [-104,5 + 108,2 \cos(2\omega t - 1,31)] (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mathbf{q}}_3) \quad (3.106)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) \approx [181,02 - 187,41 \cos(2\omega t - 1,31)] (-\tilde{\mathbf{n}}) \quad (3.107)$$

A Figura 3.16 ilustra de forma gráfica as informações sobre as potências ativa e as componentes do vetor de potência reativa. Percebe-se que todas as componentes são oscilatórias indicando, assim, um desequilíbrio no circuito. Além disso, as componentes q_a , q_b e q_c possuem um valor médio, indicando a presença de elementos indutivos e/ou capacitivos.

A figura 3.17 apresenta as componentes do tensor simétrico de potência instantânea. Nota-se que todos os elementos possuem valor médio não nulo e oscilam com

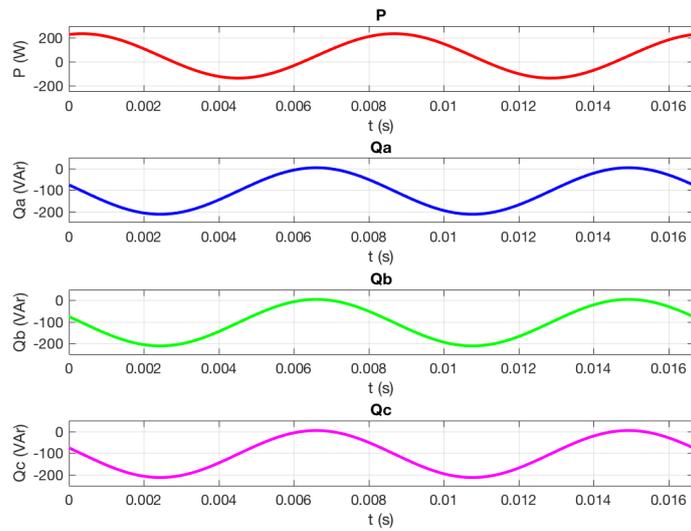


Figura 3.16: Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.4.

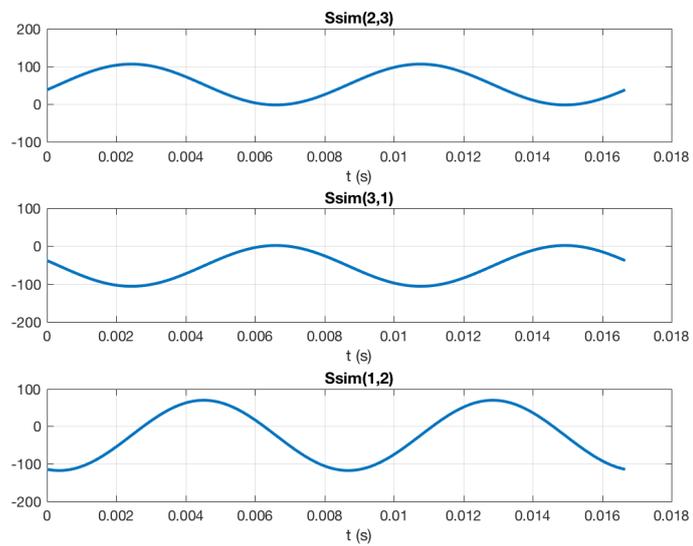


Figura 3.17: Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.4.

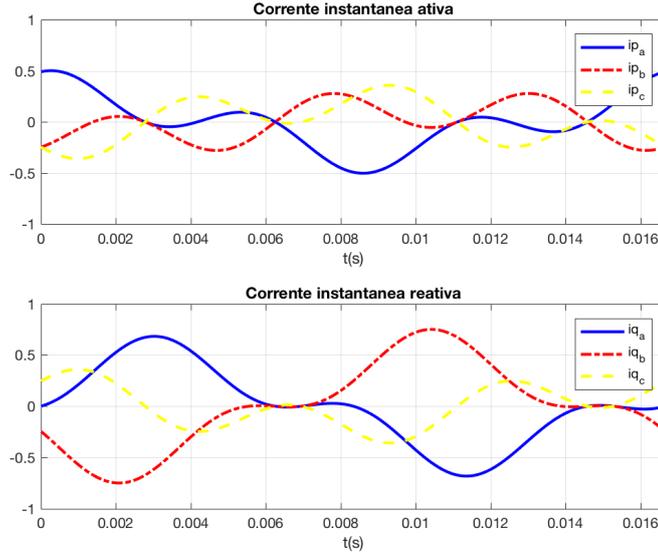


Figura 3.18: Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.4.

o dobro da frequência de excitação. Além disso, a amplitude de S_{12} é aproximadamente duas vezes maior que a dos outros termos. Novamente, esse é o único termo que não possui relação com a fase “c”, i.e. a fase desbalanceada. Entretanto, ainda não é possível atribuir nenhum significado físico a esses termos.

Calculam-se também as componentes de corrente ativa e reativa, como mostra a Figura 3.18. Os mesmos comentários feitos ao caso resistivo desequilibrado se aplicam a esse caso.

Dessa forma, a representação por meio de quatérnios ou tensores é a mais adequada, pelos mesmo motivos citados no estudo anterior.

3.4.5 Desequilibrado RLC Trifásico com Estrela Aterrada

Neste estudo de caso, será considerado o circuito da Figura 3.1, porém o nó n' está aterrado. Dessa forma, as tensões de fase são iguais à tensão fase neutro. Os valores adotados foram $R_a = R_b = 2R_c = 100\Omega$, $L_a = L_b = \frac{L_c}{2} = 1H$ e $C_a = C_b = 2C_c = 1mF$. Dessa forma, a impedância da fase “c” (\overline{Z}_c) é duas vezes menor que o conjugado de \overline{Z}_a e \overline{Z}_b .

Na representação por fasores, as correntes são dadas pelas Eqs.(3.108 a 3.111),

em que \overline{I}_n é a corrente que circula para o aterramento do nó n' da carga.

$$\overline{I}_a \approx 0,8030/\underline{-75,04^\circ} \quad (3.108)$$

$$\overline{I}_b \approx 0,8030/\underline{164,96^\circ} \quad (3.109)$$

$$\overline{I}_c \approx 1,6060/\underline{-164,96^\circ} \quad (3.110)$$

$$\overline{I}_n \approx 2,3365/\underline{-155,09^\circ} \quad (3.111)$$

Percebe-se que há desequilíbrio nas amplitudes das correntes de linha assim como nas fases, pois os fasores não estão igualmente espaçados de 120° elétricos. Além disso, há corrente circulando para o aterramento no nó n'.

Calculando a potência, obtêm-se as Eqs.(3.112 a 3.114).

$$P_{abc} \approx 128,96 \text{ W} \quad (3.112)$$

$$Q_{abc} \approx 0 \text{ VAR} \quad (3.113)$$

$$\overline{S}_{abc} \approx 128,96/\underline{0} \text{ VA} \quad (3.114)$$

Percebe-se que na definição adotada, a potência reativa do circuito é igual a zero, mesmo com a presença de elementos reativos. Dessa forma, analisando apenas a potência, não é possível diferenciar este circuito de um puramente resistivo equilibrado.

Por meio de quatérnios e tensores, é possível determinar o lugar geométrico das tensões e das correntes, conforme a Figura 3.19. Percebe-se que nesse caso, a corrente não está no mesmo plano das tensões, pois a Eq.(3.63) não é mais atendida. Além disso, o lugar geométrico é uma elipse com excentricidade entre 0 e 1. Dessa forma, visualizando o lugar geométrico das correntes, é possível concluir que o circuito está ligado em estrela aterrada e que está desequilibrado.

As potências podem ser visualizadas na Figura 3.20. Nota-se que a potência ativa possui um valor médio igual ao calculado com fasores e que ela oscila com o dobro da frequência do circuito, mostrando o desequilíbrio presente. Observando as componentes de potência reativa, percebe-se que elas não são iguais entre si. Isso se deve ao fato de que as correntes não estão mais no mesmo plano da tensão. Adicionalmente, o vetor potência reativa não possui uma direção única. A sua direção varia ao longo do tempo, pois os termos de $\tilde{\mathbf{q}}_1$ e $\tilde{\mathbf{q}}_2$ variam com a mesma frequência enquanto que o termo de $\tilde{\mathbf{q}}_3$ é constante. Além disso, as variações de q_a e q_b indicam um desequilíbrio na fase “c”, pois esses termos são compostos pela corrente da fase “c”.

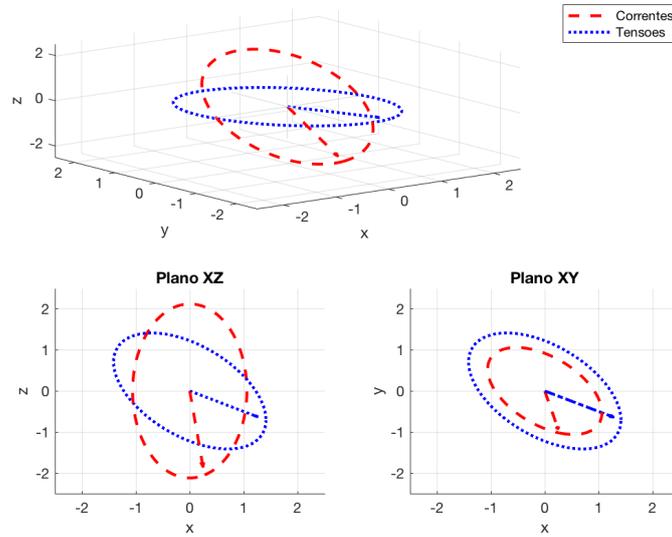


Figura 3.19: Lugar geométrico das tensões e correntes (normalizadas com relação ao seu valor RMS) para o circuito da seção 3.4.5

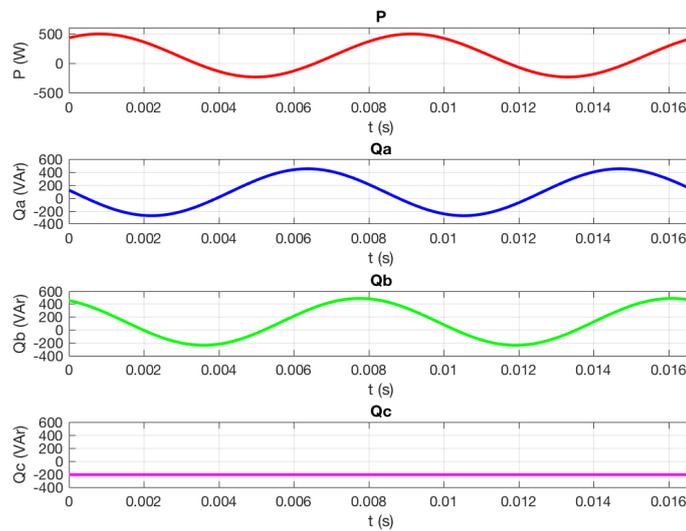


Figura 3.20: Potência ativa e as componentes de potência reativa, em função do tempo, para o circuito da seção 3.4.5

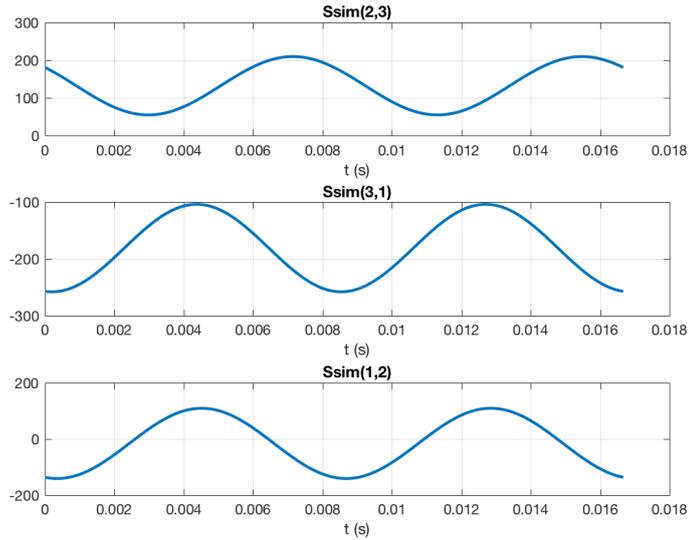


Figura 3.21: Elementos da parte simétrica do tensor de potência instantânea do circuito da seção 3.4.5

Os termos da parcela simétrica do tensor de potência instantânea podem ser visualizados na Figura 3.21. Nota-se que os elementos possuem valor médio não nulo e oscilam com o dobro da frequência de oscilação, assim como nos outros casos. Dessa forma, ainda não é possível atribuir nenhum significado físico a esses termos.

Por fim, obtém-se as correntes instantâneas ativas e reativas, conforme a Figura 3.22. Assim como nos outros casos desequilibrados, as componentes ativas e reativas são dotadas de harmônicos de terceira ordem.

Para a resolução do circuito os fasores são mais adequados. A representação das potências, entretanto, pode levar à interpretação de que trata-se de um circuito resistivo equilibrado. Neste caso, portanto, a representação por meio de tensores e quatérnios se mostra mais vantajosa devido ao fato de transparecer o desequilíbrio, assim como a presença de elementos reativos. Além disso, o lugar geométrico das correntes mostra que a carga está desequilibrada e ligada em estrela aterrada.

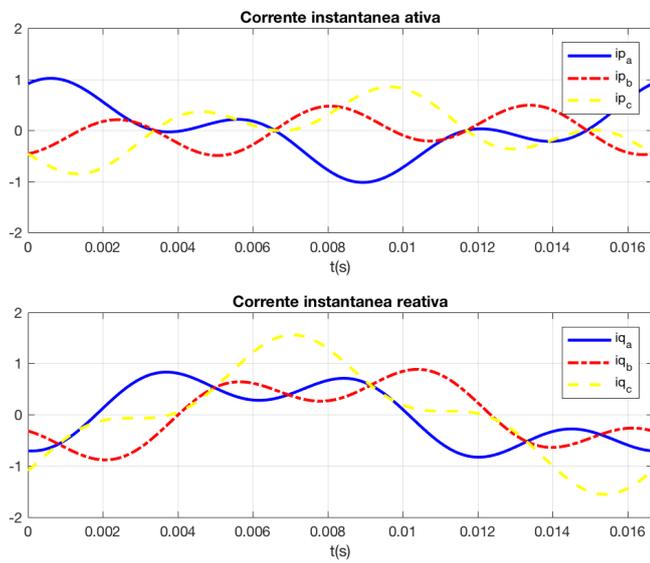


Figura 3.22: Correntes instantâneas ativa e reativa para o circuito da seção 3.4.5

4 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

4.1 CONCLUSÕES GERAIS

As grandezas elétricas principais na análise de um circuito são a(s) tensão(ões), a(s) corrente(s), a(s) impedância(s) e as potências ativa e reativa(s). Dessa forma, faz-se necessário que sejam expressas em uma notação conveniente. Atualmente a principal ferramenta utilizada são os fasores, entretanto há outras duas que têm sido exploradas: os tensores e os quatérnios.

Conforme ilustrado na seção 3.2, as três ferramentas podem ser utilizadas no caso monofásico. Além da análise, os quatérnios também podem ser utilizados para a resolução dos circuitos, apesar de não apresentarem nenhuma vantagem, tanto do ponto de vista computacional, quanto do ponto de vista de modelagem. Os tensores por sua vez equivalem à representação tradicional no domínio do tempo, não apresentando nenhuma vantagem também. Dessa forma, a ferramenta que se mostrou mais adequada para resolução e representação de circuitos monofásicos foi os fasores, devido à simplicidade.

Na seção 3.3, foi apresentado o desenvolvimento das ferramentas em análise para circuitos trifásicos. A potência complexa trifásica foi definida pela soma do produto do fasor de tensão com o conjugado de corrente em cada fase. Mostrou-se como essa definição resulta em uma potência cuja parte real equivale à parte ativa, enquanto que a parte imaginária equivale à reativa. Essa representação, entretanto, omite a parte instantânea das potências, a qual carrega informações importantes em circuitos polifásicos, conforme se observou neste trabalho.

Utilizando quatérnios e tensores, foi possível obter uma representação geométrica para as tensões e correntes trifásicas instantâneas. Foi possível relacionar o LGT e o LGC com condições de desequilíbrio. Notou-se que no caso de uma alimentação desequilibrada o plano das tensões se altera. No caso de uma carga desequilibrada, a forma do LGC se altera, sendo que o plano é fixo para cargas alimentadas a três condutores. Assim, caso o plano das correntes não seja perpendicular ao vetor $\frac{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3}{\sqrt{3}}$, conclui-se que a carga está ligada em estrela aterrada e se encontra desequilibrada.

Além disso, mostrou-se como modelar a impedância, utilizando quatérnios, de circuitos trifásicos equilibrados, o que só foi possível devido à propriedade de rotação. Nessa modelagem, a parte real corresponde aos elementos resistivos enquanto que a parte vetorial corresponde aos reativos, de forma análoga à impedância monofásica expressa por fasores. Semelhantemente, a parte real do quatérnio de potência corresponde à potência instantânea ativa, enquanto que a parte vetorial corresponde à instantânea reativa.

Com quatérnios e tensores, foi possível calcular a potência instantânea ativa, assim como o vetor de potência reativa. Foi possível analisar o comportamento desse vetor em diversas condições. Percebe-se que o valor médio da sua norma está relacionado com a presença de elementos reativos e que a sua oscilação está relacionada a condições de desequilíbrio. Dessa forma, esse termo pode ser utilizado na análise de circuitos trifásicos desequilibrados.

Também foi possível decompor a corrente em suas componentes instantâneas ativa e reativa, a partir dos valores instantâneos das tensões e correntes. Sendo que nos casos desequilibrados houve componentes harmônicas de terceira ordem nessas correntes. Entretanto, a abordagem para realizar essa decomposição é mais simples do que com fasores.

Nos estudos de caso, foram analisados cinco circuitos trifásicos diferentes. Nos casos equilibrados a notação em quatérnios e em tensores não acrescentou nenhuma informação relevante. Nos casos desequilibrados, entretanto, percebeu-se que a variação da potência instantânea ativa e reativa estão relacionadas com o desequilíbrio, sendo que os valores médios coincidiram com o calculado com fasores. Além disso, foi possível perceber o comportamento das componentes das correntes. Nos casos equilibrados, foi possível segmentar perfeitamente as parcelas paralelas e ortogonais. Nos casos desequilibrados, porém, essas componentes apresentaram harmônicas. Dessa forma, para a análise de circuitos trifásicos desequilibrados os tensores e quatérnios se mostraram mais adequados.

Os resultados obtidos para a potência reativa instantânea e para as componentes das correntes, com quatérnios e com tensores, são equivalentes e podem ser obtidos com o mesmo esforço computacional. Adicionalmente, os quatérnios permitiram a modelagem de impedâncias trifásicas equilibradas, entretanto são limitados a circuitos trifásicos, devido à sua própria estrutura matemática. Os tensores, por sua vez podem

representar impedâncias trifásicas, isto porém é não trivial. Em contrapartida, eles permitem a generalização das grandezas citadas para circuitos polifásicos.

Por fim, nos estudos de caso foi analisada a parte simétrica do tensor de potência instantânea. Percebe-se que em todos os casos, os termos envolvidos tinham valor médio não nulo e oscilavam com o dobro da frequência de excitação, entretanto não eram iguais entre si. Assim, não houve nenhuma diferença significativa na representação desse tensor seja nos casos equilibrados ou desequilibrados. Portanto, não foi possível atribuir nenhum significado físico a ele.

4.2 RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Em circuitos trifásicos desequilibrados, as potências instantâneas ativa e reativa são oscilatórias. Essa oscilação pode, portanto, ser uma possível medida de desequilíbrio, ou ainda o nível de harmônicas nas componentes das correntes, as quais são produzidas pelo desequilíbrio.

Como foi analisado na seção 3.3.2, o quatérnio de tensões trifásicas está contido em um plano. Se as tensões estiverem desequilibradas esse plano se altera. Supõe-se também que a sua forma se altera, assim como ocorreu com as correntes nos estudos de caso. Dessa forma, propõe-se estudar e relacionar essas variações, para diversas condições de desequilíbrio de tensão, com o efeito provocado em um MIT e assim propor indicadores de qualidade da energia baseados em grandezas geométricas. Para isso, os quatérnios são a ferramenta mais indicada, uma vez que são permitidos realizar rotações de forma mais simples.

Referências Bibliográficas

- [1] Orthogonal decomposition of the currents in a 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source, Março de 2010.
- [2] Akagi, H., Kanazawa, Y., e Nabae, A. *IEEE Transactions on industry applications*, (3):625–630, 1984.
- [3] Almeida, W. G. d. e Freitas, F. D. *Circuitos polifásicos*. Fundação de Empreendimentos Científicos e Tecnológicos. Brasília, 1 edição, 1995.
- [4] Arfken, G. B. e Weber, H. J. *Mathematical methods for physicists*. ELSEVIER, 6 edição, 2005.
- [5] Barry, N. In *Power Engineering Conference (UPEC), 2013 48th International Universities'*, pages 1–4. IEEE, 2013.
- [6] Barry, N. In *2016 27th Irish Signals and Systems Conference (ISSC)*, pages 1–9. IEEE, 2016.
- [7] Czarnecki, L. S. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 37(1):30–34, 1988.
- [8] Dai, X. e Tang, T. In *Proc. 2nd Int. Conf. Harmonics in Power Systems, Winnipeg, MB, Canada*, pages 381–388, 1986.
- [9] Dai, X., Liu, G., e Gretsch, R. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19(3):965–972, 2004.
- [10] Gibbs, J. W. *Elements of Vector Analysis: Arranged for the Use of Students in Physics*. Tuttle, Morehouse & Taylor, 1 edição, 1884.
- [11] Golab, S. *Tensor calculus*. Elsevier Science & Technology, 3 edição, 1974.
- [12] Hamilton, W. R. *Elements of quaternions*. Longmans, Green, & Company, 1 edição, 1866.

- [13] Hamilton, W. *Philos. Magazine*, 25:489–495, 1843.
- [14] Heaviside, O. *Proceedings of the Royal Society of London*, 50(302-307):126–129, 1891.
- [15] Irwin, D. J. e Nelms, R. M. *Análise Básica de Circuitos para Engenharia*. Grupo Gen-LTC, 10 edição, 2013.
- [16] Kron, G. *The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery*. General Electric Review, 1 edição, 1938.
- [17] Lynn, J. *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs*, 102(2):149–167, 1955.
- [18] Malyavko, E. Y. e Nos, O. V. In *2014 15th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM)*, 2014.
- [19] Maxwell, J. C. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881.
- [20] Nos, O. V. In *2014 15th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM)*, 2014.
- [21] Nos, O. V. In *2015 16th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices*, pages 459–463. IEEE, 2015.
- [22] Peng, F. Z. e Lai, J.-S. *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, 45(1):293–297, 1996.
- [23] Salmerón, P. e Herrera, R. *Electric Power Systems Research*, 79(9):1263–1270, 2009.
- [24] Talebi, S. P. e Mandic, D. P. In *2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3956–3960. IEEE, 2015.
- [25] The Math Works Inc., M. . s. a. l. e., Natick. *MATLAB R2017a*.
- [26] Ustariz, A., Cano, E., e Tacca, H. In *V Simposio Internacional sobre Calidad de la Energia Eléctrica*, page 7, 2009.
- [27] Ustariz, A., Cano, E., e Tacca, H. *Electric Power Systems Research*, 80(7):788–798, 2010.
- [28] Willems, J. L. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 41(4):523–527, 1992.

APÊNDICES

Apêndice A Código Matlab

```
1 %% Codigo para realizacao dos estudos de caso propostos.
2
3 %% Inicializacao dos parametros iniciais
4
5 close all;
6 clear;
7 clc;
8
9 % Adiciona a pasta das funcoes ao caminha de busca do MATLAB
10 addpath /Users/victordopradoBrasil/Dropbox/ENE/TCC/TCC-Victor/Matlab/
    Functions/
11
12 % Dados iniciais
13 f = 60;
14 w = 2*pi*f;
15 n = 1000; % numero de pontos
16 t = linspace(0,1/f,n);
17 R = 1.32+65.9e-3; % Resistencia por fase em ohms
18 L = 0; % Indutancia por fase em H
19 C = inf; % Capacitancia por fase em C
20 Xl = w*L;
21 Xc = 1/(w*C);
22 Z = R + 1i*Xl + 1i*Xc;
23 save_pics = boolean(input('Salvar as figuras? (1|0)\n'));
24
25 % Tensoes
26 Vrms = 220;
27 Va = sqrt(2)*Vrms*exp(0);
28 Vb = sqrt(2)*Vrms*exp(1i*(- 2*pi/3));
29 Vc = sqrt(2)*Vrms*exp(1i*(+ 2*pi/3));
30 V = [0 Va Vb Vc];
31 va = real(Va*exp(1i*w*t));
32 vb = real(Vb*exp(1i*w*t));
```

```

33 vc = real(Vc*exp(1i*w*t));
34
35 %% Calculo das correntes de linha
36
37 % Correntes
38 Ia = Va./Z;
39 Ib = Vb./Z;
40 Ic = Vc./Z; % Trocar essa linha por Vc.*0
41             % para os casos desequilibrados
42 I = [0 Ia Ib Ic];
43 Irms = mean(abs([Ia Ib Ic]))/sqrt(2);
44 ia = real(Ia*exp(1i*w*t));
45 ib = real(Ib*exp(1i*w*t));
46 ic = real(Ic*exp(1i*w*t));
47
48 %% Calculo das potencias e suas componentes
49 % por meio de fasores e quaternios
50
51 % Potencias dadas pelos fasores
52 S = 1/2*(Va(1).*conj(Ia(1)) + Vb.*conj(Ib(1)) + Vc.*conj(Ic(1)));
53 P = real(S);
54 Q = imag(S);
55
56 % Potencias dadas pelos quaternios
57 % e pelos tensores
58 p = va.*ia + vb.*ib + vc.*ic;
59 qa = vb.*ic - vc.*ib;
60 qb = vc.*ia - va.*ic;
61 qc = va.*ib - vb.*ia;
62
63 % Graficos das potencias instantaneas
64 figure;
65 grid on;
66 subplot(4,1,1); plot(t, p/1e3, '-r','LineWidth',2); grid on;
67 xlabel('t (s)'); title('P (kW)'); axis([0 1/f 0 150]);
68 subplot(4,1,2); plot(t, qa, '-b','LineWidth',2); grid on;
69 xlabel('t (s)'); title('Qa (VAr)'); axis([0 1/f -200 200]);

```

```

70 subplot(4,1,3); plot(t, qb, '-.g','LineWidth',2); grid on;
71 xlabel('t (s)'); title('Qb (VAr)'); axis([0 1/f -200 200]);
72 subplot(4,1,4); plot(t, qc, ':m','LineWidth',2); grid on;
73 xlabel('t (s)'); title('Qc (VAr)'); axis([0 1/f -200 200]);
74
75 disp('Estudo das Potencias na figura 1.');
```

76

```

77 % Comando para salvar a figura
78 if save_pics
79     cd ../Texto/Figuras/
80     print('est_de_caso_res_equi_trif_potencias.png', '-dpng');
81     cd ../../Matlab
82 end
83
84 disp('Programa pausado, pressione qualquer tecla para prosseguir');
85 pause;
86
87 disp('Visualizacao da norma de Q');
88 vetor_Q = [qa' qb' qc'];
89
90 norma_Q = arrayfun(@(idx) norm(vetor_Q(idx,:)), 1:size(vetor_Q,1));
91
92 figure;
93 plot(t, norma_Q);
94 xlabel('t(s)'); ylabel('|Q|'); grid on;
95
96 disp('Programa pausado, pressione qualquer tecla para prosseguir');
97 pause;
98
99 %% Visualizacao do lugar geometrico das tensoes
100 % e das correntes.
101
102 disp(['Lugar geometrico das tensoes e das correntes'...
103     'normalizadas pelos valores rms, conforme mostrado na figura 2.']);
104
105 figure;
106 hold on
```

```

107
108 subplot(211);
109 hold on;
110 % Lugar geometrico da corrente
111 pi = plot3(ia./Irms,ib./Irms,ic./Irms, '—r','LineWidth',2);
112 quiver3(0, 0, 0, ia(1)./Irms,ib(1)./Irms,ic(1)./Irms, '—r','LineWidth'
    ,2);
113 % linhas cinzas no grafico 3D para facilitar
114 % a visualizacao da origem
115 z = -sqrt(2):0.1:sqrt(2);
116 x = 0*z;
117 y = 0*z;
118 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);
119 x = z;
120 z = 0*x;
121 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);
122 y = x;
123 x = 0*z;
124 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);
125 % Lugar geometrico da tensao
126 pv = plot3(va./Vrms,vb./Vrms,vc./Vrms, ':b','LineWidth',2);
127 quiver3(0, 0, 0, va(1)./Vrms,vb(1)./Vrms,vc(1)./Vrms, ':b','LineWidth'
    ,2);
128 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
129 view(3);
130 axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 2.5]);
131 grid on;
132 legend([pi pv], 'Correntes', 'Tensoes');
133
134 % Visualizacao pelo plano XZ
135 subplot(223);
136 hold on;
137 title('Plano XZ');
138 plot3(ia./Irms,ib./Irms,ic./Irms, '—r','LineWidth',2);
139 plot3(va./Vrms,vb./Vrms,vc./Vrms, ':b','LineWidth',2);
140 quiver3(0, 0, 0, ia(1)./Irms,ib(1)./Irms,ic(1)./Irms, '—r','LineWidth'
    ,2);

```

```

141 quiver3(0, 0, 0, va(1)./Vrms,vb(1)./Vrms,vc(1)./Vrms, ':b','LineWidth'
    ,2);
142 xlabel('x'); zlabel('z');
143 view(0,0);
144 axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 2.5]);
145 grid on;
146
147 % Visualizacao pelo plano XY
148 subplot(224);
149 hold on;
150 title('Plano XY');
151 plot3(ia./Irms,ib./Irms,ic./Irms, '—r','LineWidth',2);
152 plot3(va./Vrms,vb./Vrms,vc./Vrms, ':b','LineWidth',2);
153 quiver3(0, 0, 0, ia(1)./Irms,ib(1)./Irms,ic(1)./Irms, '—r','LineWidth'
    ,2);
154 quiver3(0, 0, 0, va(1)./Vrms,vb(1)./Vrms,vc(1)./Vrms, ':b','LineWidth'
    ,2);
155 xlabel('x'); ylabel('y');
156 view(0,90);
157 axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 2.5]);
158 grid on;
159
160 if save_pics
161     cd ../Texto/Figuras/
162     print('est_de_caso_res_equi_lugar_geometrico.png', '-dpng');
163     cd ../../Matlab
164 end
165
166 disp('Programa pausado, pressione qualquer tecla para prosseguir');
167 pause;
168
169 %% Calculo dos tensores de potencia
170 % e visulizacao de seus componentes.
171
172 disp('Calculando os tensores...');
173 % Com tensores
174 Sten = {va.*ia va.*ib va.*ic;...

```

```

175 vb.*ia vb.*ib vb.*ic;...
176 vc.*ia vc.*ib vc.*ic};
177
178 % Calculo do tensor potencia reativa
179 Qten = cell(3);
180 Ssim = cell(3);
181 for i=1:3
182 for j=1:3
183 Qten{i,j} = (Sten{i,j} - Sten{j,i});
184 Ssim{i,j} = 0.5*(Sten{i,j} + Sten{j,i});
185 end
186 end
187
188 % Visualizacao do tensor potencia reativa
189 figure;
190 set(gcf, 'Name', 'Componentes do tensor Q. ');
191 subplot(3,1,1); plot(t, Qten{2,3});
192 xlabel('t (s)'); title('Qa (VAr)'); grid on;
193 subplot(3,1,2); plot(t, Qten{3,1});
194 xlabel('t (s)'); title('Qb (VAr)'); grid on;
195 subplot(3,1,3); plot(t, Qten{1,2});
196 xlabel('t (s)'); title('Qc (VAr)'); grid on;
197
198 % Visualizacao do tensor simetrico de potencia instantanea
199 figure;
200 set(gcf, 'Name', 'Componentes de Ssim. ');
201 subplot(3,1,1); plot(t, Ssim{2,3}, 'LineWidth', 2);
202 xlabel('t (s)'); title('Ssim(2,3)'); grid on;
203 subplot(3,1,2); plot(t, Ssim{3,1}, 'LineWidth', 2);
204 xlabel('t (s)'); title('Ssim(3,1)'); grid on;
205 subplot(3,1,3); plot(t, Ssim{1,2}, 'LineWidth', 2);
206 xlabel('t (s)'); title('Ssim(1,2)'); grid on;
207
208 if save_pics
209     cd ../Texto/Figuras/
210     print('est_de_caso_res_equi_pot_sim.png', '-dpng');
211     cd ../../Matlab

```

```

212 end
213
214 disp('Programa pausado, pressione qualquer tecla para prosseguir');
215 pause;
216
217 %% Calculo das componentes ativa e reativa da corrente,
218 % assim como sua visualizacao.
219
220 disp('Calculando as componentes ativa e reativa da corrente...');
221 %componentes ativa e reativa da corrente
222 vetor_V = [va' vb' vc'];
223 norma_V = arrayfun(@idx norm(vetor_V(idx,:)), 1:size(vetor_V,1));
224 ip(:,1) = p ./ (norma_V.^2) .* va;
225 ip(:,2) = p ./ (norma_V.^2) .* vb;
226 ip(:,3) = p ./ (norma_V.^2) .* vc;
227
228 iq(:,1) = ia - ip(:,1)';
229 iq(:,2) = ib - ip(:,2)';
230 iq(:,3) = ic - ip(:,3)';
231
232 figure;
233 subplot(2,1,1); plot(t, ip(:,1), '-b',...
234     t, ip(:,2), '-.r', t, ip(:,3), '-y', 'LineWidth', 2);
235 xlabel('t(s)'), title('Corrente instantanea ativa');
236 grid on; legend('ip_a', 'ip_b', 'ip_c');
237 axis([0 1/f -sqrt(2)*Irms sqrt(2)*Irms]);
238 subplot(2,1,2); plot(t, iq(:,1), '-b',...
239     t, iq(:,2), '-.r', t, iq(:,3), '-y', 'LineWidth', 2);
240 xlabel('t(s)'), title('Corrente instantanea reativa');
241 grid on; legend('iq_a', 'iq_b', 'iq_c');
242 axis([0 1/f -1 1]);
243
244 if save_pics
245     cd ../Texto/Figuras/
246     print('est_de_caso_res_equi_trif_correntes.png', '-dpng');
247     cd ../../Matlab
248 end

```

```

249
250 %% Codigo para visualizar o comportamento
251 % instantaneo dos quaternios de tensao e corrente
252 % incluindo opcao para gerar gif.
253 %{
254 pause;
255
256 disp('A figura 3 mostra o comportamento instantaneo do quaternio de
      tensao');
257 animacao = figure;
258 grid on;
259 hold on;
260 % ax1 = plot3(ia./Irms,ib./Irms,ic./Irms, '--r', 'LineWidth', 2);
261 ax2 = plot3(va./Vrms,vb./Vrms,vc./Vrms, '-b', 'LineWidth', 2);
262 i1 = ia(1);
263 i2 = ib(1);
264 i3 = ic(1);
265 v1 = va(1);
266 v2 = vb(1);
267 v3 = vc(1);
268 vetorcorrente = quiver3(0, 0, 0, i1/Irms, i2/Irms, i3/Irms, '--r', '
      LineWidth', 2);
269 vetortensao = quiver3(0, 0, 0, v1/Vrms, v2/Vrms, v3/Vrms, '-b', '
      LineWidth', 2);
270 vetorcorrente.AutoScale = 'off';
271 vetortensao.AutoScale = 'off';
272
273 axis manual;
274 axis([-2*sqrt(1), 2*sqrt(1), -2*sqrt(1), 2*sqrt(1), -2*sqrt(1), 2*sqrt
      (1)]);
275 view(45, 30);
276
277 %center lines
278 z = -sqrt(2):0.1:sqrt(2);
279 x = 0*z;
280 y = 0*z;
281 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);

```

```

282 x = z;
283 z = 0*x;
284 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);
285 y = x;
286 x = 0*z;
287 line(x, y, z, 'Color', [0.85 0.85 0.85]);
288 hold off;
289 legend([ax2 ax1], 'Tensao', 'Corrente');
290 xlabel('q1'); ylabel('q2'); zlabel('q3');
291 title('Vetores instantaneos das tensoes e correntes.');
```

```

292
293
294 %animation
295 fps = 10;
296 F(n) = struct('cdata',[],'colormap',[]);
297 for c = 1:fps:n
298     vetorcorrente.UData = ia(c)/Irms;
299     vetorcorrente.VData = ib(c)/Irms;
300     vetorcorrente.WData = ic(c)/Irms;
301     vetortensao.UData = va(c)/Vrms;
302     vetortensao.VData = vb(c)/Vrms;
303     vetortensao.WData = vc(c)/Vrms;
304     F(c) = getframe(animacao);
305
306     %conversao do frame para imagem
307     im{c} = frame2im(F(c));
308 end
309
310 if input('Gerar gif? [s = 1, n = 0] \n')
311     filename = 'quaternio.gif'; % Specify the output file name
312     for idx = 1:fps:n
313         [A,map] = rgb2ind(im{idx},256);
314         if idx == 1
315             imwrite(A,map,filename,'gif','LoopCount',Inf,'DelayTime
316                 ',0.1);
317         else

```

```
317         imwrite(A,map,filename,'gif','WriteMode','append','DelayTime
           ',0.1);
318     end
319 end
320 end
321 %}
```