UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia
Curso de Bacharelado em Ciências Econômicas

Teoria de Jogos: Transmissão de Informação, Jogos Sinalizados, Cheap-Talk e Persuasão Bayesiana

André Fueta Pellizzaro
Orientador: Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento

Brasília

Fevereiro, 2020

André Fueta Pellizzaro

Teoria de Jogos: Transmissão de Informação, Jogos Sinalizados, Cheap-Talk e Persuasão Bayesiana

Monografia apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento.

Brasília

Fevereiro, 2020

André Fueta Pellizzaro

Teoria de Jogos: Transmissão de Informação, Jogos Sinalizados, Cheap-Talk e Persuasão Bayesiana

Monografia apresentada ao Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento.

Trabalho aprovado em

Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento
Orientador

Dr. Moisés de Andrade Resende Filho
Banca Examinadora

Brasília
14, Fevereiro, 2020

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade de Brasília, por me auxiliar nos anos de estudo dentro desta instituição de maneira gratuita.

À minha família, os pilares da minha construção pessoal e acadêmica.

Ao professor Dr. Leandro Gonçalves do Nascimento, quem me acolheu desde o início com disposição e paciência. Seus ensinamentos foram essenciais desde o curso de Economia Industrial e até a elaboração desta monografia o que tornou possível sua concretização.

Resumo

O presente estudo introduz a teoria de jogos desde o equilíbrio de Nash até o equilíbrio Bayesiano perfeito e aplica essas ferramentas no estudo dos modelos de jogos de transmissão de informação. Usando o modelo descrito por Tadelis (2012), é feita uma aplicação à dinâmica de influenciadores digitais e, por fim, é apresentado o modelo Cheap-Talk, descrito por Crawford e Sobel (1982) e o modelo de persuasão bayesiana, descrito por Kamenica e Gentzkow (2011). Usando os dois últimos modelos, é apresentado um estudo no qual o agente que envia a informação não possui uma racionalidade plena e a consequências da racionalidade não plena para o modelo inicial.

Palavras-chaves: Teoria de Jogos, Cheap-Talk , Persuação Bayesiana.

Abstract

This paper introduces game theory from Nash equilibrium to perfect Bayesian equilibrium and uses them as tools to study the information transmission game models. Using the model described by Tadelis (2012), an application is made to dinamics of digital influencers and, finally, it is introduced the Cheap-Talk game model described by Crawford and Sobel (1982) and bayesian persuasion game model described by Kamenica and Gentzkow (2011). Using the last two models, a study is presented in which the sender does not have fully rationality and the consequences for the initial model.

Key-words: Game Theory, Cheap-talk, Bayesian Persuasion.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Árvore de um jogo extensivo 5
Figura 2 – Árvore de um jogo com informação imperfeita 7
Figura 3 – Árvore com subjogos em destaque 8
Figura 4 – Jogo da Confiança 16
Figura 5 – Payoff no jogo Cheap Talk 19
Figura 6 – A função utilidade do Sender e sua concavicação. 27

Lista de tabelas

Tabela 1 – Matriz de Payoff do Consumidor 15
Tabela 2 – Matriz de Payoff do Consumidor e *Digital Influencer* 17

Sumário

1 INTRODUÇÃO 1

2 JOGOS COM INFORMAÇÃO COMPLETA 2
2.1 Jogos na forma normal 2
2.2 Jogos Sequenciais na Forma Extensiva 5

3 JOGOS COM INFORMAÇÃO INCOMPLETA 9
3.1 Jogos Bayesianos 9
3.2 Jogos Dinâmicos de Informação Incompleta 11

4 JOGOS DE SINALIZAÇÃO 13
4.1 Jogo da Confiança: Modelagem de um Jogo Sinalizado 13
4.2 Jogos de Transmissão de Informação - Cheap-Talk 18
4.3 Persuasão Bayesiana 24

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 29

Referências Bibliográficas 30

1 Introdução

Muitas vezes estamos suscetíveis à problemas e soluções que não necessariamente depende das nossas ações individuais. Por exemplo, para adquirir um carro temos que escolher entre o tipo e negociar o valor, visto que é um grande dispêndio monetário para muitas famílias. Por isso, se contrata um seguro como forma de proteger seu patrimônio. Entretanto, um questionamento econômico é "Devo contratar um seguro?", ou se pensarmos de outra forma, "Estarei em melhor situação contratando um seguro?". De fato, a dinâmica das seguradoras funciona em receber uma quantia monetária e, em retorno, a seguradora paga um valor combinado se sofrer algum sinistro. Portanto, como os indivíduos agem seguindo o princípio da Utilidade Marginal Decrescente, os consumidores preferem suavizar seu consumo em um período de tempo. Exemplificando, dado um período de dois anos, os indivíduos preferem um consumo médio pelos dois anos a um consumo excessivo em um ano e um consumo mínimo em outro ano. Assim, indivíduos que agem pelo principio da Utilidade Marginal Decrescente são avessos ao risco e consomem um seguro, restrito ao seu orçamento.

Desse modo, para uma família que é avessa ao risco, a utilidade esperada com seguro ponderado pela probabilidade do sinistro ocorrer deve ser maior do que a sua utilidade esperada sem seguro. Porém, o mercado de seguros é caracterizado pela *assimetria de informações* entre as famílias e a seguradora, para isso basta supor que a probabilidade do sinistro ocorrer varia de acordo com as famílias. De modo simplificador, podemos imaginar que existe dois tipos de famílias, uma de alto risco p^{alto} e uma de baixo risco p^{baixo}, em que p é a probabilidade de ocorrer um sinistro dado seu tipo. Contudo, a seguradora não sabe qual o tipo de seus clientes, uma vez que os indivíduos têm incentivos de revelar seu tipo, de forma a garantir melhores condições para contratação do serviço. Como consequência, a seguradora proveria o serviço somente para o tipo p^{alto}, pois há um aumento de preços para o tipo p^{baixo}, de forma que o exclui do mercado. Assim, existe alguma mensagem que realmente revela seu verdadeiro tipo, de modo a contornar o problema de transmissão de informação? Se sim, existe uma mensagem que seja ótima de forma a não haver exclusão? Ou ainda uma mensagem de forma que os agentes não tomam suas decisões de maneira ótima? Essas questões são abordadas nesse trabalho de conclusão de curso, além de introduzir os conceitos iniciais sobre a teoria dos jogos para transmissão de informações.

2 Jogos com Informação Completa

2.1 Jogos na forma normal

Durante a graduação de Economia, os cursos de Microeconomia proporcionam conhecimentos para enfrentar e resolver problemas de decisão de um indivíduo racional. De acordo com Tadelis(2012), criamos uma estrutura a qual combina três elementos

- as ações possíveis do indivíduo;
- a relação determinística ou probabilística entre ações e resultados;
- as preferências do indivíduo sobre os possíveis resultados.

Assim, entendemos que o indivíduo toma sua decisão de acordo com seus interesses. Essa estrutura oferece recursos analíticos sistemáticos, consistentes e geralmente aplicáveis. Porém, há uma desvantagem que nos faz expandir o conceito de solução.[1] No mundo de decisões, muitas vezes os resultados que determinam nosso bem-estar são consequências de nossas próprias ações e alguma aleatoriedade que está além do nosso controle.

Quando tratamos de uma maneira modelável (probabilística) nossas decisões e alguma natureza não determinística, podemos decidir as ações que levam a resultados de bem-estar como função dessa natureza aleatória que, em alguma situação problema, essa natureza pode ser um indivíduo que tenta, ao mesmo tempo, maximizar seu bem-estar. Esse indivíduo também pode possuir peculiaridades aleatórias ou não controláveis e funções de bem-estar com estruturas racionais assim como os outros.[2] Por isso, assim como um indivíduo tenta maximizar seu bem-estar pelas possíveis ações dos outros agentes, os diferentes indivíduos agem da mesma forma. Ou seja, todos os indivíduos estão engajados em um sistema estratégico no qual cada jogador tenta adivinhar a escolha dos outros e decide agir da melhor forma possível sabendo que todos possuem as mesmas dificuldades.

[1] De acordo com Gibbons(1992)

[2] Em Maschler, Solan, Zamir(2013) e Tadelis(2012), tentamos inicialmente maximizar a preferência do individuo de maneira estática, em que os indivíduos tomam decisões de forma simultânea.

Portanto, modificamos nossa estrutura de tomada de decisão individual para assim nos adaptarmos a esse conjunto de estratégias e definirmos essa estrutura como um **jogo**.

De acordo com Tadelis(2012), quando tratamos de um **jogo de informação completa**, queremos que quatro componentes do jogo estejam presentes e que isto seja de conhecimento comum de todos jogadores. São eles:

- todas as possibilidades de ações de todos os jogadores;
- todas as possibilidades de finalizações para o jogo;
- como cada caminho de escolhas feitos por todos os jogadores afetam os diferentes resultados do final do jogo;
- as preferências de cada um dos jogadores para cada final de jogo.

Assim, podemos estruturar o jogo na forma normal. De acordo com Tadelis(2012), um jogo na formal normal pode ser reescrito como um sistema consistente de três componentes:

1. Um conjunto de **jogadores**.
2. Um conjunto de **ações** para cada jogador.
3. Um perfil de **funções de *payoff***, contendo os payoffs de cada jogador como função dos perfis das ações escolhidas pelos jogadores.

Assim, definimos cada um desses objetos.

Definição 2.1.1 *Uma **estratégia pura** para o jogador **i** é um plano de ação determinístico. O conjunto de todas as estratégias puras para o jogador i é denotado por S_i. Um **perfil de estratégia pura** $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, descreve uma particular combinação de estratégias escolhidas por todos os n jogadores no jogo.*

Definição 2.1.2 *Um jogo na forma normal é um vetor ordenado*

$$\Gamma_N = (I, S, U)$$

em que:

- $I = \{1, 2, ..., n\}$ *é um conjunto finito de jogadores*

- $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ *é o cartesiano de conjuntos de estratégias*
- $U = (u_i)_{i=1}^n$ *é um perfil de funções payoff, que para cada* $s \in S$ *associa a um valor payoff, ou seja,* $u_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$*, para cada* $i \in I$

Tal definição ajuda-nos a melhor estruturarmos um jogo matematicamente. Assim, podemos fazer a seguinte questão: dado um jogo Γ_N na forma normal, o que irá acontecer? De acordo com Gibbons(1992), podemos definir um **equilíbrio Nash**, que é a solução do jogo Γ_N.

Definição 2.1.3 *Em um jogo* Γ_N *na forma normal com **n** jogadores. A estratégia* $s_i^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ *é **equilíbrio Nash** se, para todo jogador i,* s_i^* *é a melhor resposta contra as estratégias específicas dos* $n-1$ *outros jogadores, ou seja, para as escolhas*
$s_1^*, s_2^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*$ *dos jogadores* $1, ..., i-1, i+1, ..., n$*. Assim:*

$$u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_i, ..., s_n^*)$$

para toda estratégia $s_i \in S_i$*; ou aquela* s_i^* *que resolve*

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, s_2^*, ..., s_i, ..., s_n^*)$$

Nessa ótica de análise de equilíbrio, não podemos esquecer que temos alguns pressupostos sobre o modelo. De acordo com Tadelis(2012), temos:

- **Os jogadores são racionais:** A racionalidade aqui será aquela ação $s_i \in S_i$, que maximiza o seu payoff consistente com suas crenças sobre o que está acontecendo no jogo.
- **Os jogadores são "inteligentes":** Nesse caso, um jogador *inteligente* é aquele que tem conhecimento sobre o jogo: as ações, os fins possíveis e as preferências de todos os jogadores.
- **Conhecimento comum:** O fato do qual os jogadores são racionais e inteligentes é conhecimento comum.
- **Self-enforcement:** Qualquer suposição de solução tem que ser acordo de auto-cumprimento, ou seja nenhuma parte externa ao jogo pode impor ou interferir no resultado do jogo. Logo, seus jogadores aceitam o resultado do jogo de acordo com suas estratégias iniciais.

2.2 Jogos Sequenciais na Forma Extensiva

Quando os jogos possuem estágios de escolhas ou quando as escolhas dos jogadores mudam depois de aprender com as escolhas dos outros jogadores, temos um jogo sequencial, o qual pode ser representado como um **jogo na forma extensiva**. A grande diferença entre o jogo na forma extensiva para o jogo na forma normal se dá pelo conhecimento das ações dos outros jogadores permitindo, assim, que suas escolhas dependam das escolhas feitas anteriormente. Para análise desse jogo na forma extensiva Γ_E, temos uma estrutura de descrição do problema:

Quem joga? Os integrantes do jogo na forma extensiva Γ_E são os **jogadores** identificados no conjunto $I = 1, 2, ..., n$.

Como joga? A estrutura do jogo é graficamente representado pela **árvore do jogo**

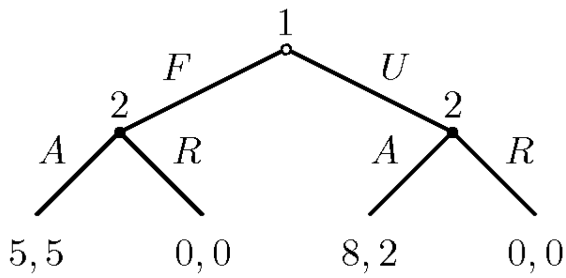

Figura 1 – Árvore de um jogo extensivo

Nessa estrutura podemos

- encontrar as posições no jogo, dado pelos nodos da árvore;
- transições entre os nodos, dado pelos "galhos"da árvore, que correspondem a ações tomadas pelos jogadores;
- conhecimento do que se passou no jogo, dado pelo conjuntos de informação do jogo.

Por que jogam? Para cada final da árvore, associamos um valor de payoff dado por u_i para todo $i \in I$.

Formalmente, de acordo com Maschler, Solan, Zamir(2013).

Definição 2.2.1 *Uma árvore de um jogo é um vetor* (V, E, x_0) *em que*

- V *é o conjunto de nodos, no qual os nodos finais* z *são tais que não existe* $x \in V$ *tal que* $z \prec x$*, em que* $\prec$ *representa uma relação de precedência entre os* *nodos. Chamamos o conjunto dos nodos final de Z. Todos os nodos em V/Z são chamados nodos de ações.*

- *E é uma função que associa cada nodo de ação com o jogador daquele nodo, ou seja*
$$E : V/Z \to I$$
em que $i = E(x)$

- *Existe um único nodo inicial x_0 e $\forall x \in V, x \neq x_0$, existe um único $x' \in V$ que precede de forma imediata x.*

Quando definimos a árvore do jogo, percebemos que um nodo que tenha dois precedentes gera caminhos complicados de analisar. Por isso separamos como duas árvores, nesses casos de dois precedentes, e usamos como hipótese que temos somente um início e existe um único caminho para chegar a qualquer nodo.

Definição 2.2.2 *Um jogo na forma extensiva é um vetor ordenado*

$$\Gamma_E = (I, V, E, x_0, (A_i)_{i\in N}, S, (v_i)_{i\in I})$$

em que:

- *I é um conjunto finito de jogadores*
- *(V, E, x_0) é a árvore do jogo.*
- *A_i é o conjunto de todas as ações que o jogador $i = E(x)$ pode tomar em $x \in V/Z$*
- *S é o conjunto de todas as estratégias que levam aos nodos finais $z \in Z$.*
- *v_i é a função que associa todos caminhos em S com o payoff de cada jogador i.*

O jogo sequencial abre análise para a **informação durante o jogo**. Dado um jogador i , $A_i = \{x \in V/Z | i = E(x)\}$ é o conjunto de nodos em que i joga. Considere partições de A_i com elementos h_i, ou simplesmente h, no qual h_i é um conjunto de informação. Desse modo, para qualquer $x \in h_i$, o jogador i não sabe se está em x ou em outro $x \in h_i$.

Diferentes partições geram distintas informações de conhecimento dos jogadores do jogo e, assim, classificamos o jogo como

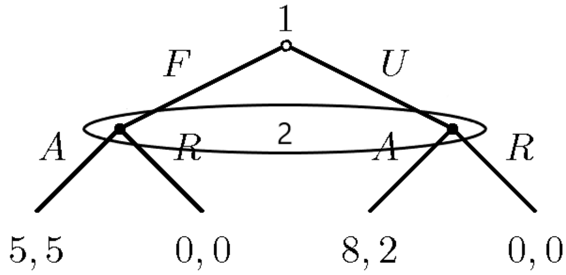

Figura 2 – Árvore de um jogo com informação imperfeita

- Informação perfeita: Para todo jogador i ,todo $h_i \in H_i$ tem somente um elemento.
- Informação imperfeita: Existe um jogador i e algum $h_i \in H_i$ com mais que um elemento.

Assim podemos falar sobre **estratégias em** Γ_E. Definimos uma estratégia como um plano completo de ação em Γ_E. Ou seja, uma estratégia s_i de i associa uma ação factível em $A_i(h)$, o conjunto de ações comum a todo nodo em h, a cada conjunto de informação $h \in H_i$

$$s_i : H_i \rightarrow \bigcup_{h \in H_i} A_i(h)$$

Finalmente podemos encontrar a função payoff. Para isso, definimos uma função que associa a cada $s \in S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ um único nodo final $z \in Z$. Nesse caso, u_i é definido por

$$u_i = v_i(f(s))$$

em que $f : S \rightarrow Z$, ou seja, uma função que associa um jogo na forma extensiva Γ_E a um jogo na forma normal Γ_N

O conceito de equilíbrio em jogos na forma extensiva possui duas estruturas. Por Equilíbrio de Nash quando conseguimos associar um perfil de estratégias em um jogo na forma normal derivado do jogo na forma extensiva ou quando conseguimos um caminho que induz Equilíbrio de Nash em cada subjogo do jogo na forma extensiva. Esse equilíbrio chamamos **Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos**. De acordo com Tadelis(2012), dizemos que Γ'_E é um sub jogo de Γ_E se ele for derivado de Γ_E com as seguintes propriedades:

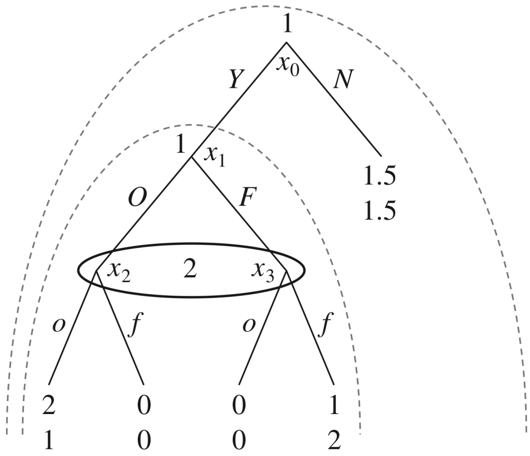

Figura 3 – Árvore com subjogos em destaque

(i) Γ'_E começa em um único nodo inicial que inclui todos os sucessores dele;

(ii) Se x é nodo de Γ'_E e $(x, x') \in h \in H_i$, então x' também é nodo de Γ'_E.

Definição 2.2.3 *Seja $s^* \in S$ um perfil de estratégia de um jogo Γ_E na forma extensiva . Dizemos que s^* é **equilíbrio perfeito Nash em subjogos** se s^* é equilíbrio de Nash para todo subjogo Γ'_E de Γ_E.*

3 Jogos com Informação Incompleta

Na vida real é difícil imaginar que temos todas as informações necessárias para tomarmos decisões. Pois até mesmo para decidirmos um almoço passamos pela escolha de qual restaurante será escolhido, de qual prato será pedido ou até mesmo a quantidade de pedidos para assim satisfazermos nosso paladar. Aparentemente todas essas escolhas são bem controláveis. Entretanto, se analisarmos calmamente, cada passo para realizarmos nosso payoff pode ser induzido por outros fatores. A escolha do prato, por exemplo, pode ser influenciado pela fotografia do cardápio, afinal, uma boa fotografia influencia positivamente a escolha do prato. Indo além, a escolha do restaurante pode ser feita por indicações, uma vez que um restaurante com mais recomendações será mais escolhido.

Em contraponto à escolha, muitas vezes vimos uma imagem de um produto e na hora de consumirmos nos decepcionamos com o real ou quando vamos em um local recomendado por um guia turístico e não aproveitamos como o descrito anteriormente. Assim, não temos de fato controle sobre todas as informações e além, não sabemos ao certo, quanto o guia turístico ganhou pela indicação ou qual valor pago por uma fotografia perfeita. Esses jogos são exemplos que podem ser modelados por um jogo de informação incompleta, também chamado de **Jogos Bayesianos**.

3.1 Jogos Bayesianos

Em jogos de informação completa, assumimos que os jogadores sabem quem joga, quais as possibilidades de ações de cada jogador e sabem qual o payoff para cada final do jogo. Além disso, assumimos que este conhecimento do jogo é conhecimento comum aos jogadores. Esses supostos nos permitem estabelecer os fundamentos metodológicos para tais conceitos de solução, a racionalidade dos jogadores e, por consequência, o equilíbrio de Nash.

Entretanto, em jogos bayesianos, pensamos em situações nas quais os jogadores têm alguma ideia sobre as características de seus oponentes, mas não sabem ao certo quais essas características. De fato, esse jogo não difere muito de um jogo simultâneo em que um jogador não sabe quais ações seus oponentes podem tomar, assim, o jogador forma uma conjectura sobre o comportamento dos oponentes para escolher uma melhor resposta, e identificamos essa ideia como a **crença dos jogadores** sobre as ações de seus oponentes. Deste modo, categorizamos tal conjectura em jogadores de diferentes **tipos** de acordo com a crença de cada jogador.

Para modelar situações em que jogadores sabem seus próprios payoff a partir dos nodos finais mas não tem conhecimento pleno dos payoff dos outros jogadores, definimos o conceito de *informação incompleta*:

(i) Cada jogador tem suas preferências associadas a um **tipo**. Ou seja, se um jogador pode ter várias preferências diferentes sobre os resultados, cada um deles é associado a um tipo diferente. As informações que o jogador tem sobre seus próprios payoff ou informações que ele possa ter sobre outros atributos relevantes do jogo também fazem parte do que define o tipo do jogador.

(ii) A escolha sobre os tipos dos jogadores é descrito por uma **natureza** aleatória. Assim, existe um conjunto em que a natureza escolhe os tipos dos jogadores.

(iii) A distribuição de probabilidade do conjunto de tipos que são determinados pela natureza é conhecimento comum entre os jogadores.

Assim, como todos os jogadores aprendem sobre seu próprio tipo, ele pode usar o conhecimento comum sobre o conjunto de tipos para formar crenças posteriores sobre os tipos dos outros agentes.

Definição 3.1.1 *A forma normal de representação de um* ***jogo bayesiano de informação incompleta*** *é*

$$\langle I, \{A_i\}_{i=1}^n; \{\Theta_i\}_{i=1}^n; \{v_i(\cdot, \theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n; \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle$$

em que:

- $I = \{1, 2, ..., n\}$ é um conjunto finito de jogadores
- $\{A_i\}_{i=1}^n$ é o conjunto de ações do jogador i.
- $\Theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, ..., \theta_{ik_i}\}$ é o conjunto de tipos do jogador i.
- $v_i : A \times \Theta_i \to \mathbb{R}$ é a função payoff do jogador i dependente do seu tipo θ_i, tal que $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.
- ϕ_i descreve a crença do jogador i com relação a incerteza sobre os tipos dos outros jogadores, isto é, $\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ é a distribuição condicional sobre θ_{-i} dado que i sabe seu próprio [1] tipo θ_i.

[1] θ_{-i} representa os tipos de todos os outros jogadores menos o jogador i

É conveniente pensar que um jogo bayesiano ocorre seguindo etapas:

1. A Natureza escolhe o perfil de tipos $\{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\}$.
2. Cada jogador i aprende seu tipo θ_i, que é uma informação privada, e depois usa ϕ_i para formar sua crença sobre os tipos dos outros jogadores.
3. Os jogadores escolhem simultaneamente[2] as ações $a_i \in A_i, \forall i \in I$.
4. Dado as ações dos jogadores $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, os payoffs $v_i(a; \theta_i)$ são realizados para cada jogador $i \in I$.

Como em jogo bayesianos, cada jogador i tem um conjunto de tipos Θ_i no qual se induz um comportamento para cada tipo. Assim uma estratégia para o jogador i é uma função $s_i : \Theta_i \to A_i$ que associa seu tipo $\theta_i \in \Theta_i$ a cada ação $s_i(\theta_i)$.

Definição 3.1.2 *Em um jogo bayesiano*

$$\langle I, \{A_i\}_{i=1}^n; \{\Theta_i\}_{i=1}^n; \{v_i(\cdot, \theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n; \{\phi_i\}_{i=1}^n\rangle$$

*uma estratégia $s^* = (s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \cdots, s_n^*(\cdot))$ é um **Equilíbrio Bayesiano - Nash** se, para todo jogador i, para cada tipo $\theta_i \in \Theta_i$ do jogador i e para todo $a_i \in A$, $s_i^*(\cdot)$ satisfaz*

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) \cdot v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i) \geq \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) \cdot v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i).$$

3.2 Jogos Dinâmicos de Informação Incompleta

Da mesma forma tratada em jogos de informação completa, os jogos dinâmicos capturam como os jogadores respondem às ações já realizadas dos outros jogadores. Porém, em jogos de informação incompleta, o jogador não consegue de fato distinguir se as ações realizadas pelos outros jogadores levam ao equilíbrio ou não. Por isso necessitamos de um sistema no qual, por exemplo, o jogador seja capaz de decidir se em um conjunto de informação, os outros jogadores estão ou não escolhendo sua melhor resposta e, portanto, seu comportamento é ou não sequencialmente racional ou "crível". Entretanto como a informação é incompleta, não conseguimos muitas vezes isolar os jogadores no conjunto de informação com isso descrever um comportamento sequencialmente racional requer um conjunto de crenças sobre os tipos dos outros jogadores pelo conjunto de informação disponível.

[2] Por esse motivo é chamado de Jogo Bayesiano Estático

De modo geral, introduzimos um sistema de crenças sobre todos conjuntos de informação e descrevemos que a melhor resposta de cada jogador será encontrada a partir das crenças. Acima disso cada jogador escolhe sua estratégia assumindo a melhor resposta dos demais em cada conjunto de informação dadas suas próprias crenças.

Listamos assim os requerimentos sobre o equilíbrio:

1. Em cada conjunto de informação, o jogador que realiza a ação no nodo tem que ter uma **crença** sobre qual nodo no conjunto de informação foi alcançado pela ações escolhidas no jogo. Para um conjunto de informação não unitário, a crença é uma distribuição de probabilidade sobre os nodos no conjunto de informação. Para um conjunto de informação unitário, a crença do jogador sobre o único nodo é um evento certo.

2. Dado suas crenças, as estratégias dos jogadores tem que ser **sequencialmente racional**. Isto é, para cada conjunto de informação, a ação tomada pelo jogador ativo[3] (e a estratégia subsequente do jogador) deve ser ótima dado sua crença no conjunto de informação e nas estratégias subsequentes dos outros jogadores.[4]

3. Em um conjunto informação no caminho de equilíbrio, crenças são determinadas pela regra de Bayes e pelas estratégias de equilíbrio dos jogadores.

4. Os conjunto de informação fora do caminho de equilíbrio podem ser atribuídos qualquer crença em que a regra de Bayes não se aplica.

Definição 3.2.1 *Para um dado equilíbrio em determinado jogo na forma extensiva, um conjunto de informação está* ***no caminho de equilíbrio*** *se tiver alcançado probabilidade positiva quando o jogo acontece de acordo com as estratégias de equilíbrio. E está* ***fora do caminho de equilíbrio*** *se não tiver alcançado probabilidade positiva quando o jogo acontece de acordo com as estratégias de equilíbrio*[5]*.*

Definição 3.2.2 *Um* ***Equilíbrio Perfeito Bayesiano - Nash*** *consiste em um perfil de estratégias e crenças que satisfazem os requerimentos 1 a 4.*

[3] Aqui, o jogador ativo é aquele em que realiza a ação no nodo
[4] em que uma estratégia subsequente é um completo plano de ação cobrindo todas contingências que possam surgir após o conjunto de informação determinado seja alcançado
[5] Onde "equilíbrio"pode ser entendido como Nash, equilíbrio perfeito Nash, Bayesiano - Nash ou equilíbrio perfeito Bayesiano - Nash.

4 Jogos de Sinalização

Entramos agora de fato no objeto de pesquisa desse trabalho, os Jogos de Sinalização. Em jogos com informação incompleta, existe pelo menos um jogador que não tem conhecimento sobre o tipo de algum dos outros jogadores. Há jogos em que revelar seu próprio tipo gera benefícios no payoff final. Um exemplo disso se dá pela nova profissão de *digital influencer*. Suponha que você queira comprar determinado produto e procura uma recomendação na internet, assim, após ler ou assistir a avaliação cabe decidir comprar o produto ou não. Uma decisão desatenta levaria uma boa avaliação a uma compra, e vice-versa. Como tal serviço se tornou um dos principais meios de conversão de vendas, as empresas começaram a remunerá-los pelas avaliações produzidas o que ajudou a popularizar tal serviço via redes sociais. Entretanto não é plenamente possível saber se o *digital influencer* é do tipo verdadeiro ou ganancioso, ou seja, se as suas avaliações serão tendenciosas para realizarem a compra ou se serão verdadeiras frente ao produto apresentado. Nesse caso, apenas a avaliação seria insuficiente para tomada de decisão. Tem que haver algum meio crível, além da "conversa fiada", através da qual o jogador *digital influencer* pode sinalizar seu tipo e fazer seu oponente acreditar nele.

4.1 Jogo da Confiança: Modelagem de um Jogo Sinalizado

Segundo Tadelis(2012), jogos em que essa sinalização é possível em equilíbrio são chamados *Jogos de Sinalização*, em que compartilham uma estrutura que inclui quatro componentes:

1. A Natureza escolhe um tipo para o jogador 1 que o jogador 2 não conhece, mas se preocupa, ou seja , cria um sistema de crenças que influencia seus conjuntos de ações.

2. O jogador 1 possui um conjunto de ações ricas no sentido que há no minimo tantas ações quanto tipos, e cada ação impõe um diferente custo por tipo.

3. O jogador 1 escolhe sua ação primeiro e o jogador 2 responde após observar a ação escolhida pelo jogador 1.

4. Dada a crença do jogador 2 sobre a estratégia do jogador 1, o jogador 2 atualiza sua crença após observar a ação do jogador 1. Então o jogador 2 faz sua escolha

como a melhor resposta para suas crenças atualizadas.

Esse jogo é chamado *Jogo de Sinalização* pelo potencial sinal da ação do jogador 1 em converter a ação do jogador 2. Se para cada possível tipo do jogador 1, sua ação é única em equilíbrio, então essa ação do jogador 1 é capaz de revelar seu tipo completamente. Isto é, mesmo que o jogador 2 não saiba o tipo do jogador 1, após observar a ação do jogador 1, ele é capaz de aprender seu tipo, supondo que o jogador 1 escolha a ação de equilíbrio.

Ao mesmo tempo, podemos imaginar que o jogador 1, em equilíbrio, escolha somente uma ação. Assim nenhuma informação pode ser utilizada para atualizar o sistema de crenças do jogador 2, logo o tipo do jogador 1 não será revelado. Devido ao poder de sinalização da ação do jogador 1, podemos separar esses jogos em duas classes opostas em que o jogador revela seu tipo via sua ação ou não revela; ou ainda uma classe de estratégias mistas no qual o jogador 1 revela parcialmente seu tipo.

Para o problema do *digital influencer* descrito acima, modelamos a situação considerando que a escolha de comprar não tenha influência em seu sistema de crenças e é atualizada pela ação do *digital influencer*. Seu payoff é realizado pelo valor de utilidade de obter ou não a mercadoria e o viés do jogador *digital influencer*. O jogo assim é descrito pelas etapas:

1. A Natureza escolhe o tipo do *digital influencer* - que iremos assumir como jogador 1 - , o qual pode ser verdadeiro ou ganancioso, e somente ele sabe seu tipo. Assim, seu conjunto $\Theta = \{V, G\}$ e a probabilidade de ocorrer V é dado por $Pr\{\theta = V\} = p > 0$.

2. Após o *digital influencer* aprender seu tipo, ele decide em produzir uma *review* de alta qualidade ou baixa qualidade, assim seu conjunto de ações $A_1 = \{A, B\}$. Suponha que o custo privado c_θ de produzir uma recomendação seja dependente do tipo *digital influencer* pois há custos sociais relativos a manter sua reputação, assim o valor de ser Verdadeiro incorre maiores custos, ou seja $c_V > c_G$. Assumiremos em particular que $c_V = 5$ e $c_G = 2$.

3. Temos que o jogador 2 será o consumidor, sobre ele ocorrerá a ação de comprar, assim seu conjunto de ações $A_2 = \{C, N\}$. O custo monetário da compra será desprezível de forma que seu numerário não causará extrema escassez ao consumidor. Após o jogador Consumidor decidir sua ação, o *digital influencer* recebe sua remuneração w_C caso ocorra a compra e w_N caso contrário e uma

compensação para reviews de alta qualidade. Assim temos $w_C > w_N$, em particular suponhamos $w_C = 10$ e $w_N = 6$.

4. Pensaremos somente no payoff do jogador 2 como a utilidade pela aquisição ou não do produto e pela a sinalização obtida pela ação do jogador *digital influencer*. Ou seja, uma decisão de compra com uma avaliação verdadeira, maximiza o payoff do consumidor, enquanto uma compra com uma avaliação gananciosa minimiza o payoff do consumidor. Relacionamos as possíveis combinações na tabela 1 com os payoff do consumidor.

	Comprar(C)	**Não Comprar(N)**
Verdadeiro(V)	10	5
Ganancioso(G)	0	3

Tabela 1 – Matriz de Payoff do Consumidor

Na figura 4, temos a árvore do jogo completa com os nodos finais e os intermediários com seus payoff associados as ações de cada jogodor. Os valores numéricos são apenas como exemplo similar em Tadelis (p.p. 315-323, 2012). Devemos agora criar um mecanismo de crenças no qual o jogador Consumidor pode atualiza-lá após observar a ação do jogador *digital influencer*. Denotaremos μ_A como a crença do jogador Consumidor em que o tipo do *digital influencer* é Verdadeiro (V) condicionado à uma avaliação de alta qualidade (A). Similarmente, denotamos μ_B a crença no qual *digital influencer* seja Verdadeiro (V) dado uma avaliação de baixa qualidade (B). De modo geral, se usarmos estratégias mistas no qual o tipo V escolhe A com probabilidade σ^V e o tipo G escolhe A com probabilidade σ^G, e $\sigma^V, \sigma^G \in [0,1]$. Assim pela Regra de Bayes, temos

$$\mu_A = \frac{p\sigma^V}{p\sigma^V + (1-p)\sigma^G}$$

e

$$\mu_B = \frac{p(1-\sigma^V)}{p(1-\sigma^V) + (1-p)(1-\sigma^G)}.$$

Note que se $\sigma^V = \sigma^G = 1$, ou seja, o jogador *digital influencer* tem probabilidade 1 de escolher A não diferenciando por seu tipo, temos $\mu_A = p$ e μ_B é escolhido de maneira arbitrária pois essa crenças não é bem definida pela regra de Bayes. O mesmo acontece se $\sigma^V = \sigma^G = 0$, então $\mu_B = p$ e μ_A é escolhido de maneira arbitrária.

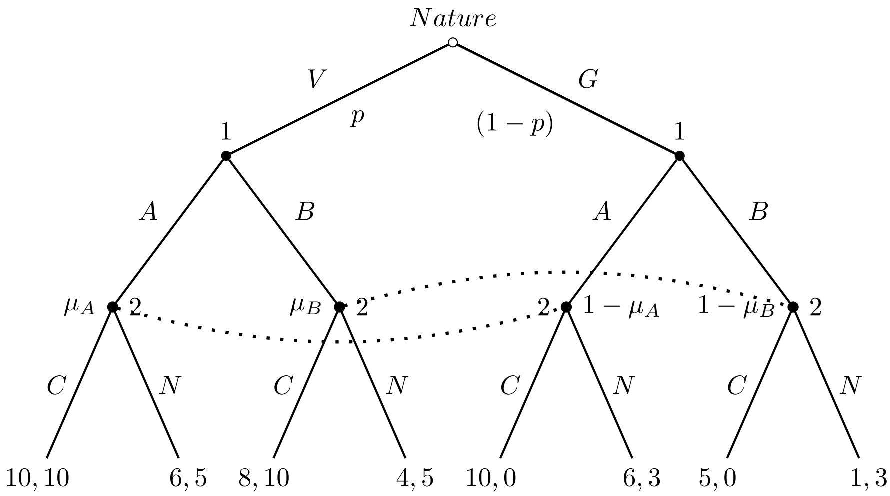

Figura 4 – Jogo da Confiança

Analisando o jogo, podemos procurar equilíbrio perfeito Bayesiano no jogo. Como cada jogador tem dois conjuntos de informação com duas ações em cada conjunto, então cada jogador tem quatro estratégias puras. Denotaremos cada estratégia na forma $(a_1^V a_1^G, a_2^A a_2^B)$ em que $a_1^\theta \in \{A, B\}$ representa a estratégia do jogador 1 dado seu tipo θ. Da mesma forma, $a_2^\kappa \in \{C, N\}$ representa a estratégia do jogador 2 dado o sinal $\kappa \in \{A, B\}$ enviado pelo jogador 1.

Assim calculamos a matriz de payoff dos jogadores usando a esperança da função utilidade dado um perfil de estratégias puras. Ou seja, para calcularmos a utilidade esperada do perfil (AA, NC) isso será dado por

$$(v_1, v_2)(AA, NC) = p \cdot (6, 5) + (1-p) \cdot (10, 0)$$

$$(v_1, v_2) = (10 - 4p, 5p)$$

Logo construímos a tabela 2 com todos os perfis de estratégia puras, usando o método de melhor resposta observamos que possui uma dependência de dois intervalos de $Pr\{\theta = V\} = p$ e assim observamos os perfis que são equilíbrios Bayesiano Nash.

Caso $p \leq \frac{1}{2}$, temos (BA, CN) e (AA, NN). Para verificar se fazem parte de um conjunto de equilíbrio bayesiano perfeito, precisamos encontrar um sistema de crenças que induz o perfil e verificar se este satisfaz as condições descritas no capítulo anterior.

O perfil (BA, CN) pode ser parte do equilíbrio bayesiano perfeito pois todos os conjuntos de informação são alcançados com probabilidade positiva em particular, podemos tomar $\mu_A = 0, \mu_B = 1 \Rightarrow \sigma^V = 0, \sigma^G = 1$ e segue que o jogador 1 e 2 estará dando sua melhor resposta pela matriz 2 do jogo.[1] Portanto, (BA, CN) junto com $\mu_A = 0, \mu_B = 1$ constitui um equilíbrio bayesiano perfeito.

$a_1 \diagdown a_2$	**CC**	**CN**	**NC**	**NN**
AA	$\overline{10, 10p}$	$\overline{\underline{4+6p, 3+7p}}$	$\overline{10-4p, 5p}$	$\overline{\underline{6, 6+2p}}$
AB	$\underline{5+5p, 10p}$	$\underline{1+9p, 1+7p}$	$5+p, 5p$	$1+5p, 1+2p$
BA	$10-2p, 10p$	$\overline{\underline{6+2p, 3+7p}}$	$10-6p, 5p$	$6-2p, 3+2p$
BB	$5+3p, 10p$	$\underline{1+7p, 3+7p}$	$5-p, 5p$	$1+3p, 3+2p$

Tabela 2 – Matriz de Payoff do Consumidor e *Digital Influencer*

Para o perfil (AA, NN), o conjunto de informação associado a ação B não é alcançada com probabilidade positiva. Assim $\sigma^G = \sigma^V = 1$ portanto μ_B não é bem definido e $\mu_A = p$, como estamos supondo $p \leq \frac{1}{2}$, induz o jogador 2 escolher a melhor resposta N no conjunto de informação associado a A. Por último, μ_B deve ser limitado para o jogador 2 escolher N no conjunto associados a ação B, assim basta escolhermos μ_B de tal forma que a esperança do payoff de $a_2 = N$ seja maior que $a_2 = C$. Ou seja,

$$v_2(N|a_1 = B, p) \cdot \mu_B + v_2(N|a_1 = B, 1-p) \cdot (1 - \mu_B) \geq$$
$$v_2(C|a_1 = B, p) \cdot \mu_B + v_2(C|a_1 = B, 1-p) \cdot (1 - \mu_B)$$

$$5\mu_B + 3(1 - \mu_B) \geq 10\mu_B + 0(1 - \mu_B)$$

$$\therefore \mu_B \leq \frac{3}{8}$$

Assim podemos suportar (AA, NN) como perfil parte do equilíbrio Bayesiano perfeito se acoplarmos as crenças $\mu_A = p$ e $\mu_B \in [0, \frac{3}{8}]$.

Caso $p \geq \frac{3}{5}$, temos somente o perfil (AA, CN). Temos novamente que o conjunto de informação associada a ação B não é alcançada com probabilidade positiva. Assim $\mu_A = p$ e μ_B deve ser limitado para o jogador 2 escolher $a_2^A a_2^B = CN$ no conjunto associados a ação B, assim basta escolhermos μ_B de tal forma que a esperança do payoff de $a_2^A a_2^B = CN$ seja maior que $a_2^A a_2^B = NC$. Ou seja,

[1] As marcações overline e underline são as melhores respostas condicionadas à $Pr\{\theta = V\} = p > 0$ do jogador 1 e 2, respectivamente.

$$v_2(C|a_1 = B, p) \cdot \mu_B + v_2(N|a_1 = B, 1-p) \cdot (1-\mu_B) \geq$$

$$v_2(N|a_1 = B, p) \cdot \mu_B + v_2(C|a_1 = B, 1-p) \cdot (1-\mu_B)$$

$$10\mu_B + 3(1-\mu_B) \geq 5\mu_B + 0(1-\mu_B)$$

$$\therefore \mu_B \geq -\frac{3}{2}$$

Ou seja, podemos suportar (AA, CN) como perfil parte do equilíbrio Bayesiano perfeito se acoplarmos as crenças $\mu_A = p$ e $\mu_B \in [0, 1]$.

Concluímos que o primeiro perfil (BA, CN) induz equilíbrio perfeito bayseiano pois ele é capaz de revelar o tipo θ do jogador 1 pela suas ações, assim atualizar suas crenças e realizar sua melhor resposta. E os outros casos, o jogador 1 não revela informação do seu tipo θ em sua ação assim o jogador 2 não aprende e não atualiza suas crenças porém, para valores limitados sobre a probabilidade de escolha da Natureza, o jogador 2 toma a ação do perfil (AA, NN) ou fica confuso na escolha da ação (AA, CN). Ao fim, para $\frac{1}{2} < p \leq \frac{3}{5}$, temos também o perfil (AA, NN) como equilíbrio perfeito.

4.2 Jogos de Transmissão de Informação - Cheap-Talk

No exemplo anterior, os perfis de equilíbrio que induzem compra ou não estão associados ao sinal, isto é, à ação do jogador 1 mas existem perfis que revelam o tipo do jogador e os outros que não revelam informação a respeito do tipo do jogador Sender,no qual deixa a escolha do jogador 2 a mercê das suas crenças a priori pois elas são atualizadas pelo conhecimento prévio do conjunto de escolhas da natureza sobre os tipos do jogador 1. Caso interprete o modelo em que a mensagem enviada tenha custo independente do estado da natureza, ou seja, não tenha efeito direto no payoff, podemos aproximar o problema por um jogo *cheap-talk*, de acordo com Crawford e Sobel (1982).

Como um jogo de sinalização, supomos dois jogadores. O jogador 1 tem informação privada e o payoff depende dessa informação para ambos os jogadores. A ação do jogador 1 é uma mensagem que não tem efeito direto no payoff. O jogador 2 toma ação baseada na mensagem do jogador 1. Assim a dinâmica do jogo *Cheap-Talk* é :

1. Uma Natureza escolhe $\theta \in \Theta$ de acordo com a distribuição p.

2. Jogador 1 observa θ e escolhe uma ação, nesse caso, uma mensagem $a_1 \in A_1$

3. Jogador 2 observa a mensagem a_1 e escolhe uma ação $a_2 \in A_2$

4. As funções payoff $v_1(a_2, \theta)$ e $v_2(a_2, \theta)$ são realizadas.

Para ser mais concreto, considere que $\theta \in \Theta \in [0, 1]$ é uniformemente distribuído de forma que ambos jogadores tem conhecimento sobre sua distribuição porém somente o jogador 1 tem conhecimentos de $\theta \in \Theta$, ou seja, o estado real da natureza. De maneira análoga à modelagem anterior, $\theta \in \Theta$ tem uma função similar ao tipo do jogador *Digital Influencer*, contudo a mensagem enviada pelo jogador 1 é o estado da natureza, ou seja, seu tipo. A função payoff de cada jogador é dado por :

$$v_1(a_2, \theta) = -(\theta + b - a_2)^2$$
$$v_2(a_2, \theta) = -(\theta - a_2)^2$$

em que a_i representa a ação do jogador i, θ representa o real estado da natureza e $b > 0$ o viés do jogador 1. Este viés é visto como um custo ao jogador de forma indireta condicionando a_1. Temos que $A_1 = [0, 1]$ e $A_2 = \mathbb{R}$, logo a melhor resposta que maximiza o payoff do jogador 1 é $a_2 = \theta + b$ e a melhor resposta que maximiza o payoff do jogador 2 é $a_2 = \theta$, conforme a figura 5. Dessa maneira, o jogador 1 deseja que o jogador 2 tome uma ação maior que o estado real da natureza, assim a dinâmica do jogo ocorre quando o jogador 2 baseia sua resposta na ação do jogador 1.

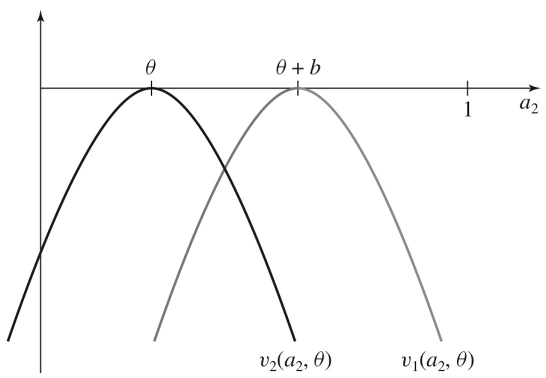

Figura 5 – Payoff no jogo Cheap Talk

Podemos perceber que não existe um equilíbrio verdadeiro nesse jogo, ou seja, em que o jogador 2 confia totalmente na mensagem enviada. Suponha que o jogador 1 reporte o verdadeiro $\theta \in \Theta$. Assim o jogador 2 acredita que $a_1 = \theta$, então $a_2^* = a_1$. Entretanto para o jogador 1, $a_1^* = \theta + b$ caso essa seja a estratégia do jogador 2, logo ele não reporta o estado real da natureza. Assim a estratégia verdadeira não produz equilíbrio.

Apesar disso, existe um equilíbrio em que o jogador 1 não revela qualquer informação sobre Θ e o jogador 2 toma uma decisão que maximiza sua utilidade esperada. Assim, de forma independente de θ,

$$a_1 = a_1^{*B} \in [0,1]$$

e para o jogador 2

$$\begin{aligned}
\max_{a_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[v_2(a_2, \theta)] &= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^1 -(\theta - a_2)^2 \, d\theta \\
&= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} -\frac{1}{3} \cdot (\theta - a_2)^3 \Big|_0^1 \\
&= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} -\frac{1}{3} \cdot (1 - 3a_2 + 3a_2^2) \\
\frac{\partial v_2}{\partial a_2} &= 0 \Rightarrow 1 - 2a_2^* = 0 \\
a_2^* &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Assim basta fazermos a crença do jogador 2 ser tal que a mensagem recebida não seja factível, por exemplo $P\{\theta = \frac{1}{2} | a_1 \neq a_1^*\} = 1$ então sua melhor resposta será $a_2^* = \frac{1}{2}$. Como o jogador 1 é indiferente entre qualquer mensagem pela crença do jogador 2 assim $a_1 = a_1^{*B}$.

Assim um questionamento é se existe um equilíbrio no qual o jogador 1 revela parcialmente o valor de θ ou quanto de informação pode ser revelado com credibilidade ao jogador 2. Este é o ponto principal do modelo de Crawford e Sobel(1982) e o questionamento principal à época da publicação. Suponha que existam duas mensagens a_1'' e a_1'. Logo

$$\forall \theta \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} v_1(a_2(a_1'), \theta) &= -(\theta + b - a_2(a_1'))^2 \\ v_1(a_2(a_1''), \theta) &= -(\theta + b - a_2(a_1''))^2 \end{cases}$$

e que o jogador 2 escolhe $a_2(a_1') < a_2(a_1'')$, desse modo o ganho extra de escolher a_1' a a_1'' é dado $\Delta v_1(\theta) = -(\theta + b - a_2(a_1''))^2 + (\theta + b - a_2(a_1'))^2$, logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta v_1(\theta)}{\partial \theta} &= -2(\theta + b - a_2(a_1'') + 2(\theta + b - a_2(a_1')) \\ &= 2(a_2(a_1'') - a_2(a_1')) > 0\end{aligned}$$

Isso implica que dado um $\theta^\bullet$ o jogador 1 envia a_1'' sobre a_1' dado que $\theta > \theta^\bullet$. Da mesma forma, o jogador 1 envia a_1' sobre a_1'' dado que $\theta < \theta^\bullet$. Assim a estratégia do jogador 1 deve ser

$$a_1 = \begin{cases} a_1' & \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq \theta^\bullet \\ a_1'' & \text{se} \quad \theta^\bullet \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

Dessa maneira, temos uma estratégia para o jogador 1 e a partir dela o jogador 2 define sua estratégia baseado no $\theta^\bullet$ e sabendo que Θ é uniforme. No equilíbrio, sua melhor resposta será maximizar seu payoff esperado, ou seja, $a_2 = \arg\max \mathbb{E}[v_2(a_2, \theta)|a_1]$ em que a_1' leva ao intervalo $[0, \theta^\bullet]$ e a_1'' leva ao intervalo $[\theta^\bullet, 1]$. Portanto

$$\begin{aligned}\arg\max_{a_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[v_2(a_2, \theta)] &= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^{\theta^\bullet} -(\theta - a_2)^2 \, d\theta \\ &= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} -\frac{1}{3} \cdot (\theta - a_2)^3 \Big|_0^{\theta^\bullet} \\ &= \max_{a_2 \in \mathbb{R}} -\frac{1}{3} \cdot ({\theta^\bullet}^3 - 3{\theta^\bullet}^2 a_2 + 3\theta^\bullet a_2^2 - a_2^3 + a_2^3) \\ \frac{\partial v_2}{\partial a_2} &= 0 \Rightarrow {\theta^\bullet}^2 - 2\theta^\bullet a_2^* = 0 \\ a_2^* &= \frac{\theta^\bullet}{2}\end{aligned}$$

a melhor resposta do jogador 2 será $a_2^*(a_1') = \frac{\theta^\bullet}{2}$ e similarmente $a_2^*(a_1'') = \frac{1+\theta^\bullet}{2}$

Quando $\theta = \theta^\bullet$, o jogador 1 fica indiferente entre a_1' e a_1'', assim fazemos seu payoff ser igual para as duas mensagens, logo $v_1(a_2(a_1'), \theta^\bullet) = v_1(a_2(a_1''), \theta^\bullet)$ como $\frac{\theta^\bullet}{2} < \theta^\bullet < \frac{1+\theta^\bullet}{2}$ isso equivale a

$$\begin{aligned}-(\theta^\bullet + b - a_2(a_1'))^2 &= -(\theta^\bullet + b - a_2(a_1''))^2 \\ \theta^\bullet + b - \frac{\theta^\bullet}{2} &= -\theta^\bullet - b + \frac{1 - \theta^\bullet}{2}\end{aligned}$$

$$4\theta^{\bullet} = 1 - 4b.$$

Como $\theta^{\bullet} > 0$, $b < \frac{1}{4}$, ou seja, temos um perfil de ações que levam a uma melhor resposta do jogador 1 de acordo com seu viés. Para completarmos que existe um equilíbrio em um sistema de duas mensagens, devemos criar especificações para ações fora do equilíbrio. Basta fazermos a crença do jogador 2 ser $P\{\theta = \frac{\theta^{\bullet}}{2} | a_1 \neq \{a_1', a_1''\}\} = 1$, assim o jogador 1 se torna indiferente em enviar uma mensagem entre a_1' e qualquer outra mensagem $a_1 \neq \{a_1', a_1''\}$.

Conclui-se que existe um limite para b, caso não existisse, não temos um limite viável para o equilíbrio de duas respostas. O jogador 2 tem um espaço maior de informação quando $a_1 = a_1'$ do que $a_1 = a_1''$ pois $\theta^{\bullet} = \frac{1}{4} - b$ é limitado por b. Assim $[0, \theta^{\bullet}]$ é "menor"que $[\theta^{\bullet}, 1]$ Isso quer dizer que em equilibrio, o jogador 2 tem muito menos certeza sobre o valor de θ quando $a_1 = a_1''$

Uma outra possibilidade de análise seria pensar em ampliar o conjunto de equilíbrio em que ajustamos as preferências do jogador 1, denominaremos Sender, que envia a mensagem de forma que possa escolher uma ação quase ótima, ou seja, uma função utilidade que permite uma escolha fraca entre as ações. Essa definição é descrito por Radner(1980) chamado de *epsilon-equilibrium*.[2] Suponha duas ações $a_i', a_i'' \in A_i$, dizemos que a_i' é fracamente preferível a a_i'' se

$$u_i(a_i') \geq u_i(a_i'') - \varepsilon$$

em que $\varepsilon > 0$ é um parâmetro dado.

Assim, considere um jogo com elementos similares ao jogo *cheap-talk* e acrescentamos a noção de ε-ótimo por parte do Sender. Portanto, seja $\Theta \sim \text{Unif}[0, 1]$ o espaço de tipos e o espaço A_1 de sinais do jogador Sender igual ao espaço de tipos. A dinâmica do jogo ocorre da mesma forma que em *cheap-talk*. O equilíbrio Bayesiano perfeito em estratégias puras será a lista de $(m^*, a_2^*, \mu(\cdot|\cdot))$, em que $m : \Theta \to A_1$ é uma estratégia do Sender, $a_2 : A_1 \to \mathbb{R}$ é uma estratégia do Receiver e $\mu(\theta|m)$ é a probabilidade do Receiver para θ após observar o sinal m, ou seja, um sistema de crenças *a posteriori*, no qual:

1. Para todo $m = m(\theta)$, $a^*(m)$ resolve $\max_{a_2 \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_{\mu(\cdot|m)} u_2(a_2, \theta)$
2. Para todo $\theta \in \Theta$, $m^*(\theta)$ satisfaz $u_1(a^*(m^*(\theta), \theta) \geq \max_{m \in A_2} u_1(a^*, \theta) - \varepsilon$, ou seja a escolha da mensagem enviada pelo Sender pode ficar aquém do ótimo apenas por $\varepsilon > 0$.

[2] O conceito de equilíbrio ε-Nash é usado em um contexto de jogos repetidos do tipo Cournot em que as firmas fica satisfeitas em chegar próximo de sua resposta ótima, ou seja, $\max_a \mathbb{E}u(a, \theta) - \varepsilon$.

3. As crenças atualizadas $\mu(\theta|m)$ após observar a mensagem m são dadas pela regra de Bayes sempre que a mensagem for atingida com probabilidade positiva.

Na análise anterior, existe um equilíbrio biparticional com $\Theta = [0, \theta) \cup [\theta, 1]$ em que a mensagem revela a região em que o θ está sempre que $b < \frac{1}{4}$. Considere agora uma situação em que não temos plena racionalidade no sentido acima. Suponha que tenhamos um valor de corte $\theta \in (0, 1)$ em que $\theta < \theta_1$ implica que $m^*(\theta) = 0$ e $\theta \geq \theta_1$ implica que $m^*(\theta) = 1$

Assim, ao ver a mensagem $m = 0$, o jogador Receiver atualiza suas crenças para $\theta \sim \text{Unif}[0, \theta_1]$ e com isso sua escolha de ação será $\dfrac{\theta_1}{2}$. De maneira análoga, dada a crença atualizada quando $m = 1$ a escolha ótima de ação ao ver essa mensagem é $\dfrac{1+\theta_1}{2}$. Para qualquer outra mensagem m a crença para $m < \theta_1$ é equivalente para $m = 0$ e para $m \geq \theta_1$ é a mesma para $m = 1$.

Considere o problema do Sender. A mensagem $m = 0$ é $\varepsilon-$ótima se

$$u_1(a(0), \theta) \geq \max u_1(a(1), \theta)$$
$$-\left(\frac{\theta_1}{2} - (\theta + b)\right)^2 \geq -\left(\frac{1+\theta_1}{2} - (\theta + b)\right)^2 - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{4} + \frac{\theta_1}{2} - (b - \varepsilon)$$

Se exite um valor máximo $\overline{\theta}_1$ tal que satisfaça a escolha acima, quando θ iguala a tal valor, logo

$$\xrightarrow{\theta = \overline{\theta}_1} \overline{\theta}_1 = \frac{1}{4} + \frac{\theta_1}{2} - (b - \varepsilon)$$
$$\overline{\theta}_1 = \frac{1}{2} - 2(b - \varepsilon).$$

Como $0 < \overline{\theta}_1 < 1$, então $|b - \varepsilon| < \frac{1}{4}$.

De modo análogo, o Sender prefere a mensagem $m = 1$ a $m = 0$ quando

$$u_1(a(1), \theta) \geq \max u_1(a(0), \theta)$$
$$-\left(\frac{1+\theta_1}{2} - (\theta + b)\right)^2 \geq -\left(\frac{\theta_1}{2} - (\theta + b)\right)^2 - \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \theta \geq \frac{1}{4} + \frac{\theta_1}{2} - (b + \varepsilon)$$

Se existe um valor mínimo $\underline{\theta}_1$ tal que satisfaça a escolha acima, quando θ iguala a tal valor, logo

$$\xrightarrow{\theta=\underline{\theta}_1} \underline{\theta}_1 = \frac{1}{4} + \frac{\theta_1}{2} - (b+\varepsilon)$$

$$\underline{\theta}_1 = \frac{1}{2} - 2(b+\varepsilon).$$

Como $0 < \overline{\theta}_1 < 1$, então $|b - (-\varepsilon)| < \frac{1}{4}$. Dado ε e o intervalo $[\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1]$ será não-degenerado quando $\varepsilon > 0$. Ao mesmo tempo, dado ε existem valores de b que satisfazem ao mesmo tempo $|b - \varepsilon| < \frac{1}{4}$ e $|b + \varepsilon| < \frac{1}{4}$. No entanto, a presença de $\varepsilon > 0$ parece restringir ainda mais os valores de b em que é possível encontrar um equilíbrio com esse formato bi-particional quando comparado ao modelo original de Crawford e Sobel, isto é, $-\frac{1}{4} + \varepsilon < b < \frac{1}{4} - \varepsilon$.

Voltando para o caso no qual $\varepsilon = 0$, podemos ainda criar outros limites θ' e θ'', particionando $\Theta = [0, 1]$ em 3 conjuntos. Assim

$$\begin{array}{llllll} a_1' & para & [0,\theta'] & & a_2(a_1') & = & \dfrac{\theta'}{2} \\ a_1'' & para & [\theta',\theta''] & \xrightarrow[resposta]{Melhor} & a_2(a_1'') & = & \dfrac{\theta''+\theta'}{2} \\ a_1''' & para & [\theta'',1] & & a_2(a_1''') & = & \dfrac{1+\theta''}{2} \end{array}$$

e o jogador 1 é indiferente a a_1' e a_1'' quando $\theta = \theta'$, similarmente para a_1'' e a_1''' quando $\theta = \theta''$. Resolvendo o sistema descobrimos que $b < \frac{1}{12}$. Assim concluímos que não importa quão pequeno seja o viés enquanto $b > 0$ não existe um equilíbrio totalmente verdadeiro, ou seja, em que o estado da natureza é totalmente revelado. Em qualquer equilíbrio, deve haver alguma perda de informação que depende do viés. Ainda podemos construir n partições de Θ de forma que existe uma sequencia de $b_2 > b_3 > b_4 > \ldots > b_n$ para $b < b_n$, então existe n equilíbrios Bayesianos em que o conjunto de informação fica menor portanto mais informativo.

4.3 Persuasão Bayesiana

Kamenica e Gentzkow (2011) apresentaram um modelo mais amplo para transmissão de informação. No qual, uma pessoa chamado Sender gostaria de persuadir outra pessoa, chamamos de Receiver. Se o Receiver é perfeitamente Bayesiano racional, pode o Sender persuadir para o Receiver tome uma ação que ele originalmente não tomaria? Se o Receiver sabe que o Sender manipulou as informações para seu benefício, o Receiver ainda pode se beneficiar da persuasão? Se sim, exite uma persuasão ótima?

Essas questões levantadas por Kamenica e Gentzkow (2011) se encaixam perfeitamente no contexto desse trabalho que é a transmissão de informação. O foco do trabalho deles é em quem toma decisões padrão, ou seja, quem entende como a informação é gerada e reage racionalmente (Bayesiano). No processo do jogo da confiança da informação, os estudos são divididos em duas frentes, uma em que temos o *Design* do Mecanismo, ou seja a alocação de informação é dado e o *designer* de informação, agente ativo na transmissão de informação, influencia selecionando o jogo em que os jogadores irá jogar. No exemplo do *digital influencer* e do consumidor, se a Natureza fosse um jogador ativo que escolhe o tipo θ seria o *designer* de informação, em *Cheap Talk* a Natureza age de acordo com a distribuição de probabilidade de Θ ; a segunda abordagem é *Design* de Informação em que temos um ou múltiplos Receiver e o *designer* de informação é um jogador e planejador em que influencia as decisões alocando conjuntos de informação. Se fizermos o Sender comprometer a enviar qualquer conjunto de informação em função do estado do mundo os resultados serão os mesmos que em *Cheap Talk* e ainda aproxima mais do mundo real.

O modelo Básico proposto por Kamenica, o Receiver tem uma função payoff dado por $v_2(a_2, \omega)$ em que $a_2 \in A_2$ é a ação do Receiver e $\omega \in \Omega$ é o estado do mundo. O Sender tem uma função payoff dado por $v_1(a_2, \omega)$ e é o *designer* de informação. Os dois jogadores compartilham um sistema de crenças a priori μ_0 sobre Ω e ,o objetivo chave do modelo de Persuasão Bayesiana, o Sender escolhe um sinal para transmitir.

Seja S um conjunto grande o suficiente de sinais possíveis , para o modelo básico assumimos $|S| \geq \min\{|A|, |\Omega|\}$ e que seja um conjunto finito. Assim definimos um sinal como um mapa do estado do mundo para a distribuição de probabilidade sobre S.

$$\pi : \Omega \to \Delta(S)$$

Em outras palavras, um sinal especifica a relação entre o verdadeiro estado $\omega \in \Omega$ e os dados $s \in S$. Outra forma de definir o sinal é $\pi \in \Delta(\Omega \times S)$ como uma distribuição com os estados e os sinais possíveis, com o requerimento que a marginal distribuição sobre Ω coincida com μ_0.

Assim o jogo segue de acordo:

1. O Sender escolhe o sinal π.

2. O Receiver observa qual sinal foi escolhido pelo Sender.

3. A Natureza escolhe ω de acordo com μ_0.

4. A Natureza escolhe s de acordo com $\pi(\omega)$.

5. O Receiver observa a realização de s.

6. O Receiver toma a ação a_1

O comportamento do Receiver é mecânico. Dado seu conhecimento sobre π, ele usa a lei de Bayes para atualizar sua crença da prior μ_0 para a posterior

$$\mu_\pi(\omega|s) = \frac{\pi(s|w)\mu_0(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega}\pi(s|\omega')\mu_0(\omega')}$$

e busca a melhor resposta $a^*(\mu_\pi(\cdot|s))$ que maximiza $\mathbb{E}_{\omega\sim\mu_\pi(\cdot|s)}v_2(a,\omega)$.

Dado essa estratégia do Receiver, o Sender resolve

$$\max_{\pi\in\Pi}\mathbb{E}_{\omega\sim\mu_0}\mathbb{E}_{s\sim\pi(\omega)}v(a^*(\mu_\pi(\cdot|s)),\omega).$$

De fato,em primeiro lugar, qualquer que seja o sinal escolhido pelo Sender, sua expectativa de payoff é totalmente determinado pela posterior do Receiver. Em particular, se o Receiver mantém a crença μ, então a expectativa de utilidade do Sender é

$$\hat{v}(\mu) = \mathbb{E}_{\omega\sim\mu}v(a^*(\mu),\omega).$$

Segundo, podemos desenhar uma relação entre os sinais e a distribuição da crença. Quando o Sender escolhe algum sinal π, cada realização s do sinal leva a algum posterior $\mu_\pi(\cdot|s)$. Na perspectiva ex ante, entretanto, antes da realização do sinal, podemos pensar π como uma introdução de distribuição de posterior. Denominamos $\tau =< \pi >$ como a distribuição de posterior τ induzida pelo sinal π. e dizemos que uma distribuição de posterior τ é Bayes-plausível se $\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\mu = \mu_0$, ou seja se τ é igual a esperança da prior. Kamenica e Gentzkow (2011) mostram que toda τ Bayes-plausível tem um $\pi \in \Pi$ tal que $\tau =< \pi >$. Assim o problema do Sender é reformulado de acordo com as duas observações como

$$\max_{\tau}\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\hat{v}(\mu)$$

sujeito a $\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\mu = \mu_0$.

O importante dessa formulação da uma interpretação geométrica. O payoff do Sender a partir do sinal que induz alguma crença $\{\mu_l, \mu_h\}$ é a altura do ponto até a interseção com o segmento conectando $\hat{v}(\mu_l)$ e $\hat{v}(\mu_h)$ e a linha vertical de μ_0. Essa observação deixa claro que o sinal binário ótimo é aquele que induz a distribuição dos posterior com o suporte em $\{\mu_l^*, \mu_h^*\}$ pois produz a maior altura entre as curvas.

Portanto, o Sender se beneficia da persuasão se houver uma distribuição Bayes-plausível do posterior τ tal que

$$\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\hat{v}(\mu) > \hat{v}(\mu_0).$$

O valor do sinal ótimo é dado por

$$\max_{\tau} \mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\hat{v}(\mu)$$

sujeito a $\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\mu = \mu_0$.

Contudo, não podemos garantir a existência do sinal ótimo, assim introduzimos a função V no qual

$$V(\mu) \equiv \sup\{z|(\mu, z) \in co(\hat{v})\}$$

em que $co(\hat{v})$ denota o fecho convexo do gráfico de $\hat{v}$. A função $V(\mu)$ é côncava por construção e, de fato, é a menor função concava que é fracamente maior que $\hat{v}$ i.e., $V(\mu_0) \geq \hat{v}(\mu_0)$ para qualquer μ_0 . Portanto, como o conjunto de payoff do Sender em todos os sinais é $V(\mu)$, assim o payoff ótimo do Sender coincide com $V(\mu)$ quando a prior é μ.

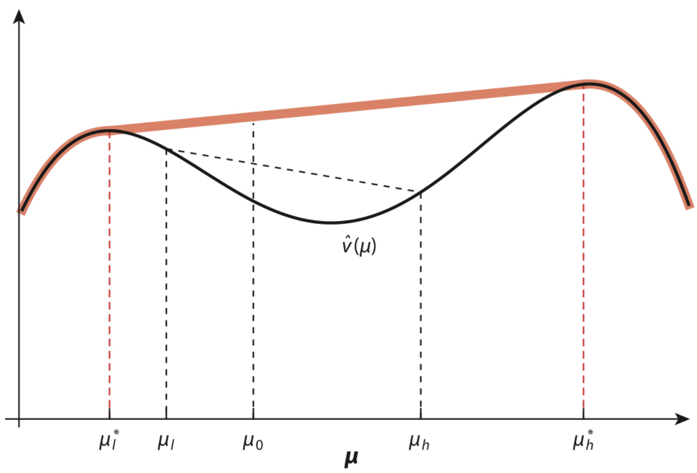

Figura 6 – A função utilidade do Sender e sua concavicação.

Fonte: Kamenica(2019)

Agora podemos analisar o modelo como fizemos no modelo de Crawford e Sobel (1982), no qual relaxamos a racionalidade das escolhas do Sender de forma a estudar o que acontece com o modelo quando envia a mensagem de maneira quase ótima. Usando os mesmos elementos do modelo, quando o Sender não é totalmente racional no sentido de se contentar em estar próximo da escolha otima de sinal, em que a proximidade é mensurada por $\varepsilon > 0$, teríamos a escolha factível de τ satisfazendo

$$\mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\hat{v}(\mu) \geq V(\mu_0) - \varepsilon$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq V(\mu_0) - \mathbb{E}_{\mu\sim\tau}\hat{v}(\mu) \\
&= V\left(\sum_\mu \tau(\mu)\mu\right) - \sum_\mu \tau(\mu)\hat{v}(\mu) \\
&\geq \sum_\mu \tau(\mu)[V(\mu) - \hat{v}(\mu)] \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

em que se segue pela concavidade de V. Por isso, qualquer que seja a escolha de τ potencialmente sub-ótima por causa de ε, o valor da nova função objetivo V_ε estará sempre próxima por ε da função objetivo V que corresponde à racionalidade plena: $|V_\varepsilon(\mu_0) - V(\mu_0)| \leq \varepsilon$ qualquer que seja μ_0. Uma consequência desse fato é dado $\lambda \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon(\lambda\mu + (1-\lambda)\mu') &= V(\lambda\mu + (1-\lambda)\mu') + V_\varepsilon(\lambda\mu + (1-\lambda)\mu') - V(\lambda\mu + (1-\lambda)\mu') \\
&\geq \lambda V(\mu) + (1-\lambda)V(\mu') - \varepsilon \\
&= \lambda[V(\mu) - V_\varepsilon(\mu)] + (1-\lambda)[V(\mu') - V_\varepsilon(\mu')] + \lambda V_\varepsilon(\mu) + (1-\lambda)V_\varepsilon(\mu') - \varepsilon \\
&\geq \lambda V_\varepsilon(\mu) + (1-\lambda)V_\varepsilon(\mu') - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

ou seja, V_ε é $2\varepsilon-$côncava.

5 Considerações finais

Nesse trabalho foi feito uma apresentação dos conceitos iniciais de teoria dos jogos, com a introdução de jogos normais e sequenciais observando sempre seu conceito de solução, no caso equilíbrio de Nash e equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Em seguida é apresentado o modelo em que temos informação incompleta aos agentes do jogo e sua solução dado por equilíbrio Bayesiano Nash, junto com o modelo básico de transmissão de informação chamado jogo de sinalização. Neste, exemplificamos a abordagem pela dinâmica de compra e venda por recomendações e avaliações de produtos e suas soluções são dependentes da distribuição de probabilidade dos seus tipos de forma que uma alta probabilidade não há capacidade do agente Sender de revelar seu verdadeiro tipo, enquanto uma baixa probabilidade leva a um perfil de solução em que o agente Receiver consegue de fato distinguir seu tipo pela mensagem enviada após atualizar suas crenças pela regra de Bayes.

Um terceiro ponto apresentado foi o modelo de transmissão de informação no formato Cheap-talk, em que o jogo leva uma restrição do viés para haver equilíbrio. Há possíveis equilíbrios quando a informação é particionada de forma que haja mais mensagens a ser enviada pelo Sender de acordo com o sinal escolhido pela natureza limitado sempre pelo viés do Sender. Além disso, quando a escolha do Sender é mais relaxada em relação à sua racionalidade plena de forma que possa tomar uma escolha quase ótima, há uma restrição maior ao viés que é a contribuição desse estudo aos trabalhos na área.

Por ultimo foi apresentado um modelo recente de transmissão de informações descrito como Persuasão Bayesiana em que o Sender há ganhos com a persuasão, ou seja, com a transmissão do sinal quando o sua função payoff é concava e assim existe um conjunto de de sinais que induzem um maior ganho para o Sender. Fazendo a mesma modificação a racionalidade plena do Sender, ainda assim conseguimos uma função concava em um sentido mais fraco.

De fato ainda existem questões e aplicações empíricas ao modelo na literatura como testar os exemplos descritos no estudo ou explorar variações do grau de racionalidade dos agentes e seus impactos disso sobre a previsão dos modelos.

Referências Bibliográficas

TADELIS, S. "Game Theory: An Introduction". Economics Books, Princeton University Press, edition 1, number 10001, 2012.

GIBBONS, R. "Game theory for applied economists". Princeton University Press Princeton, N.J, 1992.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. "Microeconomic Theory". New York: Oxford University Press, 1995.

KAMENICA, E.; GENTZKOW, M. "Bayesian persuasion". American Economic Review, v. 101, n. 6, p. 2590–2615, 2011.

KAMENICA, E.; "Bayesian Persuasion and Information Design". Annual Review of Economics, V.11 N.1 P.249-272, 2019.

MASCHLER, M.; SOLAN, E.; ZAMIR, S. "Game Theory". [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

CRAWFORD, V. P.; SOBEL, J. "Strategic Information Transmission". Econometrica. 50 (6): p. 1431–1451, 1982.

RADNER, R. "Collusive behavior in non-cooperative epsilon equilibria of oligopolies with long but finite lives", Journal of Economic Theory, 22, p. 121–157, 1980.