

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise e Modelagem do Comportamento Dinâmico de Cabos Cilíndricos sob Ação de Excitação Transiente

Por,

Marcos Fabrício de Souza Aleixo Filho

Brasília, 5 de dezembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise e Modelagem do Comportamento Dinâmico de Cabos Cilíndricos sob Ação de Excitação Transiente

Por,

Marcos Fabrício de Souza Aleixo Filho

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha (Orientador) _____

Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes _____

Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira _____

Brasília 5 de dezembro de 2019

*“Nada te turbe
Nada te espante
Todo se pasa
Dios no se muda
La paciencia todo lo alcanza
Quien a Dios tiene nada le falta
Solo Dios basta”
(Santa Tereza de Jesus)*

Agradecimentos

Agradeço antes de tudo aos meus pais, Elisângela e Fabrício, e à minha irmã Ísis, por terem me dado tanto amor e carinho durante esta árdua caminhada pela Engenharia Mecânica.

Por aqueles mais envolvidos no trabalho, agradeço primeiramente ao meu orientador prof. Francisco, por toda a orientação e atenção dada durante a pesquisa, que graças a ele terminou com ótimos resultados.

Sou grato também ao prof. Alex, ao prof. Jorge e a toda equipe do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia, que ajudaram com a parte experimental do projeto, destacando o pós doutorando Remy, que sempre foi muito atencioso e gentil quando precisei e por ter sido ele quem me forneceu os dados experimentais que utilizei para gerar os resultados presentes no relatório.

Agradeço aos meus amigos e colegas de pesquisa do grupo Vortex: Yurinho, mestre Filipe, seu Igor e em especial ao Victor Shuma, por ter me ajudado e apoiado em alguns momentos tenebrosos do projeto.

E por fim, sou grato a todos os outros colegas e amigos de curso, em especial ao Vitor Caixeta e ao Paulo Roberto. Sempre foram companheiros e amigos em todos os momentos. Sou grato também pelo apelido carinhoso de Chefe que todos me deram. Espero que por esse trabalho tenha feito jus a ele.

Resumo

O presente trabalho traz um arcabouço teórico sobre o fenômeno da vibração induzida por vórtice que ocorre em corpos de seção circular, como são os cabos de transmissão de energia elétrica, foco principal desse estudo. Disso, alguns modelos foram desenvolvidos para descrever ou aproximar o movimento vibratório induzido por vento de um cabo. Esses modelos são: o oscilador harmônico não linear, o concentrado de um cilindro submetido a um escoamento transversal e o do cabo vibrante. Nos casos em que um parâmetro adimensional muito menor que a unidade estava presente, foi possível obter soluções analíticas pelo método das perturbações. Uma excelente concordância foi observada entre as soluções numéricas e analíticas. Dados experimentais foram coletados em um ensaio de cabo real, para se verificar a vibração ao longo do tempo em pontos específicos do condutor. Ajustando os parâmetros do sistema, o modelo concentrado do oscilador harmônico não linear recuperou muito bem os resultados experimentais. Para determinada condição de excitação e amortecimento, o modelo concentrado do cilindro poderia ser simplificado de maneira a recuperar o modelo concentrado do oscilador harmônico. O modelo do cabo vibrante foi resolvido para o caso homogêneo e com uma excitação do tipo impulso delta de Dirac. Os resultados apresentados foram para pontos específicos ao longo do comprimento do cabo e alguns modos de vibração. Pela dedução das equações governantes, mostrou-se a consistência do modelo contínuo com os concentrados discutidos ao longo do projeto. Para uma tensão pequena aplicada ao cabo, a velocidade de propagação da onda é suficientemente pequena a ponto de se desprezar a derivada segunda em x , recuperando um modelo massa mola amortecedor.

Palavras-chaves: cabos condutores, vibração eólica, esteira de Von Kármán, método das perturbações, modelos concentrados.

Abstract

The present work brings a theoretical investigation of vortex-induced vibration, a phenomenon that commonly occurs in cylindrical bodies subjected to wind, such as electric power transmission lines, which are the main focus of this work. Some models were developed to predict the oscillatory motion of a cable subjected to wind, namely: a non-linear harmonic oscillator, a concentrated cylinder subjected to a transverse flow and a vibrating cable. In the cases where a nondimensional parameter much smaller than unity was present, a perturbation method provided analytical solutions for the models. An excellent agreement was found between the analytical and numerical solutions. An experimental setup was used to measure the time-response of a real transmission cable at different longitudinal positions. Adjusting the system parameters, the non-linear harmonic oscillator successfully recovered the experimental results. For the adequate condition of damping and excitation, it was observed that with some simplifications the concentrated cylinder model recovered the non-linear harmonic oscillator model. The vibrating cable model was solved for the homogeneous case and for a Dirac's impulse excitation. The results are presented for discrete longitudinal points through the cable, as well as some vibrating modes. From the governing equations, the consistency between the continuous model and the concentrated ones was shown. For a small tension applied to the cable, the wave propagation velocity is sufficiently small, allowing to ignore the second derivative of x and thus recovering a mass-spring-damper system.

Key-words: conductive cables, wind vibration, Von Kármán vortex shedding, perturbation method, concentrated models.

Lista de Figuras

Figura 1 – Foto ilustrativa de uma esteira de vórtices em um escoamento entorno de um cilindro (DYKE; DYKE, 1982).	1
Figura 2 – Imagem ilustrativa de linhas de transmissão de energia elétrica.	2
Figura 3 – Bancada para ensaio de cabos (cortesia do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia - Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília).	2
Figura 4 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,01$	9
Figura 5 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,1$	9
Figura 6 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,5$	10
Figura 7 – Comparação das respostas analítica e aproximada para diferentes valores de ε e tempo adimensional fixo de 2.	11
Figura 8 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,01$	14
Figura 9 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,1$	14
Figura 10 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,5$	15
Figura 11 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,01$	17
Figura 12 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,1$	17
Figura 13 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,5$	18
Figura 14 – Comparação de fases com $t^* = 12,6$ e ε variando.	19
Figura 15 – Comparação de fases com $t^* = 50$ e ε variando.	19
Figura 16 – Comparação de fases com $t^* = 100$ e ε variando.	20
Figura 17 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 12,6$	21
Figura 18 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 50$	21
Figura 19 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 100$	22

Figura 20 – Esquema do oscilador harmônico.	26
Figura 21 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 0,01$ e $\omega^* = 3$	29
Figura 22 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 1$ e $\omega^* = 3$	30
Figura 23 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 10$ e $\omega^* = 3$	30
Figura 24 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear para $\varepsilon = 1$	32
Figura 25 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear para $\varepsilon = 10$	32
Figura 26 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 1$ e $\varepsilon = 1$	33
Figura 27 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 10$ e $\varepsilon = 10$	34
Figura 28 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 100$ e $\varepsilon = 100$	34
Figura 29 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 0,01$ e $\varepsilon = 1$	35
Figura 30 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 0,01$ e $\varepsilon = 10$	36
Figura 31 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 1$ e $\varepsilon = 10$	36
Figura 32 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 10$, $\varepsilon = 10$ e $\zeta = 0,5$	37
Figura 33 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 10$, $\varepsilon = 10$ e $\zeta = 1$	38

Figura 34 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$ e $\zeta = 0,5$.	39
Figura 35 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 1$ e $\omega^* = 2$.	39
Figura 36 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 1$ e $\omega^* = 9$.	40
Figura 37 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 5$ e $\omega^* = 9$.	41
Figura 38 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 9$ e $\omega^* = 9$.	41
Figura 39 – Representação esquemática da bancada de ensaios.	44
Figura 40 – Talha de alavanca ancorada ao bloco fixo (ROCHA, 2006).	44
Figura 41 – Braço de alavanca (ROCHA, 2006).	45
Figura 42 – Da esquerda para a direita: célula de carga, grampo de ancoragem e polia de apoio.	45
Figura 43 – Grampo CGS.	47
Figura 44 – <i>Shaker</i> eletromecânico.	48
Figura 45 – Cabo enrolado na bobina (MIRANDA, 2017).	49
Figura 46 – Polias de apoio.	49
Figura 47 – Grampo CGS montado à bancada.	50
Figura 48 – Aplicação de pré carga usando tifor (ROCHA, 2006).	50
Figura 49 – Sistema de tracionamento do cabo por braço de alavanca (MIRANDA, 2017).	51
Figura 50 – Esquema da instrumentação dos acelerômetros sobre o cabo.	52
Figura 51 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1.	55
Figura 52 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1.	55
Figura 53 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,6 mm no acelerômetro 1.	56
Figura 54 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1.	56

Figura 55 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1	57
Figura 56 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1	57
Figura 57 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1	58
Figura 58 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1	58
Figura 59 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1	59
Figura 60 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1	59
Figura 61 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1	60
Figura 62 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,6 mm no acelerômetro 1	60
Figura 63 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1	61
Figura 64 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1	61
Figura 65 – Resultado para $\beta = 0,007$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$	63
Figura 66 – Resultado para $\beta = 0,015$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$	64
Figura 67 – Resultado para $\beta = 0,022$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$	64
Figura 68 – Resultado para $\beta = 0,03$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$	65
Figura 69 – Resultado para $\beta = 0,038$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$	65
Figura 70 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 15% do limite de ruptura aplicado no cabo.	66
Figura 71 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 20% do limite de ruptura aplicado no cabo.	67
Figura 72 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 25% do limite de ruptura aplicado no cabo.	67
Figura 73 – Formação das esteiras de Von Kármán em um escoamento de $Re = 140$ (DYKE; DYKE, 1982).	70
Figura 74 – Várias configurações das esteiras de Von Kármán em função do número de Reynolds.	71
Figura 75 – Modelo concentrado de um cilindro suspenso por quatro molas e submetido a um escoamento laminar de velocidade U	72
Figura 76 – Modelo massa mola simplificando o sistema concentrado do cilindro.	73
Figura 77 – Resposta do modelo concentrado do cilindro para o caso subamortecido e parâmetro $\varepsilon = 0,01$	77

Figura 78 – Resposta do modelo concentrado do cilindro para o caso crítico amortecido e $\varepsilon = 0,01$	78
Figura 79 – Resposta do modelo concentrado com excitação eólica para o caso de $\varepsilon = 0,01$ e superamortecido.	79
Figura 80 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de subamortecimento.	80
Figura 81 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de amortecimento crítico.	81
Figura 82 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de super amortecimento.	81
Figura 83 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 7$ e $\gamma = 0,1$	84
Figura 84 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 15$, $\alpha_1 = 15$, $\alpha_2 = 15$ e $\gamma = 1$	84
Figura 85 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 22$, $\alpha_1 = 22$, $\alpha_2 = 22$ e $\gamma = 1$	85
Figura 86 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 30$, $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 30$ e $\gamma = 1$	85
Figura 87 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 38$, $\alpha_1 = 38$, $\alpha_2 = 38$ e $\gamma = 1$	86
Figura 88 – Diagrama de corpo livre da corda vibrante.	88
Figura 89 – Diagrama de corpo livre do cabo vibrante.	90
Figura 90 – Condição inicial para o cabo vibrante.	94
Figura 91 – Respostas no ponto 0,5 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	97
Figura 92 – Respostas no ponto 0,25 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	97
Figura 93 – Respostas no ponto 0,167 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	98
Figura 94 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 37. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	99
Figura 95 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 500. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	99
Figura 96 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 624. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	100
Figura 97 – Respostas no ponto 0,5 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	102
Figura 98 – Respostas no ponto 0,2 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	103
Figura 99 – Respostas no ponto 0,05 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	103
Figura 100 – Forma da corda vibrante excitada por impulso no tempo adimensional de 500. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.	104

Figura 101 – Forma da corda vibrante excitada por impulso no tempo adimensional
de 62. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos. 104

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Tabela com valores das respostas e erros associados para cada ε	11
Tabela 2 – Erro entre a resposta aproximada sem o método de Poincaré-Lindstedt e a numérica para tempo fixo de 12,6.	23
Tabela 3 – Erro entre a resposta aproximada pelo método de Poincaré-Lindstedt e a numérica para tempo fixo de 12,6.	23
Tabela 4 – Tabela com as propriedades relevantes do condutor.	46
Tabela 5 – Tabela com algumas propriedades do grampo de ancoragem.	47
Tabela 6 – Tabela relacionando nível de tensão aplicada sobre o condutor, valores de Y_b , locação dos acelerômetros e frequência de excitação.	53
Tabela 7 – Valores de β correspondentes a amplitude de controle no acelerômetro 1	62
Tabela 8 – Tabela com os parâmetros do modelo concentrado calculados a partir dos dados do cabo usado nos experimentos.	83
Tabela 9 – Valores de α correspondentes a amplitude de excitação adimensional .	83
Tabela 10 – Amplitudes máximas alcançadas pelos dois modelos concentrados. . . .	86
Tabela 11 – Tabela com os valores dos parâmetros do cabo usado nos experimentos para calcular $\frac{EI}{L^2T}$	92
Tabela 12 – Tabela com os valores calculados de c^* a partir dos parâmetros do cabo usado no ensaio experimental.	96

Lista de abreviaturas e siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
VIV	Vibração Induzida por Vórtice (<i>Vortex-Induced Vibration</i>)
FIV	Vibração Induzida por Escoamento (<i>Flow-Induced Vibration</i>)
MIE	Excitação Induzida por Movimento (<i>Movement Induced Excitation</i>)
RWIV	Vibração Induzida por Chuva de Vento (<i>Rain-Wind Induced Vibration</i>)
FFT	Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>)
UTS	Limite de Ruptura (<i>Ultimate Tensile Strength</i>)
CGS	<i>Cushion Grip Suspensions</i>

Lista de símbolos

α	Coefficientes empíricos do polinômio que define C_L
β	Amplitude adimensional da excitação harmônica
δ	Deslocamento vertical adimensional
δ_d	Delta de Dirac
ϕ	Ângulo de fase
ε	Parâmetro adimensional da expansão assintótica
γ	Densidade linear
ζ	Coefficiente de amortecimento
ν	Viscosidade cinemática
ω^*	Frequência adimensional
ω_r	Razão entre a frequência de espalhamento de vórtices a natural do sistema do cilindro
ω_n	Frequência natural
ω_s	Frequência de espalhamento de vórtices
Ω	Frequência de excitação
θ	Ângulo
τ	Variável adimensional do tempo
π	Número Pi (=3,14...)
ρ	Massa específica
ρ_{ar}	Massa específica do ar
ρ_{cil}	Massa específica do cilindro
ρ_{cabo}	Massa específica do cabo

A	Deslocamento inicial Amplitude da excitação harmônica
C_L	Coefficiente de sustentação adimensional para o problema do cilindro
c^*	Velocidade adimensional de propagação da onda na corda
Re	Número de Reynolds
Sh	Número de Strouhal
v^*	Velocidade adimensional
t^*	Tempo adimensional
x^*	Posição horizontal adimensional
a	Raio do cilindro
C	Amortecimento
c	Velocidade de propagação da onda ao longo do comprimento
E	Módulo de Elasticidade
h	Densidade linear de forças externas atuantes na corda
I	Momento de inércia
L	Comprimento
k	Coefficiente elástico
k^*	Coefficiente elástico não linear
k_{eq}	Coefficiente elástico equivalente
k_{mola}	Coefficiente elástico da mola
M	Momento fletor
m	Massa
v	Velocidade adimensional
T	Forças de tração sobre um cabo
t	Tempo
U	Velocidade do escoamento
u	Velocidade adimensional para o oscilador não linear
x	Posição horizontal no plano cartesiano

y	Posição vertical no plano cartesiano
∇	Operador nabla

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Tipo de vibração em linhas de transmissão	3
1.1.1	Oscilações de sub-linhas	3
1.1.2	Galope	3
1.1.3	Vibrações eólicas	3
1.2	Objetivos	4
1.3	Metodologia	4
1.4	Estrutura do Relatório	5
2	ESTUDO DO MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES	6
2.1	Método das Perturbações	6
2.2	Movimento em meio resistivo	7
2.3	Oscilador não linear	12
2.3.1	Aplicando o método das perturbações	12
2.3.2	Método Poincaré-Lindstedt	15
2.3.3	Comparação do método das perturbações sem e com Poincaré-Lindstedt	20
3	MODELO CONCENTRADO - OSCILADOR NÃO LINEAR COM FORÇAMENTO HARMÔNICO	25
3.1	Equacionamento do modelo e adimensionalização	25
3.2	Metodologia	27
3.3	Runge-Kutta de 4ª ordem para solucionar o oscilador não linear amortecido	27
3.4	Resultados e análise	28
3.4.1	Análise do oscilador linear não amortecido com forçamento externo	28
3.4.2	Análise do oscilador não linear não amortecido	31
3.4.3	Análise do oscilador não linear não amortecido com forçamento externo	32
3.4.4	Análise do oscilador não linear amortecido e forçado	37
3.4.4.1	Caso subamortecido	37
3.4.4.2	Caso criticamente amortecido	38

3.4.4.3	Caso superamortecido	40
4	METODOLOGIA EXPERIMENTAL	43
4.1	Bancada Experimental	43
4.2	Materiais Utilizados no Ensaio	46
4.2.1	Cabo condutor	46
4.2.2	Grampo de suspensão	46
4.2.3	Grampo de Ancoragem	47
4.2.4	<i>Shaker</i> Eletromecânico	47
4.2.5	Sensores	48
4.3	Procedimento Experimental	48
4.3.1	Montagem da amostra	48
4.3.2	Metodologia experimental	51
5	RESULTADOS EXPERIMENTAIS E COMPARAÇÃO COM O MODELO CONCENTRADO	54
5.1	Resultados a partir dos dados experimentais do cabo	54
5.2	Resultados do modelo concentrado ajustado aos parâmetros do cabo	63
5.3	Comparando o modelo concentrado e os resultados experimentais	66
6	MODELO CONCENTRADO DO MOVIMENTO VIBRATÓ- RIO DE UM CILINDRO SUBMETIDO A UM ESCOAMENTO EÓLICO	69
6.1	Vibração induzida por vórtices (VIV)	69
6.2	Modelo do cilindro submetido a um escoamento transversal	72
6.3	Solução pelo método das perturbações	75
6.4	Excitação eólica como polinômio de segunda ordem	79
6.5	Soluções do modelo concentrado do cilindro usando parâmetros de cabos reais	82
7	MODELO DO CABO VIBRANTE	87
7.1	Equação da onda	87
7.2	Equação do movimento vibratório do cabo	89
7.3	Solução da equação do cabo vibrante no caso homogêneo	93
7.3.1	Resultados gráficos para a solução homogênea do problema do cabo vibrante	96
7.4	Solução da equação do cabo vibrante no caso de haver uma exci- tação do tipo impulso delta de Dirac	100
7.4.1	Resultados gráficos para a solução do problema do cabo vibrante excitado com uma função impulso	102
8	CONCLUSÕES	106
8.1	Sugestões para trabalhos futuros	107

REFERÊNCIAS	109
ANEXOS	111
ANEXO A – CÁLCULOS PARA A SOLUÇÃO EXATA DO PROBLEMA DE UMA PARTÍCULA EM MEIO RESISTIVO	112
ANEXO B – CÁLCULOS PARA ENCONTRAR A SOLUÇÃO DA EDO ORIUNDA DA EXPANSÃO ASSINTÓTICA PARA O PROBLEMA DO OSCILADOR NÃO LINEAR . . .	114
ANEXO C – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O FORÇADOR HARMÔNICO LINEAR	116

1 INTRODUÇÃO

Estruturas de seção circular são comumente submetidas a esforços cíclicos causados por um escoamento transversal. Por causa do descolamento da camada limite a jusante do corpo, uma esteira de vórtices de Kármán ocorre (Fig. 1). Sua configuração alternada é responsável por um forçamento periódico na estrutura. A emissão desses vórtices é mais forte na faixa do número de Reynolds (Re) de aproximadamente 60 a 500 (RAO, 2009) e (DALTON, 2013).

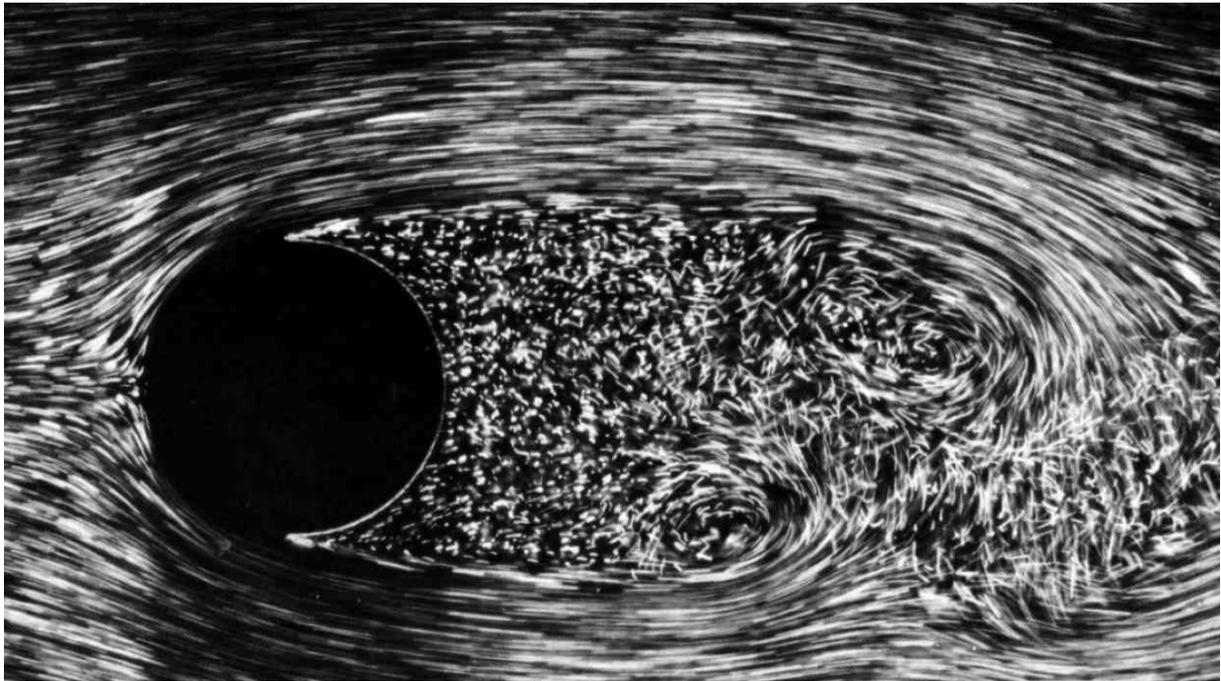


Figura 1 – Foto ilustrativa de uma esteira de vórtices em um escoamento entorno de um cilindro (DYKE; DYKE, 1982).

Esse fenômeno de interação estrutura e esteira de vórtices é de extremo interesse em diferentes campos da engenharia. Sua relevância pode ser notada, por exemplo, em tubos de transferência de calor; tubos ascendentes de transporte de óleo de reservatórios a alto mar até a superfície; periscópios submarinos; pontes e cabos de transmissão de energia elétrica. Este último caso é o de interesse do atual projeto e é de extrema importância, uma vez que as vibrações eólicas podem provocar excitação nos cabos de frequência próxima a natural, levando a falha por fadiga da estrutura, geralmente na região de fixação dos cabos às torres de transmissão (Fig. 2) ou grampos de apoio.



Figura 2 – Imagem ilustrativa de linhas de transmissão de energia elétrica.

Diversos estudos já foram realizados para investigar o problema, abordando diferentes tipos de metodologia. Para citar algumas delas, destaca-se: a) o estudo do modelo concentrado do cabo por um cilindro, fixado na extremidade por quatro molas, submetido a um escoamento transversal de ar em túnel de vento (GARCIA; CUNHA, 2007); b) a simulação de cabos reais em uma bancada de ensaios, como a ilustrada na Fig. 3, que possui excitadores eletromecânicos (*shakes*) que excitam o cabo com um forçamento programável em computador (MIRANDA, 2017). Esses experimentos são muito utilizados para verificar a característica da fratura que leva o cabo ao rompimento e seu tempo de vida de fadiga.



Figura 3 – Bancada para ensaio de cabos (cortesia do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia - Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília).

1.1 Tipo de vibração em linhas de transmissão

Segundo (HADULLA, 2000), existem três tipos principais de oscilação em redes de transmissão elétrica causados por ação do vento. São elas: oscilações de sub-linhas, galope e vibrações eólicas.

1.1.1 Oscilações de sub-linhas

Oscilações de sub-linhas ocorrem somente em feixes de cabos, de forma que o cabo central oscila devido ao escoamento não homogêneo provocado pelos cabos anteriores. A frequência de excitação desse tipo de oscilação está entre 1 e 15 Hz e o comprimento de onda é da ordem de grandeza da distância entre um condutor e outro. Os ventos que provocam essa espécie de oscilação possuem velocidade na faixa de 4 a 18 m/s e podem causar diferentes tipos de modos de oscilação. A amplitude de oscilação depende do modo de oscilação e pode alcançar até metade da distância entre os condutores, chegando a causar o rompimento deles. Oscilações de sub-linhas são consideradas como vibrações induzidas pelo escoamento (FIV).

1.1.2 Galope

Oscilações por galope ocorrem quando há formação de gelo entorno do condutor, o que modifica o perfil da seção transversal, que é aerodinamicamente instável e assimétrico. Nesse perfil, uma força aerodinâmica transversal e não estacionária age na direção de movimento do cabo, excitando-o continuamente, podendo levar o cabo ao rompimento quando atinge altas amplitudes de oscilação. Os ventos que causam esse tipo de oscilação atingem velocidades na faixa de 6 a 25 m/s, causando oscilações de frequência menores que 1 Hz. Galope de um condutor é considerada como FIV com excitação induzida por movimento (MIE).

1.1.3 Vibrações eólicas

Vibrações eólicas ocorrem quando os ventos apresentam estrutura laminar e alcançam velocidades entre 5 m/s e 10 m/s. São caracterizadas por um movimento de baixa amplitude e alta frequência, tipicamente entre 5 a 100 Hz, e as amplitudes de vibração podem chegar a ser da mesma ordem do diâmetro do cabo. Segundo (MEIER-WINDHORST, 1939) e (CIGRE, 1998), essas vibrações pertencem ao grupo de vibrações induzida por vórtice (VIV) e é de interesse no trabalho.

Existem ainda outros tipos de vibrações induzidas por ventos em cabos, cujos fenômenos físicos envolvidos são mais complexos, como as vibrações induzidas por chuva

de vento (RWIV). Esse fenômeno é investigado por (JING et al., 2017) e (SEIDEL; DINKLER, 2006), o qual consiste em uma combinação do efeito de galope com a excitação causada pela emissão de vórtices. O perfil formado pela película de água ao redor do cabo é aerodinamicamente instável e varia à medida que os vórtices são formados, tornando o problema difícil de se descrever.

1.2 Objetivos

O presente projeto tem por objetivo estudar a dinâmica da oscilação de cabos transmissores de energia elétrica por meio de modelos concentrados que possam capturar bem o fenômeno oscilatório em um ponto do condutor.

Os objetivos específicos são:

- Obter soluções analíticas aproximadas para valores de um parâmetro adimensional muito menor que a unidade;
- Estudar o modelo do oscilador harmônico não linear em condições que variam de lineares para altamente não lineares;
- Realizar o estudo de um modelo mais completo de equação de onda.

1.3 Metodologia

Para a realização dos objetivos, seguiram-se as seguintes metodologias:

- Estudar o método das perturbações para aplicá-lo aos modelos concentrados propostos;
- Gerar soluções usando um método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem para o modelo concentrado do oscilador harmônico não linear;
- Obter dados experimentais de deslocamento por tempo em pontos específicos de um cabo real, na bancada de ensaios do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores de Energia, da Universidade de Brasília, para depois poder ajustar o modelo concentrado do oscilador harmônico não linear e obter respostas que se aproximem do observado experimentalmente;
- Propor um modelo concentrado de oscilador harmônico com uma excitação externa do tipo eólica, obtido a partir do modelo de um cilindro submetido a um escoamento laminar transversal de velocidade U ;
- Estudar esse modelo do cilindro utilizando parâmetros reais do cabo ensaiado nos experimentos;

- Por fim, desenvolver um modelo mais completo de cabo vibrante e obter a solução para o caso homogêneo e para quando existir uma excitação externa.

1.4 Estrutura do Relatório

O relatório começa introduzindo, no Capítulo 2, o estudo que se realizou sobre o método das perturbações, para poder aplicá-lo ao modelo concentrado do oscilador harmônico não linear, o qual é bastante explorado no Capítulo 3. No Capítulo 4, descreve-se a metodologia experimental do ensaio de cabos do qual se aproveitou os dados de deslocamento por tempo, que foram tratados e discutidos no Capítulo 5, em que também se ajusta o modelo concentrado a condições próximas à experimental, gerando-se resultados que foram comparados aos experimentais.

Depois, é proposto no Capítulo 6 o modelo concentrado derivado do problema de um cilindro suspenso por quatro molas e submetido a um escoamento transversal. Essa parte é a que tem relação mais estreita com o fenômeno de vibrações eólicas. O trabalho então se encerra nos capítulos 7 e 8, propondo-se o modelo do cabo vibrante, obtendo soluções em dois casos diferentes do problema, e tecendo considerações e conclusões finais, além de propostas para futuros trabalhos que sigam essa linha de estudo da dinâmica da oscilação em cabos de transmissão de energia elétrica.

2 Estudo do método das perturbações

Nesse capítulo, é descrito o estudo que se realizou a respeito do método das perturbações utilizando dois problemas: o de uma partícula se movendo em um meio resistivo e outro de um oscilador harmônico não linear. O objetivo é se familiarizar com a aplicação do método para depois usá-lo na solução do modelo concentrado do cilindro submetido a um escoamento transversal. O modelo do oscilador não linear permite também aplicar o método de Poincaré-Lindstedt, que vem a complementar o método assintótico quando este apresenta uma solução que diverge rapidamente da resposta exata do problema. Além disso, esse modelo servirá de base para se construir um mais completo, adicionando-se uma excitação externa e um amortecimento.

2.1 Método das Perturbações

O método das perturbações é possível quando existe, no problema, algum parâmetro pequeno (HINCH, 1991). Esse método de aproximação analítico vem complementar os métodos numéricos, como por exemplo o Runge-Kutta (adotado no projeto), a partir do momento que os validam para boas aproximações, como se há de demonstrar. É um método largamente utilizado em diversas situações, desde a solução de equações algébricas até problemas de camada limite, em Mecânica dos Fluidos (DYKE, 1964). Para ilustrar o procedimento do método, suponha a seguinte equação diferencial

$$F(t, y, y', y'', \varepsilon) = 0, \quad t \in I, \quad (2.1)$$

em que t é a variável independente, I é um intervalo do domínio, y é a variável dependente e ε é um parâmetro explícito muito menor que a unidade, ou seja, $\varepsilon \ll 1$. O método também admite parâmetros grandes, como $\lambda \gg 1$, fazendo-se $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Assim sendo, é possível fazer uma expansão assintótica da solução (HINCH, 1991), que consiste em fazer

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \varepsilon^n = y_0(t) + y_1(t) \varepsilon + y_2(t) \varepsilon^2 + \dots \quad (2.2)$$

Considerando-se essa a solução da equação diferencial, chega-se aos termos y_0, y_1, y_2, \dots se substituindo (2.2) em (2.1). Em geral, os primeiros termos da série são suficientes para uma boa aproximação, uma vez que se assume ε como um número arbitrário muito menor que a unidade, o que faz com que os termos de ordem mais alta de (2.2) tendam a zero. O termo y_0 da série é chamado de principal, dado que é a solução do problema não perturbado, ou seja,

$$F(t, y, y', y'', 0) = 0, \quad t \in I, \quad (2.3)$$

em que $\varepsilon = 0$. Os demais termos $\varepsilon y_1, \varepsilon^2 y_2, \dots$ são de ordem alta e tendem a ser pequenos.

Uma abordagem somente pelo método das perturbações, em alguns casos, não é suficiente para se chegar a uma boa aproximação, podendo-se até chegar em uma aproximação falha. Isso pode acontecer caso o termo principal esteja mal colocado ou se a solução é válida em um intervalo restrito do domínio. Com isso, é necessário alterar a abordagem do problema por outros caminhos, que pertencem à classe de perturbação regular. O método Poincaré-Lindstedt (LOGAN, 2013) é uma dessas formas alternativas abordada na seção 2.3.2.

Em suma, o método das perturbações traz uma solução aproximada de problemas com algum parâmetro pequeno, muito menor que a unidade, através de uma expansão assintótica, cujos primeiros termos são, em geral, suficientes para uma boa aproximação.

2.2 Movimento em meio resistivo

O modelo proposto nessa seção é somente um ponto de partida para o estudo do método assintótico, não tendo uma relação física com o objeto principal do projeto, que é o estudo da dinâmica da oscilação em cabos de rede elétrica quando submetidos a excitações externas. Foi um treinamento que se realizou para se entender melhor o método das perturbações e sua aplicação, para posteriormente usá-lo nos modelos que realmente têm relação com o problema principal da pesquisa.

Posto isso, o problema consiste em uma partícula de massa m se movendo com velocidade inicial V_0 em um meio resistivo, cujas forças viscosas apresentam magnitude de $av - bv^2$, em que $v = v(t)$ é a velocidade do objeto ao longo do tempo t . As constantes a e b são arbitrárias e para o problema escolheu-se $b \ll a$, implicando que a parcela não linear da força é muito menor que a linear. Pela Segunda Lei de Newton, a equação governante é expressa por:

$$m \frac{dv}{dt} = -av + bv^2; \quad v(0) = V_0 \quad (2.4)$$

Para adimensionalizar a equação, determinou-se os parâmetros característicos como sendo: $v_c = V_0$ e $t_c = \frac{m}{a}$. Assim as variáveis adimensionais ficam na forma:

$$v^* = \frac{v}{V_0}; \quad t^* = \frac{t}{\frac{m}{a}}$$

Substituindo em (2.4), tem-se:

$$\frac{dv^*}{dt^*} = -v^* + \varepsilon v^{*2}, \quad t^* > 0, \quad v^*(0) = 1, \quad (2.5)$$

em que $\varepsilon \equiv \frac{bV_0}{a} \ll 1$.

A equação diferencial (2.5) pode ser resolvida analiticamente, chegando-se à solução exata (Anexo A):

$$v_{ex}^* = \frac{e^{-t^*}}{1 + \varepsilon(e^{-t^*} - 1)}. \quad (2.6)$$

Mas pela presença do termo ε , que pode ser muito menor que a unidade, é possível utilizar o método da perturbação para achar uma solução aproximada e avaliar para quais valores de ε a aproximação seria satisfatória.

Aplicando o método da perturbação, segue:

$$v^* = v_0^*(t^*) + \varepsilon v_1^*(t^*) + \varepsilon^2 v_2^*(t^*) + \dots \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.5) (tanto na equação diferencial quanto na condição inicial), tem-se

$$\dot{v}_0^* + \varepsilon \dot{v}_1^* + \varepsilon^2 \dot{v}_2^* + \dots = -(v_0^* + \varepsilon v_1^* + \varepsilon^2 v_2^* + \dots) + \varepsilon (v_0^* + \varepsilon v_1^* + \varepsilon^2 v_2^* + \dots)^2 \quad (2.8)$$

cujos termos podem ser separados de acordo com as potências de ε , gerando o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{v}_0^* = -v_0^*, \quad (2.9)$$

$$\dot{v}_1^* = -v_1^* + v_0^{*2}, \quad (2.10)$$

$$\dot{v}_2^* = -v_2^* + 2\dot{v}_0^* v_1^*, \dots \quad (2.11)$$

As condições iniciais ficam,

$$v_0^*(0) + \varepsilon v_1^*(0) + \varepsilon^2 v_2^*(0) + \dots = 1, \quad (2.12)$$

no que implica

$$v_0^*(0) = 1, \quad (2.13)$$

$$v_1^*(0) = v_2^*(0) = \dots = 0. \quad (2.14)$$

Assim, basta resolver as três equações diferenciais separadamente, cujas soluções compõem a solução aproximada para $O(\varepsilon^2)$,

$$v_{approx}^* = e^{-t^*} + \varepsilon(e^{-t^*} - e^{-2t^*}) + \varepsilon^2(e^{-t^*} - 2e^{-2t^*} + e^{-3t^*}) \quad (2.15)$$

Expandindo-se (2.6) em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, chega-se à conclusão de que (2.15) corresponde aos três primeiros termos desta expansão. Assim, o erro entre as duas soluções seria dado por:

$$v_{ex}^* - v_{aprox}^* = m_1(t)\varepsilon^3 + m_2(t)\varepsilon^4 + \dots, \quad t > 0, \quad (2.16)$$

em que m_1 e m_2 são funções relacionadas às ordens 3 e 4 de ε . A partir de (2.16), observa-se que à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, para um tempo adimensional fixado, ε^3 tende a zero muito mais rápido, no que implica em um erro muito pequeno. Porém, se ε se aproxima da unidade, o erro deixa de ser desprezível.

A fim de se observar graficamente o comportamento das respostas exata (solução analítica) e aproximada (solução pelo método das perturbações) para $\varepsilon \ll 1$ e $\varepsilon \rightarrow 1$, plotou-se 3 gráficos, comparando-se as duas respostas para $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,5$.

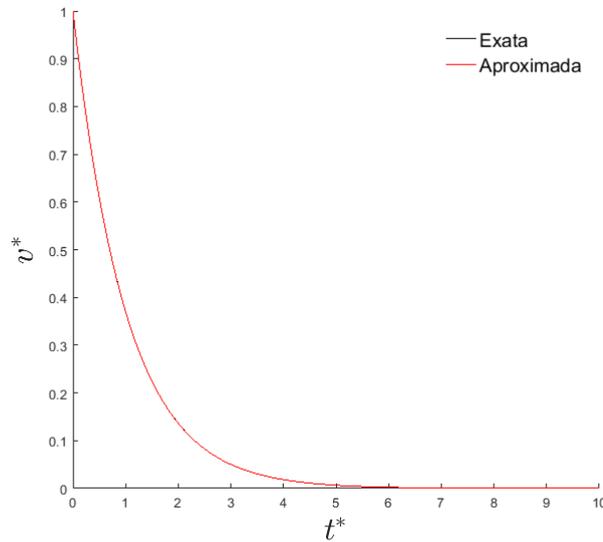


Figura 4 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,01$.

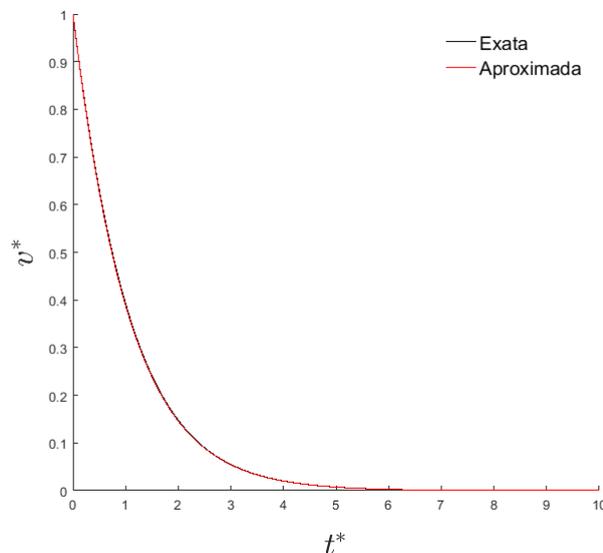


Figura 5 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,1$.

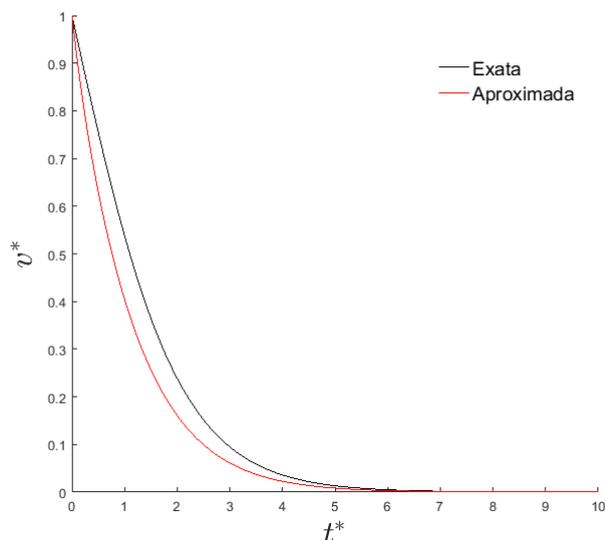


Figura 6 – Comparação das respostas exata e aproximada para $\varepsilon = 0,5$.

Observa-se que, na Figura 6, as duas soluções já se distanciam bastante, enquanto que nas Figuras 4 e 5 a diferença é quase imperceptível.

A partir desses gráficos já foi possível evidenciar que, à medida que ε se aproxima da unidade, o método da perturbação se torna inválido, fazendo-se necessário o uso da resposta analítica para resolver o problema.

Para evidenciar a diferença entre a solução dada pelo método e a analítica, plotou-se um gráfico que compara as duas soluções para valores crescentes de ε , em um tempo adimensional fixado. Foi também elaborado um Runge-Kutta de 4^a ordem, no Matlab, para obter uma solução numérica do problema e mostrar que o código elaborado foi consistente, validando seu uso para os próximos problemas. O método foi calibrado a partir da resposta exata, verificando-se qual passo de tempo seria suficiente para gerar bons resultados. Assim, o Runge-Kutta foi elaborado com passo de tempo adimensional de 0,1.

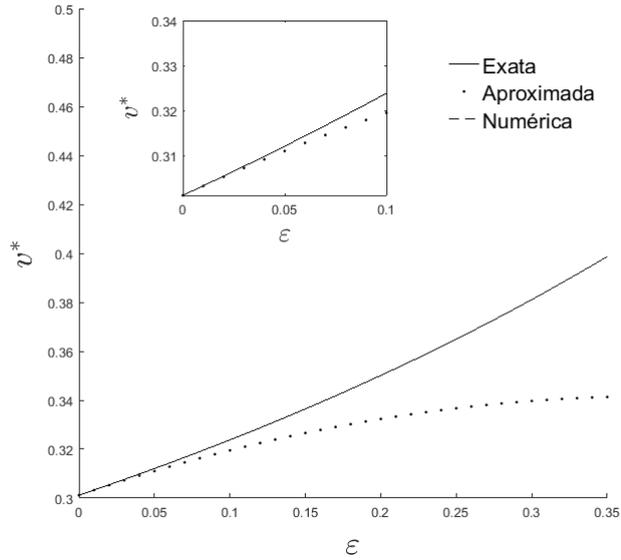


Figura 7 – Comparação das respostas analítica e aproximada para diferentes valores de ε e tempo adimensional fixo de 2.

Pela Figura 7, nota-se novamente que quanto maior ε , as duas respostas se distanciam. Também, a solução numérica não diverge para qualquer ε da solução exata, validando o método numérico. A partir dos dados pelos quais se gerou o gráfico, é possível aferir o erro entre as duas soluções. Com isso, a Tabela 1 foi montada, apresentando-se, para alguns valores de ε , o erro absoluto e relativo entre v_{ex}^* e v_{aprox}^* .

Tabela 1 – Tabela com valores das respostas e erros associados para cada ε .

ε	v_{ex}^*	v_{aprox}^*	Erro absoluto	Erro relativo(%)
0,01	0,3033	0,3032	$4,22 \times 10^{-5}$	0,014
0,05	0,311	0,312	0,001	0,34
0,10	0,324	0,319	0,004	1,33
0,15	0,336	0,320	0,010	2,93
0,20	0,350	0,332	0,018	5,08
0,25	0,365	0,337	0,028	7,74
0,30	0,381	0,340	0,041	10,86
0,35	0,399	0,341	0,057	14,40

Nota-se que, para $\varepsilon = 0,01$, a diferença entre as duas respostas está na quarta casa decimal e os erros relativo e absoluto confirmam que o uso da solução aproximada pelo método das perturbações é muito bom. Até $\varepsilon = 0,1$, pode-se dizer que é aceitável o uso da aproximação, dado que a diferença está na terceira casa decimal e o erro relativo

ainda é baixo. Porém, dessa faixa em diante, dependendo do problema de engenharia que se aborda, a solução aproximada já deixa de ser aceitável, com o erro absoluto na segunda casa decimal e o erro relativo crescendo mais, aproximando-se da ordem dos 10%. Quando $\varepsilon = 0.35$, a diferença já está quase na primeira casa decimal, divergindo muito as soluções.

2.3 Oscilador não linear

O problema agora, que já possui uma relação com o escopo principal do projeto, descreve um sistema oscilatório massa mola, com uma massa m , uma força de restituição elástica não linear, dada por $ky + ay^3$, em que y é o deslocamento da massa e não há nenhum amortecimento.

Supondo-se que, no coeficiente de restituição, a parte não linear é muito menor que a unidade, ou seja, $a \ll k$, e que o sistema inicia o movimento em $y = y_0$, pode-se escrever a equação regente do movimento, através da segunda lei de Newton, como

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - ay^3, \quad t > 0 \quad (2.17)$$

e as condições iniciais como

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0. \quad (2.18)$$

Devido ao termo não linear ay^3 , não é possível encontrar uma solução exata do problema. Então, um método numérico se faz necessário e, pela hipótese $a \ll k$, o método das perturbações é conveniente. Adimensionalizando-se (2.17), definiu-se um tempo característico $t^* = \frac{t}{\sqrt{m/k}}$, em que $\sqrt{m/k} = \frac{1}{\omega_0}$ e ω_0 é a frequência natural do sistema, e um deslocamento característico, pela condição inicial do problema (equação 2.18), como sendo $u = \frac{y}{y_0}$. Fazendo-se a devida substituição desses termos adimensionais em (2.17) e (2.18), chega-se a

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad t^* > 0, \quad (2.19)$$

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad (2.20)$$

em que $\varepsilon \equiv \frac{ay_0^2}{k} \ll 1$ é o parâmetro adimensional.

2.3.1 Aplicando o método das perturbações

Com o problema adimensionalizado, seguiu-se com a aplicação do método da perturbação, cuja solução é dada pela série

$$u(t^*) = u_0(t^*) + \varepsilon u_1(t^*) + \varepsilon^2 u_2(t^*) + \dots \quad (2.21)$$

Substituindo em (2.19), segue que:

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \varepsilon^2 \ddot{u}_2 + \dots = -u_0 - \varepsilon u_1 - \varepsilon^2 u_2 + \dots - \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^3. \quad (2.22)$$

Agrupando em potências de ε , até $O(\varepsilon)$, tem-se:

$$\ddot{u}_0 = -u_0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0; \quad (2.23)$$

$$\ddot{u}_1 = -u_1 - u_0^3, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0. \quad (2.24)$$

A solução de (2.23) é facilmente determinada analiticamente, obtendo-se

$$u_0(t^*) = \cos t^*. \quad (2.25)$$

Substituindo-se a solução de (2.25) em (2.24), segue a equação diferencial

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos^3 t^*, \quad (2.26)$$

que pode também ser facilmente determinada encontrando-se uma solução homogênea e outra particular, pelo método dos coeficientes indeterminados (cálculos completos no Anexo B). Assim, a solução de (2.26) é

$$u_1 = \frac{1}{32}(\cos 3t^* - \cos t^*) - \frac{3}{8}t^* \sin t^*. \quad (2.27)$$

A solução aproximada pelo método, para ordem $O(\varepsilon)$, é a soma de (2.25) e (2.27), que resulta em

$$u_a = \cos t^* + \varepsilon \left[\frac{1}{32}(\cos 3t^* - \cos t^*) - \frac{3}{8}t^* \sin t^* \right]. \quad (2.28)$$

Por se tratar de um sistema oscilatório não amortecido, espera-se que a resposta seja um sinal senoidal de amplitude constante, na parte permanente, ou seja, o deslocamento da massa nunca tenderá a 0 ou muito menos tenderá a uma amplitude infinita. Contudo, por 2.28, observa-se que o termo $\frac{3}{8}t^*$, que surge da solução particular da EDO (Anexo C), faz com que as amplitudes cresçam à medida que o tempo se desenvolve, independente de ε ser pequeno. Tal termo é chamado de secular (LOGAN, 2013) e devido a sua presença a resposta encontrada pelo método não é consistente com a realidade do sistema físico.

Para se comparar o comportamento real do sistema com o sinal gerado pela aproximação analítica, desenvolveu-se, no Matlab, um Runge-Kutta de 4ª ordem, a fim de gerar a resposta numérica para o sistema. Adotou-se, para tanto, um passo de tempo de 0,1 (na escala adimensional), de acordo com a avaliação do método numérico feita na seção 2.2.

As Figuras 8, 9 e 10 mostram os resultados gerados pelo programa, comparando-se os gráficos da resposta numérica com a aproximada para os mesmos valores de ε escolhidos na seção 2.2.

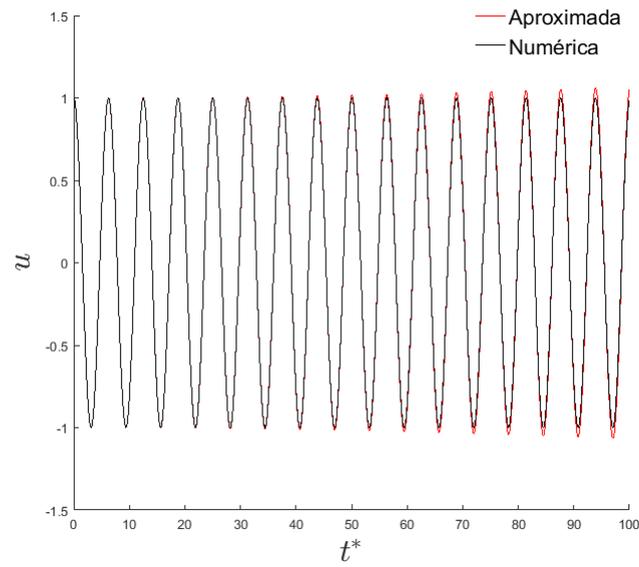


Figura 8 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,01$

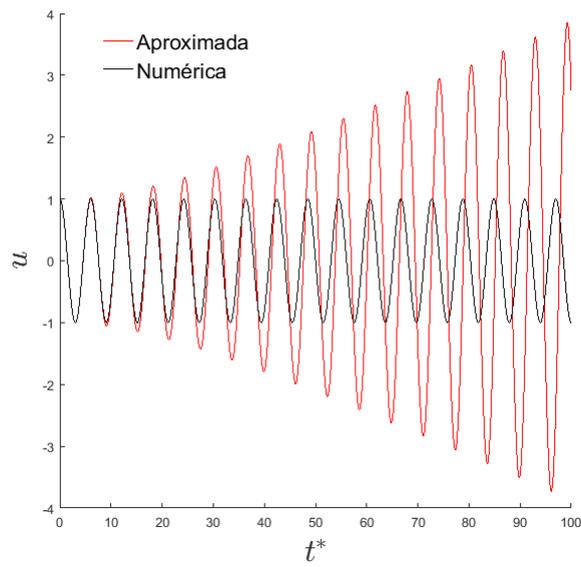


Figura 9 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,1$

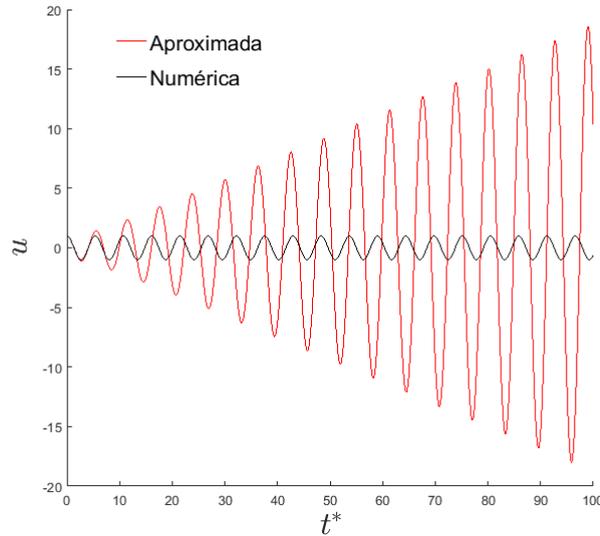


Figura 10 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,5$

Para $\varepsilon = 0,01$ e um tempo adimensional em torno de 21, já se observa que a solução aproximada começa a divergir da numérica, sendo válida então para um intervalo de tempo restrito. Para $\varepsilon = 0,1$ a divergência começa muito mais cedo, sendo o intervalo de validade muito menor, enquanto que para $\varepsilon = 0,5$ as duas respostas são quase que absolutamente discrepantes. Observa-se, então, que a solução aproximada pode descrever adequadamente o problema para $t^* \in [0, T]$, em que T é um limite de tempo a partir do qual a aproximação deixa de ser boa, e que esse intervalo de tempo $[0, T]$ é menor à medida que ε cresce e se aproxima da unidade.

Assim, o uso do método das perturbações para esse problema é bastante restrito. Contudo, é possível contornar os termos seculares pela aplicação de outro método que vem a complementar o da perturbação.

2.3.2 Método Poincaré-Lindstedt

O chamado método de Poincaré-Lindstedt tem por princípio uma mudança de variável no tempo, com o intuito de suprimir os termos seculares que surgem na solução das equações diferenciais no método das perturbações (LOGAN, 2013). Assim sendo, a variável de tempo adimensional é expressa em termos de τ da seguinte forma:

$$\tau = t^* \omega^*, \quad (2.29)$$

em que τ e ω^* são variáveis adimensionais do tempo e da frequência, respectivamente. Além disso, ω^* pode ser expresso em uma série assintótica, como segue abaixo:

$$\omega^* = \omega_0^* + \varepsilon \omega_1^* + \varepsilon^2 \omega_2^* + \dots \quad (2.30)$$

em que $\omega_0^* = 1$, pois ω^* é a razão entre uma frequência expandida ($\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$) e a natural ω_0 do sistema.

Como $\ddot{u} = \frac{d^2 u}{dt^{*2}}$ e $t^* = \frac{\tau}{\omega^*}$ por (2.29), substituindo, tem-se que $\frac{d^2 u}{dt^{*2}} = \omega^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \omega^2 \ddot{u}$ e, portanto,

$$\omega^2 \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad \tau > 0, \quad (2.31)$$

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (2.32)$$

Agora, aplicando-se o método das perturbações substituindo (2.30) e

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots$$

em (2.31), agrupando-se, em seguida, em potências de ε até $O(\varepsilon)$, segue o sistema de equações diferenciais:

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad \dot{u}_0(0) = 0, \quad (2.33)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\omega_1^* \ddot{u}_0 - u_0^3, \quad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0. \quad (2.34)$$

Resolvendo (2.33), chega-se a

$$u_0 = \cos(\tau), \quad (2.35)$$

da mesma maneira que se chegou em (2.25). Substituindo (2.35) em (2.34), tem-se que

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\omega_1^* \cos \tau - \cos^3 \tau = \left(2\omega_1^* - \frac{3}{4}\right) \cos \tau - \frac{1}{4} \cos 3\tau. \quad (2.36)$$

Observando que $\cos t^*$ levou, em (2.27), a uma solução particular com um termo secular, o método de Poincaré-Lindstedt indica escolher um ω_1^* tal que o termo com $\cos \tau$ desapareça. Assim, ω_1^* deve ser igual a $\frac{3}{8}$ e (2.36) fica

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{1}{4} \cos 3\tau. \quad (2.37)$$

A solução homogênea é do tipo $u_1(\tau) = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau$ e a particular do tipo $u_1(\tau) = A \cos 3\tau$, em que o coeficiente $A = \frac{1}{32}$, ao se substituir em (2.37). Pelas condições iniciais em (2.34), chega-se ao seguinte resultado:

$$u_1(\tau) = \cos \tau + \frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos \tau). \quad (2.38)$$

Substituindo-se, (2.35) e (2.38) em $u(\tau)$ expandido em potências de ε , determina-se a solução aproximada, em termos de τ , para u até ordem $O(\varepsilon)$:

$$u_{aprox}(\tau) = \cos \tau + \frac{1}{32}\varepsilon(\cos 3\tau - \cos \tau) + \dots \quad (2.39)$$

em que $\tau = t^* + \frac{3}{8}\varepsilon t^* + \dots$.

Com tal resultado em mãos, plotou-se três gráficos, semelhantes aos das Figuras 8, 9 e 10, para comparar a nova solução encontrada, pelo método de Poincaré-Lindstedt, e a solução numérica.

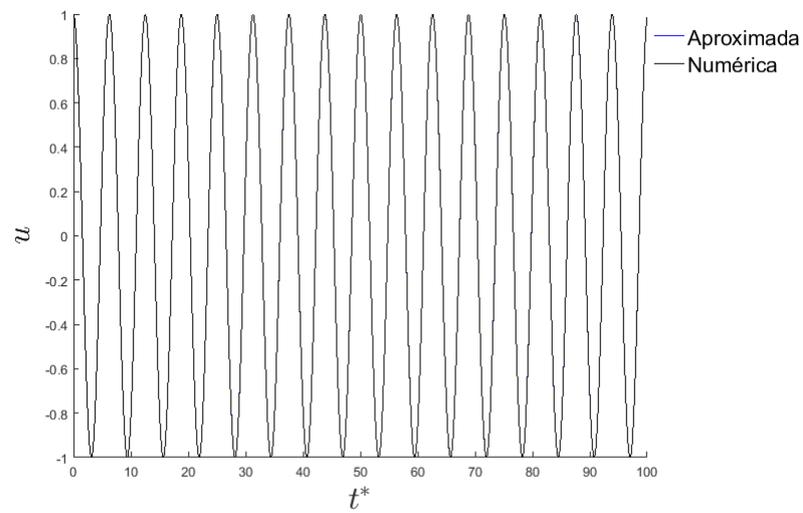


Figura 11 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,01$.

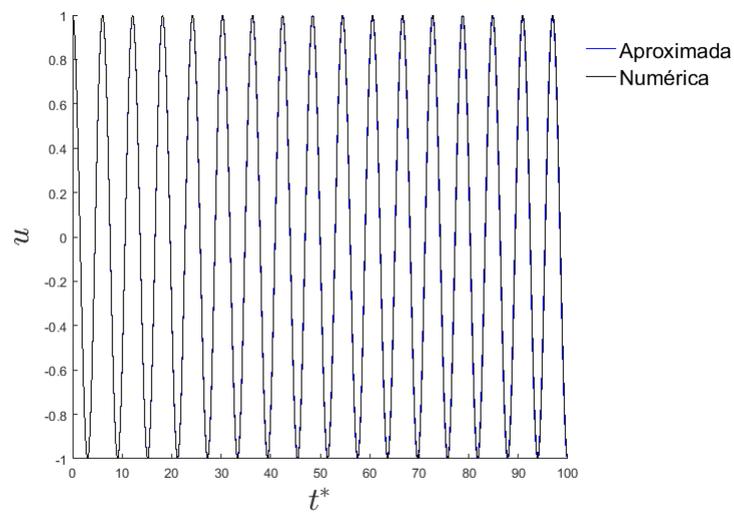


Figura 12 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0,1$.

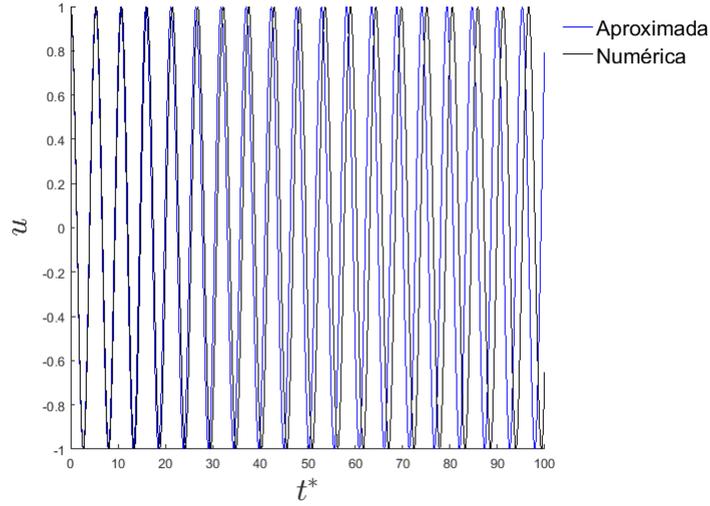


Figura 13 – Comparação da resposta aproximada e numérica para $\varepsilon = 0, 5$.

As Figuras 11 e 12 evidenciam que o método é bastante eficiente, porque além de eliminar os termos seculares, mantém a solução coincidente com a numérica para um intervalo de tempo grande. Neste caso, como demonstra melhor a Fig. 13, as duas respostas divergem pela diferença de fase (ϕ). Para a solução numérica, a fase é dada por

$$\phi_0 = \omega_0^* t^* = 1 \cdot t^*, \quad (2.40)$$

e para a solução aproximada

$$\phi = \omega^* t^* = \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon + \dots\right) t^*. \quad (2.41)$$

Dessa maneira, caso se fixasse o tempo e se variasse ε , 2.40 seria uma reta constante com valor t^* , e 2.41 seria uma reta de inclinação positiva, partindo de t^* , cuja tangente é $\frac{3}{8}t^*$ (se considerarmos até o termo de $O(\varepsilon)$). Plotou-se, então, para três tempos distintos, as duas fases em função de ε , que pode ser observado nas Figuras 14, 15 e 16.

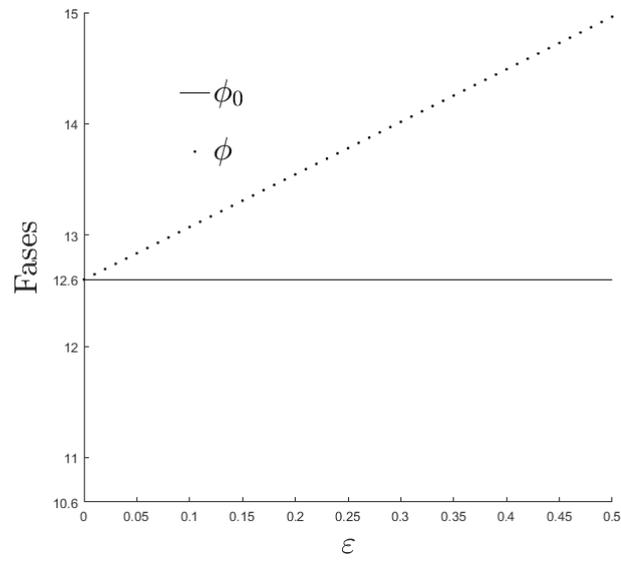


Figura 14 – Comparação de fases com $t^* = 12,6$ e ε variando.

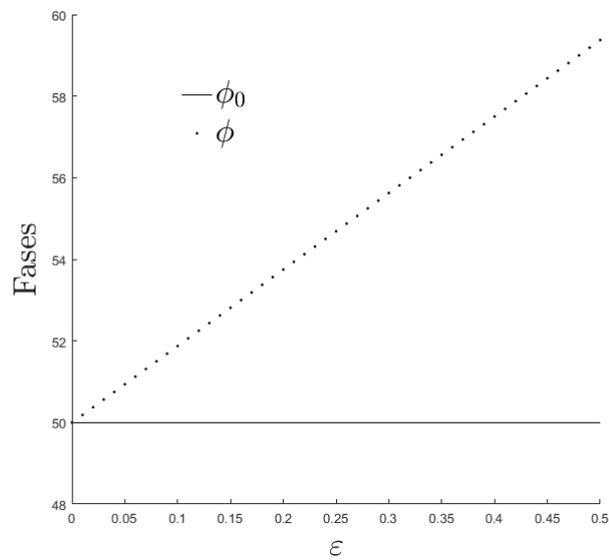


Figura 15 – Comparação de fases com $t^* = 50$ e ε variando.

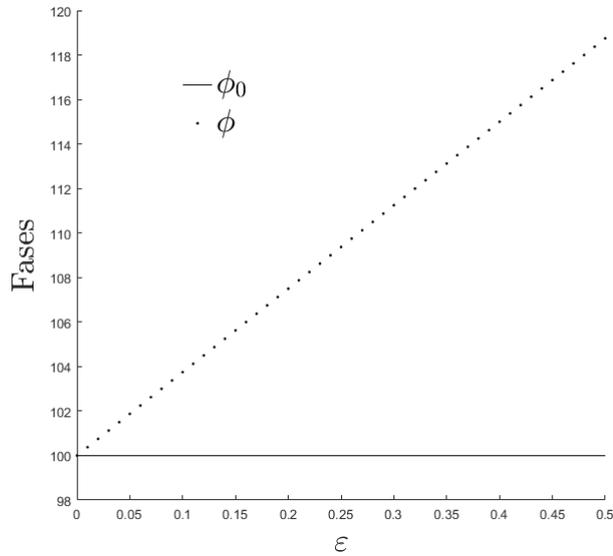


Figura 16 – Comparação de fases com $t^* = 100$ e ε variando.

Nota-se primeiro, que a diferença de fase se dá pelo aumento de ε , corroborando o observado nos gráficos 11, 12 e 13. Além disso, para tempos grandes, essa diferença também cresce porque a tangente de ϕ aumenta à medida que se avança no tempo. Em 14, para $\varepsilon = 0,5$, ϕ é aproximadamente 15, com uma diferença de 2,4 para $\phi_0 = 12,6$. Já para 15 e 16, essa diferença é bem maior, sendo aproximadamente de 10 e 20, respectivamente. Essa diferença de fase crescente com o tempo pode ser observada já em 13, em que para $t^* = 10$ a diferença de fase é pouco evidente, mas para $t^* = 70$, por exemplo, já é bem discrepante.

2.3.3 Comparação do método das perturbações sem e com Poincaré-Lindstedt

Para comparar o método das perturbações e o Poincaré-Lindstedt, plotou-se os gráficos abaixo, nos quais um tempo adimensional foi fixado e fez-se u em função de ε .

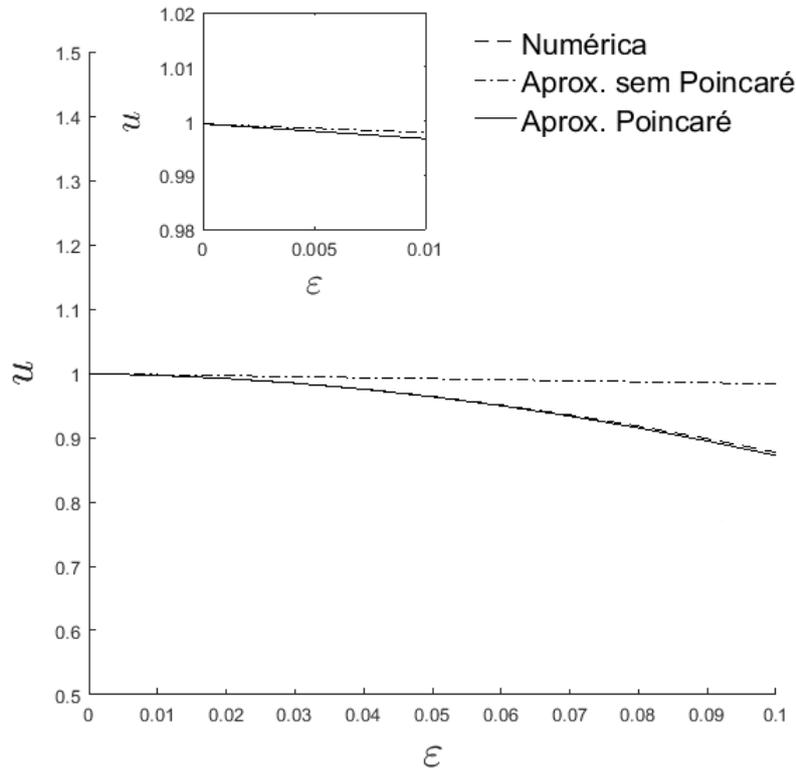


Figura 17 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 12,6$.

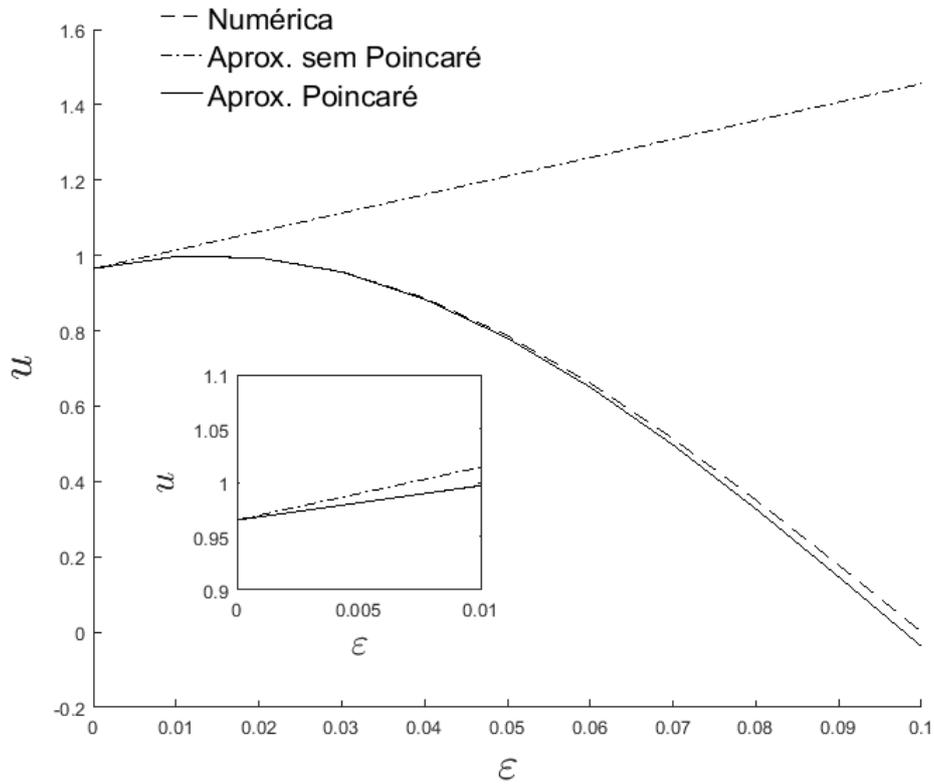


Figura 18 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 50$.

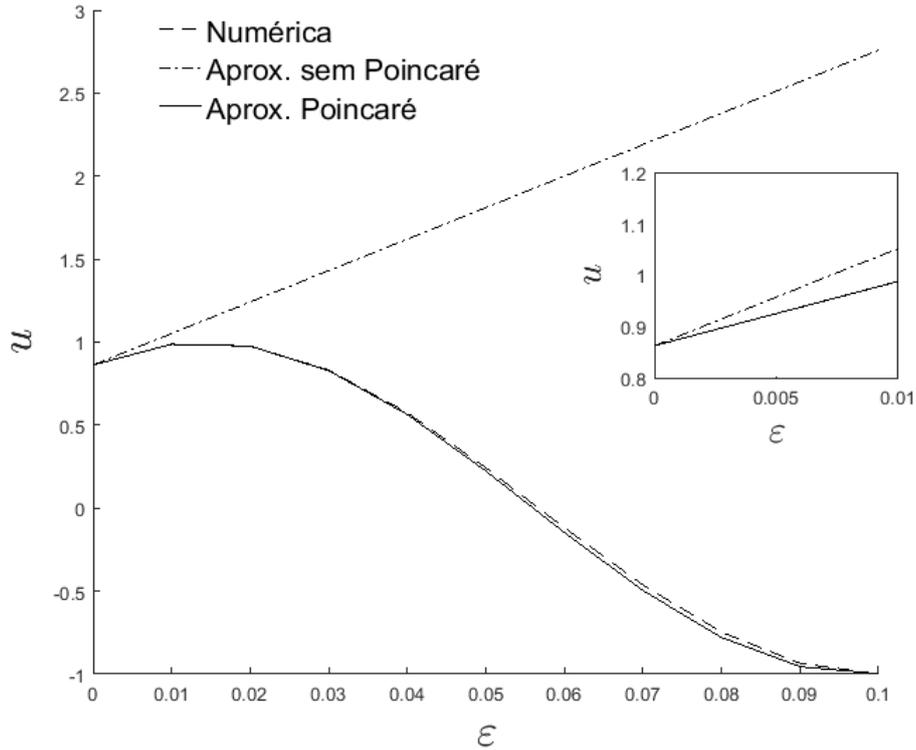


Figura 19 – Comparação das respostas aproximadas, tanto pelo método das perturbações quanto pelo Poincaré-Lindstedt, com a solução numérica para $t^* = 100$.

Analisando-se a Figura 17, constata-se que a solução por Poincaré-Lindstedt é muito boa para todo intervalo de ε mostrado, começando a se distanciar da resposta numérica em $\varepsilon = 0,09$, aproximadamente, mas ainda sim uma diferença muito pequena, enquanto a solução só com o método das perturbações já se distancia antes, em $\varepsilon = 0,01$, chegando a ser discrepante em $\varepsilon = 0,1$.

Olhando a Figura 18, o método de Poincaré-Lindstedt continua demonstrando um bom comportamento, distanciando-se da curva numérica mais cedo que anteriormente, mas com uma diferença ainda muito pequena. Enquanto que o método das perturbações sozinho se distancia já em um $\varepsilon < 0,01$ e para $\varepsilon = 0,1$ essa diferença entre as soluções é muito grande.

Na Figura 16, é importante notar que a solução só pelo método das perturbações praticamente não coincide com a numérica, o que leva a corroborar o que foi concluído na seção 2.3.1, que o método das perturbações só funciona para um intervalo de tempo restrito, por isso, para $t^* = 100$, por exemplo, a solução não funciona mais.

Tabela 2 – Erro entre a resposta aproximada sem o método de Poincaré-Lindstedt e a numérica para tempo fixo de 12,6.

ε	$u_{num.}$	$u_{aprox.}$	Erro absoluto	Erro relativo(%)
0,01	0,9967	0,9978	0,0011	0,11
0,02	0,9918	0,9963	0,0044	0,45
0,03	0,9847	0,9947	0,0099	1,01
0,04	0,9754	0,9931	0,0176	1,81
0,05	0,9641	0,9915	0,0274	2,84
0,06	0,9506	0,9899	0,0393	4,13
0,07	0,9351	0,9883	0,0532	5,69
0,08	0,9177	0,9867	0,0691	7,53
0,09	0,8983	0,9851	0,0868	9,67
0,10	0,8770	0,9835	0,1065	12,14

Tabela 3 – Erro entre a resposta aproximada pelo método de Poincaré-Lindstedt e a numérica para tempo fixo de 12,6.

ε	$u_{num.}$	$u_{aprox.}$	Erro absoluto	Erro relativo(%)
0,01	0,99673	0,99672	$8,36 \times 10^{-6}$	0,001
0,02	0,99181	0,99176	$5,35 \times 10^{-5}$	0,005
0,03	0,98471	0,98455	0,0002	0,017
0,04	0,97545	0,97508	0,0003	0,038
0,05	0,96407	0,96337	0,0007	0,072
0,06	0,95061	0,94944	0,0012	0,122
0,07	0,93512	0,93331	0,0018	0,193
0,08	0,91765	0,91500	0,0026	0,288
0,09	0,89827	0,89457	0,0037	0,412
0,10	0,87704	0,87206	0,0050	0,568

As Tabelas 2 e 3 mostram, de maneira qualitativa e para um dos tempos fixos analisados, a eficiência da aproximação pelo método Poincaré-Lindstedt em relação ao assintótico aplicado sozinho. Observa-se que o maior erro relativo entre as respostas,

aplicando-se Poincaré, foi de 0,6% (com $\varepsilon = 0,1$), enquanto que para o método das perturbações aplicado sem nenhuma correção para os termos seculares, o erro foi de 12,1%.

3 Modelo Concentrado - Oscilador não linear com forçamento harmônico

Acrescentou-se ao modelo do oscilador não linear, estudado no capítulo anterior, uma excitação harmônica e amortecimento. O objetivo disso é apresentar, no presente capítulo, um modelo que possa simular a oscilação em um ponto de um cabo vibrante e se estudar também a dinâmica de sistemas oscilatórios que apresentam não linearidades. Por isso, segue-se com o equacionamento, adimensionalização e estudo dos parâmetros físicos do problema. Depois que esse modelo for bem explorado, pretende-se usá-lo para gerar resultados que representem bem as respostas de um condutor de rede elétrica quando submetido a um forçamento harmônico externo, como procedeu-se na bancada de ensaios, cujos resultados experimentais foram utilizados nesse projeto.

3.1 Equacionamento do modelo e adimensionalização

O sistema atual é um oscilador não linear excitado externamente por um forçamento harmônico do tipo $B \sin(\omega t)$ (B dado em newtons), e sujeito a um amortecimento C . O coeficiente de restituição elástica é o que confere ao sistema a característica não linear, uma vez que é dado por

$$k^* = k\left(1 + \frac{a}{k}y^2\right), \quad (3.1)$$

que se trata da equação de Duffing (LOGAN, 2013), em que k é o coeficiente elástico linear; a é uma constante do sistema, que, se grande, aumenta a não linearidade; e y é a coordenada de deslocamento. A Fig. 20 ilustra o sistema como um massa-mola não linear, acrescido de um elemento viscoso. Com base nesse modelo, a equação que descreve o problema é

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + C \frac{dy}{dt} + k^* y = B \sin(\omega t), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

em que m é a massa do sistema. Essa equação pode ser adimensionalizada a fim de fazer uma abordagem mais geral do problema.

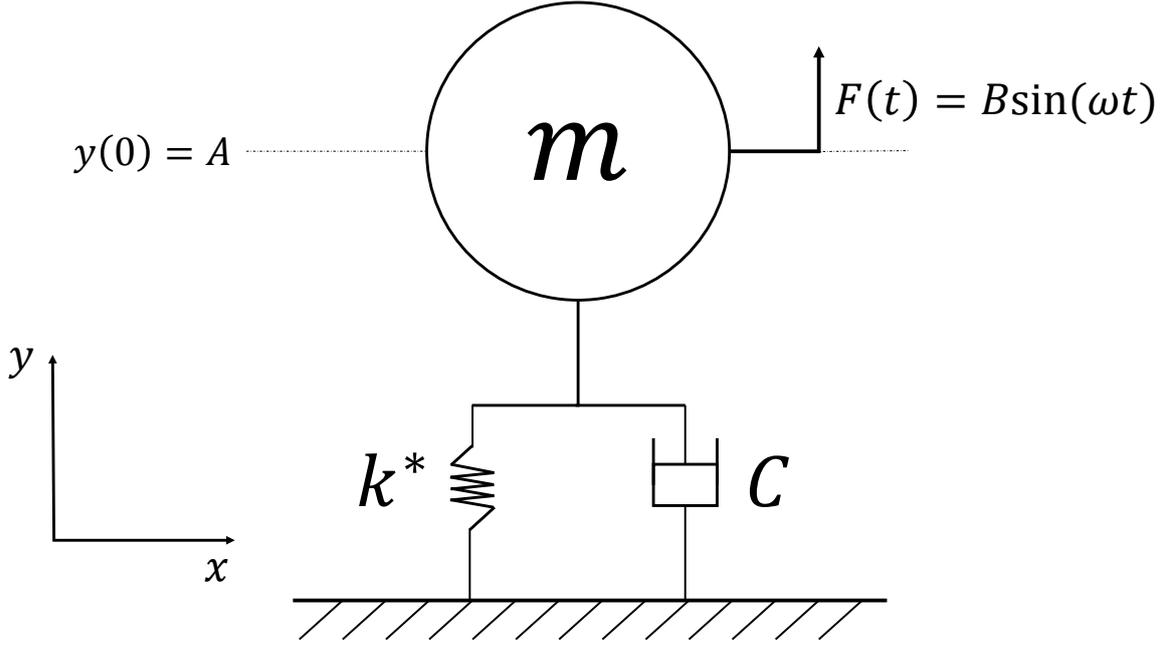


Figura 20 – Esquema do oscilador harmônico.

Considerando como condição inicial $y(0) = A$ e $\frac{dy(0)}{dt} = 0$, o deslocamento pode ser adimensionalizado por um parâmetro característico do tipo $u = \frac{y}{A}$. Definindo a frequência natural do sistema como $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pode-se escolher o parâmetro característico do tempo como $t^* = t\omega_n$. Substituindo esses parâmetros adimensionais em (3.2), chega-se a

$$\frac{d^2u}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{du}{dt^*} + u + \varepsilon u^3 = \beta \sin(\omega^* t^*), \quad (3.3)$$

em que $2\zeta = \frac{C}{m\omega_n}$ e $\varepsilon = \frac{A^2 a}{k}$ é um parâmetro adimensional que, dependendo de sua grandeza, faz o sistema responder com maior ou menor não linearidade. A variável adimensional β é uma amplitude de excitação $\beta = \frac{B}{kA}$. E por último ω^* é a razão entre a frequência de excitação e a natural do sistema $\frac{\omega}{\omega_n}$. Reescrevendo (3.3) da seguinte forma

$$\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + u = \beta \sin(\omega^* t^*) - \varepsilon u^3, \quad t^* > 0, \quad (3.4)$$

percebe-se que o forçamento é composto de uma parcela harmônica e outra não linear que depende do deslocamento ao cubo, a qual é desprezível se $\varepsilon \ll 1$. Além disso as condições iniciais da forma adimensional seguem como:

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (3.5)$$

A partir disso é possível avaliar a influência dos parâmetros ζ , β e ε , variando suas grandezas e verificando o comportamento do sistema, como se segue nas próximas seções.

3.2 Metodologia

Para se estudar o sistema descrito, decidiu-se verificar a influência de cada parâmetro no sistema através de um código computacional que forneceria a solução numérica da equação diferencial em questão. Então, seguiu-se a seguinte sequência de procedimentos para se gerar os resultados almejados:

1. Estudo dos efeitos da amplitude de excitação adimensional β sobre o sistema, variando-a de um valor pequeno até um valor grande, na ausência dos demais parâmetros, ou seja, a não linearidade ε e o amortecimento ζ ;
2. Plotagem das séries temporais de deslocamento e velocidade, bem como diagrama de fase e espectro amplitude frequência, para as respostas do problema na condição acima descrita;
3. Estudo dos efeitos do parâmetro ε sem a presença da excitação e do amortecimento, gerando-se os mesmos gráficos que para o caso anterior;
4. Investigação dos efeitos da não linearidade e da excitação em conjunto, sem a presença do amortecimento, plotando-se a mesma espécie de gráficos para registrar os resultados encontrados;
5. Verificar a sensibilidade do sistema ao amortecimento, gerando-se resultados para os casos: subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido, considerando-se também, a presença da excitação e da não linearidade.
6. Por fim, averiguar respostas para diferentes frequências de excitação, incluindo-se todos os demais parâmetros em conjunto.

3.3 Runge-Kutta de 4ª ordem para solucionar o oscilador não linear amortecido

Tendo em vista a equação do movimento adimensional do oscilador não linear amortecido obtido anteriormente, uma solução analítica não é viável, fazendo-se necessário o uso de métodos numéricos para resolver. O método elegido foi um Runge-Kutta de 4ª ordem, por ser de fácil implementação e de baixo custo computacional.

Criou-se então uma função no Matlab que seguia o algoritmo do Runge-Kutta para a equação diferencial que se chegou acima, definindo como parâmetros de entrada β , ε , ω^* e ζ , além dos valores inicial e final para se construir um vetor para t^* , com passo também definido como entrada. Assim, era possível obter diversas soluções, dependendo de quais valores para os parâmetros se escolhia como entrada.

Em todas as análises em que o forçamento estava presente, o passo do Runge-Kutta era dado como o inverso da frequência adimensional de excitação dividida por cem ($\Delta t = \frac{1}{100} \frac{1}{\omega^*}$), garantindo-se que esse passo sempre seja menor que o período da resposta e, conseqüentemente, uma solução numérica confiável.

3.4 Resultados e análise

Os resultados obtidos estão apresentados na forma de gráficos, os quais apresentam sinais de deslocamento e velocidade por tempo do oscilador harmônico, em diferentes condições físicas, segundo o que se definiu na metodologia, além do diagrama de fase e do espectro amplitude frequência, para verificar a presença de diferentes períodos em uma resposta e o grau da não linearidade que o problema pode apresentar.

3.4.1 Análise do oscilador linear não amortecido com forçamento externo

A fim de verificar somente a influência de β no sistema, desconsidera-se o amortecimento e o parâmetro ε . Então, a equação do movimento do sistema, com as mesmas condições iniciais, fica simplesmente:

$$\ddot{u} + u = \beta \sin(\omega^* t^*), \quad u(0) = 1, \quad \dot{u} = 0, \quad t^* > 0. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é uma EDO de segunda ordem linear que apresenta uma solução analítica, a qual, pelo método dos coeficientes indeterminados, é dada por (cálculos no Anexo C):

$$u = \frac{\beta}{(1 - \omega^{*2})} (\sin(\omega^* t^*) - \omega^* \sin(t^*)) + \cos(t^*), \quad t^* > 0, \quad (3.7)$$

na qual observa-se que a solução é inválida para $\omega^* = 1$, que por sua vez implica em uma condição de ressonância, porque, pela definição de ω^* , $\omega = \omega_n$ nesse caso. Dessa forma, a solução para a condição de ressonância é outra distinta e dada por

$$u = \frac{\beta}{2} (\sin(t^*) - t^* \cos(t^*)) + \cos(t^*), \quad t^* > 0, \quad (3.8)$$

cuja resposta será um sinal de amplitude crescente por causa do termo t^* multiplicando o cosseno, como era de se esperar da condição de ressonância. Com isso, para qualquer valor de β , a resposta terá esse formato. Os cálculos pelos quais se obteve (3.8) encontram-se também no Anexo C. Por isso, pela solução (3.7), é possível avaliar os efeitos de β , adotando-a para análise.

Introduzindo-se no código do Matlab valores para $\beta = [0, 01; 1; 10]$, mantendo-se $\omega^* = 3$ para se distanciar da condição de ressonância, e igualando ε e ζ a 0, obteve-se os resultados que seguem apresentados nas Figuras 21, 22 e 23.

Pela Figura 21, observa-se que para $\beta \ll 1$, o sistema obviamente responde de maneira livre, com um sinal perfeitamente senoidal constante, diagrama de fase circular, indicando que não há variação e diferença nas amplitudes de deslocamento e velocidade, e pela transformada rápida de Fourier, identifica-se a amplitude natural adimensional e a de excitação em um pico menor.

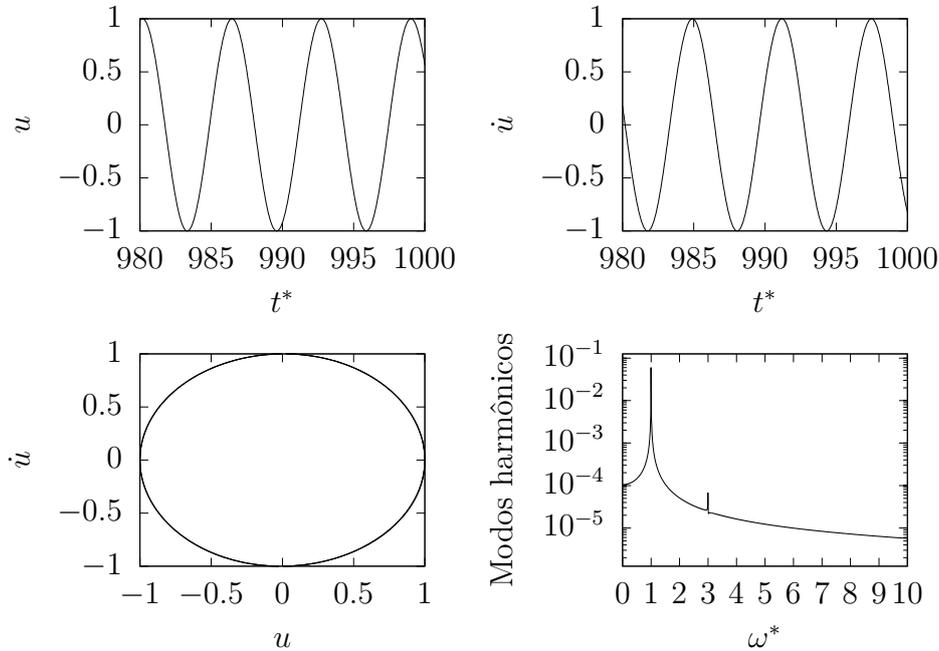


Figura 21 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 0,01$ e $\omega^* = 3$.

Ao se fazer $\beta = 1$, já se nota, na Figura 22, que o sistema responde com a composição de dois harmônicos, com a frequência de excitação $\omega^* = 3$ apresentando um pico maior no espaço de amplitude e frequência, além dos sinais de deslocamento e velocidade apresentarem um padrão diferente, o que leva à distorção no diagrama de fase.

Ao se analisar equação (3.7), vê-se que se β é muito pequeno, os termos que o multiplicam podem ser desprezados e tem-se como resposta somente o $\cos(t^*)$. Quando β cresce e assume valores maiores ou igual à unidade, o termo $\sin(\omega^*t^*)$ passa a ser relevante e a frequência de excitação passa a surgir no espectro de amplitude e frequência. Os gráficos da Figura 23 foram plotados para evidenciar essa influência da amplitude de excitação na resposta, fazendo-se $\beta = 10$, ou seja, bem grande, observando-se claramente a composição dos sinais. Porém uma coisa que se destaca nesse último caso é o aumento das amplitudes alcançadas pela velocidade. Fazendo-se a derivada de (3.7), tem-se que

$$\dot{u} = \frac{\beta\omega^*}{(1 - \omega^{*2})} (\cos(\omega^*t^*) - \omega^* \cos(t^*)) + \sin(t^*), \quad t^* > 0, \quad (3.9)$$

em que β é multiplicado agora por ω^* , fazendo com que as amplitudes alcançadas pela velocidade sejam proporcionais à frequência de excitação.

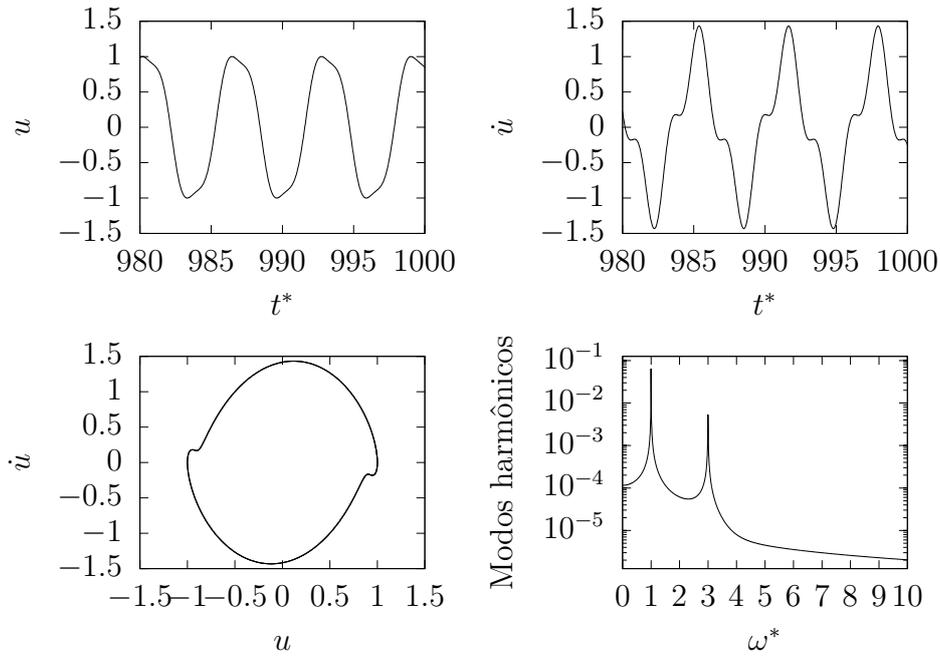


Figura 22 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 1$ e $\omega^* = 3$.

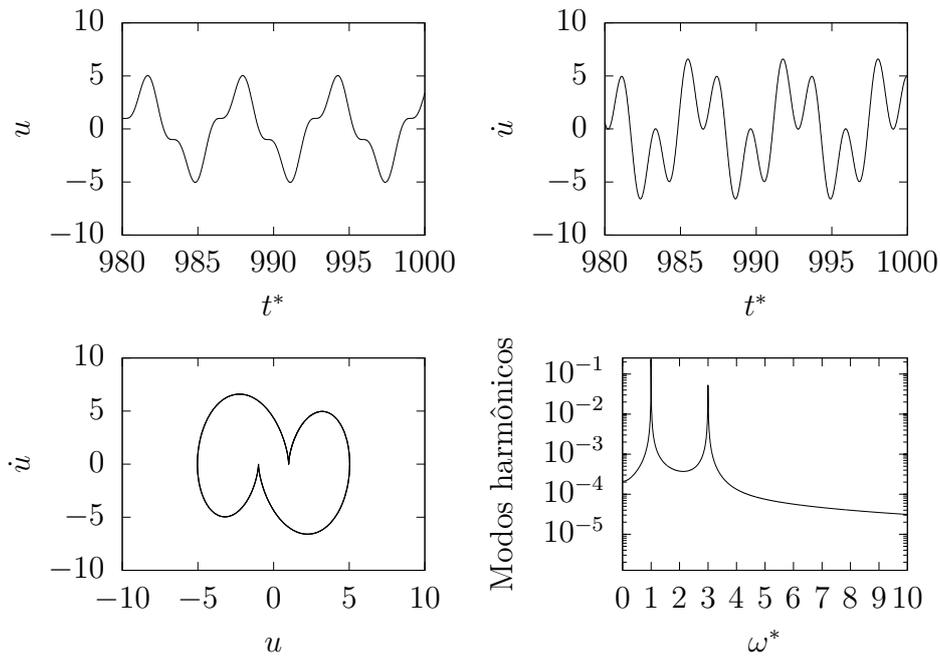


Figura 23 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico linear com $\beta = 10$ e $\omega^* = 3$.

Na literatura, verifica-se que esse fenômeno é chamado de resposta envolvendo sub-harmônicos, no qual um forçamento harmônico, na ausência de amortecimento, leva à combinação de duas respostas harmônicas com frequências diferentes: frequência natural associada à vibração livre; e frequência associada ao forçamento (SAVI; PAULA, 2017). Dependendo das frequências, aparecem respostas especiais compostas por uma frequên-

cia fundamental e outra que é um sub-harmônico dessa, ou um super-harmônico. Ainda segundo (SAVI; PAULA, 2017), a solução geral para esse tipo de sistema é dada por:

$$u = \frac{\omega_n^2 f_0}{\omega_n^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_n t), \quad (3.10)$$

em que ω_n seria a frequência de vibração livre e Ω a frequência de forçamento. A resposta sub-harmônica ocorre quando $\omega_n = \Omega/n$, sendo n um número inteiro que define a ordem do sub-harmônico. Então, para o problema em questão, trata-se de um sub-harmônico em que $\omega_n = \omega_n = 1$ e $\Omega = \omega^* = 3$, ou seja, um sub-harmônico de ordem 3.

3.4.2 Análise do oscilador não linear não amortecido

Para verificar a influência de ε , fez-se $\beta = 0$, $\omega^* = 3$ e o amortecimento nulo ($\zeta = 0$). A equação diferencial que se está analisando agora é

$$\ddot{u} + u = -\varepsilon u^3, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u} = 0, \quad t^* > 0, \quad (3.11)$$

que, devido à não linearidade, pode possuir solução analítica por expansão assintótica só para valores de $\varepsilon \ll 1$, como já foi elaborado no capítulo 2. Mas o que se deseja observar são os efeitos da não linearidade no problema, ou seja, respostas para $\varepsilon \geq 1$, implicando em soluções numéricas, unicamente.

Então, pelo código, plotou-se as soluções para $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 10$, como seguem, respectivamente, nas Figs. 24 e 25, pelas quais nota-se que, à medida que ε aumenta, as amplitudes da velocidade podem ser bem maiores que as do deslocamento, deixando o diagrama de fase mais vertical. Também pelos diagramas de fase, nota-se que eles são compostos por várias linhas concêntricas, indicando que nem o deslocamento e a velocidade oscilam com a mesma amplitude. As amplitudes, na realidade, se alteram bastante à medida que a não linearidade se faz mais forte. Pelo espectro amplitude frequência, vê-se que para ε grande a frequência do sistema aumenta e surgem também outras frequências de menor amplitude.

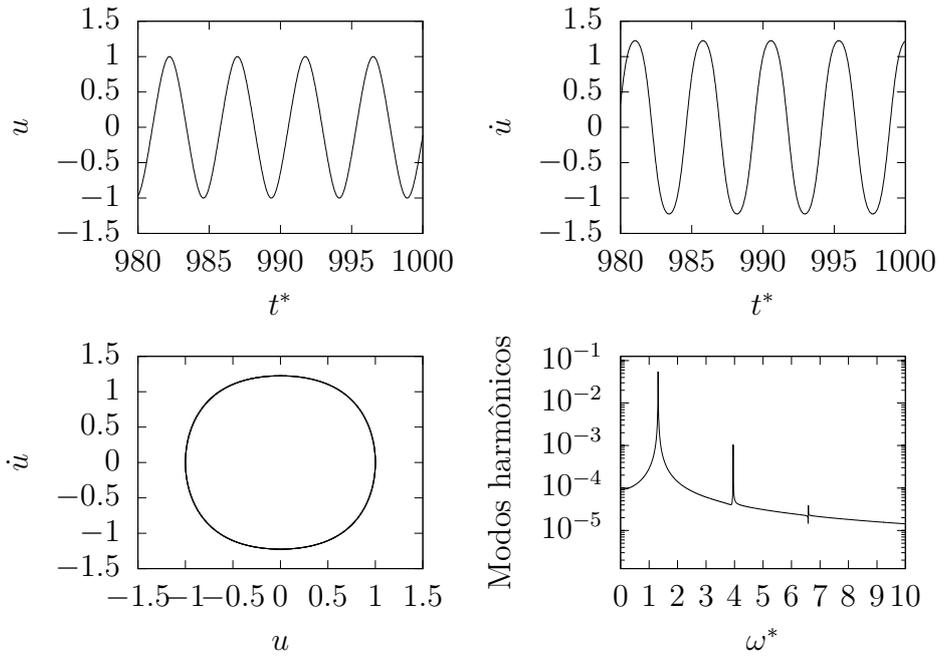


Figura 24 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear para $\varepsilon = 1$.

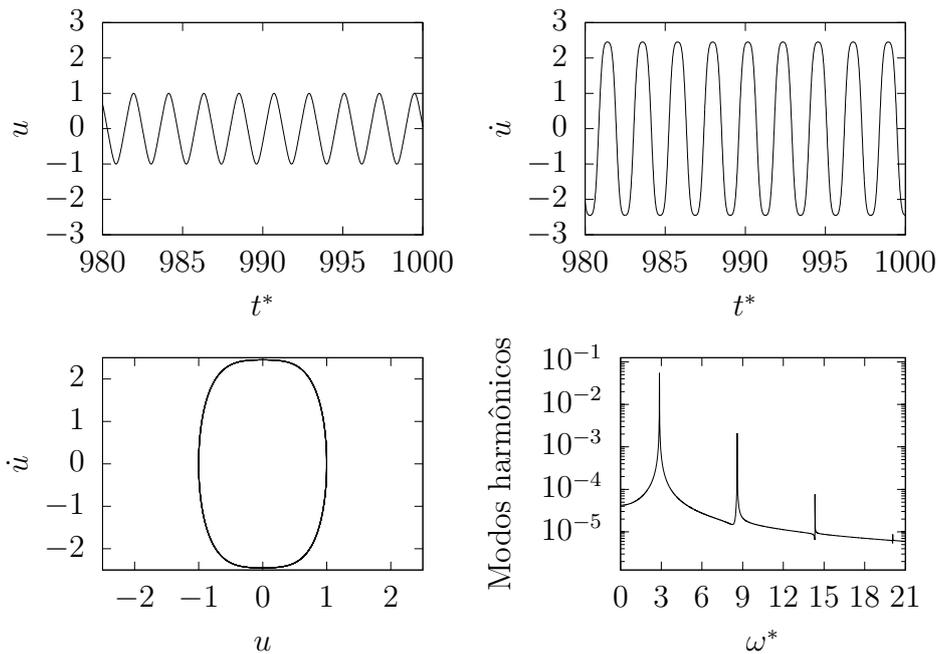


Figura 25 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear para $\varepsilon = 10$.

3.4.3 Análise do oscilador não linear não amortecido com forçamento externo

Depois de verificar os efeitos do forçamento e da não linearidade nas seções anteriores, seguiu-se com a avaliação desses elementos combinados. A equação do movimento para esse caso é

$$\ddot{u} + u = \beta \sin(\omega^* t^*) - \varepsilon u^3, \quad t^* > 0. \quad (3.12)$$

Decidiu-se fazer os parâmetros β e ε crescerem na mesma ordem de grandeza a partir de 1, e o que se observa é um comportamento altamente não linear do sistema. Na Figura 26, o sinal da velocidade alcança picos maiores e as formas dos sinais são bastante variáveis, destacando-se a forma singular do diagrama de fase. No espaço de amplitude e frequência, observa-se a frequência de excitação como segundo maior pico, enquanto a o maior pico corresponde à frequência de 1,338, que está próxima da frequência natural.

Pelo analisado na seção anterior, o aumento de ε faz com que a frequência natural adimensional do sistema aumente um pouco. Além do mais, outras frequências de menor amplitude surgem no espectro de amplitude e frequência, o que fica evidente nas Figs. 27 e 28, nas quais altos valores de β e ε levam o sistema a um regime não linear intenso de alta frequência, surgindo vários outros picos de frequência, na realidade, um espectro contínuo de frequências. Algo que é constante nas três situações é o pico da frequência de excitação ($\omega^* = 3$).

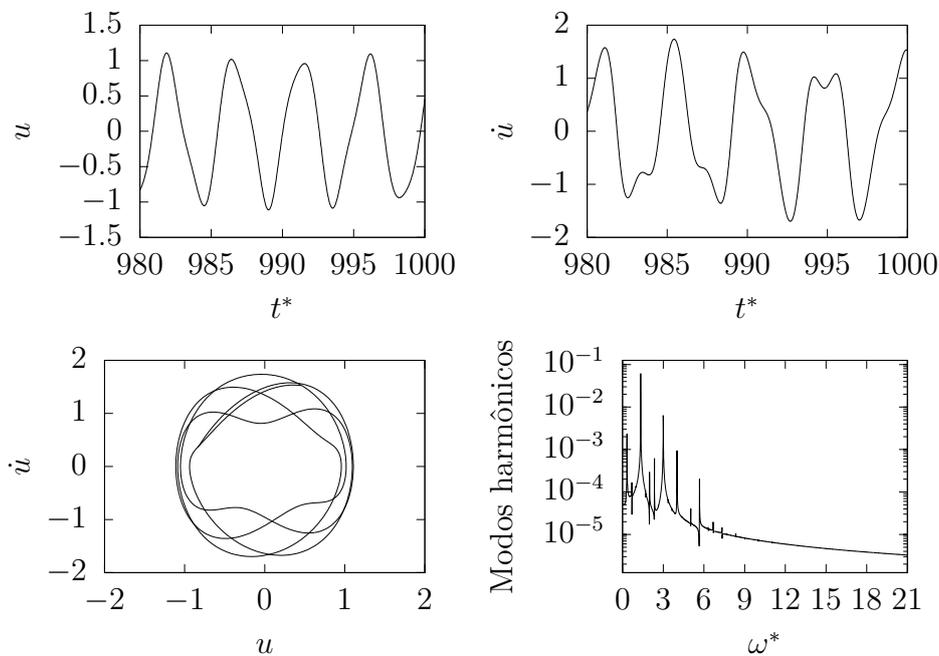


Figura 26 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 1$ e $\varepsilon = 1$.

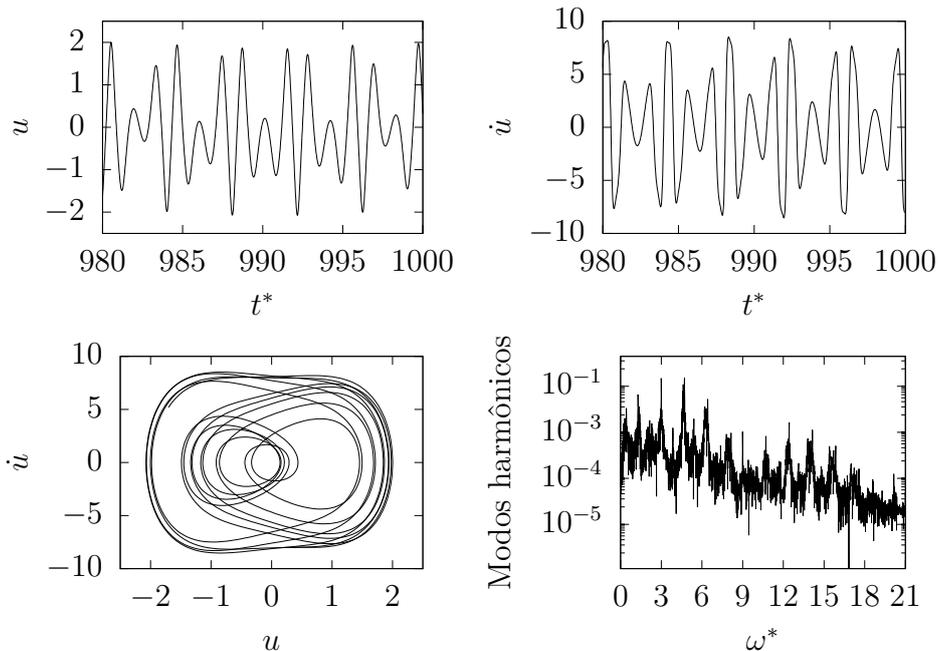


Figura 27 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 10$ e $\varepsilon = 10$.

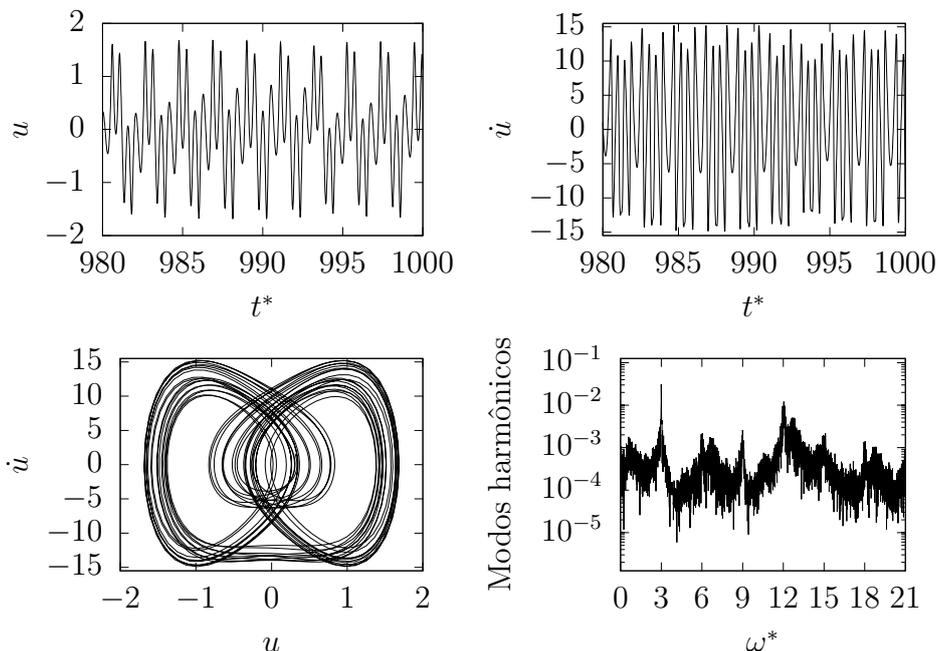


Figura 28 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 100$ e $\varepsilon = 100$.

Também nesses dois últimos casos, os diagramas de fases, com essas várias linhas e contornos diferentes, demonstram a presença de diversos períodos na série temporal, levando a crer que o sistema perde a memória muito rápido e que quase inexistente correlação

entre as respostas. Dessa forma, pode-se dizer que o comportamento é quase caótico ou imprevisível.

Fazendo-se ainda uma combinação de β pequeno e ε grande, notou-se a alta sensibilidade do sistema. Comparando-se as Figuras 24 e 29, nota-se que mesmo $\beta = 0,01$, o sistema já apresenta bifurcações, pequenas mas notáveis. O mesmo se observa também na Fig. 30. Fazendo-se $\beta = 1$ e $\varepsilon = 10$, o comportamento do sistema passa a se aproximar do observado nas Figs. 27 e 28.

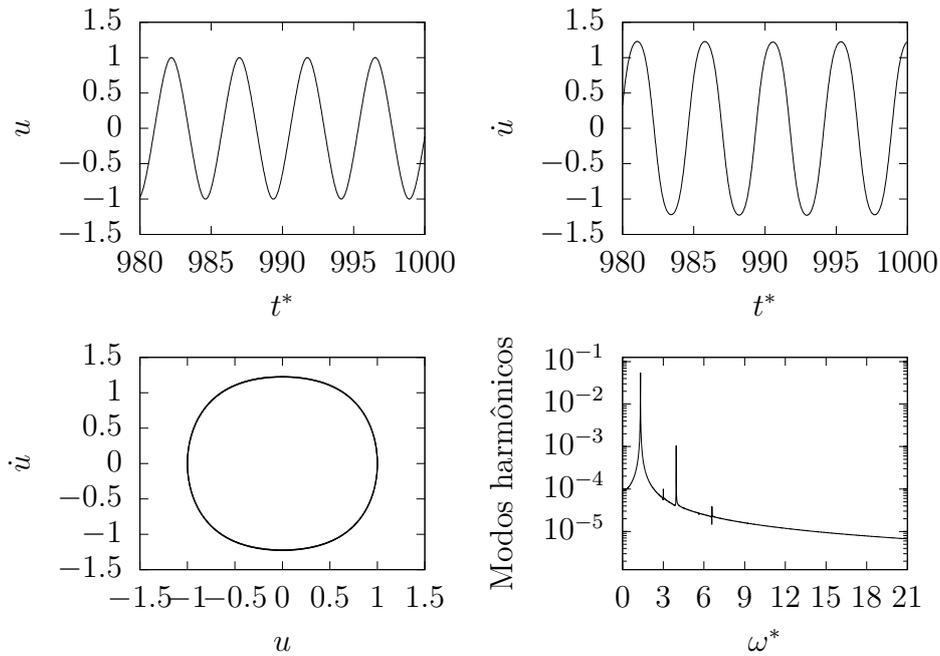


Figura 29 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 0,01$ e $\varepsilon = 1$.

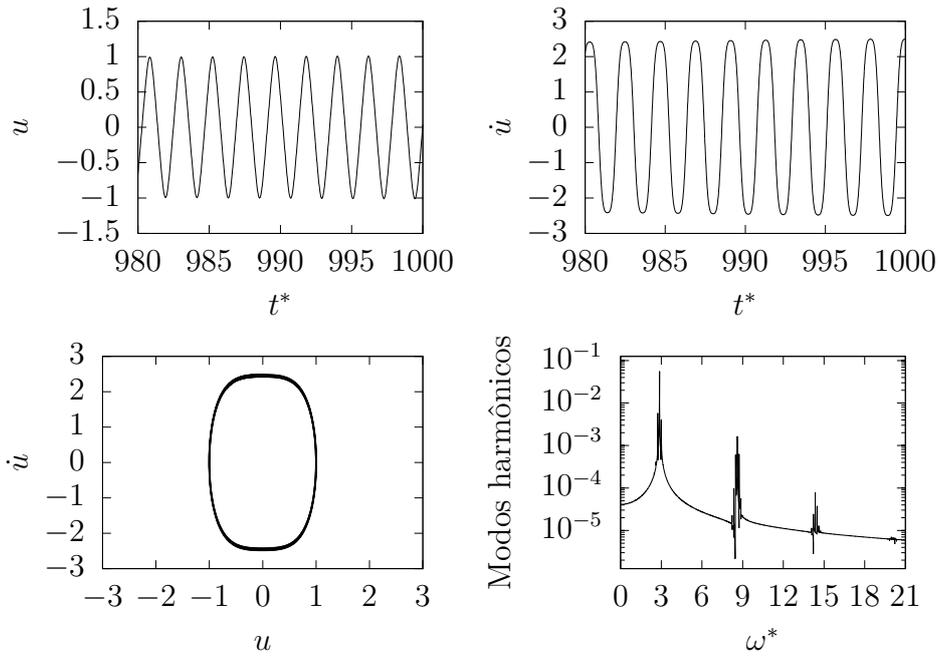


Figura 30 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 0,01$ e $\varepsilon = 10$.

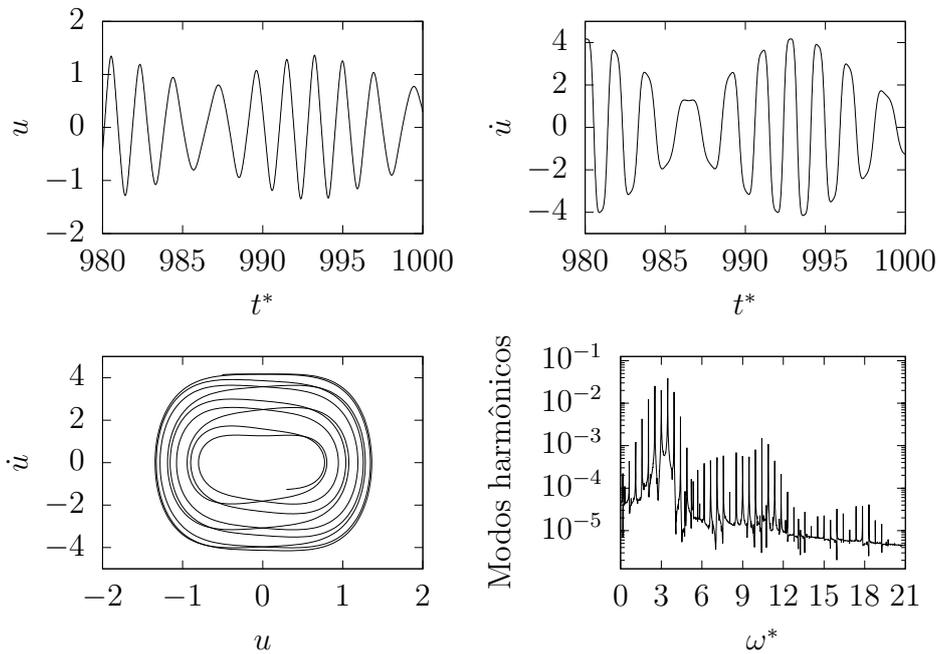


Figura 31 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear com forçamento harmônico para $\beta = 1$ e $\varepsilon = 10$.

Esses últimos resultados mostram que a não linearidade sozinha causa poucas perturbações no sistema. Somente com a presença do forçamento com alta amplitude, surgem respostas com alto grau de não linearidade.

3.4.4 Análise do oscilador não linear amortecido e forçado

Agora a equação do movimento é a completa dada por (3.4) e pelas condições iniciais em (3.5). Avaliando os efeitos da excitação externa e da não linearidade nas seções anteriores, o interessante nessa etapa é observar como o amortecimento influencia na resposta. Para isso, é necessário distinguir os casos subamortecido ($\zeta < 1$), criticamente amortecido ($\zeta = 1$) e superamortecido ($\zeta > 1$).

3.4.4.1 Caso subamortecido

Para avaliar o sistema no subamortecimento, escolheu-se para a entrada do programa $\zeta = 0,5$. A frequência de excitação, de início, manteve-se igual a 3, e os outros dois parâmetros β e ε , variou-se na mesma ordem de grandeza, como na seção 3.4.3.

O que se notou de imediato, foi uma maior influência da solução particular e no regime permanente o sistema respondia com amplitudes mais baixas, como é próprio do amortecimento, já que se trata de uma dissipação de energia. Contudo, mesmo em regime subamortecido, ou seja, o amortecimento fraco, notou-se que o sistema responde com uma característica mais próxima a da linear, mesmo com β e ε grandes. Isso fica claro pela Fig. 32, em que mesmo para β e ε iguais a 10, o sistema apresenta baixa não linearidade, o contrário visto em 27. No espaço de amplitude e frequência, só dois picos são visíveis, um maior para frequência igual a 3 (valor da frequência de excitação) e outro menor para frequência 9.

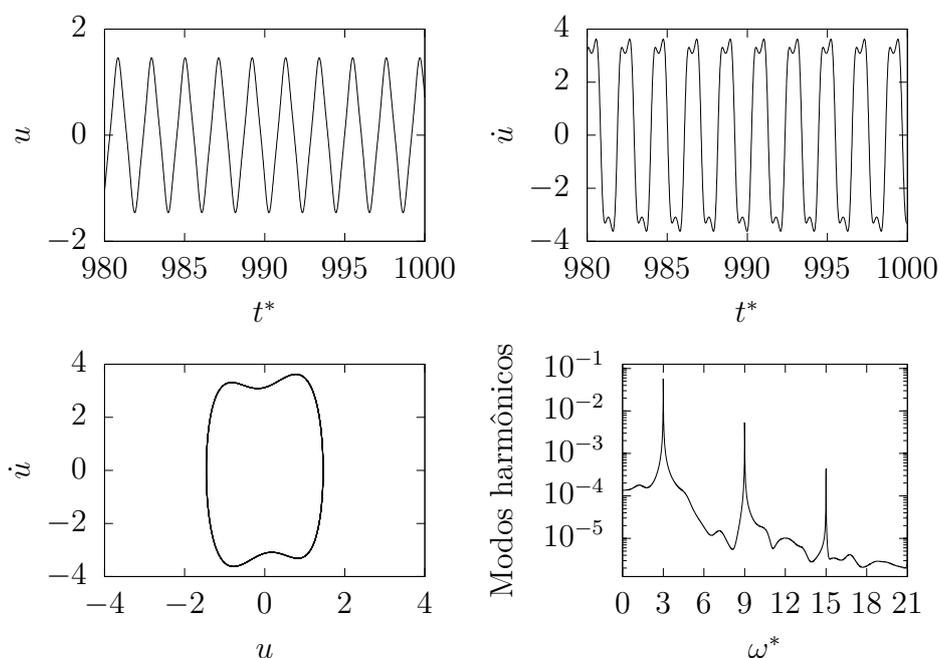


Figura 32 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 10$, $\varepsilon = 10$ e $\zeta = 0,5$.

3.4.4.2 Caso criticamente amortecido

A mesma metodologia anterior foi seguida para $\zeta = 1$, e introduzindo β e ε iguais a 10 o resultado é bastante semelhante ao da Fig. 32, como mostra, por sua vez, a Fig 33, na qual o sinal da velocidade tende a ser mais comportado.

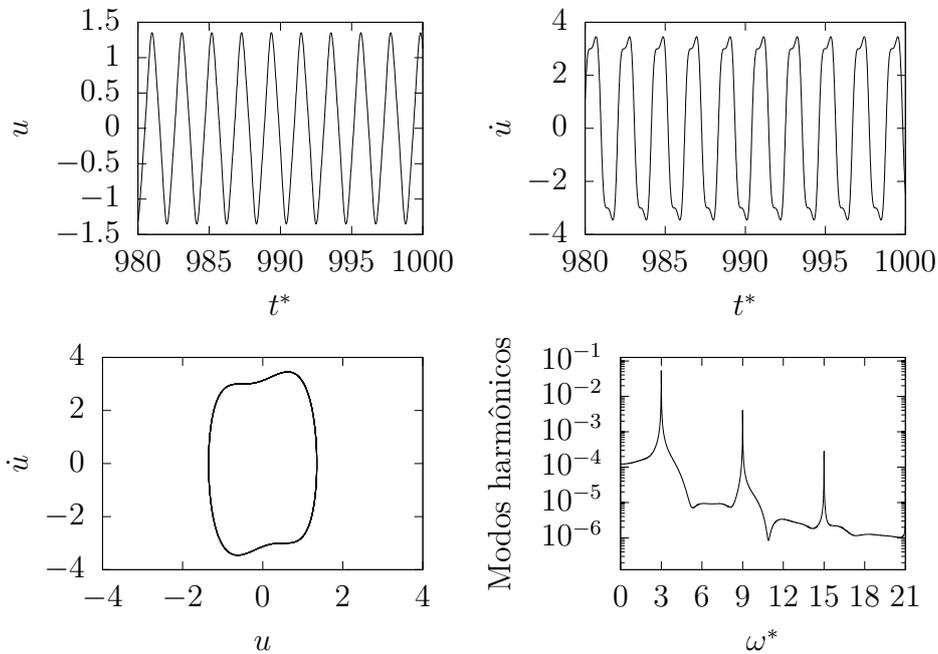


Figura 33 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 10$, $\varepsilon = 10$ e $\zeta = 1$.

Crescendo a amplitude de excitação e a não linearidade na mesma ordem de grandeza, notou-se mais claramente, como mostra a Fig. 34, que, no extremo da não linearidade e da excitação, observa-se picos de amplitude associados a frequências múltiplas da de excitação.

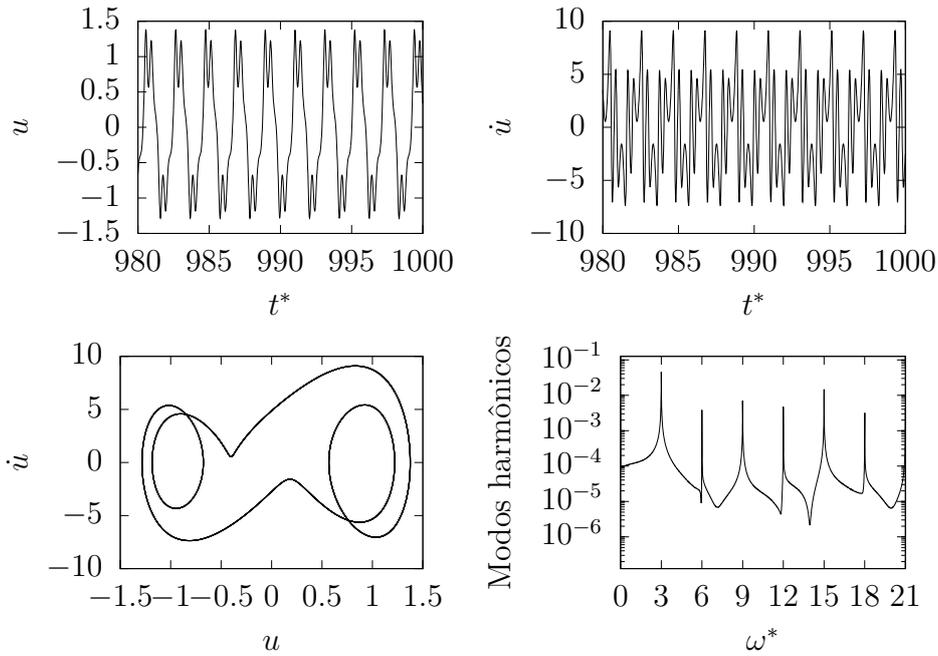


Figura 34 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$ e $\zeta = 0,5$.

Plotou-se ainda os gráficos apresentados na Fig. 35 para se evidenciar, pelo espectro de frequências, que a resposta apresenta frequências múltiplas da de excitação. No caso de múltiplos pares, como é o caso ($\omega^* = 2$), surgem apenas picos para frequências múltiplas ímpares da excitação.

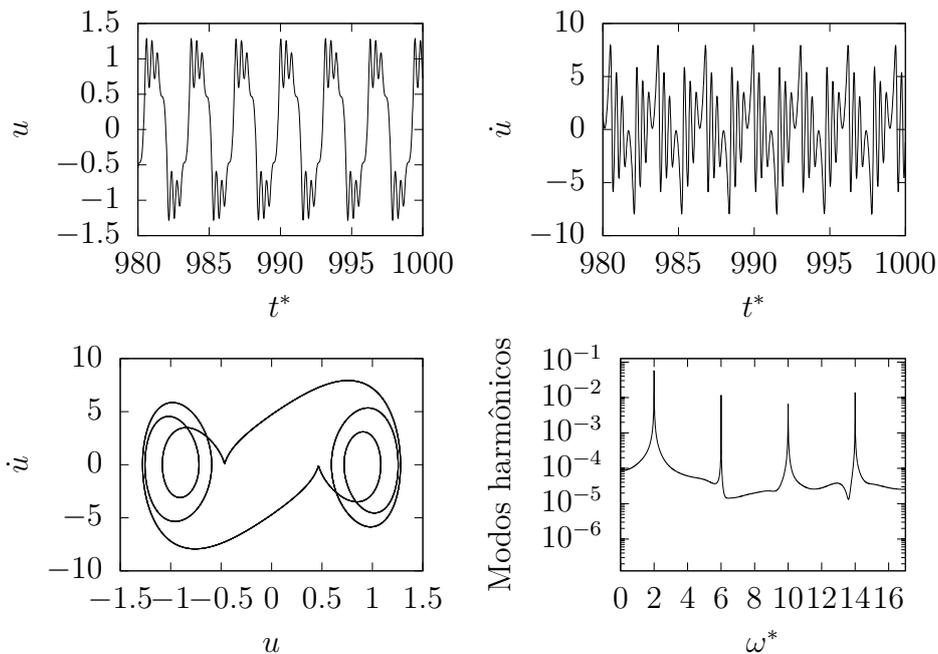


Figura 35 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 1$ e $\omega^* = 2$.

Disso, pode-se dizer que, mesmo apresentando uma excitação externa de elevada amplitude e uma não linearidade forte, o sistema, na presença do amortecimento, pode ser descrito como uma solução semelhante a séries de Fourier, em que existe a combinação de harmônicos, cujas frequências são múltiplas da de excitação. Algo semelhante a:

$$u = A_1 \cos(\omega^* t) + A_2 \cos(2\omega^* t) + A_3 \cos(3\omega^* t) + \dots \quad (3.13)$$

O que corrobora a dissipação de energia causada pelo amortecimento, levando a uma resposta mais comportada, mesmo com uma não linearidade forte.

Na Figura 36, apresenta-se o resultado para uma frequência de excitação mais alta ($\omega^* = 9$), demonstrando-se que, para altas frequências, a escala de tempo diminui, fazendo com que o sistema responda com poucos períodos e, portanto, de forma mais comportada que o visto na Fig. 34.

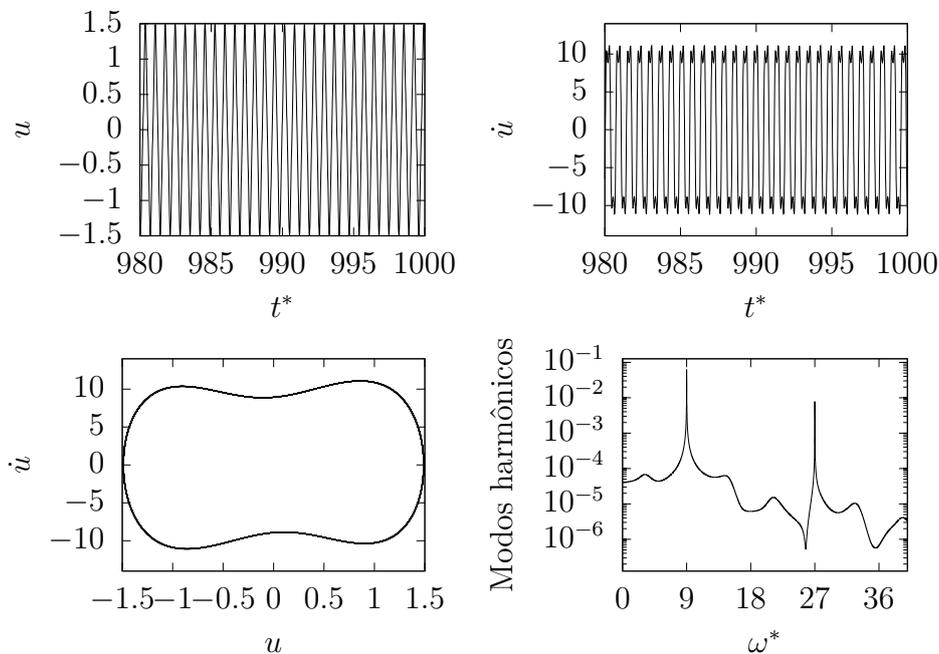


Figura 36 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 1$ e $\omega^* = 9$.

3.4.4.3 Caso superamortecido

Para $\zeta > 1$, espera-se que o sistema apresente um comportamento cada vez mais próximo do linear, e, como confirma a Fig. 37, foi o que se observou quando se fez $\zeta = 5$. Além disso, com $\omega^* = 9$, essa tendência à linearidade foi reforçada, como se discutiu na seção anterior.

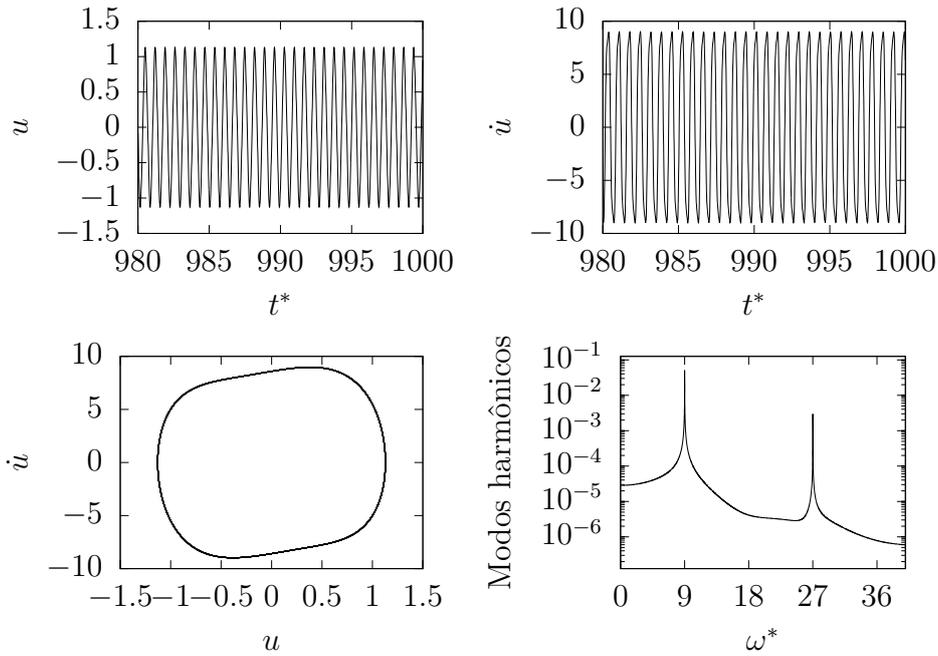


Figura 37 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 5$ e $\omega^* = 9$.

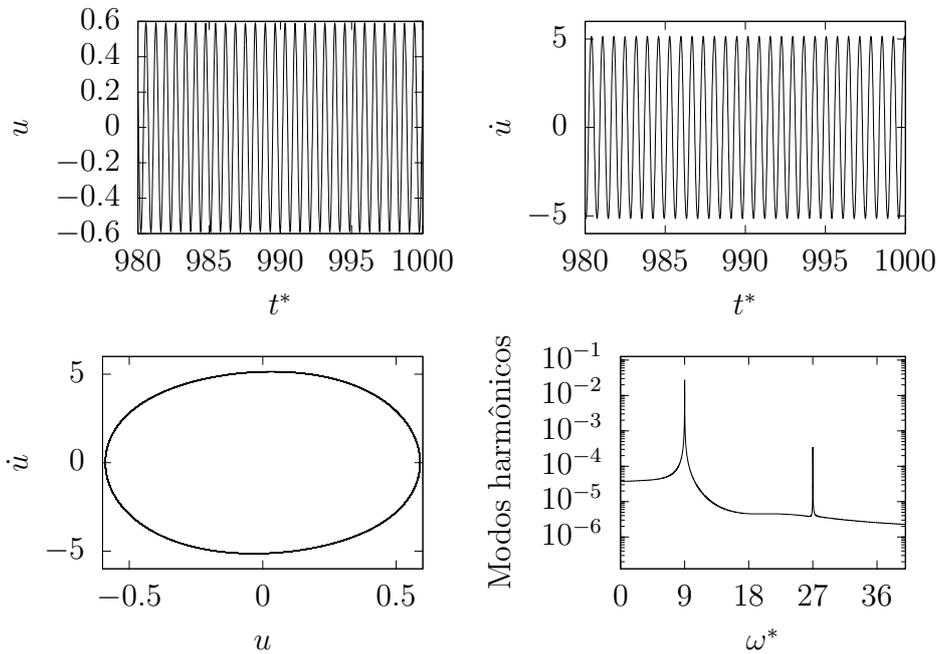


Figura 38 – Sinal do deslocamento, sinal da velocidade, diagrama de fase e espectro de amplitude e frequência para o oscilador harmônico não linear amortecido com forçamento harmônico para $\beta = 100$, $\varepsilon = 100$, $\zeta = 9$ e $\omega^* = 9$.

Visto esses últimos resultados, pode-se dizer que respostas com amortecimento ou frequências de excitação elevadas não são tão recomendáveis para se comparar com sistemas reais. Altas frequências envolvem tempos de resposta muito curtos e consequentemente o sistema do cabo responde a excitação em um regime aproximadamente linear.

De modo geral, pelo modelo pode-se capturar respostas em regimes quase caóticos, para altos valores de amplitude de excitação e não linearidade com amortecimento e frequências de excitação baixas, como também regimes de caráter mais linear, aumentando-se o amortecimento ou a frequência de excitação. Dessa maneira, o modelo concentrado é um potencial para o desenvolvimento de modelos mais realísticos nesse estudo de oscilação de cabos condutores, os quais, por sua vez, possivelmente possuem características não linearidades devido à sua própria estrutura interna de arames entrelaçados, constituídos por vezes de materiais distintos.

No capítulo seguinte, descreve-se um ensaio de cabos reais, cujos dados coletados serão aproveitados para gerar resultados semelhantes aos apresentados neste capítulo, para então poder ajustar o modelo concentrado aqui desenvolvido e gerar respostas semelhantes, ao menos qualitativamente, às observadas através do experimento.

4 Metodologia Experimental

Os ensaios, cuja metodologia e aparatos são descritos nesse capítulo, têm por objetivo o estudo da fadiga a partir do deslocamento vertical máximo admissível que o pico do anti-nó do cabo pode atingir. O condutor ensaiado é do tipo CAL (Cabos de Alumínio Liga) 1120 fixo por grampos CGS (Grampo de Suspensão *Cushion-Grip*). É uma combinação de condutor e grampo que vem sendo largamente empregada em campo nas instalações de rede elétrica, mas com pouquíssimos estudos científicos que explorem o problema da fadiga para esse caso. Daí a importância desses ensaios.

Todavia, para o presente trabalho, que possui um carácter de análise dinâmica do problema da oscilação em cabos, aproveitou-se dos ensaios os dados de aceleração coletados ao longo do tempo nos acelerômetros. Por integração numérica, esses dados eram convertidos em dados de velocidade e deslocamento, que por sua vez, serviram para obter sinais de deslocamento e velocidade no tempo, em pontos do cabo. Tais dados eram coletados por quatro acelerômetros dispostos próximos a uma extremidade fixa do cabo, de maneira que o último acelerômetro se encontrasse no pico do anti-nó.

Com os sinais de deslocamento e velocidade, gerou-se diagramas de fase e transformadas rápidas de Fourier do deslocamento para, em fim, ajustar o modelo concentrado para que os resultados se aproximem qualitativamente do que se observar dos resultados experimentais.

4.1 Bancada Experimental

A bancada de ensaios de cabos do Laboratório de Fadiga e Integridade Estrutural de Cabos Condutores da Universidade de Brasília possui um vão total de 46,8 m, subdividido em: vão ativo e vão passivo. O vão ativo consiste no espaço no qual o cabo será submetido a ensaio. Está limitado entre o centro da roldana do bloco fixo e o centro do grampo de suspensão, localizado no bloco móvel, o qual possibilita o ajuste do tamanho do vão, podendo ser alterado de acordo com o tipo de ensaio, variando de 31 a 43 m. Por sua vez, o vão passivo tem por única finalidade a fixação do condutor à bancada.

Na Figura 39, a bancada é representada de maneira esquemática. Os blocos de concreto armado maciço servem para garantir a rigidez da montagem. O condutor é

arranjado sobre dois pontos de apoio, os quais funcionam como pontos de articulação. São eles: o grampo de suspensão e a roldana no bloco fixo. As extremidades do condutor são fixadas aos grampos de ancoragem para aplicação da carga de esticamento.

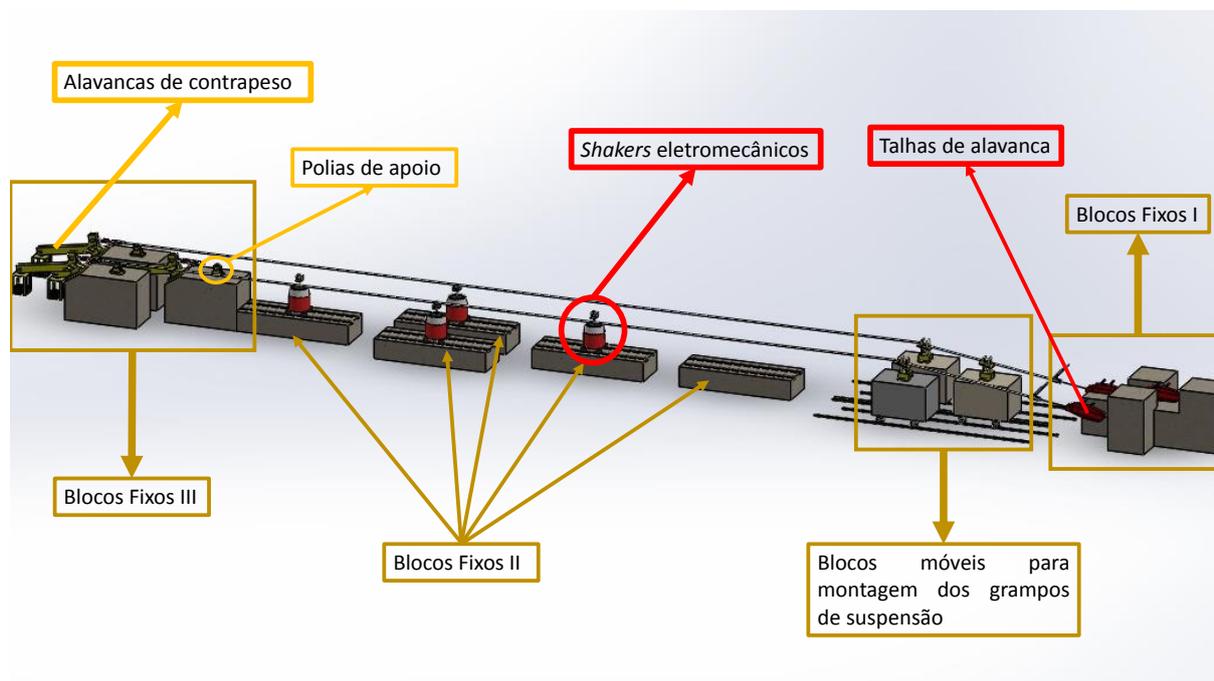


Figura 39 – Representação esquemática da bancada de ensaios.

Os grampos de ancoragem são fixados aos blocos fixos I através de uma talha de alavanca (Fig. 40). Essa montagem permite submeter o condutor a uma carga de pré-esticamento, ajustando-se a altura do braço de alavanca na extremidade oposta, evitando que este fique muito baixo.



Figura 40 – Talha de alavanca ancorada ao bloco fixo (ROCHA, 2006).

Os braços de alavanca (Fig. 41), situados nos blocos fixos III, têm função de aplicar a carga de esticamento na amostra. Essa carga é monitorada por meio de uma célula de carga posicionada entre o braço de alavanca e o grampo de ancoragem (Fig. 42).



Figura 41 – Braço de alavanca (ROCHA, 2006).



Figura 42 – Da esquerda para a direita: célula de carga, grampo de ancoragem e polia de apoio.

Os blocos móveis estão sobre espessas chapas de aço fixadas sobre dois eixos dotados de rolamentos nas extremidades. Os trilhos estão fixados no piso do laboratório para

permitir a variação do comprimento do vão ativo, movimentando-se os blocos móveis. E os blocos fixos II servem de apoio para os *shakers*.

Além dos componentes supracitados, a bancada é equipada com um sistema de ar condicionado para manter a temperatura ambiente aproximadamente constante durante os ensaios e um sistema de controle vibratório (computador, controlador, amplificador e sensores).

4.2 Materiais Utilizados no Ensaio

4.2.1 Cabo condutor

O cabo condutor submetido aos ensaios foi o CAL 1120, ou AAAC/1120 823 MCM, que é feito de alumínio liga 1120. Esse cabo possui 37 fios de alumínio, cada um com diâmetro de 3,79 mm. Suas principais propriedades seguem na Tab. 4. O uso de condutores de alumínio liga 1120 é recente nas redes de transmissão de energia por causa das suas vantagens mecânicas e elétricas, quando comparas com outras ligas de alumínio tais como as 1350, 6201 e 5005.

Tabela 4 – Tabela com as propriedades relevantes do condutor.

Propriedades do Cabo	
Carga de Ruptura (<i>kgf</i>)	9705
Carga de Ruptura (<i>N</i>)	95206
Massa Linear (<i>kg/m</i>)	1,150
Peso Nominal (<i>N/m</i>)	11,278
Densidade (<i>kg/m³</i>)	2700
Diâmetro Nominal (<i>mm</i>)	26,53
Rigidez Total do Cabo	$2,586 \cdot 10^7 Nmm^2$

4.2.2 Grampo de suspensão

O grampo de suspensão usado nos ensaios (Fig. 43) foi o CGS (*Cushion Grip Suspensions*), destinado para condutores de alumínio e projetados para reduzir as tensões estáticas e dinâmicas no ponto de suporte, protegendo o condutor dos efeitos das oscilações. A inserção de elastômero objetiva proteger contra a abrasão, o desgaste e a fadiga.



Figura 43 – Grampo CGS.

4.2.3 Grampo de Ancoragem

O grampo de ancoragem é que faz a ligação do cabo à alavanca de contrapeso, possibilitando aplicar a carga de esticamento. O modelo utilizado nos ensaios é fornecido pela Forjatsul e é fabricado em liga de alumínio não magnética isenta de cobre e elevada resistência mecânica. A Tabela 5 mostra algumas especificações do grampo.

Tabela 5 – Tabela com algumas propriedades do grampo de ancoragem.

Modelo	Diâmetro máximo (mm)	Diâmetro mínimo (mm)	Carga de Ruptura (kgf)	Torque máximo (Nm)	Massa (kg)
55121/003	31	23	13,5	90	5,8

4.2.4 Shaker Eletromecânico

O *shaker* é o equipamento responsável por introduzir potência ao sistema, sendo capaz de gerar movimentos senoidais nas frequências modais do condutor.

Nos ensaios foi utilizado um *shaker* eletromecânico da marca *Data Physics*, modelo V400/DSA5-2k (Fig. 44). Este equipamento tem um limite de força senoidal de 4,6 kN e de força randômica de 1,38 kN, deslocamento máximo de 25,4 mm pico-pico e faixa de frequência DC-3kHz.



Figura 44 – *Shaker* eletromecânico.

4.2.5 Sensores

Dois tipos de sensores foram essenciais na realização dos ensaios. O primeiro tipo foi a célula de carga, já mencionada anteriormente, que permite medir a carga de esticamento imposta ao cabo. O segundo foi o acelerômetro para obter sinais de aceleração nos pontos de interesse sobre o condutor. Para esses ensaios foram utilizados cinco acelerômetros, cada um deles com uma massa suficientemente pequena para não interferir no sistema.

4.3 Procedimento Experimental

4.3.1 Montagem da amostra

Os seguintes procedimentos foram seguidos para a montagem do ensaio:

1. O condutor é desenrolado da bobina (Fig. 45), que fica atrás dos blocos fixos I, e estendido ao longo do vão sobre polias de apoio (Fig. 46). Nesse caso, o vão ativo ajustado foi de 43 m;



Figura 45 – Cabo enrolado na bobina (MIRANDA, 2017).



Figura 46 – Polias de apoio.

2. Seguido disso, o grampo de suspensão CGS é colocado em sua posição no bloco móvel (Fig. 47);



Figura 47 – Grampo CGS montado à bancada.

3. Ambas as extremidades do cabo são são fixadas nos grampos de ancoragem. É importante que o aperto se dê de maneira gradual para que não ocorra o empenamento dos grampos;
4. Aplica-se uma pré carga de 50% da de ensaio na talha de alavanca usando o tifor (Fig. 48);



Figura 48 – Aplicação de pré carga usando tífor (ROCHA, 2006).

5. Abaixa-se a gaiola de contrapeso para se atingir a carga de ensaio final (Fig. 49). Eventual ajuste da gaiola se faz necessário;

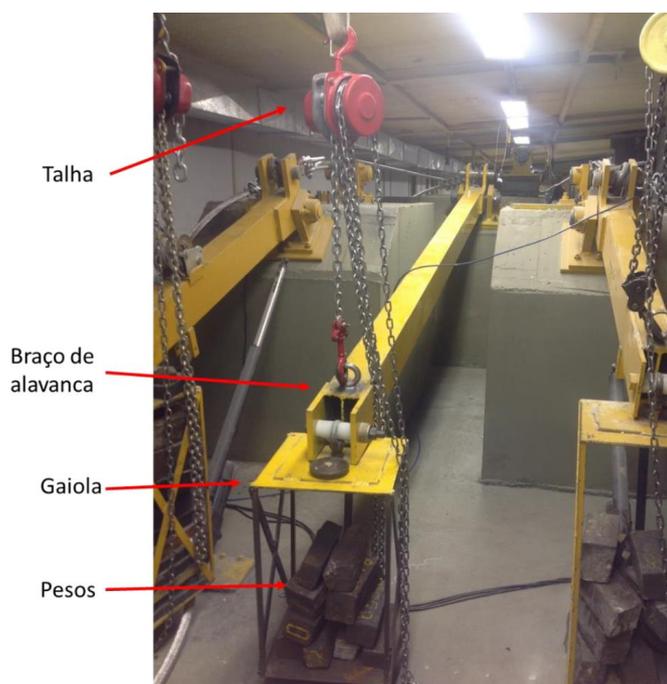


Figura 49 – Sistema de tracionamento do cabo por braço de alavanca (MIRANDA, 2017).

6. Retira-se as polias de apoio ao longo do vão;
7. Terminado o processo de ancoragem do condutor, espera-se 6 horas para a acomodação dele por fluência antes de se iniciar o processo de instrumentalização.

4.3.2 Metodologia experimental

A metodologia que se seguiu tem por fim o cálculo da tensão dinâmica no condutor a partir do deslocamento vertical Y_b de um ponto do cabo localizado a 89 mm do grampo de suspensão. Essa distância é uma especificação estabelecida pelo IEEE, (CHAN et al., 2009) e (LIU et al., 2011), para que a relação entre vibração do cabo e o grau de fadiga possa ser confiável. Assim, os detalhes dessa metodologia estão longe de importar para o presente projeto, uma vez que fogem muito do escopo de análise dinâmica. O que interessa é a instrumentalização para se seguir a metodologia prescrita.

Assim sendo, a instrumentalização da bancada foi realizada com a seguinte metodologia:

1. Com o cabo já devidamente instalado e acomodado à bancada, faz-se uma varredura de frequências através do software *Shaker Control*;
2. Excita-se o cabo em uma frequência próxima a uma natural, medindo-se em seguida, com uma régua, o tamanho dos ventres formados pelo modo de vibração, identificando-se os nós e anti-nós;
3. Posiciona-se o primeiro acelerômetro a 89 mm do grampo de apoio, a fim de se monitorar a amplitude da vibração naquele ponto;

- Os outros quatro acelerômetros são posicionados de maneira tal que o quinto acelerômetro se encontre no pico do anti-nó do ventre que está adjacente ao grampo de apoio, ou seja, o ponto no qual o grampo se encontra é um nó da forma modal;

Na Figura 50, apresenta-se um diagrama esquemático do final da montagem dos acelerômetros sobre o condutor e na Tab. 6, estão indicados as distâncias de cada acelerômetro com relação ao grampo de apoio, para cada carga de esticamento aplicada sobre o cabo. Como se pode observar, foram aplicados três níveis de tensão diferentes sobre o condutor, correspondentes a 15%, 20% e 25% do limite de ruptura do cabo.

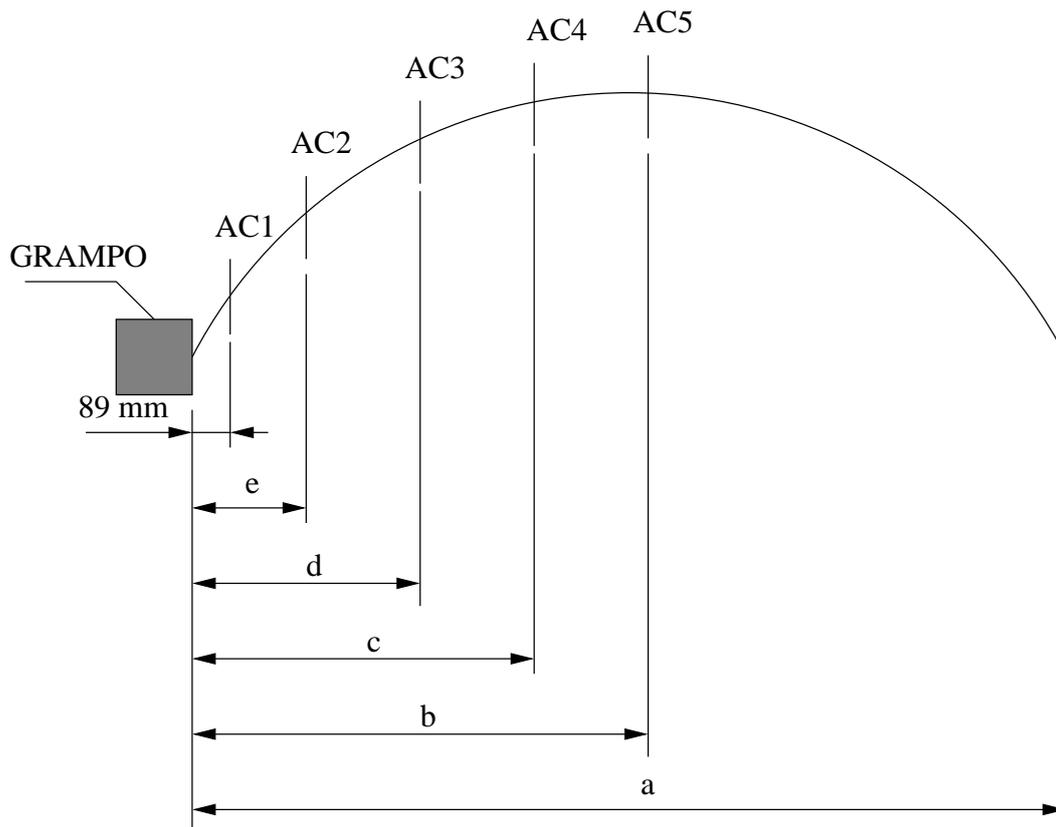


Figura 50 – Esquema da instrumentação dos acelerômetros sobre o cabo.

Tabela 6 – Tabela relacionando nível de tensão aplicada sobre o condutor, valores de Y_b , localização dos acelerômetros e frequência de excitação.

	Y_b (mm)	freq. (Hz)	a (cm)	b (cm)	c (cm)	d (cm)	e (cm)
15% UTS	0,2	23,33	262,4	131,2	98,41	65,57	32,79
	0,4	23,27					
	0,6	23,33					
	0,8	23,33					
	1,0	23,33					
20% UTS	0,2	22,56	308	154	115,5	77	38
	0,4	22,56					
	0,6	22,44					
	0,8	22,44					
	1,0	22,44					
25% UTS	0,2	25	287	143,5	107,6	71,7	35,9
	0,4	24,91					
	0,6	24,91					
	0,8	24,91					
	1,0	24,91					

Para cada nível de tensão aplicado sobre o cabo é necessário fazer uma nova varredura de frequências, porque as frequências naturais do cabo alteram um pouco seu valor com a tensão aplicada. Por isso, observa-se na Tab. 6 frequências de excitação diferentes para cada caso de tensão. Pela mesma tabela, também mostra-se que foram coletados dados para cinco níveis diferentes de Y_b , variando de 0,2 mm a 1,0 mm, a cada 0,2 mm. E esse controle é feito aplicando-se no *shaker* a amplitude e frequência de excitação necessárias.

Os dados coletados são de aceleração no tempo nos quatro acelerômetros (pelo acelerômetro 1 controla-se Y_b), para cada nível de tensão aplicada e para cada amplitude Y_b de controle. A frequência de aquisição de dados foi de 800 Hz durante 15 segundos. Uma vez obtido todos os dados, integrou-se numericamente uma vez para se obter a velocidade em cada ponto e uma segunda vez para se obter o deslocamento.

5 Resultados Experimentais e Comparação com o Modelo Concentrado

Nesse capítulo, apresenta-se os resultados experimentais do ensaio do cabo junto com os resultados do modelo concentrado, ajustado aos parâmetros do condutor de maneira a obter respostas que se aproximassem do observado nos resultados experimentais.

5.1 Resultados a partir dos dados experimentais do cabo

Todos os resultados que se seguem foram gerados a partir dos dados coletados no acelerômetro 5, que se encontrava no pico máximo do anti-nó. Para cada tensão aplicada no cabo, existem cinco conjuntos de dados, cada um correspondendo a uma amplitude de controle no acelerômetro 1, que corresponde aos valores de Y_b impostos no experimento. Para a condição de tensão de 20% do limite de ruptura, há somente quatro conjunto de dados, porque os correspondentes à amplitude de 0,6 mm não foram fornecidos.

Como o modelo concentrado é adimensional, para fins de comparação, fez-se também a adimensionalização dos dados experimentais, utilizando os mesmos parâmetros característicos que foram utilizados na adimensionalização do modelo concentrado. Assim, o deslocamento vertical adimensional δ é a razão entre o deslocamento em metros e o diâmetro nominal do cabo de 23,53 mm (no caso, convertido para metros); o tempo adimensional t^* é o produto entre o tempo em segundos e a frequência natural na qual o cabo foi excitado, que por sua vez variou para cada tensão e amplitude de excitação (vide Tab. 6); a velocidade adimensional $\dot{\delta}$ foi a razão entre a velocidade dada em m/s e o produto entre o diâmetro nominal do cabo e a sua frequência natural.

Os cinco primeiros conjuntos de gráficos são para tensão de 15% do limite de ruptura aplicada sobre o cabo. Os quatro conjuntos seguintes são para tensão de 20% do limite de ruptura e, por fim, os cinco últimos conjuntos são para tensão de 25% do limite de ruptura.

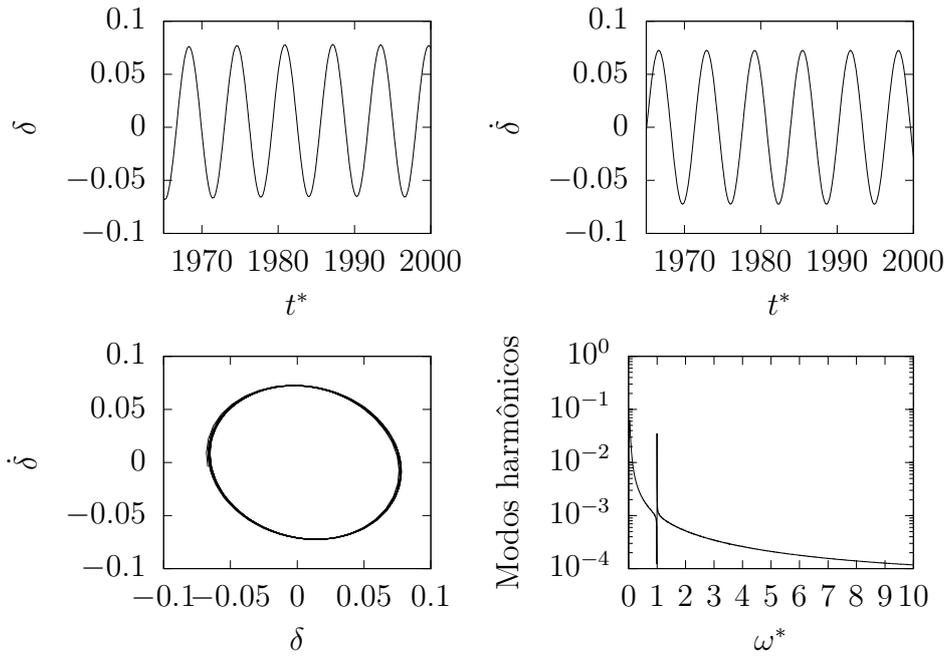


Figura 51 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1.

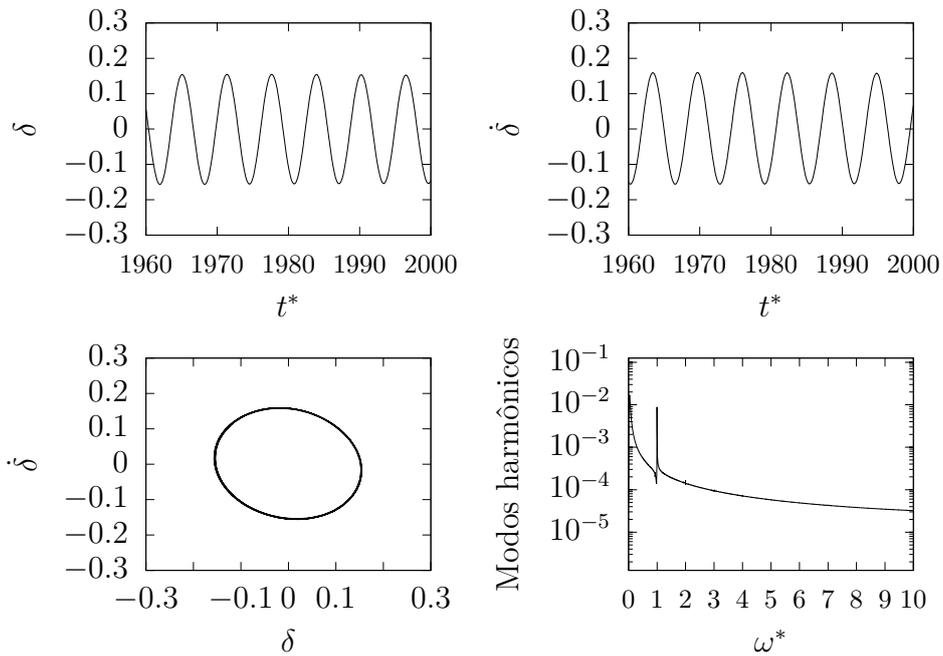


Figura 52 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1.

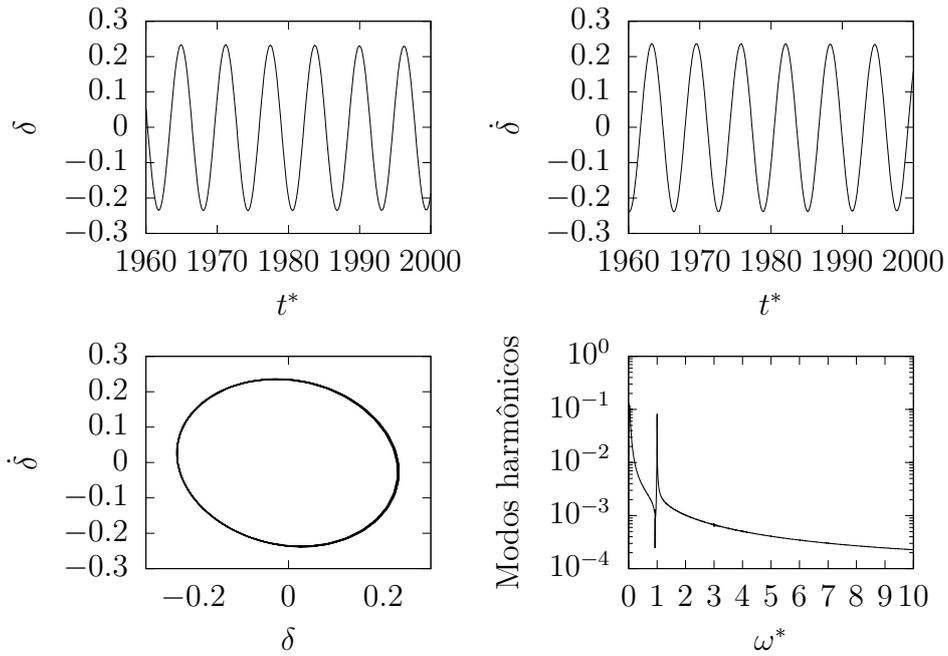


Figura 53 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,6 mm no acelerômetro 1.

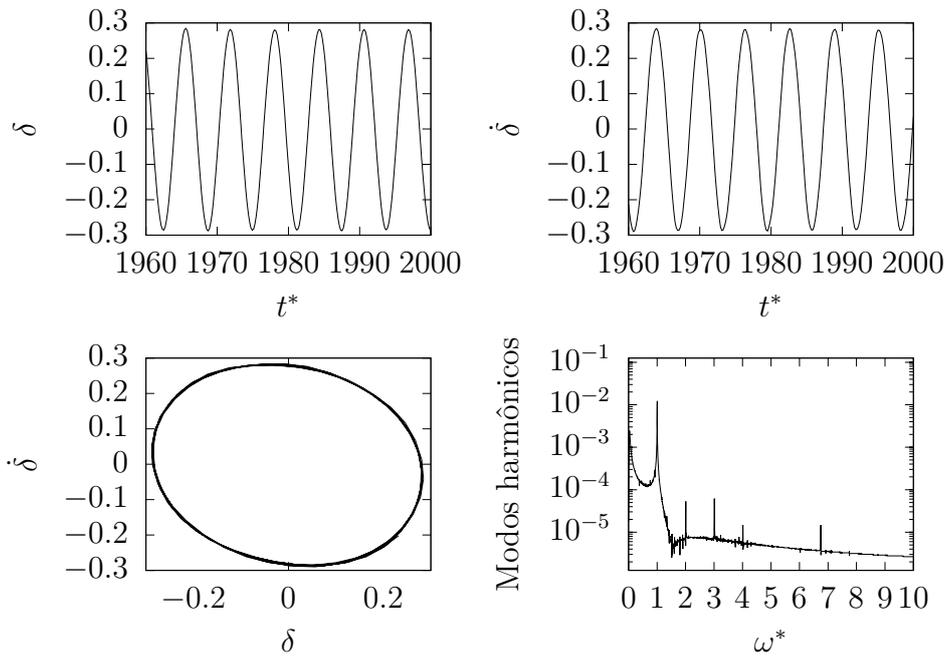


Figura 54 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1.

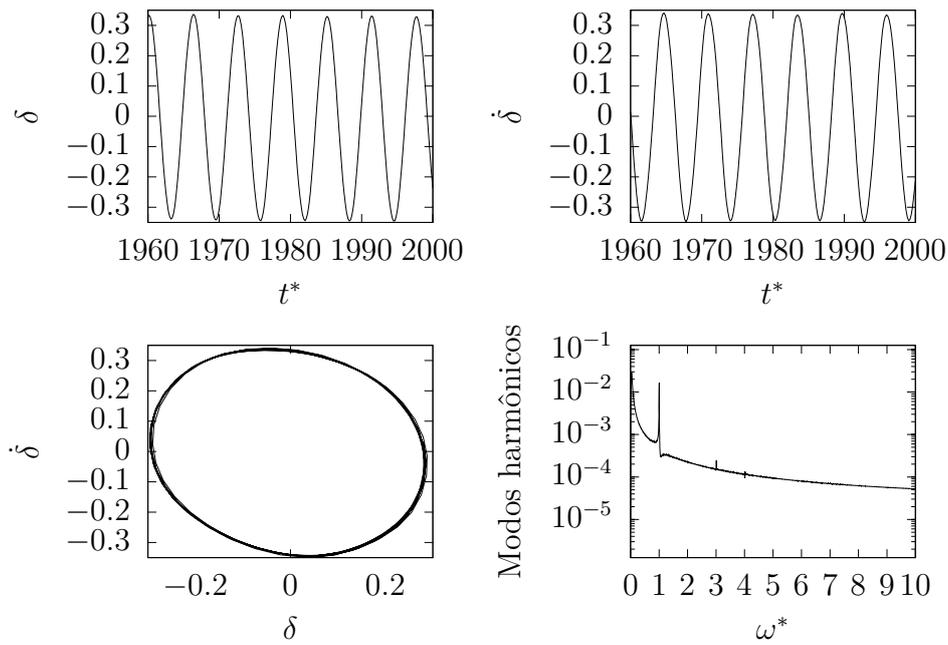


Figura 55 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 15% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1.

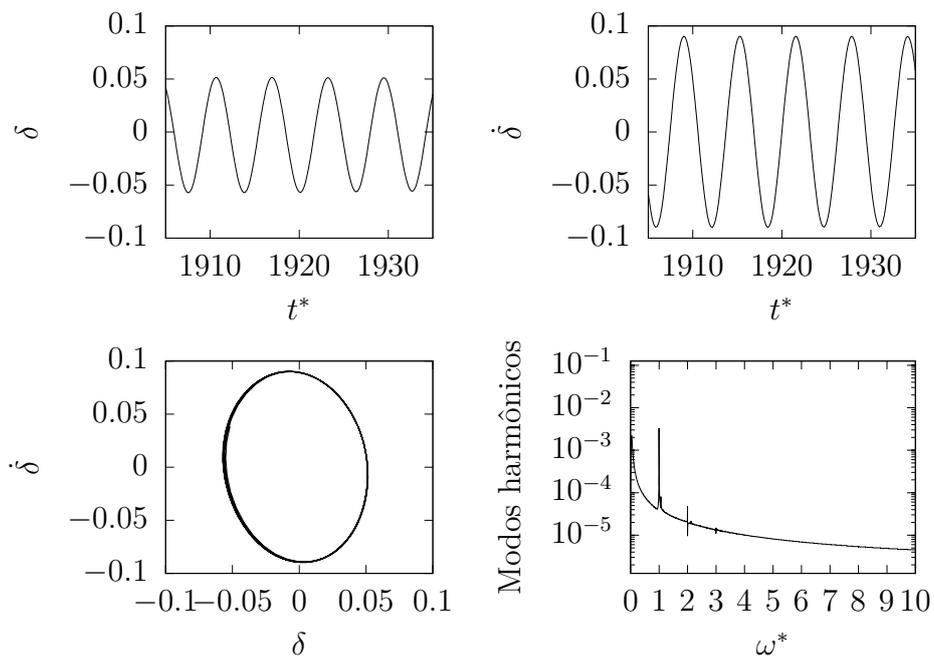


Figura 56 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1

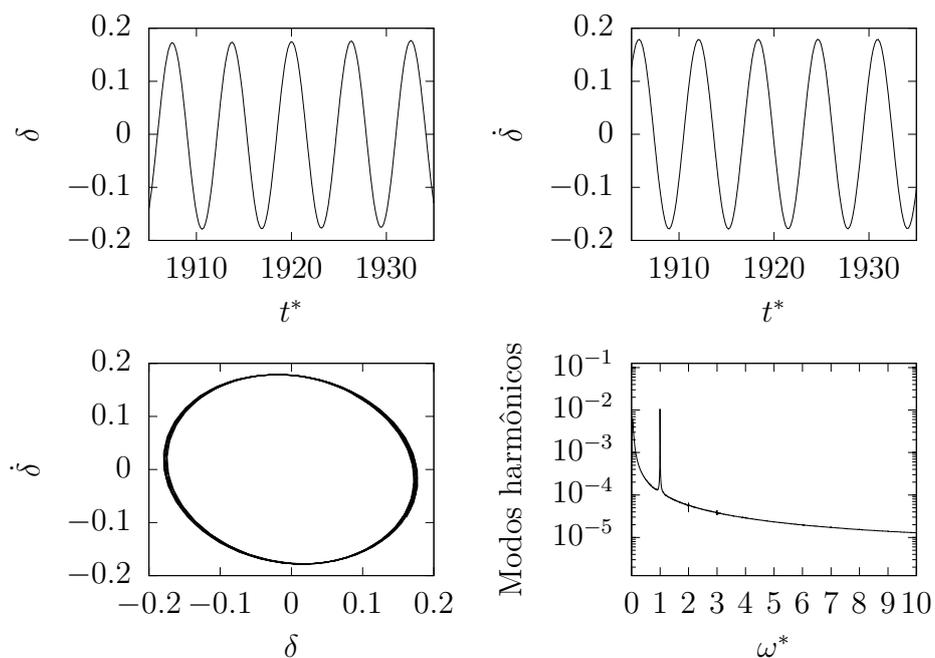


Figura 57 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1

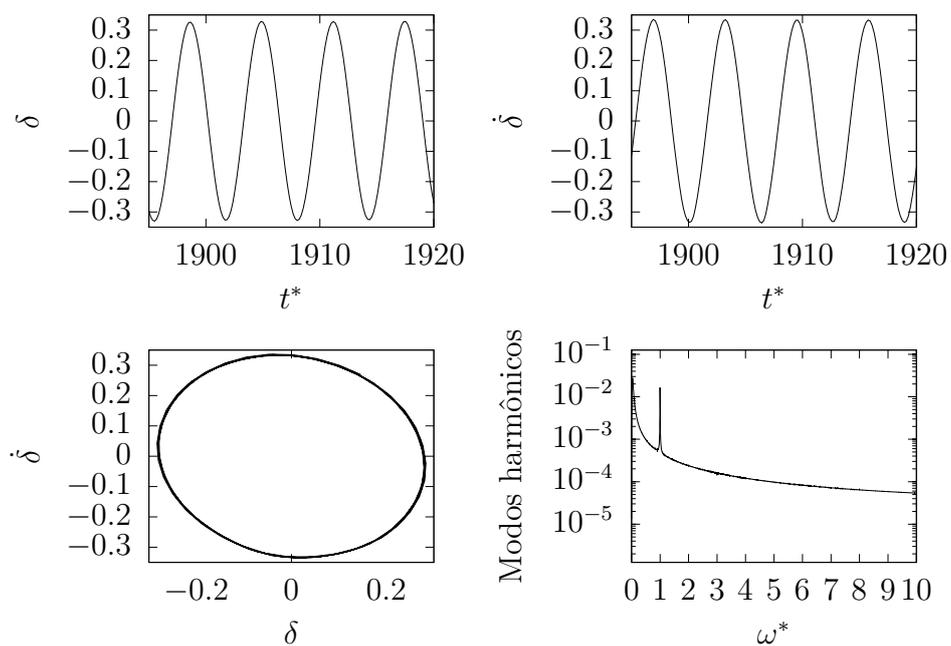


Figura 58 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1

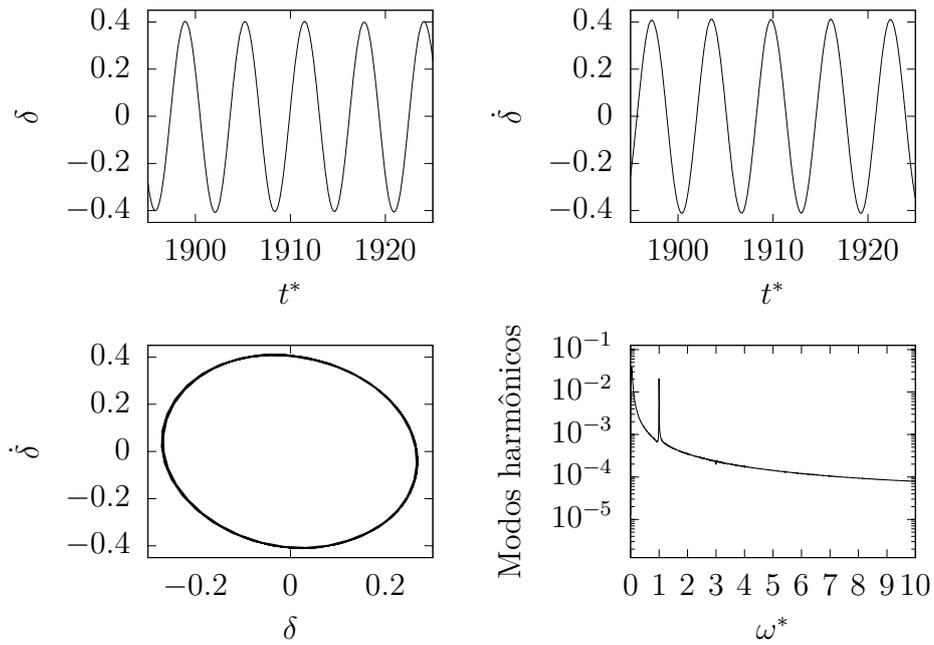


Figura 59 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 20% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1

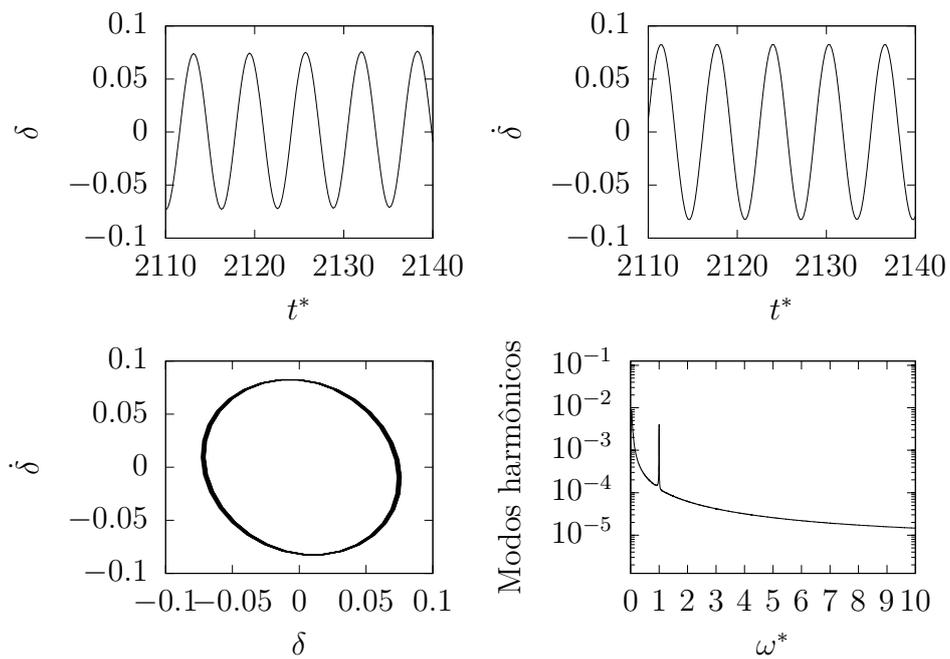


Figura 60 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,2 mm no acelerômetro 1

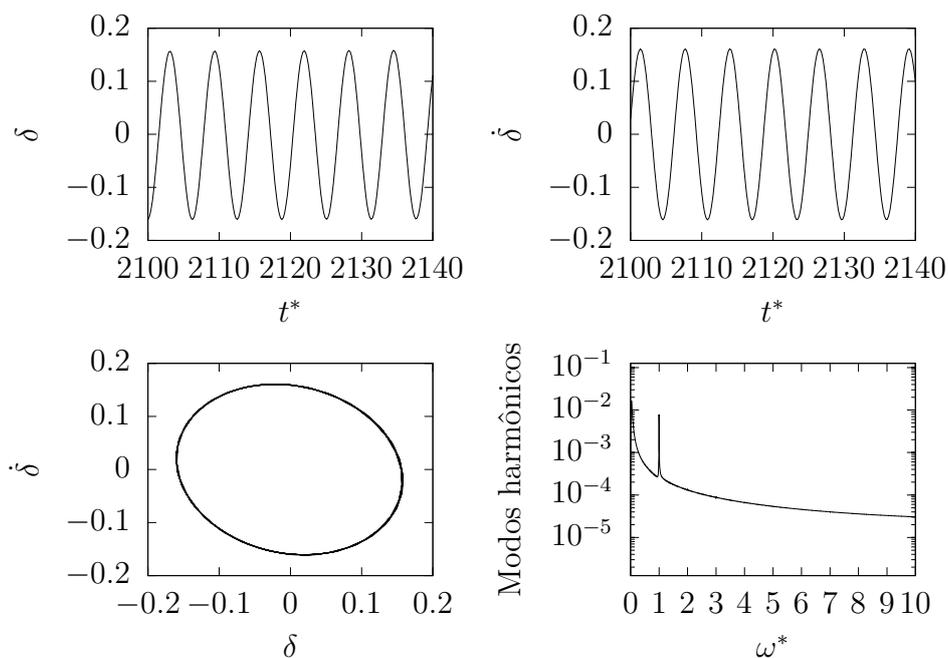


Figura 61 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,4 mm no acelerômetro 1

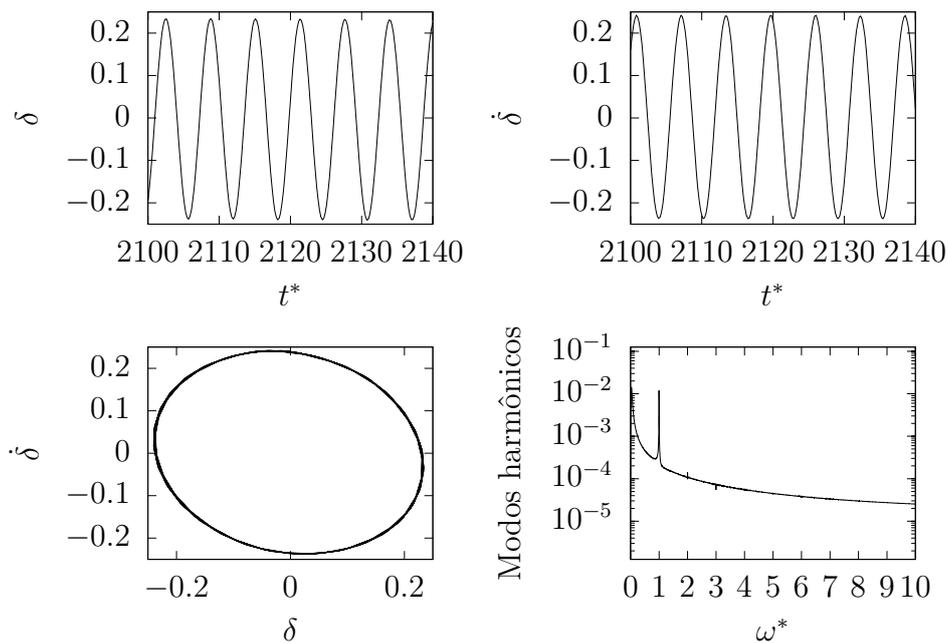


Figura 62 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,6 mm no acelerômetro 1

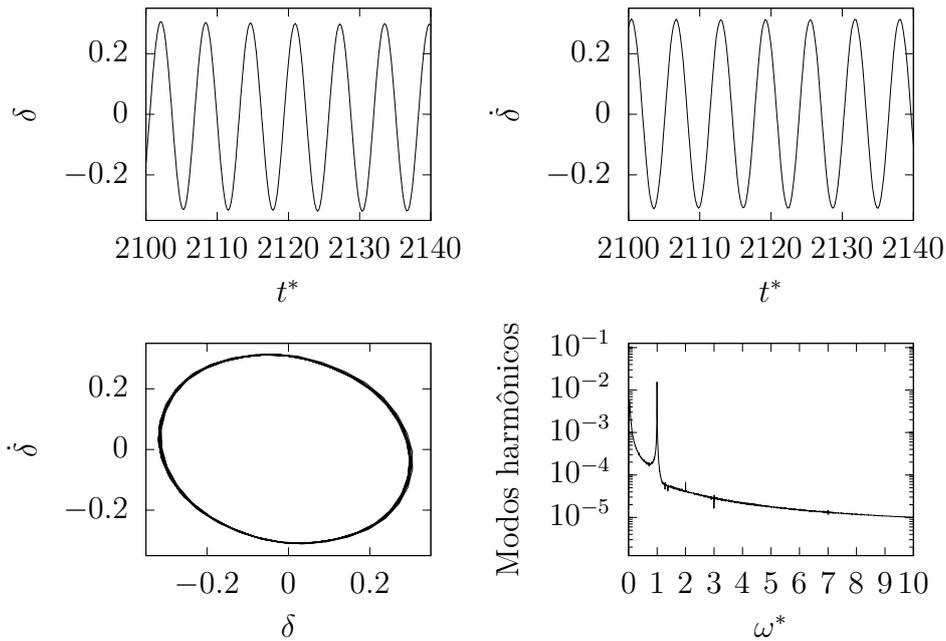


Figura 63 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 0,8 mm no acelerômetro 1

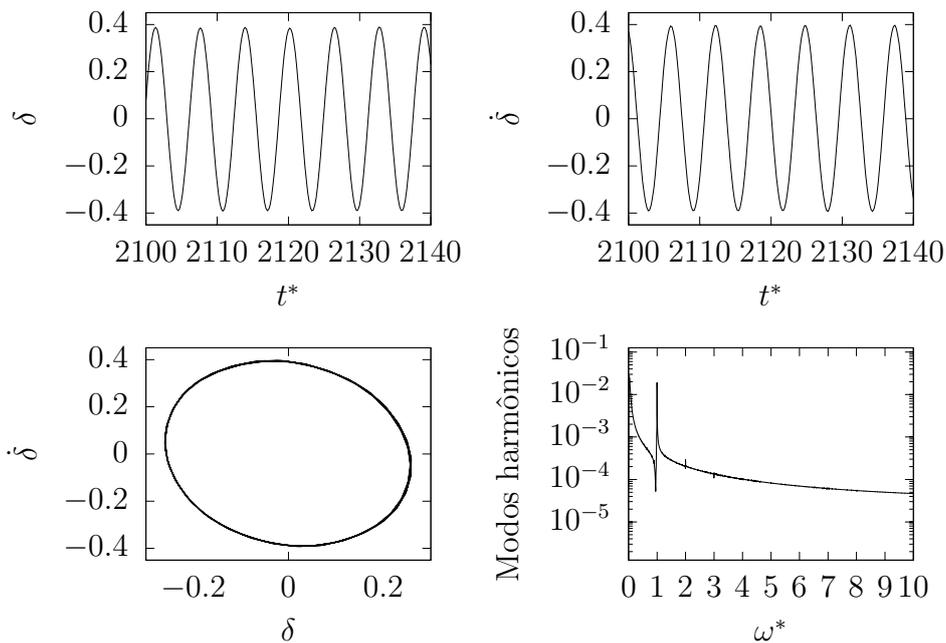


Figura 64 – Resultados experimentais para tensão aplicada no cabo de 25% do limite de ruptura e amplitude de 1 mm no acelerômetro 1

Desses resultados, observa-se que a oscilação em um ponto do cabo é quase linear para todas as situações, com exceção de alguns resultados, como o apresentado na Fig. 54, em que é possível identificar pelo espaço de amplitude e frequência um maior número de modos harmônicos, que podem se justificar por alguma não linearidade inerente à estrutura do próprio cabo ou, ao fato de a excitação imposta conseguir alcançar outros modos naturais devida a uma falta de precisão do sistema de *shakers*, pelo qual se tenta

alcançar uma frequência de excitação próxima (muito dificilmente igual) à uma natural específica do condutor. De qualquer maneira, o surgimento de outros modos tem pouca influência nas respostas. Se fosse aplicada uma excitação não linear sobre o cabo, como certamente ocorre em campo quando os cabos estão sujeitos a regimes de ventos, observar-se-ia respostas com um grau maior de não linearidade.

Observado os resultados obtidos pelo ensaio experimental, procedeu-se com a calibração do modelo concentrado a fim de se alcançar respostas similares às obtidas experimentalmente.

O modelo concentrado segue o padrão apresentado no Capítulo 3 pela equação (3.4). Porém as condições iniciais consideradas foram $u(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = 0$ (condição do cabo em repouso e na posição 0 no instante inicial). Os parâmetros ζ , β , ω^* e ε foram ajustados de maneira a melhor representarem as condições experimentais.

Assim, a amplitude de excitação β fez-se igual à amplitude de controle do acelerômetro 1 (Y_b) adimensionalizada pelo diâmetro nominal do cabo. Os valores de β correspondentes a cada amplitude de controle estão dispostos na Tab. 7.

Tabela 7 – Valores de β correspondentes a amplitude de controle no acelerômetro 1

Ampl. Ac. 1	β
0,2 mm	0,007
0,4 mm	0,015
0,6 mm	0,022
0,8 mm	0,030
1,0 mm	0,038

A frequência de excitação ω^* é igual a 1, uma vez que o cabo é excitado na sua frequência natural. O parâmetro adimensional ε corresponde a uma não linearidade atribuída ao coeficiente de restituição elástico, como apresentado na relação (3.1). Esse parâmetro é expresso por $\varepsilon = \frac{aA^2}{k}$, em que a é o parâmetro que define o grau de não linearidade em N/m^3 , o qual deve ser ajustado, dado que não foi mensurado experimentalmente. O coeficiente A , por sua vez, dado em metros, corresponde ao parâmetro característico usado para adimensionalizar o deslocamento vertical, que nesse caso, foi o diâmetro nominal do cabo. Por último, o coeficiente elástico k foi obtido do seguinte modo: pela rigidez do cabo EI (informada na tab. 4), obteve-se um valor de E considerando o momento de inércia como o de seção circular com o diâmetro nominal do cabo ($I = \frac{\pi d_n^4}{64}$); o valor de k foi obtido finalmente multiplicando-se E também pelo diâmetro nominal do cabo, pois corresponde ao coeficiente de restituição de uma seção transversal, resultando em um valor de $28212,84N/mm^2$.

Dessa maneira, substituindo k por esse resultado e A pelo diâmetro do cabo, obteve-se que $\varepsilon = a0.025$, sendo que a seria o parâmetro de ajuste do modelo junto com o amortecimento ζ , também indeterminado experimentalmente.

Então, o amortecimento e a não linearidade elástica foram ajustadas para obter respostas que se assemelhassem aos resultados experimentais. Esses parâmetros foram calibrados, por tentativa e erro, para a menor amplitude de excitação adimensional β e, quando se obteve um resultado satisfatório, gerou-se resultados para as demais amplitudes de excitação. Nas Figuras 65, 66, 67, 68 e 69, apresenta-se os resultados para amplitude de excitação β iguais a 0,007, 0,015, 0,022, 0,030 e 0,038, respectivamente.

O amortecimento foi ajustado para um regime de subamortecimento com $\zeta = 0.05$, o que é razoável dado que o amortecimento imposto pelo ar sobre o cabo é muito pequeno. Ajustou-se o parâmetro não linear $a = 4N/m^3$ de forma que ε resultasse em 0,1. Uma vez que os experimentos demonstraram resultados praticamente lineares, para o modelo, a não linearidade deveria ser baixa a fim de se capturar esse comportamento experimental mais linear.

5.2 Resultados do modelo concentrado ajustado aos parâmetros do cabo

Dos ajustes feitos no modelo, obteve-se os resultados que se seguem a partir da Fig. 65 até a Fig. 69.

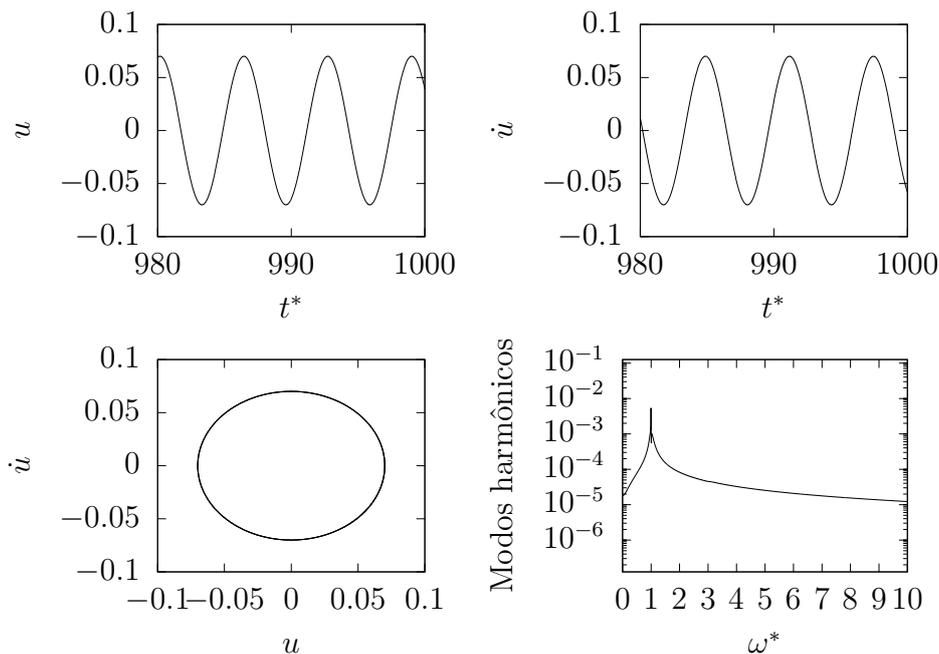


Figura 65 – Resultado para $\beta = 0,007$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$.

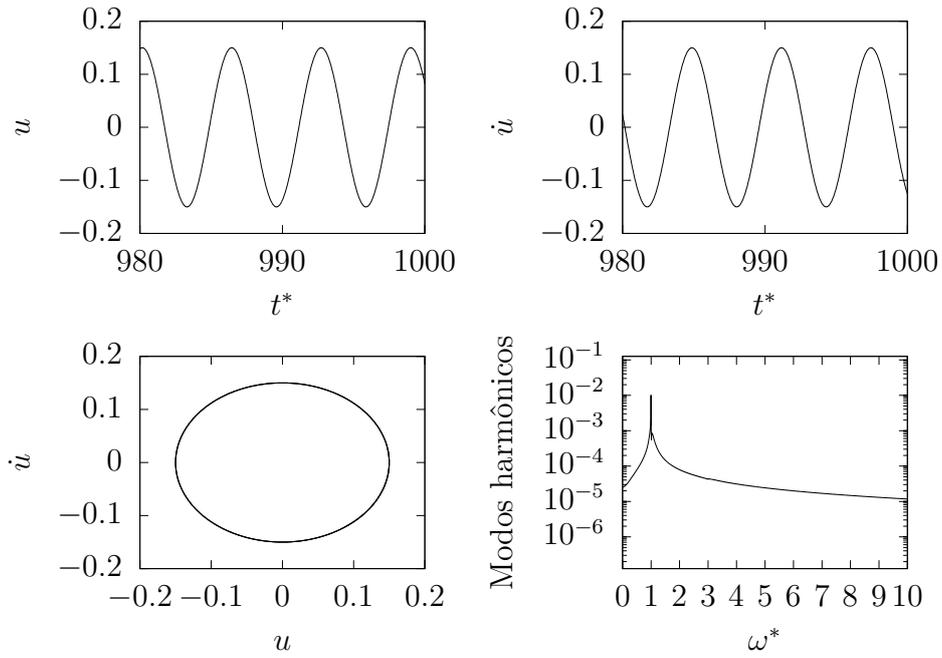


Figura 66 – Resultado para $\beta = 0,015$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$.

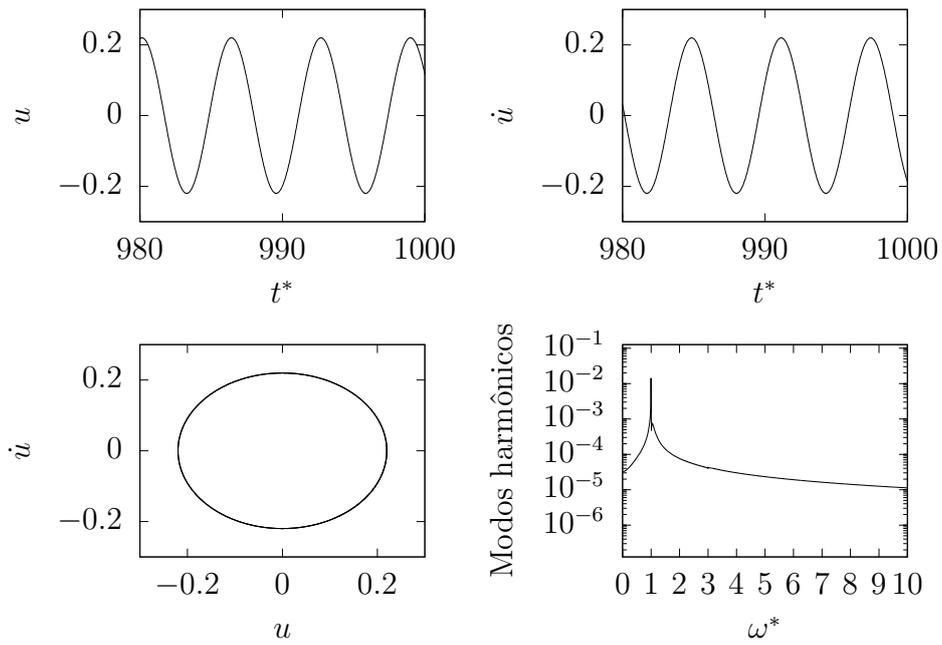


Figura 67 – Resultado para $\beta = 0,022$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$.

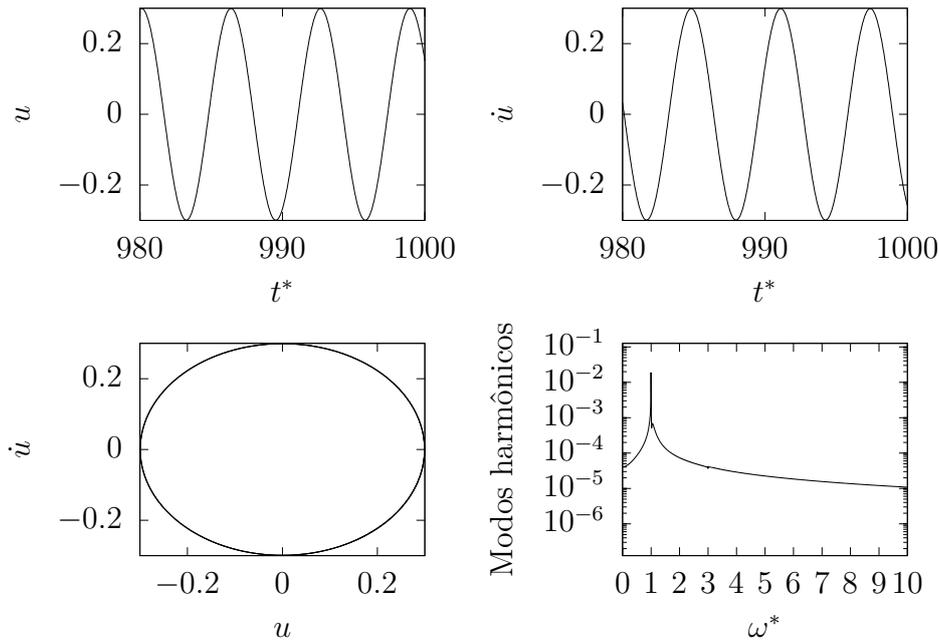


Figura 68 – Resultado para $\beta = 0,03$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$.

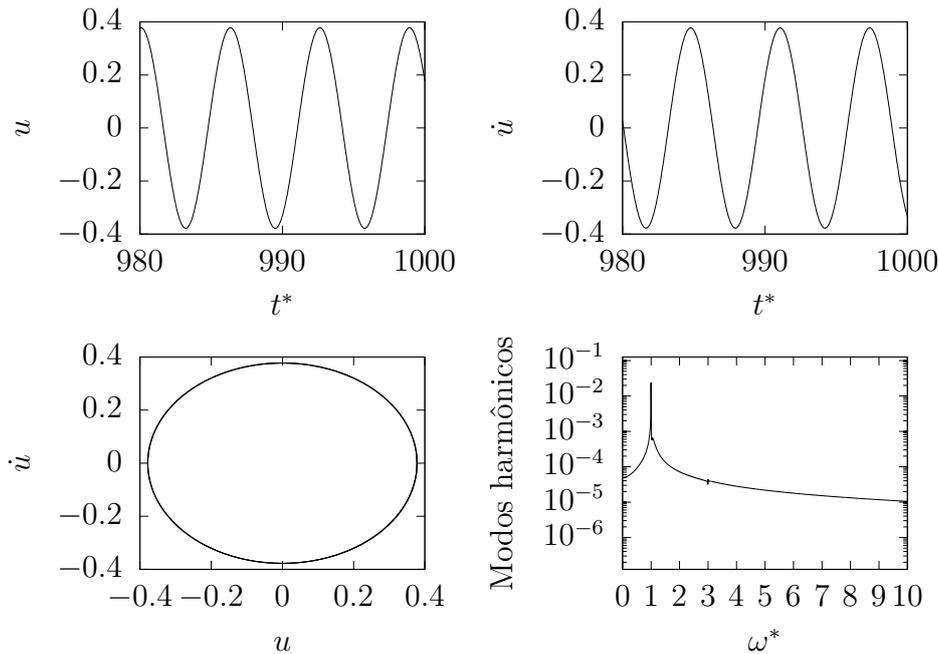


Figura 69 – Resultado para $\beta = 0,038$, $\varepsilon = 0,1$ e $\zeta = 0,005$.

As respostas obtidas foram praticamente lineares, percebendo-se a influência da não linearidade do coeficiente elástico pelo segundo modo que surge à medida em que se excita o sistema com uma amplitude mais alta. No caso dos resultados experimentais, algo parecido se observa para os casos de tensão de 15% e 25% aplicadas ao cabo. Neles, para amplitudes de controle maiores no acelerômetro 1 (no que implica em excitações de amplitude mais elevada), há o surgimento de alguns outros modos de vibração. Então, pelo modelo do oscilador harmônico não linear foi possível gerar respostas com um carácter mais linear, capturando-se certa não linearidade inerente ao sistema.

5.3 Comparando o modelo concentrado e os resultados experimentais

Para se ter uma ideia da proximidade entre o modelo e os resultados experimentais, fez-se gráficos relacionando o deslocamento máximo alcançado pelo sinal de deslocamento e a amplitude de excitação imposta, considerando-se a amplitude de controle no acelerômetro 1 como uma amplitude de excitação, uma vez que foi considerada como *input* do problema. Assim, foram plotados juntos os deslocamentos máximos alcançados pelo modelo e pelo ensaio do cabo, como se observa nas Figs. 70, 71 e 72.

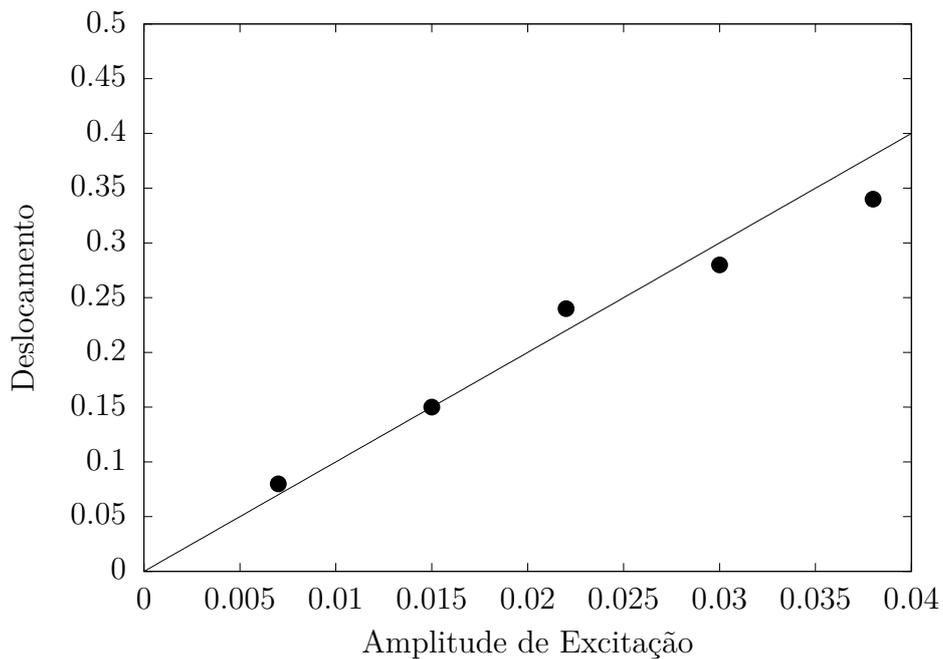


Figura 70 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 15% do limite de ruptura aplicado no cabo.

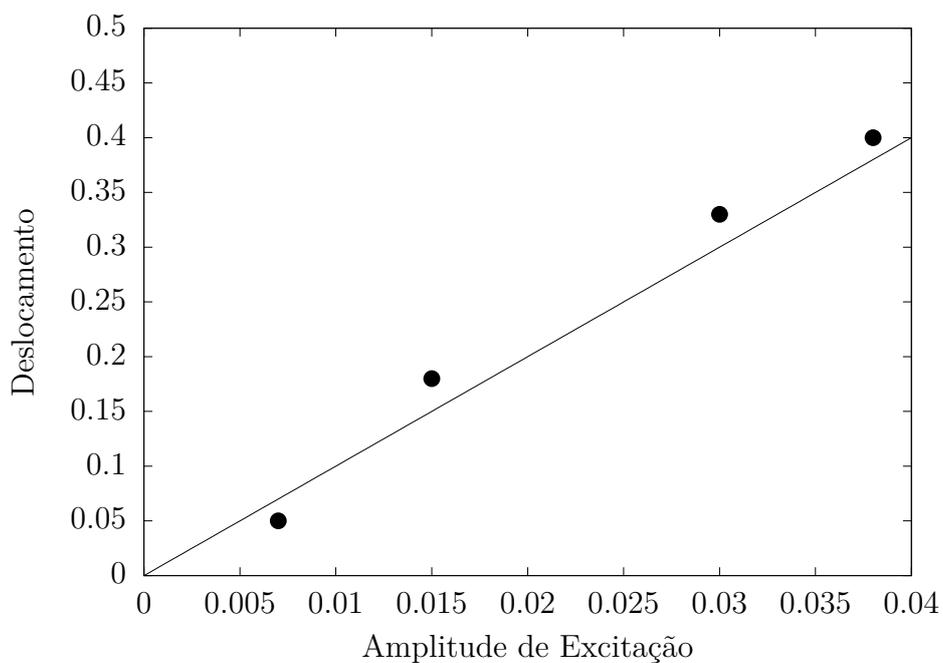


Figura 71 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 20% do limite de ruptura aplicado no cabo.

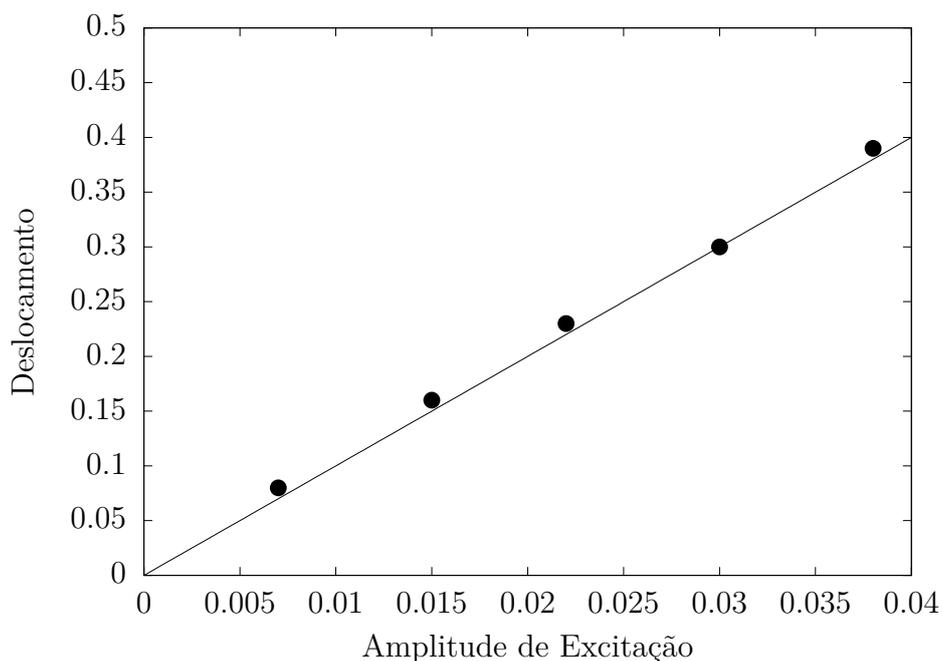


Figura 72 – Comparação do modelo (linha cheia) com os resultados experimentais (●) para tensão de 25% do limite de ruptura aplicado no cabo.

Para os três casos de tensão, o comportamento do modelo não se altera, dado que ele não captura a influência da tensão sobre o cabo. Então, só as respostas geradas pelos dados do ensaio do cabo sofrem mudanças. Mas, como é possível observar, o deslocamento máximo é proporcional à amplitude de excitação, independentemente da tensão aplicada, seguindo basicamente o mesmo comportamento.

Além disso, o mais importante desses resultados é que se alcançou, por meio do modelo concentrado, um comportamento muito semelhante ao experimental. Nota-se que os pontos obtidos experimentalmente, para os três níveis de tensão, acompanham muito bem a reta que ajusta os resultados do modelo, com uma diferença que não ultrapassa a segunda casa decimal, havendo ainda, para a tensão de 15% e 25%, pontos que realmente coincidiram.

Dessa forma, pode-se afirmar que o modelo concentrado, elaborado e estudado ao longo do projeto, captura muito bem o comportamento que se observa no ensaio de cabos reais, uma vez que estes apresentam um carácter basicamente linear devido a uma excitação puramente harmônica.

6 Modelo concentrado do movimento vibratório de um cilindro submetido a um escoamento eólico

O capítulo aborda o sistema de um cilindro imerso em um escoamento eólico laminar como um modelo concentrado da vibração de condutores de energia elétrica, quando excitados pela ação do vento. Faz-se primeiro uma apresentação a respeito do fenômeno de esteira de vórtices que ocorre a jusante de corpos de seção circular, para depois apresentar o problema do cilindro, encontrando a sua equação governante e a adimensionalizando. Finaliza-se essa etapa do projeto com a solução analítica do problema pelo método das perturbações, gerando-se também resultados utilizando os parâmetros reais do cabo, apresentados no Capítulo 4.

6.1 Vibração induzida por vórtices (VIV)

A esteira de vórtices que se forma em um escoamento laminar entorno de estruturas de seção transversal circular, como cilindros e cabos, provoca forçamentos cíclicos devido a formação periódica de vórtices, cuja circulação se apresenta no sentido horário e anti-horário, alternadamente (Fig. 73). Os gradientes de pressão gerados pela periodicidade da esteira de vórtices, induzem, sobre o corpo, um forçamento harmônico perpendicular à direção do escoamento.

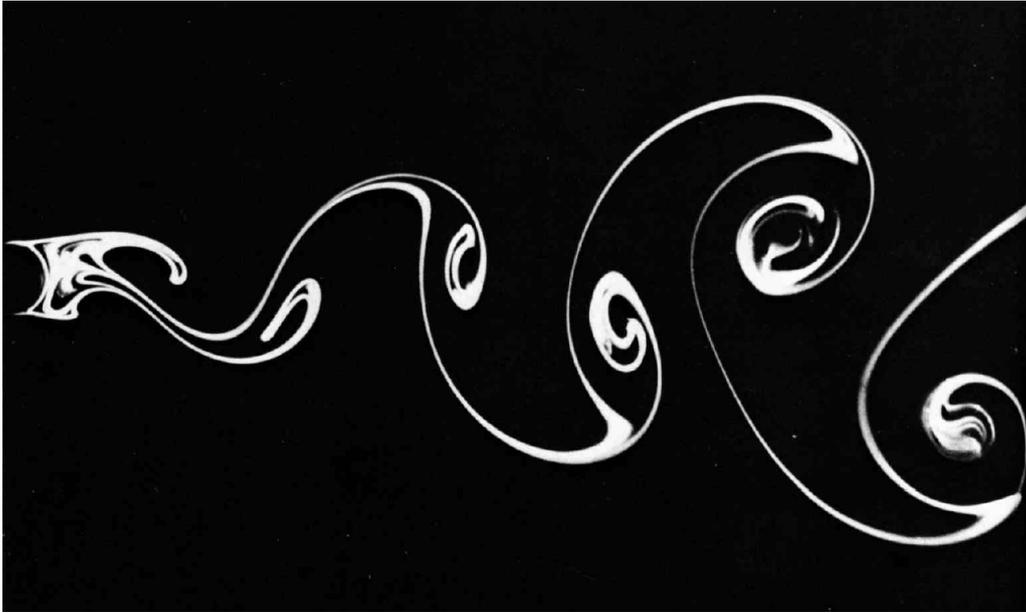


Figura 73 – Formação das esteiras de Von Kárman em um escoamento de $Re = 140$ (DYKE; DYKE, 1982).

O fenômeno foi estudado por Von Kárman, usando análise dimensional em um cilindro vibrante (GARCIA; CUNHA, 2007), através da qual se verificou uma relação entre a frequência angular de emissão de vórtices (*vortex shedding*) ω_s , o raio do cilindro a e a velocidade U da corrente, dada pelo número adimensional de Strouhal

$$Sh = \frac{\omega_s d}{U}. \quad (6.1)$$

Se trata de um parâmetro físico que balanceia a escala de tempo de convecção do escoamento com a escala de frequência de desprendimento de vórtices. Como esse número é função da velocidade do escoamento, é possível afirmar que é também função do número de Reynolds, definido por:

$$Re = \frac{aU}{\nu}, \quad (6.2)$$

em que ν é a viscosidade cinemática do fluido de trabalho (tipicamente o ar). Esse parâmetro, por sua vez, determina o tipo de escoamento gerado após a interação do fluido e o cilindro/cabo condutor. Como a viscosidade cinemática e o diâmetro do corpo são parâmetros aproximadamente constantes, é a velocidade do escoamento que irá mudar o grau do número de Reynolds. A Figura 74 mostra a evolução do processo de desprendimento de vórtices com o aumento do número de Reynolds. Para Reynolds menor que 5 o escoamento possui uma simetria em relação ao centro da seção transversal. A medida que Reynolds aumenta é formado um par de vórtices que se concentra a jusante do corpo. A partir de Reynolds 40 a simetria é gradualmente perdida e os vórtices começam a se desprender de maneira alternada e periódica até que, para Reynolds maior que 150, a esteira de vórtices passa a se tornar turbulenta.

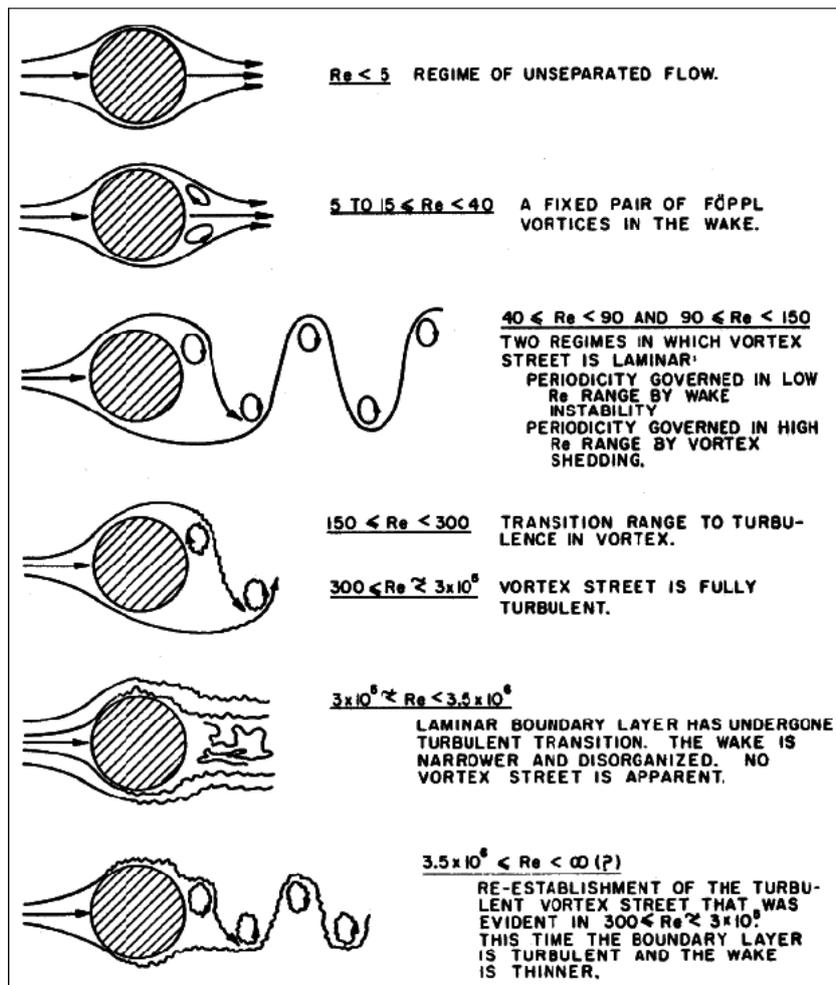


Figura 74 – Várias configurações das esteiras de Von Kármán em função do número de Reynolds.

Pode-se dizer que o mecanismo de formação dos vórtices é auto excitado, ou seja, não há propriedades alternadas na corrente a montante do cilindro ou cabo, elas passam a existir somente a jusante, após a interação fluido e estrutura.

Um dos principais focos de estudo dessa interação é a ressonância. Quando a frequência de espalhamento de vórtices se iguala à frequência natural do cilindro, ou outro corpo semelhante, as amplitudes de oscilação pico-a-pico atingem o máximo. No caso de cabos de transmissão de energia elétrica, quando isso ocorre os esforços sobre a estrutura são maiores e o processo de fratura por fadiga se agrava, principalmente nas zonas de fixação aos postes ou torres de transmissão (HARTOG, 1972). Também, como cabos são sistemas contínuos, eles possuem uma gama de frequências naturais que são facilmente atingidas, uma vez que estão muito próximas uma da outra, variando a cada 0,2 e 0,5 Hz (GUERARD; GODARD; LILIEN, 2011).

6.2 Modelo do cilindro submetido a um escoamento transversal

O modelo apresentado a seguir consiste em um cilindro, de massa m , submetido a um escoamento transversal de velocidade U , e preso nas extremidades por quatro molas de massas iguais e mesmo coeficiente elástico (k_{mola}), conforme a Fig. 75. As molas proporcionam ao sistema uma elasticidade enquanto o amortecimento é uma característica intrínseca do problema.

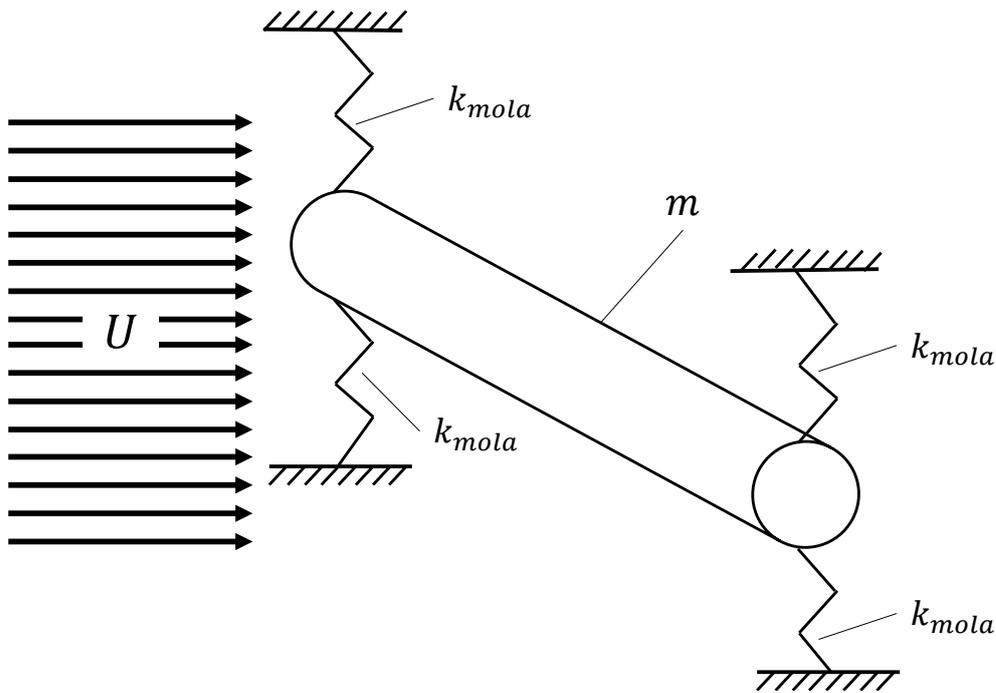


Figura 75 – Modelo concentrado de um cilindro suspenso por quatro molas e submetido a um escoamento laminar de velocidade U .

Como as molas se comportam como que em paralelo, existe um coeficiente elástico k_{eq} equivalente e, portanto, o sistema inteiro pode ser reduzido a um do tipo massa mola, com uma massa equivalente m_{eq} e um amortecimento também equivalente C_{eq} . Dessas considerações, fez-se $m_{eq} = m$, $k_{eq} = 4k_{mola} = k$ e $C_{eq} = C$, como o diagrama do modelo apresentado na Fig. 76.

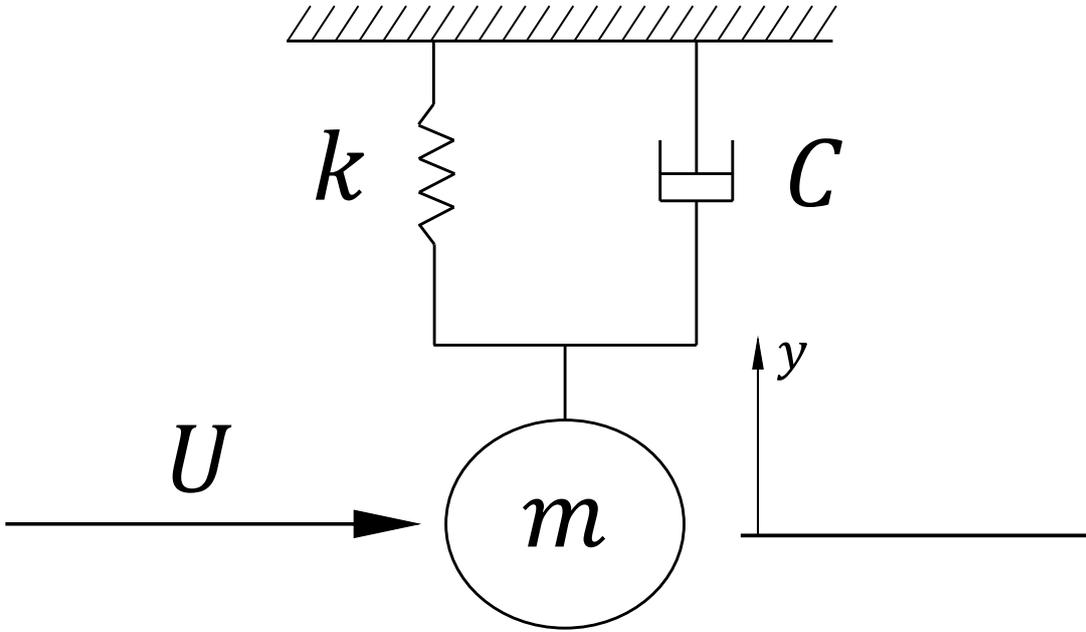


Figura 76 – Modelo massa mola simplificando o sistema concentrado do cilindro.

Então, por um balanço de forças do diagrama de corpo livre, tem-se que a equação do movimento é dada por

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = F(t), \quad (6.3)$$

em que $F(t)$ é o forçamento externo.

Adimensionalizando-se essa equação, estabelece-se os seguintes parâmetros característicos: $\delta = \frac{y}{a}$ para o deslocamento e $t^* = \omega_n t$ para o tempo, enquanto que ω_n é a frequência natural do sistema. Substituindo esses parâmetros em (6.3), segue que:

$$m\omega_n^2 a \frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + C\omega_n a \frac{d\delta}{dt^*} + ak\delta = F(t). \quad (6.4)$$

O forçamento externo $F(t)$ é do tipo harmônico transversal ao escoamento, oriundo da formação alternada de vórtices a jusante do cilindro. A partir dos trabalhos de (DIANA; FALCO, 1971), propõe-se para essa força a seguinte equação:

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t), \quad (6.5)$$

em que Ω é a frequência de excitação e F_0 é um tipo de força de sustentação dado por:

$$F_0 = \rho a U^2 C_L, \quad (6.6)$$

em que ρ é a massa específica do fluido de trabalho, no caso o ar, a é o raio da seção transversal do cilindro, U é a velocidade do escoamento não perturbado e C_L é o coeficiente de sustentação, que por sua vez é expresso por

$$C_L(t^*) = \alpha_0 + \alpha_1 \delta(t^*) + \alpha_2 \delta^2(t^*). \quad (6.7)$$

Os coeficientes do polinômio são determinados por ajuste de dados experimentais, enquanto δ e t^* são, respectivamente, o deslocamento transversal adimensional e a escala de tempo adimensional.

Definido $F(t)$, pode-se reescrever (6.4) como

$$m\omega_n^2 a \frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + C\omega_n a \frac{d\delta}{dt^*} + ak\delta = F_0 \cos \frac{\Omega}{\omega_n} t. \quad (6.8)$$

Dividindo tudo por $m\omega_n^2 a$:

$$\frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + \frac{C}{m\omega_n} \frac{d\delta}{dt^*} + \frac{k}{m\omega_n^2} \delta = \frac{F_0}{m\omega_n^2 a} \cos \frac{\Omega}{\omega_n} t^*. \quad (6.9)$$

Fazendo $\omega = \frac{\Omega}{\omega_n}$, $2\zeta = \frac{C}{m\omega_n}$ e $k = m\omega_n^2$, segue que:

$$\frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{d\delta}{dt^*} + \delta = \frac{F_0}{m\omega_n^2 a} \cos(\omega t^*). \quad (6.10)$$

Substituindo em F_0 , a expressão em (6.6), pode-se escrever:

$$\frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{d\delta}{dt^*} + \delta = \frac{\rho a U^2 C_L}{m\omega_n^2 a} \cos(\omega t^*). \quad (6.11)$$

Chamando $\frac{\omega_s}{\omega_n}$ de ω_r , que é a razão entre a frequência de espalhamento de vórtices e a frequência natural, e lembrando da definição do número de Strouhal em (6.1), segue que

$$\frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{d\delta}{dt^*} + \delta = \frac{\rho a^2 L}{m} Sh^{-2} \omega_r^2 C_L \cos(\omega t^*). \quad (6.12)$$

Defini-se o termo adimensional

$$\varepsilon = \frac{\rho L a^2}{m S h^2} \quad (6.13)$$

e substituindo C_L por (6.7), pode-se escrever finalmente que

$$\frac{d^2\delta}{dt^{*2}} + 2\zeta \frac{d\delta}{dt^*} + \delta = \varepsilon \omega_r^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \delta(t^*) + \alpha_2 \delta^2(t^*)) \cos(\omega t^*), \quad (6.14)$$

que se trata de uma EDO de segunda ordem não linear devido a esses termos na amplitude de excitação que dependem do deslocamento δ ao quadrado. Assim, uma solução analítica convencional, como variação de parâmetros, não é possível, a não ser por um método alternativo, como o das perturbações, desde de que o parâmetro adimensional ε , como discutido em 2.1, seja muito menor que a unidade.

O parâmetro ε trata-se de um balanço de massa que pode ser expresso por

$$\varepsilon = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{cilindro}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{S h^2}. \quad (6.15)$$

Como se trata de um modelo para aproximar o fenômeno da oscilação de cabos, o cilindro em questão deve ser de alumínio ou aço, enquanto o fluido nesse caso é o ar. Sendo assim, tem-se que $\rho_{fluido} \ll \rho_{cilindro}$, fazendo com que $\varepsilon \ll 1$, implicando na alternativa de se usar o método das perturbações para se resolver a equação (6.14).

6.3 Solução pelo método das perturbações

Como condição inicial, pensou-se do cilindro em repouso no instante $t^* = 0$. Então o problema completo fica da forma

$$\begin{cases} \ddot{\delta} + 2\zeta\dot{\delta} + \delta = \varepsilon\omega_r^2(\alpha_0 + \alpha_1\delta(t^*) + \alpha_2\delta^2(t^*))\cos(\omega t^*), & t^* > 0, \\ \delta(0) = 0, \quad \dot{\delta}(0) = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Pelo método das perturbações, tem-se a expansão assintótica

$$\delta = \delta_0 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\varepsilon^n. \quad (6.17)$$

Substituindo (6.17) em (6.16), chega-se ao sistema de EDO's até $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_0 + 2\zeta\dot{\delta}_0 + \delta_0 = 0, \\ \ddot{\delta}_1 + 2\zeta\dot{\delta}_1 + \delta_1 = (\alpha_0 + \alpha_1\delta_0 + \alpha_2\delta_0^2)\omega_r^2\cos(\omega t^*), \\ \ddot{\delta}_2 + 2\zeta\dot{\delta}_2 + \delta_2 = (\alpha_1\delta_1 + \alpha_22\delta_1\delta_0)\omega_r^2\cos(\omega t^*). \end{cases} \quad (6.18)$$

Para se solucionar δ_0 é necessário distinguir três soluções distintas para cada caso de amortecimento. Dessa maneira, tem-se que para o caso subamortecido ($\zeta < 1$), a solução é dada por

$$\delta_0(t^*) = e^{-\zeta t^*} \left[A_1 \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} t^*) + A_2 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} t^*) \right]. \quad (6.19)$$

No caso crítico amortecido ($\zeta = 1$)

$$\delta_0(t^*) = A_1 e^{-t^*} + A_2 t^* e^{-t^*}. \quad (6.20)$$

E por fim, para o caso superamortecido ($\zeta > 1$), a solução é da forma

$$\delta_0(t^*) = e^{-\zeta t^*} \left(A_1 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1} t^*} + A_2 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1} t^*} \right), \quad (6.21)$$

em que os coeficientes A_1 e A_2 são obtidos a partir das condições iniciais, que para o problema são nulas, implicando que essas constantes também são iguais a zero, levando a solução trivial de $\delta_0 = 0$.

Dessa maneira, as outras duas EDO's do sistema (6.18) ficam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + 2\zeta\dot{\delta}_1 + \delta_1 = \alpha_0\omega_r^2\cos(\omega t^*), \\ \ddot{\delta}_2 + 2\zeta\dot{\delta}_2 + \delta_2 = \alpha_1\delta_1\omega_r^2\cos(\omega t^*), \end{cases} \quad (6.22)$$

cujas soluções são separadas em uma parte homogênea e outra particular. A parcela homogênea são das três formas apresentadas em (6.19), (6.20) e (6.21), dependendo do tipo

de amortecimento. Enquanto que a solução particular pode ser encontrada pelo método da variação de parâmetros.

Para auxiliar nos cálculos, utilizou-se o programa Maple para encontrar a solução de δ_1 e δ_2 , distinguindo-se os três casos de amortecimento fazendo ζ igual a 0,5, 1 e 2 para os casos subamortecido, crítico amortecido e superamortecido, respectivamente. As frequências ω e ω_r foram tomadas iguais a 1, uma vez que se deseja ver as soluções em que o sistema é excitado em sua frequência natural, regime crítico em que os cabos estão sujeitos a falha por fadiga.

Para o caso subamortecido, a solução até $O(\varepsilon^2)$ é dada por

$$\begin{aligned} \delta = & \varepsilon \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t^*}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t^*}{2} \right) + \sin(t^*) \right) \\ & + \varepsilon^2 \left\{ e^{-\frac{t^*}{2}} \left[\frac{\cos \left(\frac{\sqrt{3}t^*}{2} \right) - 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t^*}{2} \right)}{13} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{[(\sqrt{3}-3) \sin \left(\frac{\sqrt{3}t^*}{2} + t^* \right) + (\sqrt{3}+3) \sin \left(\frac{(\sqrt{3}-2)t^*}{2} \right)]}{6} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\cos 2t^*}{13} - \frac{3 \sin 2t^*}{26} \right\}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Nota-se que os termos que multiplicam $e^{-\frac{t^*}{2}}$ correspondem à solução particular das EDO's e ao regime transiente do sistema, pois, a medida que o tempo cresce, essa parcela tende a zero, sobrando somente uma resposta harmônica senoidal. E como também a parcela de segunda ordem é muito pequena, assumindo-se $\varepsilon \ll 1$, tem-se que em regime permanente a solução pode ser expressa praticamente por $\sin t^*$.

Na Figura 77, apresenta-se um resultado a partir da solução em (6.23), para regime permanente. Vê-se claramente que o sinal da resposta é puramente harmônico, como argumentado acima. No espaço amplitude frequência percebe-se um pequeno pico em $\omega = 2$, que vem da combinação dos últimos termos em seno e cosseno da parcela de $O(\varepsilon^2)$ da resposta. Mas como se já argumentou, devido ao parâmetro ε ser muito menor que a unidade, a influência desses termos é mínima.

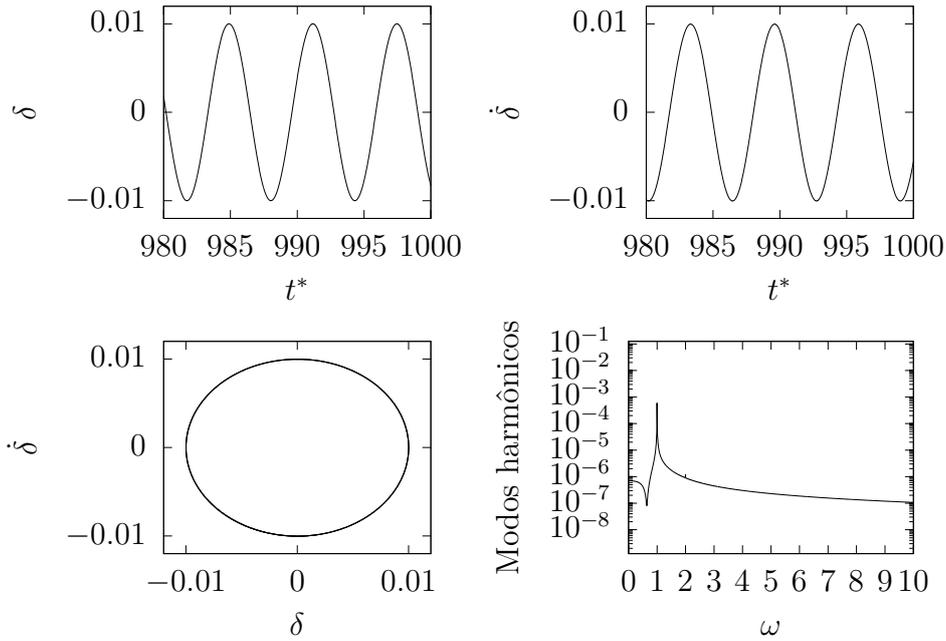


Figura 77 – Resposta do modelo concentrado do cilindro para o caso subamortecido e parâmetro $\varepsilon = 0,01$.

Para o caso crítico amortecido, obteve-se a seguinte solução $O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \delta = & \varepsilon \left(-\frac{e^{-t^*} t^*}{2} + \frac{\sin(t^*)}{2} \right) + \\ & \varepsilon^2 \left(\frac{e^{-t^*}}{25} + \frac{3e^{-t^*} t^*}{5} - e^{-t^*} \sin(t^*) + \right. \\ & \left. \frac{\cos(t^*) e^{-t^*} t^*}{2} - \frac{\cos(2t^*)}{25} - \frac{3 \sin(2t^*)}{100} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Da mesma forma que em (6.23), o termo que domina a resposta permanente é senoidal, enquanto que os termos da parcela de $O(\varepsilon^2)$ tendem a ser mais desprezíveis. A Figura 78 confirma a análise, mostrando sinais de deslocamento e velocidade, em regime permanente, puramente harmônicos, sendo que os picos máximos são a metade do valor de ε escolhido, pois, em regime permanente, a resposta pode ser expressa simplesmente por $\varepsilon \frac{\sin(t^*)}{2}$. Também fica claro, pelo espaço de amplitude e frequência, a influência quase desprezível dos termos de segunda ordem.

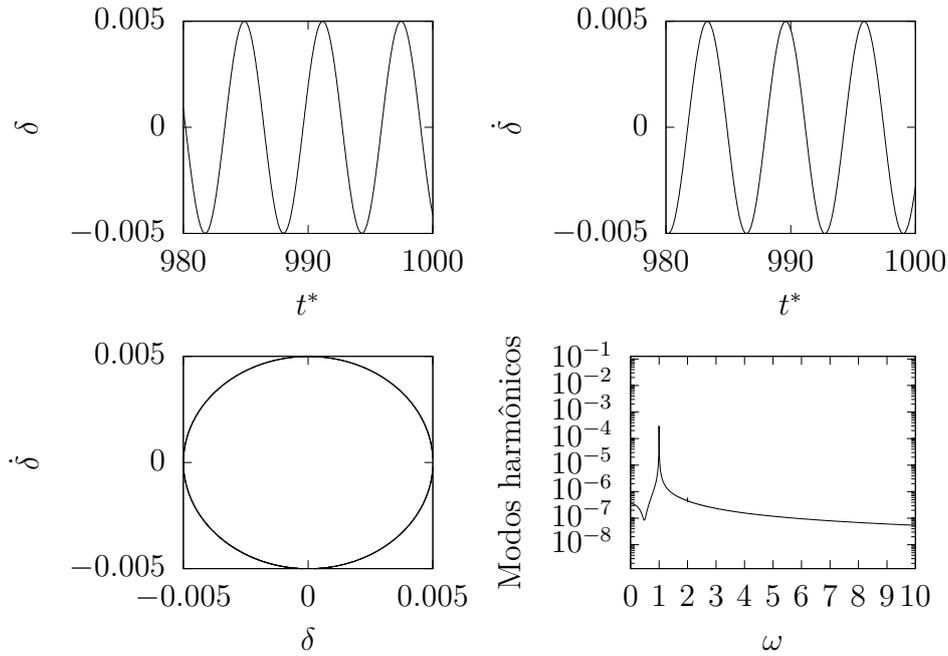


Figura 78 – Resposta do modelo concentrado do cilindro para o caso crítico amortecido e $\varepsilon = 0,01$.

Por fim, a solução para o sistema em super amortecimento até $O(\varepsilon)$ (pois a parcela de ordem 2 exerce ainda menor influência em regime permanente) é dada por:

$$\delta = \varepsilon \left(-\frac{e^{(\sqrt{3}-2)t^*} \sqrt{3}}{24} + \frac{e^{-(2+\sqrt{3})t^*} \sqrt{3}}{24} + \frac{\sin(t^*)}{4} \right). \quad (6.25)$$

As conclusões que se tira desse resultado não são muito diferentes das anteriores, a não ser pelo fato de que aqui a parcela transiente decai mais rápido e o regime permanente possui picos de deslocamento e velocidade bem menores, como se apresenta na Fig. 79. Isso se dá pelo amortecimento ser mais elevado que nos outros casos.

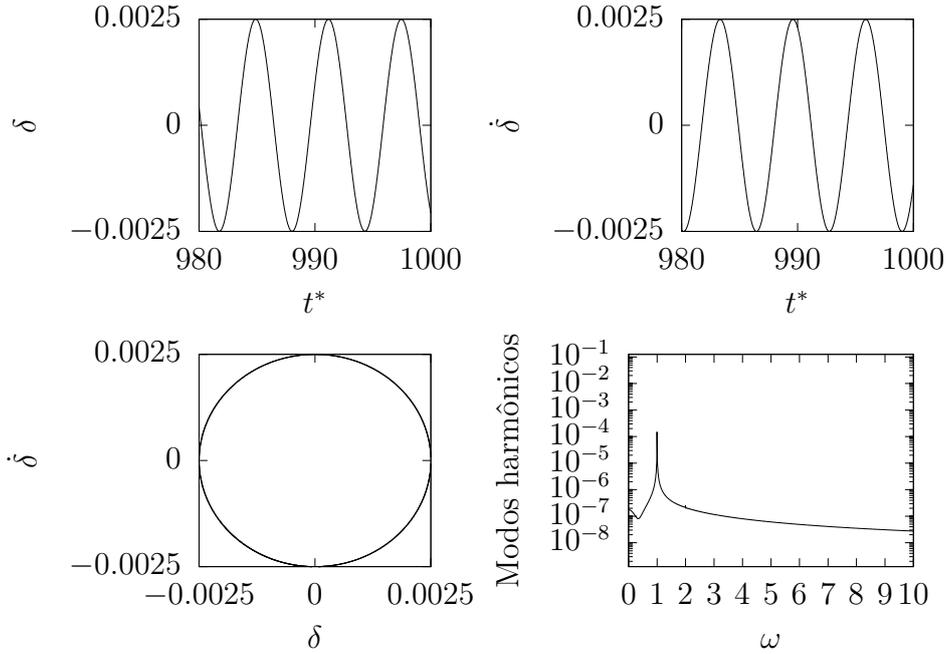


Figura 79 – Resposta do modelo concentrado com excitação eólica para o caso de $\varepsilon = 0,01$ e superamortecido.

Dessas soluções, conclui-se que esse modelo concentrado, para valores de $\varepsilon \ll 1$, apresenta, em regime permanente, um comportamento puramente harmônico linear, apesar da excitação do tipo eólica ser não linear.

O que poderia levar o sistema a responder de maneira menos linear, seria o ajuste dos coeficientes α_0 , α_1 e α_2 presentes no termo de forçamento, ajustando-os para valores grandes de maneira a aumentar a influência do termo δ^2 . Na próxima seção, mostra-se que, na realidade, para esse regime de ε muito pequeno, o forçamento eólico poderia ser ajustado para um polinômio de grau menor, não necessariamente de ordem 2.

6.4 Excitação eólica como polinômio de segunda ordem

Visto os resultados discutidos anteriormente, é válida a questão se o forçamento eólico proposto por (DIANA; FALCO, 1971) deve ser expresso estritamente por um polinômio de segunda ordem, dado que as respostas do sistema se mostraram lineares. Na realidade, o problema poderia ser proposto de forma mais generalizada com o forçamento sendo um polinômio de ordem n , como a seguir:

$$\ddot{\delta} + 2\zeta\dot{\delta} + \delta = \varepsilon\omega_r^2 \sum_{k=0}^n \alpha_k \delta^k(t^*) \cos(\omega t^*). \quad (6.26)$$

Então, dependendo do grau de ε e do que se deseja capturar com o modelo, poder-se-ia usar a excitação como polinômio de grau diferente de 2.

Para se verificar essa questão, fez-se um estudo comparativo das soluções do modelo com a excitação assumindo a forma de um polinômio de grau 0, 1, 2 e 3, para valores de

ε pequenos até a unidade. Com isso, deseja-se observar para que valores de ε as respostas convergem ou divergem.

As soluções dessa vez foram obtidas por um Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a solução de excitação como polinômio de grau 2, usou-se também a solução analítica pelo método assintótico a fim de se verificar para qual valor de ε essa solução não é mais uma boa aproximação, quando se compara com a solução numérica. O mesmo estudo que foi feito anteriormente no Capítulo 2, quando se discutiu a validade do método das perturbações.

A Figura 80 apresenta os resultados para o caso de sub-amortecimento. Em todas as soluções, os coeficientes α foram considerados unitários. Observa-se por esse gráfico que as soluções coincidem para valores de $\varepsilon < 0,1$. A partir desse valor as soluções passam a divergir e a solução assintótica deixa de ser uma boa aproximação.

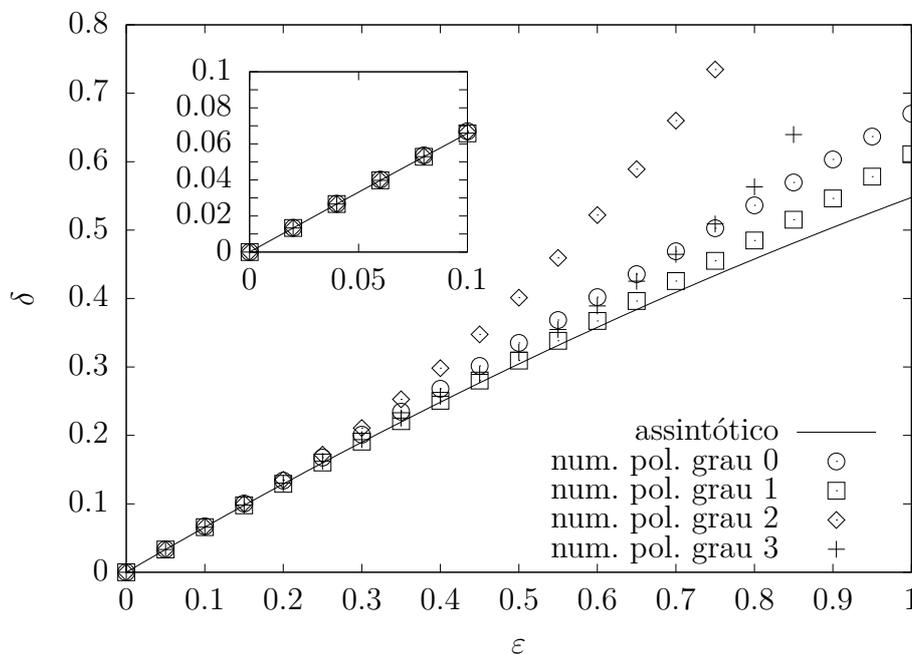


Figura 80 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de subamortecimento.

No gráfico da Figura 81, nota-se que para o caso crítico amortecido a faixa de convergência das soluções aumenta. A solução assintótica mantém-se como boa aproximação para valores de ε mais próximos da unidade. Por outro lado, o resultado com excitação como polinômio de grau 0 é o que mais apresenta divergência dos demais resultados. O ajuste de grau 3 é o que melhor se ajusta ao modelo de grau 2 proposto na literatura. Então, nesse regime de amortecimento e para valores de ε próximos de 1, é possível usar um modelo com a excitação como polinômio de grau 3 do deslocamento δ .

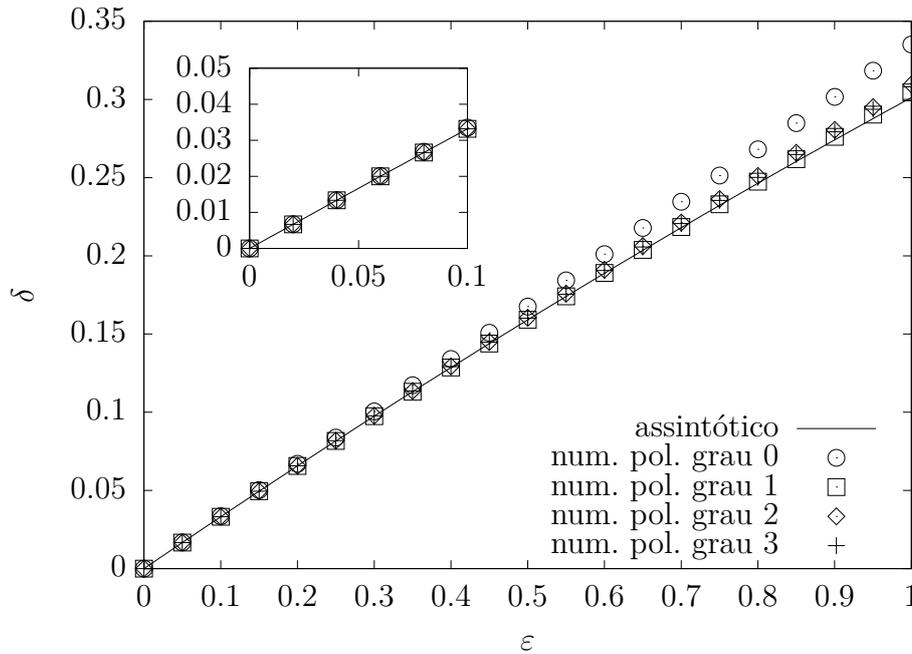


Figura 81 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de amortecimento crítico.

O resultado para o caso super-amortecido, apresentado na Fig. 82, demonstra que as soluções convergem até o valor de $\epsilon = 1$, com exceção do ajuste da excitação como polinômio de grau 0. Nesse regime de amortecimento, é possível utilizar a excitação como polinômio de grau 1 ou até 3, sendo que a solução analítica continua sendo uma ótima aproximação, mesmo o parâmetro ϵ sendo grande.

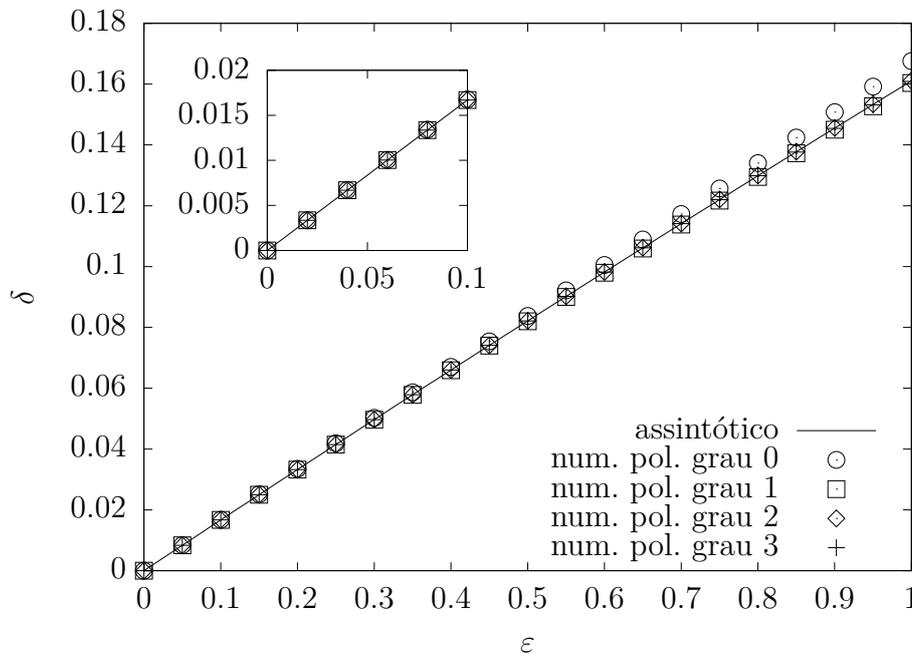


Figura 82 – Comparação das respostas assintótica e numéricas para uma unidade de tempo adimensional fixa igual a 51, no caso de super amortecimento.

Apesar das diferentes situações de convergência, o que é unânime nos três casos

de amortecimento é a convergência das soluções para valores de $\varepsilon \ll 1$, que consiste no caso quando se estuda excitação eólica em cabos de rede ou cilindros. Dessa maneira, é possível usar a excitação eólica só como α_0 , recorrendo no modelo concentrado estudado, no Capítulo 3, sem a não linearidade elástica. Em uma visão mais geral, tudo se trata de um modelo concentrado massa-mola amortecedor sobre o qual se acrescenta determinados elementos e condições a fim de se gerar resultados que representem melhor o que se pretende estudar ou descrever.

6.5 Soluções do modelo concentrado do cilindro usando parâmetros de cabos reais

Posto essa possível intercambiabilidade entre os modelos, acrescentou-se ao modelo concentrado com excitação eólica uma elasticidade não linear, levando o problema a ser expresso, adimensionalmente, por

$$\begin{cases} \ddot{\delta} + 2\zeta\dot{\delta} + \delta = \varepsilon\omega_r^2(\alpha_0 + \alpha_1\delta + \alpha_2\delta^2) \cos(\omega t^*) - \gamma\delta^3, & t^* > 0, \\ \delta(0) = 0, \quad \dot{\delta}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.27)$$

em que γ é o parâmetro correspondente à não linearidade do coeficiente elástico.

Com as propriedades físicas do cabo usado no experimento, descritas na Tab. 4, é possível determinar valores para ε . Para tanto, utilizou-se (6.15) como definição do parâmetro, usando-se $\rho_{ar} = 1,225g/m^3$ e para o número de Strouhal a definição em (6.1), em que se substituiu em ω_s uma frequência natural do condutor usada no experimento, enquanto que a assumiu o raio nominal da seção transversal do cabo e, por fim, U foi adotado como $10m/s$, valor de velocidade limite do vento em que ocorre vibrações eólicas.

A Tabela 8 dispõe os valores calculados para os parâmetros do modelo a partir das informações do experimento usado no projeto. Nela, nota-se que realmente ε é muito menor que a unidade, como suposto anteriormente, dando da ordem de 10^{-3} .

Tabela 8 – Tabela com os parâmetros do modelo concentrado calculados a partir dos dados do cabo usado nos experimentos.

Tensão	Ampl. de exc. (mm)	Frequência (Hz)	ω_s (Hz)	Sh	ε
15% UTS	0,2	23,33	146,5867	0,3889	0,0010
	0,4	23,27	146,2097	0,3879	0,0010
	0,6	23,36	146,7752	0,3894	0,0010
	0,8	23,36	146,7752	0,3894	0,0010
	1,0	23,36	146,7752	0,3894	0,0010
20% UTS	0,2	22,56	141,7487	0,3761	0,0010
	0,4	22,56	141,7487	0,3761	0,0010
	0,6	22,56	141,7487	0,3761	0,0010
	0,8	22,44	140,9947	0,3741	0,0010
	1,0	22,44	140,9947	0,3741	0,0010
25% UTS	0,2	25	157,0796	0,4167	0,0008
	0,4	24,91	156,5141	0,4152	0,0008
	0,6	24,91	156,5141	0,4152	0,0008
	0,8	24,91	156,5141	0,4152	0,0008
	1,0	24,91	156,5141	0,4152	0,0008

Os resultados que se seguem foram gerados assumindo-se: $\varepsilon = 0,001$, pelo que se constatou dos valores calculados, $\gamma = 0,1$ e $\zeta = 0,05$, como ajustados no Capítulo 5, e tanto ω_r quanto ω foram unitários (estado de excitação na frequência natural do sistema). Os coeficientes α dessa vez foram ajustados de maneira que, se postos em evidência, multiplicavam ε resultando em uma amplitude de excitação que corresponderia à adimensional usada no experimento. Dessa forma, a equação governante ficou da forma

$$\ddot{\delta} + 0,1\dot{\delta} + \delta = 0,001\alpha(1 + \delta + \delta^2) \cos(\omega t^*) - 0,1\delta^3, \quad t^* > 0, \quad (6.28)$$

em que α assumiu os valores na Tab. 9.

Tabela 9 – Valores de α correspondentes a amplitude de excitação adimensional

Ampl. de exc. adimensional	α
0,007	7
0,015	15
0,022	22
0,030	30
0,038	38

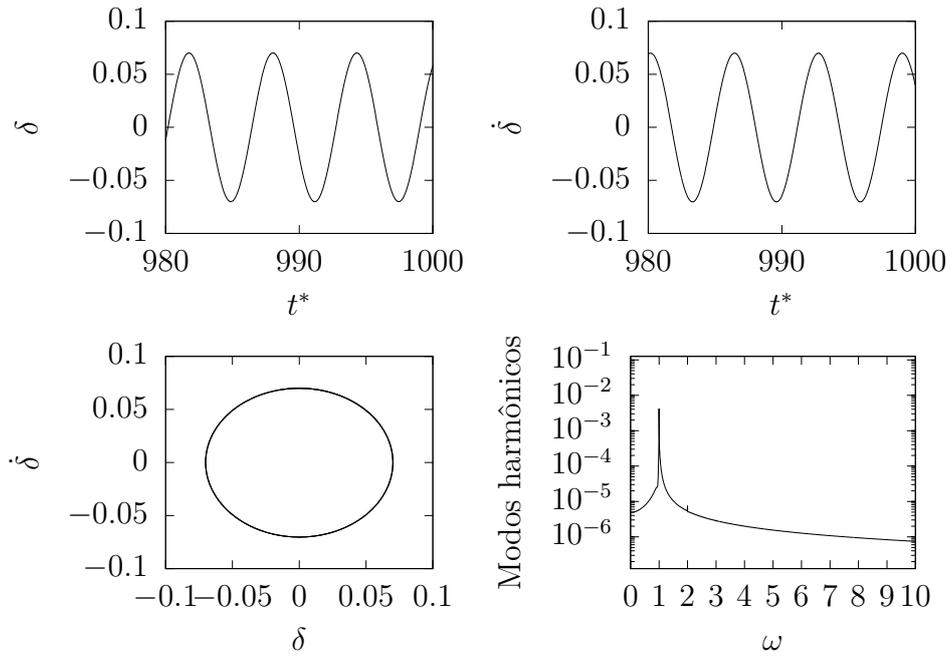


Figura 83 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 7$ e $\gamma = 0,1$.

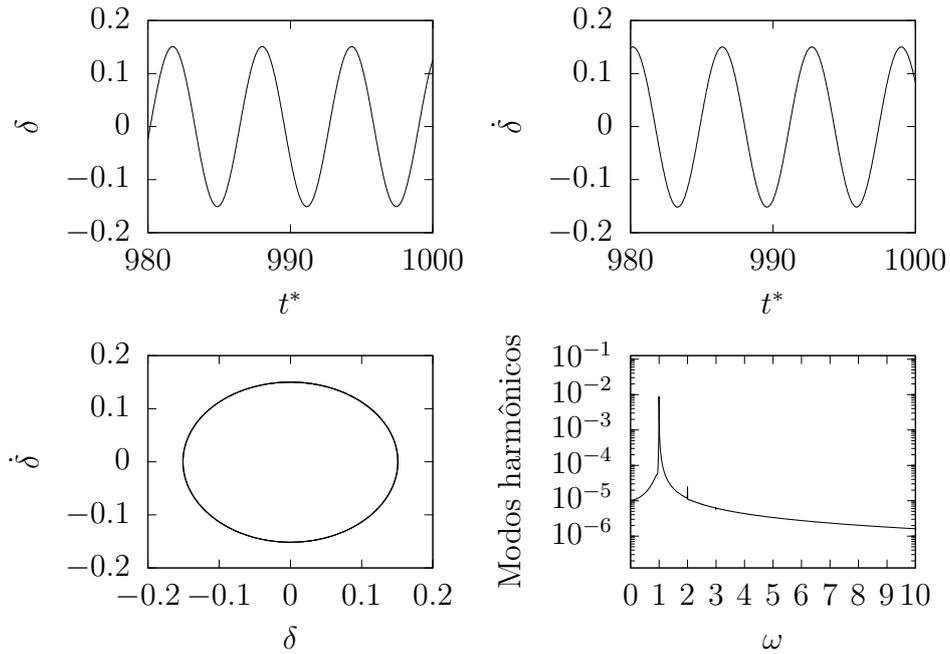


Figura 84 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 15$, $\alpha_1 = 15$, $\alpha_2 = 15$ e $\gamma = 1$.

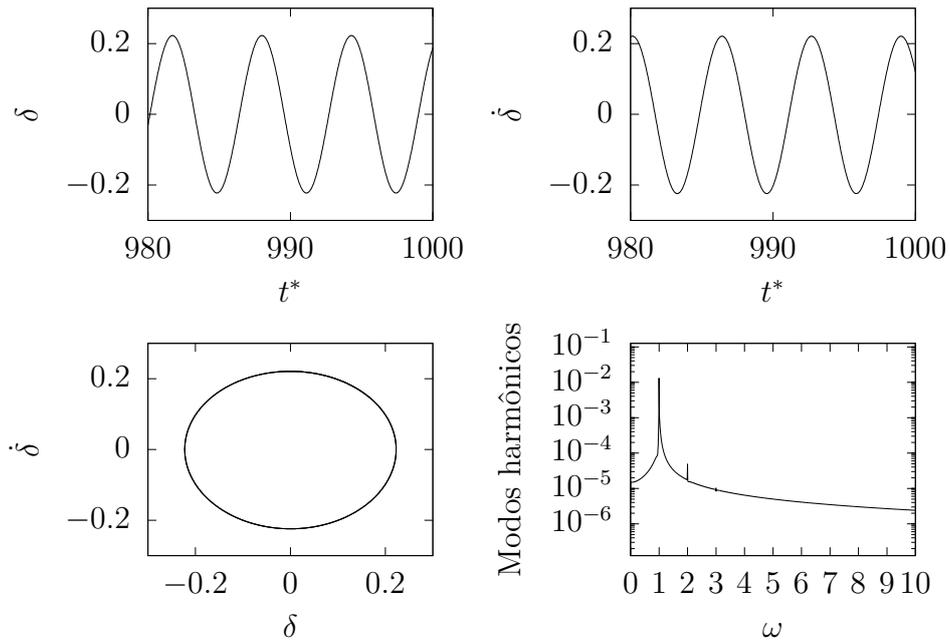


Figura 85 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 22$, $\alpha_1 = 22$, $\alpha_2 = 22$ e $\gamma = 1$.

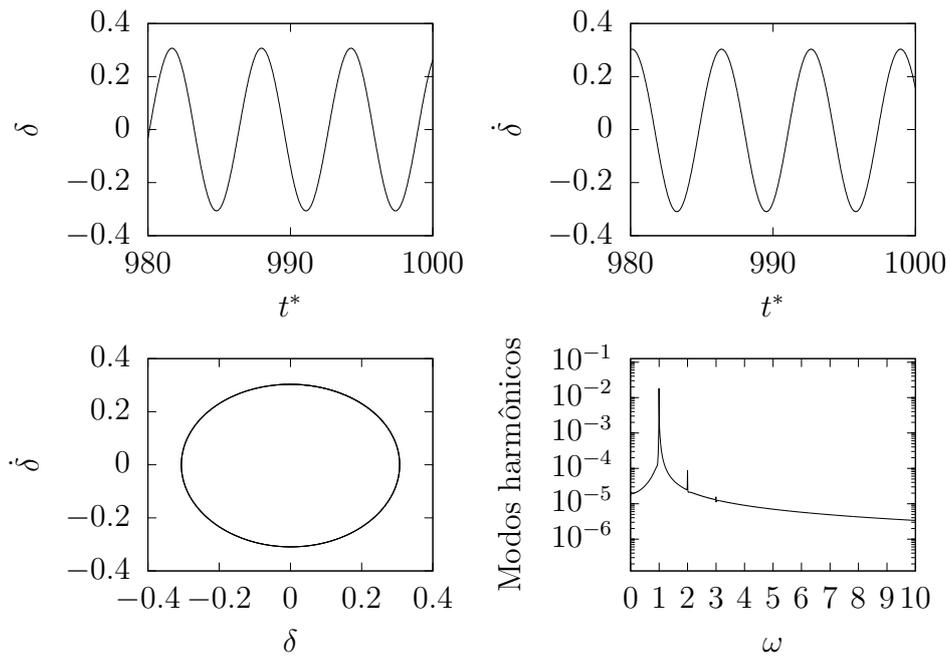


Figura 86 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 30$, $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 30$ e $\gamma = 1$.

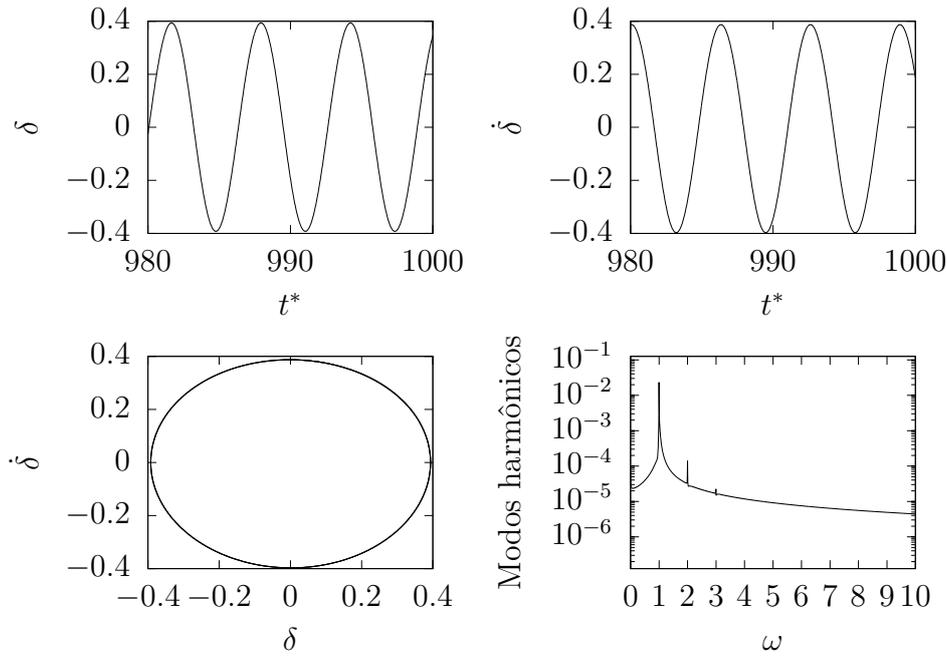


Figura 87 – Resultados para $\varepsilon = 0,001$, $\zeta = 0,05$, $\alpha_0 = 38$, $\alpha_1 = 38$, $\alpha_2 = 38$ e $\gamma = 1$.

As figuras acima demonstram resultados bastante semelhantes aos obtidos na seção 5.2, com as amplitudes máximas de deslocamento alcançando praticamente as mesmas magnitudes alcançadas lá, como se apresenta na Tab. 10. Isso corrobora o discutido na seção anterior de que o modelo do cilindro pode ter sua excitação simplificada em regimes de $\varepsilon \ll 1$, que é o caso, comportando-se praticamente como o modelo concentrado do Capítulo 3.

Tabela 10 – Amplitudes máximas alcançadas pelos dois modelos concentrados.

Amplitudes máximas de deslocamento (Modelo Concentrado de excitação harmônica)	Amplitudes máximas de deslocamento (Modelo Concentrado de excitação eólica)
0,07	0,07
0,15	0,15
0,22	0,22
0,30	0,31
0,38	0,39

Todavia, é importante observar que, a medida que a amplitude de excitação aumenta, observa-se no espectro de frequências a presença de outros modos na resposta, como está bem claro na Fig. 87, evidenciando que há nesse modelo influências da não linearidade da excitação eólica e do coeficiente de restituição elástica, o que não ocorre no modelo do oscilador harmônico.

7 Modelo do Cabo Vibrante

Depois de se estudar o modelo concentrado da oscilação de um ponto do cabo, desenvolve-se nesse capítulo um modelo mais completo que visa descrever não só a vibração de um ponto do cabo como também sua vibração longitudinal. Para isso, faz-se primeiro a dedução da equação de onda em uma corda flexível para depois acrescentar hipóteses ao modelo que melhor se encaixem à realidade física de um cabo vibrante. No final, são desenvolvidas soluções para o caso homogêneo da equação de vibração no cabo e para o caso do cabo ser excitado por uma excitação do tipo delta de Dirac em um ponto ao longo do seu comprimento.

7.1 Equação da onda

Para começar a dedução da equação da corda vibrante, defini-se que o problema se situa no plano (x, y) e, segundo (FIGUEIREDO, 2000), faz-se as hipóteses de que:

- As partículas constituintes da corda se desloquem apenas na direção y (vibração transversal);
- A corda é flexível, ou seja, não apresenta resistência a flexão;

Para deduzir a equação diferencial que deve satisfazer a função $y(x, t)$, que representa a posição de um ponto x da corda no tempo t , aplica-se a lei de Newton, cujo enunciado diz que a derivada da quantidade de movimento de um corpo é igual a soma das forças aplicadas. O diagrama de corpo livre de um trecho da corda, no intervalo arbitrário $[a, b]$, está representado na Fig. 88, em que \mathbf{F}_a e \mathbf{F}_b são os vetores força de tensão que o resto da corda exerce sobre esse trecho.

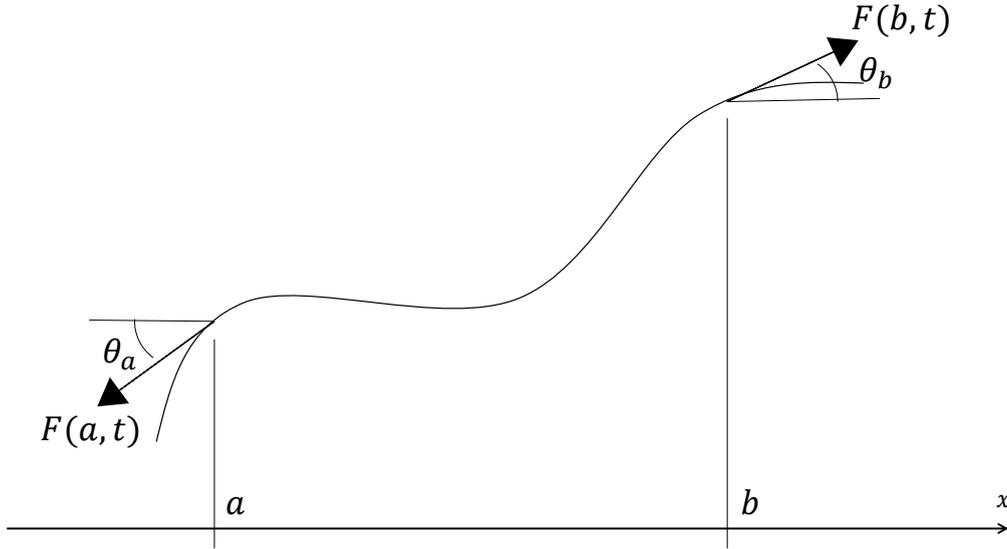


Figura 88 – Diagrama de corpo livre da corda vibrante.

A densidade linear da corda pode ser designada como $\gamma(x)$, uma vez que, pela hipótese de que as partículas se deslocam somente na direção normal a x , implica que a densidade não depende da variável tempo t . Então a quantidade de movimento da corda entre a e b é dada por

$$Q(t) = \int_a^b \gamma(x) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) dx \quad (7.1)$$

sendo que $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ designa a velocidade de um ponto x da corda no instante t .

Para o balanço de forças, é necessário considerar a existência de dois tipos. O primeiro consiste na ação que o resto da corda exerce sobre esse trecho entre a e b , que é representado por forças de tensão na direção das tangentes, representadas por $F_a(a, t)$ e $F_b(b, t)$. Os ângulos θ_a e θ_b são tangentes à corda em relação a x nos pontos a e b , respectivamente, e usando a lei de Newton anteriormente enunciada, considerando a inexistência de quantidade de movimento na direção x , tem-se que:

$$F(a, t) \cos \theta_a = F(b, t) \cos \theta_b. \quad (7.2)$$

De (7.2), se conclui que a componente horizontal é independente do ponto x e é função apenas de t , e portanto pode-se dizer que $F_x(x, t) = F_x(t)$. Agora, do balanço de forças de tensão em y entre a e b , segue a igualdade

$$F_x(t) \tan \theta_b - F_x(t) \tan \theta_a = F_x(t) \left. \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right|_{x=a}^{x=b}, \quad (7.3)$$

que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pode ser escrita como:

$$F_x(t) \tan \theta_b - F_x(t) \tan \theta_a = \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (7.4)$$

Quanto ao segundo tipo de força que age sobre o sistema, temos a de ação externa, que pode ser composta por forças de campo como a gravidade, forças de resistência ao movimento por conta do meio em que a corda está imersa, ou forças de restauração, que tendem a restaurar a posição de equilíbrio da corda. Designando por $F_{ext}(x, y, t)$ a densidade linear dessas forças externas que agem ao longo da corda e aplicando novamente a lei de Newton supracitada, bem como as expressões (7.1) e (7.4), segue-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \gamma(x) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) dx = \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx + \int_a^b F_{ext}(x, y, t) dx. \quad (7.5)$$

Supondo que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$ é contínua e que a derivada temporal do integrando esquerdo não altera o resultado do cálculo de sua primitiva, então a equação (7.5) pode ser reescrita como

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \int_a^b F_{ext}(x, y, t) dx, \quad (7.6)$$

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) - \left[F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_{ext}(x, y, t) \right] dx = 0. \quad (7.7)$$

Pelo Teorema da Localização, obtêm-se de (7.7), que:

$$\gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_{ext}(x, y, t). \quad (7.8)$$

Definindo-se ainda uma velocidade de propagação da onda ao longo do comprimento $c(x, t) = \sqrt{\frac{F_x(t)}{\gamma(x)}}$, e uma densidade linear de forças externas atuantes na corda $h(x, y, t) = \frac{F_{ext}(x, y, t)}{\gamma(x)}$, tem-se, por fim, a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2(x, t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h(x, y, t). \quad (7.9)$$

7.2 Equação do movimento vibratório do cabo

O modelo desenvolvido a seguir foi o adotado no trabalho de (GARCIA; CUNHA, 2007), e é semelhante ao da corda vibrante com a diferença de que o cabo apresenta uma resistência à flexão, dada pela rigidez EI . Então, assume-se as seguintes hipóteses:

- Todos os pontos ao longo do cabo se movem na direção y ;
- A seção transversal do cabo não muda, no que implica que seu momento de inércia I independe de x e t ;
- O módulo de elasticidade E do cabo é constante e, como I , não varia no tempo ou no espaço x ;

A metodologia de solução é a mesma da corda vibrante, aplicando-se a lei de Newton da igualdade das quantidades de movimento com o somatório das forças aplicadas. No diagrama de corpo livre, apresentado na Fig. (89), nota-se agora a presença de forças cortantes $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, cuja intensidade é $V(x, t)$.

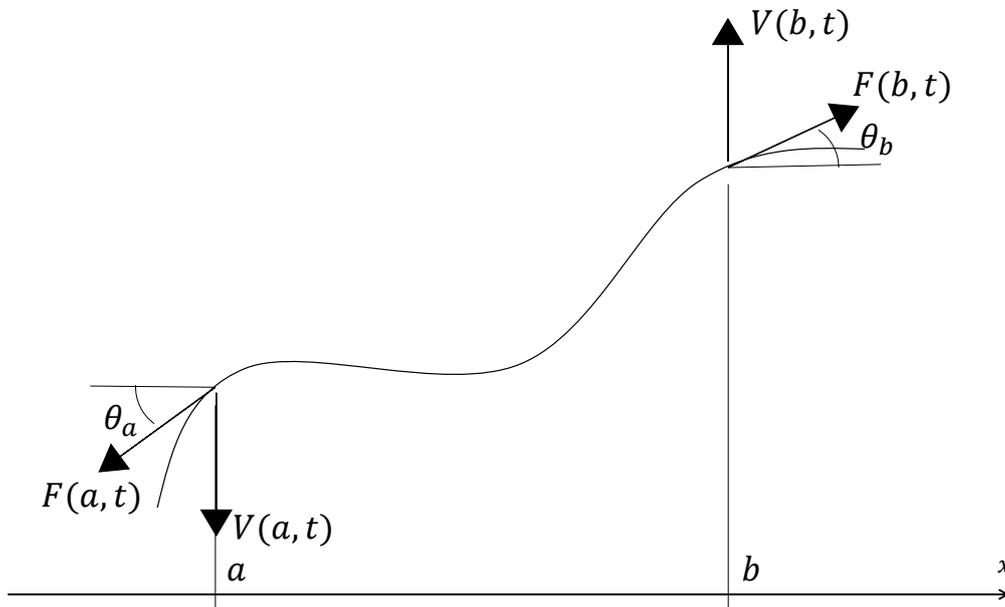


Figura 89 – Diagrama de corpo livre do cabo vibrante.

Dessa maneira, a equação (7.6) é corrigida da seguinte forma:

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = V(b, t) - V(a, t) + \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_{ext}(x, y, t) dx. \quad (7.10)$$

Pela teoria de mecânica dos sólidos, vista em (HIBBELER, 2004), pode-se escrever a força cortante em termos da derivada espacial do momento fletor em x , reescrevendo-se (7.10) como:

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = \frac{\partial M}{\partial x}(b, t) - \frac{\partial M}{\partial x}(a, t) + \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_{ext}(x, y, t) dx, \quad (7.11)$$

Novamente da teoria de mecânica dos materiais, tem-se que $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{M(x, t)}{EI}$, que é a equação da linha elástica. Derivando-se ainda em x , segue que

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t). \quad (7.12)$$

Substituindo-se (7.12) em (7.11), obtém-se:

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = -EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(b, t) - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a, t) \right) + \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) + F_{ext}(x, y, t) dx. \quad (7.13)$$

Usando-se, como na seção anterior, o Teorema Fundamental do Cálculo, segue que:

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = -EI \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \right) \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) + F_{ext}(x, y, t) dx, \quad (7.14)$$

$$\int_a^b \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) dx = -EI \int_a^b \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) dx + \int_a^b F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) + F_{ext}(x, y, t) dx. \quad (7.15)$$

Colocando os termos da direita em uma só integral e isolando do lado esquerdo, escreve-se que:

$$\int_a^b \left[\gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) - F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - F_{ext}(x, y, t) \right] dx = 0. \quad (7.16)$$

Por fim, usando-se novamente o Teorema da Localização, obtém-se a equação geral do movimento vibratório de cabos:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) - F_x(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + \gamma(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = F_{ext}(x, y, t). \quad (7.17)$$

Assim como se realizou a adimensionalização da equação do movimento do cilindro, na seção 6.2, para (7.17) se seguiu com o mesmo procedimento e com os mesmos parâmetros característicos, porém acrescentando-se mais um para a posição x ao longo do cabo, que seria $x^* = x/L$. Além disso, (GARCIA; CUNHA, 2007) assume mais duas hipóteses:

- A força horizontal $F_x(t)$ é a de tração aplicada ao cabo quando este é fixado nas extremidades aos postes, portanto, não depende de t . Para facilitar a notação, denominar-se-á essa força de T ;
- Também se considera a densidade linear γ homogênea em toda a estrutura, no que implica que $\nabla \gamma = \mathbf{0}$.

Disso, a equação 7.17 adimensional fica:

$$\frac{EIa}{L^4} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^{*4}}(x^*, t^*) - \frac{aT}{L^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}}(x^*, t^*) + \gamma a \omega_n^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}}(x, t) = F_{ext}(x^*, t^*). \quad (7.18)$$

Multiplicando os dois lados da equação por $\frac{L^2}{aT}$, segue que:

$$\frac{EI}{L^2 T} \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^{*4}}(x^*, t^*) - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}}(x^*, t^*) + \frac{\gamma \omega_n^2 L^2}{T} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}}(x, t) = \frac{L^2}{aT} F_{ext}(x^*, t^*). \quad (7.19)$$

Até agora, o que se tem é um modelo diferente de corda vibrante visto na seção anterior. Trata-se sim de um modelo de viga. Contudo, a equação (7.19) pode ter a derivada a quarta desprezada, uma vez que o termo $\frac{EI}{L^2 T}$ que a acompanha é da ordem de $1 \cdot 10^{-6}$, como confirma a Tab. 11, na qual se usa os valores dos parâmetros reais do cabo usado nos ensaios descritos no Capítulo 4 para calcular $\frac{EI}{L^2 T}$.

Tabela 11 – Tabela com os valores dos parâmetros do cabo usado nos experimentos para calcular $\frac{EI}{L^2T}$.

Cabo	CAL 1120 / 813 MCM
EI (Nmm^3)	$2,586 \cdot 10^7$
Tensão aplicada - 15% de UTS (N)	$1,428 \cdot 10^4$
Comprimento L (m)	43
L^2 (m^2)	1849
$\frac{EI}{L^2T}$	$9,794 \cdot 10^{-7}$

Então a equação (7.19) segue da seguinte forma:

$$\frac{\gamma\omega_n^2 L^2}{T} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2}{aT} F_{ext}(x^*, t^*). \quad (7.20)$$

Multiplicando-se agora toda a equação por $\frac{T}{\gamma\omega_n^2 L^2}$, segue que:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} - \frac{T}{\gamma\omega_n^2 L^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}} = \frac{1}{\gamma\omega_n^2 a} F_{ext}(x^*, t^*). \quad (7.21)$$

Lembrando da definição de velocidade de propagação da onda na corda, $c = \sqrt{\frac{T}{\gamma}}$, defini-se uma velocidade de propagação adimensional da forma

$$c^* = \frac{c}{L\omega_n}. \quad (7.22)$$

Então, substituindo-se (7.22) em (7.21), e chamando os termos que multiplicam a parcela de forças externas de A_0 , recupera-se a equação de onda na corda

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} - c^{*2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}} = A_0 F_{ext}(x^*, t^*). \quad (7.23)$$

Considerando a existência de forças de auto-amortecimento adimensional do cabo

$$C a \omega_n \frac{\partial \delta}{\partial t^*}(x^*, t^*), \quad (7.24)$$

em que C é um coeficiente de auto-amortecimento; forças de restauração

$$k a \delta(x^*, t^*), \quad (7.25)$$

em que k é o coeficiente elástico do cabo; e forças de excitação externa, a parcela $F_{exp}(x^*, t^*)$ pode ser aberta de forma que (7.23) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} - c^{*2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}} = A_0 F_{exc}(x^*, t^*) + 2Z \frac{\partial \delta}{\partial t^*}(x^*, t^*) + K \delta(x^*, t^*), \quad (7.26)$$

em que $2Z = \frac{2C}{\gamma\omega_n}$ e $K = \frac{k}{\gamma\omega_n^2}$.

Na parcela $A_0 F_{exc}(x^*, t^*)$, pode-se usar um excitação harmônica do tipo $B \cos(\omega t^*)$, como no oscilador harmônico não linear, ou uma excitação do tipo eólica

$$\varepsilon\omega_r \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^k(x^*, t^*) \cos(\omega t^*), \quad (7.27)$$

como no modelo concentrado do cilindro do capítulo anterior.

O que se quer dizer é que esse modelo apresenta total consistência como os concentrados trabalhados ao longo do projeto. Se o cabo for submetido a uma tensão suficientemente pequena, de maneira que a velocidade adimensional de propagação da onda no cabo (c^*) for também muito pequena, levando a se desprezar a derivada segunda em x^* , pode-se simplificar o modelo de cabo vibrante, recupera-se os modelos concentrados.

Assim, os modelos concentrados estudados ao longo do projeto, com as suas diferentes condições de não linearidade e excitação, são uma simplificação desse modelo do cabo vibrante para tensões no cabo suficientemente pequenas.

7.3 Solução da equação do cabo vibrante no caso homogêneo

Para as condições do problema colocado anteriormente em que não haja não linearidades, é possível encontrar soluções analíticas. Dessa maneira, é proposto a solução para o caso homogêneo através do método de separação de variáveis.

Antes de tudo é necessário definir bem o problema, assumindo condições de contorno e condições iniciais. Então, considera-se o cabo fixo nas extremidades, implicando que $\delta(0, t^*) = \delta(1, t^*) = 0$. Como condição inicial, considera-se que o cabo foi deslocado da condição de equilíbrio no ponto $x_0^* = 0,5$ até a posição $\delta(x_0^*, 0) = 0,5$, como ilustrado na Fig. 90, tendo velocidade inicial nula, ou seja, $\frac{\partial \delta}{\partial t^*}(x^*, 0) = 0$.

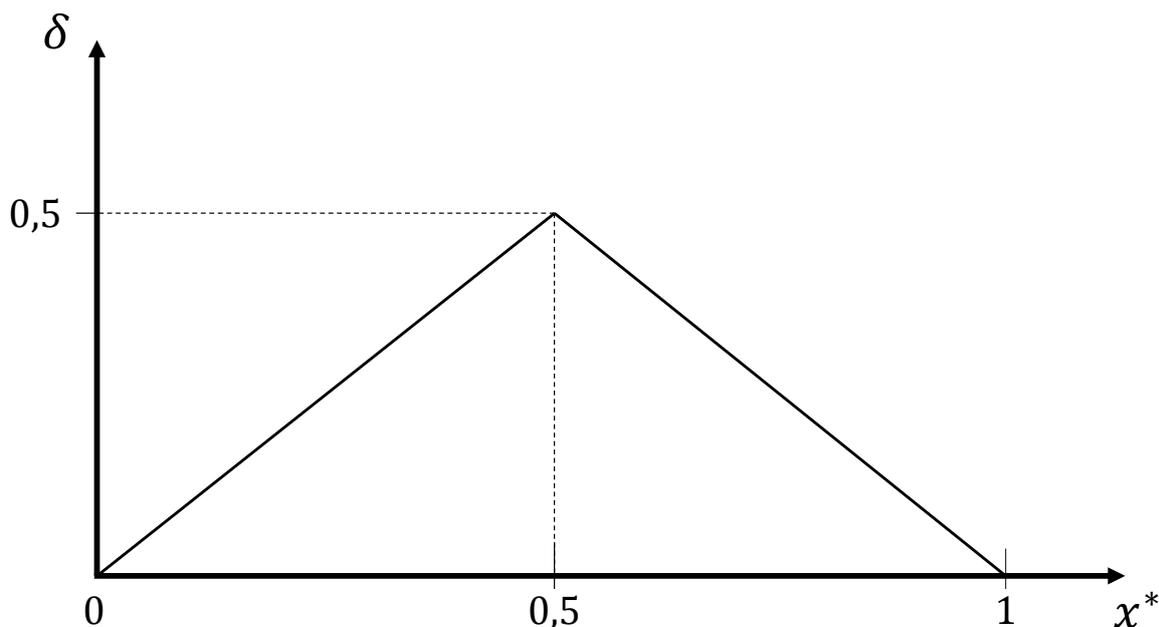


Figura 90 – Condição inicial para o cabo vibrante.

Com isso, o problema é expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} = c^{*2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}}, & t^* > 0, \quad 0 < x^* < 1, \\ \delta(0, t^*) = \delta(1, t^*) = 0, & t^* > 0, \\ \delta(x^*, 0) = f(x^*), & 0 < x^* < 1, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t^*}(x^*, 0) = g(x^*) = 0, & 0 < x^* < 1. \end{cases} \quad (7.28)$$

Em que $f(x^*)$ é dada por

$$f(x^*) = \begin{cases} x^*, & \text{para } 0 \leq x^* \leq 1/2, \\ x^* - 1, & \text{para } 1/2 \leq x^* \leq 1. \end{cases} \quad (7.29)$$

Pelo método de separação de variáveis, propõe-se uma solução da forma

$$\delta(x^*, t^*) = X(x^*)T(t^*). \quad (7.30)$$

Substituindo-se na EDP e fazendo algumas manipulações, tem-se que

$$\frac{1}{c^{*2}T(t^*)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^{*2}}(t^*) = \frac{1}{X(x^*)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^{*2}}(x^*) = \sigma, \quad (7.31)$$

em que σ é uma constante que se assume igual a $-\lambda^2$.

Resolvendo primeiro para x^* , segue a EDO:

$$\begin{cases} \ddot{X} - X\sigma = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad (7.32)$$

propondo-se como solução $X = a_1 e^{rx^*}$, em que a_1 e r são constantes. Substituindo em (7.32), obtêm-se a seguinte equação característica

$$r^2 - \sigma = 0, \quad (7.33)$$

cuja raiz de r é $\pm\sqrt{\sigma} = \pm i\lambda$, em que i é o número imaginário. Assim, a solução de $X(x^*)$ é dada por

$$X(x^*) = a_1 \sin(\lambda x^*) + a_2 \cos(\lambda x^*). \quad (7.34)$$

A partir das condições iniciais, têm-se que $a_2 = 0$ e $a_1 \sin(\lambda x^*) = 0$, implicando que $\lambda_n = n\pi$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Segundo (FIGUEIREDO, 2000), λ_n correspondem aos auto-valores de (7.32), cujas auto-funções são

$$X_n(x^*) = \sin n\pi x^*. \quad (7.35)$$

A solução para o problema em t^* segue os passos semelhantes da solução em x^* , sendo dada por

$$T_n(t^*) = a_n \cos n\pi c^* t^* + b_n \sin n\pi c^* t^*, \quad (7.36)$$

em que a_n e b_n são constantes arbitrárias. A solução (7.36) é periódica com frequência de repetição

$$\omega_n = n\pi c^*, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.37)$$

que consiste na n -ésima frequência natural do cabo.

Desse modo, as duas soluções podem ser combinadas de maneira a resultar em

$$\delta_n(x^*, t^*) = a_n \sin n\pi x^* \cos n\pi c^* t^* + b_n \sin n\pi x^* \sin n\pi c^* t^*. \quad (7.38)$$

A função δ_n corresponde ao n -ésimo harmônico ou ao n -ésimo modo de vibração da onda. O primeiro harmônico é denominado harmônico fundamental e os demais são ditos super-harmônicos. Como existe uma solução (ou modo de vibração) para cada frequência dada, a solução geral é a combinação linear de todas as soluções possíveis. Assim a solução geral é uma série de Fourier dada por:

$$\delta(x^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x^* \cos n\pi c^* t^* + b_n \sin n\pi x^* \sin n\pi c^* t^*, \quad (7.39)$$

em que os coeficientes a_n e b_n são constantes encontradas a partir das condições iniciais da EDP, sendo, respectivamente:

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x^*) \sin n\pi x^* dx^* \quad (7.40)$$

e

$$b_n = \frac{2}{n\pi c^*} \int_0^1 g(x^*) \sin n\pi x^* dx^*. \quad (7.41)$$

Pelas condições iniciais impostas ao problema, o coeficiente b_n é nulo enquanto

$$a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (7.42)$$

Então a solução para o problema é

$$\delta(x^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\pi x^* \cos n\pi c^* t^*, \quad t^* > 0 \quad \text{e} \quad 0 < x^* < 1. \quad (7.43)$$

7.3.1 Resultados gráficos para a solução homogênea do problema do cabo vibrante

A partir da solução em (7.43), gerou-se, através do Matlab, sinais de deslocamento e velocidade por tempo, em pontos escolhidos ao longo do cabo, bem como diagrama de fase e sinais de FFT do deslocamento. A partir dos dados do cabo usado nos ensaios experimentais, calculou-se c^* para cada tensão aplicada ao cabo em laboratório e para cada frequência de excitação imposta, substituídas em ω_n na expressão (7.22).

Como se observa da Tabela 12, os valores da velocidade de propagação de onda adimensional são próximos para todos os casos de tensão e frequência de excitação, considerando-se então, para se gerar os resultados, $c^* = 0,02$.

Tabela 12 – Tabela com os valores calculados de c^* a partir dos parâmetros do cabo usado no ensaio experimental.

Tensão (N)	c (m/s)	ω_n (Hz)	c^*
15582	116,4026	146,5867	0,0185
		146,2097	0,0185
		146,7752	0,0184
		146,7752	0,0184
		146,7752	0,0184
19227,6	129,30449	141,7487	0,0212
		141,7487	0,0212
		141,7487	0,0212
		140,9947	0,0213
		140,9947	0,0213
23716	143,60574	157,0796	0,0213
		156,5141	0,0213
		156,5141	0,0213
		156,5141	0,0213
		156,5141	0,0213

Os resultados que seguem foram tirados dos pontos localizados na metade, um quarto e um terço ao longo de x^* do cabo (Figs. 91, 92 e 93, respectivamente), e constituem o resultado da sobreposição de 10 modos de vibração ($n = 1, 2, 3, \dots, 10$).

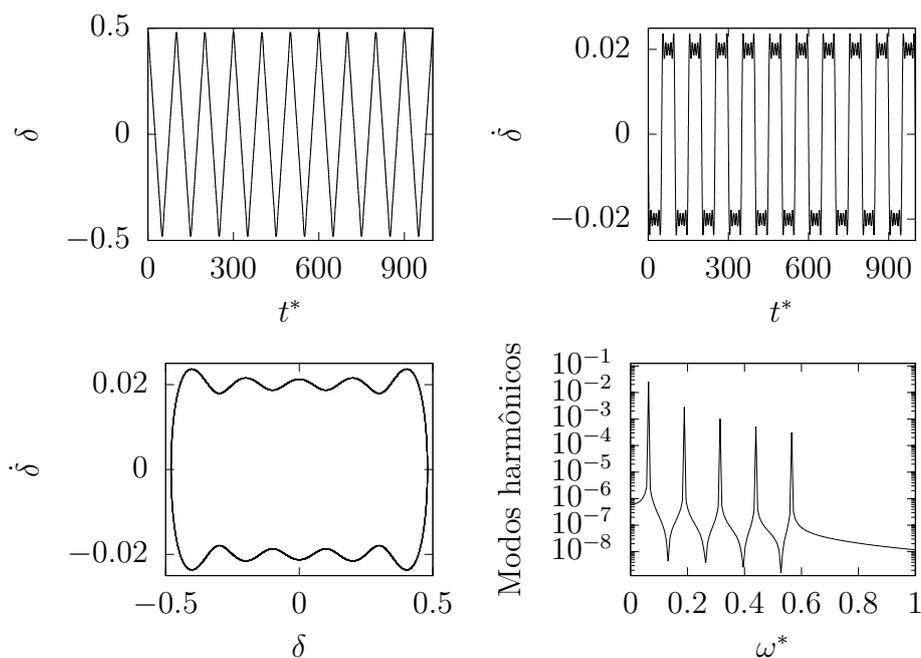


Figura 91 – Respostas no ponto 0,5 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

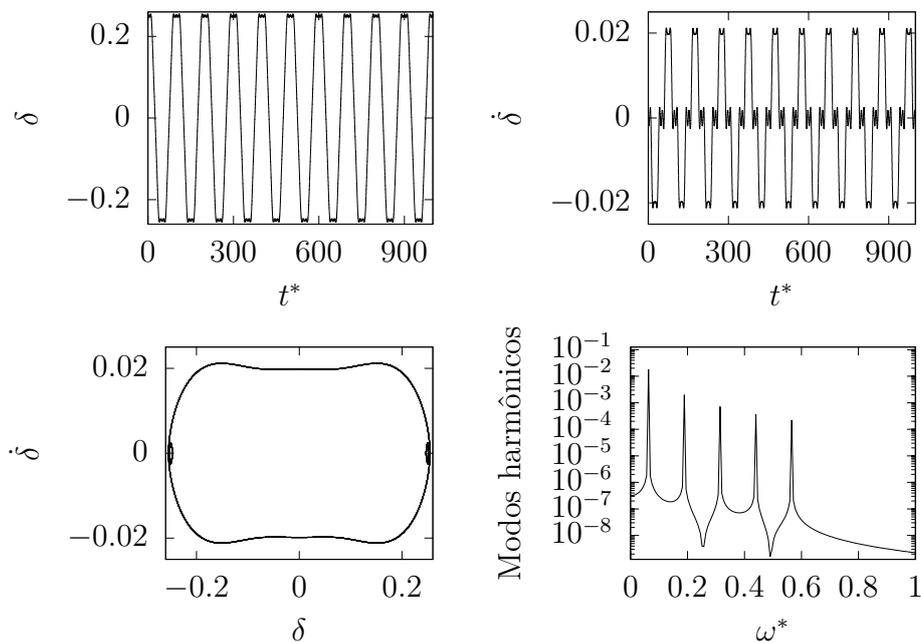


Figura 92 – Respostas no ponto 0,25 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

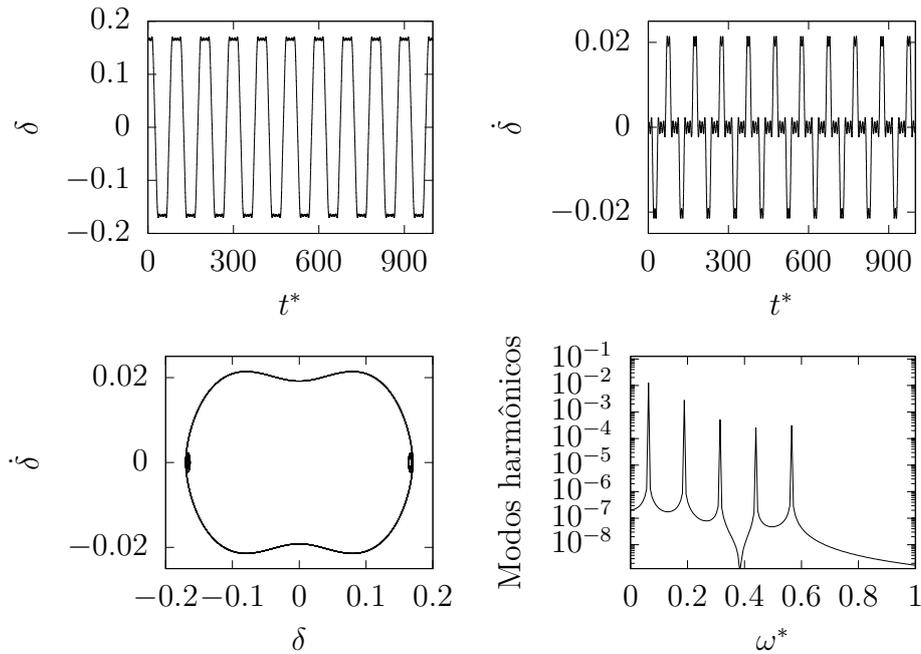


Figura 93 – Respostas no ponto 0,167 da corda vibrante livre ao longo do tempo. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

Como esperado da resposta livre do cabo, os sinais de deslocamento e velocidade são a composição de vários harmônicos. Se houvesse uma excitação externa em uma das frequências naturais, como é realizado na bancada de ensaios, observar-se-ia uma resposta puramente harmônica (como se observou dos resultados experimentais).

Nota-se também que a primeira frequência natural adimensional do cabo não é igual a 1, como se observa no espectro de frequências dos deslocamentos, porque calculou-se o valor de c^* com a frequência usada nos ensaios experimentais, que não é a fundamental do cabo. Essas frequências aplicadas para excitar o cabo correspondem aproximadamente à décima sexta frequência natural. Por isso, as frequências que surgem no espaço amplitude frequência são menores que a unidade.

Os três resultados que seguem nas Figs. 94, 95 e 96, são formas que o cabo assume ao longo de x^* em três tempos diferentes.

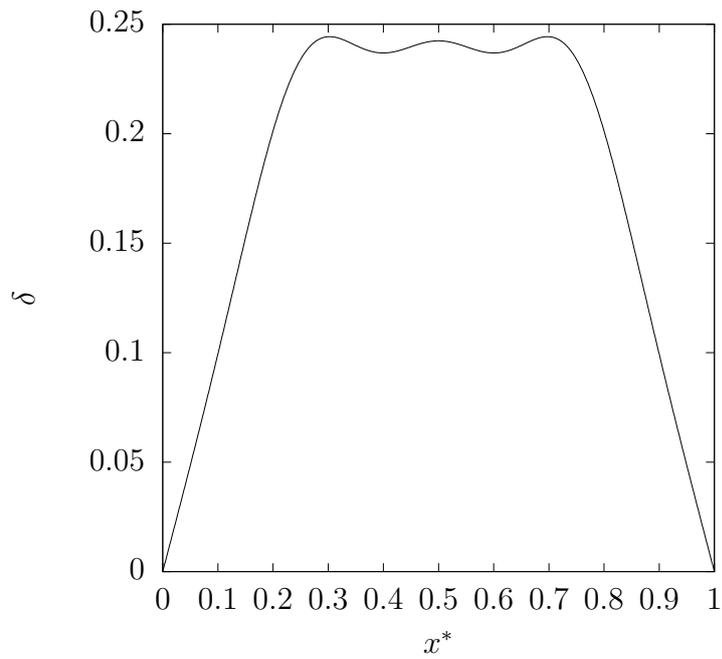


Figura 94 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 37. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

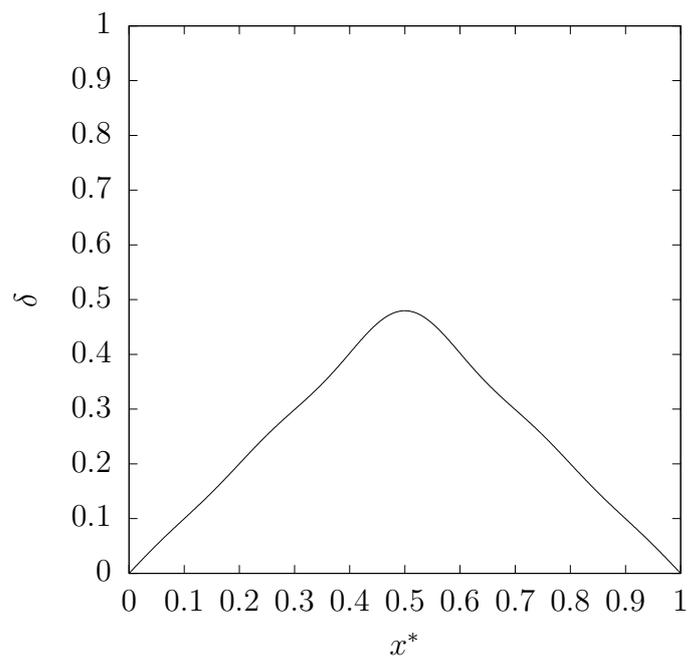


Figura 95 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 500. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

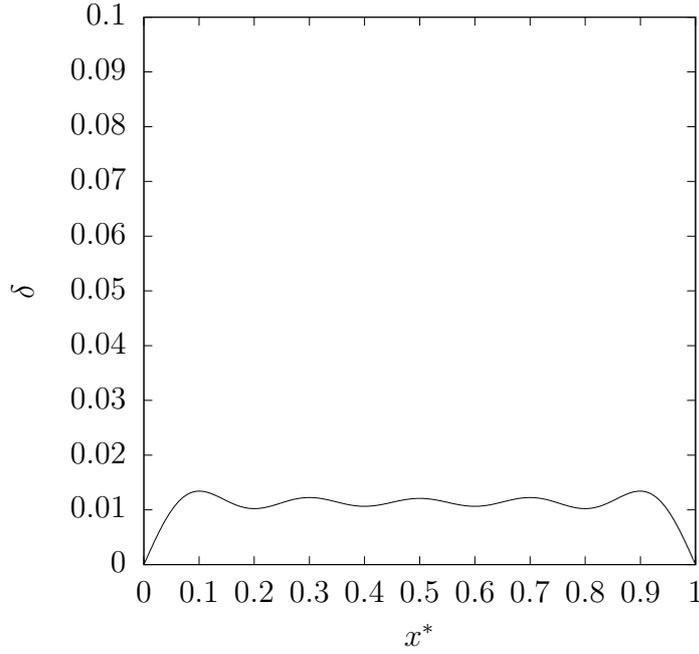


Figura 96 – Forma da corda vibrante livre no tempo adimensional de 624. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

7.4 Solução da equação do cabo vibrante no caso de haver uma excitação do tipo impulso delta de Dirac

Solucionado o problema homogêneo, propõe-se agora uma excitação do tipo impulso em pontos ao longo de x^* do cabo. As condições de contorno são as mesmas, porém para a condição inicial considera-se o cabo em repouso no instante $t^* = 0$. Assim, o problema pode ser expresso da forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^{*2}} - c^{*2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^{*2}} = \sum_{i=1}^k a_i(x^*) \delta_d(x^* - x_i^*), & t^* > 0, \quad 0 < x^* < 1, \\ \delta(0, t^*) = \delta(1, t^*) = 0, & t^* > 0, \\ \delta(x^*, 0) = 0, & 0 < x^* < 1, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t^*}(x^*, 0) = 0, & 0 < x^* < 1, \end{cases} \quad (7.44)$$

em que $\delta_d(x^* - x_i^*)$ é a função impulso delta de Dirac em um ponto x_i^* ao longo do cabo, sendo que i é um índice que varia de 1 até k . Como solução, propõe-se que

$$\delta(x^*, t^*) = \Psi(x^*, t^*) + \phi(x^*). \quad (7.45)$$

Substituindo-se na equação governante em (7.44), tem-se

$$\Psi_{t^*t^*} - c^{*2} \phi''(x^*) - c^{*2} \Psi_{x^*x^*} = \sum_{i=1}^k a_i(x^*) \delta_d(x^* - x_i^*), \quad (7.46)$$

$$\Psi_{t^*t^*} - c^{*2} \Psi_{x^*x^*} = \sum_{i=1}^k a_i(x^*) \delta_d(x^* - x_i^*) + c^{*2} \phi''(x^*). \quad (7.47)$$

Estabelecendo uma condição de homogeneidade para $\Psi(x^*, t^*)$, segue que

$$\Psi_{t^*t^*} - c^{*2}\Psi_{x^*x^*} = 0 \quad e \quad (7.48)$$

$$\sum_{i=1}^k a_i(x^*)\delta_d(x^* - x_i^*) + c^{*2}\phi''(x^*) = 0. \quad (7.49)$$

Então, há dois problemas a serem resolvidos: uma EDP em $\Psi(x^*, t^*)$ (7.48) e uma EDO de segunda ordem para $\phi(x^*)$ (7.49). Para que as condições iniciais e de contorno em (7.44) sejam respeitadas, pode-se escrever os dois problemas de maneira completa. Para $\Psi(x^*, t^*)$ segue que

$$\begin{cases} \Psi_{t^*t^*} - c^{*2}\Psi_{x^*x^*} = 0, & t^* > 0, \quad 0 < x^* < 1, \\ \Psi(0, t^*) = \Psi(1, t^*) = 0, & t^* > 0, \\ \Psi(x^*, 0) = -\phi(x^*), & 0 < x^* < 1, \\ \Psi_{t^*}(x^*, 0) = 0, & 0 < x^* < 1, \end{cases} \quad (7.50)$$

e para $\phi(x^*)$, tem-se que

$$\begin{cases} \phi''(x^*) = \sum_{i=1}^k A_i(x^*)\delta_d(x^* - x_i^*), & 0 < x^* < 1, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0, \end{cases} \quad (7.51)$$

em que $A_i(x^*) = -\frac{a_i(x^*)}{c^{*2}}$.

A solução de $\phi(x^*)$ pode ser encontrada para cada impulso individualmente e depois se sobrepõem as soluções. Para o projeto, optou-se por resolver para um único impulso. Então a solução foi obtida com o auxílio do programa Maple e é expressa por

$$\begin{aligned} \phi(x^*) = & u_{x_0^*}(x^*)A(x_0^*)x^* - u_{x_0^*}(x^*)A(x_0^*)x_0^* + \\ & x^*(-u_{x_0^*}(1)A(x_0^*) + u_{x_0^*}(1)A(x_0^*)x_0^* - u_0(-x_0^*)A(x_0^*)) + \\ & u_0(-x_0^*)A(x_0^*)x_0^*, \end{aligned} \quad (7.52)$$

em que $A(x_0^*)$ é constante e $u_{x_0^*}(x^*)$ é uma função degrau definida por

$$u_{x_0^*}(x^*) = \begin{cases} 1, & x^* \geq x_0^*, \\ 0, & x^* < x_0^*. \end{cases} \quad (7.53)$$

Para $\Psi(x^*, t^*)$, utiliza-se o método da separação de variáveis, como se fez na seção 7.3, obtendo-se

$$\Psi(x^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x^* \cos n\pi c^* t^*, \quad t^* > 0, \quad 0 < x^* < 1, \quad (7.54)$$

em que a_n é o coeficiente de Fourier dado por

$$a_n = 2 \int_0^1 \phi(x^*) \sin n\pi x^* dx^*, \quad (7.55)$$

que resolvido pelo Maple resultou em

$$a_n = 2 \left\{ \frac{A(x_0^*) \left[-u_{x_0^*}(1) \sin(n\pi) + u_0(-x_0^*) \sin(n\pi)x_0^* + u_{x_0^*}(1) \sin(n\pi x_0^*) \right]}{n^2 \pi^2} - \frac{u_0(-x_0^*) A(x_0^*) \sin(n\pi x_0^*)}{n^2 \pi^2} \right\}. \quad (7.56)$$

Assim, a solução completa de $\delta(x^*, t^*)$ é expressa por

$$\delta(x^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x^* \cos n\pi c^* t^* + \phi(x^*), \quad t^* > 0, \quad 0 < x^* < 1. \quad (7.57)$$

7.4.1 Resultados gráficos para a solução do problema do cabo vibrante excitado com uma função impulso

O mesmo procedimento feito na seção 7.3.1 se seguiu para a solução com excitação externa do tipo impulso delta de Dirac, plotando-se sinais de deslocamento e velocidade por tempo de alguns pontos do cabo, bem como o diagrama de fase e espectro amplitude frequência do deslocamento. Novamente, a solução gerada foi para a sobreposição dos 10 primeiros modos de vibração, escolhendo-se um impulso de magnitude $-4 \cdot 10^{-3}$ no meio do cabo ($x_0^* = 0,5$).

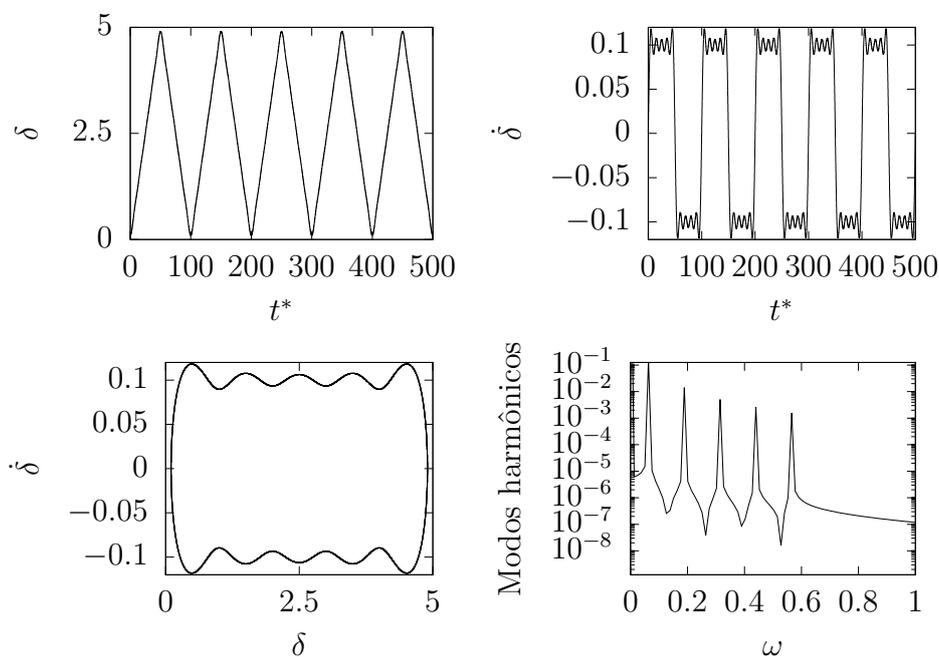


Figura 97 – Respostas no ponto 0,5 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

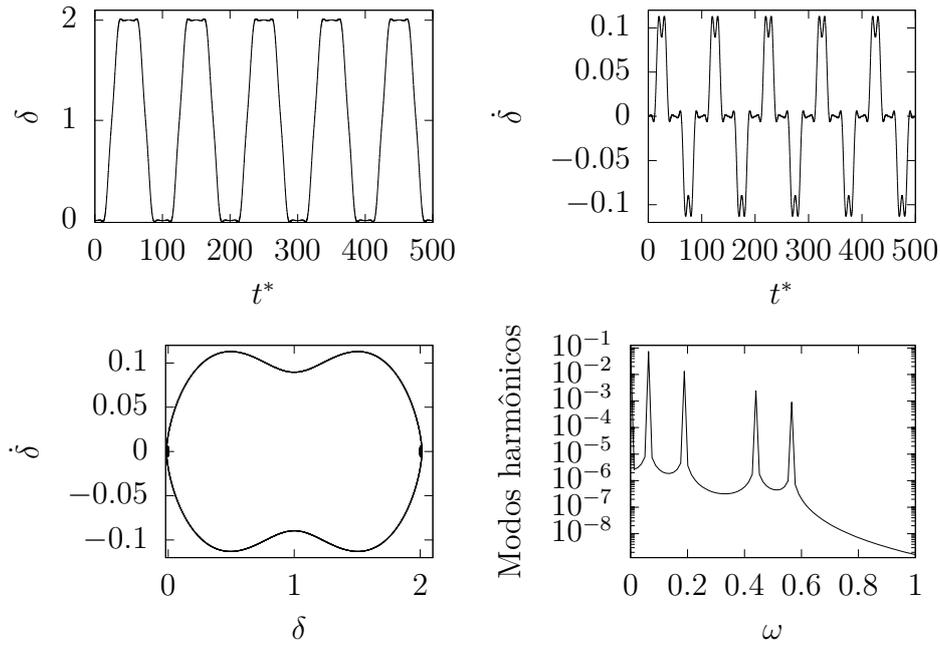


Figura 98 – Respostas no ponto 0,2 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

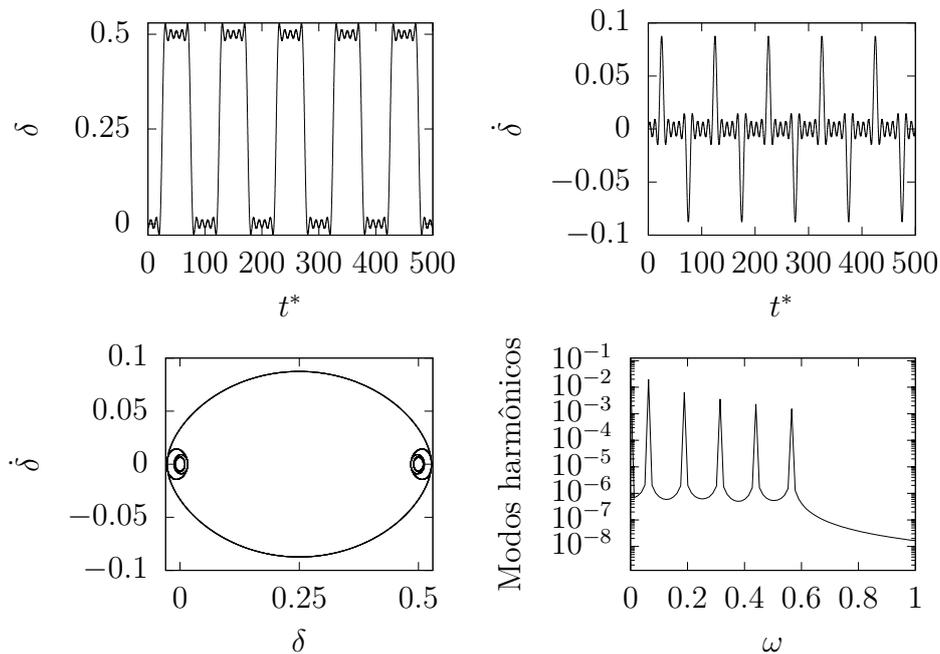


Figura 99 – Respostas no ponto 0,05 do cabo vibrante ao longo do tempo quando sujeito a um impulso do tipo delta de Dirac. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

Dessa vez, os pontos escolhidos foram a metade do cabo, $x_0 = 0,5$ (Fig. 97), e outros dois pontos mais próximos à extremidade fixa, $x^* = 0,2$ (Fig. 98) e $x^* = 0,05$ (Fig. 99). Nota-se que esses três resultados são bastante semelhantes aos apresentados na seção 7.3.1, com a diferença de que os deslocamentos agora não possuem média zero devido a

presença do impulso que mantém o deslocamento no centro do cabo longe da posição de repouso, como demonstram também as Figs. 100 e 101.

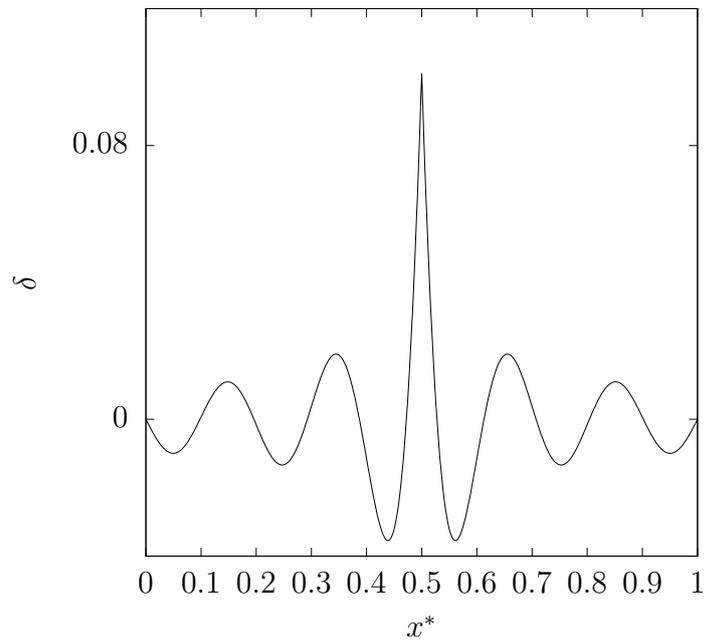


Figura 100 – Forma da corda vibrante excitada por impulso no tempo adimensional de 500. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

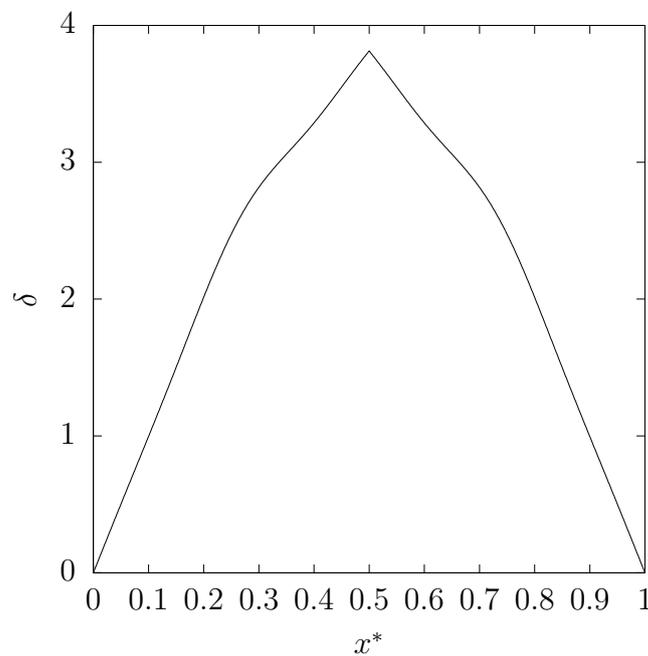


Figura 101 – Forma da corda vibrante excitada por impulso no tempo adimensional de 62. Resposta é o somatório de $n = 10$ modos.

Os sinais nos dois problemas apresentados são semelhantes, pois se tratam de uma perturbação na mesma região do cabo. No problema homogêneo, essa perturbação só ocorre no instante inicial, enquanto que, no problema excitado, ela perdura ao longo do

tempo, fazendo o cabo responder com esses deslocamentos maiores e mais distantes da posição de repouso.

8 Conclusões

Introduziu-se a pesquisa apresentando o método das perturbações como solução analítica aproximada de problemas não lineares, cujo parâmetro adimensional menor que a unidade possibilitava o uso do método. Tal condição foi observada nos modelos propostos no trabalho para simular a dinâmica da oscilação em cabos. Verificou-se os casos de convergência do método, recorrendo-se também ao método de Poincaré-Lindstedt, que vem a complementar o assintótico quando surge um termo secular na resposta aproximada, confirmando-se também um excelente método quando aplicado.

Depois de explorado o método das perturbações, propôs-se o modelo do oscilador harmônico não linear para dar início a esse estudo da dinâmica da vibração em cabos. O sistema foi explorado em diversas condições de excitação, não linearidade e amortecimento, mostrando-se como forte potencial para descrever a oscilação real de um ponto do cabo, uma vez que se obteve respostas desde regimes harmônicos lineares, com frequência de excitação e amortecimento elevados, até regimes completamente caóticos, com a parcela não linear e a amplitude de excitação elevados.

Obteve-se, por meio de um ensaio de cabo real, dados de deslocamento em um ponto do cabo ao longo do tempo, verificando-se que as respostas, em sua grande maioria, possuíam um caráter linear, dado que a excitação imposta pelo excitador eletromecânico era do tipo harmônico linear. A partir disso, foi possível ajustar o modelo concentrado do oscilador harmônico não linear usando-se os parâmetros experimentais, calibrando-se somente o amortecimento e a parcela não linear do sistema, obtendo-se resultados extremamente satisfatórios do ponto de vista qualitativo. Plotando-se gráficos que relacionavam amplitude máxima alcançada pelos sinais de deslocamento no tempo pela amplitude de excitação imposta ao sistema dos resultados experimentais e do modelo, alcançou-se por ele amplitudes máximas próximas às obtidas experimentalmente, seguindo o mesmo comportamento. Então, pelo modelo concentrado proposto, conseguiu-se capturar o mesmo comportamento que se observa em bancada experimental.

Em sequência ao modelo do oscilador harmônico não linear, desenvolveu-se o de um cilindro suspenso por quatro molas e submetido ao um escoamento transversal, visando-se introduzir o aspecto de excitação eólica ao trabalho. Por possuir um parâmetro adimensional que poderia ser muito menor que a unidade, utilizou-se novamente o método da perturbação para resolver a equação governante. As soluções, apesar do aspecto não linear

que a excitação eólica apresenta, tiveram um caráter linear.

Estudando-se essa excitação eólica como um polinômio de ordem n com vários valores do parâmetro ε , concluiu-se que para regimes em que $\varepsilon \ll 1$, poderia-se simplificar a excitação para um polinômio de ordem menor que dois, como proposto por (DIANA et al., 2000), recuperando-se o modelo do oscilador harmônico, mostrando-se também com isso, a intercambiabilidade entre os modelos concentrados propostos no trabalho para determinados regimes de excitação e amortecimento.

Finalizou-se o projeto com o modelo do cabo vibrante, que descrevia também o movimento do cabo ao longo do seu comprimento. Mostrou-se, ao final das deduções, que poderia se obter os modelos concentrados desenvolvidos no projeto caso as tensões de esticamento aplicadas ao cabo fossem suficientemente pequenas para se desprezar a derivada segunda em x do deslocamento vertical y , confirmando a consistência dos modelos e que, dependendo das condições físicas que se deseja estudar, é possível utilizar um sistema mais simples para descrever os fenômenos.

Então, para esse modelo do cabo vibrante, solucionou-se o caso homogêneo obtendo-se respostas para a sobreposição dos dez primeiros modos de vibração do cabo. Ainda foi possível verificar qual modo de vibração correspondia ao que o cabo foi excitado no experimento, utilizando-se os parâmetros reais do condutor. Por fim, adicionou-se uma excitação do tipo impulso delta de Dirac no centro do cabo, verificando-se que as respostas eram semelhantes ao caso homogêneo com a condição inicial do cabo deslocado no centro do seu comprimento até um altura vertical h , com a diferença de que, no caso da excitação, essa perturbação no centro do cabo perdurava ao longo do tempo, mantendo o cabo longe da sua posição de repouso.

8.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como continuidade desse estudo da dinâmica da oscilação em cabos transmissores de energia elétrica, propõe-se:

1. A solução do modelo do cabo vibrante quando sujeito a uma excitação externa do tipo harmônica $A \cos(\omega t)$, usando os parâmetros do ensaio experimental para obter resultados comparativos do modelo com a realidade;
2. Acrescentar um termo não linear oriundo de um coeficiente de restituição elástico, como se fez para o modelo concentrado do oscilador harmônico, solucionando por um Método de Diferenças Finitas;
3. Gerar soluções também para uma excitação do tipo eólica, apresentada no trabalho a partir do modelo do cilindro, resolvendo também por diferenças finitas por causa do termo não linear da amplitude de excitação;

4. Por fim, acrescentar o termo de auto-amortecimento do cabo e obter a solução do problema mais completo.

Referências

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado na página 117.
- CHAN, J. et al. *Eprri transmission line reference book: wind-induced conductor motion*. EPRI, 2009. Citado na página 51.
- CIGRE, S. Wg11 tf1, aeolian vibrations of single conductors: assessment of the technology. *Electra, Dec*, 1998. Citado na página 3.
- DALTON, C. *Fundamentals of vortex induced vibration*. *University of Houston, England*, 2013. Citado na página 1.
- DIANA, G.; FALCO, M. On the forces transmitted to a vibrating cylinder by a blowing fluid. *Meccanica*, Springer, v. 6, n. 1, p. 9–22, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 79.
- DIANA, G. et al. On the measurement of overhead transmission lines conductor self-damping. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 285–292, 2000. Citado na página 107.
- DYKE, M. V. *Perturbation methods in fluid mechanics*. [S.l.]: Academic press New York, 1964. v. 964. Citado na página 6.
- DYKE, M. V.; DYKE, M. V. *An album of fluid motion*. Parabolic Press Stanford, 1982. Citado 4 vezes nas páginas vi, ix, 1 e 70.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 95.
- GARCIA, P. F. V.; CUNHA, F. R. da. Analytical modelling of wind-vortex-induced vibration of cylinders and cables. In: *19th International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado 4 vezes nas páginas 2, 70, 89 e 91.
- GUERARD, S.; GODARD, B.; LILIEN, J.-L. Aeolian vibrations on power-line conductors, evaluation of actual self damping. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 26, n. 4, p. 2118–2122, 2011. Citado na página 71.
- HADULLA, T. *Vortex-induced vibrations in overhead line conductor bundles*. Tese (Doutorado) — Doctoral Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2000. Citado na página 3.
- HARTOG, J. P. D. *Vibrações nos sistemas mecânicos: Mauro Ormeu Cardoso Amorelli*. [S.l.]: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. Citado na página 71.
- HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. São Paulo: Ed. [S.l.]: Pearson Education, 2004. Citado na página 90.

HINCH, E. *Perturbation Methods*. 1991. [S.l.]: Cambridge University Press and references therein, 1991. Citado na página 6.

JING, H. et al. Excitation mechanism of rain–wind induced cable vibration in a wind tunnel. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 68, p. 32–47, 2017. Citado na página 4.

LIU, S. et al. Study of new vibration suppression devices for application to ehv transmission line groundwires. *Energy Procedia*, Elsevier, v. 12, p. 313–319, 2011. Citado na página 51.

LOGAN, J. D. *Applied mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 7, 13, 15 e 25.

MEIER-WINDHORST, A. Flutter of cylinders in steady liquid flow. *Mitt. Hydraulik Inst. Techn. Hochschule München*, n. 9, 1939. Citado na página 3.

MIRANDA, T. B. d. Influência do parâmetro h/w sobre o auto amortecimento de cabos condutores de energia. *Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil*, 2017. Citado 4 vezes nas páginas viii, 2, 49 e 51.

RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. [S.l.]: Pearson Educación, 2009. Citado na página 1.

ROCHA, P. H. C. Estudo comparativo de vida em fadiga de cabos condutores utilizando o critério h/w . *Projeto de Graduação 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil*, 2006. Citado 4 vezes nas páginas viii, 44, 45 e 50.

SAVI, M. A.; PAULA, A. S. D. *VIBRAÇÕES MECÂNICAS*. [S.l.]: LTC, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

SEIDEL, C.; DINKLER, D. Rain–wind induced vibrations–phenomenology, mechanical modelling and numerical analysis. *Computers & structures*, Elsevier, v. 84, n. 24-25, p. 1584–1595, 2006. Citado na página 4.

Anexos

A Cálculos para a solução exata do problema de uma partícula em meio resistivo

A EDO adimensionalizada é:

$$\frac{dv^*}{dt^*} = -v^* + \varepsilon v^{*2}, \quad t^* > 0, \quad v^*(0) = 1, \quad (\text{A.1})$$

Para encontrar a solução exata do problema, substitui-se v^* por ω^{-1} , reescrevendo-se [A.1](#) como:

$$\frac{d(\omega^{-1})}{dt} = \frac{1}{\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (\text{A.2})$$

que por sua vez é igual a

$$-\frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando [A.3](#) por ω^2 , tem-se que

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega - \varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

Dividindo-se tudo por $\omega - \varepsilon$, obtêm-se

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega - \varepsilon} = 1, \quad (\text{A.5})$$

que, ao se integrar, tem-se:

$$\ln(\omega - \varepsilon) = t + C_0. \quad (\text{A.6})$$

Elevando tudo à potência e , segue

$$\omega - \varepsilon = C_0 e^t, \quad (\text{A.7})$$

$$\omega = C_0 e^t + \varepsilon. \quad (\text{A.8})$$

Pelas condições iniciais, $\omega(0) = 1$ no que implica

$$1 = C_0 e^0 + \varepsilon, \quad (\text{A.9})$$

$$C_0 = 1 - \varepsilon. \tag{A.10}$$

Portanto,

$$\omega = e^t(1 - \varepsilon) + \varepsilon, \tag{A.11}$$

$$\omega = e^t + \varepsilon(1 - e^t). \tag{A.12}$$

Como $\omega = v^{*-1}$,

$$v^* = \frac{1}{e^t + \varepsilon(1 - e^t)}. \tag{A.13}$$

Dividindo numerador e denominador por e^t chega-se a:

$$v^* = \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon(e^{-t} - 1)}. \tag{A.14}$$

B Cálculos para encontrar a solução da EDO oriunda da expansão assintótica para o problema do oscilador não linear

Seja a EDO:

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos^3 t^*, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Primeiro, expande-se $\cos^3 t^*$ a partir da equação de Euler da seguinte forma:

$$(e^{it})^3 = \cos 3t + i \sin 3t = (\cos t + i \sin t)^3 = \cos^3 t + 3i \cos^2 t \sin t - 3 \cos t \sin^2 t - i \sin^3 t. \quad (\text{B.2})$$

Igualando as partes reais, tem-se que

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3 \cos t. \quad (\text{B.3})$$

Disso, tira-se que

$$\cos^3 t = \cos 3t + 3 \cos t. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo-se B.4 em B.1, pode-se escrever que

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\cos 3t^* - 3 \cos t^*. \quad (\text{B.5})$$

Assim, a solução homogênea é dada por

$$u_{1h} = C_1 \cos t^* + C_2 \sin t^*, \quad (\text{B.6})$$

enquanto a particular é da forma

$$U_1 = C \cos 3t^* + Dt^* \cos t^* + Et^* \sin t^*. \quad (\text{B.7})$$

Tirando-se a derivada segunda de B.7 e se substituindo em B.5, encontra-se os coeficientes de B.7, que são:

$$\begin{cases} C = \frac{3}{8}; \\ D = -\frac{3}{2}; \\ E = -3. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo-se esses coeficientes na solução particular e usando as condições iniciais para encontrar os coeficientes da solução homogênea, chega-se ao seguinte resultado:

$$u_1 = \frac{1}{32}(\cos 3t^* - \cos t^*) - \frac{3}{8}t^* \sin t^*. \quad (\text{B.9})$$

C Solução analítica para o forçador harmônico linear

A EDO do problema é dada por:

$$\ddot{u} + u = \beta \sin(\omega^* t^*), \quad u(0) = 1, \quad \dot{u} = 0, \quad t^* > 0. \quad (\text{C.1})$$

A solução desenvolvida a seguir é para $\omega^* > 1$. A resposta de C.1 se divide em duas partes: uma homogênea da forma

$$u_h = C_0 \cos t^* + C_1 \sin t^*, \quad (\text{C.2})$$

e uma particular, que pelo método dos coeficientes indeterminados, é dada por

$$U = A \cos \omega^* t^* + B \sin \omega^* t^*, \quad (\text{C.3})$$

cujas derivadas primeira e segunda são :

$$\dot{U} = -A\omega^* \sin \omega^* t^* + B\omega^* \cos \omega^* t^*, \quad (\text{C.4})$$

$$\ddot{U} = -A\omega^{*2} \cos \omega^* t^* - B\omega^{*2} \sin \omega^* t^*. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo-se C.3 e C.5 em C.1, segue que

$$-A\omega^{*2} \cos \omega^* t^* - B\omega^{*2} \sin \omega^* t^* + A \cos \omega^* t^* + B \sin \omega^* t^* = \beta \sin \omega^* t^*. \quad (\text{C.6})$$

Cancelando alguns termos e igualando os que multiplicam $\cos \omega^* t^*$ e $\sin \omega^* t^*$, têm-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} A - A\omega^{*2} = 0 \\ B - B\omega^{*2} = \beta \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Portanto, $A = 0$ e $B = \frac{\beta}{(1-\omega^{*2})}$. Substituindo em C.3, obtém-se:

$$U = \frac{\beta}{(1-\omega^{*2})} \sin \omega^* t^*. \quad (\text{C.8})$$

Assim, a solução é dada pela soma de C.8 e C.2:

$$u = \frac{\beta}{(1-\omega^{*2})} \sin \omega^* t^* + C_0 \cos t^* + C_1 \sin t^*. \quad (\text{C.9})$$

Usando-se as condições iniciais do problema em C.1, segue:

$$u(0) = \frac{\beta}{(1 - \omega^{*2})} \sin(0) + C_0 \cos(0) + C_1 \sin(0) = 1 \Rightarrow C_0 = 1, \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{u}(0) = \frac{\beta\omega^*}{(1 - \omega^{*2})} \cos(0) - 1 \sin(0) + C_1 \cos(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\beta\omega^*}{(1 - \omega^{*2})}. \quad (\text{C.11})$$

Por fim, a solução de C.1 para $\omega^* > 1$ é

$$u = \frac{\beta}{(1 - \omega^{*2})} \sin \omega^* t^* + \cos t^* - \frac{\beta\omega^*}{(1 - \omega^{*2})} \sin t^*. \quad (\text{C.12})$$

Para o caso de $\omega^* = 1$, a EDO em C.1 se simplifica a:

$$\ddot{u} + u = \beta \sin t^*, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u} = 0, \quad t^* > 0, \quad (\text{C.13})$$

cuja solução homogênea é a mesma apresentada em C.2, mas a particular é da seguinte forma, segundo a teoria apresentada em (BOYCE; DIPRIMA, 1985):

$$U = At^* \cos t^* + Bt^* \sin t^*, \quad (\text{C.14})$$

cujas derivadas são:

$$\dot{U} = A \cos t^* - At^* \sin t^* + B \sin t^* + Bt^* \cos t^*, \quad (\text{C.15})$$

$$\ddot{U} = -2A \sin t^* + 2B \cos t^* - At^* \cos t^* - Bt^* \sin t^*. \quad (\text{C.16})$$

Substituindo-se C.14 e C.16 em C.13, segue que:

$$-2A \sin t^* + 2B \cos t^* - At^* \cos t^* - Bt^* \sin t^* + At^* \cos \omega^* t^* + Bt^* \sin \omega^* t^* = \beta \sin t^*. \quad (\text{C.17})$$

A partir disso, igualando-se e eliminando-se alguns termos, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} -2A = \beta \Rightarrow A = -\frac{\beta}{2} \\ -2B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Somando-se as soluções homogênea e particular e se substituindo nesta última os valores de A e B , tem-se que a solução é dada por:

$$u = -\frac{\beta}{2} t^* \cos t^* + C_0 \cos t^* + C_1 \sin t^*. \quad (\text{C.19})$$

Análogo ao caso anterior, descobre-se os valores das constantes C_0 e C_1 pelas condições iniciais e obtém-se a solução final, dada por:

$$u = -\frac{\beta}{2} t^* \cos t^* + \cos t^* + \frac{\beta}{2} \sin t^*. \quad (\text{C.20})$$