



**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS
EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS**

Tiago José de Menezes Cardoso

Brasília, 20 de Novembro de 2019

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS

POR,

Tiago José de Menezes Cardoso

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Aline Souza de Paula, UnB/ENM _____
Marcela Rodrigues Machado, UnB/ENM _____
Adriano Todorovic Fabro, UnB/ENM _____

Brasília, 20 de Novembro de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Universidade de Brasília, instituição acadêmica de tanto prestígio e que foi palco de tanto aprendizado e mudança em minha vida nos últimos anos. Além de ter sido um pilar de tanta importância em minha existência desde meu ingresso no ensino superior e de ter me fornecido o conhecimento técnico-científico e profissionalizante de qualidade que carrego comigo hoje, essa universidade foi capaz de me proporcionar sabedoria que vai muito além de minha formação. Tendo em vista as ameaças à educação pública e à pesquisa que rondam os corredores desse ambiente nos dias de hoje, acho fundamental demonstrar minha gratidão e admiração pelo modelo democrático e inclusivo que ainda se mantém presente.

Tendo dito isso, passo a agradecer às pessoas que estiveram presentes comigo durante minha formação e durante o desenvolvimento do meu projeto de graduação. Em primeiro lugar, gostaria de dar o devido reconhecimento à minha orientadora, Aline Souza de Paula, não somente por ter me guiado durante esse último estágio da minha formação superior mas também pelos ensinamentos e pela maneira como deu o suporte que eu necessitava para alcançar os objetivos propostos pelo meu projeto de graduação. Sem sua calma e seu bom-humor certamente todo o caminho que percorri ao longo desse ano teria sido mais difícil e tortuoso.

Gostaria de demonstrar minha gratidão também à minha família, que me deu tanto suporte ao longo dessa jornada. À minha mãe especialmente, por sempre ter priorizado minha educação e meu bem-estar por todos esses anos. Sem seu cuidado com certeza essa parte da minha história teria sido repleta de outros obstáculos. Ao meu pai, às minhas irmãs e à Sueli, a quem tenho muito carinho, por todo o apoio que recebi e ainda recebo, obrigado.

Da mesma forma, gostaria de agradecer aos amigos que me deram forças nos momentos mais difíceis dessa fase da minha vida. Pelas risadas, pelos momentos de descontração nas épocas em que estive mais preocupado e pelo apoio nos momentos de tristeza, eu os agradeço. Dentre eles, gostaria de citar meus amigos Higor, Luís, Rayanne, Isadora, Ludmila(s), Ana Luiza, Flávia e Adriana, além de tantos outros que contribuíram para que eu pudesse chegar no ponto em que estou hoje. Não poderia deixar de citar meu amigo Daniel, que nos deixou tão precocemente e de quem sinto tanta falta. Finalmente, devo prestar meu reconhecimento aos amigos que fiz e que moraram comigo durante o ano em que vivi na Inglaterra. Longe de casa essas pessoas se tornaram uma segunda família e me deram forças nos momentos mais difíceis quando deles precisei.

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.

-Paulo Freire

RESUMO

Vibrações estão associadas a inúmeros problemas mecânicos de componentes de máquinas alternativas tais como motores de combustão interna e compressores alternativos. Um dos mecanismos mais importantes em máquinas alternativas é o virabrequim, que pode ser considerado como a espinha dorsal desse tipo de máquina. Essa peça rotativa está sujeita a um conjunto de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica e podem gerar altos níveis de tensão associados a vibrações, que por sua vez podem estar associadas a graves danos estruturais como vazamentos e falhas por fadiga. Com o intuito de compreender melhor o fenômeno de vibrações em sistemas rotativos de transmissão de potência de compressores recíprocos, é apresentado um modelo matemático de vibrações torcionais para esse tipo de sistema. Foi desenvolvido um código computacional em linguagem *Matlab®* capaz de simular o comportamento dinâmico de um sistema composto por um virabrequim, um volante de inércia, o eixo de saída de um motor elétrico assíncrono e o acoplamento entre o virabrequim e o eixo do motor. O sistema contou também com a entrada de torques resistivos relacionados aos cilindros de compressão, que foram implementados no código desenvolvido como séries de Fourier, e de um torque motor relacionado a um motor elétrico assíncrono. Os resultados obtidos foram parcialmente consistentes, tendo em vista que o comportamento da velocidade angular do sistema não foi estabilizado a um valor constante em condições de regime permanente, como esperado. O motivo dado para esse resultado foi a consideração do torque de entrada do motor elétrico como um valor constante.

ABSTRACT

Mechanical vibrations are associated with several reciprocating machine component problems. Internal combustion engines and reciprocating compressors are considered examples of this kind of machine. One of the most important mechanisms in reciprocating machines is the crankshaft, which may be considered as the spine column of these apparatuses. This rotating component can be affected by dynamic forces that work periodically and cause high stress levels associated with vibrations that could originate leaks and fatigue failures. To understand better the phenomenon of vibrations in power transmission rotating systems of reciprocating compressors, a mathematical model for torsional vibrations is presented for this sort of system. A computational code was developed in *Matlab*[®] programming language and it was able to simulate the dynamic behaviour of a system composed by a flywheel, a crankshaft, an induction motor shaft and a coupling between these two latter elements. The system also received entrances of torque related to the electric motor and the compression cylinders that were introduced in the code as Fourier series. The final results were partially consistent considering the angular velocity behavior that did not reach a plateau form in permanent regime as expected. The reason given for this result was the electric motor interpretation as a constant.

Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	ii
LISTA DE TABELAS	iv
LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS	v
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVO GERAL	3
1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
1.3 METODOLOGIA	3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	4
2 CONCEITOS TEÓRICOS	6
2.1 COMPRESSORES	6
2.2 VIBRAÇÕES EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS	10
2.3 DIAGRAMA DE CAMPBELL	12
2.4 CONCLUSÕES PARCIAIS	14
3 MODELO	16
3.1 CILINDROS DE COMPRESSÃO	16
3.2 MOTOR ELÉTRICO ASSÍNCRONO	25
3.3 VIBRAÇÕES TORCIONAIS	28
3.4 CONCLUSÕES PARCIAIS DO MODELO	31
4 SISTEMAS E RESULTADOS	32
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
5.1 CONCLUSÕES	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
A ANEXOS	48
A.1 CÓDIGOS MATLAB	48

Lista de Figuras

1.1 Terminologia das principais partes de um virabrequim. (Adaptado de (BLOCH, 2010))	1
1.2 Filetes da rede de manivelas, regiões propícias a falha por fadiga. (Adaptado de (GRAB-CAD, 2019))	2
2.1 Tipos construtivos de compressores. (RABELO; MACIEL, 2009)	7
2.2 Pistão de simples ação em operação e mecanismo biela-manivela. (Adaptado de (GIAMPAOLO, 2010))	8
2.3 Representação de compressor recíproco de múltiplos estágios com destaque para algumas de suas partes constitutivas. (Adaptado de (GIAMPAOLO, 2010))	9
2.4 Montagem dos componentes de um virabrequim. (Adaptado de (SELEGATTO, 2016))	9
2.5 Virabrequins de três manivelas com ângulos de separação de 120 graus (esquerda) e 90 graus (direita). Perceba a utilização de uma cruzeta no virabrequim à direita. (Fonte: Dresser-Rand Company, Nova Iorque) (BLOCH, 2010)	10
2.6 Curvas de ressonância de um rotor com diferentes coeficientes de rigidez. (HANLON, 2006)	12
2.7 Diagrama de Campbell com quatro frequências naturais e três retas de excitação. (Adaptado de (CORBO; COOK, 1996))	13
2.8 Instabilidades características em rotores. (Adaptado de (BOYCE, 2002))	14
3.1 Modelo de vibrações torcionais do virabrequim de um compressor alternativo com sete graus de liberdade. (MORILLO, 2017)	17
3.2 Padrão de movimentação da biela durante um ciclo completo de funcionamento. (BAS-SHUYSEN; SCHÄFER, 2004)	18
3.3 Representação esquemática do mecanismo biela-manivela. (TAYLOR, 1968)	18
3.4 Massas equivalentes à biela concentradas em suas duas extremidades. À direita está a massa alternativa da biela, enquanto à esquerda está sua massa rotativa. (Adaptado de (TAYLOR, 1968))	21
3.5 Esforços atuantes na árvore de manivelas. (Adaptado de (MENDES, 2005))	23
3.6 Curvas de torque para uma condição de 2600 rpm a plena carga em um motor de combustão interna. Os triângulos vermelhos permitem a compreensão do formato de uma única curva isolada. (MENDES, 2005)	24
3.7 Estrutura magnética de um motor elétrico trifásico. (MORILLO, 2017)	26
3.8 Curva típica da relação velocidade angular-torque em um motor de indução. (Adaptado de (FITZGERALD; UMANS, 2003))	26
3.9 Circuito equivalente de um motor de indução polifásico. (FITZGERALD; UMANS, 2003)	27
4.1 Diagrama de Campbell relacionado ao sistema apresentado com doze retas de harmônicos.	35

4.2 Diagrama de Campbell do sistema apresentado com reta vertical em 600 rpm para avaliação de frequências críticas.	36
4.3 Resposta da sétima coordenada independente para o sistema sem forçamento em uma condição inicial de deslocamento diferente de zero na primeira coordenada.	37
4.4 Curva experimental de pressão obtida por meio de uma série de medições fornecida em (MENDES, 2005).	38
4.5 Curvas de torque desenvolvidas pelo código computacional para umas das séries de pressão fornecidas em (MENDES, 2005).	39
4.6 Comparação entre curva de torque obtida pelo modelo matemático e seu ajuste de curva de acordo com uma série de Fourier.	40
4.7 Curvas de torque ajustadas e defasadas em um quarto de período em relação às curvas adjacentes.	41
4.8 Curvas de torque ajustadas de acordo com suas entradas no código desenvolvido.	42
4.9 Deslocamento angular e velocidade angular da sétima coordenada do sistema para forçamento do motor igual a 200 N.m.	43
4.10 Deslocamento angular e velocidade angular da sétima coordenada do sistema para forçamento do motor igual a 100 N.m.	43
4.11 Espaço de fases do sistema para forçamento do motor igual a 100 N.m.	44

Lista de Tabelas

1	Valores de inércias usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))	34
2	Valores dos coeficientes de rigidez usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))	34
3	Valores dos coeficientes de amortecimento relativo usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))	34
4	Tabela de raízes do polinômio característico e frequências naturais.	35
5	Valores das constantes A_n e B_n para a curva ajustada.	40
6	Valores das constantes b_0 e ω para a curva ajustada.	40

Lista de Símbolos e Siglas

- A_N - Coeficiente A_N da série de Fourier;
- A_0 - Coeficiente A_0 da série de Fourier;
- B_N - Coeficiente B_N da série de Fourier;
- $b(t)$ - Vetor de torque $b(t)$;
- C_N - Coeficiente C_N da série de Fourier;
- D_N - Coeficiente D_N da série de Fourier;
- C - Matriz de amortecimento;
- d_p - Diâmetro do pistão;
- e - Número de Euler;
- f - Frequência elétrica da fonte;
- F_{ia} - Força de inércia alternativa;
- F_{ir} - Força de inércia rotativa;
- F_g - Força que é aplicada no pistão pelo gás de compressão;
- F_r - Força radial resultante;
- F_{ra} - Força radial das inércias rotativas;
- F_{rp} - Força radial dos gases;
- F_t - Força tangencial resultante;
- F_{ta} - Força tangencial das inércias alternativas;
- F_{tp} - Força tangencial dos gases;
- F_{2x}^k - Força horizontal que atua no virabrequim a partir do cilindro k ;
- F_{2y}^k - Força vertical que atua no virabrequim a partir do cilindro k ;
- i - Número complexo igual a $\sqrt{-1}$;
- I - Momento de inércia;
- I_{alt} - Momento de inércia das massas alternativas;
- I_{zz1} - Momento de inércia do sistema rotativo;
- int_rpm - Intervalo entre rotações;
- k - Índice do cilindro para o qual o torque é calculado.
- K_t - Rigidez torcional;
- L - Distância entre centros dos orifícios da biela (comprimento da biela);
- L_1 - Distância entre centro de gravidade e centro do orifício menor da biela;
- L_2 - Distância entre centro de gravidade e centro do orifício maior da biela;
- M - Matriz de inércia;

- m_a - Massa alternativa total;
- m_{ab} - Massa alternativa da biela;
- m_b - Massa total da biela;
- m_{rb} - Massa rotativa da biela;
- M_t - Momento torçor;
- n - Número de termos da série em que ocorrerá a expansão de Fourier;
- N - Número de graus de liberdade do sistema;
- N_c - Número total de cilindros;
- N_{rot} - Velocidade do rotor do motor elétrico assíncrono;
- N_{sin} - Velocidade síncrona do campo;
- p - Pressão interna no cilindro;
- p_n - Número de polos do motor;
- R - Raio da manivela;
- R_c - Resistência que gera o campo magnético de indução;
- rpm_{min} - Rotação mínima do motor;
- rpm_{max} - Rotação máxima do rotor;
- R_1 - Resistência equivalente do estator;
- R_2 - Resistência equivalente do rotor;
- R_{th} - Resistência de Thévenin;
- S - Deslocamento do pistão;
- s_e - Escorregamento do motor assíncrono;
- T - Matriz de torque externo;
- T_m - Torque do motor elétrico assíncrono;
- T_{rk} - Torque dos cilindros sobre o virabrequim para k igual ao número do cilindro;
- T_{r1} - Torque do cilindro 1;
- T_{r2} - Torque do cilindro 2;
- T_{r3} - Torque do cilindro 3;
- T_{r4} - Torque do cilindro 4;
- t - Tempo;
- U - Característica espacial da resposta de um sistema discreto com N graus de liberdade;
- v - Velocidade instantânea do pistão;
- \hat{V}_1 - Tensão de fase do circuito trifásico;
- V_{th} - Tensão de Thévenin;
- x - Vetor de estado;
- X_m - Reatância que gera o campo magnético de indução;
- X_{th} - Reatância de Thévenin;
- X_1 - Reatância equivalente do estator;
- X_2 - Reatância equivalente do rotor;
- θ - Deslocamento angular e ângulo do virabrequim;

λ - Relação entre o meio curso da árvore de manivelas e o comprimento da biela;

ϕ - Ângulo da biela;

$\dot{\theta}$ - Velocidade angular;

$\ddot{\theta}$ - Aceleração angular;

ω - Velocidade angular do virabrequim;

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Componentes mecânicos característicos de sistemas de transmissão de potência são geralmente expostos a inúmeros tipos de carregamentos cíclicos e intensas condições ambientais e de trabalho (ALIAKBARI; SAFARZADEH; MORTAZAVI, 2018). Um dos mecanismos de maior importância e amplamente utilizado ainda hoje é o mecanismo biela-manivela, que é encontrado em bombas, compressores e motores. Sem esse mecanismo, por exemplo, motores a diesel e a gasolina não existiriam da maneira que existem hoje em dia (DOUGHTY, 1988). Uma das principais partes rotativas de compressores recíprocos e de motores de combustão interna são os virabrequins, que funcionam graças à dinâmica do mecanismo biela-manivela. O virabrequim pode ser considerado como a espinha dorsal das máquinas alternativas. Em motores, esse elemento é responsável pela conversão de movimento linear em movimento rotacional (STOJANOVIC; GLISOVIC, 2016). Já em compressores alternativos, ocorre o contrário, isto é, acontece a conversão de movimento rotacional em movimento linear. Essa peça rotativa está sujeita a um conjunto de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica e geram vibrações e conseqüentemente tensões, que podem vir a provocar falhas graves em sua estrutura. A imagem 1.1 mostra um virabrequim e a terminologia de algumas de suas partes constitutivas, com destaque para os contrapesos e para os orifícios de passagem de óleo para lubrificação.

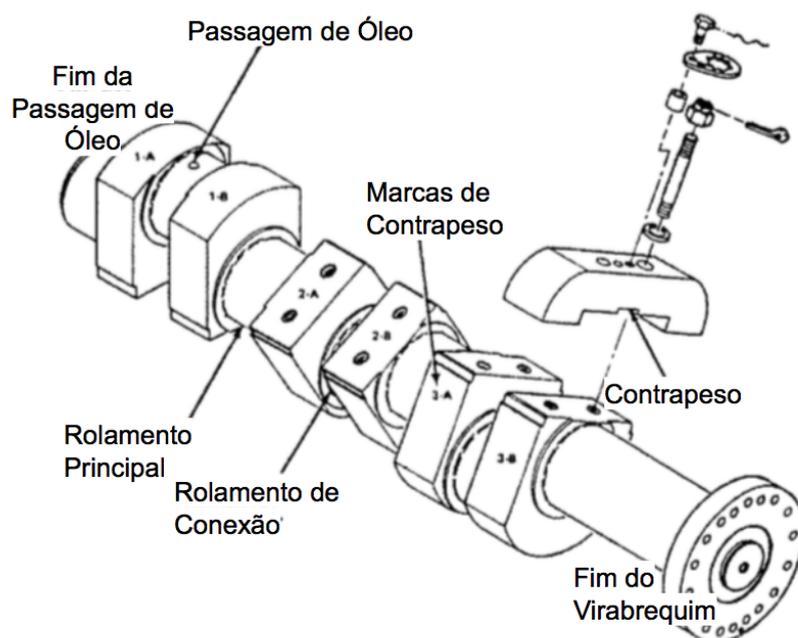


Figura 1.1: Terminologia das principais partes de um virabrequim. (Adaptado de (BLOCH, 2010))

A análise de falhas em virabrequins foi estudada por (ALIAKBARI; SAFARZADEH; MORTAZAVI, 2018) e foi mostrado que a maior parte das falhas ocorre na região dos filetes da rede de manivelas (*crankpin-web*), onde o grau de concentração de tensões é elevado. O motivo de falha nesses casos costuma ser a atuação de um carregamento rotativo de flexão em magnitude excessiva e de maneira alternada. Um dos fatores que afetam a vida do componente são as vibrações excessivas acentuadas devido ao desbalanceamento de cargas no virabrequim (ALIAKBARI; SAFARZADEH; MORTAZAVI, 2018). A figura 1.2 mostra duas vistas de um mesmo virabrequim de um motor de combustão interna e o lugar exato onde a maior parte das fraturas em virabrequins ocorre.

Uma ampla variedade de problemas relacionados a vibrações ocorre em máquinas recíprocas como motores e compressores. Problemas de vibração excessiva costumam ocorrer quando frequências de ressonância de alguma parte constitutiva do compressor são excitadas. Variados tipos de adversidades podem ser encontrados no invólucro desse tipo de máquina, em sua fundação e em seu sistema de ancoragem, quando há a presença de vibrações excessivas. Suas consequências podem chegar ao virabrequim e a seus rolamentos, o que afeta a segurança e a confiabilidade da máquina. Problemas comuns ocasionados por vibrações podem ser altos níveis de ruído, vazamentos, falhas por fadiga, eventuais contratempos no maquinário causando sua interrupção e incidentes envolvendo fogo e explosões em refinarias e plantas petroquímicas (WACHEL; TISON, 1994).

Empresas do setor petrolífero utilizam compressores alternativos para promover a compressão de gases refrigerantes e a distribuição de gás natural e outros fluidos derivados do petróleo em seus gasodutos e plataformas de petróleo. Há um problema de falhas nesses compressores envolvendo o surgimento de trincas em virabrequins ou em acoplamentos entre motores e compressores alternativos (MORILLO, 2017). Além disso, recentemente, foi verificado um caso em uma plataforma petrolífera *off-shore* brasileira que teve que ter sua operação interrompida devido a vibrações excessivas na carcaça de um compressor alternativo. Medições feitas na máquina defeituosa indicaram uma frequência de vibração mais de dez vezes maior do que a frequência de rotação do virabrequim. Devido ao grande risco de acidentes envolvendo fluidos combustíveis, a operação da plataforma foi parada. Geralmente, modos de vibração referentes a altas frequências naturais não se manifestam de maneira visível na prática. Existe a desconfiança de acoplamento entre modos não-lineares porque o modo de vibração relacionado à alta frequência identificada por medição se manifesta por meio de amplitudes de vibração muito altas. Nesse contexto, surge a importância do estudo de um modelo de vibrações torcionais de um sistema rotativo de um compressor alternativo.

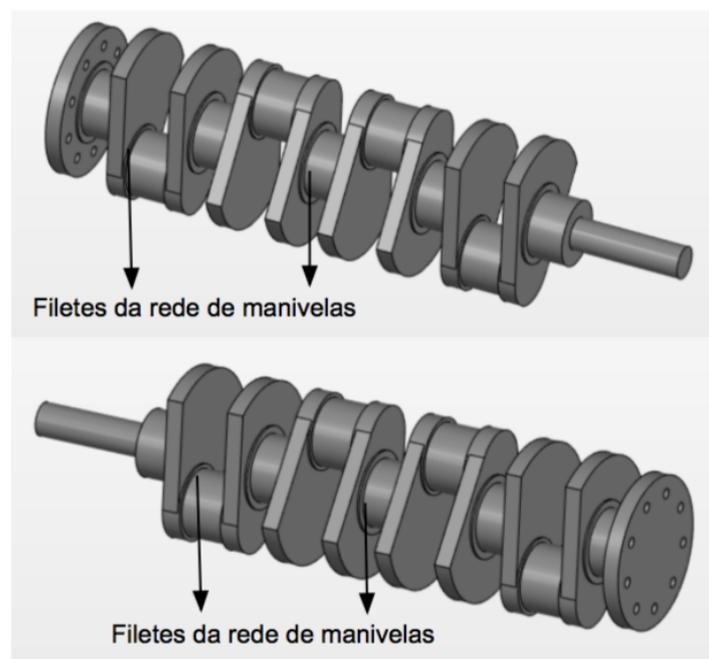


Figura 1.2: Filetes da rede de manivelas, regiões propícias a falha por fadiga. (Adaptado de (GRAB-CAD, 2019))

1.2 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho se insere no contexto apresentado como uma frente de um estudo mais abrangente que terá como intuito entender o problema de vibrações excessivas enfrentado por empresas do setor petrolífero em seus compressores alternativos, conforme explicado. O objetivo geral do projeto de graduação em questão é, portanto, modelar e simular as cargas dinâmicas e as vibrações torcionais de um sistema rotativo de um compressor alternativo para o regime de vibrações dado tanto pela excitação proveniente de um motor assíncrono como também pelos torques resistivos dos cilindros de compressão do virabrequim.

1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver um código computacional em linguagem *Matlab®* com o intuito de simular o modelo de vibrações apresentado para o sistema rotativo do compressor alternativo;
- Determinar as frequências naturais do sistema rotativo estudado representado por um modelo discreto de N graus de liberdade;
- Implementar o diagrama de Campbell para as frequências naturais encontradas;
- Obter as curvas de torque resistivo dos cilindros de compressão do compressor alternativo por meio de um conjunto de medições de pressão;
- Expressar as curvas de torque resistivo obtidas como séries de Fourier que dependem do tempo por meio de um ajuste de curva.
- Obter as respostas livre e forçada do sistema modelado, considerando no segundo caso a aplicação de torque externo pelo motor e pelos cilindros de compressão;
- Analisar a dinâmica do modelo apresentado.

1.3 METODOLOGIA

Será desenvolvido um programa computacional para resolver o modelo matemático apresentado desenvolvido em linguagem *Matlab®*. A ideia é que seja replicado parcialmente o programa *Cranklab* desenvolvido na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na dissertação de mestrado de (VILLALVA, 2014). O código teve como base um trabalho anterior também desenvolvido na Unicamp por (MENDES, 2005). O mesmo programa foi utilizado com adaptações por (MORILLO, 2017) em sua dissertação de mestrado. Enquanto o primeiro e o segundo autores utilizaram o programa para analisar o virabrequim de um motor de combustão interna, o terceiro utilizou o mesmo código ajustado para o estudo de uma árvore de manivelas de um compressor recíproco, tal como será feito neste trabalho.

Essa possibilidade de utilizar o modelo de vibrações do motor de combustão interna para a análise do compressor alternativo é possível porque ambas as máquinas operam de maneira semelhante e são máquinas alternativas. A diferença principal entre elas, no que diz respeito a vibração torcional do eixo, está no fato de que enquanto o motor fornece potência a um eixo de saída, o compressor funciona como um gerador capaz de utilizar a potência mecânica de eixo fornecida por um motor para a compressão de um gás. Se por um lado o virabrequim de um motor de combustão interna recebe de cada cilindro, por meio de bielas, torque de excitação para sua movimentação, por outro lado, o torque de entrada dos cilindros sobre o virabrequim no caso de um compressor alternativo é um esforço de reação que se opõe ao seu movimento provocado por um motor, geralmente elétrico.

O modelo matemático de compressor alternativo apresentado pode ser dividido em etapas. Uma breve análise dinâmica fornece as forças e torques dos cilindros sobre o virabrequim. O modelo apresentado por (MORILLO, 2017) é replicado com algumas adaptações para que sejam compreendidas

as naturezas dos torques de entrada sobre o virabrequim, dentre eles o torque do motor elétrico assíncrono. Por último, o virabrequim é modelado como um sistema discreto de N graus de liberdade sobre a ação de forçamentos externos.

A metodologia de desenvolvimento do código computacional proposto se inicia por um modelo de análise das forças e torques que os cilindros de compressão aplicam sobre o virabrequim. Esses esforços são necessários para o modelo de vibrações torcionais desenvolvido e por isso devem ser quantificados com precisão. Um segundo estágio da metodologia de trabalho apresenta o modelo de motor elétrico assíncrono que promove o forçamento externo do virabrequim. O modelo apresentado nesse trabalho replica o mesmo modelo usado por (MORILLO, 2017) e tem como resultado final uma expressão para o torque do motor sobre o virabrequim. É válido explicar aqui que o trabalho de referência apresenta não somente um modelo de motor elétrico mas sim dois, sendo um modelo para motor elétrico assíncrono e um segundo modelo para um motor elétrico síncrono. O trabalho de (MORILLO, 2017) apresenta ambos os modelos e compara suas diferenças no modelo de vibrações torcionais. O projeto de graduação em desenvolvimento tem como objetivo inicial a implementação de um modelo completo de vibrações torcionais para compressor alternativo com um torque de entrada de origem qualquer. Dessa forma, a princípio, só foi estudado o caso que possui o motor assíncrono como máquina motriz.

Uma vez obtidas as expressões para os torques externos atuantes no virabrequim, é apresentado um modelo inércia-mola-amortecedor equivalente ao sistema real. Dessa forma, podem ser simuladas as vibrações torcionais de um sistema discreto de N graus de liberdade com forçamento. Por meio de um código *Matlab*® são simuladas as vibrações torcionais sobre o virabrequim e são obtidas as frequências naturais, além das velocidades angulares críticas de operação da máquina, a partir do diagrama de Campbell. São determinadas expressões para os forçamentos por meio do ajuste de curva dos torques dos cilindros como séries de Fourier. Essas expressões são introduzidas no código desenvolvido no vetor de forçamento do sistema estudado, de modo a simular o virabrequim tanto com seu forçamento motriz como também com seus torques resistivos.

Por último, os resultados obtidos são analisados para o desenvolvimento de uma conclusão. A organização do trabalho foi estabelecida tendo em vista uma separação lógica dessa metodologia.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O trabalho foi dividido em cinco capítulos. O primeiro é o capítulo de introdução no qual a presente seção está inserida. O capítulo 2 apresenta conceitos teóricos relacionados a compressores e às vibrações desses equipamentos, dando destaque especial para as vibrações típicas de compressores recíprocos. O capítulo começa com um breve histórico do uso do ar comprimido pela humanidade. Em seguida, ele apresenta as primeiras máquinas construídas pelo ser-humano com o intuito de comprimir ar. São então descritos rapidamente os tipos de compressores e suas classificações, de modo a introduzir o compressor recíproco à discussão, uma vez que esse compressor é o foco desse trabalho. A função do virabrequim nesse tipo de máquina é explicada e é dado destaque aos problemas decorrentes de vibrações em compressores, de modo a dar mais atenção aos tipos de vibração que são mais característicos em compressores alternativos. Por último, é explicado o diagrama de Campbell, usado para a determinação das velocidades angulares críticas de operação do compressor.

No capítulo 3, o modelo matemático utilizado nesse trabalho é apresentado. Ele serviu de base para o desenvolvimento do programa computacional usado para simular as vibrações torcionais no virabrequim do compressor recíproco estudado. Inicialmente, são apresentados os modelos físicos de cinemática e de dinâmica de um mecanismo biela-manivela. Em seguida, é mostrada a disposição de um modelo físico de virabrequim com todos seus diferentes elementos, representando cada um deles como um grau de liberdade distinto. Em sequência, é mostrado como as forças atuantes no sistema biela-manivela se propagam ao virabrequim gerando um torque resistivo. Logo depois, é apresentado o modelo matemático que gera a expressão do torque executado pelo motor elétrico sobre o sistema. Finalmente, é mostrado o modelo de vibrações torcionais proposto para a simulação da dinâmica do virabrequim.

O capítulo 4 é destinado a mostrar os resultados do código computacional, incluindo frequências naturais e velocidades críticas de operação dadas pelo diagrama de Campbell. Além disso, são mostrados os resultados da dinâmica do sistema, desenvolvidos pelo código já com a adição de todos os forçamentos previstos pelo modelo físico. Por último, o capítulo 5 apresenta uma conclusão do trabalho desenvolvido e são propostas possibilidades de continuação em trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS TEÓRICOS

2.1 COMPRESSORES

A importância do ar comprimido para a humanidade se inicia na antiguidade com o desenvolvimento do objeto conhecido como fole, que inicialmente tinha o objetivo de promover um escoamento forçado de ar para dentro de um forno com o intuito de aumentar a taxa de transferência do calor usado para a fusão de materiais metálicos tais como cobre, latão, chumbo e ferro. Esse avanço tecnológico relacionado à manipulação do fogo permitiu a invenção de ferramentas e armas (GIAMPAOLO, 2010).

Uma breve cronologia do uso do ar comprimido pelo ser humano inclui a invenção de uma versão do instrumento musical chamado órgão, que utilizava água como meio de compressão do ar, no século 3 A.C., por Ctesibius de Alexandria. De maneira simplificada, é possível dizer que o instrumento consistia de quatro subconjuntos: uma espécie de bomba d'água, uma câmara parcialmente preenchida por ar e água, uma série de canos de diversos diâmetros e comprimentos na parte superior e, por último, válvulas de conexão. Ao injetar água dentro da câmara, o ar era comprimido e com a abertura das válvulas de canos específicos, sons musicais eram criados. Contudo, somente nos séculos 18 e 19, ideias como a de Ctesibius de Alexandria começaram a ganhar dimensões maiores e servir como parte de processos industriais e de beneficiamento agrícola (GIAMPAOLO, 2010). Em 1762, John Smeaton projetou um dispositivo semelhante a uma máquina alternativa. O elemento mecânico desenvolvido consistia em um cilindro de sopro acionado por uma roda d'água. Em 1776, John Wilkinson aperfeiçoou essa máquina com um acionamento promovido por um motor de explosão (MORILLO, 2017).

Já em 1808, John Dumball elaborou um modelo de compressor axial com múltiplos estágios. Infelizmente, sua ideia consistia somente em pás móveis sem aerofólios estacionários para promover o escoamento para cada estágio seguinte. Somente em 1872, Dr. Franz Stolze utilizou as ideias de John Dumball para desenvolver o primeiro compressor axial movido por uma turbina, como em um turbocompressor (GIAMPAOLO, 2010).

Historicamente, diferentes necessidades industriais e tecnológicas serviram como impulso para o surgimento dos variados tipos de compressores. Atualmente, as alternativas são várias e a seleção de um tipo ou de outro é feita conforme as condições de pressão de trabalho e volume especificadas. Os tipos de compressores mais comuns são os compressores de êmbolo ou pistão e compressores de turbina (turbocompressores) (RABELO; MACIEL, 2009).

Compressores de êmbolo são classificados como compressores de deslocamento positivo. Já turbocompressores são classificados como compressores de deslocamento dinâmico (MORILLO, 2017). Enquanto o primeiro tipo se baseia no princípio de redução do volume na câmara de compressão para posterior descarga, o segundo tipo se baseia no princípio de fluxo, em que há a sucção do ar de um lado para a compressão no outro, por aceleração de massa. Uma representação esquemática dos tipos construtivos de compressores é mostrada na figura 2.1 (RABELO; MACIEL, 2009).

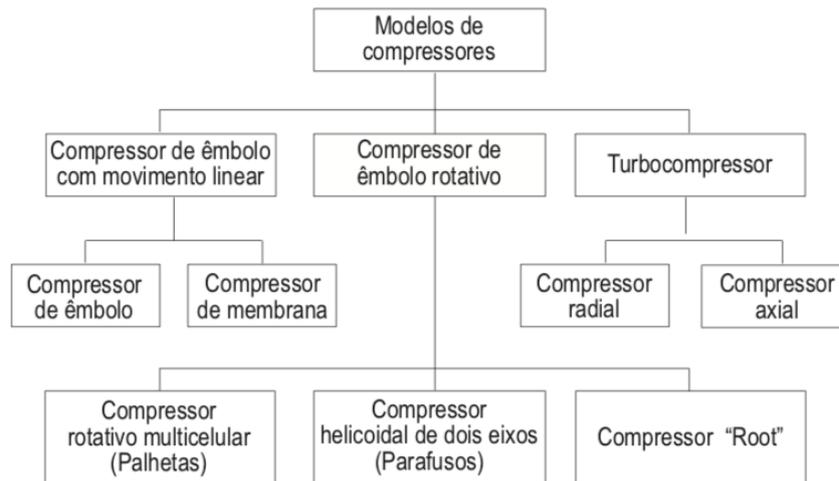


Figura 2.1: Tipos construtivos de compressores. (RABELO; MACIEL, 2009)

Compressores de êmbolo ou pistão também são conhecidos como compressores recíprocos ou alternativos. Neles, o movimento de um pistão confinado em um cilindro promove a passagem de um nível de pressão no gás a um outro nível de maior pressão. O exemplo mais simples desse tipo de compressor é a bomba de pneu de bicicleta (GIAMPAOLO, 2010).

Muitos problemas em compressores envolvem condições de operação além de suas capacidades práticas de compressão em um único estágio. Caso a razão de compressão (pressão absoluta de descarga dividida pela pressão absoluta de entrada) seja muito grande, são esperadas altas temperaturas na descarga de gás do compressor. Por essa razão pode ser interessante combinar elementos ou grupos de elementos em série e formar uma unidade de múltiplos estágios, isto é, uma unidade com duas ou mais fases de compressão. O gás é geralmente resfriado entre estágios para a redução de sua temperatura e de seu volume para o estágio posterior. Cada estágio funciona como uma unidade de compressão individual sozinha, ainda que o gás seja conduzido de unidade a unidade em série, tendo normalmente todas elas a mesma fonte de energia (BLOCH, 2010).

Um elemento de compressão recíproca básico consiste em um único cilindro comprimindo somente um lado do pistão (simples ação). Já uma unidade comprimindo ambos os lados do pistão, não simultaneamente, é chamada de unidade de ação dupla e consiste em dois elementos básicos de ação simples operando em paralelo na mesma estrutura (BLOCH, 2010).

O compressor recíproco utiliza válvulas automáticas que somente abrem quando um nível de pressão específico é alcançado e sentido pela válvula. As válvulas de entrada abrem somente quando a pressão no cilindro é um pouco inferior à pressão de entrada. Já as válvulas de descarga abrem quando a pressão no cilindro é um pouco superior à pressão de descarga (BLOCH, 2010). Um ciclo completo do gás que é comprimido em um compressor alternativo é constituído, portanto, pelas fases de sucção, compressão, descarga e expansão (MORILLO, 2017). Na fase de sucção, a válvula de entrada é aberta e o ar externo entra nos limites de volume da câmara de compressão devido à diferença de pressão negativa do interior da câmara em relação à parte de fora. Em seguida, com a válvula de entrada de gás já fechada devido ao equilíbrio de forças em ambos os lados da válvula de entrada, o gás é comprimido com o movimento do êmbolo na fase de compressão. Posteriormente, quando a pressão alcança um limite máximo, a válvula de descarga é aberta e o gás deixa os limites internos da câmara de compressão. Esse estágio é a fase de descarga. Por último, com a válvula de saída já fechada, ocorre a expansão, em que o volume total interno da câmara é aumentado até que a válvula de entrada volta a ser aberta, completando assim o ciclo. A figura 2.2 mostra uma representação de um pistão de simples ação, em que é possível enxergar as válvulas de escape e sucção.

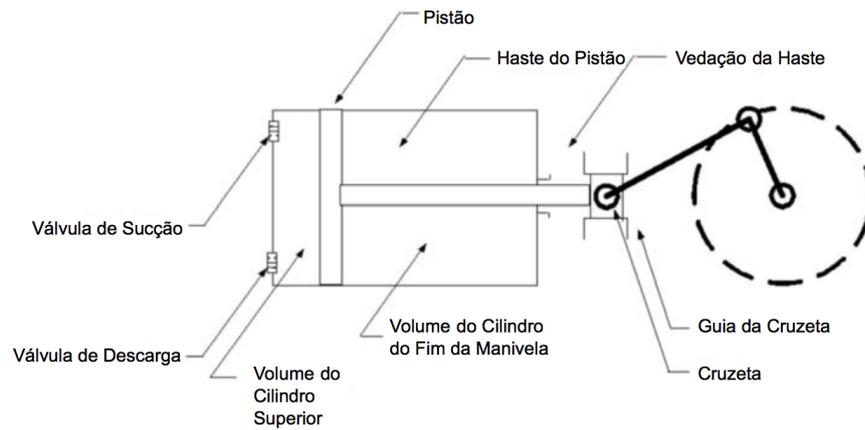


Figura 2.2: Pistão de simples ação em operação e mecanismo biela-manivela. (Adaptado de (GIAM-PAOLO, 2010))

Compressores recíprocos são extremamente eficientes e confiáveis para processos de compressão que operam a pressões de vácuo até pressões acima de 3000 atm (BLOCH, 2010). Suas aplicações são variadas e incluem aplicações na indústria do petróleo (refinarias de óleo, extração e processamento de gás), de transporte de fluidos (gasodutos), na indústria química e em refrigeração (GIAMPAOLO, 2010). Taxas de potência variam até valores de 18.000 kW, com capacidades de até 35.000 metros cúbicos por hora em condições de entrada (BLOCH, 2010).

Compressores recíprocos são bastante flexíveis, no sentido de que são capazes de comprimir uma grande faixa de gases com as mais diferentes densidades, desde hidrogênio, cuja massa molecular é 2, até gases como o cloro, cuja massa molecular é 70. Além disso, essa flexibilidade se estende às condições de pressão em operação. Razões de compressão em um único estágio podem ser tão baixas quanto 1.1 a valores altos como 5, em casos específicos. Entretanto, valores convencionais costumam ficar por volta de 3, com temperaturas de descarga de 150 a 175 °C. Alguns compressores chegam a possuir até seis estágios e alcançam uma taxa de compressão de até 300 (BLOCH, 2010).

É muito comum a utilização de velocidades mais conservadoras para o deslocamento de pistões, uma vez que muitas vezes não são comuns rotinas de manutenção na parte interna desse tipo de compressor. Uma fonte de problemas pode ser o tipo de gás a ser comprimido, já que não é incomum a compressão de gases corrosivos ou com impurezas formadas por partículas abrasivas. Há casos em que pode ocorrer até mesmo a compressão de vapores que podem vir a se liquefazer parcialmente. Para evitar falhas, compressores de velocidades médias e baixas são muito usados, com velocidades rotativas entre 275 a 600 rpm e velocidades de pistão variando de 3 a 5 m/s. Normalmente, para aplicações sem lubrificação, velocidades rotativas e de pistão mais baixas são usadas para maior durabilidade (BLOCH, 2010).

As classificações mais comuns de compressores recíprocos são compressores de cilindro único, compressores de múltiplos cilindros balanceados e opostos (de múltiplos estágios) e compressores integrados a motores. Dentro da classe de compressores integrados, o mais comum é o compressor de cilindros opostos. Esse *design* maximiza a vida operacional de unidades recíprocas maiores ao minimizar forças e momentos desbalanceados e pode conter de dois a dez cilindros, sendo algumas dessas unidades cilindros simples independentes de processos de compressão por múltiplos estágios. As massas rotativas devem ser balanceadas de modo a ficarem tão próximas quanto o possível (BLOCH, 2010). Os principais componentes mecânicos desses compressores são a carcaça, o pistão, o cilindro, o virabrequim, a biela e a cruzeta (GIAMPAOLO, 2010). A imagem 2.3 mostra a representação de um compressor recíproco de múltiplos estágios com destaque para algumas de suas partes constitutivas.

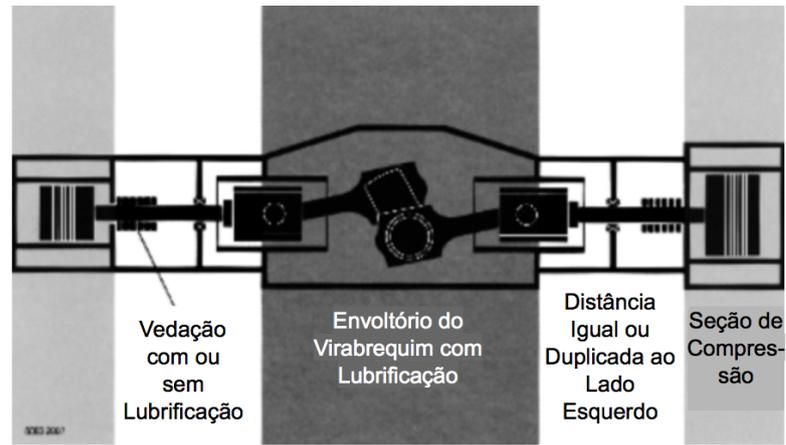


Figura 2.3: Representação de compressor recíproco de múltiplos estágios com destaque para algumas de suas partes constitutivas. (Adaptado de (GIAMPAOLO, 2010))

Dentre os componentes mecânicos citados, um dos que mais se destaca é o virabrequim.

Compressores alternativos e motores de combustão interna são exemplos de máquinas que possuem o virabrequim como um de seus elementos constituintes. Ao contrário do que ocorre em motores de combustão interna, em que o movimento de translação oscilatório desenvolvido pelos pistões é convertido no movimento de rotação do virabrequim, nos compressores recíprocos o movimento rotativo é quem é convertido no movimento linear alternativo do pistão (SELEGATTO, 2016). Isso ocorre por meio da biela, que é a conexão entre o moente e o pistão. O elemento de máquinas em questão funciona como um conjunto de manivelas que ao girarem transmitem potência aos pistões e só ocorre em compressores de múltiplos estágios, já que sua função é justamente transmitir potência a vários pistões simultaneamente. Um exemplo de virabrequim com suas partes constituintes mais importantes em destaque pode ser visto na figura 2.4 (GIAMPAOLO, 2010).



Figura 2.4: Montagem dos componentes de um virabrequim. (Adaptado de (SELEGATTO, 2016))

As manivelas de um virabrequim são dispostas com ângulos iguais separando-as espacialmente para providenciar forças balanceadas de maneira ótima e o menor esforço por torque nesses elementos. Enquanto virabrequins com um número par de manivelas têm como disposição 180 graus umas em relação às outras, em pares opostos, virabrequins com um número ímpar de manivelas requerem uma

disposição em ângulos diferentes ou a utilização de cruzetas, como mostrado na figura 2.5

Durante seu funcionamento, forças de compressão pulsantes e torque vibratório são criados pelos cilindros no virabrequim com picos que podem exceder o torque médio de potência no compressor em até cinco vezes. Para suportar esses esforços e tensões de vibração, o *design* do virabrequim deve ser conservativo. Materiais comuns para a fabricação desses componentes são os aços AISI 1045 e AISI 4140 com inspeção ultrassônica pelo fornecedor. Passagens de óleo são perfuradas para permitir o escoamento para as partes em contato com as bielas. As intersecções desses buracos devem ser feitas de maneira que não existam quinas, por meio de filetes, além de receber polimento, para assim prevenir regiões de concentração de tensões. Contrapesos aparafusados ou integrados na estrutura do virabrequim são usados para prevenir forças e momentos desbalanceados além de vibrações excessivas (GIAMPAOLO, 2010).

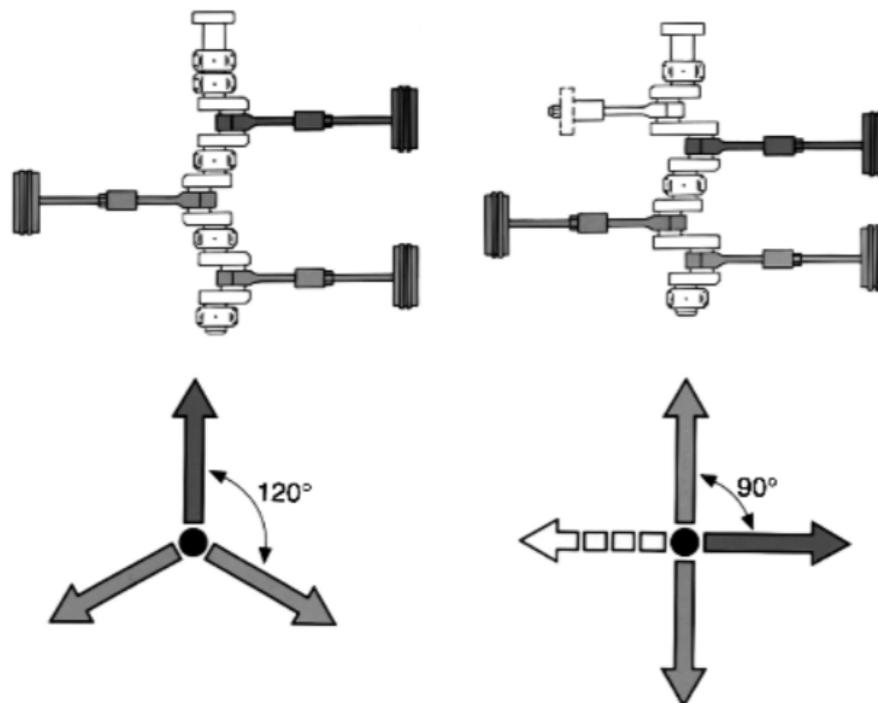


Figura 2.5: Virabrequins de três manivelas com ângulos de separação de 120 graus (esquerda) e 90 graus (direita). Perceba a utilização de uma cruzeta no virabrequim à direita. (Fonte: Dresser-Rand Company, Nova Iorque) (BLOCH, 2010)

2.2 VIBRAÇÕES EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS

Em razão da forma como é construído e da maneira como funciona um compressor recíproco, ele está sujeito a vibrações. Massas recíprocas, cargas em um processo contínuo de inversão de sentido e pulsações devido ao fluxo de gás de forma contínua influenciam o nível normal de vibrações. Entretanto, um nível de vibrações superior ao normal pode indicar que algo anormal está ocorrendo e geralmente isso justifica uma investigação mais profunda das causas desse fenômeno. Fontes típicas de vibrações anormais são pistões em colisão com o topo dos cilindros devido a ajustes mal realizados ou detritos dentro do cilindro. Componentes quebrados no sistema de transmissão e até mesmo ruídos transmitidos pelas conexões de gás internas do cilindro também podem originar vibrações. Todas essas fontes podem gerar efeitos prejudiciais e até mesmo catastróficos no compressor. Por um motivo de proteção contra danos, muitos compressores recíprocos possuem um medidor de vibrações em sua carcaça capaz de acionar algum interruptor que desliga a máquina em caso de emergência (BLOCH, 2010).

Compressores, assim como qualquer equipamento ou componente de máquinas, possuem frequências de ressonância. Na realidade, inúmeras técnicas de análise de vibrações são empregadas para

prever vibrações de um compressor quando ele está sendo desenvolvido, isto é, em sua fase de *design*. Além disso, outras várias técnicas são usadas para a identificação de fontes e níveis de vibração quando a máquina já se encontra no processo de funcionamento. Instrumentos de medição tais como acelerômetros e sondas de vibração sem contato ao eixo, que podem acionar interruptores de segurança como o mencionado anteriormente, funcionam também para fornecer informações relacionadas às vibrações do sistema para a possível correção posterior, no caso de vibrações excessivas (BLOCH, 2010).

A conversão de potência rotativa em potência recíproca por meio de um dispositivo de manivelas, como é o caso de um virabrequim, promove o surgimento de torques variáveis devido à geometria e a maneira como ocorre o funcionamento do sistema. Embora bombas e compressores alternativos possuam um valor de pressão de descarga fixo, os níveis de variação de pressão de sucção até a condição de descarga causam variação na magnitude do torque. Interações entre o fluido bombeado e os dutos por onde o fluido circula podem produzir pulsações de pressão que podem afetar o torque dinâmico da máquina e produzir vibrações em harmônicos elevados. As excitações torcionais geradas pelo compressor recíproco são uma função da condição de carregamento do compressor, da geometria física do cilindro, da geometria do virabrequim e das propriedades termofísicas do gás ou do líquido. A dinâmica torcional de uma máquina recíproca merece atenção cuidadosa por conta de suas múltiplas frequências harmônicas. O grande número de frequências produzidas aumenta a probabilidade de excitação da frequência de ressonância torcional de um sistema (SZENASI; WACHEL, 1993).

Nesse contexto, é interessante saber se alguma frequência de ressonância do sistema rotativo ocorre antes ou se coincide com a frequência de operação do sistema. O eixo rotativo de um compressor, seja ele qual for, pode ser classificado em eixo flexível ou eixo rígido. Se as frequências naturais de um eixo estiverem abaixo da velocidade de operação, então o eixo de rotação do compressor é considerado um eixo flexível. Já no caso da frequência de ressonância estar acima da velocidade de operação, o eixo é considerado um eixo rígido (GIAMPAOLO, 2010). Compressores axiais, por exemplo, são considerados compressores de eixo flexível porque suas velocidades típicas de operação estão acima de suas velocidades críticas, em que a amplitude de vibração é máxima. Já a frequência de ressonância de um compressor centrífugo pode estar acima ou abaixo da velocidade de operação da máquina. Isso dependerá, dentre outros fatores, do tamanho de seu eixo. Já compressores do tipo parafuso e compressores recíprocos integrados a motores costumam ser do tipo de eixo rígido. Por último, compressores recíprocos não integrados a motores podem ser de ambos os tipos e a quantidade de cilindros e o tipo do motor associado são os fatores que determinarão seu tipo (GIAMPAOLO, 2010). A imagem 2.6 mostra curvas de ressonância de um rotor de um turbocompressor analisado como um sistema de pelo menos três graus de liberdade. Nela, cada curva representa uma situação diferente em relação à rigidez do sistema para momentos de inércia constantes. É possível ver onde estão as frequências que geram uma maior amplitude de resposta à velocidade do rotor. É apropriado que a velocidade de operação esteja longe de valores que produzam amplitudes tão grandes para o funcionamento seguro do compressor. Uma análise apropriada deve levar em consideração um modelo de mais de um grau de liberdade de acordo com o sistema real. Além disso, devem ser levadas em conta frequências de harmônicos em relação à frequência de excitação, uma vez que determinadas características do sistema rotativo podem fazer com que surjam vibrações em frequências múltiplas da frequência de operação. A coincidência entre alguma frequência harmônica e as frequências de ressonância do sistema podem gerar valores excessivos na amplitude de vibração e, conseqüentemente, altas tensões e possíveis falhas estruturais do sistema.

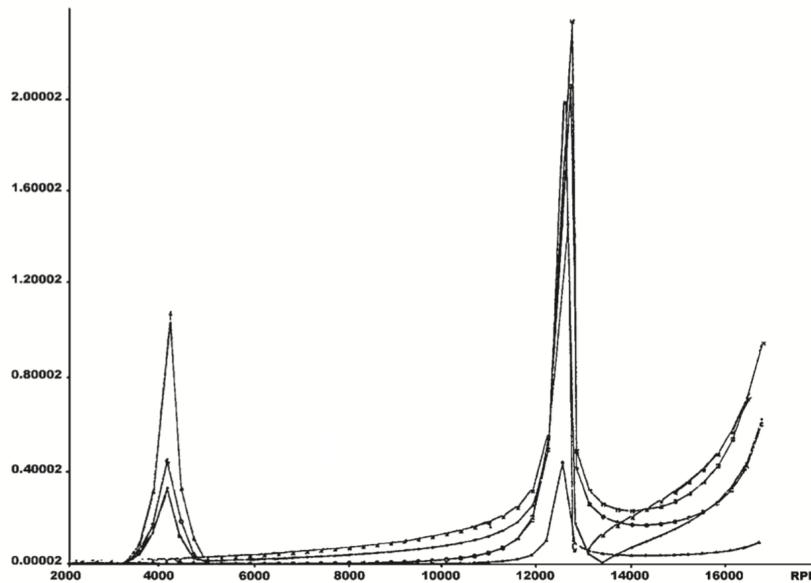


Figura 2.6: Curvas de ressonância de um rotor com diferentes coeficientes de rigidez. (HANLON, 2006)

2.3 DIAGRAMA DE CAMPBELL

Um sistema torcional aceitável é geralmente aquele em que são evitadas coincidências entre suas velocidades de operação ou harmônicos de excitação torcional com suas frequências de ressonância. Por esse motivo, as frequências naturais de um sistema devem ser calculadas, uma vez que possuem valores próximos dos valores das frequências de ressonância para baixos valores de amortecimento. É conveniente desenvolver um diagrama de Campbell que identifique possíveis coincidências entre as frequências de excitação esperadas e as frequências naturais torcionais calculadas dentro da faixa de operação (SZENASI; WACHEL, 1993). O diagrama de Campbell pode ser entendido como uma forma de enxergar a excitação de vibrações em harmônicos da frequência de forçamento que podem ocorrer em um sistema em operação de uma maneira geral e ampla. Além disso, esse diagrama pode ser gerado com o intuito de propor faixas de operação de uma máquina em fase de projeto ou para a análise de uma máquina já existente cuja faixa de operação ideal quer ser determinada (BOYCE, 2002). Tal diagrama funciona como um modo simples de representar as frequências de operação de uma máquina rotativa e comparar esses valores com as suas frequências naturais de modo a analisar o quão distantes essas frequências estão umas das outras, permitindo estabelecer faixas de operação seguras, por exemplo. Como a maior parte dos sistemas práticos possuem várias frequências naturais e várias fontes de excitação, determinar pontos de ressonância não é uma tarefa trivial. O diagrama de Campbell, também chamado de diagrama de interferência por alguns autores, funciona como um dispositivo capaz de auxiliar bastante na determinação desses pontos. Além disso, por meio dele é fornecida uma visão global excelente da situação do sistema de vibrações torsionais. O diagrama de Campbell pode ser tão útil que há autores que defendam que seu desenvolvimento deveria ocorrer assim que a análise do sistema sem amortecimento é realizada (CORBO; COOK, 1996). A imagem 2.7 mostra um diagrama de Campbell usual. Nele, é possível ver a velocidade de rotação do sistema rotativo no eixo das abcissas, enquanto no eixo das ordenadas estão dispostas as frequências naturais do sistema. As frequências naturais estão dispostas como linhas horizontais e a faixa de operação da máquina rotativa é mostrada como o espaço entre duas linhas verticais. As três retas diagonais com inclinações diferentes são harmônicos de velocidade que representam potenciais excitações do sistema. A reta é criada ligando dois pontos, sendo o primeiro a origem do plano cartesiano e o segundo alguma coordenada que possua como característica um valor de abscissa igual a x ou a $1/x$ vezes o valor da ordenada, sendo x um número inteiro. Dessa forma, x (ou $1/x$) será o número da harmônica (MORILLO, 2017). A conversão de unidades é necessária caso exista incompatibilidade entre a unidade do eixo das abcissas em relação à unidade do eixo das ordenadas. Nos diagramas de

Campbell, não é incomum o uso de unidades de velocidade de rotação diferentes em ambos os eixos do sistema de coordenadas. No eixo das abscissas, costumam ser expressados valores de velocidade de operação da máquina rotativa em rotações por minuto (rpm). Já a unidade típica dos valores do eixo de frequências naturais é o Hertz (Hz), unidade do sistema internacional. Dessa forma, a geração das linhas de excitação não ocorre de maneira tão simples como seria caso unidades iguais fossem utilizadas. A figura 2.7 mostra excitações de ordem 1, 2 e 4. Considerando o uso da unidade Hertz para o eixo das ordenadas do gráfico e rpm para o eixo das abscissas, o valor no eixo horizontal deve ser dividido por 60 para que esse valor seja convertido para Hertz. As interseções entre as retas inclinadas de excitação e as linhas horizontais de frequência natural que ocorrem dentro da faixa de frequências de operação do sistema (linhas verticais) são chamadas de pontos de interferência e são indicadores de potenciais ressonâncias. Há dois desses pontos ilustrados na figura 2.7. As velocidades de rotação que correspondem a esses pontos no eixo das abscissas são chamadas de velocidades críticas.

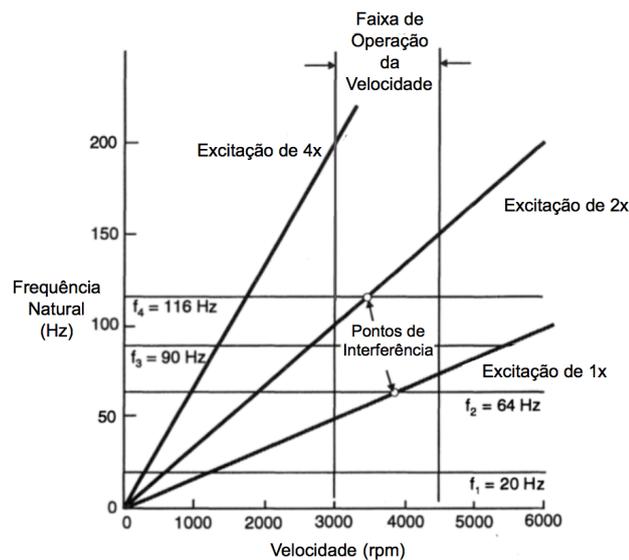


Figura 2.7: Diagrama de Campbell com quatro frequências naturais e três retas de excitação. (Adaptado de (CORBO; COOK, 1996))

Embora a determinação das linhas horizontais e das linhas verticais seja muito direta e fácil uma vez que são conhecidas as frequências naturais do sistema e as faixas de funcionamento da máquina rotativa, a escolha das retas de excitação exige uma reflexão e algum nível de estudo prévio. A explicação para isso é o fato de que existem várias fontes de excitação potenciais que podem estar presentes em sistemas rotativos convencionais. É válido destacar aqui a informação de que o diagrama de Campbell não é usado somente para a análise de sistemas vibratórios relacionados a máquinas recíprocas, mas sim qualquer maquinário que possua sistema rotativo sujeito a vibrações. A causa para tais fontes de excitação depende da natureza dessa máquina rotativa. Essencialmente, qualquer mecanismo que seja capaz de gerar flutuações periódicas no torque transmitido pelo sistema é uma possível fonte de excitação. As excitações mais comuns são de uma vez para cada revolução e de duas vezes. Esses valores estão relacionados a fontes genéricas que podem surgir devido a vários mecanismos. Excitações de “uma vez”, por exemplo, podem surgir de condições tais como desbalanço na rotação e desalinhamento de eixo. Já excitações de “duas vezes” podem ocorrer também devido a desalinhamentos, mas não somente a isso. A elipticidade do eixo, isto é, eixos de seção transversal elíptica, assim como outras características de configuração transversal não circulares, como o formato de trechos que recebem chavetas, são fontes de excitações de “duas vezes”. A consideração dessas duas excitações na construção de qualquer diagrama de Campbell é padronizada. Cada sistema possui seus próprios componentes que geram excitações. Em geral, a fonte de energia para a movimentação do eixo é uma possível fonte de excitações em harmônicos da frequência de operação. Isso é válido para turbinas e motores (CORBO; COOK, 1996). Além disso, engrenamentos funcionam sempre como fontes de excitação. No caso de rotores de turbinas ou de turbocompressores, há uma variedade de fontes de excitação características. Algumas dessas fontes são listadas na imagem 2.8.

Tipo de Instabilidade	Início	Frequência de Resposta	Causado Por
Vibração Desbalanceada Forçada	Qualquer Velocidade	$N_f = N$	Material Não-Homogêneo
Desalinhamento entre Eixos	Qualquer Velocidade	$N_f = 2N$	Equipamentos Motor e Movido Desalinhados
Vibração Auto-Excitatória ou Rotação com Histerese	$N > N_1$	$N_f \approx N_1$ $N_f = 0.5 N$	Encaixes Encolhidos
Vórtice Hidrodinâmico	$N > 2 N_1$	$N_f \leq 0.5 N$	Vedações e Mancais de Filme Fluido
Vórtice Aerodinâmico	$N > N_1$	$N_f = N_1$	Compressores ou Turbinas, Equilíbrio dos Pistões
Vórtice em Atrito Seco	Qualquer Velocidade	$N_f = -nN$	Eixo em Contato com Guia Estacionário
Fuido Arrastado	$N_1 < N < 2N$	$N_f = N_1$ $0.5 N < N_f < N$	Vapor ou Líquido Presos no Rotor

Figura 2.8: Instabilidades características em rotores. (Adaptado de (BOYCE, 2002))

No caso apresentado nesse trabalho, o sistema mecânico rotativo em estudo é um virabrequim acionado por um motor elétrico assíncrono, ou motor de indução. O motor elétrico de indução é uma máquina que funciona por corrente alternada. Algumas excitações específicas podem ser esperadas nesse sistema devido ao tipo de acionamento. Os torques que surgem como saída em um motor elétrico podem ser separados em dois tipos: torques que ocorrem quando a máquina está funcionando em velocidade constante e aqueles que ocorrem quando a máquina está em processo de aceleração ou no caso de falha elétrica. Embora ambas as categorias possam ser analisadas para a identificação de excitações em harmônicos da frequência de forçamento, o segundo tipo é mais comum como causa de problemas sérios em sistemas rotativos. Ao contrário de turbinas, engrenamentos e outras fontes de excitação, as excitações mais importantes relacionadas a máquinas elétricas como um todo são de natureza transiente (CORBO; COOK, 1996).

Em geral, a melhor fonte de informações a respeito de excitações em máquinas elétricas é seu fornecedor, visto que *designs* diferentes irão possuir características físicas diferentes e possíveis fontes externas de excitações diferentes. Ainda assim, existem excitações que são mais comuns e que estão presentes em um grande número de máquinas elétricas.

Quando em funcionamento à velocidade constante, um motor pode apresentar algumas flutuações no valor do torque produzido devido a uma série de motivos. A maior parte de motores de corrente alternada produz tais flutuações quando em funcionamento na mesma frequência de rotação da frequência elétrica recebida pela rede elétrica distribuída pelo fornecedor de energia local ou quando operam em uma frequência que seja seu dobro. No Brasil, essa frequência é igual a 60 Hz. Por esse motivo, não são poucos os autores que advertem fortemente que frequências naturais próximas a 60 e 120 Hz sejam evitadas em conjuntos que contenham motores de corrente alternada em sua composição (CORBO; COOK, 1996). Além disso, as flutuações de torque que ocorrem após alguns segundos que o motor é ligado podem alcançar valores altos, principalmente quando o sistema estiver em operação na frequência elétrica de rede. Ainda que sejam torques que não se mantenham por tanto tempo, eles podem se prolongar por tempo suficiente para causar problemas estruturais na máquina. Por esses motivos, em geral, as excitações adicionais que são consideradas em casos de sistemas rotativos acionados por motores elétricos que funcionam por corrente alternada ocorrem em 60 Hz e em 120 Hz, além de, em alguns casos, ocorrerem na frequência de passagem de polo (CORBO; COOK, 1996).

2.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Partindo do contexto dos conceitos teóricos apresentados, é interessante localizar as ideias fundamentais para o trabalho em questão. O compressor cujo sistema rotativo será estudado ao longo da próxima seção, que apresenta o modelo matemático de vibrações para um sistema rotativo discreto, é um compressor recíproco de quatro cilindros de compressão. Todos os cilindros são iguais em termos

geométricos e em relação a suas taxas de compressão. Além disso, eles estão dispostos com um ângulo de distanciamento de 180° entre si, como acontece com todos os compressores alternativos com um número de cilindros par. São esperadas vibrações torcionais no sistema por conta de suas características físicas e devido também às cargas cíclicas as quais o sistema é submetido. Como explicitado, a construção de um diagrama de Campbell para o sistema permite encontrar zonas ótimas para a operação do sistema de modo a evitar amplitudes de vibração elevadas, que são indesejáveis. A obtenção do diagrama de interferência depende da obtenção das frequências naturais do sistema. O modelo mostrado no capítulo a seguir estabelece matrizes de inércia e de rigidez que serão usadas para a obtenção dessas frequências naturais. O modelo apresentado também descreve matematicamente tanto o torque relacionado aos cilindros de excitação/compressão como também o torque do motor elétrico. Tais expressões serão importantes para a implementação do código computacional a ser desenvolvido.

CAPÍTULO 3

MODELO

3.1 CILINDROS DE COMPRESSÃO

Motores de combustão interna são máquinas que, assim como compressores alternativos, possuem o virabrequim como componente fundamental para a transmissão de energia. Nesse caso, a energia química do combustível é convertida em trabalho mecânico. Tal como em compressores, o virabrequim de um motor de combustão interna sofre com torques que se originam de forças provenientes dos pistões. Nesse caso específico, o que ocorre é a transmissão da força de expansão dos reagentes do processo de combustão para o conjunto pistão-biela-manivela. O resultado dessa etapa do ciclo termodinâmico do motor é o torque que permite a rotação do virabrequim que, por sua vez, movimentará um eixo de saída, dando continuidade ao processo de transmissão de energia.

A natureza do torque resultante dos pistões em um compressor alternativo é diferente. Essa diferença tem como explicação a dinâmica do compressor e, sobretudo, o fato dessa máquina ser uma máquina geradora. Enquanto máquinas motoras fornecem energia a um eixo de saída, as máquinas geradoras são aquelas que absorvem essa energia em seu eixo de entrada. No caso de um compressor alternativo como o estudado nesse trabalho, a energia que promove a movimentação do sistema geralmente tem seu início na rede de distribuição elétrica de corrente alternada, que pode ser monofásica ou trifásica. Ela é fornecida a um motor elétrico que tem como função fornecer um torque motor ao eixo do virabrequim do compressor alternativo. Já no compressor alternativo, a energia fornecida pelo motor é usada para comprimir algum tipo de gás para uma finalidade qualquer. A resposta do gás ao processo é sua resistência ao esmagamento súbito no interior dos cilindros. Dessa forma, o gás fornecerá uma força reativa ao movimento do pistão e como consequência o conjunto pistão-biela-manivela responderá com um torque de reação ao virabrequim. Pensando no torque como um vetor no sentido físico, seu sentido será oposto ao torque fornecido pelo motor. Cabe ao motor fornecer uma potência grande o suficiente ao eixo do virabrequim para superar os torques resistivos dos cilindros e ainda permitir a taxa de compressão solicitada em projeto. É possível modelar matematicamente o torque resistivo de origem compressiva. Essas expressões serão utilizadas no modelo de vibrações torcionais apresentado nesse trabalho.

O entendimento do virabrequim no modelo de vibrações torcionais que será apresentado é dado como um sistema massa-mola-amortecedor torcional para fins de simplificação e para que sejam obtidos resultados de acordo com os modelos matemáticos de vibrações mecânicas consolidados na literatura. Ainda que o modelo seja discreto com um número finito de graus de liberdade, ele fornece resultados válidos e consistentes com sistemas reais. A figura [3.1](#) representa espacialmente um exemplo de como podem estar dispostos os elementos desse sistema rotativo de compressor alternativo. O modelo funciona para uma quantidade arbitrária de graus de liberdade e a imagem abaixo o exemplifica para sete. Conforme a imagem [3.1](#), o primeiro elemento de inércia é o eixo de saída do motor, considerando o início do sistema como o item $I(1)$, à esquerda. Por meio desse elemento é inserida a energia motriz do conjunto. Em seguida, há o acoplamento entre o eixo de saída do motor e o virabrequim. Mais adiante, há o volante de inércia da árvore de manivelas. Tal elemento possui a função de armazenar energia mecânica no formato de energia cinética de rotação para promover a continuidade do movimento do

virabrequim temporariamente mesmo após uma eventual parada do motor elétrico, reduzindo assim grandes variações de velocidade angular em um tempo muito reduzido. Além disso, em virabrequins de motores de combustão interna, o volante é responsável por absorver vibrações e oscilações provenientes dos impulsos de explosão no motor, de modo a minimizar inconstâncias em sua rotação (SELEGATTO, 2016). Por último, se encontram quatro trechos rotativos do virabrequim que estão conectados aos cilindros de compressão por meio das bielas. Como explicado anteriormente, os cilindros são elementos associados aos pistões responsáveis por introduzir torques resistivos ao sistema por meio de conjuntos biela-manivela.

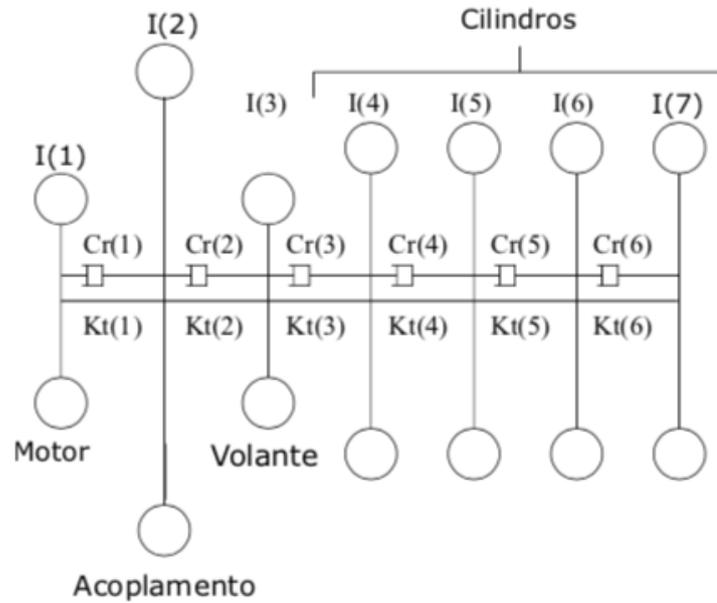


Figura 3.1: Modelo de vibrações torcionais do virabrequim de um compressor alternativo com sete graus de liberdade. (MORILLO, 2017)

O torque de resistência é uma função periódica devido à natureza periódica do virabrequim. É possível notar que as posições onde há a entrada de torque no virabrequim, seja ele excitatório ou resistivo, coincidem com as posições do motor e dos cilindros no modelo ilustrativo apresentado. Isso ocorre porque esses elementos são elementos ativos dentro do sistema, ou seja, aplicam torques sobre o virabrequim. Um vetor torque é mostrado na equação 3.1 e representa o conjunto de torques que atuam no sistema rotativo ilustrado. O modelo usado como exemplo para representar o compressor alternativo possui como alguns de seus componentes um volante de inércia e um acoplamento entre eixos. Não há torques relacionados a esses elementos devido às suas naturezas passivas. Ao longo desse capítulo, será feita a modelagem matemática para o sistema ilustrado na figura 3.1. Ainda que a modelagem seja feita para um caso particular, ela incorpora qualquer virabrequim composto por n elementos finitos. As únicas diferenças entre esse modelo específico e qualquer outro modelo para um virabrequim composto por um número limitado de graus de liberdade são somente nos pontos de entrada de torque e nas características de variação da magnitude desse tipo de forçamento ao longo do tempo. Assim como no modelo mostrado nesse capítulo, quatro das entradas de torque do virabrequim para o qual a simulação numérica foi feita também possuíam as características periódicas mostradas para os torques dos cilindros de compressão representados como séries de Fourier, de acordo com o que será mostrado mais adiante. Além disso, tal como o modelo apresentado nesse capítulo, o virabrequim simulado pelo código desenvolvido também possuiu além das entradas de torque pelos cilindros de compressão, uma entrada de torque por meio de um motor elétrico assíncrono.

$$T(t) = \left(T_m(t) \quad 0 \quad 0 \quad T_{r1}(t) \quad T_{r2}(t) \quad T_{r3}(t) \quad T_{r4}(t) \right)^T \quad (3.1)$$

Para a obtenção dos torques relacionados aos cilindros de compressão, é necessária uma análise dinâmica de um mecanismo biela-manivela. Por meio do entendimento da cinemática e da dinâmica

desse mecanismo, assim como da maneira como seus elementos mecânicos interagem entre si, é possível determinar as componentes de força que agem sobre as manivelas do virabrequim de modo a promover o torque resistivo relacionado ao movimento alternativo dos pistões. A imagem 3.2 mostra o padrão do movimento da biela em funcionamento e a curva-envelope de todas as suas posições durante a rotação do virabrequim.

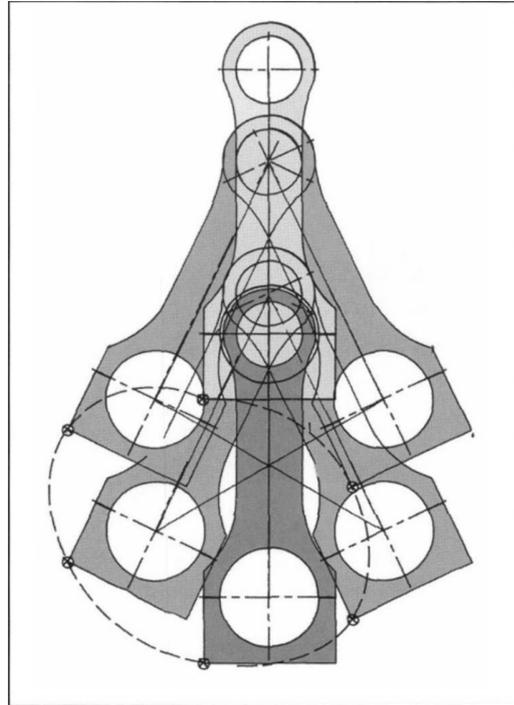


Figura 3.2: Padrão de movimentação da biela durante um ciclo completo de funcionamento. (BAS-SHUYSEN; SCHÄFER, 2004)

Nessa análise dinâmica, é assumido que as partes do compressor funcionam como corpos rígidos (TAYLOR, 1968). Para a análise dinâmica do mecanismo, é importante que seja desenvolvida primeiramente uma breve análise cinemática que permita a determinação da aceleração desenvolvida pelo pistão de acordo com o tempo. Para a análise do movimento do pistão será usada a simbologia mostrada na imagem 3.3, que mostra de modo simplificado o mecanismo estudado.

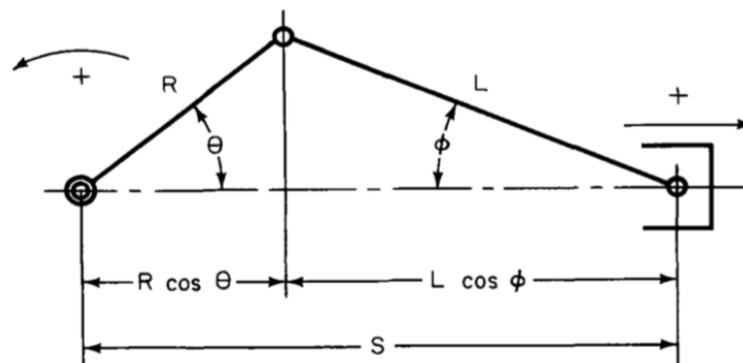


Figura 3.3: Representação esquemática do mecanismo biela-manivela. (TAYLOR, 1968)

A distância S do pino do pistão ao centro do virabrequim é dada pela equação 3.2.

$$S = R \cos(\theta) + L \cos(\phi) \quad (3.2)$$

Por meio da imagem 3.3, também é possível obter uma relação entre os senos dos ângulos.

$$\begin{aligned}
L\text{sen}(\phi) &= R\text{sen}(\theta) \\
\text{sen}(\phi) &= (R/L)\text{sen}(\theta) \\
\text{sen}(\phi) &= \lambda\text{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Da trigonometria:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi) &= 1 \\
\cos^2(\phi) &= 1 - \text{sen}^2(\phi)
\end{aligned}$$

Utilizando a relação entre senos mostrada na equação 3.3 é possível obter a equação 3.4

$$\cos(\phi) = \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)} \tag{3.4}$$

Na prática, mecanismos biela-manivela nunca têm a razão R/L maior do que 0,33. A razão entre o raio da manivela e o comprimento da biela foi denotada aqui por λ , de acordo com a equação 3.3. Quando elevado ao quadrado, esse valor será sempre inferior a 0,11. Por essa razão, a raiz quadrada mostrada na equação 3.4 pode ser expressa pela expansão dada pelo teorema binomial (TAYLOR, 1968). O resultado é uma série de rápida conversão, expressa pela equação 3.5.

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \text{sen}^2(\theta) - \frac{1}{8}\lambda^4 \text{sen}^4(\theta) - \frac{1}{16}\lambda^6 \text{sen}^6(\theta) + \dots \tag{3.5}$$

As potências de $\text{sen}(\theta)$ podem ser substituídas pelos seus equivalentes de ângulos múltiplos. Da trigonometria, são obtidas as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2(\theta) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) \\
\text{sen}^4(\theta) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta) \\
\text{sen}^6(\theta) &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos(2\theta) + \frac{3}{16}\cos(4\theta) - \frac{1}{32}\cos(6\theta)
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição dessas expressões trigonométricas de potências de senos na equação 3.5, é possível obter:

$$\begin{aligned}
\cos(\phi) &= 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos(2\theta) - \frac{3}{64}\lambda^4 + \frac{1}{16}\lambda^4 \cos(2\theta) - \frac{1}{64}\lambda^4 \cos(4\theta) - \frac{5}{256}\lambda^6 + \frac{15}{512}\lambda^6 \cos(2\theta) - \\
&\quad - \frac{3}{256}\lambda^6 \cos(4\theta) + \frac{1}{512}\lambda^6 \cos(6\theta) + \dots
\end{aligned}$$

Associando os termos da expressão obtida de acordo com a presença de cossenos de ângulos múltiplos (2θ , 4θ e assim por diante), a expressão adquire uma nova forma.

$$\begin{aligned}
\cos(\phi) &= \left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{3}{64}\lambda^4 - \frac{5}{256}\lambda^6 \right) + \left(\frac{1}{4}\lambda^2 \cos(2\theta) + \frac{1}{16}\lambda^4 \cos(2\theta) + \frac{15}{512}\lambda^6 \cos(2\theta) \right) - \\
&\quad - \left(\frac{3}{256}\lambda^6 \cos(4\theta) + \frac{1}{64}\lambda^4 \cos(4\theta) \right) + \left(\frac{1}{512}\lambda^6 \cos(6\theta) \right) + \dots
\end{aligned}$$

Se criarmos coeficientes a'_0, a'_2, a'_4 e a'_6 de acordo com as associações feitas, é possível obter uma expressão mais curta para $\cos(\phi)$.

$$a'_0 = 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{3}{64}\lambda^4 - \frac{5}{256}\lambda^6 + \dots$$

$$a'_2 = \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{15}{512}\lambda^6 + \dots$$

$$a'_4 = -\frac{3}{256}\lambda^6 - \frac{1}{64}\lambda^4 \dots$$

$$a'_6 = \frac{1}{512}\lambda^6 + \dots$$

$$\cos(\phi) = a'_0 + a'_2\cos(2\theta) + a'_4\cos(4\theta) + a'_6\cos(6\theta) + \dots \quad (3.6)$$

Em mãos das equações [3.6](#) e [3.2](#), podemos obter uma nova equação para o deslocamento do pistão no tempo.

$$S = R\cos(\theta) + L\cos(\phi)$$

$$S = R(\cos(\theta) + \frac{L}{R}\cos(\phi))$$

$$S = R[\cos(\theta) + \lambda(a'_0 + a'_2\cos(2\theta) + a'_4\cos(4\theta) + a'_6\cos(6\theta) + \dots)]$$

$$S = R[\cos(\theta) + (\lambda a'_0 + \lambda a'_2\cos(2\theta) + \lambda a'_4\cos(4\theta) + \lambda a'_6\cos(6\theta) + \dots)]$$

Considerando os novos coeficientes:

$$a_0 = a'_0\lambda$$

$$a_2 = a'_2\lambda$$

$$a_4 = a'_4\lambda$$

$$a_6 = a'_6\lambda$$

É então obtida a equação [3.7](#).

$$S = R[\cos(\theta) + (a_0 + a_2\cos(2\theta) + a_4\cos(4\theta) + a_6\cos(6\theta))] \quad (3.7)$$

Na equação [3.7](#), se for aplicada a propriedade distributiva da multiplicação de R sobre os termos dentro do parêntese, será possível observar que enquanto o primeiro termo é a projeção da manivela sobre o eixo horizontal, os demais termos são funções de λ e ocorrem conforme o ângulo da manivela muda no tempo. Depois dos primeiros três termos, os coeficientes se tornam muito pequenos. Se for assumido que a manivela gira a uma velocidade angular $d\theta/dt$ constante, expressões de velocidade e de aceleração do pistão poderão ser obtidas pela derivação em relação ao tempo da expressão do deslocamento do pistão dada pela equação [3.7](#). A velocidade angular constante será representada como ω nas equações em diante.

Daí:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = -\omega[R\sin(\theta) + R(2a_2\sin(2\theta) + 4a_4\sin(4\theta) + 6a_6\sin(6\theta))] \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S} = -\omega^2[R\cos(\theta) + R(4a_2\cos(2\theta) + 16a_4\cos(4\theta) + 36a_6\cos(6\theta))] \quad (3.9)$$

Uma vez obtidas as equações que descrevem a velocidade e, principalmente, a aceleração do pistão, é possível fazer a análise dinâmica das forças que atuam no mecanismo biela-manivela.

Nesse ponto, é conveniente considerar a biela equivalente a duas massas concentradas em suas duas extremidades, de modo que a soma de ambas as massas seja igual à massa total da biela. A divisão de ambas as massas deve ser proporcional à distribuição de massas da “biela real” de modo que o centro de gravidade da biela seja o mesmo desse novo sistema constituído por duas massas concentradas. Graças ao fato de que as massas de substituição da biela são, quando somadas, iguais à massa da biela real e ao fato de que ambos os centros gravitacionais se coincidem, a magnitude e a direção das forças resultantes dadas para esse novo sistema equivalente são iguais às magnitudes e às direções das forças resultantes reais que atuam na biela. Essa substituição resulta em enorme simplificação já que a massa de substituição localizada junto ao pistão passa a ser considerada como parte de sua montagem, enquanto a massa substituída junto à manivela passa a rotacionar em velocidade constante junto ao virabrequim. A imagem 3.4 mostra como ficam dispostas as duas massas equivalentes que substituem a biela para a simplificação da análise dinâmica do mecanismo. A massa de maior tamanho é chamada de massa de inércia rotativa, enquanto a massa de menor tamanho é chamada de massa de inércia alternativa. As expressões para os valores de ambas as massas são mostradas nas equações 3.10 e 3.11, em que m_b é a massa da biela.

$$m_{ab} = \frac{m_b L_2}{L} \quad (3.10)$$

$$m_{rb} = \frac{m_b L_1}{L} \quad (3.11)$$

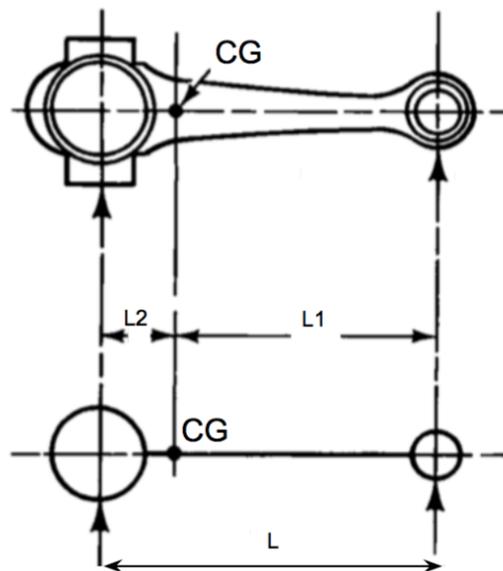


Figura 3.4: Massas equivalentes à biela concentradas em suas duas extremidades. À direita está a massa alternativa da biela, enquanto à esquerda está sua massa rotativa. (Adaptado de (TAYLOR, 1968))

Em um mecanismo biela-manivela operando a velocidade constante, podem ser encontradas as seguintes forças:

- Força do gás que atua no pistão (F_g): Força ao longo do eixo do cilindro que age sobre o conjunto do pistão e tem como origem a resistência do gás contra seu esmagamento. Seu sentido é oposto ao sentido da trajetória do pistão.

- Força normal, que atua no pistão (F_N): Essa força surge como reação à força da biela sobre o pistão e é perpendicular à força do gás;
- Força da biela (F_b): Força que atua sobre a biela do mecanismo. Essa força surge como reação à força do gás somada à força de inércia alternativa. Sua componente tangencial ao raio do virabrequim promove torque sobre a manivela.
- Força tangencial (F_t): Força responsável pelo torque na manivela. É a soma da componente tangencial ao raio do virabrequim da força do gás com a componente tangencial na mesma direção e sentido da força inercial alternativa.
- Força de inércia alternativa (F_{ia}): Esforço que surge do movimento das massas alternativas. Tais massas são juntas iguais à soma das massas do pistão, incluindo seu pino, anéis e travas, além da massa alternativa da biela (MENDES, 2005).
- Força de inércia rotativa (F_{ir}): Força gerada por massas de movimento puramente rotativo. Tais massas podem ser consideradas como a massa rotativa da biela e como a massa da manivela do virabrequim (MENDES, 2005). Tal força não faz parte das forças responsáveis pelo torque no virabrequim e sua menção é apenas informativa.

De acordo com a figura 3.5, é possível observar como ocorre a distribuição das forças que são aplicadas no pistão em seu sentido longitudinal. Essas forças são denotadas por F_g (força do gás) e F_{ia} (força de inércia alternativa). A primeira delas nada mais é do que a multiplicação da pressão no cilindro pela área da superfície superior do pistão. A expressão de F_g é dada pela equação 3.12, em que d_p é o diâmetro do pistão e p a pressão instantânea no cilindro.

$$F_g = p \frac{\pi d_p^2}{4} \quad (3.12)$$

Surgem então duas componentes que atuam no moente do virabrequim, sendo uma delas radial e outra tangencial. O moente do virabrequim é a parte da manivela que se encaixa à extremidade inferior da biela, de acordo com a figura 3.5. A componente radial que age nesse ponto promove a compressão das manivelas, enquanto a outra componente é responsável pela resistência torcional no virabrequim, isto é, ela é responsável por um torque resistivo. A figura 3.5 mostra a disposição das forças atuantes no mecanismo biela-manivela.

O esforço decorrente do movimento das massas alternativas é dado pela equação 3.13. De acordo com a segunda lei de Newton, uma força pode ser denotada como o produto de uma massa pela aceleração relacionada a esse esforço em seu sentido resultante. Desse modo, considerando a equação 3.9, que permite que seja encontrada a aceleração instantânea do pistão, é possível obter a força de inércia alternativa desse componente. Na equação 3.13, ω é a velocidade angular da manivela e m_a é a massa alternativa total, dada pela soma da massa de inércia alternativa com a massa do conjunto do pistão (pistão, pino, anéis e travas).

$$F_{ia} = -m_a \omega^2 R (\cos \theta + 4a_2 \cos 2\theta + 16a_4 \cos 4\theta + 36a_6 \cos 6\theta + \dots) \quad (3.13)$$

São considerados apenas os termos de primeira e segunda ordens para o cálculo da força de inércia alternativa. Isso não implica em redução significativa da precisão dos cálculos. É observado que a diferença entre esses valores é menor que 0.55% (MENDES, 2005).

A força tangencial que atua na manivela é representada na figura 3.5. Sua componente que tem como origem a força de inércia obtida na equação 3.13 é dada na equação 3.14. A origem dessa expressão é dada por uma análise geométrica do mecanismo biela-manivela.

$$F_{ta} = F_{ia} \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \quad (3.14)$$

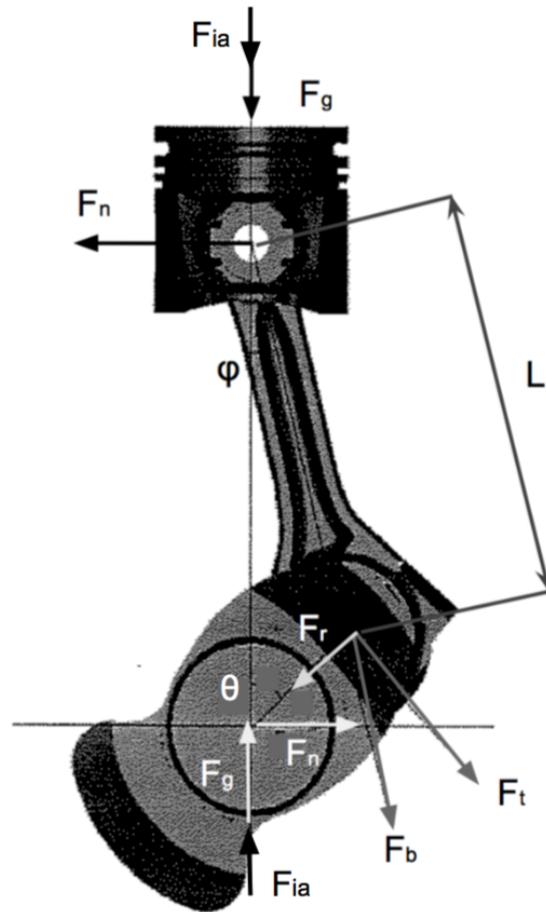


Figura 3.5: Esforços atuantes na árvore de manivelas. (Adaptado de (MENDES, 2005))

A outra componente da força tangencial na manivela é decorrente da resistência do gás no processo de compressão. Ela é dada pela equação 3.15.

$$F_{tp} = F_g \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \quad (3.15)$$

A força tangencial resultante na manivela é dada pela equação 3.16.

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{tp} + \vec{F}_{ta} \quad (3.16)$$

O torque de resistência dos cilindros sobre o virabrequim é uma função de seu ângulo e é calculado pela equação 3.17.

$$T_{rk} = RF_t \quad (3.17)$$

A expressão que surge para o torque pode ser representada por uma série de Fourier, em que A_n e B_n são os coeficientes da série, conforme é feito por (MENDES, 2005) e mostrado na equação 3.18. Isso ocorre porque, como observado experimentalmente, o valor dos torques relacionados aos cilindros variam de acordo com um ciclo que sempre se repete da mesma maneira para cada ciclo termodinâmico realizado pelo compressor. Isso ocorre tanto em motores de combustão interna, que possuem um ciclo termodinâmico específico e em que há transmissão de potência entre o pistão e o virabrequim, como também em compressores alternativos, que possuem características muito semelhantes. A imagem 3.6 mostra um exemplo de como é esse comportamento do torque em um motor de combustão interna de seis cilindros.

$$T_{rk}(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{24} [A_n^k \cos(n\omega t) + B_n^k \sin(n\omega t)] \quad (3.18)$$

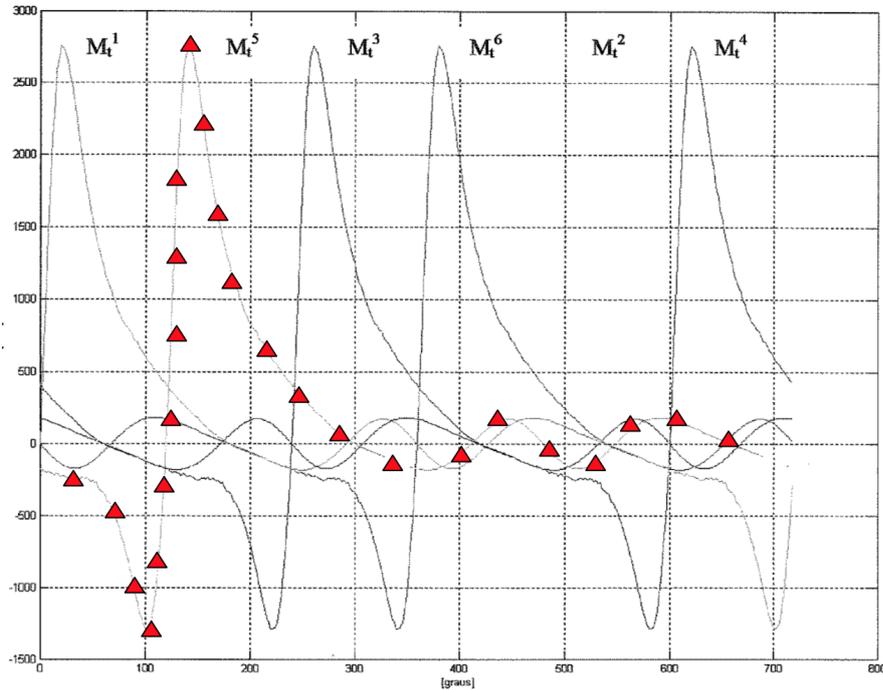


Figura 3.6: Curvas de torque para uma condição de 2600 rpm a plena carga em um motor de combustão interna. Os triângulos vermelhos permitem a compreensão do formato de um única curva isolada. (MENDES, 2005)

O índice k na equação 3.18 indica o cilindro para o qual o torque será calculado. Já o índice n representa o número de termos da série em que ocorrerá a expansão. É considerada uma expansão em 24 termos suficiente para a obtenção de resultados precisos e satisfatórios (MENDES, 2005). Contudo, neste trabalho a expansão foi feita somente para oito termos, conforme será explicado mais adiante.

É possível reescrever a equação 3.18 de modo a utilizar exponenciais complexas no lugar de senos e cossenos. São usadas as identidades de seno e cosseno mostradas nas equações 3.19 e 3.20 para que sejam feitas substituições convenientes na equação 3.18.

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \quad (3.19)$$

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \quad (3.20)$$

Considerando as substituições a seguir, é possível encontrar uma nova forma para a equação 3.18.

$$\begin{aligned} A_n^k \cos(n\omega t) + B_n^k \sin(n\omega t) &= A_n^k \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + B_n^k \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}(A_n^k - iB_n^k)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(A_n^k + iB_n^k)e^{-in\omega t} \end{aligned}$$

Se:

$$C_n^k = \frac{1}{2}(A_n^k - iB_n^k)$$

E ainda:

$$D_n^k = \frac{1}{2}(A_n^k + iB_n^k)$$

Então, finalmente é obtida a equação [3.21](#), que é equivalente à equação da série de Fourier mostrada anteriormente (equação [3.18](#)).

$$T_{rk}(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{24} [C_n^k e^{in\omega t} + D_n^k e^{-in\omega t}] \quad (3.21)$$

O termo A_0 da série de Fourier representada pela equação [3.21](#) não é responsável pelas vibrações no eixo do virabrequim, mas sim por um momento torçor que terá a ele somadas as vibrações torcionais.

3.2 MOTOR ELÉTRICO ASSÍNCRONO

Compressores alternativos podem ser acionados tanto por motores elétricos síncronos como por motores elétricos assíncronos. Em ambos, as principais partes que os constituem são o estator e o rotor. Enquanto o estator permanece fixo em um motor de corrente alternada e produz o campo magnético responsável pelo movimento que ocorre dentro do motor, o rotor é o componente que move como resposta ao campo magnético que surge no estator e que fornece potência ao eixo do compressor e ao seu virabrequim, que aciona a compressão dentro dos cilindros.

Uma das diferenças entre um motor síncrono para um motor assíncrono é o escorregamento, que ocorre somente em motores assíncronos ou de indução. Nesse tipo de motor, o comportamento do rotor depende fortemente da sua velocidade relativa em relação ao campo magnético rotativo. Para exemplificar essa relação, é possível pensar em um rotor em repouso, que ao perceber o campo rotativo forçar seus condutores, terá induzida sobre si uma força contraeletromotriz de alta magnitude. Já um rotor em rotação à velocidade síncrona do campo eletromagnético teria velocidade relativa em relação a esse campo igual a zero e não existiria força contraeletromotriz induzida sobre os condutores do rotor ([HUGHES, 2006](#)).

No caso de motores de indução, a velocidade rotativa entre o rotor e o campo é conhecida como escorregamento. Se a velocidade no rotor é N_{rot} e a velocidade síncrona do campo é N_{sin} , então a velocidade de escorregamento é dada pela diferença $N_{sin} - N_{rot}$. Já o escorregamento é dado pela expressão mostrada na equação [3.22](#)

$$s_e = \frac{N_{sin} - N_{rot}}{N_{sin}} \quad (3.22)$$

Um escorregamento de 0, portanto, indica que a velocidade do rotor é igual à velocidade síncrona, enquanto um escorregamento de valor 1 corresponde à velocidade do rotor nula ([HUGHES, 2006](#)).

Os dois motores possuem diferentes formatos para a equação do somatório de torques em seus eixos, uma vez que a dinâmica de ambos os motores é diferente. A equação do somatório de momentos no eixo será chamada a partir desse momento de equação global do sistema dinâmico. Ela é dada pela equação [3.23](#)

$$\sum_{k=1}^{N_c} (F_{2x}^k \cdot \sin\theta - F_{2y}^k \cdot \cos\theta) + T_m = I_{zz1} \ddot{\theta} \quad (3.23)$$

Nessa equação, N_c é o número total de cilindros e as forças F_{2x}^i e F_{2y}^i são as forças que atuam no virabrequim a partir de cada cilindro e se opõe ao torque que gera o movimento, proveniente do motor. É importante ressaltar que a posição do centro de massa, a massa e o momento de inércia da biela podem ser diferentes para cilindros diferentes, considerando que não existe nenhuma hipótese ou condição de que tais forças são iguais, justamente porque as dimensões dos cilindros e as forças atuantes podem ser diferentes umas das outras ([MORILLO, 2017](#)).

O motor escolhido para a implementação no modelo numérico de simulação de vibrações torcionais desse trabalho foi o motor assíncrono, ou motor de indução. Diferenças adicionais entre ambos os tipos de motor discutidos são a localização do enrolamento de campo e como este componente é excitado. O motor síncrono possui seu enrolamento de campo geralmente situado no rotor e é excitado por corrente contínua. Já o motor assíncrono recebe corrente elétrica alternada diretamente ao estator e o rotor recebe corrente por indução (FITZGERALD; UMANS, 2003).

Dois tipos de rotor são usados em motores de indução. Em ambos, o componente conhecido como ferro do rotor consiste numa pilha de lâminas de aço espaçadas de maneira igual e dispostas em torno de uma circunferência. O rotor bobinado possui enrolamento semelhante ao do estator, com mesmo número de polos (MORILLO, 2017). O rotor do tipo gaiola de esquilo é o mais comum: cada ranhura do rotor contém um barra condutora sólida e todos os condutores estão fisicamente e eletricamente conectados em cada lado do rotor (HUGHES, 2006). A imagem 3.7 mostra um estator e um rotor de um motor elétrico trifásico.

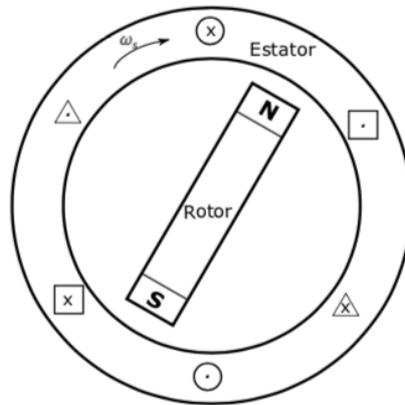


Figura 3.7: Estrutura magnética de um motor elétrico trifásico. (MORILLO, 2017)

A figura 3.8 mostra uma curva que relaciona o torque fornecido pelo motor de indução ao eixo em função de sua velocidade de rotação. Esse gráfico costuma ser fornecido pelo fabricante de motores e ele pode ser usado como fonte para a entrada da variável T_m da equação 3.23. Ela pode ser aproximada por um conjunto de polinômios, de maneira que seja possível utilizar uma expressão matemática para descrevê-la da melhor forma possível.

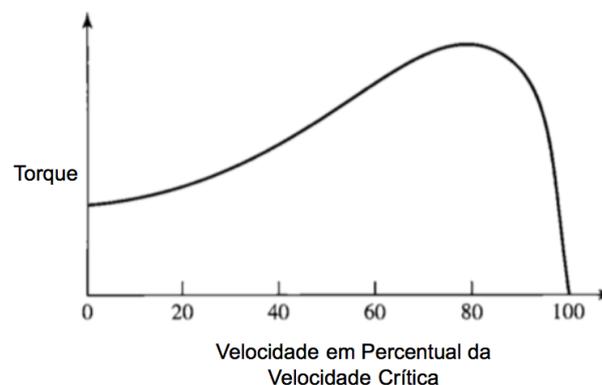


Figura 3.8: Curva típica da relação velocidade angular-torque em um motor de indução. (Adaptado de (FITZGERALD; UMANS, 2003))

Outra maneira de obter o torque do motor elétrico é por meio de um modelo matemático simplificado que represente o motor como um circuito elétrico. A figura 3.9 mostra essa representação.

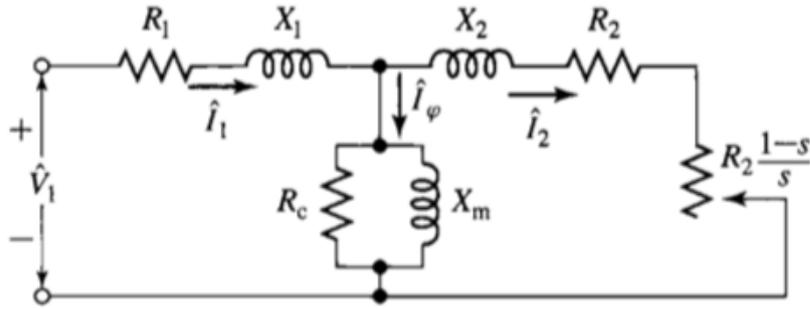


Figura 3.9: Circuito equivalente de um motor de indução polifásico. (FITZGERALD; UMANS, 2003)

Na figura 3.9, as incógnitas representam os seguintes parâmetros físicos:

- R_1 - Resistência equivalente do estator;
- X_1 - Reatância equivalente do estator;
- \hat{V}_1 - Tensão de fase do circuito trifásico;
- R_2 - Resistência equivalente do rotor;
- X_2 - Reatância equivalente do rotor;
- R_c - Resistência que gera o campo magnético de indução;
- X_m - Reatância que gera o campo magnético de indução;
- s_e - Escorregamento;

O teorema de Thévenin é usado para solucionar esse circuito. Nesse sentido, devem ser obtidas a tensão elétrica, a impedância, a resistência e a reatância de Thévenin. Essas variáveis são dadas pelas equações 3.24 a 3.27.

$$V_{th} = \frac{\hat{V}_1}{\sqrt{3}} \frac{X_m}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_m)^2}} \quad (3.24)$$

$$z_{th} = \frac{jX_m(R_1 + j \cdot X_1)}{R_1 + j(X_1 + X_m)} \quad (3.25)$$

$$R_{th} = R_e(z_{th}) \quad (3.26)$$

$$X_{th} = Im(z_{th}) \quad (3.27)$$

A velocidade síncrona N_s do campo magnético girante é dada pela equação 3.28, em que f é a frequência elétrica da fonte em Hz e p_n é o número de polos do motor. O resultado da equação é dado em rotações por minuto (rpm).

$$N_{sin} = \frac{120f}{p_n} \quad (3.28)$$

Reescrevendo a equação 3.22, é possível encontrar uma equação para a velocidade de rotação do motor assíncrono, dada pela equação 3.29.

$$N_{rot} = (1 - s_e)N_{sin} \quad (3.29)$$

Dessa forma, o torque do motor elétrico trifásico assíncrono pode ser obtido por meio da fórmula [3.30](#).

$$T_m = \frac{3V_{th}^2 R_2 / s_e}{\frac{N_{sin}\pi}{30} ((R_{th} + R_2 / s_e)^2 + (X_{th} + X_2)^2)} \quad (3.30)$$

Na seção a seguir, é obtida a equação diferencial ordinária que relaciona o deslocamento angular, a velocidade de rotação e a aceleração angular do virabrequim. Essa equação é não-homogênea, visto que os torques dos cilindros e o torque relacionado ao motor elétrico assíncrono entram como os forçamentos do sistema. O valor do torque do motor assíncrono será introduzido no vetor de torques como um valor constante. De acordo com a equação [3.30](#), se a estrutura do motor não for modificada com o tempo, isto é, se as reatâncias, resistências e tensões usadas na equação forem valores fixos, então o torque do motor assíncrono, em regime permanente, também será constante. Dessa forma, para a obtenção dos resultados do modelo mostrado, foi usado um valor constante para o forçamento associado ao motor elétrico.

3.3 VIBRAÇÕES TORCIONAIS

Esta seção foi baseada no modelo de vibrações torcionais sugerido por (MORILLO, 2017) em sua dissertação de mestrado, que por sua vez usou como base o trabalho de (VILLALVA, 2014). As diferenças entre os dois modelos são pequenas e são justificadas pelo fato do modelo do segundo autor considerar vibrações torcionais em um virabrequim de um motor de combustão interna, enquanto o primeiro pesquisador faz a modelagem de um virabrequim de um compressor alternativo.

Cada grau de liberdade na figura [3.1](#) está associado ao momento de inércia de um dos elementos rotativos que compõem o sistema mostrado como exemplo representativo de um compressor alternativo. Nesse exemplo, o primeiro elemento representa o eixo de saída do motor elétrico responsável por fornecer trabalho mecânico ao sistema. O segundo elemento representa o acoplamento entre o eixo do motor e o virabrequim do compressor alternativo, enquanto o terceiro é um volante de inércia. Por último, há os cilindros, sendo que cada um deles é constituído por um moente, dois meios munhões, dois braços de manivela e a massa rotativa da biela (MORILLO, 2017).

Valores exatos de momento de inércia podem ser obtidos por softwares de CAD caso eles sejam necessários. Para a obtenção dos coeficientes de rigidez torcional, por outro lado, são usados softwares do tipo CAE (Computer Aided Engineering). Tais coeficientes também podem ser obtidos por meio de experimentos, porém a obtenção por essa forma costuma ser mais complicada.

A equação do movimento desse sistema torcional é dada pela equação [3.31](#).

$$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K_t\theta = T(t) \quad (3.31)$$

Na equação [3.31](#), M representa uma matriz diagonal de inércia de ordem n por n , sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Na mesma equação, C e K_t também são matrizes, porém dessa vez elas representam o amortecimento entre os elementos do sistema e os coeficientes de rigidez, respectivamente. Tais matrizes também são quadradas e de ordem n por n , porém não são diagonais. Para o sistema de sete graus de liberdade mostrado anteriormente, essas matrizes são dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{r1} & -C_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{r1} & C_{r1} + C_{r2} & -C_{r2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{r2} & C_{r2} + C_{r3} & -C_{r3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{r3} & C_{r3} + C_{r4} & -C_{r4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{r4} & C_{r4} + C_{r5} & -C_{r5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{r5} & C_{r5} + C_{r6} & -C_{r6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{r6} & C_{r6} \end{pmatrix}$$

$$K_t = \begin{pmatrix} K_{t1} & -K_{t1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1} + K_{t2} & -K_{t2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2} + K_{t3} & -K_{t3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{t3} & K_{t3} + K_{t4} & -K_{t4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{t4} & K_{t4} + K_{t5} & -K_{t5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{t5} & K_{t5} + K_{t6} & -K_{t6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{t6} & K_{t6} \end{pmatrix}$$

O vetor que representa o deslocamento angular dado em um tempo t para cada coordenada independente θ é dado por:

$$\theta(t) = \left(\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \theta_3(t) \quad \theta_4(t) \quad \theta_5(t) \quad \theta_6(t) \quad \theta_7(t) \right)^T$$

O vetor de estado e a derivada desse vetor são dados respectivamente pelas equações [3.32](#) e [3.33](#). Ambos os vetores são matrizes-coluna com catorze linhas e uma coluna. No vetor mostrado na equação [3.32](#), os primeiros sete termos correspondem ao deslocamento angular dos sete graus de liberdade do sistema, respectivamente, enquanto os últimos sete termos correspondem às derivadas do deslocamento angular, isto é, às velocidades angulares dessas mesmas coordenadas, na mesma ordem. Diferentemente, o vetor-coluna da equação [3.33](#) é composto pelas velocidades angulares e em seguida pelas acelerações associadas às mesmas sete coordenadas.

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

A forma de estado da equação [3.31](#) é dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \quad (3.34)$$

A matriz de transição A e o vetor de torque $b(t)$ são dados pelas equações [3.35](#) e [3.36](#). A matriz A é uma matriz quadrada de ordem catorze. Sua representação na equação [3.35](#) está simplificada devido ao tamanho dessa matriz e à dificuldade de mostrá-la em uma folha de papel com a dimensão inapropriada para esse objetivo. Ainda assim, é possível explicá-la para melhor entendimento. A matriz é composta pelo encaixe de 4 matrizes quadradas de ordem sete, em que o primeiro quadrante é composto por uma matriz nula e o segundo quadrante (no lado de cima à direita) por uma matriz identidade. Já o terceiro quadrante, localizado à esquerda e do lado de baixo, é composto pela matriz

dada pela multiplicação da inversa da matriz de inércia pela matriz de rigidez. Por último, no último quadrante está localizada a matriz quadrada dada pela inversa da matriz de inércia multiplicada pela matriz de amortecimento. O vetor mostrado na equação 3.36, por outro lado, é uma matriz-coluna de catorze linhas. Enquanto seus sete primeiros termos são zeros, seus sete últimos elementos são dados pelo vetor obtido pelo produto da matriz inversa à matriz de inércia pelo vetor de torques.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K_t & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}T(t) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

O vetor de torques poderá, portanto, ser representado como o vetor:

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

Como explicado, as primeiras sete linhas do vetor são dadas por um vetor menor “7x1” cujos elementos são zeros. Esse vetor será apresentado como $b_1(t)$. Já os sete últimos elementos são dados pelo produto da inversa da matriz M pelo vetor de torques e será representado por $b_2(t)$.

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$b_2(t) = M^{-1}T(t) = \begin{pmatrix} \frac{T_m(t)}{I_1} & 0 & 0 & \frac{T_{r1}(t)}{I_4} & \frac{T_{r2}(t)}{I_5} & \frac{T_{r3}(t)}{I_6} & \frac{T_{r4}(t)}{I_7} \end{pmatrix}^T$$

No vetor $b_2(t)$, é possível observar que as componentes 2 e 3 são nulas porque estão associadas ao acoplamento e ao volante, respectivamente, de acordo com o modelo ilustrativo mostrado na figura 3.1. Como no sistema mostrado nenhum dos dois componentes são meios por onde há a aplicação de torque externo sobre o eixo do virabrequim, é natural que tais componentes do vetor sejam nulos.

Se o problema de autovalor associado à matriz A for resolvido, é possível determinar as frequências naturais do modelo equivalente e, em seguida, é possível construir um diagrama de Campbell para o sistema.

Considerando o comportamento oscilatório e repetitivo dos torques relacionados aos cilindros de compressão, é possível representar cada um deles como uma série de Fourier diferente composta pela soma de senos e cossenos. Considerando aproximações dessas curvas de torque para séries de Fourier cujo índice superior é igual a oito, são definidos os vetores mostrados abaixo. Nos vetores, a simbologia $[0]$ representa um vetor de sete colunas cujos elementos são nulos.

$$b_0 = \left([0] : \frac{A_0^m}{I_1} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A_0^1}{I_4} \quad \frac{A_0^2}{I_5} \quad \frac{A_0^3}{I_6} \quad \frac{A_0^4}{I_7} \right)^T$$

$$b_n = \left([0] : \frac{C_n^m}{I_1} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{C_n^1}{I_4} \quad \frac{C_n^2}{I_5} \quad \frac{C_n^3}{I_6} \quad \frac{C_n^4}{I_7} \right)^T$$

$$\bar{b}_n = \left([0] : \frac{D_n^m}{I_2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{D_n^1}{I_4} \quad \frac{D_n^2}{I_5} \quad \frac{D_n^3}{I_6} \quad \frac{D_n^4}{I_7} \right)^T$$

Dessa forma, o vetor de torques pode ser reescrito da maneira como é mostrado na equação 3.37, que enfatiza a característica de seus torques como séries de Fourier.

$$b(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^8 [b_n e^{in\omega t} + \bar{b}_n e^{-in\omega t}] \quad (3.37)$$

3.4 CONCLUSÕES PARCIAIS DO MODELO

O código implementado numericamente nesse trabalho foi desenvolvido de acordo com valores de referência para as grandezas físicas necessárias para a execução do modelo físico mostrado. As magnitudes dessas grandezas foram retiradas de trabalhos que possuíam objetivos semelhantes, com algumas adaptações. Devido à ausência de valores de entrada relacionados às inércias e aos coeficientes de rigidez e amortecimento no texto de (MORILLO, 2017), cujo modelo tentou ser replicado nesse trabalho, foi necessária a adaptação conforme outro sistema de vibrações torcionais. O sistema escolhido foi adaptado do trabalho de (MENDES, 2005), conforme é explicado no capítulo a seguir. Além disso, o equacionamento do torque do motor não foi utilizado no código desenvolvido, visto que suas características elétricas não passam por modificações durante seu funcionamento e, portanto, pode-se considerar que o torque associado ao motor elétrico assíncrono é constante.

Por outro lado, o sistema de N graus de liberdade foi implementado no programa desenvolvido. Por meio das matrizes de inércia e rigidez, foi construído um problema de autovalores de onde foi obtida uma matriz diagonal com as raízes do polinômio característico do problema. A raiz quadrada dos termos dessa matriz forneceu as frequências naturais do sistema de sete graus de liberdade. Além disso, foi desenvolvido um segundo código capaz de obter os valores de torque dos cilindros para uma série de dados de pressão ao longo de um ciclo dos pistões. As curvas de torque foram obtidas por meio da equação 3.17 e elas são mostradas no capítulo a seguir. Os momentos torsores causados pelos cilindros sobre o sistema rotativo foram expressos por séries de Fourier tal como apresentado no modelo matemático. Por último, foram construídos diagramas de Campbell para o sistema, tendo em vista suas frequências naturais, e foi realizada a análise dinâmica do sistema com a presença de todos seus forçamentos externos.

CAPÍTULO 4

SISTEMAS E RESULTADOS

O modelo apresentado no capítulo anterior foi resolvido numericamente a partir de um código desenvolvido em *Matlab*[®]. Os valores dos parâmetros utilizados aqui foram baseados naqueles usados por (MENDES, 2005) com adaptações. O sistema estudado pelo autor apresenta algumas diferenças em relação ao sistema de referência mostrado na imagem 3.1. As diferenças estão relacionadas ao número de graus de liberdade de ambos os sistemas e à natureza de seus elementos constitutivos. Além disso, há uma outra diferença entre os sistemas que deve ser levada em conta. Enquanto a análise desenvolvida por (MENDES, 2005) foi feita tendo como objeto de estudo um motor de combustão interna, esse projeto visa analisar um compressor alternativo. Foi escolhida a implementação do modelo do compressor apresentado anteriormente, de acordo com a figura 3.1, com algumas modificações, utilizando para isso algumas das entradas utilizadas no trabalho de (MENDES, 2005), tendo em vista que seu trabalho era aquele que podia ser replicado mais facilmente para a construção de uma versão própria do código computacional.

Algumas adaptações foram feitas no sistema de sete graus de liberdade da figura 3.1 para a obtenção de uma versão final do código e elas serão explicadas nessa seção do texto. Antes de continuar o esclarecimento em relação aos passos seguidos nessa etapa do trabalho, é importante ressaltar que a principal referência utilizada como base nesse projeto de graduação, isto é, a dissertação de (MORILLO, 2017), não apresentava em seu texto os dados de inércia, amortecimento e rigidez para a reprodução do mesmo modelo utilizado pelo autor. A utilização dos mesmos parâmetros forneceria resultados de acordo com o que foi proposto. Ainda assim, os resultados aqui mostrados são válidos, visto que o modelo em si utilizado por ambos autores é o mesmo e o que muda são somente os dados de entrada no código, a característica do torque dos cilindros (excitatória ou resistiva), a natureza das inércias e a ordem desses elementos no sistema rotativo.

Considerando as limitações encontradas em relação ao uso de dados relacionados a compressores alternativos, a decisão tomada foi simular o modelo apresentado para dados de inércia, rigidez e amortecimento de um sistema rotativo de motor de combustão interna, com adaptações. Tendo sido tomada essa decisão, foi estabelecido que o modelo simulado apresentaria também sete graus de liberdade, ou seja, o modelo de (MENDES, 2005) foi adaptado de forma que alguns dos onze graus de liberdade originais fossem suprimidos. Os valores utilizados nesse projeto de graduação foram, portanto, retirados dessa dissertação de mestrado. Considerando que a ausência de valores de rigidez, inércia e amortecimento relacionados ao sistema representativo do compressor alternativo já fazia da simulação numérica inverossímil, a escolha dos elementos do modelo de (MENDES, 2005) foi feita tentando encontrar elementos iguais entre os sistemas, porém para aqueles componentes sem equivalência, a escolha foi feita de modo arbitrário. Dessa forma, a primeira inércia do modelo implementado está relacionada, no modelo original de (MENDES, 2005), a uma polia responsável por transmitir parte da potência do motor de combustão interna para outro eixo. De acordo com o modelo proposto no capítulo anterior, esse valor de momento de inércia deveria estar relacionado ao eixo de saída do motor elétrico assíncrono. Já a segunda inércia, relacionada no modelo de compressor recíproco ao acoplamento entre eixos, está associada a um trem de engrenagens também utilizado para a transmissão da potência do motor para outro eixo. O elemento em sequência é o volante de inércia. Ao contrário dos itens anteriores, esse elemento está presente em ambos os sistemas. Por último estão

quatro manivelas do virabrequim. Tais elementos foram usados em ambos os modelos. Cada uma das manivelas está associada a um cilindro de compressão diferente. O mesmo valor de momento de inércia foi utilizado para todos esses quatro componentes devido às suas semelhanças geométricas e de operação. São totalizados, portanto, sete graus de liberdade no sistema rotativo. Conclui-se que não há uma equivalência completa entre os elementos de inércia do sistema apresentado anteriormente na figura 3.1 e o modelo de (MENDES, 2005), porém a simulação do sistema rotativo de um compressor alternativo se mantém devido aos sentidos dos forçamentos e às naturezas dos torques usados na simulação.

O modelo matemático utilizado por (MENDES, 2005) se diferencia um pouco do modelo de (MORILLO, 2017). Uma das diferenças reside no uso de uma matriz C obtida pela soma de uma matriz de amortecimento absoluto com uma segunda matriz de amortecimento relativo. Enquanto o primeiro autor faz o uso dessa matriz obtida pela soma de outras duas matrizes, o segundo utiliza somente a matriz de amortecimento relativo. De acordo com os valores dos coeficientes mostrados no trabalho de (MENDES, 2005), foi escolhido o valor relacionado ao amortecimento absoluto dos cilindros de compressão e igual a 6 N.m.s/rad para ser usado para todas as entradas da matriz C , conforme o modelo de vibrações apresentado no capítulo anterior. Isso foi feito devido à ausência de valores de amortecimento relativo no texto do autor e porque somente os cilindros de compressão possuíam coeficientes de amortecimento absoluto diferentes de zero. Portanto, valores de amortecimento absoluto foram introduzidos em uma matriz de amortecimento relativo para que assim o modelo mostrado por (MORILLO, 2017) e aqui replicado fosse implementado. Esses valores foram também multiplicados por 10^{-1} uma vez que foi notado pelos resultados do código que 6 N.m.s/rad era um valor de amortecimento muito alto, considerando os demais valores utilizados nas matrizes de rigidez e de inércia do sistema. Dessa forma, o uso de 0.6 N.m.s/rad permitiu uma característica de vibração subamortecida, como será visto mais adiante. Como esse valor de amortecimento relativo possibilitou resultados mais próximos com o que era esperado na realidade, esse foi o valor de amortecimento final escolhido para ser utilizado para todos os elementos. Dessa forma, a matriz de amortecimento final utilizada no código implementado nesse trabalho é mostrada a seguir:

$$C = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.2 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1.2 & -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1.2 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.2 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1.2 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Como dito anteriormente, alguns dos valores relacionados tanto à inércia quanto à rigidez utilizados como dados de entrada no programa de (MENDES, 2005) foram suprimidos, enquanto outros foram mudados de ordem para que pudessem contemplar o modelo relacionado ao compressor alternativo, conforme mostrado na figura 3.1. Além disso, é importante ressaltar que os valores de rigidez usados pelo autor foram multiplicados por 10^{-5} . Isso foi feito porque foi notado que o tempo de execução do código para um vetor de tempo muito extenso era muito grande. Desse modo, a mudança na dimensão dos valores de inércia permitiu que o código em linguagem *Matlab®* pudesse passar seu tempo de execução de alguns dias para somente algumas horas, em alguns casos. Uma das consequências dessa mudança nos valores de rigidez foi a diminuição dos valores de frequência natural. Ademais, mais uma vez, essa alteração provocou um distanciamento dos resultados em relação à realidade, porém em termos qualitativos, os resultados continuam sendo válidos e representativos.

Os valores utilizados no código implementado são mostrados nas tabelas 1 e 2. A tabela 3 mostra os dados de amortecimento relativo utilizados. Esses valores estão associados aos valores de amortecimento absoluto usados por (MENDES, 2005). Como explicado anteriormente essa reinterpretação de valores foi feita para preservar o modelo apresentado para o compressor. Dessa forma, foi possível a devida adequação com o modelo apresentado por (MORILLO, 2017).

Tabela 1: Valores de inércias usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))

Elemento	Motor (Polia)	Acoplamento (Trem)	Volante	Manivela 1	Manivela 2	Manivela 3	Manivela 4
Inércia ($kg.m^2$)	0.0350	0.0140	1.699	0.0468	0.0468	0.0468	0.0468

Tabela 2: Valores dos coeficientes de rigidez usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))

Rigidez	Kt_1	Kt_2	Kt_3	Kt_4	Kt_5	Kt_6
Valor ($N.m/rad$)	10.64	15.1	20.89	12.54	12.54	12.54

Tabela 3: Valores dos coeficientes de amortecimento relativo usados. (Adaptado de (MENDES, 2005))

Amortecimento	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Valor ($N.m.s/rad$)	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6

Em seguida, foram obtidas as frequências naturais do sistema. O código utiliza as matrizes de inércia e de rigidez para a construção de uma matriz de autovetores e outra de autovalores. A raiz quadrada dos termos da diagonal principal da matriz de autovalores fornece os valores das frequências naturais dos modos de vibrar do sistema de sete graus de liberdade. Para o sistema em questão, as matrizes de inércia e de rigidez são dadas conforme apresentado a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} 0.0350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.699 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0468 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0468 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0468 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0468 \end{pmatrix}$$

$$K_t = \begin{pmatrix} 10.64 & -10.64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.64 & 25.74 & -15.10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15.10 & 35.99 & -20.89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20.89 & 33.43 & -12.54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12.54 & 25.08 & -12.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12.54 & 25.08 & -12.54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.54 & 12.54 \end{pmatrix}$$

O sistema físico aqui analisado é descrito pela equação 3.31. De acordo com a teoria de vibrações mecânicas, para um sistema discreto linear com N graus de liberdade, a abordagem modal do problema prevê sua decomposição em uma parte associada ao tempo e outra associada ao espaço (PAULA; SAVI, 2017). O problema de autovalores é mostrado pela equação 4.1, em que U é a característica espacial da resposta. Essa equação surge como consequência da análise modal do sistema. A solução do problema de autovalores está relacionada a um polinômio característico cujas raízes são iguais às frequências naturais dos modos de vibração elevadas ao quadrado. O código desenvolvido é capaz de fornecer valores para as raízes do polinômio característico do problema de autovalores relacionado às matrizes de inércia e rigidez. Os valores dessas raízes e as frequências naturais associadas são mostradas na tabela 4.

$$([K_t] - \omega^2[M])U = 0 \quad (4.1)$$

Tabela 4: Tabela de raízes do polinômio característico e frequências naturais.

Modo de Vibração	1	2	3	4	5	6	7
Raízes do Polinômio Característico	0	42.22	170.25	318.61	710.08	995.43	1981.25
Frequências Naturais (rad/s)	0	6.50	13.05	17.84	26.64	31.55	44.51
Frequências Naturais (Hz)	0	1.03	2.08	2.84	4.24	5.02	7.08
Frequências Naturais (rpm)	0	62.05	124.60	170.45	254.46	301.28	425.05

Uma vez obtidas as frequências naturais do sistema, pode ser construído um diagrama de Campbell para determinar onde ocorrem excitações em harmônicos das frequências de operação. Para a obtenção do diagrama, foram traçadas linhas horizontais para as frequências naturais obtidas. Em seguida, foram criadas retas entre pontos de modo que o primeiro ponto de todas as retas era a origem do sistema de coordenadas cartesianas, enquanto o segundo ponto era aquele em que a abscissa era igual à ordenada vezes n , em que n é o número da harmônica. Desse modo, foi desenvolvido um diagrama de Campbell com doze linhas inclinadas. A figura 4.1 mostra o diagrama construído para esse sistema. Nele, os locais de cruzamento entre as retas horizontais e as retas inclinadas indicam velocidades de rotação críticas do sistema, onde ocorre excitação próxima das frequências de ressonância do sistema de acordo com a velocidade de operação da máquina. É válido lembrar que mesmo que ambos os eixos cartesianos do diagrama de Campbell mostrem valores de frequência, as unidades nos dois eixos não são as mesmas. Enquanto a unidade do eixo das abscissas é o rpm , a unidade do eixo das ordenadas é o Hz .

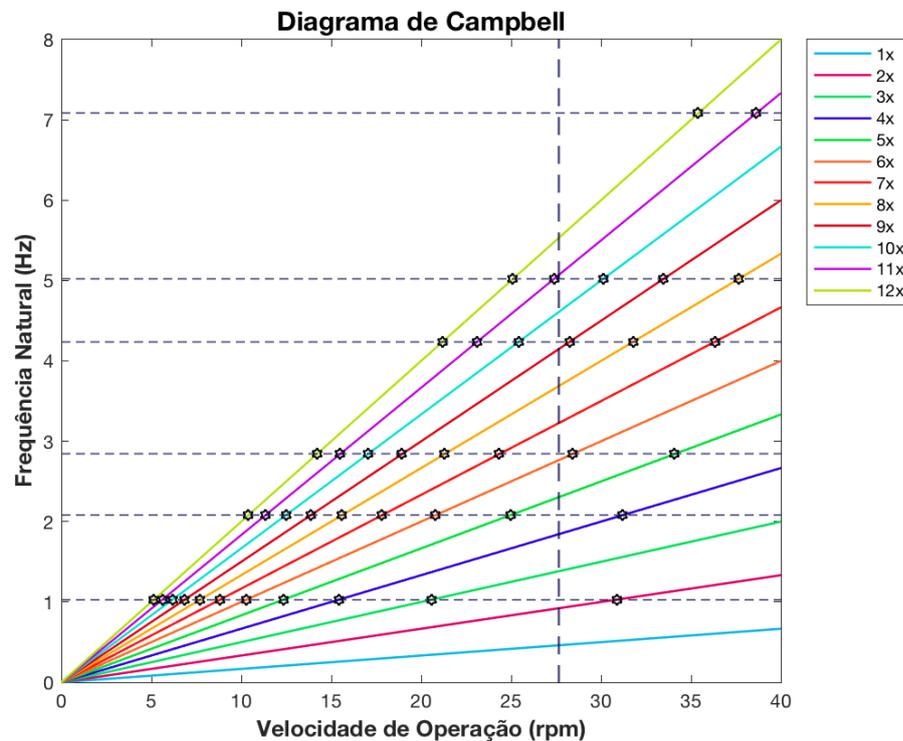


Figura 4.1: Diagrama de Campbell relacionado ao sistema apresentado com doze retas de harmônicos.

É possível enxergar por meio da reta vertical traçada na figura 4.1 que caso o sistema rotativo estudado funcionasse a uma frequência de $27.65 rpm$, as possibilidades de ocorrência de vibrações em amplitudes excessivas seriam grandes, visto que a essa velocidade de operação determinados harmô-

nicos fariam com que o sistema fosse excitado próximo das 3a, 4a e 5a frequências naturais. Como é possível enxergar na imagem, essa linha vertical passa próximo a pontos explicitados nas retas referentes aos harmônicos onze, seis e nove. Como se sabe, quando um sistema é excitado por um forçamento externo em uma de suas frequências de ressonância, que para sistemas reais de baixo amortecimento costumam ser próximas às suas frequências naturais, tremores de alta magnitude são provocados. Ainda assim, é válido lembrar que dificilmente todos os harmônicos mostrados na figura se manifestarão de fato no sistema, visto que isso depende de suas características físicas, porém o diagrama de Campbell é capaz de evidenciar velocidades mais críticas e outras mais favoráveis para operação.

Uma velocidade de operação em que deve se ter cuidado especial na análise de velocidades críticas de operação é a velocidade de 600 rpm. Ela marca a velocidade angular do campo magnético do motor assíncrono. Para as frequências naturais não nulas descobertas, não há nenhuma harmônica para a qual ocorra o cruzamento de retas para um valor próximo a 600 rpm do eixo das abscissas. Por esse motivo, não há a necessidade de considerar essa velocidade de operação como uma velocidade crítica do sistema, como costuma ocorrer em compressores alternativos movidos por motores elétricos assíncronos na realidade. A imagem 4.2 mostra o mesmo diagrama apresentado pela figura anterior, porém nela os eixos foram expandidos de modo que é possível enxergar a linha vertical na marca de 600 rpm no eixo das abscissas. Como é possível observar, os pontos de encontro entre as linhas horizontais com as retas coloridas estão muito distantes da linha vertical traçada, o que indica que a frequência de operação de 600 rpm não deve ser julgada como uma velocidade crítica. É válido lembrar aqui que na imagem 4.2, as retas horizontais estão baixas tendo em vista que os valores de rigidez utilizados são consideravelmente baixos e não consistem em valores reais.

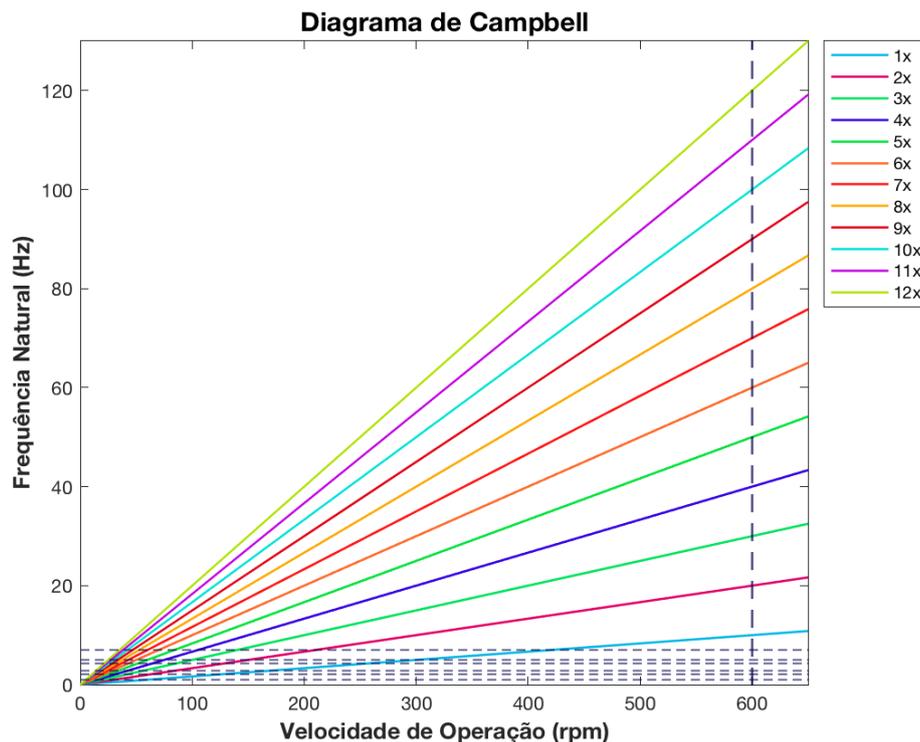


Figura 4.2: Diagrama de Campbell do sistema apresentado com reta vertical em 600 rpm para avaliação de frequências críticas.

O código desenvolvido também foi capaz de gerar gráficos da resposta no tempo para o sistema sem forçamento externo, quando a condição inicial de deslocamento de uma das inércias é diferente de zero. Para tanto, a primeira inércia foi colocada com uma condição inicial de deslocamento igual a 10 radianos, enquanto todas as outras condições iniciais se mantiveram nulas. A imagem 4.3 mostra essa resposta no tempo de 0 a 7 segundos para a sétima coordenada independente. Além disso, é mostrado o espaços de fase para o mesmo intervalo de tempo para a mesma coordenada. A resposta do sistema ocorre como o esperado para o modelo apresentado, indicando que o código foi capaz de

simular bem esse modelo. É possível observar que a resposta do sistema se assemelha a uma vibração livre subamortecida.

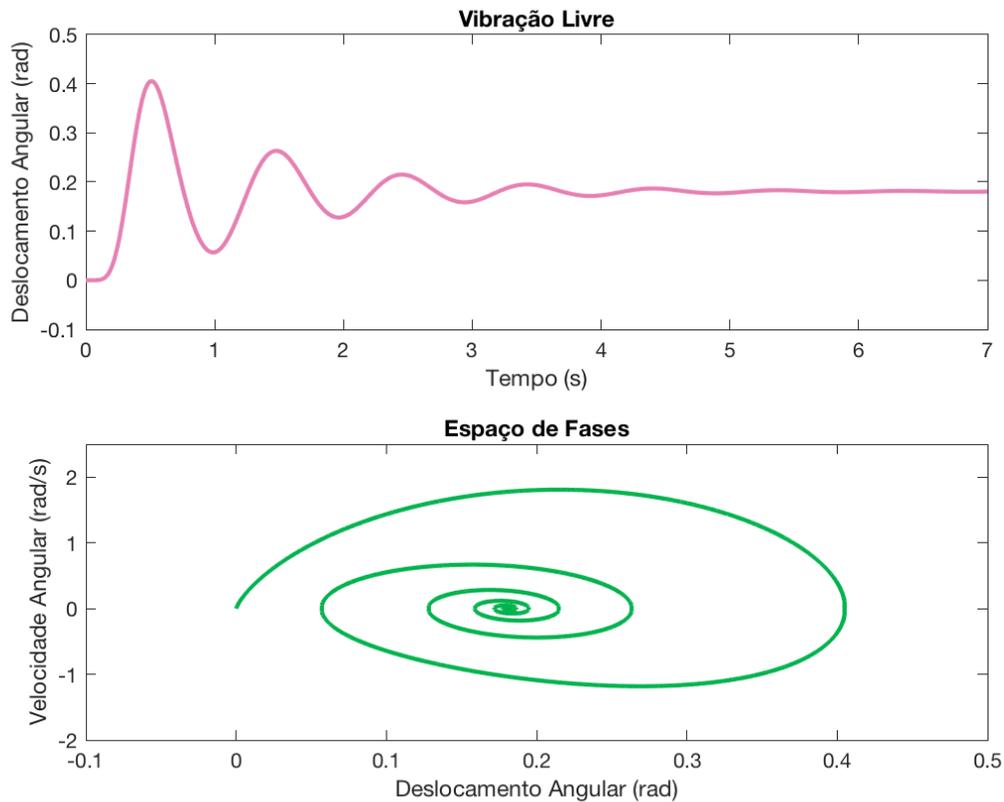


Figura 4.3: Resposta da sétima coordenada independente para o sistema sem forçamento em uma condição inicial de deslocamento diferente de zero na primeira coordenada.

O trabalho de (MENDES, 2005), utilizado como uma das referências desse trabalho, fornece uma sequência de medição de pressão no interior do cilindro do motor de combustão interna. Essa sequência foi utilizada nesse trabalho para desenvolver curvas de momento torçor no sentido oposto ao torque de excitação do motor elétrico assíncrono. Por meio do modelo matemático apresentado no trabalho aqui desenvolvido para as forças que atuam nas bielas do virabrequim e utilizando também o conjunto de dados de pressão mencionado, foi possível gerar curvas de torque para os cilindros da árvore de manivelas. O trabalho de (MENDES, 2005) apresenta em seu modelo de sistema rotativo de motor de combustão interna seis cilindros responsáveis por prover torque ao eixo rotativo do virabrequim. Já o sistema apresentado nesse projeto de graduação só prevê quatro cilindros de compressão. A imagem 4.5 mostra curvas de torque idênticas às obtidas por (MENDES, 2005) em seu trabalho. Essas curvas foram desenvolvidas por um dos códigos desenvolvidos nesse projeto de graduação. Além disso, elas foram usadas para a obtenção das curvas de torque utilizadas nesse trabalho, uma vez que o trabalho de (MORILLO, 2017) não apresentava dados experimentais de pressão de modo que pudessem ser obtidas curvas de torque associadas a um compressor alternativo real.

No código computacional foram introduzidas as relações entre as forças, a pressão e os deslocamentos angulares. A equação 3.17 foi usada para a determinação da série de torques, que consiste no cálculo do torque como a multiplicação da força tangencial à manivela multiplicada pela distância do ponto de aplicação da força ao centro de rotação do sistema. Como exposto no modelo matemático apresentado, o valor dessa força tangencial é dependente do deslocamento angular do mecanismo biela-manivela. Portanto, a interpretação do torque como a multiplicação da componente tangencial à manivela da força motora, que varia ao longo do tempo, pelo braço de alavanca, forneceu os valores usados para a obtenção da imagem 4.5. Por meio desses vínculos, o programa é capaz de desenvolver gráficos para o torque, que varia ao longo de um único ciclo completo. A figura 4.4 mostra um pico de

pressão construído por meio do conjunto de dados extraído do trabalho de (MENDES, 2005), em *bar*. Os dados estão relacionados a uma curva de combustão e, portanto, não estão diretamente relacionados a um compressor alternativo. Ainda assim, esses dados permitem uma análise qualitativa do modelo de compressor mostrado na figura 3.1. Já a figura 4.5 mostra as curvas de torque resistivo dos seis cilindros do modelo de (MENDES, 2005) ao longo do tempo, em *N.m*, fornecidas como resultado do código desenvolvido. O desenvolvimento desse código constituiu o primeiro passo para a elaboração de um segundo código que foi usado para simular o sistema rotativo do compressor alternativo de maneira completa, com todos seus forçamentos. Dessa forma, foram obtidas as curvas de torque dos cilindros ao longo do tempo para um ciclo completo do virabrequim.

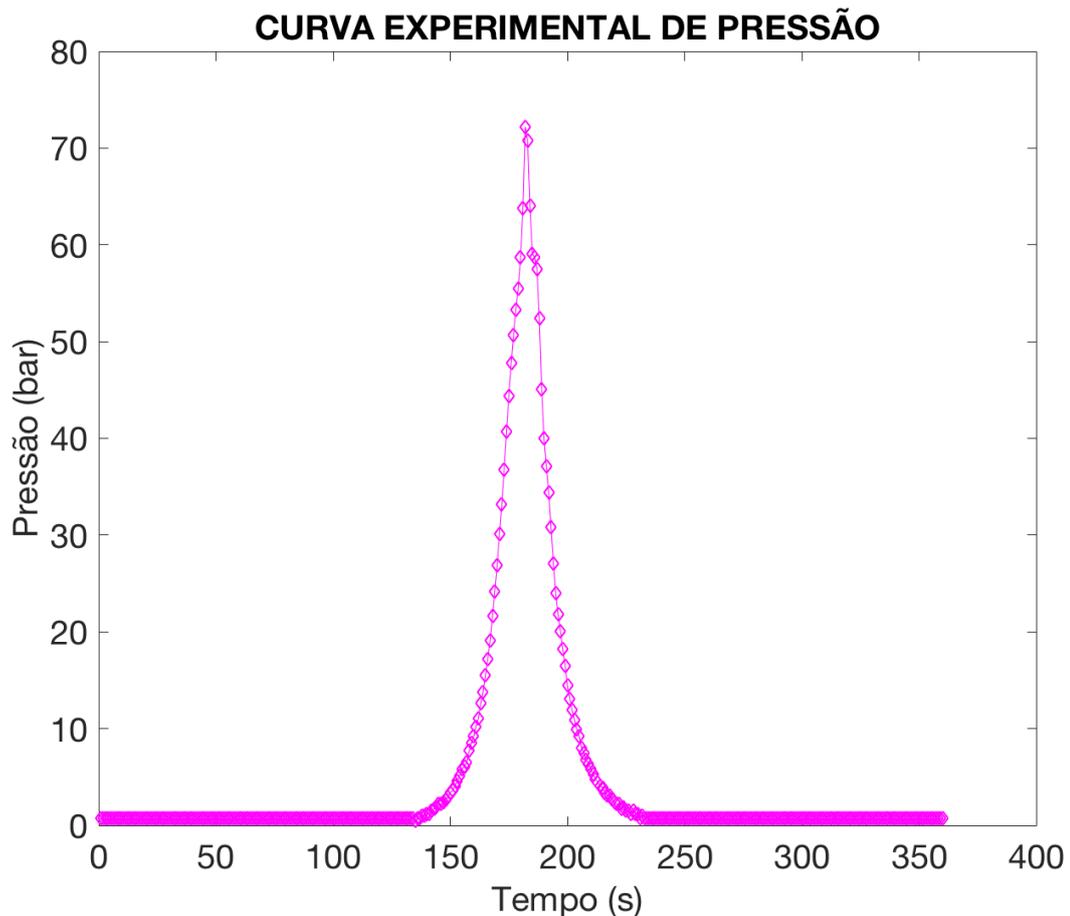


Figura 4.4: Curva experimental de pressão obtida por meio de uma série de medições fornecida em (MENDES, 2005).

Por meio das curvas de torque obtidas, foram encontradas séries de Fourier com padrão semelhante em magnitude de torque ao longo do tempo, em relação às curvas da figura 4.5. A obtenção dessas séries de Fourier também ocorreu numericamente. Para tanto, foi usado um comando do Matlab chamado “*cftool*”. Seu nome é uma abreviatura para “*Curve Fitting Tool*”, que é uma ferramenta usada para ajustar curvas. Uma vez aberta a ferramenta de ajuste, o procedimento utilizado para encontrar as constantes da série de Fourier foi escolher o vetor de variação angular de um ciclo do virabrequim como o eixo das abscissas e um vetor de torque dos cilindros como o eixo das ordenadas. É então pedido que seja escolhido o tipo de ajuste. As opções variam desde a possibilidade de interpretar esse conjunto de dados como uma função polinomial $f(x)$ até a interpretação como uma função exponencial ou uma série de Fourier, dentre outras alternativas.

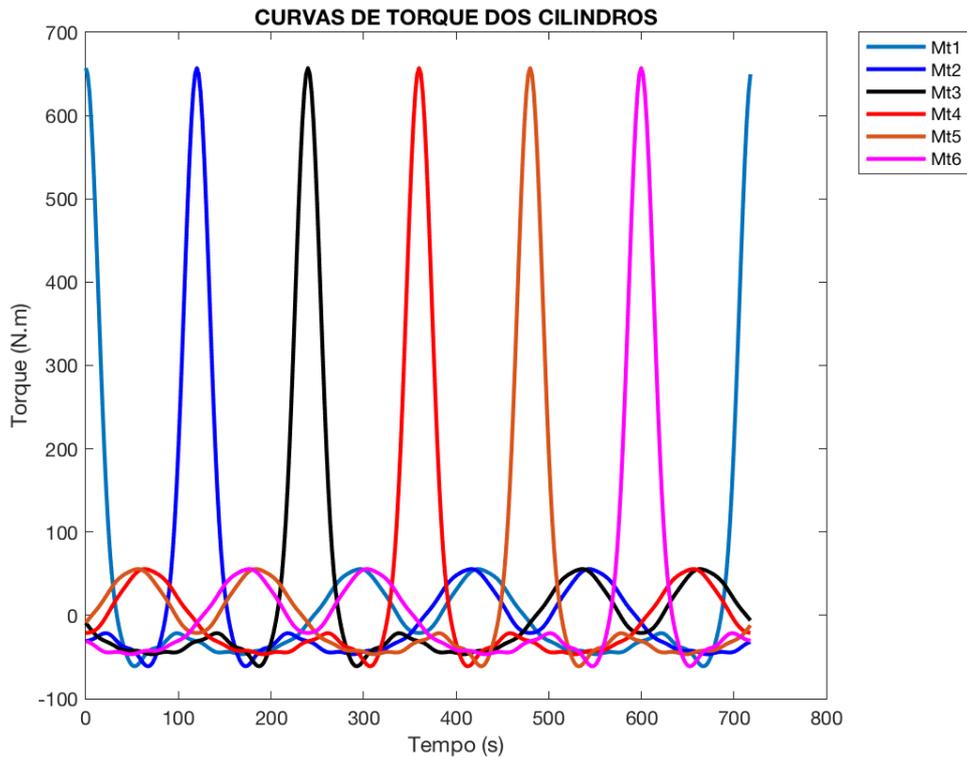


Figura 4.5: Curvas de torque desenvolvidas pelo código computacional para umas das séries de pressão fornecidas em (MENDES, 2005).

Pode ser notado que as curvas de torque mostradas na figura 4.5 possuem um padrão de periodicidade. Portanto, se forem consideradas as características oscilatórias e periódicas dessas curvas, é possível concluir que o melhor ajustamento para as curvas de torque dos cilindros é o ajuste de acordo com séries de Fourier. A *toolbox* “*cftool*” pede ao usuário o número de termos da série, uma vez escolhido o tipo de função segundo a qual os vetores serão ajustados. Nesse sentido, foi escolhido o maior número de termos possível que a ferramenta possibilitava para que fosse obtido o melhor resultado possível de acordo com as possibilidades da *toolbox*. Dessa forma, foram escolhidos oito termos. Considerando a formulação matemática mostrada anteriormente para o torque dos cilindros de compressão, o resultado do ajuste de curva é justamente a obtenção de valores de A_0 , A_n , B_n e ω para a equação 4.2, que é equivalente à equação 3.37, também apresentada previamente. A diferença entre as equações está no fato de que a nova equação mostra a série em termos de senos e cossenos em vez de exponenciais complexas. Em posse dessas constantes, é possível traçar curvas de torque para um vetor de tempo de tamanho superior àquele traçado na figura 4.5, que variava de acordo com o movimento de rotação do virabrequim para um único período. Desse modo, passa a ser possível utilizar esses forçamentos para a simulação do comportamento do virabrequim de modo a introduzir os forçamentos dos cilindros de compressão. As tabelas 5 e 6 mostram os valores das constantes A_0 , A_n , B_n e ω , obtidas pelo ajuste de curva. Já a equação 4.3 mostra a série de Fourier completa em termos de senos e cossenos com todos seus elementos. Por último, a imagem 4.6 mostra a comparação entre a curva de torque do cilindro construída por meio do modelo matemático apresentado e seu ajuste de curva. A curva escolhida para ser ajustada foi a terceira curva da imagem 4.5, isto é, a curva em cor preta.

$$b(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^8 A_n \cos(nt\omega) + \sum_{n=0}^8 B_n \sin(nt\omega) \quad (4.2)$$

Tabela 5: Valores das constantes A_n e B_n para a curva ajustada.

Número do Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	-56.87	69.82	-27.90	19.65	20.74	-32.40	37.46	-32.69
B_n	37.97	-57.35	51.40	-84.11	65.99	-51.89	23.83	-13.43

Tabela 6: Valores das constantes b_0 e ω para a curva ajustada.

A_0	45.4
ω	0.001159

$$\begin{aligned}
 b(t) = & 22.7 - 56.87\cos(0.001159t) + 37.97\sin(0.001159t) + 69.82\cos(2(0.001159t)) - \\
 & - 57.35\sin(2(0.001159t)) - 27.90\cos(3(0.001159t)) + 51.40\sin(3(0.001159t)) + \\
 & + 19.65\cos(4(0.001159t)) - 84.11\sin(4(0.001159t)) + 20.74\cos(5(0.001159t)) + \\
 & + 65.99\sin(5(0.001159t)) - 32.40\cos(6(0.001159t)) - 51.89\sin(6(0.001159t)) + \\
 & + 37.46\cos(7(0.001159t)) + 23.83\sin(7(0.001159t)) - 32.69\cos(8(0.001159t)) - \\
 & - 13.43\sin(8(0.001159t))
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

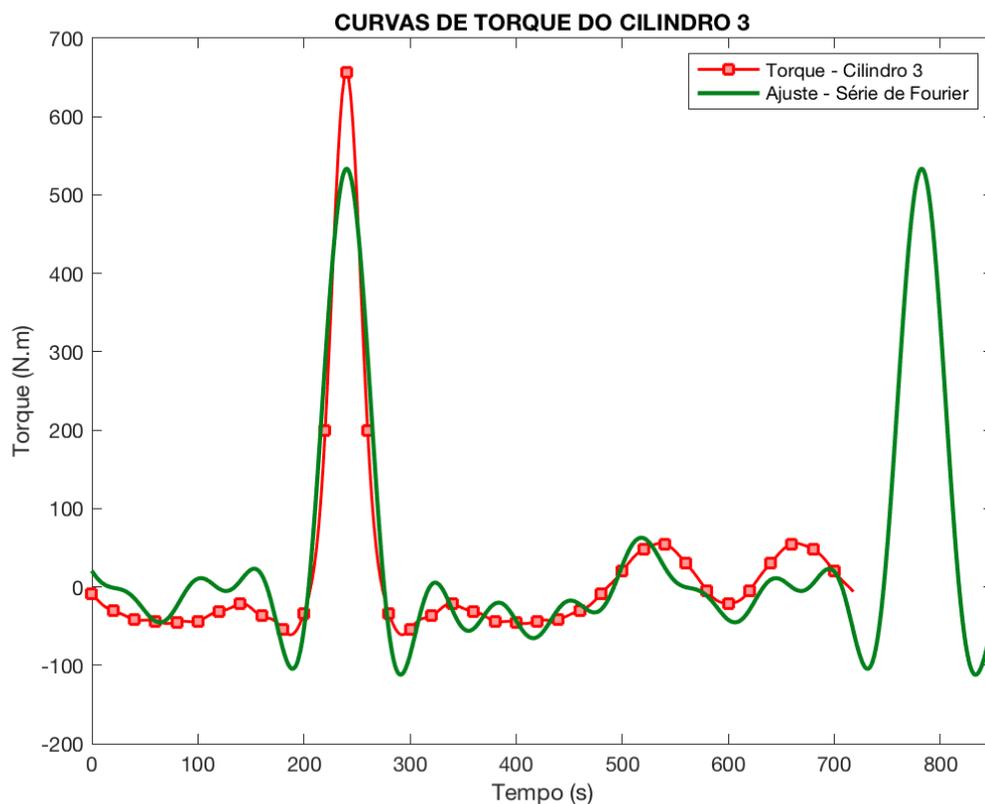


Figura 4.6: Comparação entre curva de torque obtida pelo modelo matemático e seu ajuste de curva de acordo com uma série de Fourier.

Tal como é possível observar na imagem [4.6](#), o ajuste de curva não ficou exatamente igual à curva construída anteriormente para o torque no terceiro cilindro do motor de combustão interna do trabalho de [\(MENDES, 2005\)](#) como era o objetivo. Para que fosse obtido um resultado melhor, seria necessário que o ajuste promovido pelo comando “*cftool*” disponibilizasse a opção de uso de mais termos para a série de Fourier. Um ajuste realizado por um código construído manualmente sem o uso da *toolbox* em questão permitiria resultados melhores. De acordo com o trabalho de [\(MENDES, 2005\)](#), uma expansão em 24 termos seria suficiente para a obtenção de resultados precisos. Ainda assim, a série obtida apresenta o mesmo comportamento da curva obtida pelo modelo matemático apresentado, de modo a exibir um único grande pico em um ciclo e algumas outras oscilações de menor magnitude. Assim como a curva usada como base para a obtenção da curva ajustada, a série de Fourier obtida se manifesta de maneira periódica e por esse motivo, além de seu perfil semelhante à curva original, ela foi considerada como uma boa aproximação para as curvas de torque obtidas anteriormente e mostradas na figura [4.5](#). A escolha pela curva associada ao terceiro cilindro do modelo de [\(MENDES, 2005\)](#) foi arbitrária e, a princípio, qualquer uma das curvas obtidas como resultado poderiam ser utilizadas como base de replicação para as demais. Uma vez obtida essa curva, foi obtido numericamente seu período e então novas curvas de torque foram criadas para a representação do comportamento temporal do forçamento dos demais cilindros no sistema rotativo. Para isso, as três novas curvas construídas tendo como base o ajuste da curva de torque do terceiro cilindro do modelo de [\(MENDES, 2005\)](#) foram desenvolvidas por meio da defasagem em um quarto de período em relação ao ajuste original de maneira ordenada. A imagem [4.7](#) mostra a curva original obtida pelo ajuste e as demais curvas implementadas no código de simulação defasadas em relação a ela. Já a figura [4.8](#) mostra as mesmas curvas no mesmo plano cartesiano de acordo com forma como são introduzidas no sistema rotativo simulado.

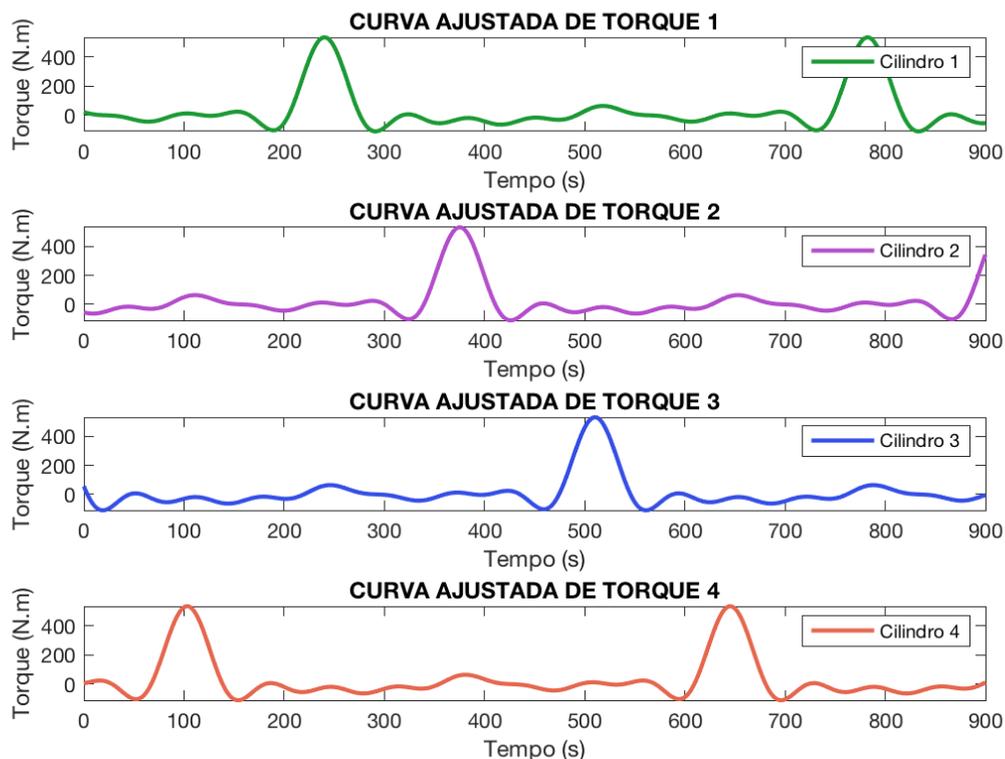


Figura 4.7: Curvas de torque ajustadas e defasadas em um quarto de período em relação às curvas adjacentes.

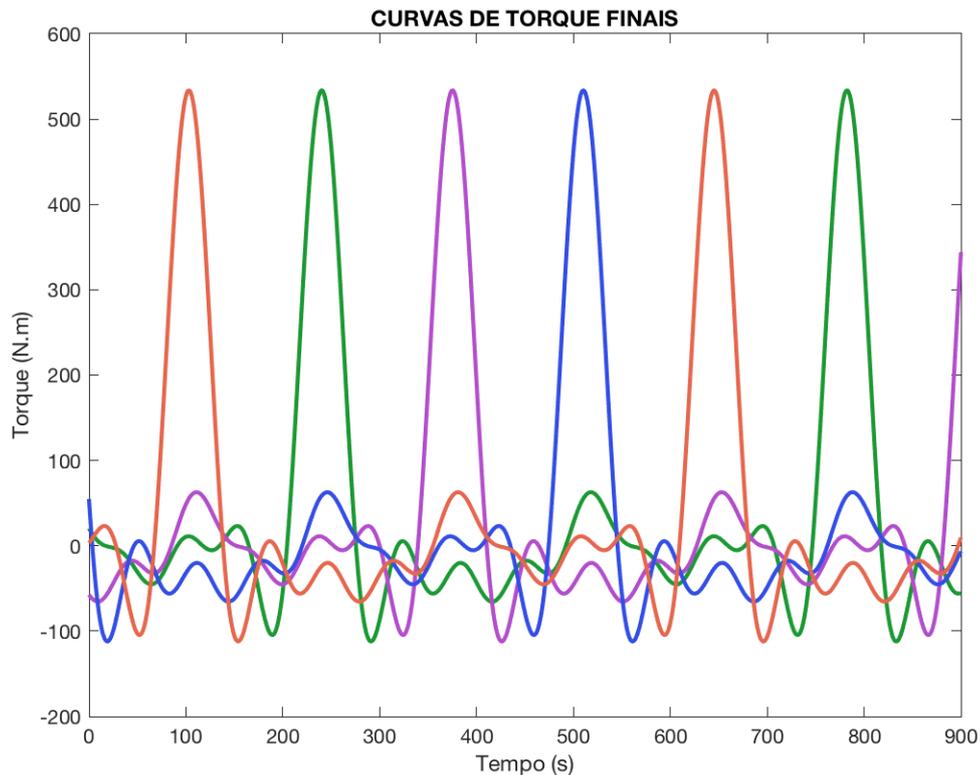


Figura 4.8: Curvas de torque ajustadas de acordo com suas entradas no código desenvolvido.

Uma vez em posse das quatro expressões para os torques resistivos dos cilindros sobre o eixo rotativo do sistema, é possível implementar um código final capaz de simular o comportamento do virabrequim já com todos seus forçamentos. Para tanto, a introdução do forçamento do motor no código foi feita como uma constante, de modo a representar o valor do torque do motor assíncrono sobre o eixo em rotação já em seu estado permanente. Dessa forma, foram traçados os gráficos do deslocamento angular da sétima coordenada do sistema no tempo. Além disso, foi obtido um segundo gráfico que mostra a variação da velocidade angular dessa mesma coordenada para o mesmo período de tempo. Esses resultados podem ser vistos nas figuras 4.9 e 4.10. Enquanto a figura 4.9 mostra a resposta do sistema para um forçamento do motor elétrico igual a 200 N.m , a imagem 4.10 demonstra um produto semelhante relacionado ao código implementado, porém com oscilações maiores, de modo a alcançar velocidades inferiores em relação à figura 4.9, porém ainda seguindo uma tendência crescente. O programa que gerou a imagem 4.10 utilizou um forçamento do motor igual a 100 N.m .

Os resultados obtidos foram consistentes, ainda que o comportamento esperado fosse de fato um deslocamento angular continuamente crescente em um único sentido, porém acompanhado da estabilização da velocidade de rotação em um determinado patamar. Como é possível observar em ambas as imagens, a velocidade não é estabilizada em momento algum. Ao contrário, ela permanece crescente assim como o deslocamento angular. No primeiro caso, depois de um tempo um pouco superior a um ciclo, a velocidade já atinge valores extremamente altos. Já na segunda imagem, a velocidade atingida após 1000 segundos não é tão alta quanto àquela alcançada na figura 4.9, mas ainda assim ela já chega a se aproximar a valores significativamente altos. Mesmo consideradas essas diferenças com o que era esperado, os resultados obtidos são sólidos, uma vez que não há problemas nas equações ou na implementação computacional. Os resultados parecem não ser condizentes com a realidade mas são consistentes com o modelo e com os parâmetros considerados na simulação.

Como explicitado anteriormente, a diferença entre ambas as figuras foi somente no valor do torque constante do motor introduzido no sistema. O resultado dessa variação é um comportamento menos oscilante da velocidade para um torque mais alto, enquanto no segundo caso, quando o torque relacionado ao motor elétrico assíncrono era inferior, a oscilação da magnitude da velocidade angular

foi maior. A combinação dos comportamentos do deslocamento e da velocidade angular pode ser vista pelo espaço de fases mostrado na figura 4.11. Como é possível enxergar, ambos os parâmetros físicos são crescentes, porém a velocidade apresenta um padrão oscilatório como já percebido nas figuras 4.9 e 4.10.

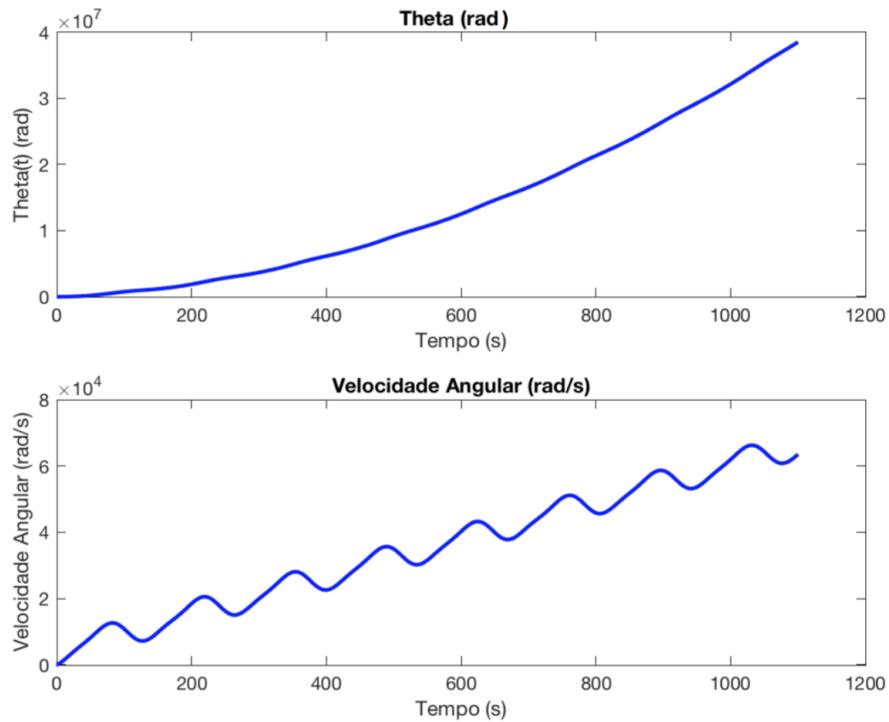


Figura 4.9: Deslocamento angular e velocidade angular da sétima coordenada do sistema para forçamento do motor igual a 200 N.m.

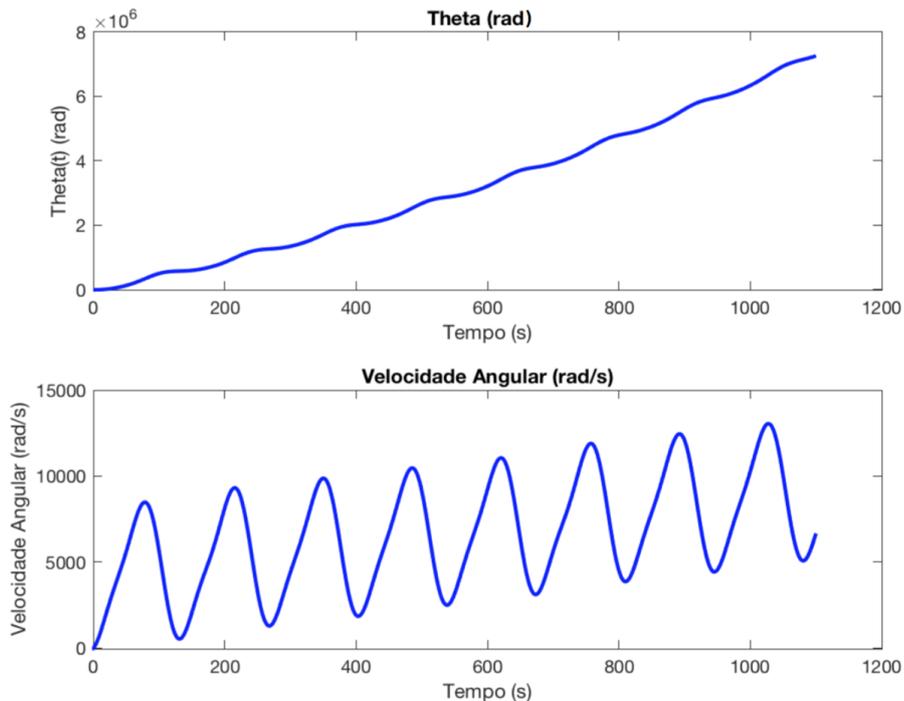


Figura 4.10: Deslocamento angular e velocidade angular da sétima coordenada do sistema para forçamento do motor igual a 100 N.m.

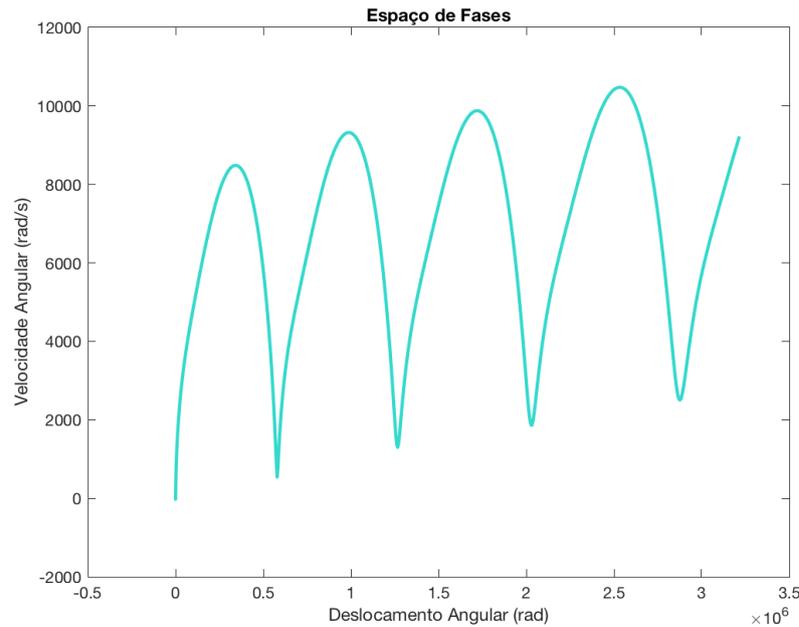


Figura 4.11: Espaço de fases do sistema para forçamento do motor igual a 100 N.m.

Considerando que os resultados esperados não foram alcançados, devem ser pensadas nas características do sistema que não foram representadas de forma correta no modelo. Seria possível responsabilizar os valores dos momentos de inércia e dos coeficientes de amortecimento e rigidez utilizados, que fogem da realidade, visto que sofreram várias adaptações para implementação. Ainda assim, é possível replicar que foram realizados testes com os valores reais dados pelo trabalho de (MENDES, 2005) e os resultados foram semelhantes. Outra hipótese que poderia ser levantada está relacionada ao questionamento em relação à validade dos forçamentos dados pelas séries de Fourier e sua semelhança com os torques relacionados aos cilindros de compressão. Contudo, de acordo com a imagem 4.6, é possível notar que a aproximação, ainda que não estivesse perfeitamente encaixada com a curva dada no trabalho de (MENDES, 2005) e aqui replicada, representa bem o comportamento do torque sobre as manivelas, visto que possui somente um grande pico durante um ciclo e é periódica. Uma última possibilidade a ser discutida está relacionada à maneira como o torque relacionado ao motor elétrico assíncrono foi introduzido no modelo. Esse forçamento foi pensado como um valor constante considerando uma condição de regime permanente do motor. É possível pensar que somente um modelo diferente para o torque do motor, no qual ele não se mantém constante ao longo do tempo, seja capaz de equilibrar o torque dos cilindros de modo a produzir uma velocidade de rotação constante que se mantenha assim ao longo do tempo. Desse modo, passa a ser considerada a possibilidade de introduzir o torque do motor como uma função da velocidade de rotação constante desejada para o virabrequim.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÕES

Foi apresentado um modelo de vibrações torcionais para um sistema representativo de um eixo rotativo de compressor alternativo. Para o desenvolvimento desse modelo, o sistema rotativo foi dividido em diferentes elementos de inércia, associando cada um deles a uma coordenada independente diferente. Uma vez escolhidos os valores dos momentos de inércia relacionados a cada um desses componentes e adotados coeficientes de rigidez relacionados às unidades do sistema, foi possível encontrar frequências naturais. A determinação dessas frequências possibilitou a construção de diagramas de Campbell que se mostraram úteis no sentido de avaliar faixas de operação seguras para o compressor. Vale ressaltar que como os valores de inércia e rigidez adotados não são reais, a análise conduzida forneceu resultados qualitativos.

Já na análise dinâmica do sistema, foram introduzidos forçamentos de caráter excitatório e resistivo em alguns de seus elementos de inércia. Enquanto o torque de entrada que fornece energia ao sistema e que está relacionado ao motor elétrico assíncrono foi introduzido como um valor constante, os torques resistivos relacionados aos cilindros de compressão foram introduzidos por meio de séries de Fourier que simulam o comportamento oscilatório e periódico desse tipo de forçamento. O código implementado foi capaz de fornecer resultados de deslocamento e velocidade angulares ao longo do tempo para as coordenadas do sistema. Nesse sentido, os resultados obtidos não foram condizentes com o comportamento esperado para o sistema, visto que era imaginado que a velocidade angular das coordenadas atingisse um valor constante em regime permanente e a mesma ficou variando com tendência de crescimento. Dessa forma, foi desenvolvido um código operacional que gerou resultados satisfatórios. Contudo, foi obtido um resultado que não é visualizado na realidade, que é o resultado relacionado à velocidade angular do sistema. Acredita-se que este comportamento tenha sido obtido pela consideração de um torque de entrada constante do motor elétrico. Possivelmente, é necessária a consideração de um torque que dependa do valor de velocidade de operação desejada.

Por fim, é possível dizer que com excessão da dinâmica do motor elétrico, os demais elementos foram bem representados pelo modelo. A implementação computacional foi realizada com sucesso e o programa desenvolvido será utilizado como base para trabalhos futuros com as modificações que forem necessárias para melhor representar o sistema real.

Referências Bibliográficas

- ALIAKBARI, K.; SAFARZADEH, N.; MORTAZAVI, S. Analysis of the crankshaft failure of wheel loader diesel engine. *International Journal of Engineering*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [2](#).
- BASSHUYSSEN, R.; SCHÄFER, F. *Internal Combustion Engine Handbook: Basics, Components and Perspectives*. [S.l.]: SAE International, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [ii](#) e [18](#).
- BLOCH, H. P. *A practical guide to compressor technology*. [S.l.]: Wiley, 2010. Citado 6 vezes nas páginas [ii](#), [1](#), [7](#), [8](#), [10](#) e [11](#).
- BOYCE, M. P. *Gas turbine engineering handbook*. 2. ed. [S.l.]: Gulf Publishing Company, 2002. Citado 3 vezes nas páginas [ii](#), [12](#) e [14](#).
- CORBO, M.; COOK, C. P. Practical design against torsional vibration. Texas AM University. Turbomachinery Laboratories, 1996. Citado 4 vezes nas páginas [ii](#), [12](#), [13](#) e [14](#).
- DOUGHTY, S. *Mechanics of Machines*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 1988. Citado na página [1](#).
- FITZGERALD, A. E.; UMANS, S. *Electric machinery*. 6. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [ii](#), [26](#) e [27](#).
- GIAMPAOLO, T. *Compressor handbook principles and practice*. [S.l.]: Fairmont Press, 2010. Citado 7 vezes nas páginas [ii](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#), [10](#) e [11](#).
- GRABCAD. *Crankshaft for automobile engine*. 2019. <https://grabcad.com/library/crankshaft-165>. Acessado em: 23 de junho de 2019. Citado 2 vezes nas páginas [ii](#) e [2](#).
- HANLON, P. C. *Compressor handbook*. Norwich, NY: Knovel, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [ii](#) e [12](#).
- HUGHES, A. *Electric Motors and Drives: Fundamentals, Types and Applications*. 3. ed. [S.l.]: Newnes, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [25](#) e [26](#).
- MENDES, A. S. Desenvolvimento e validação de metodologia para análise de vibrações torcionais em motores de combustão interna. Universidade Estadual de Campinas, 2005. Citado 16 vezes nas páginas [ii](#), [iii](#), [iv](#), [3](#), [22](#), [23](#), [24](#), [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [37](#), [38](#), [39](#), [41](#) e [44](#).
- MORILLO, A. V. Dynamics, torsional vibration and fatigue in reciprocating compressor of double-acting. Universidade Estadual de Campinas, 2017. Citado 15 vezes nas páginas [ii](#), [2](#), [3](#), [4](#), [6](#), [7](#), [12](#), [17](#), [25](#), [26](#), [28](#), [31](#), [32](#), [33](#) e [37](#).
- PAULA, A.; SAVI, M. A. *Vibrações mecânicas*. 1. ed. [S.l.]: LTC, 2017. Citado na página [34](#).
- RABELO, L. M.; MACIEL, R. M. *Compressores*. 1. ed. [S.l.]: IEL-Regional, 2009. Citado 3 vezes nas páginas [ii](#), [6](#) e [7](#).
- SELEGATTO, L. T. Análise dinâmica de um mecanismo biela-manivela com folgas nas juntas pino-pistão e pistão-cilindro. Universidade Estadual de Campinas, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [ii](#), [9](#) e [17](#).
- STOJANOVIC, B.; GLISOVIC, J. *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*. [S.l.]: Elsevier, 2016. Citado na página [1](#).

SZENASI, F. R.; WACHEL, J. C. Analysis of torsional vibrations in rotating machinery. Texas AM University. Turbomachinery Laboratories, 1993. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [12](#).

TAYLOR, C. *The internal combustion engine in theory and practice*. [S.l.]: MIT Press, 1968. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas [ii](#), [18](#), [19](#) e [21](#).

VILLALVA, S. G. Análise de virabrequins automotivos utilizando modelos analíticos e flexíveis. Universidade Estadual de Campinas, 2014. Citado na página [3](#).

WACHEL, J.; TISON, J. Vibrations in reciprocating machinery and piping systems. Texas AM University. Turbomachinery Laboratories, 1994. Citado na página [2](#).

CAPÍTULO A

ANEXOS

A.1 CÓDIGOS MATLAB

```
%PROGRAMA PARA O CALCULO DAS VIBRACOES TORCIONAIS DE VIRABREQUINS
clear all; close all; clc
```

```
%Especificacao dos dados do motor
```

```
%Massas alternativas [kg]
```

```
ma = 2.378;
```

```
%Comprimento da biela [mm]
```

```
L = 207;
```

```
%Curso do pistao [mm]
```

```
s = 137;
```

```
%Diametro do pistao [mm]
```

```
d = 105;
```

```
%Sequencia de ignicao (entre colchetes, separado por espacos)
```

```
ord_ign= [1 5 3 6 2 4];
```

```
%Rotacao minima a ser considerada [rpm]:
```

```
rpm_min=1000;
```

```
%Rotacao maxima a ser considerada [rpm]:
```

```
rpm_max=2850;
```

```
%Intervalo entre rotacoes [rpm]:
```

```
int_rpm=50;
```

```
%Sub-estrutura pressao de combustao
```

```
(Curvas_Pressao_Combustao_612_260cv)
```

```
Step=(rpm_max-rpm_min)/int_rpm+1;
```

```
index_rotacao=1;
```

```
%Curva 1
```

```
rpm_inicial=rpm_min;
```

```
rpm_final=1100;
```

```
p=[0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,...
```

```
0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.7,0.5,0.7,...
```

```
0.7,1,1,1.2,1.2,1.5,1.7,1.9,2.2,2.2,2.4,2.7,2.9,3.4,3.6,4.1,4.6,...
```

```
5.1,5.8,6.1,6.5,7.7,8.5,9.2,10.2,11.1,12.6,13.8,15.5,17.2,19.1,...
```

```
21.6,24.2,26.9,30.1,33.2,36.8,40.7,44.4,47.8,50.7,53.3,55.5,58.7,...
```

```
63.8,72.2,70.8,64,59.1,58.7,57.5,52.4,45.1,40,37.1,34.4,30.8,27.1,...
```

```
24,21.8,20.1,18.2,16.5,14.5,13.1,11.9,10.9,9.9,9.2,8,7.5,6.8,6.3,...
```

```

        for j=1:length(ALFA)
            Mt(index_torque,j)=Mt(index_torque,j)+...
                abs(Cn(w))*exp(i*((w-1)/2)*(ALFA(j)-GAMA));
        end
    end
    index_torque=index_torque+1;
end
Mt=Mt+Cn(1);
Mt=Mt';
angulo=ALFA*180/pi;

subplot(2,1,1);plot(angulo,Mt(:,1),'-',angulo,Mt(:,2),'-',...
    angulo,Mt(:,4),'-k',angulo,Mt(:,6),'-r')
title('CURVAS DE TORQUE DOS CILINDROS')
xlabel('Tempo (s)') % eixo horizontal
ylabel('Torque dos cilindros (N.m)')
legend('Mt1','Mt2','Mt3','Mt4')

subplot(2,1,2);plot(p,'-md')
title('CURVA EXPERIMENTAL DE PRESSÃO')
xlabel('Tempo (s)') % eixo horizontal
ylabel('Pressão (bar)')

```

Step =

37

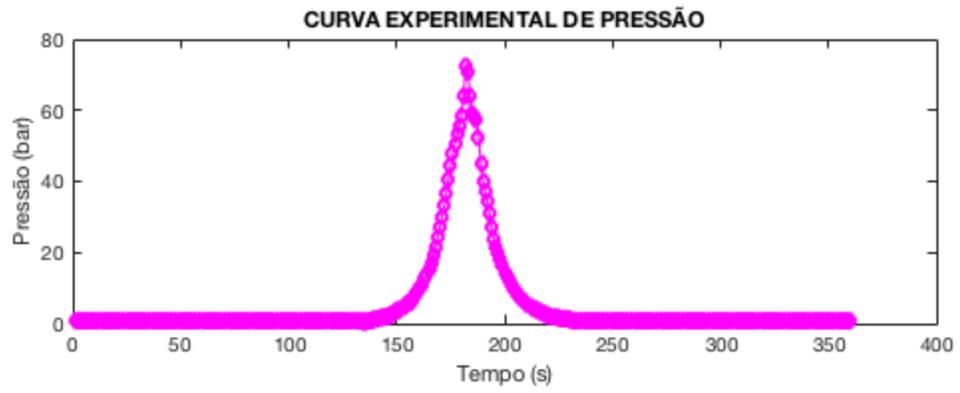
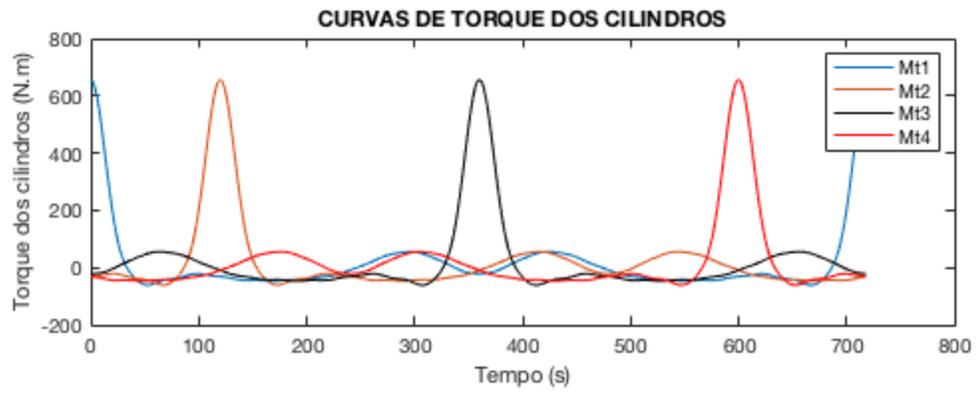
Step =

36

Step =

35

Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored



Published with MATLAB® R2019a

```

clc
clear all
close all
t=0:4:4100;
f1=(1/60).*t;
f2=(1/30).*t;
f3=(1/20).*t;
f4=(1/15).*t;
f5=(1/12).*t;
f6=(1/10).*t;
f7=(7/60).*t;
f8=(2/15).*t;
f9=(3/20).*t;
f10=(1/6).*t;
f11=(11/60).*t;
f12=(1/5).*t;
y = [4.24 5.02 7.08 2.08 2.84 2.08 2.84 4.24 5.02 7.08 7.08 5.02
4.24...
2.84 2.08 7.08 5.02 4.24 2.84 2.08 7.08 5.02 4.24 2.84 2.08
4.24 ...
2.84 2.08 2.08 2.84 2.84 2.08 2.08 1.03 1.03 1.03 1.03 1.03
1.03 ...
1.03 1.03 1.03 1.03 1.03 1.03 1.03];
x = [23.13 27.4 38.62 11.345 15.5 10.4 14.2 21.2 25.1 35.4 42.48
30.12...
25.44 17.04 12.48 47.2 33.46 28.26 18.93 13.86 53.1 37.65 31.8
21.3...
15.6 36.34 24.34 17.82 20.8 28.4 34.08 24.96 31.2 30.9 20.6
30.9 ...
20.6 15.45 12.36 10.3 8.83 7.725 6.86 6.18 5.62 5.15];
figure(1)
plot(t,f1,'color','#05B7E6','linewidth',1.2);
hold on
plot(t,f2,'color','#E30066','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f3,'color','#00E35B','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f4,'color','#3400E3','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f5,'color','#00E339','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f6,'color','#FF6A2A','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f7,'color','#FF1313','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f8,'color','#FFA800','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f9,'color','#E30014','linewidth',1.2);
hold on
plot(t,f10,'color','#00E3D6','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(t,f11,'color','#C300E3','linewidth',1.2);

```

```

hold on
plot(t,f12,'color','#AFE300','linewidth',1.2);%ok
hold on
plot(x,y,'kh');
yline(1.03,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
yline(2.08,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
yline(2.84,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
yline(4.24,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
yline(5.02,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
yline(7.08,'--','LabelHorizontalAlignment','left','linewidth',...
      0.8,'color','[0 0.0 0.3]');
xline(27.65,'--','LabelVerticalAlignment','top','linewidth',...
      1.2,'color','[0 0.0 0.3]');

axis([0 40 0 8]);
title('Diagrama de Campbell','fontsize',14);
ylabel('Frequência Natural (Hz)','FontWeight','bold','fontsize',12);
xlabel('Velocidade de Operação
       (rpm)','FontWeight','bold','fontsize',12);
legend('1x','2x','3x','4x','5x','6x','7x','8x','9x','10x','11x','12x',...
       'Location','NorthEastOutside','Orientation','vertical')
campbell=figure(1);
saveas(campbell,'campbell12.png','png')

```

```

%clear all; close all; clc

%Baseado no trabalho de Alexandre Schalch Mendes:

%Inércias:
I1=0.0350; %Inércia da polia; ---- MOTOR
I2=0.0140; %Inércia do trem de engrenagens; ---- ACOPLAMENTO
I3=1.699; %Inércia do volante;
I4=0.0468; %Inércia do 1o cilindro;
I5=0.0468; %Inércia do 2o cilindro;
I6=0.0468; %Inércia do 3o cilindro;
I7=0.0468; %Inércia do 4o cilindro;

%Coeficientes de rigidez:
K1=10.64; %Rigidez entre polia e trem de engrenagens;
K2=15.1; %Rigidez entre trem de engrenagens e 1o cilindro;
K3=20.89; %Rigidez entre volante e o 1o cilindro;
K4=12.54; %Rigidez entre 1o e 2o cilindros;
K5=12.54; %Rigidez entre 2o e 3o cilindros;
K6=12.54; %Rigidez entre 3o e 4o cilindros;

%Amortecimento (Aqui foi usado o valor do amortecimento absoluto
dos ...
%cilindros dado por (MENDES, 2005):

C1=6;
C2=6;
C3=6;
C4=6;
C5=6;
C6=6;

global N M K C f_0 cont forcamento invM A ...
t A0 A1 B1 A2 B2 A3 B3 A4 B4 A5 ...
B5 A6 B6 A7 B7 A8 B8 W_1 nn

N=7;
f_0 = 100;%Motor Elétrico
M=[I1,0,0,0,0,0,0,0,0,I2,0,0,0,0,0,0,0,I3,0,0,0,0,0,0,0,I4,0,0,0,0,0,0,...
0,0,I5,0,0,0,0,0,0,I6,0,0,0,0,0,0,I7];
K=[K1,-K1,0,0,0,0,0,-K1,K1+K2,-K2,0,0,0,0,0,-K2,K2+K3,-
K3,0,0,0,0,0,...
-K3,K3+K4,-K4,0,0,0,0,0,-K4,K4+K5,-K5,0,0,0,0,0,-K5,K5+K6,-
K6,0,...
0,0,0,0,-K6,K6];
C=0.1.*[C1,-C1,0,0,0,0,0,-C1,C1+C2,-C2,0,0,0,0,0,-C2,C2+C3,-C3,0,0,...
0,0,0,-C3,C3+C4,-C4,0,0,0,0,0,-C4,C4+C5,-C5,0,0,0,0,0,-
C5,C5+C6,...
-C6,0,0,0,0,0,-C6,C6];

invM=inv(M);

```

```

A=zeros (2*N,2*N);
A (1:N,N+1:2*N)=eye (N,N);
A (N+1:2*N,1:N)=-invM*K;
A (N+1:2*N,N+1:2*N)=-invM*C;

%Segunda Curva (Cilindro 3):

A0 =      22.7;
A1 =     -56.87;
B1 =      37.97;
A2 =      69.82;
B2 =     -57.35;
A3 =     -27.9;
B3 =      51.4;
A4 =      19.65;
B4 =     -84.11;
A5 =      20.74;
B5 =      65.99;
A6 =     -32.4;
B6 =     -51.89;
A7 =      37.46;
B7 =      23.83;
A8 =     -32.69;
B8 =     -13.43;
W_1=      0.01159;

%Autovalores e autovetores:
%A raiz quadrada dos valores da diagonal principal da matriz de
  autovalores
%fornece as frequências naturais do sistema:

[autovetor,autovalor]=eig (K,M);

%Tempo final igual a 0.1 segundo:

ti=0;
h=.001;
duracao=0.1;
tf=ti+duracao;
tempo=[ti:h:tf];
[ncol,nlin]=size (tempo);
np=duracao/h;

cont=1;
T=zeros (nlin,1);
forcamento=zeros (nlin,5);
Y=zeros (nlin,14);

dim=14;
t=ti;
yout=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
i=1;

```

```

tic
for jp=1:nlin
    y = yout;
    T(i)=t;
    Y(i,:)=y(1:dim);
    [yout]=rk4(nn,y,t,h,'eq2_GDL');
    t=t+h;
    i=i+1;
end
toc

figure(2)

plot(forcamento(:,1),forcamento(:,2),'color',[0.9 0 0],'linewidth',2)
hold on
plot(forcamento(:,1),forcamento(:,3),'color',[0.9 0.5
    0.7],'linewidth',2)
hold on
plot(forcamento(:,1),forcamento(:,4),'color',[0.5 0.9
    0.7],'linewidth',2)
hold on
plot(forcamento(:,1),forcamento(:,5),'color',[0.3 0
    0.7],'linewidth',2)
%Título do gráfico:
title('Torque dos Cilindros')
%Legenda
legend('Cilindro 1','Cilindro 2','Cilindro 3','Cilindro
    4','Location','...
    'NorthEastOutside','Orientation','vertical')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Torque (N.m)')

figure(1)

subplot(2,1,1);plot(T,Y(:,7),'b','linewidth',2)
%Título do gráfico:
title('Theta (rad)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Theta(t) (rad)')
hold on

subplot(2,1,2);plot(T,Y(:,14),'-b','linewidth',2)
%Título do gráfico:
title('Velocidade Angular (rad/s)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')
hold on

figure(3)
plot(Y(:,7),Y(:,14),'color',[0.2 0.85 0.8],'linewidth',2)
title('Espaço de Fases')
xlabel('Deslocamento Angular (rad)')
ylabel('Velocidade Angular (rad/s)')

```

```
Um=figure(1);  
Dois=figure(2);  
Tres=figure(3);  
  
saveas(Um, 'Figura_Desloc.png', 'png');  
saveas(Dois, 'Figura_Vel.png', 'png');  
saveas(Tres, 'Figura_Esp.png', 'png');
```

```

function [Yp] = eq2_GDL(T,Y)

global N M K C f_0 cont forcamento invM A t A0 A1 B1 A2 B2 A3 B3 A4
B4...
    A5 B5 A6 B6 A7 B7 A8 B8 W_1

te=T;
tau=135;
f_1=A0+A1*cos(T*W_1)+B1*sin(T*W_1)+A2*cos(2*T*W_1)+B2*sin(2*T*W_1)+...

    A3*cos(3*T*W_1)+B3*sin(3*T*W_1)+A4*cos(4*T*W_1)+B4*sin(4*T*W_1)+...

    A5*cos(5*T*W_1)+B5*sin(5*T*W_1)+A6*cos(6*T*W_1)+B6*sin(6*T*W_1)+...
    A7*cos(7*T*W_1)+B7*sin(7*T*W_1)+A8*cos(8*T*W_1)+B8*sin(8*T*W_1);
f_2=A0+A1*cos((T-tau)*W_1)+B1*sin((T-tau)*W_1)+A2*cos(2*(T-
tau)*W_1)+...
    B2*sin(2*(T-tau)*W_1)+A3*cos(3*(T-tau)*W_1)+B3*sin(3*(T-
tau)*W_1)+...
    A4*cos(4*(T-tau)*W_1)+B4*sin(4*(T-tau)*W_1)+A5*cos(5*(T-
tau)*W_1)+...
    B5*sin(5*(T-tau)*W_1)+A6*cos(6*(T-tau)*W_1)+B6*sin(6*(T-
tau)*W_1)+...
    A7*cos(7*(T-tau)*W_1)+B7*sin(7*(T-tau)*W_1)+A8*cos(8*(T-
tau)*W_1)+...
    B8*sin(8*(T-tau)*W_1);
f_3=A0+A1*cos((T-2*tau)*W_1)+B1*sin((T-2*tau)*W_1)+...
    A2*cos(2*(T-2*tau)*W_1)+B2*sin(2*(T-2*tau)*W_1)+...
    A3*cos(3*(T-2*tau)*W_1)+B3*sin(3*(T-2*tau)*W_1)+...
    A4*cos(4*(T-2*tau)*W_1)+B4*sin(4*(T-2*tau)*W_1)+...
    A5*cos(5*(T-2*tau)*W_1)+B5*sin(5*(T-2*tau)*W_1)+...
    A6*cos(6*(T-2*tau)*W_1)+B6*sin(6*(T-2*tau)*W_1)+...
    A7*cos(7*(T-2*tau)*W_1)+B7*sin(7*(T-2*tau)*W_1)+...
    A8*cos(8*(T-2*tau)*W_1)+B8*sin(8*(T-2*tau)*W_1);
f_4=A0+A1*cos((T-3*tau)*W_1)+B1*sin((T-3*tau)*W_1)+...
    A2*cos(2*(T-3*tau)*W_1)+B2*sin(2*(T-3*tau)*W_1)+...
    A3*cos(3*(T-3*tau)*W_1)+B3*sin(3*(T-3*tau)*W_1)+...
    A4*cos(4*(T-3*tau)*W_1)+B4*sin(4*(T-3*tau)*W_1)+...
    A5*cos(5*(T-3*tau)*W_1)+B5*sin(5*(T-3*tau)*W_1)+...
    A6*cos(6*(T-3*tau)*W_1)+B6*sin(6*(T-3*tau)*W_1)+...
    A7*cos(7*(T-3*tau)*W_1)+B7*sin(7*(T-3*tau)*W_1)+...
    A8*cos(8*(T-3*tau)*W_1)+B8*sin(8*(T-3*tau)*W_1);

forcamento(cont,:)= [te f_1 f_2 f_3 f_4];
cont=cont+1;

F=[f_0;0;0;-f_1;-f_2;-f_3;-f_4];

B=zeros(2*N,1);
B(N+1:2*N)=invM*F;
Yp = A*Y + B;
Yp=Yp';
end

```

```
function [yout]=rk4(nn,y,t,h,derivs)
    hh=h*0.5;
    h6=h./6.0;
    th=t+hh;
    dydt=feval(derivs,t,y);
    yt=y+(hh.*dydt)';
    dyt=feval(derivs,th,yt);
    yt=y+hh.*dyt';
    dym=feval(derivs,th,yt);
    yt=y+h.*dym';
    dym = dym+dyt;
    dyt=feval(derivs,t+h,yt);
    yout=y+h6.*(dydt+dyt+2.0*dym)';
```

Published with MATLAB® R2019a