

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ALEATÓRIOS
APLICADO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES

ISABELLA MARIA MARTINS DE SOUZA

ORIENTADOR: MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM GEOTECNIA

BRASÍLIA – DF, DEZEMBRO DE 2019

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ALEATÓRIOS
APLICADO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES**

ISABELLA MARIA MARTINS DE SOUZA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO, DSc (UnB)
(ORIENTADOR)**

**JUAN FELIX RODRIGUEZ REBOLLEDO, PhD (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**LETÍCIA PEREIRA DE MORAIS, MSc (UnB)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 12 DE DEZEMBRO DE 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA

SOUZA, ISABELLA MARIA MARTINS DE SOUZA
Método dos Elementos Finitos Aleatórios Aplicado na Análise de Estabilidade de Taludes
[Distrito Federal] 2019.
ix, 33 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2019)
Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.
1. Talude
2. Análise Probabilística
3. Análise de Estabilidade
4. RFEM
I. ENC/FT/UnB

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUZA, I.M. (2019). Método de Elementos Finitos Aleatórios Aplicado na Análise de Estabilidade de Taludes. Monografia de Projeto Final, Publicação G.PF-002/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 35 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Isabella Maria Martins de Souza

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Método de Elementos Finitos Aleatórios Aplicado na Análise de Estabilidade de Taludes.

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2019

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Isabella Maria Martins de Souza

SQN 310, Bloco E, apto 304 – Asa Norte

70756-050 - Brasília/DF - Brasil

RESUMO

Obras geotécnicas normalmente são estruturas de grande porte, como o caso de construção de barragens e a realização de corte e aterros de encostas de rodovias. Graves impactos na sociedade estão associados com esse tipo de obra, em que os riscos de falha podem gerar grandes perdas financeiras, ambientais e de vidas humanas. Assim, a análise da estabilidade de um talude e a verificação de sua probabilidade de falha é de extrema importância para evitar acidentes brutais. Por outro lado, esse tipo de obra geotécnica costuma ter uma variabilidade notável dos parâmetros de solos e rochas, o que ressalta a importância da análise probabilística no estudo de estabilidade. Neste projeto, serão apresentados três métodos para avaliar a probabilidade de falha de um talude: o método FOSM, o método das Estimativas Pontuais e o método Monte Carlo. Além disso, será apresentado o método dos Elementos Finitos Aleatórios, com o objetivo de indicar a influência da variabilidade espacial dos parâmetros geotécnicos na probabilidade de ruptura do talude. Foram obtidas probabilidades de falha em torno de 10^{-2} , que indicam um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999), apesar do Fator de Segurança de 1,5 obtido com os parâmetros médios ser considerado satisfatório (ABNT NBR 11682:2009). Esse fato mostra a importância de realizar análises probabilísticas. Sobre o estudo da variabilidade espacial dos parâmetros por meio da análise RFEM, pode-se destacar que baixos valores de comprimento de correlação entre os elementos resultaram em valores menores de probabilidade de ruptura.

Palavras chaves: Talude, Análise Probabilística, Análise de Estabilidade, RFEM.

ABSTRACT

Geotechnical structures usually have a large size, such as the construction of dams and the cutting and embankment of highway slopes. Serious impacts on society are associated with such works, where the risks of failure can lead to major financial, environmental and human life losses. Thus, analyzing the stability of a slope and verifying its probability of failure is extremely important to avoid brutal accidents. On the other hand, this type of geotechnical work usually has a remarkable variability of soil and rock parameters, which highlights the importance of probabilistic analysis in the stability study. In this project, we will present three methods for assessing the probability of failure of a slope: the FOSM method, the Point Estimates Method and the Monte Carlo method. In addition, the Random Finite Element Method will be presented, aiming to indicate the influence of spatial variability of geotechnical parameters on the slope rupture probability. Failure probabilities around 10^{-2} were obtained, which indicate an unsatisfactory performance level (USACE, 1999), although the Safety Factor of 1,5 obtained with the average parameters is considered satisfactory (ABNT NBR 11682: 2009). This fact shows the importance of performing probabilistic analyzes. Regarding the study of the spatial variability of the parameters through RFEM analysis, it can be highlighted that low values of correlation length between the elements resulted in smaller values of probability of rupture.

Keywords: Slope, Probabilistic Analysis, Stability Analysis, RFEM

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	2
1.2	OBJETIVOS.....	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1	TALUDES E ENCOSTAS	3
2.2	MÉTODO DO EQUILÍBRIO LIMITE	4
2.3	MÉTODOS PROBABILÍSTICOS	8
2.3.1	ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	10
2.3.2	FOSM	11
2.3.3	PEM.....	12
2.3.4	MONTE CARLO	14
2.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	14
2.5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ALEATÓRIOS	15
3	METODOLOGIA	19
3.1	ESTUDO DE CASO.....	19
3.2	METODOLOGIA PARA OBTENÇÃO DO FS	20
3.3	RFEM	21
4	RESULTADOS	24
4.1	ANÁLISE INICIAL	24
4.2	FOSM	26
4.3	PEM.....	27
4.4	MONTE CARLO	28
4.5	RFEM	29
4.6	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	32
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	33
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

a_L	Distância perpendicular do externo resultante força da água para o centro de rotação;
A_L	Forças externas de água resultantes;
c	Coesão total do solo;
C	Parâmetro adimensional coesão;
c'	Coesão efetiva do solo;
c_u	Coesão não drenada do solo;
D	Profundidade da fundação;
E	Forças normais horizontais entre as fatias;
E	Módulo de Young do solo;
$E[X]$	Esperança, valor esperado;
f	Desvio perpendicular da força normal do centro de rotação;
FEM	<i>Finit Elements Method</i> , Método dos Elementos Finitos;
FOSM	<i>First Order Second Moment</i> , Primeira Ordem Segundo Momento;
FS	Fator de Segurança;
H	Altura do talude;
h	Distância vertical do centro da base de cada fatia para a linha superior na geometria;
LEM	<i>Limit Equilibrium Method</i> , Método do Equilíbrio Limite;
m	Número de variáveis consideradas no método Monte Carlo;
N	Força normal total na base da fatia;
P	Pesos método PEM;
PEM	<i>Point Estimate Method</i> , Método das Estimativas Pontuais;
PF	Probabilidade de falha;
R	Raio para uma superfície de deslizamento circular;
RFEM	<i>Random Finit Elements Method</i> , Método dos Elementos Finitos Aleatórios;
S_m	Força de cisalhamento na base da fatia;
V_c	Coeficiente de variação;
W	Peso total da fatia de dimensões $b \times h$;

X	Forças de corte verticais entre as fatias;
x	Distância horizontal da linha central de cada fatia para o centro de rotação;
α	Ângulo entre a tangente ao centro da base de cada fatia e a horizontal;
β	Índice de confiabilidade;
β'	Distância inclinada através da base de uma fatia;
β''	Inclinação do talude;
γ_{sat}	Peso específico saturado do solo;
Θ_c	Comprimento de correlação espacial adimensional;
$\theta_{\text{In C}}$	Comprimento de correlação espacial;
μ	Média;
μ_w	Poropressão da água;
ν	Coefficiente de Poisson;
ρ_{xy}	Coefficiente de correlação
σ	Desvio Padrão;
σ^2	Variância;
σ_{xy}	Covariância;
σ_n	Esforço total normal na base de uma fatia;
φ'	Ângulo de atrito efetivo;
φ_u	Ângulo de atrito não drenado;
ω	Nível de confiança desejado do método Monte Carlo

LISTA DE TABELAS

Tabela 2:1 - Fatores de segurança mínimos para deslizamentos (ABNT NBR 11682:2009)....	3
Tabela 2:2 - Nível de segurança desejado contra danos a vidas humanas (ABNT NBR 11682:2009)	4
Tabela 2:3 - Nível de segurança desejado contra danos ambientais e materiais (ABNT NBR 11682:2009)	4
Tabela 2:4 - Incógnitas associadas com o método das fatias (FREDLUND at. al,1940)	7
Tabela 2:5 - Elementos de equilíbrio estático satisfeitos por diferentes métodos de equilíbrio de limite (FREDLUND at. al,1940).....	7
Tabela 2:6 - Comparação de métodos comumente usados (FREDLUND at. al,1940).....	8
Tabela 2:7 - Funções de densidade de probabilidade (adaptado de BAECHER & CHRISTIAN, 2003).....	9
Tabela 2:8 - Índices de confiabilidade e probabilidade de falha admissíveis (USACE,1999)	11
Tabela 3:9 - Parâmetros utilizados Talude Estudo de Caso	19
Tabela 4:10 - Resultados FOSM	27
Tabela 4:11 - Combinações PEM.....	27
Tabela 4:12 - Resultados PEM.....	28
Tabela 4:13 - Resultados Monte Carlo.....	28
Tabela 4:14 Resultados RFEM	30
Tabela 4:15 - Resumo dos resultados.....	32

LISTA DE FIGURAS

Figura 2:1 - Forças que atuam sobre uma fatia e superfície de ruptura (FREDLUND et. al., 1940).....	5
Figura 2:2: Pontos e pesos de Rosenblueth para três variáveis, correlacionadas ou não correlacionadas (BAECHER & CHRISTIAN, 2003)	12
Figura 2:3 - Problema teste (GRIFFITHS & FENTON, 2007a).....	16
Figura 2:4 - Distribuição lognormal típica (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)	16
Figura 2:5 - Malha deformada para dois comprimentos de correlação diferentes (GRIFFITHS & FENTON, 2007a).....	17
Figura 2:6 - Probabilidade de Falha <i>versus</i> Coeficiente de Variação, média fixa $\mu_c=0,25$ (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)	18
Figura 3:7 – Seção do Talude, Estudo de Caso	20
Figura 3:8 – Densidade da malha utilizada na análise RFEM, 0,5, 0,625 e 1,0 metro, respectivamente.....	21
Figura 3:9 - Informações necessárias para a análise RFEM	22
Figura 3:10 - Informações necessárias para a análise RFEM	23
Figura 3:11 - Informações necessárias para a análise RFEM, parâmetros do solo.....	23
Figura 4:12 - Tensões totais verticais, SIGMA/W	24
Figura 4:13 - Fator de Segurança com os valores médios, SLOPE/W.....	25
Figura 4:14 - Superfície de Falha Analisada, GeoStudio 2012.....	25
Figura 4:15 - Resultado FOSM, Fator de Segurança <i>versus</i> Coesão não Drenada.....	26
Figura 4:16 - Resultado FOSM, Fator de Segurança <i>versus</i> Ângulo de Atrito não Drenado .	26
Figura 4:17 - Resultados método FOSM, Fator de Segurança <i>versus</i> Peso Específico Saturado	26
Figura 18 - Histograma e Função de densidade de probabilidade resultante do método Monte Carlo.....	29
Figura 4:20 - Comprimento de Correlação de 1 e 8 metros respectivamente para a coesão....	30
Figura 4:19 - Probabilidade de Falha <i>versus</i> Comprimento de correlação	31
Figura 4:21 - Tempo de duração da análise <i>versus</i> Comprimento de correlação.....	32

1 INTRODUÇÃO

Obras e estudos geotécnicos normalmente são trabalhos que envolvem estruturas de grande porte e estão associadas a graves impactos na sociedade, em que os riscos de falha podem gerar grandes perdas financeiras, ambientais e de vidas humanas. Entretanto, essas obras proporcionam diversos benefícios para a sociedade, como a produção de energia elétrica limpa, no caso de barragens, e a construção de estradas e rodovias com a realização de cortes e aterros em encostas.

Por outro lado, solos e rochas possuem parâmetros muito variáveis, o que gera uma incerteza na própria composição da estrutura da obra. Desta forma, é essencial que seja realizada a análise dos possíveis eventos cuja ocorrência pode levar à falha, no caso deste estudo, a ruptura de um talude.

Assim, a aplicação de conceitos estatísticos e probabilísticos à análise geotécnica é essencial, gerando cada vez mais interesse tanto para acadêmicos, como para profissionais da área, em que a análise potencial de dano da ruptura de um talude é feita levando em consideração suas probabilidades de ocorrência e efeitos.

Neste trabalho serão estudados quatro métodos de análise probabilística: o método FOSM (*First Order Second Moment*, Primeira Ordem Segundo Momento), o método PEM (*Point Estimate Method*, Método das Estimativas Pontuais) e o método Monte Carlo, que serão aplicados na análise de estabilidade de um talude hipotético, que poderia representar uma encosta de uma rodovia. Além disso, também será empregado o método RFEM. (*Random Finit Elements Method*, Método dos Elementos Finitos Aleatórios).

O RFEM é uma metodologia desenvolvida por Griffiths & Fenton (2007a) utilizada para analisar vários problemas geotécnicos em termos probabilísticos, em que os problemas envolvem variabilidade nos termos de entrada. Essa metodologia consiste em uma ligação do Método dos Elementos Finitos (FEM - *Finit Elements Method*) e a teoria do campo aleatório por meio da simulação de Monte Carlo. Neste trabalho, o RFEM será aplicado para fazer uma análise em termos probabilísticos de um talude possibilitando avaliar a influência da variabilidade espacial na probabilidade de falha.

1.1 MOTIVAÇÃO

A segurança de obras geotécnicas é um tema que está, atualmente, presente nos noticiários brasileiros, devido ao rompimento da barragem de Mariana em 2015 e da barragem de Brumadinho em 2019, ambas localizadas no estado de Minas Gerais. O rompimento dessas barragens causou perdas de vidas humanas e danos gravíssimos ao meio ambiente, no desastre de Brumadinho já são 257 o número de mortos identificados (G1 MINAS GERAIS, 2019).

Desta forma, o estudo de estabilidade de taludes é um tema recorrente e de suma importância, em que pesquisas e investimentos na análise de probabilidade de falha devem ser feitos para melhorar a confiança e a precisão dos estudos de estabilidade.

Uma das ferramentas mais recentes utilizada na análise probabilística de estabilidade de taludes é o Método dos Elementos Finitos Aleatórios, que foi objeto de estudo de Griffiths & Fenton (2007a). O principal objetivo do estudo é verificar a influência da variabilidade espacial dos parâmetros na probabilidade de falha, comparando com análises de estabilidades de taludes clássicas.

1.2 OBJETIVOS

O principal objetivo desse projeto é verificar a influência da variabilidade espacial dos parâmetros na análise de estabilidade de taludes. Os objetivos específicos são:

- Revisar sobre a análise de estabilidade de taludes;
- Comparar o método determinístico de equilíbrio limite com os métodos probabilísticos, entre eles: Monte Carlo, Método das Estimativas Pontuais e Método da Primeira Ordem Segundo Momento;
- Verificar a influência da variabilidade espacial na probabilidade de falha utilizando o método dos elementos finitos aleatórios.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo será destinado a revisão bibliográfica acerca do estudo de estabilidade de taludes e a avaliação do fator de segurança e da probabilidade de falha. Serão apresentados métodos que utilizam a análise probabilística para calcular a probabilidade de falha de uma seção, entre eles: FOSM, PEM e Monte Carlo. Por fim, será apresentado o método RFEM, que permite avaliar a influência da variabilidade espacial na probabilidade de ruptura.

2.1 TALUDES E ENCOSTAS

Segunda a norma ABNT NBR 11682:2009, talude é qualquer terreno inclinado e uma encosta é um talude de origem natural. Já uma ruptura de um talude pode ser definida como uma modificação da geometria do talude que pode ter sido ocasionada por escorregamento ao longo de uma superfície (zona de concentração de deformações cisalhantes) ou por deformações excessivas que afetem obras de engenharia.

A Tabela 2:1 apresenta os fatores de segurança mínimos para deslizamentos de acordo com o nível de segurança contra danos de vidas humanas e contra danos materiais e ambientais

Tabela 2:1 - Fatores de segurança mínimos para deslizamentos (ABNT NBR 11682:2009)

Nível de segurança contra danos a vidas humanas / Nível de segurança contra danos materiais e ambientais	Alto	Médio	Baixo
Alto	1,5	1,5	1,4
Médio	1,5	1,4	1,3
Baixo	1,4	1,3	1,2

NOTA 1 No caso de grande variabilidade dos resultados dos ensaios geotécnicos, os fatores de segurança da tabela acima devem ser majorados em 10%. Alternativamente, pode ser usado o enfoque semiprobabilístico indicado no anexo D.

NOTA 2 No caso de estabilidade de lascas/blocos rochosos, podem ser utilizados fatores de segurança parciais, incidindo sobre os parâmetros γ , ϕ , c , em função das incertezas sobre estes parâmetros. O método de cálculo deve ainda considerar um fator de segurança mínimo de 1,1. Este caso deve ser justificado pelo engenheiro civil geotécnico.

NOTA 3 Esta tabela não se aplica aos casos de rastejo, voçorocas, ravinas e queda ou rolamento de blocos

A Tabela 2:2 e a Tabela 2:3 indicam os critérios para enquadrar o projeto de um talude nas classificações de nível de segurança de acordo com a norma ABNT NBR 11682:2009.

Tabela 2:2 - Nível de segurança desejado contra danos a vidas humanas (ABNT NBR 11682:2009)

Nível de Segurança	Critérios
Alto	Áreas com intensa movimentação e permanência de pessoas, como edificações públicas, residenciais ou industriais, estádios, praças e demais locais urbanos ou não, com a possibilidade de elevada concentração de pessoas. Ferrovias e rodovias de tráfego intenso.
Médio	Áreas e edificações com movimentação e permanência restrita de pessoas. Ferrovias e rodovias de tráfego moderado.
Baixo	Áreas e edificações com movimentação e permanência eventual de pessoas. Ferrovias e rodovias de tráfego reduzido.

Tabela 2:3 - Nível de segurança desejado contra danos ambientais e materiais (ABNT NBR 11682:2009)

Nível de Segurança	Critérios
Alto	Danos materiais: Locais próximos a propriedades de alto valor histórico, social ou patrimonial, obras de grande porte e áreas que afetem serviços essenciais. Danos ambientais: Locais sujeitos a acidentes ambientais grave, tais como nas proximidades de oleodutos, barragens de rejeito e fábricas de produtos tóxicos.
Médio	Danos materiais: Locais próximos a propriedades de valor moderado. Danos ambientais: Locais sujeitos a acidentes ambientais moderados.
Baixo	Danos materiais: Locais próximos a propriedades de valor reduzido. Danos ambientais: Locais sujeitos a acidentes ambientais reduzido.

2.2 MÉTODO DO EQUILÍBRIO LIMITE

A ruptura de taludes é originada, geralmente, por processos que aumentam a força cisalhante, como solicitações externas e remoção de material que fornecem suporte. Além disso, existem fatores que causam redução da resistência ao cisalhamento do solo, como efeito das poropressões e mudanças causadas por intemperismo e atividade físico-química. (HOYOS, 2014).

Existem vários métodos para analisar a estabilidade de taludes, entre eles os métodos que se baseiam no Equilíbrio Limite (LEM – *Limit Equilibrium Method*). Este método divide o talude em “n” fatias, em que cada uma dessas fatias é submetida a um conjunto de forças conforme a Figura 2:1.

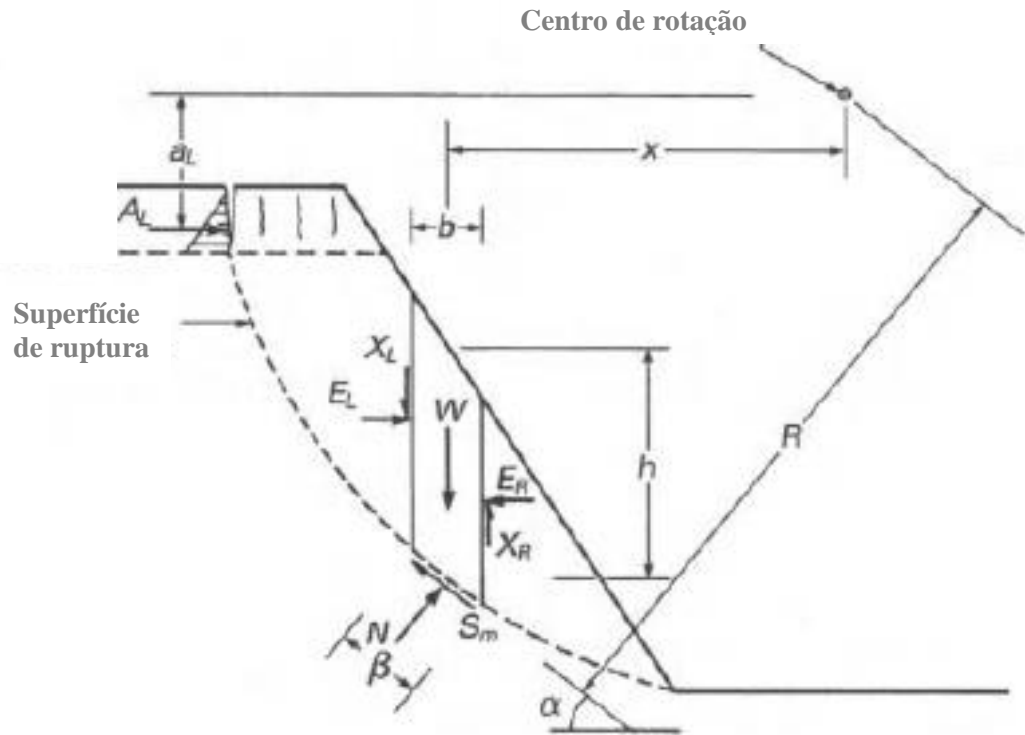


Figura 2:1 - Forças que atuam sobre uma fatia e superfície de ruptura (FREDLUND et. al., 1940)

W = peso total da fatia de dimensões $b \times h$;

N = força normal total na base da fatia;

S_m = força de cisalhamento na base da fatia;

E = forças normais horizontais entre as fatias;

X = forças de corte verticais entre as fatias;

R = raio para uma superfície de deslizamento circular;

f = desvio perpendicular da força normal do centro de rotação ou do centro dos momentos,

x = distância horizontal da linha central de cada fatia para o centro de rotação;

h = distância vertical do centro da base de cada fatia para a linha superior na geometria;

a_L = distância perpendicular do externo resultante força da água para o centro de rotação;

A_L = forças externas de água resultantes;

α = ângulo entre a tangente ao centro da base de cada fatia e a horizontal;

β = distância inclinada através da base de uma fatia.

A força normal na base da fatia (N) é obtida através do somatório de forças na direção vertical e o Fator de Segurança (FS) utilizado é o mesmo para o equilíbrio de momentos e o equilíbrio de forças horizontais.

A Equação 2.1 é uma forma simplificada de se obter a força normal na base da fatia (N) através do somatório de forças na direção vertical, em que a poropressão do ar considerada é a atmosférica e a base da fatia é localizada em solo saturado, isto é, solo com poropressões de água positivas. Nesta equação, c' é coesão efetiva, ϕ' é o ângulo de atrito efetivo e u_w poropressão da água.

$$N = \frac{W - (X_R - X_L) - \frac{c'\beta\sin\alpha}{FS} + u_w \frac{\beta\sin\alpha}{FS} \tan\phi'}{\cos\alpha + \frac{FS}{\sin\alpha \tan\phi'}} \quad (2.1)$$

Já o momento de equilíbrio é calculado em relação a um ponto arbitrário acima da porção central da superfície de deslizamento. Assim, o fator de segurança varia de acordo com o ponto selecionado e pode ser estimado pela Equação 2.2, em que $\sum Nf$ é o somatório das forças normais na base de cada fatia.

$$FS_m = \frac{\sum[c'\beta R + (N - u_w\beta)R \tan\phi']}{A_L a_L + \sum W_x - \sum Nf} \quad (2.2)$$

Por fim, o equilíbrio de forças é derivado da soma das forças na direção horizontal para todas as fatias e o fator de segurança é dado por:

$$FS_f = \frac{\sum[c'\beta\cos\alpha + (N - u_w\beta)\tan\phi'\cos\alpha]}{A_L + \sum N\sin\alpha} \quad (2.3)$$

Utilizando esse procedimento de cálculo, se o número de fatias for “n”, o número de incógnitas será $6n-2$, conforme indicado pelas incógnitas enumeradas pela Tabela 2:4.

Entretanto, dispõe-se somente de $3n+1$ equações para resolver o problema, sendo o equilíbrio de momento, o equilíbrio de forças (em duas direções) e a equação de Mohr-Coulomb que relaciona a resistência de cisalhamento (S_m) com as tensões na base dado pela equação 2.4, em que σ_n é o esforço total normal na base de uma fatia, c é a coesão total do solo, β é a distância inclinada através da base de uma fatia, FS é o fator de segurança e ϕ' é o ângulo de atrito efetivo

$$S_m = \frac{\beta}{FS} (c + \sigma_n \tan \phi') \quad (2.4)$$

Tabela 2:4 - Incógnitas associadas com o método das fatias (FREDLUND at. al,1940)

Incógnitas	Variável
N	Forças normais
N	Forças de cisalhamento
n-1	Força entre as fatias
n-1	Inclinação da força entre fatias
n-1	Ponto de aplicação da força entre as fatias
N	Ponto de aplicação da força normal
1	Fator de Segurança

Assim, são necessárias a formulação de algumas hipóteses para tornar o problema determinado. As propostas mais comuns estão apresentadas na Tabela 2:5, que indicam seus respectivos elementos de equilíbrio estático satisfeitos.

Tabela 2:5 - Elementos de equilíbrio estático satisfeitos por diferentes métodos de equilíbrio de limite (FREDLUND at. al,1940)

Método	Equilíbrio de Forças		Equilíbrio de Momentos
	x ^a	y ^a	
Método ordinário (OMS) e Fellenius	Sim	Não	Sim
Bishop simplificado	Sim	Não	Sim
Jambu simplificado	Sim	Sim	Não
Jambu generalizado	Sim	Sim	^b
Spencer	Sim	Sim	Sim
Morgentern-Price	Sim	Sim	Sim
Corpo de Engenheiros	Sim	Sim	Não
Lowe-Karafiath	Sim	Sim	Não

^a Qualquer uma das duas direções ortogonais pode ser selecionada para o somatório de forças

^b O equilíbrio de momento é usado para calcular a força de cisalhamento entre as fatias

O Método Ordinário e Bishop simplificado usam o equilíbrio de momento, enquanto Jambu simplificado e generalizado, o Lowe e Kariafiath e o Corpo de Engenheiros usam o equilíbrio da força para determinar o fator de segurança. Já os métodos Spencer e Morgenstern-Price satisfazem o equilíbrio de momento e de força ao computar o fator de segurança. A comparação desses métodos está explicitada na Tabela 2:6.

Tabela 2:6 - Comparação de métodos comumente usados (FREDLUND et. al,1940)

Método	Fator de Segurança		Suposições
	Equilíbrio de Momento	Equilíbrio de Força	
Método ordinário	x		$X = 0, E = 0$
Bishop simplificado	x		$X = 0, E \geq 0$
Jambu simplificado		x	$X = 0, E \geq 0$
Jambu generalizado		x	$X_R = E_R \tan \alpha_t - (E_R - E_L) t_R / b^a$
Spencer	x	x	$X/E = \tan \theta^b$
Morgentern-Price	x	x	$X/E = \lambda f(x)$
Corpo de Engenheiros		x	$X/E =$ Inclinação média superfície do solo
Lowe-Karafiath		x	$X/E =$ Inclinação média solo e superfície de deslizamento

^a α_t = ângulo entre a linha de impulso através de uma fatia e a horizontal

t_R = distância vertical da base da fatia até a linha de empuxo no lado direito da fatia

^b θ = ângulo da força horizontal resultante entre as fatias

Entretanto, o Método de Equilíbrio Limite assume algumas hipóteses que podem não ser realistas:

- Necessidade de definir inicialmente uma superfície de ruptura;
- Tensões determinadas somente na superfície de ruptura e entre as fatias;
- Mesmo fator de segurança para todas as fatias;
- Considera o material rígido e perfeitamente plástico.

2.3 MÉTODOS PROBABILÍSTICOS

A maioria dos dados utilizados em estudos geotécnicos, como a análise de estabilidade de taludes, não são conhecidos com precisão e a sua variabilidade deve-se a diversos fatores, como a própria geometria do talude. A utilização de métodos probabilísticos pode levar a análises mais confiáveis, já que considerarem a variabilidade dos parâmetros de cálculo.

As incertezas que são tratadas na engenharia geotécnica podem ser divididas em duas principais categorias: a variabilidade natural e a incerteza do conhecimento. A variabilidade natural, ou aleatória, está associada à aleatoriedade intrínseca aos processos naturais, como a variabilidade temporal e espacial de um fenômeno. A incerteza do conhecimento, ou incerteza epistêmica, é atribuída à falta de dados, de informação ou de compreensão do evento em estudo, e, quando aplicada a análises geotécnicas, pode ser dividida em três subcategorias: incerteza de caracterização do site, do modelo e do parâmetro. (BAECHER & CHRISTIAN, 2003)

Devido a essas incertezas, há uma distribuição de valores para cada parâmetro utilizado, o que faz com que possam ser consideradas como uma variável aleatória. Esta pode ser definida como um valor numérico associado a cada resultado de um fenômeno aleatório, ou seja, é uma variável quantitativa em que o resultado depende de fatores aleatórios. Uma variável aleatória é denominada discreta quando pode assumir uma quantidade enumerável de valores. Já uma variável aleatória contínua é aquela que pode assumir um número infinito de valores.

Há duas principais vertentes adotados para o entendimento de probabilidade: a teoria frequentista e a Bayesiana. A primeira mede a frequência de ocorrência de um resultado após várias observações para determinar sua probabilidade. Já a segunda, originária do teorema de Thomas Bayes, considera a probabilidade uma medida do grau de confiança, em que busca inferir, por meio de dados existentes, qual a probabilidade da realidade está sendo retratada.

Uma distribuição de probabilidade associa uma probabilidade para cada resultado de um fenômeno aleatório. Para espaços amostrais discretos essa função é chamada de função de massa de probabilidade. Já para espaços amostrais contínuos, é denominada de função de densidade de probabilidade. Muitos fenômenos aleatórios de ocorrência natural podem ser bem modelados por um número relativamente pequeno de distribuições. As mais comuns em aplicações de engenharia são as funções de densidade de probabilidade indicadas na Tabela 2:7.

Tabela 2:7 - Funções de densidade de probabilidade (adaptado de BAECHER & CHRISTIAN, 2003)

Nome	Parâmetros	Símbolo	PMF $f_x(x)$	Média	Variância
Uniforme	a, b	$R(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Triangular	a, b, c		$\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}$ se $a \leq x \leq c$ $\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}$ se $c \leq x \leq b$	$\frac{a+b+c}{3}$	$\frac{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}{18}$
Normal	μ, σ	$N(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	μ	σ^2
LogNormal	λ, ξ	$L(\lambda, \xi)$	$\frac{1}{\xi x(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\xi^2}\right]$	$\exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right)$	$[E(X)]^2[\exp(\xi^2) - 1]$
Exponencial	λ	$E(\lambda)$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gama	b, c	$\gamma(b, c)$	$\frac{(x/b)^{c-1} \exp(-x/b)}{b\Gamma(c)}$	bc	b^2c

1. Na distribuição logNormal λ e ξ são a média e o desvio padrão de $\ln X$, e μ e σ são a média e o desvio padrão de X
2. $\Gamma(x)$ é a função gama de x e $(x-1)!$ Quando x é um inteiro

A média (μ) e a variância (σ^2) são obtidas pelos momentos estatísticos de uma variável aleatória X de acordo com sua distribuição de densidade de probabilidade $f(x)$. O momento de primeira ordem e segunda ordem são dados, respectivamente, por:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (2.5)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx \quad (2.6)$$

Além de saber a distribuição de probabilidade de cada variável aleatória, é importante saber o grau de interdependência entre as variáveis. A covariância (σ_{xy}) é uma medida da variabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y com distribuição de probabilidade conjunta $f(x,y)$. O sinal da covariância indica se a relação entre as duas variáveis aleatórias dependentes é positiva ou negativa.

$$\sigma_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)dx dy \quad (2.7)$$

Já o coeficiente de correlação (ρ_{xy}) é uma versão adimensional da covariância. Este coeficiente mede o grau de linearidade na variação de uma variável aleatória X em relação a outra variável Y, em que σ_x e σ_y são o desvio padrão de X e Y respectivamente. O coeficiente varia de -1 a 1 e permite analisar a magnitude sobre a intensidade de relação entre as variáveis.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.8)$$

2.3.1 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

O índice beta de confiabilidade (β) estima quantas vezes a diferença entre o fator de segurança e o fator de ruptura ($F=1$) é maior que o desvio padrão do fator de segurança. Pode ser determinado pela Equação 2.9, em que $E[F]$ é o valor esperado do Fator de Segurança e $\sigma[F]$ é o desvio padrão.

$$\beta = \frac{E[F] - 1}{\sigma[F]} \quad (2.9)$$

A Tabela 2:8 apresenta índices de confiabilidade e de probabilidade de falha admissíveis de acordo com o nível de desempenho esperado da obra geotécnica.

Tabela 2:8 - Índices de confiabilidade e probabilidade de falha admissíveis (USACE,1999)

Nível de desempenho	β	PF
Alto	5,0	3×10^{-7}
Bom	4,0	3×10^{-5}
Acima da média	3,0	3×10^{-3}
Abaixo da média	2,5	6×10^{-3}
Pobre	2,0	$2,5 \times 10^{-2}$
Insatisfatório	1,5	7×10^{-2}
Perigoso	1,0	$1,6 \times 10^{-1}$

2.3.2 FOSM

O método de análise probabilística conhecido como Primeira Ordem Segundo Momento (FOSM – First Order Second Moment) se baseia no truncamento da série de Taylor para uma função de variável dependente, como exemplo, o Fator de Segurança.

O valor médio de uma função de várias variáveis aleatórias (μ_F) é calculado a partir dos valores médios de cada variável aleatória, ou seja, o fator de segurança médio é obtido utilizando os valores médios de cada parâmetro de entrada (\bar{X}_i).

$$E[F] = \mu_F \approx F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.10)$$

Já a variância (σ_F^2) é calculado a partir do desvio padrão dos parâmetros de entrada (σ_x), das derivadas das variáveis de entrada em relação a função ($\delta F / \delta x$) e do coeficiente de correlação das variáveis de entrada (ρ_{x_i, x_j}).

$$E[(F - \mu_F)^2] = \sigma_F^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\delta F}{\delta x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \rho_{x_i, x_j} \quad (2.11)$$

Se as variáveis de entrada forem independentes, ou seja, $\rho_{x_i, x_j} = 0, (i \neq j)$, a variância pode ser estimada por:

$$\sigma_F^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta F}{\delta x_i} \right)^2 \sigma_x^2 \quad (2.12)$$

As derivadas ($\delta F/\delta x_i$) são calculadas a partir da variação do fator de segurança causada por pequenas variações nas variáveis independentes (δx_i), em que cada variável é incrementada separadamente, enquanto as demais são mantidas fixas e iguais aos valores médios.

Uma das grandes vantagens do método é que ele revela a contribuição relativa de cada variável para a incerteza global. Entretanto, se o número de variáveis incertas for n , esse método requer a avaliação de n derivadas parciais da função de desempenho.

2.3.3 PEM

Outro modo de realizar uma análise probabilística do fator de segurança é através do Métodos de Estimativas Pontuais (PEM – Point Estimate Method) desenvolvida por Rosenblueth (1975). O método consiste em substituir variáveis aleatórias contínuas por variáveis aleatórias discretas. Na maioria dos casos, os cálculos são feitos em dois pontos, em que o valor esperado de Y elevada a uma potência m , $E[Y^m]$ é dado por:

$$E[Y^m] \approx P_+ y_+^m + P_- y_-^m \quad (2.13)$$

- Y é uma função determinística de X , $Y = F(X)$
- y_+ é o valor de Y avaliado em um ponto x_+ , que é maior que a média, μ_x ,
- y_- é o valor de Y avaliado em um ponto x_- , que é menor que μ_x , e
- P_+ , P_- são pesos

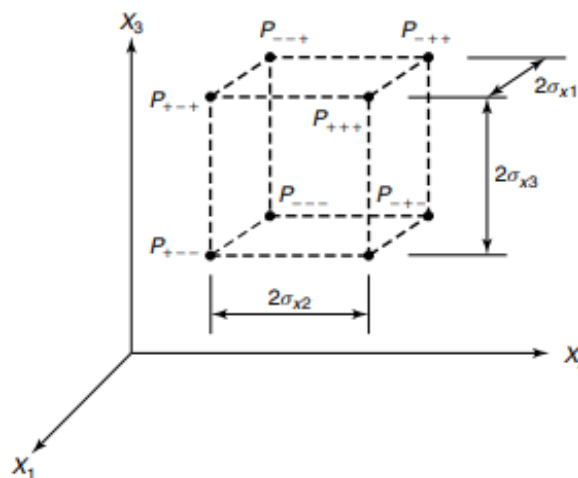


Figura 2:2: Pontos e pesos de Rosenblueth para três variáveis, correlacionadas ou não correlacionadas (BAECHER & CHRISTIAN, 2003)

Esse método pode ser dividido em três casos:

- **Caso 1:** quando Y é uma função de uma variável X cuja média, variação e assimetria são conhecidas;
- **Caso 2:** quando Y é uma função de uma variável X cuja distribuição é simétrica e aproximadamente gaussiana;
- **Caso 3:** quando Y é uma função de n variáveis X1, X2, ..., Xn, cujas distribuições são simétricas e que podem ser correlacionadas.

Neste projeto será utilizado o terceiro caso, em que 2^n pontos são escolhidos para incluir todas as combinações possíveis com cada variável com um desvio padrão acima e outro abaixo de sua média. Se S_i for +1 quando o valor da i-ésima variável for um desvio padrão acima da média e -1 quando o valor for um desvio padrão abaixo da média, os pesos serão:

$$P_{(S_1, S_2, \dots, S_n)} = \frac{1}{2^n} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (S_i)(S_j)\rho_{ij} \right] \quad (2.14)$$

Em que ρ coeficiente de correlação entre duas variáveis.

Caso as variáveis não possuam correlação entre si, os pesos para todos os pontos são $1/n$.

O valor esperado da função Y elevada à potência m é:

$$E[Y^m] \approx \sum_{i=1}^n P_i (y_i)^m \quad (2.15)$$

Já o desvio padrão do fator de segurança pode ser estimado por:

$$\sigma[Y^m] \approx \left(\sum_{i=1}^n P_i (y_i^m)^2 - \left[\sum_{i=1}^n P_i (y_i^m) \right]^2 \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

Uma das desvantagens do método é que requer que a função de desempenho seja avaliada 2^n vezes, e isso pode se tornar um número muito grande quando o número de parâmetros incertos é amplo. Entretanto, Rosenblueth (1975) propôs uma técnica para reduzir para $2n + 1$ quando as variáveis são não correlacionadas e quando a assimetria pode ser ignorada.

2.3.4 MONTE CARLO

O método Monte Carlo é considerado um método exato (HARR,1985) e é baseado na geração aleatório de resultados, em que é necessária uma grande amostragem de parâmetros, diferente dos outros métodos citados.

Sabendo a média, o desvio padrão e a função de distribuição de probabilidade de n variáveis, é possível gerar várias amostras de combinações através de um sorteio de valores de variáveis. Por meio dessas amostras é possível obter um conjunto de fatores de segurança para se obter a probabilidade de falha, ou seja, basta analisar a porcentagem dos valores sorteados que geraram um $FS < 1$.

O número de testes depende do nível de confiança desejável (ω) e da quantidade de variáveis (m) consideradas. Esse número pode ser estimado por:

$$N_{mc} = \left[\frac{\sigma^2}{4(1 - \omega)^2} \right]^m \quad (2.17)$$

O método tem a vantagem de simplicidade conceitual, mas pode exigir um grande conjunto de valores de amostras para obter precisão adequada e o desempenho esperado. Além disso, o método não fornece informações sobre as contribuições relativas dos parâmetros incertos que são obtidos de outros métodos.

2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (FEM - *Finit Elements Method*), introduzido por Clough & Woodward (1967), é uma ferramenta comumente utilizada para resolver problemas geotécnicos. O FEM consiste em discretizar a massa de solo em unidades chamadas de elementos finitos, que são interligados por seus nós. Esse método permite encontrar deslocamentos, poropressões ou outras variáveis em cada elemento finito e, assim, permite resolver com mais precisão problemas geotécnicos, como estabilidade de encostas, recalques de fundações, dentre outros.

Devido aos avanços computacionais, existem pacotes de programas que permitem resolver de forma fácil e rápida problemas complexos de estabilidade de taludes, fazendo com que esse método numérico seja cada vez mais utilizado.

O princípio do FEM é converter um problema descrito por equações diferenciais sobre espaço e tempo em um descrito por equações algébricas, em que o espaço-tempo contínuo é dividido em um conjunto de elementos discretos e os elementos desconhecidos variam, normalmente, de maneira simples, de forma linear ou quadrática.

Em uma análise de confiabilidade, a forma mais simples de empregar o FEM é tratar propriedades do material como variáveis aleatórias que não variam em sua região de definição, ou seja, ignorando a variação espacial das propriedades e pressupondo uma correlação perfeita de ponto a ponto (GRIFFITHS & FENTON, 2007a).

2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ALEATÓRIOS

Como já mencionado, a análise de estabilidade de taludes é uma área da geotecnia que é bem receptiva aos tratamentos probabilísticos, devido a própria incerteza dos parâmetros de solos e rochas.

O Método dos Elementos Finitos Aleatórios (RFEM – *Random Finit Elements Method*) aplicado na análise de estabilidade de taludes foi estudado por Griffiths & Fenton (2007a), em que se busca averiguar a influência da média local dos parâmetros na probabilidade de falha de um problema teste.

O RFEM mostrou-se vantajoso quando comparado com métodos probabilísticos de estabilidade de taludes tradicionais, já que permite que a ruptura de falha se desenvolva naturalmente “buscando” o mecanismo mais crítico. Além disso, pode-se observar que, devido a variabilidade espacial não ser considerada em análises probabilísticas simplificadas, a perfeita correlação assumida pode levar a estimativas não conservadoras de probabilidade de ruptura.

O problema teste de Griffiths & Fenton (2007a) consiste em um talude de argila não drenada conforme apresentado na Figura 2:3. Os parâmetros considerados são a inclinação do talude β , a altura do talude H , a profundidade da fundação D , o peso específico do solo γ_{sat} , a coesão não drenada c_u e o ângulo de atrito não drenado ϕ_u .

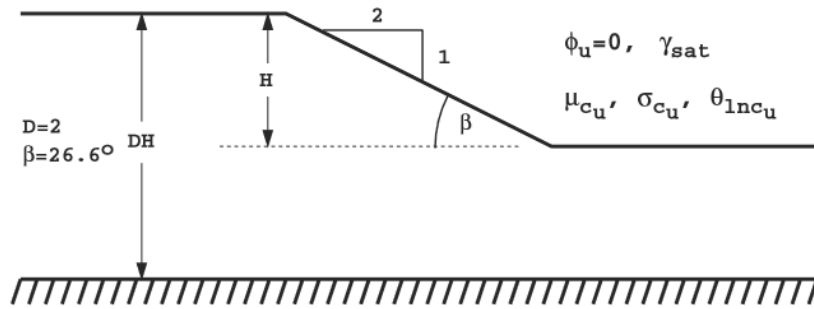


Figura 2:3 - Problema teste (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)

Enquanto γ_{sat} é mantido constante, c_u é considerado uma variável aleatória. Já ϕ_u é mantido constante e nulo. Por fim, a coesão não drenada foi expressa por um parâmetro adimensional C , em que

$$C = \frac{c_u}{\gamma_{sat}H} \quad (2.18)$$

O parâmetro adimensional C do problema teste (GRIFFITHS & FENTON, 2007a) foi considerado uma variável aleatória com uma função de densidade de probabilidade $f(C)$ de distribuição lognormal. com média μ_C e desvio padrão σ_C . A Figura 2:4 ilustra uma situação típica, μ_C é 100kN/m^3 e σ_C é 50kN/m^3 , em que V_C é o coeficiente de variação.

$$f(C) = \frac{1}{C\sigma_{\ln C}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C - \mu_{\ln C}}{\sigma_{\ln C}}\right)^2\right) \quad (2.19)$$

$$cov = V_C = \frac{\sigma_C}{\mu_C} \quad (2.20)$$

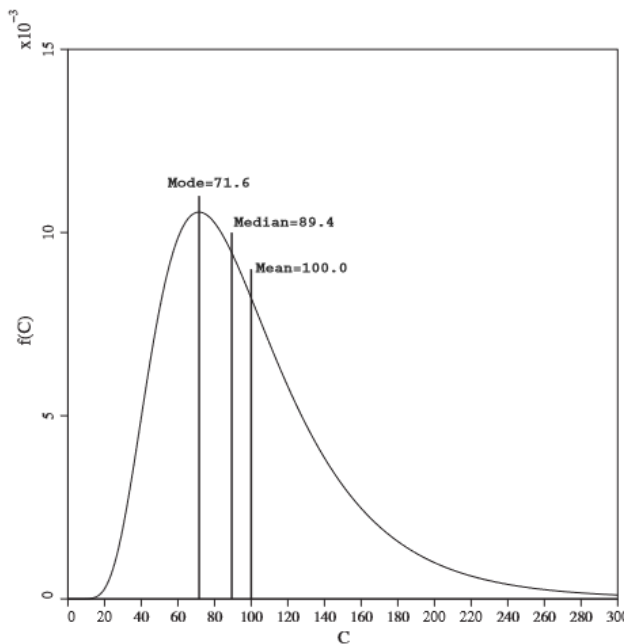


Figura 2:4 - Distribuição lognormal típica (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)

Algumas relações úteis da média e do desvio padrão, relacionadas a distribuição lognormal, são apresentadas abaixo:

$$\sigma_{\ln C} = \sqrt{\ln(1 + V_c^2)} \quad (2.21)$$

$$\mu_{\ln C} = \ln \mu_C - \frac{1}{2} \sigma_{\ln C}^2 \quad (2.22)$$

Através das Equações 2.21 e 2.22, pode-se obter as relações inversas apresentadas a seguir.

$$\mu_C = \exp\left(\mu_{\ln C} + \frac{1}{2} \sigma_{\ln C}^2\right) \quad (2.23)$$

$$\sigma_C = \mu_C \sqrt{\exp(\sigma_{\ln C}^2) - 1} \quad (2.24)$$

A mediana e a moda da distribuição lognormal são dadas por:

$$\text{Mediana}_C = \exp(\mu_{\ln C}) \quad (2.25)$$

$$\text{Moda}_C = \exp(\mu_{\ln C} - \sigma_{\ln C}^2) \quad (2.26)$$

Além disso, o comprimento da correlação espacial $\theta_{\ln C}$ também foi considerado no estudo realizado por Griffiths & Fenton (2007a). Esse parâmetro descreve a distância em que os valores da variabilidade espacial tendem a ser significativamente correlacionados com campo Gaussiano considerado. Quanto maior $\theta_{\ln C}$, a variação do campo será mais suave, já um menor $\theta_{\ln C}$ gera um campo mais irregular, como exemplificado na Figura 2:5. A relação não dimensional do $\theta_{\ln C}$ utilizada no estudo é dada por:

$$\Theta_C = \frac{\theta_{\ln C}}{H} \quad (2.27)$$

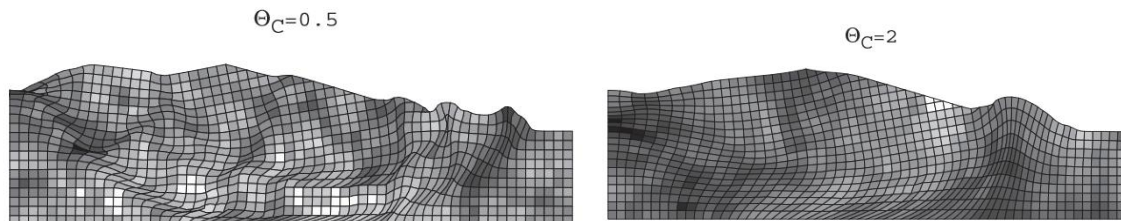


Figura 2:5 - Malha deformada para dois comprimentos de correlação diferentes (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)

A Figura 2:6 apresenta um dos principais resultados obtidos na pesquisa de Griffiths & Fenton (2007a), que indica a influência da variabilidade espacial na determinação da probabilidade de falha.

Na ocasião em que a variabilidade espacial da variável aleatória não foi considerada, correspondente a $\Theta_c = \infty$, ela superestima a probabilidade de falha quando o valor do coeficiente de variação da coesão é relativamente pequeno, indicando uma situação de conservadorismo. Já quando o coeficiente de variação é elevado, a probabilidade de falha é subestimada quando a variabilidade espacial não foi considerada, indicando uma estimativa não conservadora.

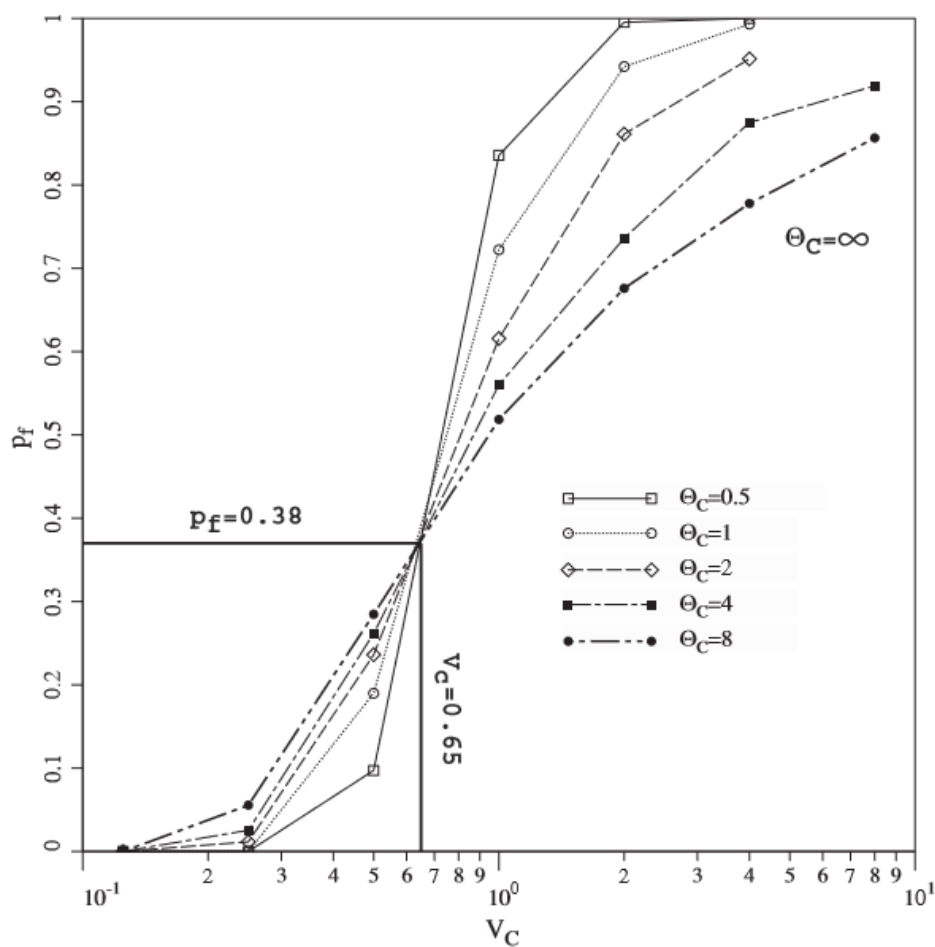


Figura 2:6 - Probabilidade de Falha versus Coeficiente de Variação, média fixa $\mu_c=0,25$ (GRIFFITHS & FENTON, 2007a)

3 METODOLOGIA

Este capítulo destina-se a apresentar a metodologia utilizada na análise de estabilidade do talude descrito no estudo de caso. A análise será feita utilizando os softwares do pacote GeoStudio 2012 e do pacote de softwares desenvolvido por Griffiths & Fenton (1992) que combinaram a simulação de campo aleatório com o método dos elementos finitos para produzir o Método dos Elementos Finitos Aleatórios, ou RFEM.

3.1 ESTUDO DE CASO

Neste capítulo, serão apresentadas as características do talude que será utilizado como estudo de caso. A seção do talude e os parâmetros do solo foram selecionados na esperança de se obter um fator de segurança adequado de acordo com as recomendações da ABNT NBR 11682:2009. Além disso, as características do estudo de caso foram escolhidas devido a limitações do software utilizado para fazer a análise RFEM, como a limitação do número de elementos e por não realizar análise de fluxo.

O estudo de caso trata-se de um talude hipotético de 10 metros de altura e inclinação de 55,0°. A Figura 3:7, apresenta a seção típica e a Tabela 3:9 os parâmetros utilizados nas análises, em que c_u é a coesão não drenada, ϕ_u é o ângulo de atrito não drenado, γ_{sat} é o peso específico saturado, E é o Módulo de Young do solo e ν o coeficiente de Poisson.

A média dos parâmetros (μ) foram selecionados de acordo com as recomendações da JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*) apresentadas no artigo *Probabilistic Model Code, Section 3.7: soil properties* de 2006. Os coeficientes de variação (CV) foram selecionados de acordo com as recomendações de Baecher e Christian (2003). Assim, foi possível estimar o desvio padrão (σ) das três propriedades consideradas variáveis aleatórias: coesão não drenada, ângulo de atrito não drenado e o peso específico saturado.

Tabela 3:9 - Parâmetros utilizados Talude Estudo de Caso

	c_u (kPa)	ϕ_u (°)	γ_{sat} (kN/m ³)	E (kPa)	ν
μ	20	25	17	50000	0,3
CV	30%	15%	5%	-	-
σ	6	4	1	-	-

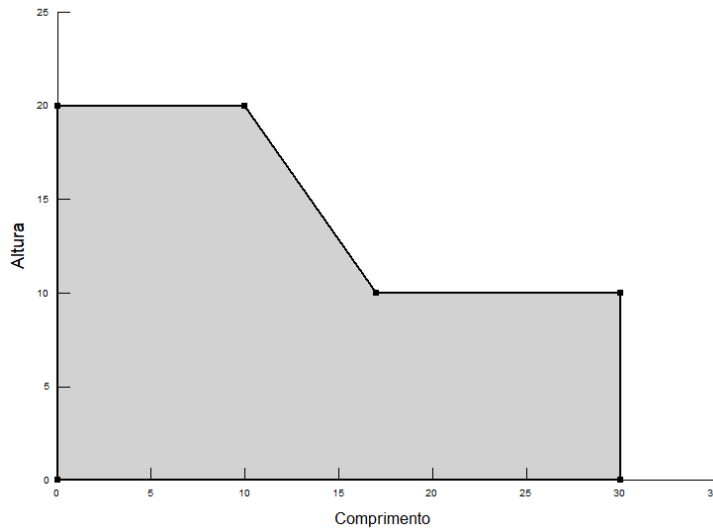


Figura 3:7 – Seção do Talude, Estudo de Caso

3.2 METODOLOGIA PARA OBTENÇÃO DO FS

O Fator de Segurança foi estimado utilizando os valores médios dos parâmetros apresentados no estudo de caso e dois softwares do Pacote GeoStudio 2012, SIGMA/W e SLOPE/W. O método utilizado para determinar o Fator de Segurança consiste em incluir uma relação tensão-deformação mais representativa das tensões reais de campo na análise de estabilidade.

O uso das tensões obtidas no SIGMA/W foi escolhido, pois as formulações de equilíbrio limite fornecem tensões que procuram garantir o equilíbrio de força de cada fatia além de buscar o mesmo fator de segurança para cada fatia. Esses conceitos e premissas significam que nem sempre é possível obter distribuições de tensão realistas ao longo da superfície de deslizamento.

Assim, inicialmente, uma distribuição de tensão no solo é estimada, usando uma análise de elementos finitos por meio do software SIGMA/W. Em seguida, o programa SLOPE/W usa as tensões obtidas em cada elemento com o SIGMA/W para calcular o Fator de Segurança da superfície de deslizamento.

Na análise realizada pelo SIGMA/W, o material foi considerado linear elástico, devido a maior simplicidade do método de cálculo, e foram obtidas as tensões totais utilizando parâmetros não drenados. A malha utilizada considerou elementos de meio metro. Já na análise de estabilidade realizada pelo SLOPE/W, o material seguiu o modelo de Mohr-Coulomb e foi utilizado a opção *Grid and Radius* para determinar a superfície de ruptura a ser analisada.

Após estimar o Fator de Segurança utilizando os valores médios dos parâmetros, foram feitas análises de probabilidade de falha utilizando os métodos descritos na revisão bibliográfica: PEM, FOSM e Monte Carlo. Os parâmetros foram considerados independentes nas análises, ou seja, o coeficiente de correlação entre eles é dado como nulo. Essa hipótese é somente uma simplificação do problema para facilitar o uso dos métodos probabilísticos.

Para a análise de probabilidade de falha utilizando o método PEM foram necessárias oito combinações. Já no método FOSM foram feitos incrementos separados de cada parâmetro de 1%, 5%, 10% e 25% enquanto os demais eram mantidos constantes e iguais ao seu respectivo valor médio. Por fim, para o método Monte Carlo, foram estimadas cem mil realizações utilizando a Equação 2.17. Para calcular a probabilidade de falha, considerou-se que o fator de segurança seguia uma distribuição de densidade de probabilidade do tipo normal.

3.3 RFEM

O software elaborado por Griffiths & Fenton (1992) combina a simulação de campo aleatório com o método dos elementos finitos para produzir o Método dos Elementos Finitos Aleatórios. O objetivo dessa etapa é verificar a influência da variabilidade espacial na probabilidade de falha. Assim, o mesmo talude descrito no estudo de caso foi modelado no programa Rslope2D, um dos softwares do pacote RFEM.

A modelagem foi feita para três tipos de densidades de malhas diferentes, em que o tamanho dos elementos foram de 0,5, 0,625 e 1,0 metro. Além disso, foram utilizados quatro comprimentos de correlação diferentes de 1, 2, 4 e 8 metros, com o objetivo de analisar a influência desse parâmetro na determinação da probabilidade de falha.

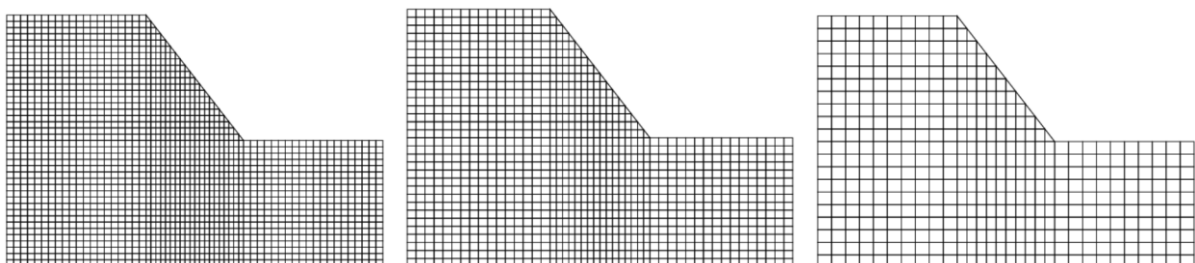


Figura 3:8 – Densidade da malha utilizada na análise RFEM, 0,5, 0,625 e 1,0 metro, respectivamente

Conforme verificado na análise FOSM, os parâmetros que mais causavam alteração na probabilidade de falha estimada eram a coesão não drenada, ângulo de atrito não drenado e peso específico saturado. Assim, só esses parâmetros foram considerados como variáveis aleatórias na análise RFEM. Foi considerado uma distribuição normal para cada um desses parâmetros com média e desvio padrão indicados na Tabela 3.9. Além disso, também foi considerado coeficiente de correlação nulo entre os parâmetros.

O Fator de Segurança calculado pelo método RFEM é estimado através de fatores de redução, em que os valores dos parâmetros são reduzidos até se alcançar a falha e o fator de redução que ocasionou a falha é estimado como fator de segurança. A sequência de redução de fatores utilizada foi 1,0; 1,1; 1,2; 1,4; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0.

Nas Figuras 3:9 a 3:11, são apresentadas uma sequência de imagens que ilustram as informações necessárias para o uso do programa Rslope2D desenvolvido por Griffiths & Fenton (1992).

The image shows the Rslope2D software interface with several callout boxes explaining the input fields. The interface is divided into two main sections: a top section for job and output settings, and a bottom section for simulation parameters.

Top Section:

- Job Title:** Stability of a slope
- Basename:** slope2d
- Help** Echo input data to output *.stt file?
- Help** Report progress of the run to the screen?
- Help** Write debug data to the output *.stt file?
- Help** Plot a random field? Property to plot: Cohesion
- Help** Produce a PostScript format file of displaced finite element mesh?
- Help** Show mesh on displaced mesh plot?
- Help** Show random field on plot? Show log-random field?
- Property to plot: Cohesion
- Help** Displaced mesh plot width: 4 inches

Bottom Section:

- Help** Number of elements left of embankment: 20 right of embankment: 20
- in embankment: 20 in foundation: 20
- Help** Slope gradient (run/rise): 0.7
- Help** Element size: 0.5 in x-direction 0.5 in y-direction
- Help** Number of simulations: 100000

Callout Boxes (Left Side):

- Titulo do trabalho
- Nome da base
- Para verificar os dados e associar os parâmetros de execução aos arquivos de saída
- O progresso do programa a será relatado na janela da linha de comando
- Informações de depuração no arquivo de saída *.stt, deve ser restrito a um pequeno número de realizações
- O primeiro campo gerado será plotada, *.fld. Pode ser pós-processado para produzir um gráfico PostScript.
- Primeira malha de falha de inclinação deslocada aleatória é plotada como um gráfico PostScript *.dis.
- A malha do elemento finito deslocado seja mostrada no gráfico de falha de inclinação.
- Um campo aleatório de propriedade do solo será plotado em escala de cinza.
- Isso é usado para dimensionar a imagem geral. O padrão é 4 polegadas de largura.
- Determina a quantidade de elementos em cada região do talude.
- Determina a inclinação do Talude, relação altura e comprimento.
- Tamanho do elemento, sendo elementos quadrilaterais de 8 nós
- Informar a quantidade de simulações que serão realizadas.

Figura 3:9 - Informações necessárias para a análise RFEM

O gerador de números aleatórios é inicializado por um número inteiro positivo	Help	Generator seed:	0
É a distância de separação além da qual as propriedades em dois pontos são negligenciáveis	Help	Correlation lengths:	1 in x-direction 1 in y-direction
Função de covariância que define como a covariância cai com a distância de separação.	Help	Covariance function:	d1avx2
Tolerância de convergência relativa, deve ser menor que 0,01	Help	Convergence tolerance:	0,0001
Indica a seqüência de fatores de redução de força.	Help	Max number of iterations:	500
	Help	Strength reduction factors:	1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 2.0 2.5 3.0

Figura 3:10 - Informações necessárias para a análise RFEM

Distribuição dos parâmetros

- 1) determinístico: média
- 2) normal: média e desvio padrão
- 3) lognormal: média e desvio padrão
- 4) limitado: limite inferior, a; superior, b; parâmetro de localização, m; parâmetro de escala, s

Help	Cohesion distribution:	normal	Mean:	20	Standard deviation:	6
Help	Friction angle distribution:	normal	Mean:	25	Standard deviation:	4
		Selected distribution governs: <input checked="" type="radio"/> phi <input type="radio"/> tan(phi)				
Help	Dilation angle distribution:	deterministic	Mean:	0		
Help	Unit weight distribution:	normal	Mean:	17	Standard deviation:	1
Help	Elastic modulus distribution:	deterministic	Mean:	50000		
Help	Poisson's ratio distribution:	deterministic	Mean:	0,3		

Coefficientes de correlação, atuando entre cada propriedade aleatória do solo

Soil property correlation matrix elements:	Cohesion	Friction	Dilation	Unit Weight	Elastic Mod	Poisson's ratio
Cohesion	1	0	0	0	0	0
Friction		1	0	0	0	0
Dilation			1	0	0	0
Unit Weight				1	0	0
Elastic Mod					1	0
Poisson's ratio						1

Figura 3:11 - Informações necessárias para a análise RFEM, parâmetros do solo

4 RESULTADOS

Este capítulo irá apresentar os resultados encontrados nas análises descritas na Metodologia, em que foram utilizados os softwares do pacote GeoStudio 2012, SIGMA/W e SLOPE/W, e um software do pacote desenvolvido por Griffiths & Fenton (1992), Rslope2D. Além das análises determinísticas, utilizando os parâmetros médios do solo, este capítulo também irá trazer os resultados das análises probabilísticas do fator de segurança, em que foram utilizados os métodos FOSM, PEM, Monte Carlo e RFEM.

4.1 ANÁLISE INICIAL

Inicialmente, foi realizado uma análise com as médias dos parâmetros indicados no estudo de caso. O resultado das análises de tensão-deformação realizado no software SIGMA/W é apresentado na Figura 4:12. Esse resultado foi utilizado no software SLOPE/W nas demais análises do fator de segurança e probabilidade de falha do talude estudado.

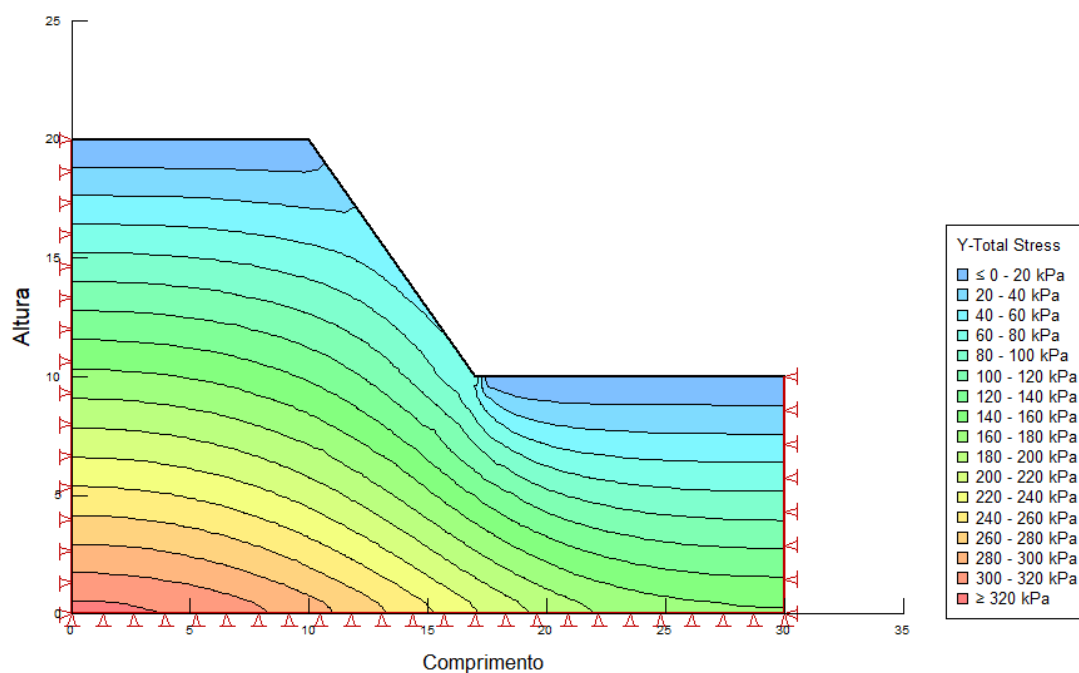


Figura 4:12 - Tensões totais verticais, SIGMA/W

A Figura 4:13 apresenta a superfície de falha que foi considerada nos estudos utilizando o programa SLOPE/W, em que foram importadas as tensões do programa SIGMA/W. Foi encontrado um fator de segurança de 1,5, valor que atende os fatores de segurança mínimos para deslizamentos (ABNT NBR 11682:2009).

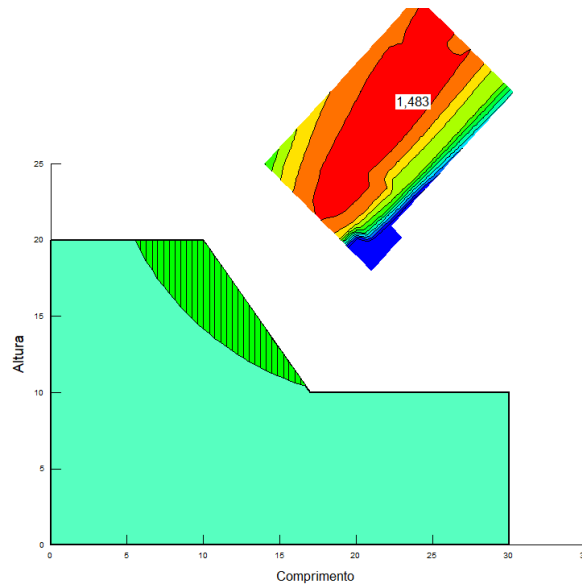


Figura 4:13 - Fator de Segurança com os valores médios, SLOPE/W

Para realizar as análises probabilísticas, essa superfície foi fixada. Para isso, foi utilizado o recurso *Fully Specified* para definir a superfície de falha e analisar as variações do Fator de Segurança. A Figura 4:14, apresenta a superfície de falha utilizada nas análises probabilísticas.

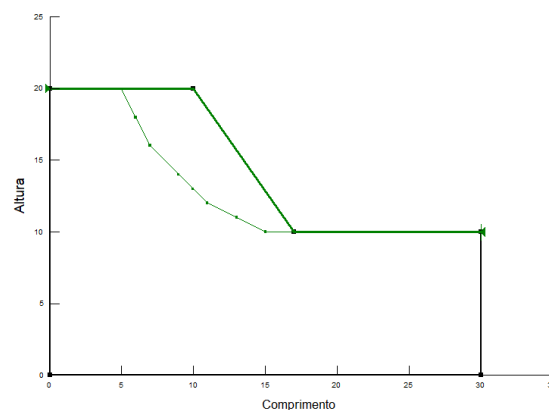


Figura 4:14 - Superfície de Falha Analisada, GeoStudio 2012

4.2 FOSM

A primeira análise da probabilidade de falha realizada foi pelo método FOSM, visto que o método permite avaliar a contribuição relativa de cada variável para a incerteza global. As Figuras 4:15, 4:16 e 4:17 indicam como a variação de cada parâmetro influencia no fator de segurança (FS). A coesão não drenada (c_u) e o ângulo de atrito não drenado (ϕ_u) tiveram uma relação linear positiva com o fator de segurança, enquanto o peso específico saturado (γ_{sat}) apresentou uma relação linear negativa.

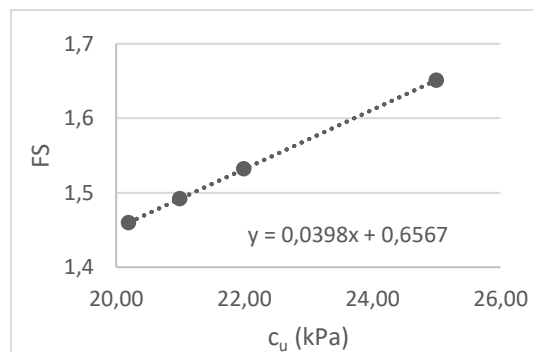


Figura 4:15 Resultado FOSM, Fator de Segurança *versus* Coesão não Drenada

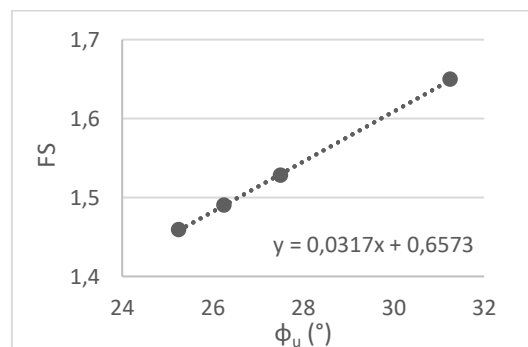


Figura 4:16 Resultado FOSM, Fator de Segurança *versus* Ângulo de Atrito não Drenado

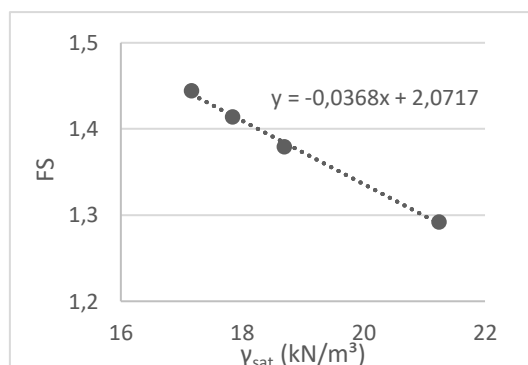


Figura 4:17 Resultados método FOSM, Fator de Segurança *versus* Peso Específico Saturado

A Tabela 4:10 apresenta de forma resumida os resultados do encontrados pelo método FOSM, em que μ é a média, σ^2 é a variância, σ é o desvio padrão do fator de segurança. Já PF é a probabilidade de falha e β é o índice de confiabilidade.

Tabela 4:10 - Resultados FOSM

Parâmetro	Resultado
μ	1,48
σ^2	0,1
σ	0,27
PF	3,9%
β	1,8

Pode-se observar que a coesão teve influência de 76,6%, o ângulo de atrito 21,6% e o peso específico de 1,8% na variância do fator de segurança calculado pelo método FOSM. Isso deve-se ao fato de ter sido adotado um maior valor de coeficiente de variação para a coesão. Nota-se também que a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade β apresentaram valores que permitem classificar o talude com um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999).

4.3 PEM

O resultado das análises realizadas pelo Método das Estimativas Pontuais (PEM) é indicado nesta etapa. Foram necessárias oito combinações em que o valor médio de cada parâmetro era aumentado ou reduzido de acordo com o seu respectivo valor de desvio padrão para se estimar um novo valor de fator de segurança para a superfície de ruptura estudada. A Tabela 4:11 apresenta as combinações que foram feitas, em que c_u é a coesão não drenada, φ_u é o ângulo de atrito não drenado, γ_{sat} é o peso específico saturado.

Tabela 4:11 - Combinações PEM

	c_u (kPa)	φ_u (°)	γ_{sat} (kN/m ³)	FS
1	+	+	+	1,757
2	+	+	-	1,879
3	+	-	+	1,518
4	+	-	-	1,640
5	-	+	+	1,305
6	-	+	-	1,371
7	-	-	+	1,066
8	-	-	-	1,132

A Tabela 4:12 apresenta de forma resumida os resultados, em que μ é a média e σ é o desvio padrão do fator de segurança. Já PF é a probabilidade de falha e β é o índice de confiabilidade.

Tabela 4:12 - Resultados PEM

Parâmetros	Resultados
μ	1,46
σ	0,29
PF	5,8%
β	1,6

Pode-se notar que o resultado encontrado de probabilidade de falha apresenta a mesma ordem de grandeza que o resultado indicado pelo método FOSM e também permite classificar o talude com um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999).

4.4 MONTE CARLO

A análise de probabilidade de falha pelo método Monte Carlo foi feita no próprio programa GeoStudio 2012. O número de realizações necessárias foi estimado em cem mil vezes. Esse valor foi obtido por meio da Equação 2.7, em que foi utilizado a variância encontrada pelo Método FOSM e um nível de confiança (ω) de 95%. Já a quantidade de variáveis (m) consideradas foram 5, entre elas: coesão não drenada, ângulo de atrito não drenado, peso específico saturado, Módulo de Young do solo e coeficiente de Poisson.

A Tabela 4:13 apresenta de forma resumida os resultados, em que μ é a média e σ é o desvio padrão do fator de segurança. Já PF é a probabilidade de falha e β é o índice de confiabilidade.

Tabela 4:13 - Resultados Monte Carlo

Parâmetros	Resultados
μ	1,42
σ	0,25
PF	4,45%
B	1,7
Realizações	100000

Pode-se notar que o resultado encontrado de probabilidade de falha apresenta a mesma ordem de grandeza que o resultado indicado pelo método FOSM e PEM FOSM e também permite classificar o talude com um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999).

A Figura 4:18 apresenta o histograma e função de densidade de probabilidade resultante do método Monte Carlo.

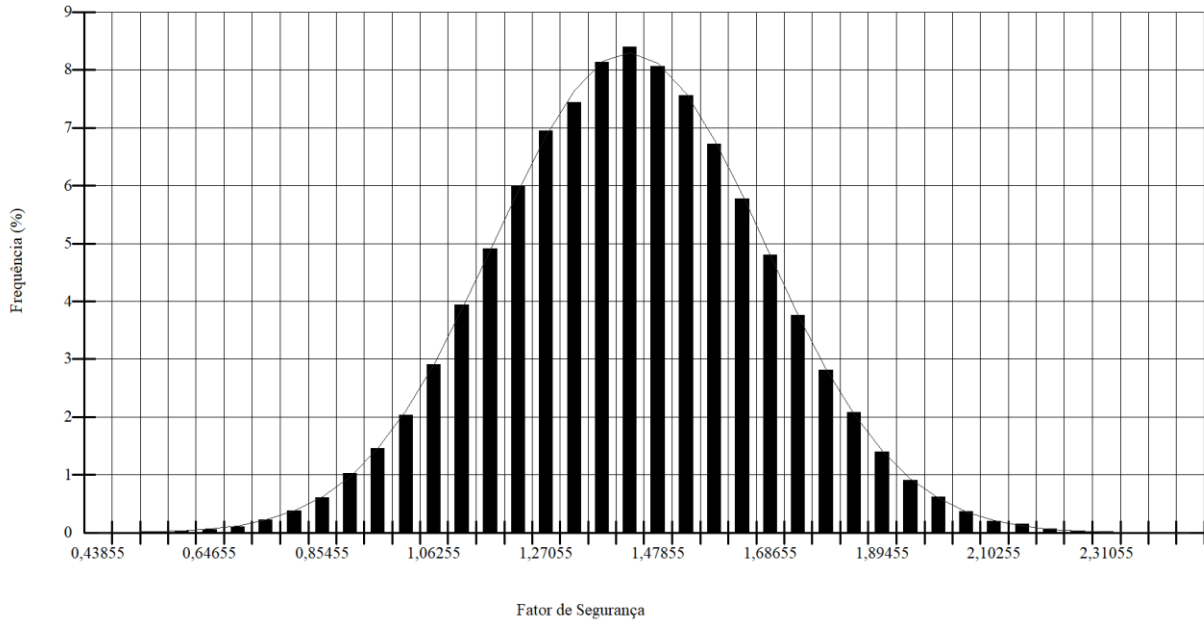


Figura 18 - Histograma e Função de densidade de probabilidade resultante do método Monte Carlo

4.5 RFEM

Os resultados encontrados pelo Método dos Elementos Finitos Aleatórios (RFEM) utilizando o programa Rslope2D é apresentado nessa etapa. Como mencionado, foram realizadas variações no comprimento de correlação entre os elementos e na malha utilizada na análise para verificar a influência da variabilidade espacial na probabilidade de ruptura do talude do estudo de caso.

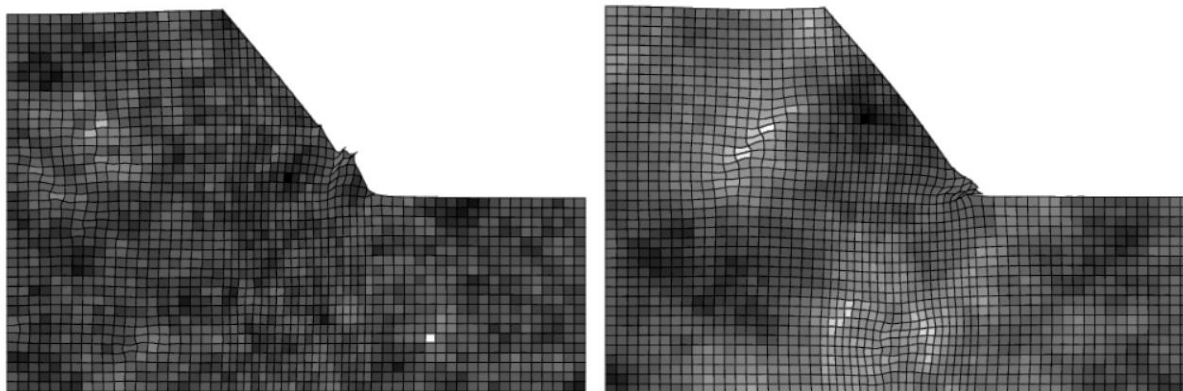
A Tabela 4:14 apresenta de forma resumida os resultados encontrados. O fator de segurança indicado é o resultado em que todos os elementos da malha apresentam o valor médio dos parâmetros de entrada.

Tabela 4:14 Resultados RFEM

Malha (m)	Comprimento de Correlação (m)	Fator de Segurança	Probabilidade de Falha	Desvio Padrão	Tempo (h)
1,000	2,0	1,4	0,04%	0,01%	2,3
	4,0	1,4	0,67%	0,03%	2,6
	8,0	1,4	3,06%	0,05%	2,8
0,625	1,0	1,3	0,008%	0,003%	8,3
	2,0	1,3	0,14%	0,01%	9,1
	4,0	1,3	1,25%	0,04%	10,1
	8,0	1,3	4,02%	0,06%	11,4
0,500	1,0	1,3	0,03%	0,01%	17,2
	2,0	1,3	0,21%	0,01%	20,3
	4,0	1,3	1,50%	0,04%	20,8
	8,0	1,3	4,59%	0,07%	24,2

Realizações 100000

A Figura 4:19, mostra dois taludes com comprimento de correlação de elementos diferente. A primeira apresenta comprimento de correlação de um metro e a segunda de oito metros. Nota-se que a segunda apresenta uma distribuição espacial do parâmetro, neste caso a coesão, de forma bem mais suaves que a primeira.

**Figura 4:19 - Comprimento de Correlação de 1 e 8 metros respectivamente para a coesão**

A Figura 4:20 apresenta a relação observada entre a probabilidade de falha e o comprimento de correlação. Pode-se observar que à medida que se aumenta o comprimento de correlação, a probabilidade de falha também aumenta. Uma possível explicação para esse fenômeno é que, quando uma propriedade é sorteada em um elemento, ela influencia o sorteio de um maior número de elementos, devido ao seu maior comprimento de correlação.

Dessa forma, quando uma propriedade considerada ruim é sorteada no primeiro elemento e o solo é mais homogêneo, devido ao elevado comprimento de correlação adotado, há uma maior chance desse sorteio de parâmetros resultar em um baixo fator de segurança. O caso contrário também é válido, o sorteio de uma propriedade considerada boa em um solo mais homogêneo pode resultar em um valor mais elevado de fator de segurança. Entretanto, devido a essa maior dispersão dos valores de fatores de segurança calculados, uma maior probabilidade de falha pode ser estimada.

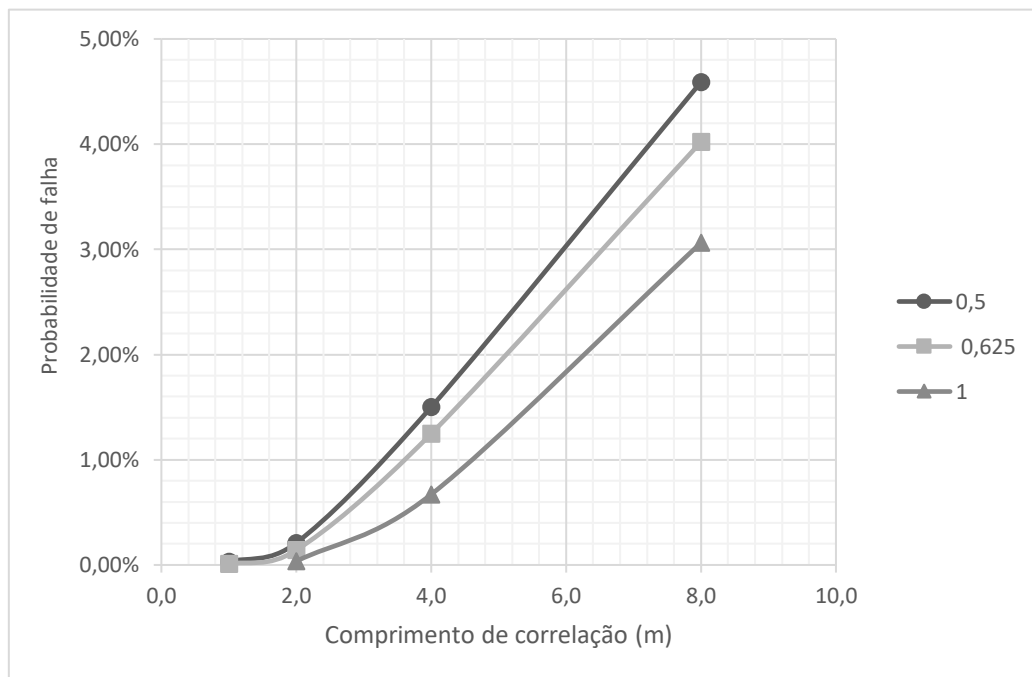


Figura 4:20 Probabilidade de Falha versus Comprimento de correlação

A Figura 4:21 apresenta uma observação sobre o tempo de duração das análises. Nota-se que devido ao aumento da densidade da malha, ou seja, o aumento no número de elementos, o tempo e o esforço computacional para realizar uma análise aumenta consideravelmente. Assim, é necessário ponderar ganhos e perdas devido a esse refinamento da análise.

Além disso, nota-se que para as análises de comprimento de correlação de oito metros, os resultados de probabilidade de falha obtidos foram de mesma ordem de grandeza dos resultados encontrados anteriormente pelos métodos FOSM, PEM e Monte Carlo. Isso é um bom indicativo para a validação do software Rslope2D, já que um maior comprimento de correlação indica um solo mais homogêneo, ou seja, há uma menor variação espacial dos parâmetros, e este não foi considerado nas análises utilizando os softwares do pacote GeoStudio.

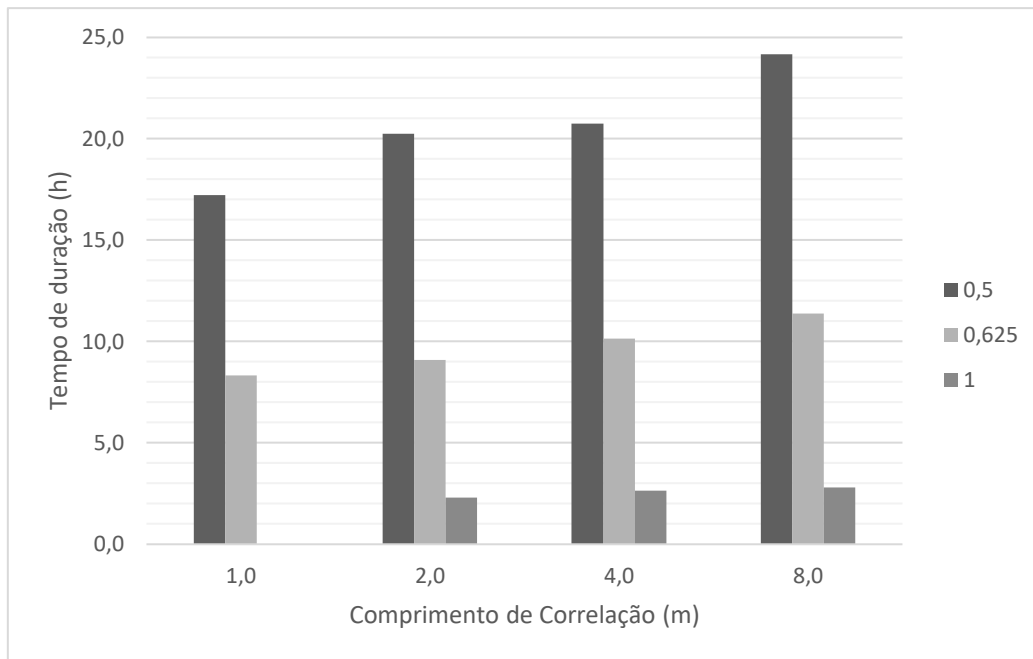


Figura 4:21 Tempo de duração da análise versus Comprimento de correlação

4.6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

A Tabela 4:15 apresenta o resumo dos resultados encontrados, em que o Método FOSM apresentou o menor valor de probabilidade de falha e o método PEM apresentou o maior valor. Nos casos em que a variabilidade espacial não foi considerada ou foi adotado um valor elevado de comprimento de correlação, a probabilidade de falha resultou em valores maiores e que indicaram um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999). Pode-se destacar também que baixos valores de comprimentos de correlação utilizados na análise RFEM resultaram em valores menores de probabilidade de ruptura.

Tabela 4:15 - Resumo dos resultados

Método	Probabilidade de Falha	Índice de Confiabilidade β
FOSM	3,9%	1,8
PEM	5,8%	1,6
Monte Carlo	4,5%	1,7
RFEM (comprimento de correlação de 8 m)	4,6%	-
RFEM (comprimento de correlação de 4 m)	1,50%	-
RFEM (comprimento de correlação de 2 m)	0,21%	-
RFEM (comprimento de correlação de 1 m)	0,03%	-

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Após a utilização de quatro métodos distintos para calcular a probabilidade de ruptura de um talude, sendo que um deles considerava a variabilidade espacial dos parâmetros, foram obtidas probabilidades de falha em torno de 10^{-2} com um índice de confiabilidade beta em torno de 1,7. Esses resultados indicam um nível de desempenho insatisfatório (USACE,1999), apesar do Fator de Segurança de 1,5 obtido com os parâmetros médios ser considerado satisfatório (ABNT NBR 11682:2009). Esse fato mostra a importância de realizar análises probabilísticas e análises de risco de estruturas geotécnicas, como a estabilidade de taludes e encostas.

Para se obter um nível de desempenho satisfatório da probabilidade de ruptura, poderia ser realizado um retaludamento mudando a inclinação ou a altura do talude, além da utilização de estruturas de reforço do terreno, como grampos e tirantes injetados (ABNT NBR 11682:2009).

Entretanto, não é possível afirmar se as probabilidades de falha representam a realidade com precisão, já que foram utilizadas algumas simplificações neste estudo. Por exemplo, as pressões neutras foram consideradas apenas por meio da utilização de parâmetros não drenados por conta de limitações do software RFEM. Essa condição é importante, visto que as poropressões afetam diretamente as tensões efetivas que são utilizadas no cálculo de estabilidade, em que o ideal seria realizar uma análise de fluxo do talude.

Sobre o estudo da variabilidade espacial dos parâmetros por meio da análise RFEM, pode-se destacar que baixos valores de comprimento de correlação entre os elementos resultaram em valores menores de probabilidade de ruptura. Este resultado confere com os dados apresentados por Griffiths e Fenton (2007a), em que os coeficientes de variação não são tão elevados.

Trabalhos futuros envolvendo o tema abordado neste projeto podem abordar os seguintes tópicos:

- Inclusão da análise de fluxo no estudo de estabilidade de taludes em métodos probabilísticos que consideram a variabilidade espacial dos elementos;
- Aplicação do método RFEM em obras geotécnicas reais e em que a falha apresente um risco elevado, como perdas financeiras e de vidas humanas em caso de ruptura de uma barragem;
- Aplicação do método RFEM no estudo de outras obras geotécnicas, como recalque de fundações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 11682: Estabilidade de Taludes. Rio de Janeiro, p. 39. 2009.

ASSIS, A.P.; FARIAS, M.M. (1998). Uma comparação entre Métodos Probabilísticos Aplicados à Estabilidade de Taludes. XI Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica.

BAECHER, G.B.; CHRISTIAN, J.T. (2003). Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 605 p.

CLOUGH, R. W.; WOODWARD, R. (1967). Analysis of Embankment Stresses and Deformations. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, 4, 529-549.

DIAS, B. M. (2007). Estabilidade de Taludes. In: Fundamentos de Engenharia Geotécnica. 6. ed. California, Sacramento: Thomson, Cap. 14. p. 430-487. Tradução da ed. 6 norte-americana.

FREDLUND, D. G. et al. (1940) Unsaturated Soil Mechanics in Engineering Practice. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 939 p.

GEOSTUDIO, versão 2012. Conjunto de software integrado para modelar a estabilidade de taludes, deformação no solo e transferência de calor e massa no solo e nas rochas

GRIFFITHS, D.V.; FENTON, G. A. (2007a). The Random Finite Element Method (RFEM) in Slope Stability Analysis. In: PROBABILISTIC METHODS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING. Italy: Springer Wien New York, p. 317-343.

GRIFFITHS, D.V.; FENTON, G. A. (2007b). Review of Probability Theory, Random Variables, and Random Fields. In: PROBABILISTIC METHODS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING. Italy: Springer Wien New York, p. 1-72.

GRIFFITHS, D.V.; FENTON, G. A. (1992). The Random Finite Element Method, Software Version 1.0.0.

HARR, M.E. (1985). Reliability-Based Design in Civil Engineering. McGraw-Hill, New York, USA.

HOYOS, E. M.(2014). Influência dos Parâmetros Hidrológicos e Geotécnicos na Estabilidade de Taludes. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

JCSS (2006). *Probabilistic Model Code, Section 3.7: SOIL PROPERTIES.*

Polícia identifica corpo de 257ª vítima de rompimento da Vale em Brumadinho. G1 Minas Gerais, 2019. Disponível em: < <https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2019/12/03/policia-identifica-corpo-de-257a-vitima-de-rompimento-da-vale-em-brumadinho.ghtml> > Acesso em dezembro de 2019.

RIOS, A.C. (2015). Análise Probabilística Aplicada em Barragem de Enrocamento com Núcleo de Argila. Monografia de Projeto Final, Publicação G.PF-001/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 43 p.

ROSENBLUETH, E. (1975). "Point estimates for probability moments." Proceedings, National Academy of Science 72(10): 3812–3814.

U.S.A.C.E (1999). Risk-based analysis in geotechnical engineering for support of planning studies. U.S. Army Corps of Engineers, ETL 1110-2-556