



Trabalho de Graduação

**Controle em Ordem Infinita e Redução Modal  
Para Mineração Submarina**

**Arthur Augusto Coutinho Bizzi**

**Brasília, Julho de 2019**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

Trabalho de Graduação

**Controle em Ordem Infinita e Redução Modal  
Para Mineração Submarina**

**Arthur Augusto Coutinho Bizzi**

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia  
Elétrica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Bacharel em Engenharia Mecatrônica*

Banca Examinadora

Prof. Eugênio Libório Fortaleza, ENM/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Walter de Britto Vidal Filho ENM/FT  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

João Yoshiyuki Ishihara ENE/FT  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Examinador Rafael Domenici Pereira Simões  
*Examinador Externo*

\_\_\_\_\_

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

ARTHUR AUGUSTO COUTINHO BIZZI

Controle em Ordem Infinita e Redução Modal Para Mineração Submarina

Distrito Federal, 2019

ix, 39p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2019). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1.Riser 2.Solução Analítica 3.Controle 4.Transformada Bilateral de Laplace

I. Mecatrônica/FT/UnB

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

---

BIZZI, A.A., (2019). Controle em Ordem Infinita e Redução Modal Para Mineração Submarina. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-nº11 , Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, LV p.

## CESSÃO DE DIREITOS

---

AUTOR: Arthur Augusto Coutinho Bizzi

TÍTULO DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO: Controle em Ordem Infinita e Redução Modal Para Mineração Submarina

GRAU: Engenheiro

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Arthur Augusto Coutinho Bizzi

SHIN QL 8 Conjunto 4 Casa 19 - Lago Norte

71520-245 Brasília - DF - Brasil

## Dedicatória

*Para Biel, Tomé, Lys e a todas e todos os outros que pensarem em desistir dos números,  
Que fique a certeza de que é um trabalho improvável, ingrato e absurdo  
Mas impossível jamais*

---

*"Dedicado ao sabiá da barriga amarela no milharal  
Que muy sábio nem uma vez sequer me disse  
¡Ligeiràdeus!*

*E estava certíssimo todas as vezes."*

*Arthur Augusto Coutinho Bizzi*

## Agradecimentos

*Agradeço antes de tudo ao meu orientador, Eugênio Fortaleza, pela sua constante e francamente incompreensível paciência. Obrigado por toda a sabedoria, por acreditar, por me ter oferecido essa última oportunidade de me provar academicamente.*

*À minha família, grande e pequena, por absolutamente tudo. À minha vó pelas terços rezados sobre sementes de romã, ao meu avô pelas sanfonadas e formigas. Em especial, aos meus pais, cujo amor implacável eu demorei tanto em entender, e à minha irmã e cúmplice, que o herdou comigo.*

*Ao Caldinho, Lore e tchurma, por todas as boas horas. Em especial, ao Catena.*

*Aos saudosíssimos Diogo, Duda, Chila Chico e Chris, meus amores por telégrafo. Às saudosas Dani, Bia, Bru e Manu, meus amores por lembrança.*

*Ao Rô, Nã, Davi, Tuca; À Bá, Isa, Isa; cês que eu amo tão mais que vejo, pela paciência.*

*Ao Reves e ao Rondelli, ao Ti e ao Lális, meus camaradinhas de tristeza e labuta.*

*Aos meu carioquinhas honorários, Brunão, Quico, Pedrão e Moze, que não sabem, mas entre uma pinga e outra escreveram esse TCC comigo.*

*À Bugulu, ao Dias e ao Jobim, que em tanto me honram ao fazer parte da minha família.*

*Ao Tomé, jao Tomé! sem você, amigo, teria sido insuportável.*

*Aos meus teoremas (ii), e (ix), pela esperança de que haja algo bom e certo por aí e pelo cheiro que deixam na sala. À Vrum Vrum Morais, exatamente pelas mesmas razões.*

*A todas e todos que em qualquer momento viram alguma espécie de virtude em mim e decidiram pagar pra ver, na esperança de que um dia me perdoem.*

*A deus, que eu já perdoei, mas não devia.*

*Arthur Augusto Coutinho Bizzi*

---

## ABSTRACT

This project has the objective of devising a unified approach for the modelling, simulation and control of a riser-based system for deepwater mining.

Oceanic mining has its own set of challenges, being prone to instability and demanding the real-time processing of non-trivial border conditions. As a response to this, we expand upon previous studies regarding riser positioning for off-shore oil exploration:

First, ideal trajectories for the mining equipment and the riser's top and bottom ends are planned, by means of a generalized analytic approach to the system's equations. Here, we devise solutions that deal with additional external forces, do not presume a system at rest and can be quickly calculated.

Then, discrete and continuous methods are used for a deeper analysis of the model's response. An approach based on discretization and modal reduction methods is used to describe the system, which we then attempt to validate by means of an analysis in infinite order.

Finally, control strategies are devised, implemented and validated in simulation, proving the real applicability of our approach.

---

## RESUMO

Esse projeto tem como objetivo estabelecer uma abordagem unificada que modele, simule e controle um sistema de posicionamento de riser para mineração em águas ultra-profundas.

O contexto de mineração oferece desafios únicos, sendo mais instável e demandando que condições não estáticas de contorno sejam processadas em tempo real. Em resposta, serão expandidos os conhecimentos construídos em aplicações semelhantes para o posicionamento de riser no contexto petrolífero:

Primeiramente, é definido o planejamento ideal das trajetórias ideais de solo, fundo e topo, por meio de um método analítico generalizado para as equações do sistema. Aqui serão derivadas soluções que lidem com forças externas adicionais, não preassumem um sistema em repouso e que podem ser calculadas rapidamente.

Em seguida, utilizam-se métodos discretos e contínuos para análise aprofundada da resposta do sistema. É realizada uma abordagem por discretização e redução modal para descrição do sistema, que em seguida tenta-se validar por meio de uma análise holística do mesmo em ordem infinita.

Por fim, são projetadas e implementadas estratégias de controle, que, validadas em simulação, atestam a aplicabilidade real da nossa abordagem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
1.1	EXPLORAÇÃO EM ÁGUAS PROFUNDAS O PETRÓLEO OFF-SHORE E A MINERAÇÃO	2
1.2	OBJETO DE ESTUDO E OBJETIVO: RISERS E SUA MANIPULAÇÃO ROBUSTA	3
1.3	MOTIVAÇÃO: AUTOMAÇÃO PARA REDUÇÃO DE GASTOS E RISCOS	4
1.4	O ESTADO DA ARTE: CONTROLE DE RISER PARA APLICAÇÕES EM ÓLEO E GÁS	5
1.5	O PROJETO: CONTROLE DE RISER PARA MINERAÇÃO SUBMARINA	6
1.6	TRABALHO E ABORDAGEM: OS NOVOS DESAFIOS E <i>Outline</i> DO TRABALHO	7
<b>2</b>	<b>PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA</b>	<b>8</b>
2.1	PRELIMINARES: PARAMETRIZAÇÃO DE SOLO E FUNDO DE RISER	8
2.1.1	PERCURSO DE SOLO	9
2.1.2	PERCURSO DE FUNDO: AFASTAMENTO RISER-SONDA	10
2.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA AS EQUAÇÕES DO SISTEMA	11
2.2.1	NÃO CAUSALIDADE DO PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA E A TRANSFORMADA DE LAPLACE BILATERAL	12
2.2.2	SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DE LAPLACE	13
2.2.3	VOLTA AO DOMÍNIO DO TEMPO	14
2.3	APLICAÇÃO PARA A MINERAÇÃO	18
2.3.1	CONTORNO: RISER NÃO ESTÁTICO	18
2.3.2	CONTORNO: FORÇAS ADICIONAIS NA EXTREMIDADE DE FUNDO	19
2.3.3	ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO CÁLCULO DAS TRAJETÓRIAS	21
<b>3</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO:</b>	
	<b>SIMULAÇÃO E REDUÇÃO MODAL</b>	<b>23</b>
3.1	DISCRETIZAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS E VALIDAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS PLANEJADAS	24
3.2	ANÁLISE DINÂMICA DO SISTEMA DISCRETIZADO	26

3.2.1	PÓLOS .....	26
3.2.2	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE .....	27
3.3	REDUÇÃO MODAL .....	28
3.3.1	HARMÔNICOS DOMINANTES DO SISTEMA .....	29
3.3.2	ATRASO.....	30
<b>4</b>	<b>MODELAGEM EM ORDEM INFINITA .....</b>	<b>31</b>
4.1	PRELIMINARES: DISTRIBUIÇÕES COMO MATRIZES .....	31
4.2	REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS .....	34
<b>5</b>	<b>CONTROLE .....</b>	<b>36</b>
5.1	POR ORDEM INFINITA .....	36
5.2	POR REDUÇÃO MODAL.....	36
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>38</b>
6.1	FUTURO DO ESTUDO.....	38

# Lista de Figuras

1.1	Configuração embarcação-riser .....	3
1.2	Instalação de equipamento por riser .....	3
1.3	Possíveis impactos ambientais da mineração submarina. [Swaddling, 2016].....	4
1.4	Aplicação Base: Sistema minerador acompanhado por riser [NMRI].....	6
2.1	$P$ vs. $t$ : Trajetória de solo .....	9
2.2	Distanciamento horizontal fundo-solo em resposta ao relevo .....	10
2.3	Trajetória: solo vs fundo de riser para inclinação constante $\theta = 10^\circ$ .....	10
2.4	Funções $\iota_v(z, t)$ e $\kappa_v(z, t)$ .....	16
2.5	Núcleos para alguns valores de $z$ .....	16
2.6	Trajetórias causais.....	17
2.7	Trajetórias não causais .....	17
2.8	Início $\Upsilon(0, 0) \neq 0$ .....	18
2.9	Início $\Upsilon(0, 0) \neq 0, \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, 0) \neq 0$ .....	18
2.10	Derivada não-nula no início do tempo $t=-500$ .....	18
2.11	Tensão (kN) exercida pelo conector sobre o riser vs. $\Upsilon$ .....	19
2.12	Solução estática .....	20
2.13	Solução para força de fundo .....	20
2.14	Implementação herdada para longo repouso .....	21
2.15	Implementação nova para longo repouso .....	21
2.16	Tempo gasto em cada função no código matlab. <i>Kernel</i> denota o cálculo de $\mathcal{B}$ .....	22
3.1	Modelo Discretizado de Riser com massa na ponta.....	23
3.2	Planta no Simulink para simulação. ....	25
3.3	Resposta em Malha Aberta para 400T.....	25
3.4	Resposta em Malha Aberta para 20T .....	25
3.5	Sistema Discretizado para 400T .....	26
3.6	Sistema Discretizado para 20T (instável).....	26
3.7	Código Matlab determinando não controlabilidade .....	27
3.8	Convergência do ganho dos harmônicos.....	29
3.9	Distribuição dos ganhos do sistema original .....	29
3.10	Distribuição dos ganhos do sistema de massa reduzida .....	29
3.11	Três primeiros harmônicos, 20T.....	30
3.12	Comparação dos atrasos em simulação, 400T vs 20T(escalonado) .....	30

5.1	Sistema controlado sob perturbação (caso estático) .....	37
5.2	Sistema controlado sob perturbação (forças de fundo).....	37

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros físicos da planta de mineração sub-ocêânica. ....	11
3.1	Determinante das matrizes de controlabilidade vs número de discretizações.....	27

# Lista de Símbolos

## Símbolos Latinos

$E$	Módulo de Young
$g'$	Gravidade efetiva
$J$	Momento de inércia
$m$	Densidade linear total do riser (real + virtual)
$m_{te}$	Massa de fundo total (real + virtual)
$T$	Tensão
$T_e$	Tensão devido à massa de fundo
$t$	Tempo
$v$	Velocidade média
$z$	Altura

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Coefficiente de amortecimento linearizado do riser
$\alpha_e$	Coefficiente de amortecimento linearizado da massa de fundo
$\delta$	Delta de Dirac
$\mu$	Coefficiente de arrasto de Morrison
$\Upsilon$	Deslocamento Horizontal

## Sobrescritos

$\hat{\phantom{x}}$	Representação no Domínio de Laplace
---------------------	-------------------------------------

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Exploração em Águas Profundas O Petróleo Off-Shore e a Mineração

Nas últimas décadas, a exploração das riquezas presentes nas profundezas do oceano deixou de ser um projeto reservado à ficção para se tornar um campo extremamente fértil e de enorme relevância econômica.

O exemplo mais evidente dessa tendência é a exploração do pré-sal brasileiro, que desde os anos 90 tomou grandes proporções e hoje já extrai mais da metade do petróleo nacional de reservatórios sob águas profundas e ultra profundas. [Agência Nacional de Petróleo, 2019]

De forma similar, surge agora grande interesse na mineração como próximo passo na exploração de recursos no solo oceânico, possibilitado pelo avanço nas tecnologias capitaneadas pela indústria de óleo e gás. A mineração off-shore, antes restrita a águas rasas, agora inicia sua transição para águas profundas. [Budnik, 2016]

Recentemente foi implementada a mineração sob lâmina d'água profunda perto de Okinawa, costa Leste do Japão. Este projeto, o primeiro dentre uma série de iniciativas semelhantes na Zona Econômica Exclusiva japonesa, visa suplantando parte de sua importação de metais com a exploração de sulfetos no solo oceânico [Urabe et al., 2015].

De forma semelhante, companhias como a Nautilus Minerals já exploram comercialmente o fundo do mar nas águas territoriais de Papua Nova Guiné e relatam planos de expandir sua presença para as águas territoriais de Fiji, Tonga, Ilhas Salomão, Vanuatu e Nova Zelândia. [Nautilus Minerals, 2015].

## 1.2 Objeto de Estudo e Objetivo: Risers e sua Manipulação Robusta

Na exploração destes recursos, sob profundidades que podem exceder 2000m, em geral é impossível instalar bases fixas de operação. Dessa forma, é necessário realizar o posicionamento e seguimento do equipamento no chão marítimo a partir de embarcações, às quais são anexadas enormes hastes metálicas - os chamados *risers* (fig. 1.1).

Estes risers, em geral longas tubulações de diâmetro de até dois metros, conectam fisicamente a embarcação ao relevo oceânico. Estas estruturas são utilizadas pela indústria para diversos procedimentos envolvendo maquinário no solo, desde instalação de cabeças de poço (fig. 1.2) ao posicionamento de sondas mineradoras, entre outros [Sparks, 2018].

A manipulação destes risers se dá pela movimentação da embarcação no *topo*, cujo movimento se transmite até a extremidade inferior do riser, o *fundo*, que deve cruzar um determinado percurso.

Atualmente, estas manipulações são largamente realizada por operadores humanos, com base em métodos heurísticos. Estas são, no entanto, operações complexas e de grande escala, o que significa que erro humano ou negligência podem acarretar em graves consequências.

Além disso, a precisão e velocidade desejável para estes procedimentos frequentemente está além daquela exequível por um operador humano não assistido, especialmente quando estes enfrentam condições adversas, como fortes correntes, mau tempo ou baixa visibilidade de fundo. [Bai and Bai, 2012]

**Por essa razão, surgem projetos de sistemas computacionais/automatizados para simulação e controle de risers, que se propõem a auxiliar ou substituir operadores humanos.** Diversas implementações desta natureza já foram sugeridas na literatura (seção 1.4), em geral voltadas às necessidades e atividades da indústria petrolífera.

**Nesse sentido, o presente trabalho se propõe a desenvolver um sistema semelhante de posicionamento de riser para aplicação em contextos de mineração submarina.**

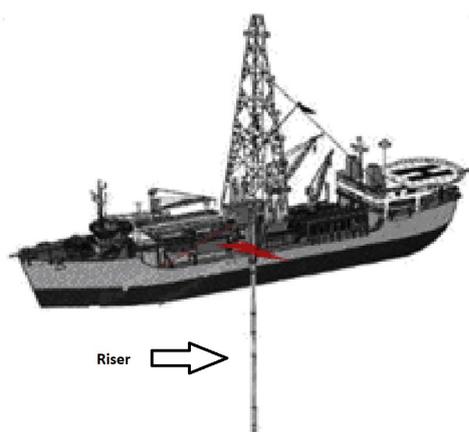


Figura 1.1: Configuração embarcação-riser

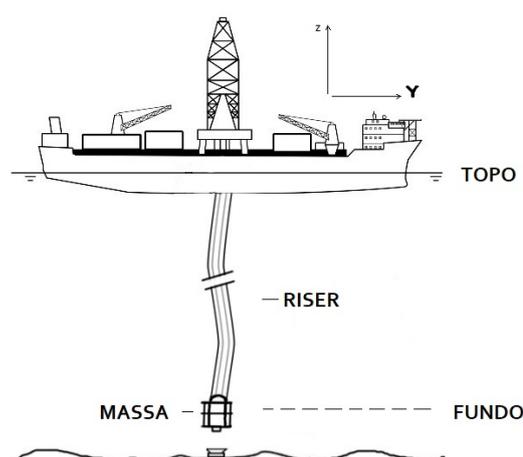


Figura 1.2: Instalação de equipamento por riser

### 1.3 Motivação:

#### Automação para Redução de Custos e Riscos

A utilização de uma abordagem autônoma incorre em significativas vantagens em dois âmbitos: econômico e ambiental.

Primeiramente, tendo em vista os enormes custos destas operações com equipamento e pessoal, mostra-se altamente desejável realizar os procedimentos com riser com celeridade e eficiência. É particularmente dispendioso manter esses recursos ociosos enquanto se espera por melhores condições climáticas, conforme ocasionalmente ocorre quando o procedimento é dirigido por um humano. [Bai and Bai, 2012]

Além disso, a exploração em águas profundas carrega consigo grande risco ambiental. Já decorreram da exploração *off-shore* de petróleo múltiplos desastres ecológicos, dentre os quais se destacam os derramamentos de óleo.

De forma semelhante, estudos indicam potencial de grandes impactos ambientais para a mineração sub-oceânica (fig. 1.3). Isso se mostra particularmente na possibilidade de vazamento de compostos metálicos altamente tóxicos para o ecossistema marinho [Swaddling, 2016].

Por estas razões, é desejável que todas as etapas destas operações sejam realizadas da forma mais eficaz e confiável possível. Sistemas autônomos podem aumentar a rentabilidade destes empreendimentos, enquanto evitam acidentes e imprevistos, apontando para a redução do impacto dessas operações.

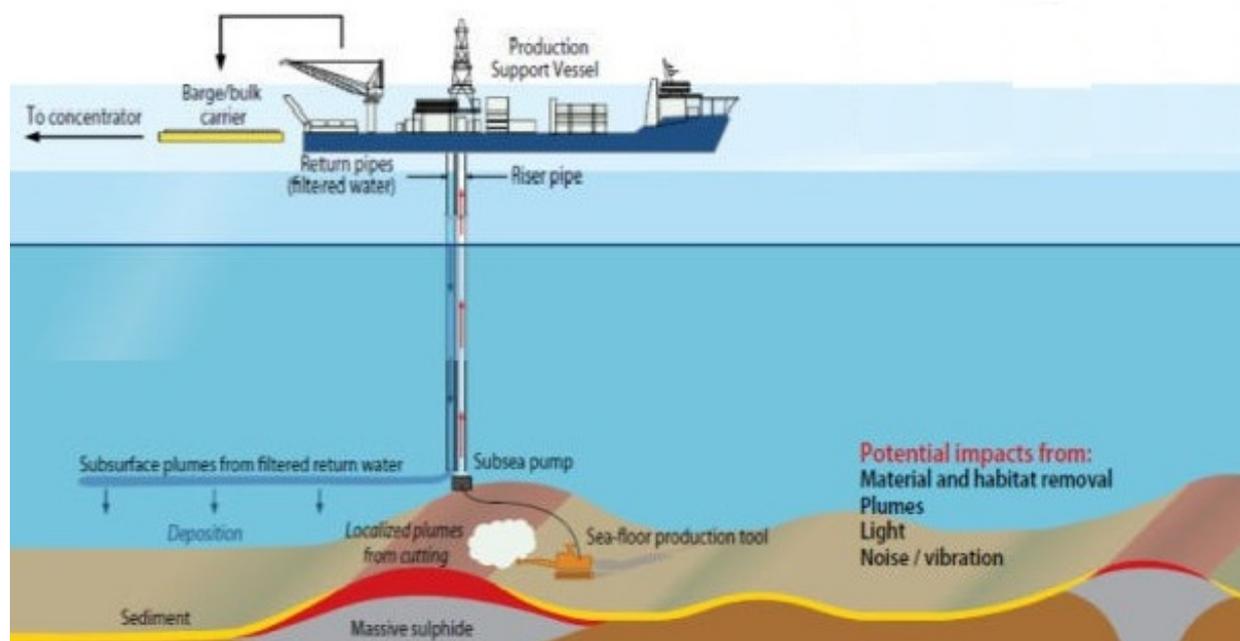


Figura 1.3: Possíveis impactos ambientais da mineração submarina. [Swaddling, 2016]

## 1.4 O Estado Da Arte:

### Controle de Riser para Aplicações em Óleo e Gás

Problemas de movimentação de risers e semelhantes foram abordados pontualmente em diversos contextos na literatura, em geral com foco em aplicações fora d'água (item 1) ou relacionadas à exploração *off-shore* de óleo e gás (itens 2, 3, 4 e 5). Nesse sentido, o problema clássico é o de otimizar e controlar o movimento do riser no contexto petroleiro, para instalação precisa de cabeças de poço e outros equipamentos de solo (fig. 1.2):

1. Em [Petit, 2001], tem-se um marco no estudo do controle de estruturas esguias, estabelecendo a planicidade diferencial de sistemas de correntes pesadas e sua modelagem por funções de Bessel. Aqui se vê a abordagem de resolução das equações no domínio de Laplace e posterior volta ao domínio do tempo.
2. Em [Yamamoto et al., 2007] e tem-se uma abordagem de controle para para o posicionamento de um riser atrelado a uma plataforma flutuante, implementada por meio de um Regulador Linear Quadrático; Em [Mooroka and Yamamoto, 2007] tem-se o desenvolvimento de uma análise para estes sistemas baseadas em equações de Volterra.

Em seguida, temos a sequência de trabalhos:

3. Em [Fortaleza, 2009] foi resolvido analiticamente o problema de manipulação do Riser sem a presença de uma massa adicional na ponta. Neste trabalho se vê a abordagem de planejamento por solução analítica seguido de controle por redução modal;
4. Em [Albuquerque, 2012], temos a resolução analítica do problema para a ação da massa adicional do equipamento na ponta, mas sob a hipótese simplificadora de tensões constantes no cabo;
5. Finalmente, em [Simões, 2018], foi resolvido analiticamente o caso com massa e tensão variável. Aqui, a massa do equipamento era de ordem semelhante à do resto da estrutura do riser.

Como será visto (cap. 2), trata-se de um problema complexo por diversas razões, dentre as quais se destaca sua modelagem, que se dá por Equações Diferenciais Parciais.

Em todos estes trabalhos, a natureza da aplicação determinava que o sistema transicionava de um estado de repouso a outro, num único movimento, sem a necessidade de modelagem de forças adicionais agindo sobre o riser. De forma similar, em nenhuma dessas aplicações havia demanda por uma implementação computacional veloz.

## 1.5 O Projeto: Controle de Riser para Mineração Submarina

Para nosso projeto, expandir-se-á o arcabouço teórico construído pelos trabalhos mencionados anteriormente para o contexto de mineração marítima. Para isso, tomou-se como base uma possível implementação de planta mineradora oceânica sob estudo pelo Instituto Marítimo Nacional Japonês, NMRI (fig. 1.4):

1. Uma sonda percorre o relevo de fundo marítimo, coletando material/amostras de solo que é enviado, por dutos, para uma bomba suspensa por um riser
2. A bomba, que pesa 20 toneladas, realiza o transporte do material coletado até a superfície.
3. Na embarcação, este material é tratado e separado.

Nessa implementação, temos três níveis que nos interessam:

- O *equipamento de solo*, a sonda mineradora se movendo pelo solo marítimo enquanto coleta material;
- O *fundo de riser*, extremidade inferior da haste, onde está uma bomba de massa significativa conectada ao equipamento de solo. Para efeitos de controle, nossa saída;
- O *topo de riser*, extremidade superior da haste conectada à embarcação, cujo movimento será a entrada efetiva do sistema.

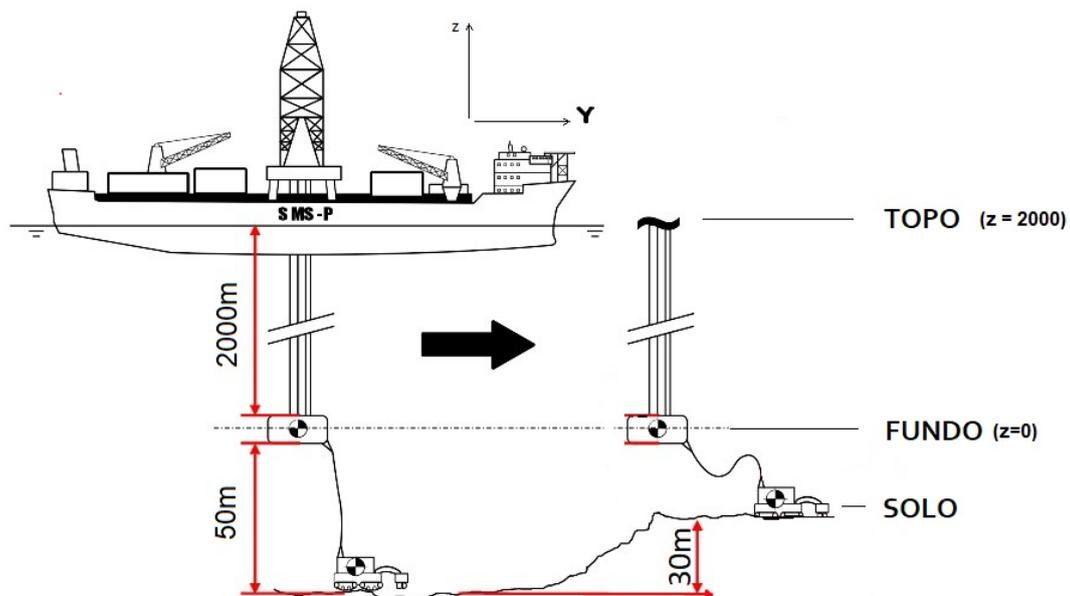


Figura 1.4: Aplicação Base: Sistema minerador acompanhado por riser [NMRI]

## 1.6 Trabalho e Abordagem: Os Novos Desafios e *Outline* do trabalho

Não surpreendentemente, a passagem para o novo contexto de mineração traz consigo uma série de desafios que não são plenamente tratados pela metodologia presente na literatura, demandando o desenvolvimento de novas técnicas que a complementem.

Primeiramente, para mineração marítima, tem-se mais um *nível* a ser considerado e cujo percurso deve ser definido: o nível de solo. O riser estará, em geral, constantemente conectado a um ou mais equipamentos de solo por dutos e afins, resultando no aparecimento de **forças diversas agindo sobre o sistema**.

Também tem-se que o processo de mineração é de natureza contínua, demandando acompanhamento prolongado e em constante movimento. Dessa forma, torna-se imperativo ser capaz de projetar um sistema que forneça **trajetórias não estacionárias e que possam ser recalculadas em tempo real**.

Assim sendo, desenvolvemos uma série de investigações com o objetivo de controlar de forma coordenada a movimentação dos níveis de fundo e topo de riser, de forma a acompanhar propriamente o nível de solo. Isso será feito tendo em vista os desafios mencionados acima.

A abordagem aqui desenvolvida, tal como a sequência de passos escolhida, foi baseada nas publicações [Fortaleza, 2009], [Albuquerque, 2012] e [Simões, 2018], utilizadas como embasamento e referenciadas repetidamente neste trabalho.

Essa abordagem será estruturada da seguinte maneira:

- No capítulo dois realiza-se o planejamento da trajetória dos vários níveis do sistema, definindo uma trajetória de solo desejada, derivando o percurso de topo necessário para realizá-la e descrevendo os aspectos compacionais/numéricos de seu cálculo para implementações reais;
- No capítulo três, discretiza-se o modelo para simulação. Depois de determinadas as características dinâmicas dos sistemas simuláveis, deriva-se um modelo reduzido para análise;
- No capítulo quatro, tenta-se adentrar a fundo na natureza contínua do sistema, desenvolvendo metodologias para a análise do sistema real. No entanto, não é possível desenvolver de forma completa esta abordagem. Ao fim do capítulo, deriva-se análogos contínuos para representações em espaço de estados;
- No capítulo cinco, é implementada uma estrutura de controle robusta para lidar com interferências no sistema;
- Por fim, o capítulo 6 apresenta as considerações finais para o projeto e tópicos para estudo futuro.

## Capítulo 2

# Planejamento de Trajetória

Planejamento e análise da trajetória de topo se deram em três estágios.

Primeiramente, tendo em vista os objetivos de segurança e robustez do projeto, foi definida uma trajetória segura e acompanhável para os equipamentos de fundo e solo.

Em seguida, foi derivada uma nova forma para a solução analítica das equações do sistema, determinando a trajetória de topo ideal. Com o objetivo de ampliar os cenários de aplicação, enfrentando os desafios impostos pelo cenário de mineração sub-oceânica, a solução foi derivada para diferentes condições de contorno: estática, fora de repouso e sob forças de fundo.

Finalmente, investigou-se em maior profundidade o comportamento dos percursos de topo derivados e as características de sua implementação computacional, buscando detalhar suas perspectivas reais de uso.

### 2.1 Preliminares: Parametrização de solo e fundo de riser

Para realizar o planejamento e controle de topo, antes é necessário definir um percurso confiável para o equipamento de solo e para o fundo de riser que o acompanha. Desta forma, foi necessário determinar um procedimento que gerasse trajetórias lentas, suaves e que se adaptassem ao relevo do chão oceânico:

- Lentas, para que a dinâmica lenta da embarcação fosse capaz de acompanhá-las. Para operações reais, grandes velocidades de deslocamento são raramente desejáveis.
- Suaves, de forma a evitar transições bruscas que pusessem a estrutura do riser em movimento oscilatório.
- Adaptáveis, de forma a dinamicamente afastar ou aproximar o fundo de riser ao equipamento de solo, preservando a conexão entre os dois durante subidas e descidas.

### 2.1.1 Percurso de solo

Para um deslocamento total definido em 30 m, definiu-se uma duração de 500s, resultando em uma velocidade média de menos de 0,1 m/s. A lentidão do processo está garantida.

Para garantir suavidade, busca-se maximizar o número de derivadas nulas ao começo e fim do movimento, de forma a suavizar as transições de/para o repouso. Além disso, é desejável que a função escolhida para trajetória seja monótona crescente/decrecente: movimentos alternados de avanço e recuo causariam oscilações na estrutura. Polinômios, funções analíticas, versáteis e de cálculo simples, são uma escolha óbvia.

O polinômio  $P(t)$ , o deslocamento horizontal de solo em função do tempo, foi definido em termos de seus coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  por meio de um sistema algébrico simples. Para determinar o valor de  $P$  e suas  $m$  derivadas nos tempos inicial e final de trajetória  $t_i$  e  $t_f$ , temos um polinômio de grau  $n = 2m + 2$ :

$$\begin{bmatrix} a_n t_i^n & a_{n-1} t_i^{n-1} & \dots & a_0 \\ n a_n t_i^{n-1} & (n-1) a_{n-1} t_i^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{n!}{(n-m)!} a_n t_i^{n-m} & \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} a_{n-1} t_i^{n-m-1} & \dots & 0 \\ a_n t_f^n & a_{n-1} t_f^{n-1} & \dots & a_0 \\ n a_n t_f^{n-1} & (n-1) a_{n-1} t_f^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{n!}{(n-m)!} a_n t_f^{n-m} & \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} a_{n-1} t_f^{n-m-1} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_i) \\ \frac{dP}{dt}(t_i) \\ \vdots \\ \frac{d^m P}{dt^m}(t_i) \\ P(t_f) \\ \frac{dP}{dt}(t_f) \\ \vdots \\ \frac{d^m P}{dt^m}(t_f) \end{bmatrix}$$

Para duas derivadas nulas ao início e fim da trajetória, temos a seguinte curva para o percurso polinomial  $P$  de sexto grau (fig. 2.1):

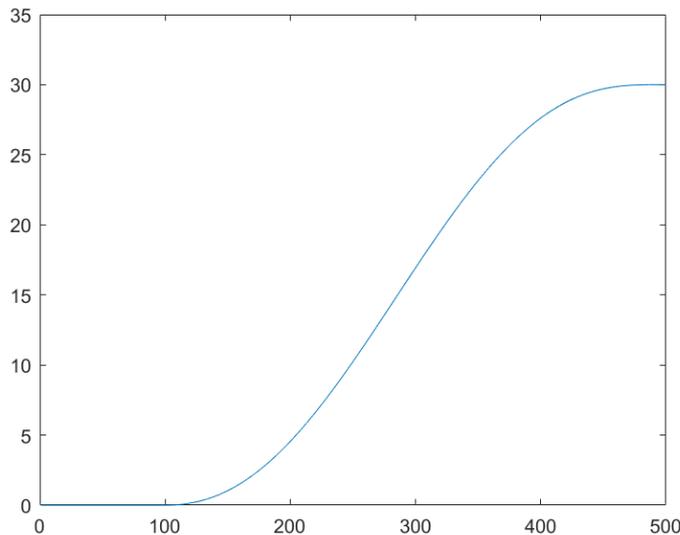


Figura 2.1:  $P$  vs.  $t$ : Trajetória de solo

### 2.1.2 Percurso de fundo: Afastamento Riser-sonda

No contexto de nossa aplicação (seção 1.5), dutos conectores semi-flexíveis conectam o equipamento de solo ao fundo do riser. Simulações realizadas por pesquisadores do NMRI apontaram tensões excessivas sobre estes dutos quando diretamente seguidos pelo riser, devido à aproximação/distanciamento riser-sonda causados por subidas/descidas no relevo.

Com o objetivo de reduzir o efeito de compressão/tração sobre as tubulações, buscou-se realizar um posicionamento dinâmico com relação ao equipamento de solo. Dessa forma, reduzimos a aproximação horizontal entre os dois em subidas e a aumentamos em descidas (fig. 2.2).

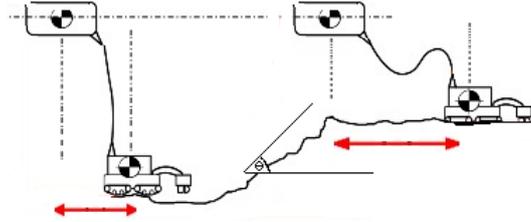


Figura 2.2: Distanciamento horizontal fundo-solo em resposta ao relevo

Para definir a trajetória de fundo do riser  $\Upsilon(0, t)$ , propõe-se a seguinte abordagem heurística: Para cada deslocamento infinitesimal no nível de solo, deseja-se um deslocamento de fundo ponderado em função da angulação de relevo  $\theta$ . A representação analítica desenvolvida para implementar essa abordagem foi:

$$\Upsilon(0, t) = \int_0^t P'(\tau)(1 - \text{sen}(\theta(\tau)))d\tau$$

Onde  $P'(\tau)$  é a derivada do deslocamento da sonda no instante  $\tau$ ,  $\theta$  é a inclinação do relevo com relação à horizontal. Assim, sendo o relevo suficientemente suave, mantém-se a suavidade da trajetória de fundo. Essa trajetória não permite manter a distância riser-sonda constante - para tal seria necessário recuar e avançar a estrutura - mas reduz significativamente o efeito da compressão/tração dos dutos comunicadores. **No restante do trabalho,  $\Upsilon(0, t)$  será dada assumindo o solo uma rampa com pequena angulação** (fig. 2.3):

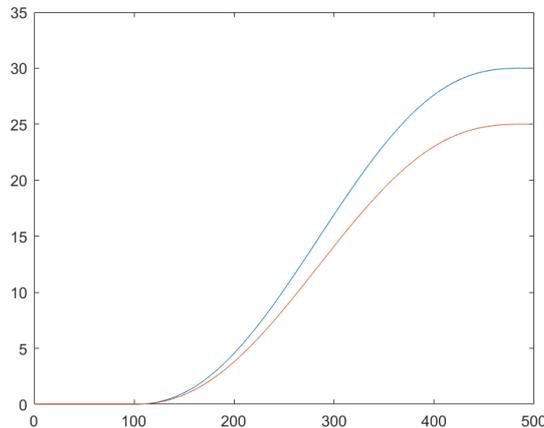


Figura 2.3: Trajetória: solo vs fundo de riser para inclinação constante  $\theta = 10^\circ$

## 2.2 Solução Analítica para as Equações do Sistema

Para o seguimento ideal da trajetória de fundo pretendida, tomou-se a abordagem analítica. Dessa forma, deriva-se uma solução geral para as equações de movimento do riser que, submetidas às condições de contorno desejadas para o fundo, fornecem a trajetória de topo.

Em essência, um riser é uma longa tubulação de aço ( $L \approx 2000$  m) suspensa e imersa em um fluido. Seu deslocamento horizontal,  $\Upsilon$ , se dará por meio da ação de forças estruturais, modeladas pela equação de Timoshenko, e pela ação de forças hidrodinâmicas, descritas pela equação de Morrison. Atrilada à extremidade de fundo, temos uma massa pontual, que ditará o comportamento na fronteira.

Dessa forma, para uma seção infinitesimal  $z$ ,  $\Upsilon(z, t)$  é dado pela EDP [Fortaleza, 2009]:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(z, t) = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \quad (2.1)$$

Cujos parâmetros, para nossa aplicação, são:

Símbolo	Parâmetro	Valor (ud.)	Símbolo	Parâmetro	Valor (ud.)
t	Tempo	$0 < t < 600$ (s)	z	Altura	$0 < z < L$ (m)
E	Módulo de Young	$210 * 10^9$ (Pa)	J	Momento de Inércia	$9 * 10^{-4}$ (kg*m <sup>2</sup> )
$\Upsilon$	Deslocamento	$0 < \Upsilon < 30$ (m)	$\mu$	Arrasto	321.6
m	Densidade Linear	852 (kg/m)	$m_{te}$	Massa de fundo	$20 * 10^3$ (kg)
T	Tensão	$\approx 2.5 * 10^6$ (N)	$T_e$	Tensão da massa	$1.7 * 10^6$ (N)
$\alpha$	Atrito Linearizado	$8.8 * 10^{-4} (\frac{N}{m/s})$	$\alpha_e$	Atrito Linearizado (massa)	$5.5 * 10^{-4} (\frac{N}{m/s})$
$g'$	Gravidade Efetiva	$2.23$ (m/s <sup>2</sup> )	v	Vel. Prop. Onda Mecânica	$3.0 * 10^3$ (m/s)

Tabela 2.1: Parâmetros físicos da planta de mineração sub-oceânica.

Para as grandes estruturas esguias com que estamos lidando, em que a razão diâmetro/comprimento é da ordem de  $10^{-4}$ , temos  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) \gg -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}$ , permitindo negligenciar o termo de quarta ordem. Além disso, sendo as operações realizadas em regime de pequenos ângulos e deslocamentos, o termo não linear pode ser aproximadamente linearizado com uma constante  $2\alpha$ , levando a [Fortaleza, 2009]:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(z, t) = g' \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} + (g'z + v^2) \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} - 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(z, t) \quad (2.2)$$

Em que  $(g'z + v^2) = T(z)/m$  é dada em termos da gravidade efetiva  $g'$  e da velocidade média de propagação mecânica  $v$  [Simões, 2018].

Nas equações,  $z = 0$  designa o fundo, onde atuam as condições de contorno devido à massa:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) = \frac{1}{T_e} \left( m_{te} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} + 2\alpha_e \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

E  $z = L$  designa a trajetória de topo desejada.

## 2.2.1 Não Causalidade do Planejamento de Trajetória e a Transformada de Laplace Bilateral

Primeiramente, buscou-se a solução do sistema básico, de início em repouso e sem forças adicionais nas extremidades, conforme trabalhado em detalhe nos artigos-base:  $\Upsilon(z, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(z, t) = 0$ . Aqui, também, a abordagem utilizada foi a de solução parcial no domínio de Laplace e posterior volta ao domínio do tempo.

No entanto, temos que o processo de planejamento da trajetória de topo nesse caso é um processo explicitamente não causal - em verdade, se trata de um processo *anti-causal*. Devido ao tempo de propagação mecânica pelo riser, a trajetória de topo no tempo presente deve ser construída sobre projeções de *sinais futuros*. De forma equivalente, tem-se que a trajetória de fundo presente é dada em função de sinais no tempo para  $t < 0$ .

Por essa razão, como será evidenciado à frente, a abordagem tradicional de resolução no domínio de Laplace mostra-se inadequada, por não poder modelar propriamente sinais para  $t < 0$ . Isso será relevante para o cálculo da transformada inversa.

Surtem duas alternativas:

- Realizar um deslocamento no eixo do tempo, em que a origem do desenvolvimento do sistema se dá para  $t > 0$ ;
- Utilizar uma abordagem formal, baseada na transformada de Laplace Bilateral.

Para efeitos de aplicabilidade real no planejamento de trajetórias, as duas alternativas são equivalentes. No entanto, tem-se que a alternativa 1 aumenta significativamente a complexidade notacional das equações envolvidas, por inserir uma série de atrasos no sistema.

A abordagem pela transformada bilateral de Laplace, realizada com os devidos cuidados para garantir convergência, mostra-se adequada. Em verdade, há referências implícitas a essa abordagem nos trabalhos [Fortaleza, 2009], [Albuquerque, 2012], [Simões, 2018] visto que todos estes lançam mão do cálculo da transformada inversa de  $e^{\tau s}$  como  $\delta(-\tau)$ , que não existe, *strictu sensu*, para o caso unidirecional tradicional.

**Definição 2.2.1.** *Definimos a transformada de Laplace Bidirecional  $\mathcal{L}$  de uma função por:*

$$\mathcal{L}f(t)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$  dispõe das seguintes propriedades, em contraste com sua análoga unidirecional  $\mathcal{L}_+$  [Bremmer, 1950]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f'(t)(s) &= sF(s) \\ \mathcal{L}f''(t)(s) &= s^2F(s) \\ \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f * g(t) \end{aligned}$$

Nesse sentido,  $\mathcal{L}$  pode ser vista como uma transformada de Fourier para frequências complexas.

Desse ponto em diante, quaisquer menções da transformada de Laplace serão feitas em referência a sua versão bidirecional  $\mathcal{L}$ , a não ser que explicitado o contrário.

## 2.2.2 Solução no Domínio de Laplace

Para a solução no domínio de Laplace, seguimos a abordagem estabelecida em [Simões, 2018], ligeiramente simplificada por algumas escolhas de notação.

**Teorema 2.2.1.** *A função transferência abstrata  $\Upsilon(z, s)/\Upsilon(0, s)$  é dada por:*

$$\frac{\hat{\Upsilon}(z, s)}{\hat{\Upsilon}(0, s)} = \beta_0 \tilde{s}_\alpha \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) + K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) + g' \beta_0^2 \tilde{s}_\alpha^2 \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) - K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \quad (2.4)$$

Em que  $I_v$  e  $K_v$  são as funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem  $v$ , respectivamente,  $\beta_z = \frac{2}{g'} \sqrt{v^2 + g'z}$  e  $\tilde{s}_\alpha = \sqrt{s^2 + 2\alpha s}$ .

*Demonstração.* Aplicando a transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  a 2.2:

$$(g'z + v^2) \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial z^2}(z, s) + g' \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z} - (s^2 + 2\alpha s) \hat{\Upsilon}(z, s) = 0 \quad (2.5)$$

A solução em  $z$  desta equação, em função de  $s$ , é dada por:

$$\hat{\Upsilon}(z, s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \hat{C}_1(s) I_0\left(\frac{2}{g'} \sqrt{v^2 + g'z} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \hat{C}_2(s) K_0\left(\frac{2}{g'} \sqrt{v^2 + g'z} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) \quad (2.6)$$

Utilizando as notações  $\beta_z$  e  $\tilde{s}_\alpha$ , buscamos  $\hat{C}_1$  e  $\hat{C}_2$  por meio da inspeção das condições de contorno de  $\hat{\Upsilon}(z, s)$  e sua derivada em  $z=0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}(0, s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \hat{C}_1(s) I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \hat{C}_2(s) K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \\ \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} \hat{C}_1(s) I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} \hat{C}_2(s) K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Um sistema algébrico simples. Por inversão de matrizes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \\ \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & -\frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}(0, s) \\ \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \end{bmatrix} \implies \\ \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} &= \frac{-\beta_0 g' \sqrt{g'/2}}{\tilde{s}_\alpha (I_0 K_1 + K_0 I_1)(\beta_0 \tilde{s}_\alpha)} \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & -K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \\ -\frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & +I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}(0, s) \\ \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo o Wronskiano entre duas funções de Bessel modificadas igual a  $W(K_v(x)I_v(x)) = I_v K_{v+1} + I_{v+1} K_v = 1/x$ , temos a forma final do nosso sistema:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} &= \beta_0^2 g' \sqrt{g'/2} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \\ \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & -I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}(0, s) \\ \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \end{bmatrix} \\ \hat{C}_1(s) &= \sqrt{g/2} \beta_0 \tilde{s}_\alpha K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \hat{\Upsilon}(0, s) + g' \sqrt{g'/2} \beta_0^2 K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \\ \hat{C}_2(s) &= \sqrt{g/2} \beta_0 \tilde{s}_\alpha I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \hat{\Upsilon}(0, s) - g' \sqrt{g'/2} \beta_0^2 I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nota-se que as constantes  $\hat{C}_1$  e  $\hat{C}_2$  são, também, dadas em termos de combinações lineares de funções modificadas de Bessel. Substituindo 2.8 em 2.6, obtemos a forma:

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}(z, s) = \beta_0 \tilde{s}_\alpha \hat{\Upsilon}(0, s) & \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) + K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \\ & + g' \beta_0^2 \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) - K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por fim, deduz-se da dinâmica de contorno do fundo (eq. 2.3), que:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, s) = \frac{1}{T_e} (m_{te} s^2 \hat{\Upsilon}(0, s) + 2\alpha_e s \hat{\Upsilon}(0, s)) = \frac{m_{te}}{T_e} \hat{\Upsilon}(0, s) \tilde{s}_{\alpha_m}^2 \quad (2.10)$$

Cuja substituição em (1.8) nos leva à equação final:

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}(z, s) = \beta_0 \tilde{s}_\alpha \Upsilon(0, s) & \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) + K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \\ & + g' \beta_0^2 \frac{m_{te}}{T_e} \tilde{s}_{\alpha_m}^2 \Upsilon(0, s) \left( I_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) - K_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Provando nosso teorema.

### 2.2.3 Volta ao domínio do tempo

É na volta para o domínio do tempo que será demonstrada a utilidade da proposta utilização da transformada bilateral de Laplace. Aqui, são usados lemas semelhantes aos utilizados em [Simões, 2018], mas um desenvolvimento alternativo leva a uma forma diferente para as soluções.

Para volta ao domínio do tempo, será necessário realizar a transformada inversa de Laplace de funções da forma  $I_v(\beta_z \sqrt{s^2 + 2\alpha s})$  e  $K_v(\beta_z \sqrt{s^2 + 2\alpha s})$ . Para isso, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 2.2.1.** *As funções de Bessel  $I_v$  e  $K_v$  possuem as seguintes fórmulas integrais [DLMF, 2019]:*

$$I_v(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{v-1/2} e^{-\tau x} d\tau = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \hat{\iota}_v(x) \quad (2.12)$$

$$K_v(x) = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}x^v\right)}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty (\tau^2 - 1)^{v-1/2} e^{-\tau x} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}x^v\right)}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \hat{\kappa}_v(x) \quad (2.13)$$

No domínio de Laplace, exponenciais da forma  $e^{-\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}}$  precisam ser decompostas em funções mais simples. Nesse sentido, será de importância a seguinte fórmula, derivada do cálculo operacional:

**Lema 2.2.2.** *No domínio  $s$ ,  $e^{-\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}}$  assume a seguinte transformação [Mikusinski, 2014]:*

$$e^{-\beta_z \sqrt{s^2 + 2\alpha s} \tau} = e^{-\alpha \beta_z \tau} e^{-\beta_z s \tau} + \mathcal{L}\{\mathcal{B}\} \quad (2.14)$$

em que  $\mathcal{B}$  é uma função no tempo dada por:

$$\mathcal{B}(\beta_z \tau, t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \beta_z \tau \\ \frac{\beta_z \tau}{\sqrt{t^2 - \beta_z^2 \tau^2}} e^{-\alpha t} \alpha I_1(\alpha \sqrt{t^2 - \beta_z^2 \tau^2}) & , 0 \leq \beta_z \tau < t \end{cases} \quad (2.15)$$

Com essas duas proposições, torna-se possível provar o seguinte lema a respeito da transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  das componentes integrais de  $I_v$  e  $K_v$ ,  $\hat{\iota}_v$  e  $\hat{\kappa}_v$ :

**Lema 2.2.3.**

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{\kappa}_v(\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}) \right\} = U_{(t-\beta_z)} e^{-\alpha t} \frac{(t^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} + \int_{\beta_z}^t \mathcal{B}(\xi, t) \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} d\xi = \kappa_v(\beta_z, t) \quad (2.16)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{\iota}_v(\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}) \right\} = (U_{(\beta_z+t)} - U_{(\beta_z-t)}) e^{-\alpha t} \frac{(\beta_z^2 - t^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} + \int_0^{\beta_z} \mathcal{B}(\xi, t) \frac{(\beta_z^2 - \xi^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} d\xi = \iota_v(\beta_z, t) \quad (2.17)$$

Onde  $U_x$  é o degrau no tempo  $x = 0$ .

*Demonstração.* Começamos pela prova de 2.16. A prova de 2.17 seguirá por analogia.

Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{\kappa}_v(\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}) \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_1^\infty (\tau^2 - 1)^{v-1/2} (e^{-\alpha\beta_z\tau} e^{-\beta_z s\tau} + \mathcal{L}\{\mathcal{B}\}(\beta_z\tau, s)) d\tau \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^\infty U_{(\tau-1)} e^{-\beta_z s\tau} e^{-\alpha\beta_z\tau} (\tau^2 - 1)^{v-1/2} + U_{(\tau-1)} (\tau^2 - 1)^{v-1/2} (\mathcal{L}\{\mathcal{B}\}(\beta_z\tau, s)) d\tau \right\} \end{aligned}$$

Realizando uma troca de variáveis  $\xi = \beta_z\tau$ , nota-se que se trata de inverter uma transformada simples na forma tradicional:

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-s\xi} U_{(\xi-\beta_z)} e^{-\alpha\xi} \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} + U_{(\xi-\beta_z)} \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} \mathcal{L}\{\mathcal{B}(\xi, s)\} d\xi \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left\{ U_{(\xi-\beta_z)} e^{-\alpha\xi} \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} \right\} \right\} + \int_{-\infty}^\infty U_{(\xi-\beta_z)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}\{\mathcal{B}\}(\xi, t) \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} d\xi \right\} \\ &= U_{(t-\beta_z)} e^{-\alpha t} \frac{(t^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} + \int_{\beta_z}^t \mathcal{B}(\xi, t) \frac{(\xi^2 - \beta_z^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} d\xi = \kappa_v(\beta_z, t). \end{aligned}$$

Onde o intervalo de integração do segundo termo justifica-se por  $\mathcal{B} = 0$  para  $\xi > t$  (4.1).

De forma análoga, temos para  $I_v$ :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{\iota}_v(\beta_z \sqrt{s^2 + \alpha s}) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{v-1/2} (e^{-\alpha\beta_z\tau} e^{-\beta_z s\tau} + \mathcal{L}\{\mathcal{B}\}(\beta_z\tau, s)) d\tau \right\}$$

Resultando em:

$$= (U_{(\beta_z+t)} - U_{(\beta_z-t)}) e^{-\alpha t} \frac{(\beta_z^2 - t^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} + \int_0^{\beta_z} \mathcal{B}(\xi, t) \frac{(\beta_z^2 - \xi^2)^{v-1/2}}{\beta_z^{2v}} d\xi = \iota_v(\beta_z, t)$$

Conforme se vê, para cálculo efetivo da transformada inversa de Laplace de  $\hat{\iota}$ , é necessário o maquinário analítico da transformada bilateral.

Com estes resultados, é possível determinar a função no tempo  $\Upsilon(z, t)$ :

**Teorema 2.2.2.** *A trajetória analítica do riser no tempo  $t$  a uma altura  $z$  é dada por:*

$$\begin{aligned} \Upsilon(z, t) = \frac{\beta_0^2}{\pi} & \left( \left( \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) + 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right) * \left( \iota_0(\beta_z, t) * \kappa_1(\beta_0, t) + \kappa_0(\beta_z, t) * \iota_1(\beta_0, t) \right) \right. \\ & \left. + \frac{g'}{T_e} \left( \frac{\partial^2 \Upsilon}{m_{te} \partial t^2}(0, t) + 2\alpha_e \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right) * \left( \iota_0(\beta_z, t) * \kappa_0(\beta_0, t) - \kappa_0(\beta_z, t) * \iota_0(\beta_0, t) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Decompondo  $I_v$  e  $K_v$  segundo (2.12) e (2.13) e aplicando as identidades 2.17 e 2.16:

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon}(z, s) = \frac{\beta_0^2}{\pi} & \left( \tilde{s}_\alpha^2 \Upsilon(\hat{0}, s) \left( \hat{\iota}(\beta_z \tilde{s}_\alpha) \hat{\kappa}_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) + \hat{\kappa}_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) \hat{\iota}_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \right. \\ & \left. + g' \tilde{s}_{\alpha_m}^2 \Upsilon(\hat{0}, s) \left( \hat{\iota}_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) \hat{\kappa}_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) - \hat{\kappa}_0(\beta_z \tilde{s}_\alpha) \hat{\iota}_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Claramente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{s}_\alpha^2 \Upsilon(0, s)\} &= \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) + 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \\ \mathcal{L}^{-1}\{g' \tilde{s}_{\alpha_m}^2 \Upsilon(0, s)\} &= \frac{g'}{T_e} \left( \frac{\partial^2 \Upsilon}{m_{te} \partial t^2}(0, t) + 2\alpha_e \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right) \end{aligned}$$

Para realizar a transformada inversa de Laplace de 2.19, portanto, basta utilizar o convolução para a transformada de Laplace bilateral. Aplicado à eq. 2.19, ele fornece nosso teorema.

Nessa forma, a solução imediatamente fornece insights a respeito da relação entre dois parâmetros de importância do sistema: a altura  $z$  e o atraso de propagação mecânica no riser.

À medida que  $z$  cresce, temos o crescimento de  $\beta_z$ , ampliando o raio de integração de valores negativos nas funções  $\iota_v$ , fazendo que o *núcleo convolutivo* (funções a serem convolucionadas com as trajetórias desejadas) adentre o semiplano  $t < 0$ . O efeito imediato disto é que o adiantamento no tempo de  $\Upsilon(z, t)$  será crescerá  $\propto \sqrt{z}$ . Isso se vê claramente no adiantamento dos *núcleos* convolutivos para maiores alturas, conforme se vê (figs. 2.4 e 2.5):

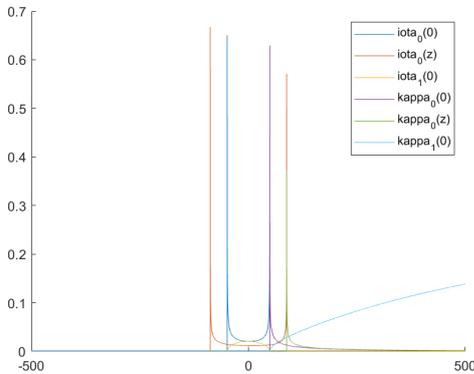


Figura 2.4: Funções  $\iota_v(z, t)$  e  $\kappa_v(z, t)$

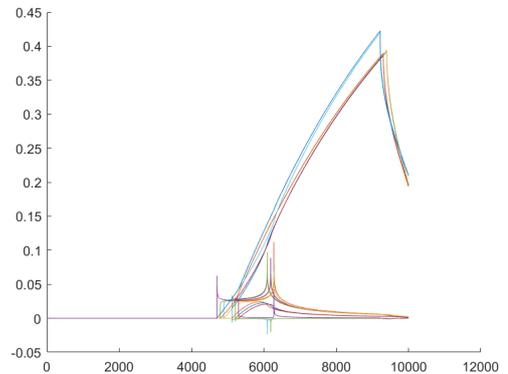


Figura 2.5: Núcleos para alguns valores de  $z$

Dessa forma, caso a trajetória desejada tenha um início suficientemente atrasado, obtém-se uma trajetória de topo fisicamente realizável com início em  $t > 0$  (fig. 2.6):

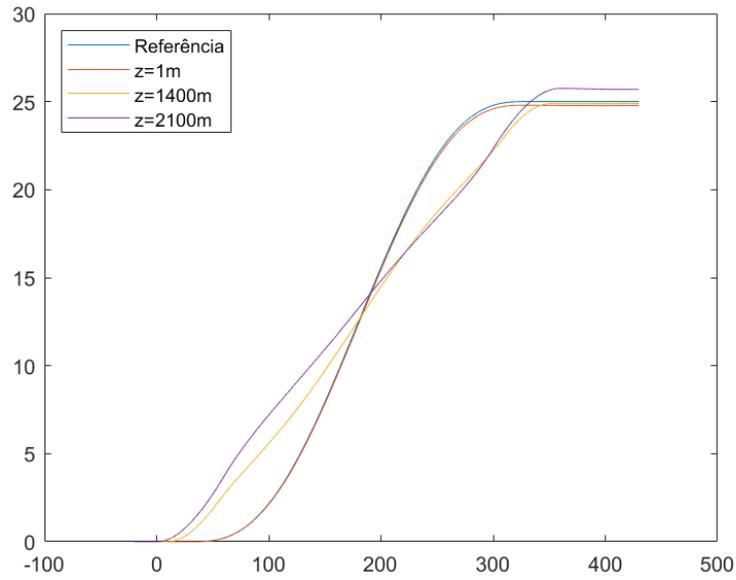


Figura 2.6: Trajetórias causais

Enquanto trajetórias demasiadamente rápidas ou adiantadas resultam em trajetórias de topo não realizáveis, iniciadas em tempo negativo (fig. 2.7):

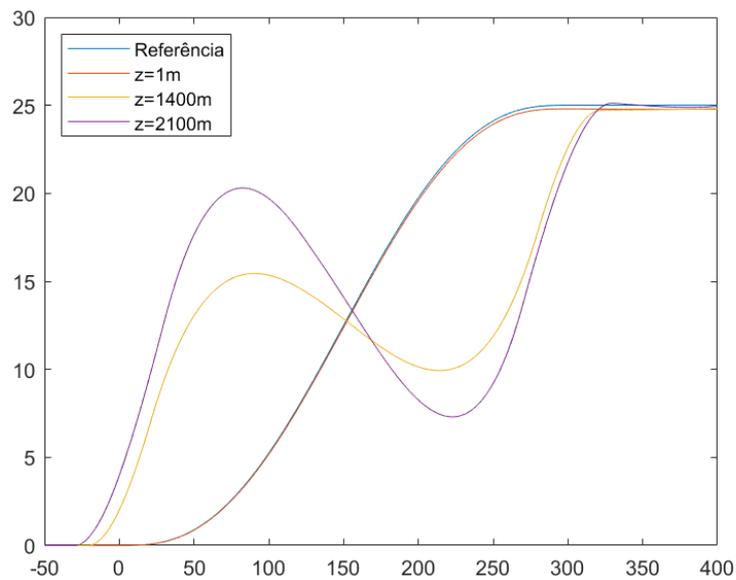


Figura 2.7: Trajetórias não causais

## 2.3 Aplicação Para a Mineração

### 2.3.1 Contorno: Riser não estático

Sendo as soluções para o caso estático não separáveis, derivar uma solução analítica para casos que não partam do repouso a princípio se mostra significativamente mais difícil. Aqui é muito mais difícil a abordagem de decomposição do estado inicial em combinações de autofunções do sistema [Figueiredo, 1977].

No entanto, no contexto de constante movimentação da mineração marítima, não se pode esperar que o riser sempre parta de uma posição completamente vertical e estacionária.

É notório que a abordagem utilizada na prova da solução analítica não faça, verdadeiramente, qualquer menção às condições iniciais do problema. De fato, a transformada bilateral de Laplace, em contraste com sua análoga causal, "não vê" as condições de contorno no tempo.

Na verdade isso se dá pois a abordagem estática é generalizável sem alterações para casos de posição e velocidade não-nulos na origem. Nesse sentido, a resposta, tal qual seria de se esperar, pode ser uma trajetória não causal/não realizável (figs. 2.8 e 2.9):

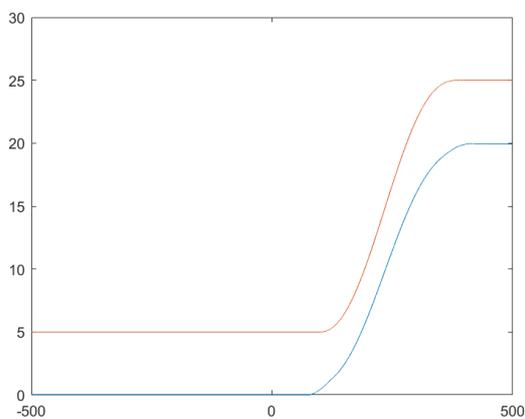


Figura 2.8: Início  $\Upsilon(0,0) \neq 0$

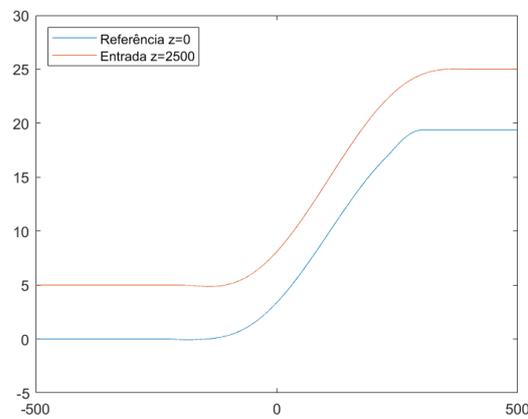


Figura 2.9: Início  $\Upsilon(0,0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0,0) \neq 0$

Em termos do nosso planejamento de trajetória, isso é um resultado lógico. Não se poderia esperar acompanhamento perfeito causal de um objeto que já começa em movimento, tendo em vista o atraso no sistema. Por essa mesma razão, vê-se que a trajetória planejada diverge para derivada não nula no tempo inicial de contagem (fig.2.10):

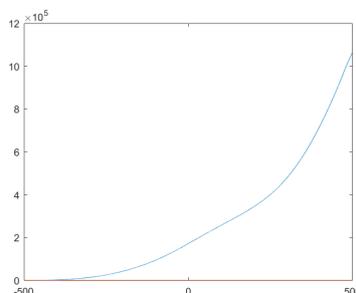


Figura 2.10: Derivada não-nula no início do tempo t=-500

Aqui cabe ainda o questionamento de como planejar uma trajetória para uma configuração *arbitrária* de início do riser: A partir de  $\Upsilon(z, 0)$  e  $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(z, 0)$ , estados iniciais genéricos do sistema, como se planeja uma trajetória, visto que não parece haver menção alguma em 2.18 à configuração do riser fora das condições de contorno?

Como resposta, basta notar que a configuração estática/inicial do riser é uma solução para a EDO de Timoshenko em  $z$ . Para um qualquer instante no tempo  $\tau$ , tem-se que  $\Upsilon(z, \tau)$  é dado *unicamente* pela EDOs das forças mecânicas na estrutura a partir das condições de contorno. Dessa forma, há severas limitações para as configurações que  $\Upsilon$  pode assumir em qualquer instante - e o planejamento para as configurações possíveis as computa implicitamente por meio da fronteira.

### 2.3.2 Contorno: Forças adicionais na extremidade de fundo

Em contextos de mineração oceânica ou operações petrolíferas complexas, um modelo que não suporte tensões externas não seria capaz de fornecer uma trajetória robusta.

Na aplicação em estudo, mostrou-se necessário modelar forças externas adicionais na extremidade do riser, causadas pela ação dos dutos e da sonda. Estas forças surgem nas condições de contorno do sistema:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) = F_e(t) + F_h(0, t)$$

Antes, havendo apenas o peso na extremidade, havia:

$$F_e = T_e \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t)$$

No entanto, conforme determinado em experimento (fig.2.11), a tensão no cabo cresce com  $\Upsilon$ :

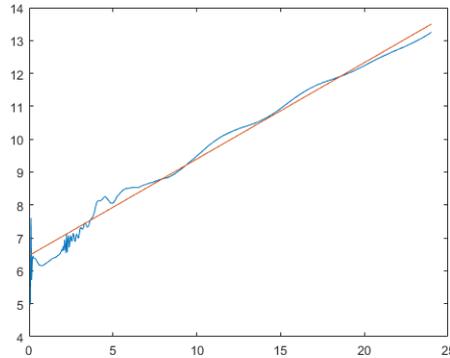


Figura 2.11: Tensão (kN) exercida pelo conector sobre o riser vs.  $\Upsilon$

Essa tensão pode ser aproximada fielmente por uma reta de coeficientes  $a$  e  $b$ , em que  $a \approx 6.41\text{kN}$  e  $b \approx .033\text{kN/m}$  levando à equação:

$$F_e(t) = (T_e + a + b\Upsilon(0, t)) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t)$$

O produto  $\Upsilon(0, t) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t)$  a torna uma condição de contorno não-linear intratável, impossibilitando uma solução analítica direta.

Para contornar esse problema, então, realizou-se uma decomposição aproximada destas tensões.

**Proposição 2.3.1.** *Para um regime de pequenos ângulos, pode-se aproximar  $F_e$  por:*

$$F_e \approx T_{virt} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) + b \Upsilon(0, t) \Theta(t)$$

Onde  $T_{virt} = T_e + a$  e  $\Theta(t) = \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial z}(0, t)$ , sendo  $\Upsilon_0(z, t)$  a solução derivada para o caso estático.

Sob essa premissa, tem-se:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) = \frac{m_{virt}}{T_{virt}} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) + \frac{2\alpha}{T_{virt}} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) + \frac{b}{T_{virt}} \Theta(0, t). \quad (2.20)$$

Visto que houve mudanças apenas na fronteira, o sistema de equações para  $\hat{C}_1$  e  $\hat{C}_2$  permanece idêntico ao encontrado no caso original. Dessa forma, têm-se o mesmo sistema com novas constantes, a saber:

$$\begin{bmatrix} I_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & K_0(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \\ \frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} I_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) & -\frac{\tilde{s}_\alpha}{g' \beta_0} K_1(\beta_0 \tilde{s}_\alpha) \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g'}} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Upsilon}(0, s) \\ \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s) \end{bmatrix}$$

Em que o valor de  $v$  e  $\beta$  foram alterados pela variação de tensão  $T - T_{virt}$ . Conforme derivado no planejamento estático, chega-se à equação final:

$$\begin{aligned} \Upsilon(z, t) &= \frac{\beta_0^2}{\pi} \left( \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) + 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right) * \left( \iota_0(\beta_z, t) * \kappa_1(\beta_0, t) + \kappa_0(\beta_z, t) * \iota_1(\beta_0, t) \right) \\ &+ \left( \frac{m_{virt}}{T_{virt}} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) + \frac{2\alpha}{T_{virt}} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) + \Upsilon(0, t) \frac{b}{T_{virt}} \Theta(t) \right) * \left( \iota_0(\beta_z, t) * \kappa_0(\beta_0, t) - \kappa_0(\beta_z, t) * \iota_0(\beta_0, t) \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

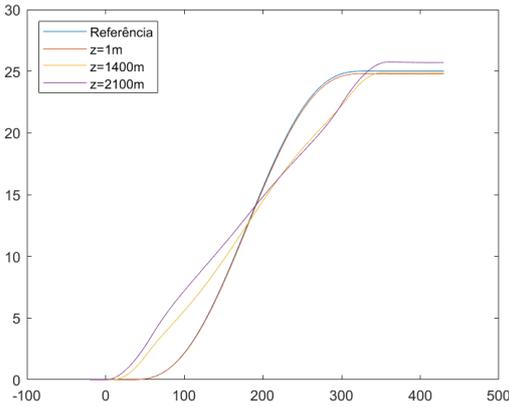


Figura 2.12: Solução estática

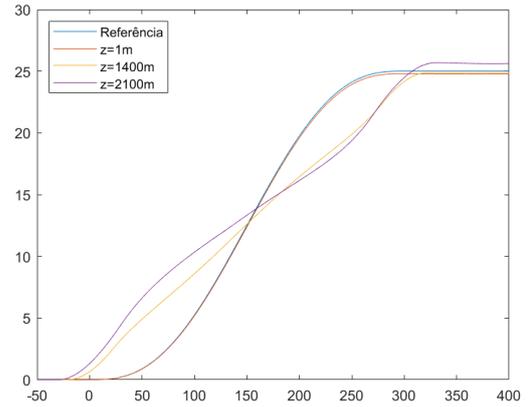


Figura 2.13: Solução para força de fundo

Resta saber se a aproximação usada é, de fato, robusta. Isso será demonstrado em simulação.

### 2.3.3 Aspectos Computacionais do Cálculo das Trajetórias

Finalmente, após calculadas as trajetórias analíticas de topo, mostrou-se conveniente adentrar os aspectos técnicos do cálculo destas trajetórias.

As considerações desta seção e da próxima serão contruídas principalmente sobre comparações com as implementações usadas em [Simões, 2018], usadas como base e inspiração para implementação das novas ferramentas e melhorias numéricas. Esta implementação anterior será designada como *herdada*.

#### 2.3.3.1 Estabilidade e Precisão

A solução analítica para a trajetória do sistema herdado, passada tempo suficiente em repouso final, não tende a um equilíbrio definitivo. Implementou-se um procedimento que corrija isto, baseado em evitar acúmulo de erro numérico e no melhor tratamento das caudas de convolução.

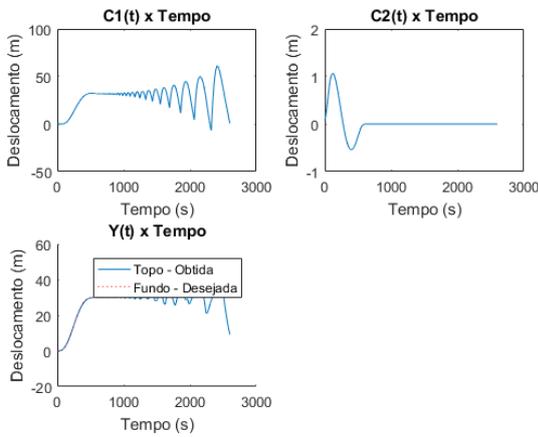


Figura 2.14: Implementação herdada para longo repouso

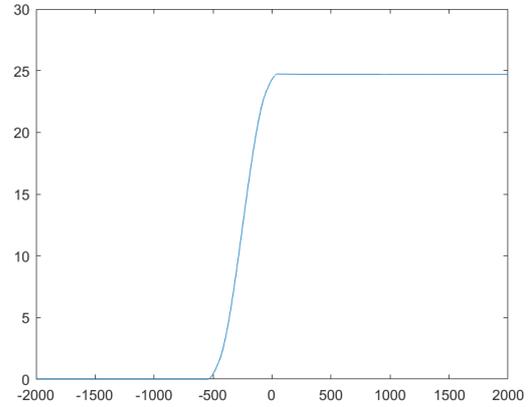


Figura 2.15: Implementação nova para longo repouso

Para a definir de forma robusta a granularidade da simulação, utilizou-se a seguinte métrica:

$$\forall t, |\Upsilon(0, t) - \Upsilon^*(0, t)| < 0.01$$

Em que  $\Upsilon^*(0, t)$  é o valor estimado pelo algoritmo para a trajetória de fundo, cuja precisão aumenta com o aumento do número de amostras de  $t$ . Dessa forma, estabeleceu-se a divisão da unidade de tempo em 100 discretizações. Trata-se de um valor relativamente baixo, que possibilitou o rápido cálculo das convoluções do algoritmo.

#### 2.3.3.2 Velocidade de Processamento

O formato derivado para a solução  $\Upsilon(z, t)$  tem significativas vantagens computacionais sobre as soluções derivadas em [Albuquerque, 2012] e [Simões, 2018].

Primeiramente, optou-se pela identidade (2.15), em contraste com a utilizada nos artigos anteriores:

$$\mathcal{B}(\xi, t) = \frac{\xi}{\sqrt{t^2 + 2\xi t}} i\alpha J(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\xi t})$$

Essa opção não foi aleatória: Nessa forma, é expressar todos os resultados em termos de integrais sobre um intervalo finito, agilizando significativamente o processamento e dispensando o uso de substituições onerosas.

Além disso, a identidade  $-iJ_1(ix) = I_1(x)$  permitiu significativa melhora no cálculo do kernel integral de Bessel. Isso, acoplado à troca de variáveis  $\xi = \beta_z \tau$  permitiu uma abordagem generalizada para o cálculo desta que é mensuravelmente a parte mais computacionalmente demandante da computação.

Function Name	Calls	Total Time	Self Time*	Total Time Plot (dark band = self time)
<a href="#">ConvolutionCore</a>	1	92.568 s	0.834 s	
<a href="#">integral</a>	30003	88.204 s	0.385 s	
<a href="#">funfun\private\integralCalc</a>	30003	80.644 s	1.613 s	
<a href="#">funfun\private\integralCalc&gt;vadapt</a>	30003	79.031 s	0.609 s	
<a href="#">...te\integralCalc&gt;iterateArrayValued</a>	30003	77.934 s	10.044 s	
<a href="#">Kappa0</a>	40002	51.918 s	1.207 s	
<a href="#">Kernel</a>	4500450	51.906 s	51.906 s	
<a href="#">...t:@(k)Kernel(k.tau)/sqrt(k.*k-beta^2)</a>	2589150	37.020 s	7.011 s	
<a href="#">ConvolutionCore&gt;@(x)Kappa0(beta0,x)</a>	20001	27.604 s	0.083 s	
<a href="#">ConvolutionCore&gt;@(x)Kappa1(beta0,x)</a>	20001	25.971 s	0.076 s	
<a href="#">Kappa1</a>	20001	25.894 s	0.551 s	
<a href="#">ConvolutionCore&gt;@(x)Kappa0(betaz,x)</a>	20001	24.479 s	0.083 s	
<a href="#">...rt(k.*k-beta^2).*Kernel(k.tau)/beta^2</a>	1353300	18.484 s	3.477 s	
<a href="#">lota0</a>	40002	10.098 s	0.845 s	

Figura 2.16: Tempo gasto em cada função no código matlab. *Kernel* denota o cálculo de  $\mathcal{B}$

Em seguida, as identidades (2.16, 2.17) permitiram a expressão de parcelas das funções  $\iota$  e  $\kappa$  por meio de funções racionais simples, evitando a abordagem integral dos artigos anteriores.

Finalmente, e provavelmente de maior importância, vem o uso do operador convolução  $*$  como uma operação primitiva. Ao evitar 'abri-lo' tal qual nas implementações anteriores, tornou-se possível usar suas propriedades algébricas para aumentar a eficiência da computação da solução em algumas ordens de magnitude.

Isso é de particular importância para cálculos para múltiplas trajetórias. O núcleo convolucional independe da trajetória e das condições da operação, sendo atrelado apenas aos aspectos fixos do sistema ( $L, m, v, g'$ ),

Desta propriedade *separável* da solução torna-se possível realizar o cálculo do componente mais lento apenas uma vez para cada valor de  $z$ . Assim sendo, realizar o replanejamento de trajetórias torna-se trivialmente rápido, sendo possível recalculer o trajeto de diversas seções do riser em questão de segundos.

Isso é de importância no contexto pretendido de cálculo e recálculo de trajetórias em tempo real.

O acúmulo de todas estas melhorias pontuais resultou em uma melhora muito significativa no processamento das trajetórias desejadas. Para os mesmos requisitos de desempenho, o software da implementação herdada demandava entre 20 e 30 minutos para o cálculo de cada trajetória. ***A nova implementação demanda 8 minutos para o cálculo do primeiro conjunto de 5 trajetórias (5 valores de  $z$ ), e a partir daí é capaz de adaptar estas trajetórias em menos de dez segundos.***

## Capítulo 3

# Discretização: Simulação e Redução Modal

Para validar e atuar sobre as trajetórias analíticas obtidas, montou-se uma estrutura de simulação para o modelo.

Restrições computacionais determinam que a simulação de sistemas de ordem infinita necessariamente passe por um processo de discretização e/ou redução. *A priori*, isso não é um problema: em geral, dentre os infinitos pólos do sistema, é um número finito e relativamente pequeno destes que domina a dinâmica do sistema no tempo.

No entanto, como será exposto, o modelo específico da nossa aplicação oferece desafios adicionais para simulação. *Isso se dá pois na aplicação proposta, tem-se que a massa de fundo  $m_{te}$  é de grandeza comparável ou menor à massa dos segmentos do riser. A ausência de uma massa dominante na ponta, como será detalhado, significa que a simulação do sistema fica mais sujeita a instabilidades.*

Estas dificuldades foram os principais obstáculos na simulação do modelo e determinaram a criação dos métodos mais elaborados de análise e controle que serão dispostos nos próximos capítulos.

Os resultados serão apresentados em referência direta aos obtidos em [Albuquerque, 2012] e [Simões, 2018], de forma a ressaltar suas peculiaridades. Dessa forma, as análises serão feitas com o objetivo de investigar a influência da massa de fundo sobre o comportamento dinâmico do sistema.

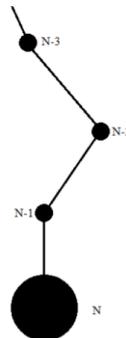


Figura 3.1: Modelo Discretizado de Riser com massa na ponta

### 3.1 Discretização por Diferenças Finitas e Validação das Trajetórias Planejadas

Uma forma natural de discretização de sistemas de ordem infinita é pelo método de diferenças. Neste método, amostra-se o modelo em uma variável, aproximando suas derivadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \approx \Delta f = \frac{f(z + l, t) - f(z, t)}{l}$$

Aproximando as derivadas no espaço de nosso modelo linearizado (2.1) por diferenças, obtém-se a equação discreta equivalente para  $Y$ :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}(z, t) = (g'z + v^2)\Delta^2 Y(z, t)g'\Delta Y(z, t) - 2\alpha\frac{\partial Y}{\partial t}(z, t) \quad (3.1)$$

Discretizando o riser de extensão  $L$  em  $N$  elementos de extensão  $l = L/N$ , define-se  $Y_n(t) = Y(nl, t)$  o deslocamento para o elemento de número  $n$ . Dessa forma, obtém-se um sistema de  $N$  equações diferenciais em  $t$ , acopladas pela seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{Y_{n-2} - Y_{n-1} + 6Y_n - 4Y_{n+1} + Y_{n+2}}{l^4} + ((n-1)g'l + v^2) \frac{Y_{n-1} - 2Y_n + Y_{n+1}}{l^2} - 2\alpha \frac{\partial Y}{\partial t}(z, t)$$

Onde  $n \in (3, 4, \dots, N-2)$ . Essa configuração leva naturalmente a uma representação do sistema por espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Em que a matriz entrada  $B$  representa a força de topo  $z = L$  sobre a estrutura e a matriz  $C$  tem uma única posição não nula, o deslocamento de  $z = 0$ .

$$x_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} Y_{N \times 1} \\ \frac{\partial}{\partial t} Y_{N \times 1} \end{bmatrix}; A_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} 0 & I_{N \times N} \\ A'_{N \times N} & -2\alpha I_{N \times N} \end{bmatrix}; B_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -EJ/ml^4 \\ \frac{3EJ}{ml^4} + \frac{(N-1)g'l+v^2}{l^2} + \frac{g'}{2l} \end{bmatrix}; C_{1 \times 2N} = [1 \ 0 \ \dots \ 0];$$

E  $A$  é dada por uma matriz em blocos, em que  $-2\alpha I$  é uma matriz diagonal representando o atrito linearizado  $A'$  representa as forças mecânicas agindo sobre  $Y$  segundo a equação x.

$$A'_{nm} = \left[ 0_{1 \times m-2}, \frac{-3EJ}{ml^4}, \frac{4EJ}{(ml^4)} + \frac{T+mgl(n-1)}{ml^2} - \frac{g}{2l}, \frac{-6EJ}{(ml^4)} - 2\frac{T+mgl(n-1)}{ml^2}, \frac{4EJ}{(ml^4)} + \frac{T+mgl(n-1)}{ml^2} - \frac{g}{2l}, \frac{-3EJ}{ml^4}, 0_{1 \times n-m-2} \right]$$

Por meio de uma implementação matricial no simulink, buscou-se validar as trajetórias planejadas no capítulo 1. Com realimentação de blocos, foi possível simular também a resposta do sistema para atrito quadrático:

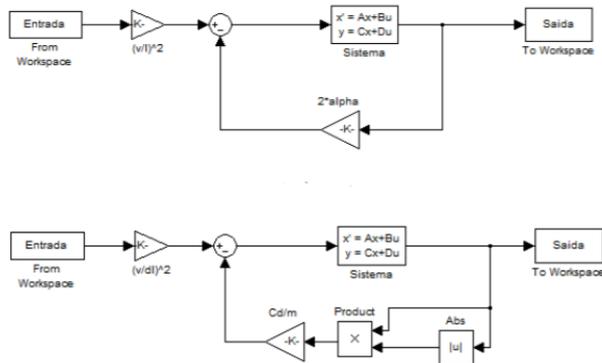


Figura 3.2: Planta no Simulink para simulação.

Dada a convergência do método de diferenças para  $n$  grande, foram iniciadas as simulações com grande número de amostras ( $N = 100, A = A_{200 \times 200}$ ). De início, foram prontamente validadas as trajetórias do capítulo 1 para valores de massa  $m = 400T$ .

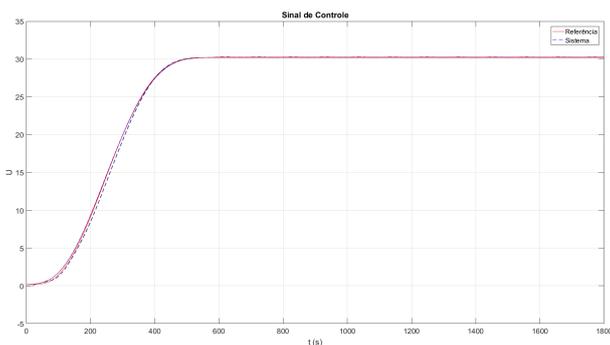


Figura 3.3: Resposta em Malha Aberta para 400T

No entanto, para a massa pequena do contexto de mineração, as simulações preliminares não foram bem sucedidas:

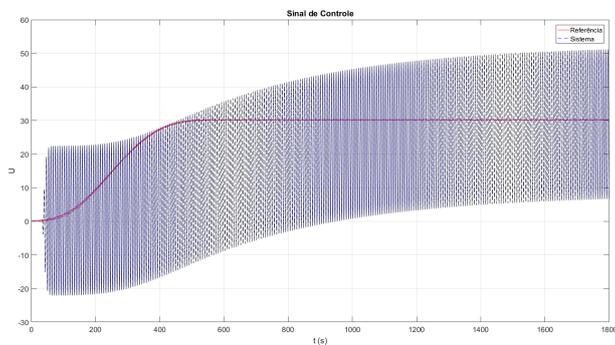


Figura 3.4: Resposta em Malha Aberta para 20T

## 3.2 Análise Dinâmica do Sistema Discretizado

Tendo em vista as patologias emergentes no caso para pequenas massas, tornou-se necessário realizar uma análise mais profunda do sistema discreto.

### 3.2.1 Pólos

Para 100 discretizações, o sistema apresenta os seguintes diagramas pólo zero para as respectivas massas (400T e 20T):

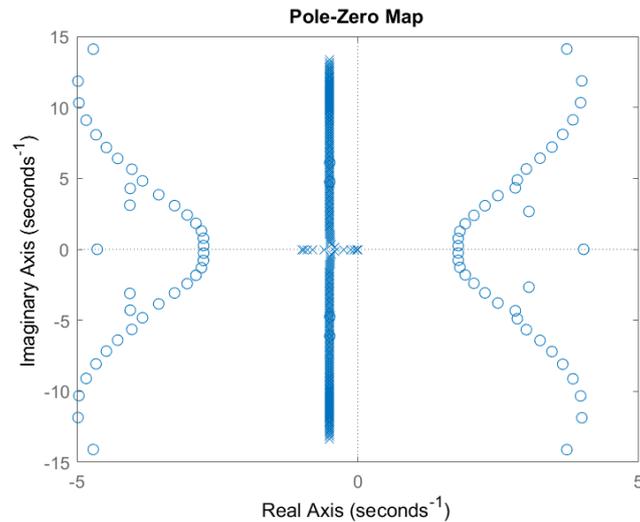


Figura 3.5: Sistema Discretizado para 400T

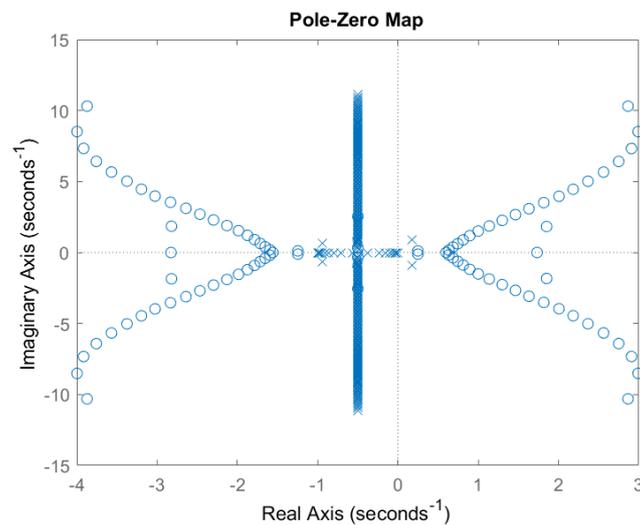


Figura 3.6: Sistema Discretizado para 20T (instável)

Conforme nota-se, para o cenário de menor massa surgem pólos instáveis no semi-plano direito.

Não estava clara, a princípio, a explicação para esse fenômeno. Várias hipóteses foram levantadas, dentre as quais a possibilidade de a aproximação linear não ser estável para pequenas massas ao fundo. Decorre dos próximos resultados que este não é o caso.

**Proposição 3.2.1.** *A função  $V_{vw}^1(\lambda x) = K_v(\lambda x)I_w(\lambda x_1) - (-1)^{v+w}K_w(\lambda x_1)I_v(\lambda x)$  não possui zeros no semi-plano direito em  $\lambda$  para  $x, x_1 > 0, x, x_1 \in \mathbf{R}$ . Adicionalmente, no mesmo domínio,  $V_{vw}^1(\lambda x) + V_{v+1,w}^1(\lambda x) \neq 0$*

[Schitzer, 1972] [Kerimov, 1984]

**Corolário 3.2.0.1.** *O sistema dado por (1.2) é estável para todos valores positivos de  $\alpha$*

*Demonstração.* Considere a função transferência imprópria do sistema dada em (2.4). Invertendo-a, obtém-se que a função transferência própria  $\Upsilon(0, s)/\Upsilon(L, s)$  é da forma

$$(V_{vw}^1(\tilde{s}\beta) + V_{v+1,w}^1(\tilde{s}\beta))^{-1}$$

Da proposição acima, decorre que ela não possui pólos instáveis.

Com esta informação, pode-se afirmar com confiança que o surgimento destes pólos no semi-plano direito é devido a erro de precisão numérico/computacional, não implicando numa instabilidade dos resultados em um contexto real.

De fato, com o aumento do número de amostras e redução da massa, nota-se que a matriz A se aproxima de uma matriz singular  $\lim \det \rightarrow 0$ , implicando em grande impacto de erros de arredondamento no cálculo da resposta do sistema associado.

### 3.2.2 Controlabilidade e Observabilidade

De forma semelhante, tem-se que as matrizes de observabilidade e controlabilidade do sistema se aproximam de matrizes singulares com o aumento das amostras e a redução da massa. Isso impacta diretamente sobre as perspectivas de controle do sistema discretizado.

N	Det. Matriz Controlabilidade 400T	Det. Matriz Controlabilidade 20T
80	$6.6 * 10^{-24}$	$3.7 * 10^{-39}$
120	$1.8 * 10^{-42}$	<i>NaN</i>

Tabela 3.1: Determinante das matrizes de controlabilidade vs número de discretizações

```

systest = ss(AA, BB, CC, DD);
ctr = det(ctrb(systest))
pzmap(systest)

ctr =

    -Inf

```

Figura 3.7: Código Matlab determinando não controlabilidade

### 3.3 Redução Modal

Tendo em vista as limitações do esquema de discretização proposto, em que o aumento no número de amostras piora significativamente algumas de suas propriedades, torna-se necessário criar um sistema de ordem reduzida que disponha das características dinâmicas desejadas.

Na abordagem de Redução Modal, um sistema de grande ordem é simplificado e representado por um número relativamente pequeno dos seus chamados *harmônicos dominantes*. Estes harmônicos representam os pólos de maior ganho e/ou relevância dinâmica sobre o sistema.

A determinação desses harmônicos se dá pela decomposição de  $A$  em seus autovalores  $\lambda$  e seus autovetores  $v$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{2N} \end{bmatrix} [v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} \dots v_{\lambda_{2N}}] = \text{diag}(\lambda)V$$

Dessa decomposição deriva-se uma nova representação em espaço de estados:

$$\tilde{x} = V^{-1}x$$

Pela coleta de resíduos de cada autovalor, determinam-se os ganhos referentes a cada harmônico. Daí, torna-se possível determinar os  $M$  harmônicos dominantes  $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_M)$ , em que  $M$  é a ordem desejada para o sistema reduzido do sistema.

Sendo o atraso um componente de ordem infinita  $e^{(-s\xi)}$ , um modelo de ordem drasticamente reduzida não refletiria propriamente o atraso de propagação do riser, levando a inclusão de um atraso complementar no sistema modal reduzido.

Todas estas configurações resultam em um modelo reduzido  $\tilde{A}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{A}\tilde{x}(t - \xi) + \tilde{B}u(t - \xi) \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

### 3.3.1 Harmônicos Dominantes do sistema

Primeiramente, é necessário atestar que os harmônicos dominantes coletados convergem para para os do sistema real. Isso se verificou em simulação, em que tínhamos a convergência da posição no plano  $s$  e ganho dos primeiros harmônicos, à medida que aumentávamos a taxa de discretização:

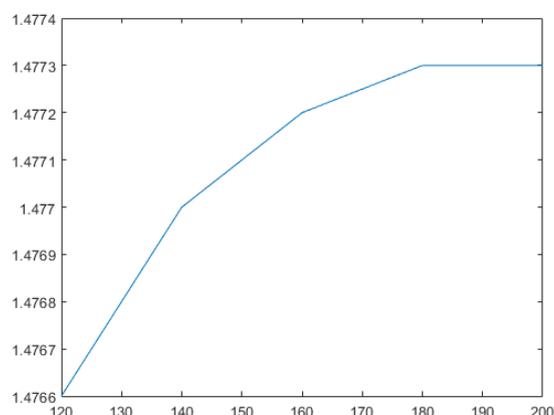


Figura 3.8: Convergência do ganho dos harmônicos

Na análise dos resíduos associados a cada harmônico, percebe-se que redução da massa leva a uma maior 'uniformidade' dos ganhos associados a cada modo dominante. Neste caso, os harmônicos de maior ganho representam uma parcela menor do somatório dos ganhos dos harmônicos do sistema, indicando que os pólos secundários do sistema adquirem maior importância. Isso aponta para a necessidade de uma modelagem de maior ordem.

Em termos objetivos: No modelo para 400T, os 4 pólos escolhidos para o modelo reduzido concentravam 79% do ganho de todos os pólos. Em contraste, no modelo com massa reduzida, esse valor cai para 58%. No caso de 20T, para que os modos do modelo reduzido representem 80% do ganho do sistema, foi necessário um modelo de 8a ordem.

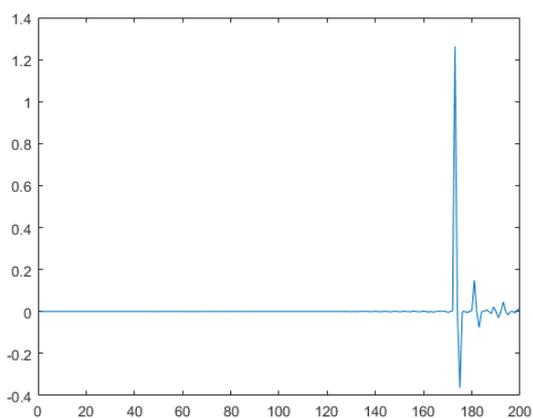


Figura 3.9: Distribuição dos ganhos do sistema original

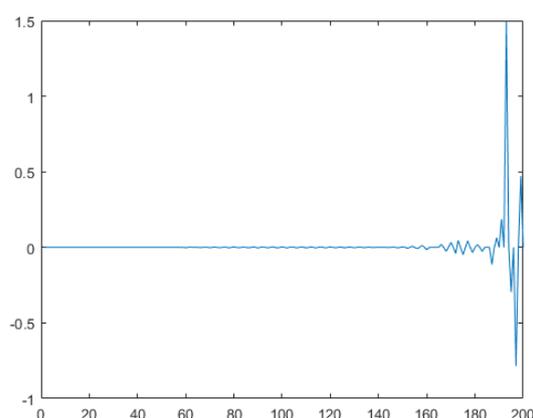


Figura 3.10: Distribuição dos ganhos do sistema de massa reduzida

No nosso sistema, nota-se que *em geral* ganhos mais relevantes são acompanhados de pólos de menor

módulo. No entanto, não necessariamente isso se expressa na relação de dominância usual por velocidade para sistemas dinâmicos, em que a aproximação por sistemas de menor ordem se dá pela escolha dos pólos mais lentos.

Sendo os pólos conjugados majoritariamente dispostos sobre a reta  $s = -\alpha + \omega j$ , nas simulações com 20T, o harmônico mais forte (em vermelho) se encontra 0.00002 à esquerda do segundo (em azul), exercendo portanto pouca dominância em termos de amortecimento.

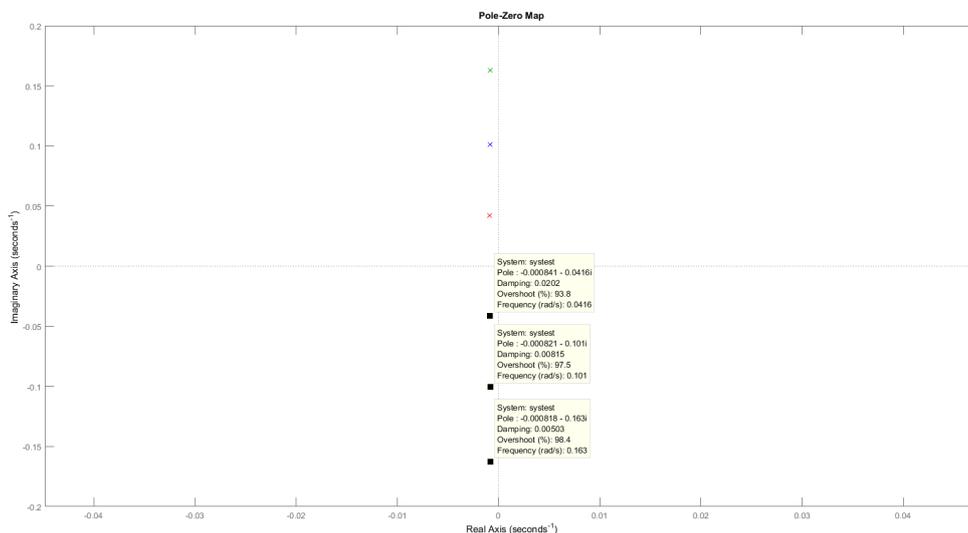


Figura 3.11: Três primeiros harmônicos, 20T

### 3.3.2 Atraso

Conforme determinado pela teoria de sistemas mecânicos e pela etapa de planejamento de trajetória, vê-se que a presença de uma massa menor na ponta reduz a velocidade de propagação mecânica no riser. Isso fez da massa um fator determinante no cálculo do atraso do sistema reduzido.

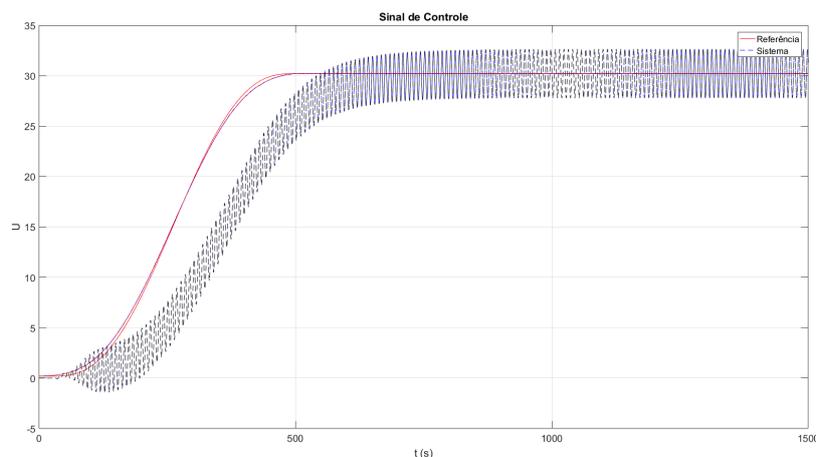


Figura 3.12: Comparação dos atrasos em simulação, 400T vs 20T(escalonado)

## Capítulo 4

# Modelagem em Ordem Infinita

Tendo em vista as patologias surgidas no processo de discretização, buscou-se uma alternativa que analisasse o comportamento dinâmico do riser sem passar por um processo discretizante. Dessa forma, seria possível determinar leis de controle e estimar o comportamento do sistema *completo* sem recorrer a métodos de diferença e afins, visto que estes introduzem instabilidades e outros obstáculos à efetiva manipulação do modelo.

No entanto, não foi possível terminar esta linha de trabalho, conforme pode ser visto no decorrer deste capítulo. O que se vê aqui se trata de um esboço de um conceito que surgiu ao final da realização do projeto e que portanto não pôde ser plenamente implementado. Espera-se derivar resultados mais significativos no futuro.

### 4.1 Preliminares: Distribuições como Matrizes

A alternativa presente na literatura para descrição de sistemas de ordem infinita se utiliza de *equações diferenciais abstratas*, em que as matrizes e vetores da teoria de espaço de estados tradicional desaparece e dá lugar a operadores e seus espectros.

Nesses contextos, normalmente trabalha-se com operadores definidos em espaços de Hilbert e Sobolev. [Bensoussan et al., 2007]

Tal abordagem excederia vastamente o escopo desse projeto e demandaria enormes conhecimentos preliminares (ver referências [Curtain, 1995], [Respondek, 2008], livros considerados introdutórios no assunto, que pressupõem um plano de fundo em análise funcional e teoria da medida.)

Como uma alternativa, desenvolve-se aqui um *equivalente direto* da abordagem em espaços de estados tradicional, mas em termos de funções e distribuições. Aqui, o termo distribuição será utilizado no sentido bem estabelecido de limites de funções integráveis.

Todos os resultados deste capítulo são completamente análogos aos que se obteria para matrizes: há equivalência entre distribuições bidimensionais e matrizes e entre funções unidimensionais e vetores.

**Definição 4.1.1.** *Diz-se que uma distribuição em uma  $(f(x) : \mathbb{R}_{[0,1]} \rightarrow \mathbb{R} = F_{[1 \times \epsilon]})$  ou duas  $(F(x, y) : \mathbb{R}_{[0,1]} \times \mathbb{R}_{[0,2]} \rightarrow \mathbb{R} = F_{[1 \times 2]})$  dimensões, é bem comportada se é integrável no seu intervalo de definição.*

Desse ponto em diante, se  $f$  for bidimensional, será chamada *matriz* ou *distribuição*. Se for unidimensional, será chamada *vetor* ou *função*.

**Definição 4.1.2.** Uma distribuição bivariada  $F(x, y) : \mathbb{R}_{[0,l_1]} \times \mathbb{R}_{[0,l_2]} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita quadrada se  $l_1 = l_2$ .

Neste projeto utilizaremos apenas distribuições quadradas ou unidimensionais.

**Definição 4.1.3.** A soma de duas distribuições é dada pela definição convencional:

$$H(x, y) = F + G = F(x, y) + G(x, y)$$

**Definição 4.1.4.** Sejam  $F(x, y) : \mathbb{R}_{[0,l]}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G(x, y) : \mathbb{R}_{[0,l]}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas bidistribuições bem definidas. Denomina-se por  $f \times G$  o produto funcional destas duas ditribuições, dado por:

$$H(x, y) = F \times G(x, y) = \int_0^l F(\zeta, y) * G(x, \zeta) d\zeta$$

Essa definição surge em analogia direta com a do produto matricial, dado por:

$$H_{ij} = F \times G_{ij} = \sum_{n=0}^l F_{nj} * G_{in}$$

**Teorema 4.1.1.** O produto funcional  $\{\times\}$ , tal qual o matricial, obedece às propriedades usuais de associatividade e linearidade.

*Demonstração.* Associatividade:

$$(F \times G) \times h = \int_0^l \int_0^l F(\zeta, y) * G(\varepsilon, \zeta) d\zeta * h(x, \varepsilon) d\varepsilon = \int_0^l \int_0^l G(\varepsilon, \zeta) * h(x, \varepsilon) d\varepsilon * F(\zeta, y) * d\zeta = F \times (G \times h)$$

Linearidade:

$$\begin{aligned} F \times (c_1 G + c_2 H) &= \int_0^l F(\zeta, y) * ((c_1 G(x, \zeta) + c_2 H(x, \zeta)) d\zeta = c_1 \int_0^l F(\zeta, y) * G(x, \zeta) d\zeta + c_2 \int_0^l F(\zeta, y) * H(x, \zeta) d\zeta \\ &= c_1 F \times G + c_2 F \times H \end{aligned}$$

O produto funcional, em geral, **não é comutativo**.

Daqui em diante, sendo  $F$  e  $G$  distribuições,  $FG = F \times G$ , a não ser que explicitado o contrário.

**Teorema 4.1.2.** No produto funcional, a função diagonal de Dirac  $I(x, y) = \delta(x - y)$ , onde  $\delta$  denota o delta de Dirac, é a identidade.

*Demonstração.*

$$IF = \int_0^l \delta(\zeta - y) * F(x, \zeta) d\zeta = F(x, y)$$

Esta definição é equivalente à da matriz Identidade  $I$  no contexto tradicional, trocando-se o delta de Kronecker pelo de Dirac.

**Definição 4.1.5.** Define-se o inverso de  $F$ ,  $F^{-1}$ , pela distribuição  $G$  que atenda:

$$FG = I$$

**Teorema 4.1.3.** Pode-se expressar o operador derivada como um produto funcional:

$$\partial(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x-h, y) - I(x+h, y)}{2h}$$

*Demonstração.*

$$\partial v = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x-h, y) - I(x+h, y)}{2h} \right) v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(y+h) - v(y-h)}{2h} = \frac{\partial}{\partial y} v$$

Esta definição é equivalente à da matriz Identidade  $I$  no contexto tradicional, trocando-se o delta de Kronecker pelo de Dirac.

**Definição 4.1.6.** Definem-se os autovetores/autofunções  $v$  de uma distribuição pela relação:

$$Av = \lambda v$$

Onde  $\lambda$  é o autovalor associado à função  $v$ .

**Teorema 4.1.4.** Uma distribuição pode ser diagonalizada por  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda)$ , onde  $P$  é uma distribuição cujas colunas são autovetores de  $A$  e  $\text{diag}(\lambda)$ .

*Demonstração.* Por definição, temos que

$$AP_{2L \times 2L} = [AP_0 \dots AP_L \dots AP_{2L}] = P \text{diag}(\lambda)$$

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda)$$

**Definição 4.1.7.** A exponencial de uma distribuição  $F$ ,  $e^F$ , é dada por:

$$e^F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n}{n!}$$

Em que  $F^n = (F \times F \dots \times F)$ ,  $n$  vezes.

**Proposição 4.1.1.** A exponencial de uma distribuição  $F$ ,  $e^F$ , é a solução da equação diferencial distribucional  $\dot{v} = Fv$

**Proposição 4.1.2.** Se  $F$  é diagonalizável em termos de seus autovalores e autofunções na forma  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda)$ , têm-se que a exponencial de  $F$   $e^F$  é da forma:

$$P^{-1} \text{diag}(e^\lambda) P$$

**Proposição 4.1.3.** Se  $v$  é autofunção de uma distribuição  $F$  com autovalor  $\lambda$ ,  $v$  é também autovetor da distribuição  $e^F$ , com autovalor  $e^\lambda$ .

## 4.2 Representação em Espaço de Estados

Agora, parte-se para um análogo da modelagem no espaço de estados usando a álgebra distribucional definida acima.

Retomando a abordagem do capítulo 3, define-se o vetor:

$$x_{2L \times \epsilon}(y) = \begin{cases} \Upsilon(y) & , 0 \leq y < L \\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} & , L \leq y < 2L \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\dot{x} = \Lambda x + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Lambda' & -2\alpha I \end{bmatrix}, \Lambda'_{L \times L}(x, y) = (g'y + v^2)\partial^2 + g'\partial$$

$$B_{2L \times \epsilon} \propto \delta(y - L)$$

$$C_{\epsilon \times 2L} = \delta(x)$$

Em termos físicos:

- A matriz/distribuição  $\Lambda$  determina a parcela mecânica da equação diferencial;
- A matriz  $-2\alpha I$  representa a parcela linearizada do arrasto hidrodinâmico.

Para encontrar seus autovetores - no caso, autofunções - resolvemos a equação  $\Lambda v = \lambda v$ :

$$\begin{aligned} \text{Para } z < L : v(z) &= \lambda f(z + L) \\ f(z + l) &= (g'z + v^2)\partial^2 f(z) + g'(z) - 2\alpha \\ ((g'z + v^2)\partial^2 + g'\partial - \lambda(\lambda + 2\alpha)) f(z) &= 0 \end{aligned}$$

Essa equação foi solucionada no capítulo 2, em 2.19, para  $s = \lambda$ , tendo como solução:

$$\hat{C}_1 I_0 \left( \frac{2}{g} \sqrt{\lambda^2 + 2\alpha\lambda} \sqrt{g'z + v^2} \right) + \hat{C}_2 K_0 \left( \frac{2}{g} \sqrt{\lambda^2 + 2\alpha\lambda} \sqrt{g'z + v^2} \right) = V_\lambda(z)$$

Temos, portanto, a configuração da Matriz P de autofunções de  $\Lambda$ . Para o cálculo de  $P^{-1}$ , é necessário encontrar um conjunto de funções  $F$  tal que  $FV = I$ : trata-se de uma relação de ortogonalidade.

As funções  $F$  devem atender:

$$\int_0^L F(\lambda_1, z) V(\lambda_2, z) = \delta(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Para buscar essa relação, supomos as próprias funções  $V$  boas candidatas e reintroduzimos as funções a suas equações diferenciais:

$$(gz + v^2)V''_{\lambda_1} + gV'_{\lambda_1} - \lambda_1(\lambda_1 + 2\alpha)V_{\lambda_1} = 0$$

$$(gz + v^2)V''_{\lambda_2} + gV'_{\lambda_2} - \lambda_2(\lambda_2 + 2\alpha)V_{\lambda_2} = 0$$

Multiplicando cruzado por  $V_{\lambda_1}$  e  $V_{\lambda_2}$  e subtraindo as equações, temos:

$$\begin{aligned} (\lambda_1(\lambda_1 + 2\alpha) - \lambda_2(\lambda_2 + 2\alpha))V_{\lambda_1}V_{\lambda_2} &= (g'z + v^2)(V''_{\lambda_1}V_{\lambda_2} - V_{\lambda_1}V''_{\lambda_2}) + g(V'_{\lambda_1}V_{\lambda_2} - V_{\lambda_1}V'_{\lambda_2})' \\ &= ((g'z + v^2)(V'_{\lambda_1}V_{\lambda_2} - V_{\lambda_1}V'_{\lambda_2}))' \end{aligned}$$

De onde obtemos:

$$\int_0^L V_{\lambda_1}V_{\lambda_2} = \frac{(g'z + v^2)(V'_{\lambda_1}V_{\lambda_2} - V_{\lambda_1}V'_{\lambda_2})|_0^L}{\lambda_1(\lambda_1 + 2\alpha) - \lambda_2(\lambda_2 + 2\alpha)}$$

Temos, portanto, uma relação de ortogonalidade se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem da forma:

$$\lambda_i = \frac{\sigma}{\sqrt{v^2 + g'L}}$$

Em que  $\sigma$  é um zero da função  $V$ . Esta é exatamente a definição dos pólos de  $\frac{\hat{\Upsilon}(L,s)}{\hat{\Upsilon}(0,s)}$

Nesse contexto, é possível derivar alguns resultados análogos aos obtidos na representação por espaço de estados usual:

$$x = \int_0^t e^{-\Lambda(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Um resultado surpreendente é o comportamento simples no tempo (exatamente equivalente ao de um sistema de segunda ordem) para ausência de entrada quando o vetor de estados iniciais  $x_0$  é uma autofunção da distribuição  $\Lambda$ :

$$x(t) = e^{-\lambda t} x_0;$$

Para  $x_0 = V_\lambda$ .

# Capítulo 5

## Controle

Apenas o planejamento de trajetória não é suficiente para garantir o acompanhamento robusto pelo riser do equipamento de solo. Tendo em vista a possibilidade de perturbação devido a correnteza e outras condições climáticas, torna-se necessário o desenvolvimento de uma abordagem de controle que faça a trajetória efetiva convergir para a referência.

### 5.1 Por Ordem Infinita

Não foi possível derivar uma lei de controle computacionalmente implementável utilizando os métodos de Dimensão Infinita. As leis de controle deriváveis incorriam em um de dois impedimentos:

- Caso derivadas para a matriz  $\Lambda$  diagonalizada, as leis de controle de ordem infinita determinavam a realimentação de infinitos estados sem significado físico e de difícil estimação por observadores/filtros de Kalman;
- Caso derivadas para a matriz  $\Lambda$  em sua configuração original, o efeito da realimentação em ordem infinita era o de variação nas condições de contorno. No entanto, estas variações eram dadas em termos de pulsos de Dirac, impossibilitando a resolução dos sistemas de equações.

### 5.2 Por Redução Modal

Conforme derivado na seção dedicada à redução modal, para redução do sistema minerador de menor massa, foi necessário montar um modelo reduzido de maior ordem e menor atraso para representá-lo com precisão.

Em [Simões, 2018], um sistema reduzido de quarta ordem basta para obter a ação de controle desejada.

Aqui, foi utilizado um modelo reduzido de oitava ordem para obter o mesmo nível de sucesso. No caso de controle, foram usadas como entrada as trajetórias planejadas no Capítulo 2, estática e sob efeito de força externa, levando às seguintes respostas:

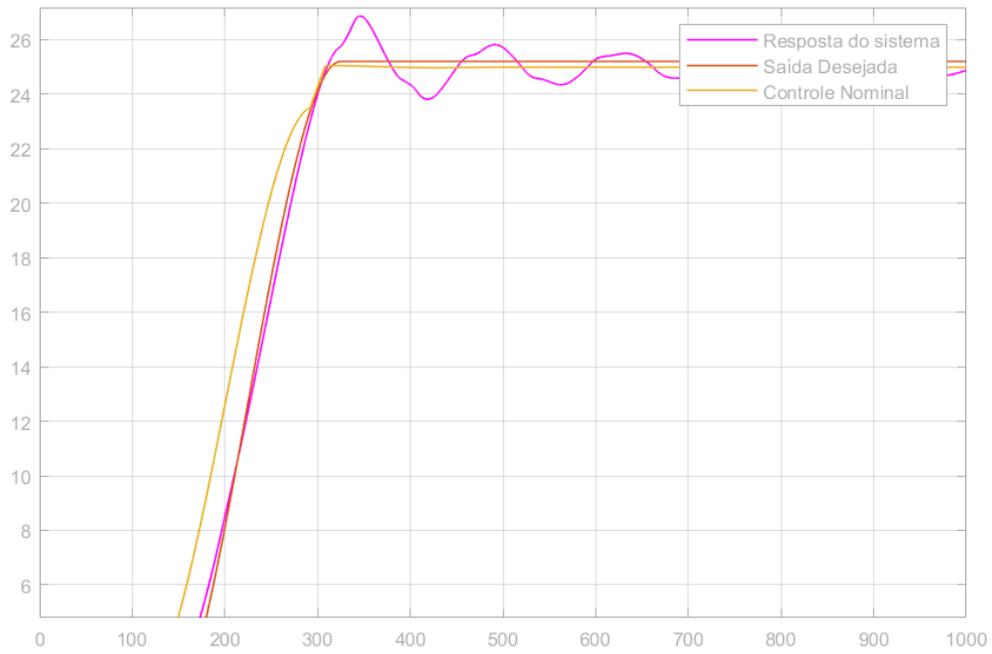


Figura 5.1: Sistema controlado sob perturbação (caso estático)

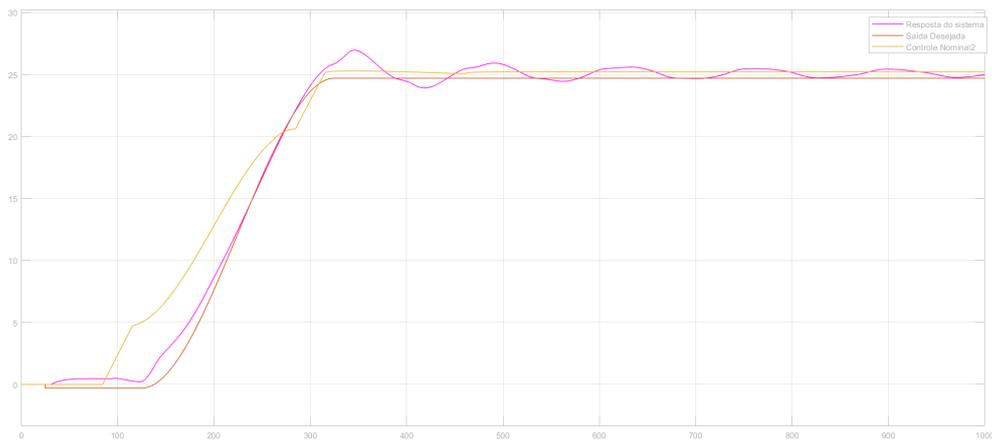


Figura 5.2: Sistema controlado sob perturbação (forças de fundo)

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, foram desenvolvidas em resposta aos desafios particulares do planejamento e controle do posicionamento de riser para mineração em águas profundas.

Na etapa de planejamento, desenvolveu-se uma abordagem analítica generalizada baseada em análise não causal no domínio da frequência, que resultou em um planejamento de trajetória robusto e veloz para percursos que não partam do repouso e sob efeito de forças adicionais. Este planejamento foi desenhado sobre percursos de riser que dinamicamente se adaptam ao percurso da sonda de fundo.

Posteriormente, foi feita uma análise das peculiaridades do sistema quando submetido à discretização por método de diferenças. Percebeu-se que as menores massas envolvidas no contexto de mineração levavam à instabilidade, não controlabilidade e não observabilidade quando o sistema era finamente discretizado. Isso levou à determinação de um modelo reduzido que replicasse as características dinâmicas do modelo de ordem infinita.

Em sequência, tendo em vista as patologias surgidas no processo de discretização, buscou-se uma alternativa que analisasse o comportamento dinâmico do riser sem passar por um processo discretizante. Isso foi feito com base numa abordagem nova baseada em distribuições integráveis multivariável. Infelizmente, não foi possível dar uma conclusão satisfatória para essa linha de pensamento. No entanto, ela demonstra uma curiosa relação estreita entre a representação de sistemas de ordem finita e infinita.

Por fim, foi montada uma estrutura de controle para o sistema reduzido e comprovado seu funcionamento por simulação.

### 6.1 Futuro do Estudo

No decorrer da pesquisa, não houve tempo suficiente para aprofundar-se em alguns tópicos que se mostraram dignos de atenção. Vê-se como potenciais estudos futuros:

- Planejamento de trajetória para aplicação de forças externas adicionais fora das condições de contorno e de maior intensidade;
- Técnicas para reduzir o impacto negativo do processo de discretização: utilização de outros métodos senão o por diferenças, tais quais a discretização por elementos finitos ou métodos de Galerkin.
- Aplicação ao controle de riser das técnicas formais avançadas da análise de Ordem Infinita por operadores em espaços de Banach, tal qual disposta em [Curtain, 1995] e [Bensoussan et al., 2007].

# Referências

- [Agência Nacional de Petróleo, 2019] Agência Nacional de Petróleo (2019). Boletim mensal da produção de petróleo e gás natural.
- [Albuquerque, 2012] Albuquerque, D. G. (2012). Monografia (bacharelado em engenharia mecânica), Universidade de Brasília.
- [Bai and Bai, 2012] Bai, Q. and Bai, Y. (2012). *Subsea Engineering Handbook*. Gulf Professional Publishing.
- [Bensoussan et al., 2007] Bensoussan et al. (2007). *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*. Birkhauser Boston.
- [Bremmer, 1950] Bremmer, H. (1950). *Operational Calculus Based on The Two-Sided Laplace Integral*. Cambridge University Press.
- [Budnik, 2016] Budnik, Vincent, C. S. (2016). Future development of the world ocean mining for the industry. *Procedia Engineering*, 150:2150–2156.
- [Curtain, 1995] Curtain, R.F., Z. H. (1995). *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer.
- [DLMF, 2019] DLMF (2019). *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.23 of 2019-06-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller and B. V. Saunders, eds.
- [Figueiredo, 1977] Figueiredo, D. (1977). *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Impa-SBM.
- [Fortaleza, 2009] Fortaleza, E. L. (2009). *Active Control Applied to Offshore Structures: Positioning and Attenuation of Vortex Induced Vibrations*. Tese de doutorado, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Kerimov, 1984] Kerimov, M. K. (1984). Calculation of the complex zeros of the modified bessel function of the second kind and its derivatives. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 24(4):115 – 123.
- [Mikusinski, 2014] Mikusinski, J. (2014). *Operational Calculus. vol. 1*. Elsevier.
- [Mooroka and Yamamoto, 2007] Mooroka, C. and Yamamoto, M. (2007). Dynamic positioning of floating platform coupled with a drilling riser. In *4º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás*, pages 361–371. Associação Brasileira de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás.
- [Nautilus Minerals, 2015] Nautilus Minerals (2015). Annual Report to Shareholders, 2015.
- [Petit, 2001] Petit, N. (2001). Flatness of heavy chain systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, (40):475–495.
- [Respondek, 2008] Respondek, J. (2008). Approximate Controllability of Infinite Dimensional Systems of the n-th Order. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(2).

- [Schitzer, 1972] Schitzer, A. (1972). A LINEAR COMBINATION OF MODIFIED BESSEL FUNCTIONS.
- [Simões, 2018] Simões, R. (2018). Analytical solution to motion planning and modal-based tracking control for dynamic positioning of subsea equipment. *Ocean Engineering*, 164(164):712–721.
- [Sparks, 2018] Sparks, C. P. . (2018). *Fundamentals of marine riser mechanics: Basic principles and simplified analyses*. Elditor, 2 edition.
- [Swaddling, 2016] Swaddling, A. (2016). Regional scientific research guidelines for deep sea minerals. Report for the National Institute of Water and Atmospheric Research of New Zealand (NIWA).
- [Urabe et al., 2015] Urabe, T., Ura, T., Tsujimoto, T., and Hotta, H. (2015). Next-generation technology for ocean resources exploration (zipangu-in-the-ocean) project in japan. In *OCEANS 2015 - Genova*, pages 1–5.
- [Yamamoto et al., 2007] Yamamoto, M., K. Morooka, C., and Ueno, S. (2007). Dynamic behavior of a semi-submersible platform coupled with drilling riser during re-entry operation in ultra-deep water. volume 1.