

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ONDAS NÃO-LINEARES SATURADAS EM
LEITOS FLUIDIZADOS INVERTIDOS**

Por

Victor Shumyatsky

Brasília, 11 de julho de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ONDAS NÃO-LINEARES SATURADAS EM
LEITOS FLUIDIZADOS INVERTIDOS**

Por
Victor Shumyatsky

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha (Orientador) _____

Prof. Yuri Dumaresq Sobral (Coorientador) _____

Prof. Adriano Possebon Rosa _____

Prof. André Von Borries Lopes _____

Brasília 11 de julho de 2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família por me ensinar tudo na vida e permitir e chegar até o presente momento com muito apoio e carinho, além de me dar força nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus orientadores profs. Francisco e Yuri pelas valiosas lições transmitidas e pela gentileza e paciência de me orientar.

Agradeço também ao prof. Adriano pelas valorosas contribuições na avaliação do meu projeto.

Agradeço a todos os meus amigos, já que sem a alegria e risadas que passamos juntos nada nesta vida faria sentido.

Agradeço de forma muito especial aos meus grandes amigos e companheiros de Vortex: Igor, Gesse, Filipe, Yuri, Marcos (Chefe) e Hugo. É razoável dizer que sem a enorme ajuda dos quatro primeiros da lista, este projeto talvez não chegaria ao fim. São como irmãos mais velhos para mim no Vortex e a cada dia aprendo mais com eles. Marcos e Hugo estão ainda no mesmo patamar que eu e temos todos lutado a mesma luta lado a lado em busca do conhecimento e evolução.

Resumo

Este projeto objetiva investigar numericamente ondas saturadas em leitos fluidizados normais e invertidos. As equações governantes do problema serão resolvidas para vários valores dos parâmetros físicos, estudando e caracterizando as ondas obtidas. Uma nova expressão constitutiva foi proposta e testes do modelo comparando-a com outra expressão constitutiva tradicional da literatura foram realizados. Uma adimensionalização original da EDO governante foi proposta, que permitiu explicitar os parâmetros adimensionais do problema e especular como a variação deles afeta os mecanismos de propagação de instabilidades em leitos fluidizados.

Palavras-chaves: leitos fluidizados. ondas saturadas. pressão de partícula

Abstract

This work aims to investigate numerically saturated waves in fluidized beds and inverse fluidized beds. The governing equations of the problem were solved for several values of the physical parameters, investigating and characterizing the obtained waves. A new constitutive equation was proposed in this work, and tests of the model comparing this new equation with a traditional one were performed. An original nondimensional version of the governing equation was proposed, thus providing the nondimensional parameters of the problem and permitting us to speculate about how their variation affects the mechanisms of propagation of instabilities in fluidized beds.

Key-words: fluidized beds. saturated waves. particle phase pressure

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

c	Velocidade de propagação das ondas
c^*	Velocidade adimensional de propagação das ondas
q	Velocidade superficial do escoamento
q_{mf}	Velocidade superficial de mínima fluidização
Fr	Número de Froude
v_t	Velocidade terminal de uma partícula
g	Aceleração da gravidade
d_s	Diâmetro das partículas sólidas
p_s	Pressão da fase sólida
p_s^*	Pressão adimensional da fase sólida
t	Tempo
V	Volume de um elemento material
m	Massa de um elemento material
p	Momento linear de um elemento material
F	Força resultante sobre um elemento material
F_c	Somatório das forças de campo agindo sobre um elemento material
F_s	Somatório das forças de superfície agindo sobre um elemento material
F_a	Força de arrasto do fluido sobre as partículas
F_p	Peso líquido sobre as partículas sólidas
b	Densidade de forças de campo
t	Densidade de forças de superfície
\hat{n}	Vetor unitário normal à superfície de um elemento material
u	Vetor velocidade da fase líquida
v	Vetor velocidade da fase sólida
Re	Número de Reynolds
n	Expoente da Relação de Richardson-Zaki
\bar{u}	Norma da velocidade média local da fase fluida
x	Vetor posição

\mathbf{T}_f	Tensor de tensões da fase fluida
\mathbf{T}_s	Tensor de tensões da fase sólida
\mathbf{f}	Força de interação entra partículas e fluido
p	Pressão da fase líquida
\hat{c}	Coefficiente de massa virtual
N	Número total de partículas sólidas
V_p	Volume de uma partícula
f	Frequência das ondas
X	Posição em um referencial que se desloca com a velocidade de propagação da onda
X^*	Posição adimensional no referencial que se desloca com a velocidade de propagação da onda
F_1	Função que agrupa forças de arrasto e peso líquido
F_2	Função que agrupa forças de inércia e massa virtual
F_1^*	Função adimensional que agrupa forças de arrasto e peso líquido
F_2^*	Função adimensional que agrupa forças de inércia e massa virtual
R_ρ	Razão de densidades

Símbolos Gregos

ρ_s	Massa específica da fase sólida
ρ_f	Massa específica da fase líquida
μ_s	Viscosidade da fase sólida
μ_s^*	Viscosidade adimensional da fase sólida
ρ	Massa específica de um elemento material
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões de um material
ϕ	Concentração de partículas
ϕ_{rlp}	Concentração de empacotamento aleatório frouxo
ϕ_{cp}	Concentração de empacotamento aleatório denso
ϕ_{mf}	Concentração de mínima fluidização
ϕ_0	Concentração do estado homogêneo
ϕ_{max}	Concentração máxima de uma onda
μ_f	Viscosidade da fase líquida
β	Coefficiente de arrasto
λ	Comprimento de onda
σ	Coefficiente de pressão da fase sólida
σ^*	Coefficiente adimensional de pressão da fase sólida

Operadores matemáticos

dV	Elemento diferencial de volume
dS	Elemento diferencial de área
∇	Operador diferencial Nabla
$D(*)/Dt$	Operador derivada material
$\partial(*)/\partial t$	Operador derivada parcial
\int_V	Integral de volume
\int_S	Integral de superfície

Lista de Figuras

Figura 1 – Regimes de fluidização: (a) leito fixo, (b) leito em condição de mínima fluidização, (c) leito particulado, (d) leito borbulhante, (e) leito tipo pistão, (f) transporte pneumático de partículas (SOBRAL, 2004)	2
Figura 2 – $(dp_s/d\phi)/(\rho_s v_t^2)$ em função de $\phi - \phi_0$ obtido em (DURU et al., 2002)	12
Figura 3 – Teste de convergência	24
Figura 4 – Comparação entre ondas saturadas obtidas considerando a diferença entre termos de inércia e a derivada da pressão de partícula, no gráfico tracejado, e sem considerar, no gráfico de linha cheia. $\phi_{max} = 0.5677$, $f = 1.6Hz$, $\phi_0 = 0.549$	28
Figura 5 – Variação de $F_1(\phi)$ com ϕ	30
Figura 6 – Variação de $F_2(\phi)$ com ϕ	30
Figura 7 – Comprimentos de onda obtidos para ondas saturadas variando ϕ_{max}	31
Figura 8 – Velocidades obtidas para ondas saturadas variando ϕ_{max}	32
Figura 9 – Frequências obtidas para ondas saturadas variando ϕ_{max}	33
Figura 10 – Estado 1	34
Figura 11 – Estado 2	35
Figura 12 – Estado 3	36
Figura 13 – Estado 1 de ondas em leitos invertidos	38
Figura 14 – Estado 2 de leitos invertidos	39
Figura 15 – Estado 3 de leitos invertidos	40
Figura 16 – Estado 4 de leitos invertidos	41
Figura 17 – Variação das velocidades de propagação dos distúrbios com Fr . Parâmetros dados no começo da seção.	43
Figura 18 – Variação dos comprimentos de onda com Fr . Pontos representam ondas saturadas; linha tracejada corresponde à proposta de escala (5.4)	43
Figura 19 – Variação das frequências dos distúrbios com Fr . Parâmetros dados no começo da seção.	44
Figura 20 – Estado 1 de resultados com Fr variável	45
Figura 21 – Estado 2 de resultados com Fr variável	46
Figura 22 – Variação das velocidades de propagação das ondas com R_ρ	48

Figura 23 – Variação dos comprimentos de onda das ondas com R_ρ	48
Figura 24 – Variação da frequência com R_ρ	49
Figura 25 – Variação das velocidades de propagação com R_ρ	50
Figura 26 – Variação dos comprimentos de onda com R_ρ	50
Figura 27 – Variação das frequências com R_ρ	51
Figura 28 – Variação das velocidades de propagação com ϕ_{max}	52
Figura 29 – Variação dos comprimentos de onda com ϕ_{max}	52
Figura 30 – Variação das frequências com ϕ_{max}	53
Figura 31 – Estado 1 para novo modelo de pressão de partícula	54

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Leitos Fluidizados	1
1.2	Objetivos	4
	2 FORMULAÇÃO BIFÁSICA CONTÍNUA PARA LEITOS FLUIDIZADOS	6
2.1	Equações de Balanço da Mecânica dos Meios Contínuos	6
2.1.1	Equação de balanço de massa	6
2.1.2	Equação de balanço do momento linear	7
2.2	Equações contínuas para leitos fluidizados	8
2.2.1	Considerações sobre empacotamento e expansão do leito	8
2.2.2	Apresentação das equações governantes	9
	3 EQUAÇÃO DAS ONDAS SATURADAS	15
3.1	Dedução da equação governante das ondas saturadas não-lineares	16
3.2	Adimensionalização da equação governante	19
	4 METODOLOGIA NUMÉRICA	22
4.1	Métodos utilizados	22
4.1.1	Método de Runge-Kutta de 4ª ordem	22
4.1.2	Método dos Trapézios	23
4.1.3	Método da Bisseção	23
4.2	Convergência	24
4.3	Algoritmo	25
	5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	26
5.1	Demonstração do efeito de $F_2(\phi) - dp_s/d\phi$ sobre as ondas	28
5.2	Influência da concentração de partículas	29
5.2.1	Ondas de concentração em leitos normais	29
5.2.1.1	Estado 1	34
5.2.1.2	Estado 2	35

5.2.1.3	Estado 3	35
5.2.2	Ondas de concentração em leitos invertidos	36
5.2.2.1	Estado 1	38
5.2.2.2	Estado 2	39
5.2.2.3	Estado 3	40
5.2.2.4	Estado 4	41
5.3	Influência do número de Froude	42
5.3.1	Estado 1	45
5.3.2	Estado 2	46
5.4	Influência da razão de densidades	47
5.4.1	Varição de R_ρ para ondas de concentração em leitos normais	47
5.4.2	Varição de R_ρ para ondas de concentração em leitos invertidos	49
5.5	Ondas saturadas obtidas utilizando uma nova proposta de pressão de partícula	51
5.5.1	Estado 1	54
6	CONCLUSÕES	55
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

1.1 Leitos Fluidizados

Considere uma suspensão de partículas sólidas num fluido (líquido ou gás) em um tubo vertical (cujo fundo é uma placa porosa) sob a ação da gravidade, tal que $\rho_s > \rho_f$, onde ρ denota massa específica e os índices s e f indicam se as propriedades se referem à fase sólida ou fluida, daqui em diante. Inicialmente, o leito de partículas permanece depositado no fundo do tubo, já que o peso das partículas é superior ao empuxo sobre elas. Um escoamento ascendente do fluido é então forçado a acontecer; uma força de arrasto do fluido sobre as partículas começa a agir, mas enquanto esta for menor do que a diferença entre peso e empuxo sobre as partículas, o leito permanece empacotado no fundo do tubo. À medida que a velocidade superficial do escoamento (que pode ser entendida como a vazão dividida pela área da seção transversal do tubo), q , é aumentada, a força de atrito do fluido sobre as partículas aumenta, até que se torna suficiente para equilibrar a diferença entre peso e empuxo sobre as partículas. A partir desse momento, o leito é dito fluidizado e a velocidade superficial mínima a partir do qual a fluidização ocorreu será denotada por q_{mf} . Qualquer aumento da velocidade superficial a partir desse ponto provoca uma expansão do leito até uma certa altura, com as partículas sólidas se tornando livres para flutuar. Leitos fluidizados apresentam propriedades bastante semelhantes às de um fluido, justificando seu nome. A velocidade superficial pode ser aumentada até atingir a velocidade de sedimentação de uma partícula isolada, quando as partículas são carregadas para fora do tubo (DAVIDSON; HARRISON, 1990).

Leitos fluidizados possuem algumas propriedades úteis para aplicações industriais: rapidamente atingem uma temperatura uniforme, porque a agitação das partículas dispersa regiões locais de baixas e altas temperaturas; possuem uma alta taxa de transferência de calor; partículas sólidas passam a se comportar essencialmente como um fluido, facilitando a continuidade de uma operação industrial que envolva as partículas; por último, leitos fluidizados são uma excelente maneira de estabelecer uma grande área de contato entre partículas sólidas e um gás (DAVIDSON; HARRISON, 1990). Dessa forma, leitos fluidizados são convenientes como reatores químicos, e podem ser também utilizados como banhos térmicos de alta temperatura em situações que exijam um controle de temperatura preciso, além de inúmeras outras aplicações.

Raramente a fluidização ocorre de forma homogênea e uniforme. Geralmente, há o ocorrência de instabilidades, como bolhas, em leitos de gás-sólido e ondas de concentração em leitos de líquido-sólido. Compreender estas instabilidades tem sido o desafio mais importante da área de leitos fluidizados.

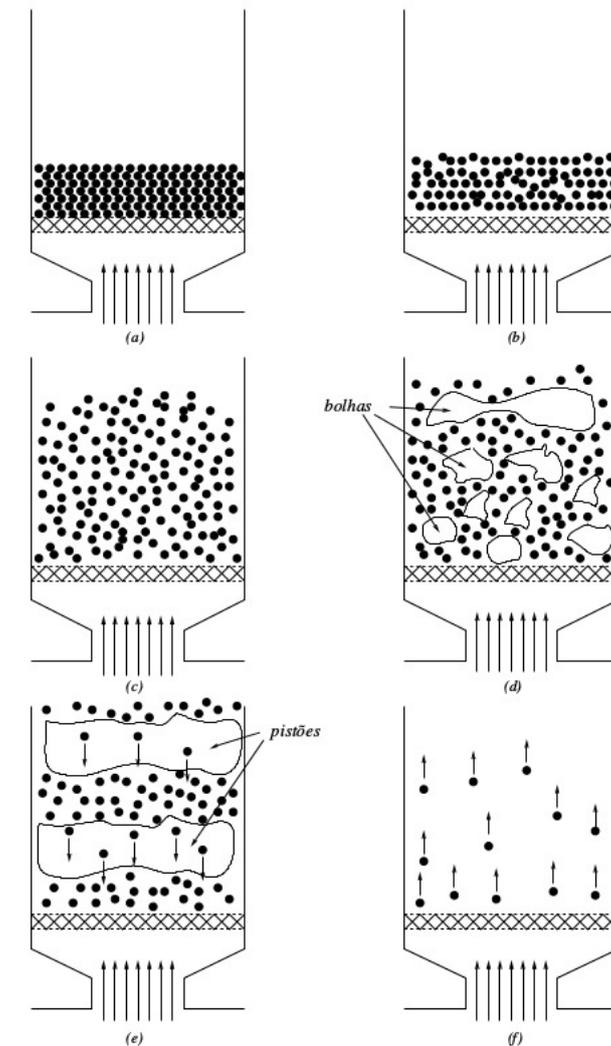


Figura 1 – Regimes de fluidização: (a) leito fixo, (b) leito em condição de mínima fluidização, (c) leito particulado, (d) leito borbulhante, (e) leito tipo pistão, (f) transporte pneumático de partículas (SOBRAL, 2004)

Há vários regimes de fluidização, que estão indicados na Fig.(1): leitos podem ser particulados ou agregativos. Leitos agregativos (geralmente gás-sólido), após superarem o estado de mínima fluidização, apresentam a formação de pequenas bolhas (regiões de vazios) que se propagam, e, em caso de aumento da velocidade superficial, podem evoluir e formar bolhas do tipo pistão, cujo tamanho é da ordem de grandeza do diâmetro do tubo. Leitos particulados (geralmente líquido-sólido) apresentam uma distribuição de partículas aproximadamente homogênea, sem a formação de bolhas. Tanto leitos agregativos como leitos particulados, em caso de velocidades superficiais elevadas, apresentam um regime conhecido como turbulento, com movimento altamente caótico e grandes deslocamentos das partículas. Há também classificações quanto ao tipo de partículas, como no clássico

trabalho de [Geldart \(1973\)](#), onde partículas são classificadas quanto ao tamanho e à massa específica, de forma que essas características influenciam fortemente na facilidade ou não de serem fluidizadas.

Há diversos modelos possíveis para descrever a mecânica dos leitos fluidizados. Pode-se usar abordagens Lagrangeanas para as fases sólida e fluida, ou Eulerianas para ambas as fases, ou Euleriana para uma das fases e Lagrangeana para a outra. Dessa forma, podem-se realizar simulações discretas, onde as fases discretas são modeladas pela 2ª Lei de Newton e as fases contínuas satisfazem a Equação de Cauchy. Para sistemas gás-sólido, uma revisão completa dos modelos e simulações que tem sido utilizados foi feita por [Hoef et al. \(2008\)](#). Porém, neste projeto, foi utilizada a abordagem clássica bifásica, onde as fases sólida e fluida são modeladas como meios contínuos isotérmicos interpenetrantes. Em modelos de suspensões, muitas vezes são resolvidas equações gerais para um fluido equivalente, onde o efeito das partículas sólidas é considerado nas equações de fechamento para o tensor de tensões. Entretanto, em leitos fluidizados, as partículas possuem diâmetros consideravelmente maiores do que nas aplicações acima descritas, de forma que a velocidade relativa entre a fase sólida e fluida é considerável, o que sugere o uso de uma modelagem bifásica.

Como mencionado anteriormente, o entendimento das instabilidades que ocorrem em leitos fluidizados constitui um desafio ainda com muitas questões em aberto. Tentativas de conectar a análise de leitos borbulhantes com leitos não-borbulhantes estão em progresso, geralmente baseadas em um valor crítico do número de Froude, definido por

$$Fr = \frac{v_t^2}{gd_s}, \quad (1.1)$$

como é mencionado em ([ANDERSON; SUNDARESAN; JACKSON, 1995](#)). Na expressão acima, v_t denota a velocidade terminal de sedimentação de uma partícula, g denota a aceleração da gravidade e d_s denota o diâmetro das partículas sólidas. Estudos de estabilidade de leitos fluidizados têm sido realizados desde os anos 1960, começando por [Jackson \(1963\)](#). Estes estudos são desenvolvidos impondo perturbações do tipo onda plana em torno do estado homogêneo de fluidização às equações governantes, que serão apresentadas no Capítulo 2. Sistemas gás-sólido são mais instáveis e rapidamente evoluem para um estado borbulhante. Por outro lado, sistemas líquido-sólido também apresentam ondas de concentração que se propagam ao longo do leito. Em caso de tubos onde o comprimento é muito maior do que seu diâmetro, estas ondas são unidimensionais. Em tubos mais largos, a formação de instabilidades transversais secundárias foi observada ([EL-KAISSY; HOMSY, 1976](#)). [Batchelor \(1993\)](#) conjecturou que estas instabilidades secundárias provocam a formação de bolhas, que seriam consequência de não-linearidades na propagação de ondas de concentração. O mecanismo físico de formação das instabilidades foi entendido à luz do trabalho de ([JACKSON, 1963](#)), que mostrou que as instabilidades são basicamente consequência das forças de inércia (a velocidade relativa entre as fases sólida e fluida provoca flutuações de velocidade nas partículas, que provocam as instabilidades)

sobre as partículas e inicialmente demonstrou que leitos fluidizados são sempre instáveis a perturbações harmônicas sobre o estado de fluidização homogênea. Alguns anos mais tarde, porém, foi demonstrado por [Garg e Pritchett \(1975\)](#) que leitos fluidizados podem ser estabilizados por meio da inserção de uma elasticidade suficientemente grande da fase sólida. Essa elasticidade média é causada pelas flutuações de velocidade e colisões entre partículas sólidas e é introduzida nas equações na forma de uma pressão de partículas, $p_s(\phi)$, onde ϕ é a concentração de partículas. É também introduzida no modelo uma viscosidade de partículas, $\mu_s(\phi)$, associada ao comprimento de onda das instabilidades. Detalhes sobre as equações governantes e relações de fechamento para $p_s(\phi)$ e $\mu_s(\phi)$ serão fornecidos no Capítulo 2. Uma revisão completa acerca das instabilidades em leitos fluidizados e as tentativas de se conectar leitos agregativos com particulados foi realizada por [Sundaresan \(2003\)](#). Neste projeto foram estudadas ondas unidimensionais em leitos líquido-sólido. Estas instabilidades não crescem sem limites. A taxa de crescimento destas ondas decresce, até que elas atingem um estado denominado saturado, onde não ocorre mais mudança de amplitude, velocidade ou forma. A saturação destas ondas foi observada experimentalmente por [Duru et al. \(2002\)](#), onde uma teoria do estado saturado foi desenvolvida. Posteriormente, este modelo foi testado computacionalmente por [Sobral e Hinch \(2017\)](#). No presente trabalho, foram investigadas ondas saturadas em leitos fluidizados normais e invertidos. Leitos fluidizados invertidos são leitos onde $\rho_f > \rho_s$ e a fluidização é obtida por meio de um escoamento descendente. Leitos invertidos são ainda pouco explorados na literatura e possibilitam ampliar o leque de intervalos dos parâmetros a se investigar para entender a propagação de instabilidades em um leito. [Howley e Glasser \(2005\)](#) realizaram análises de estabilidade linear para comparar leitos normais com invertidos e obtiveram que estes tendem a ser mais instáveis. No presente projeto, foi realizado um estudo detalhado acerca das ondas saturadas que são solução da equação diferencial ordinária não linear proposta em ([DURU et al., 2002](#)) para vários valores dos parâmetros do problema, de forma a investigar como estes afetam as propriedades e a forma da onda, conseguindo assim especular que mecanismos levam à evolução da instabilidade de ondas planas para bolhas.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, foram investigadas computacionalmente ondas de concentração unidimensionais saturadas que se propagam em leitos fluidizados líquido-sólido normais e invertidos, visando entender a dependência de suas propriedades, tais como amplitude, frequência, velocidade e comprimento de onda com os parâmetros do problema, além das diferenças e semelhanças entre os dois regimes de fluidização. O modelo foi testado por meio de integração numérica da equação não linear da onda saturada, apresentada no capítulo 3. Dentro deste contexto, foram alcançados os seguintes objetivos específicos neste projeto:

- Revisão bibliográfica sobre leitos fluidizados, classificando-os, descrevendo a história do estudo de suas instabilidades e citando modelos que podem ser usados para atacá-los;
- Indicar as equações governantes bifásicas para leitos fluidizados, utilizando equações de fechamento, e demonstrar, por meio de mudanças convenientes de referencial e variáveis, a equação diferencial ordinária não linear para o estado saturado;
- Obter ondas saturadas por meio de integração numérica da equação governante, usando também uma restrição integral que garanta a periodicidade das ondas;
- Propor uma adimensionalização para a EDO governante das ondas saturadas, de modo a identificar os parâmetros centrais do problema.
- Mapear os estados saturados obtidos para algumas famílias de ondas, traçando gráficos que correlacionem as propriedades das ondas com os parâmetros, investigando a influência dos mesmos sobre os distúrbios e suas propriedades, qualitativamente e quantitativamente;
- Comparar ondas saturadas em leitos normais com ondas em leitos invertidos.
- Propor uma expressão *ad hoc* para a pressão de partícula que descreva os dados experimentais obtidos em (DURU et al., 2002);
- Testar o modelo utilizando uma expressão tradicional na literatura para a pressão de partícula e utilizando a proposta *ad hoc* deste trabalho, estudando a influência da pressão de partícula sobre as ondas obtidas.

O presente relatório possui a seguinte estrutura: no Capítulo 2, são demonstradas equações de balanço de massa e momento linear para meios contínuos, sendo posteriormente indicadas as equações utilizadas no modelo bifásico contínuo para leitos fluidizados. Neste capítulo uma nova expressão para a pressão de partícula que descreva os resultados obtidos em (DURU et al., 2002) é proposta. O Capítulo 3 trata especificamente do estado saturado, sendo nele deduzida a equação central deste trabalho, que foi resolvida numericamente. No Capítulo 4 serão apresentados detalhes a respeito do código numérico utilizado para resolver a equação governante; no Capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos das simulações numéricas, permitindo investigar detalhadamente as ondas saturadas, caracterizando-as qualitativamente e quantitativamente e investigando a influência dos parâmetros do problema sobre o comportamento dos distúrbios e suas propriedades. No Capítulo 6, são discutidas as conclusões obtidas ao longo do projeto.

2 Formulação bifásica contínua para Leitos Fluidizados

Neste capítulo são discutidas as hipóteses e deduções que levam a uma descrição bifásica dos leitos fluidizados, bem como as equações constitutivas de fechamento do problema. Estas são equações que não possuem demonstração matemática, muitas vezes sendo modelos baseados em resultados experimentais, mas que descrevam o comportamento dos materiais e satisfaçam os princípios do formalismo constitutivo. Antes de proceder para as equações dos leitos fluidizados, são deduzidas equações fundamentais de balanço para meios contínuos.

2.1 Equações de Balanço da Mecânica dos Meios Contínuos

Materiais são muitas vezes tratados como meios contínuos, quando é possível supor que há uma escala de volume que seja suficientemente grande para que um ponto contenha um número grande de partículas que permita realizar médias sobre suas propriedades, considerando uma distribuição de probabilidade homogênea, e suficientemente pequena para não captar variações macroscópicas das propriedades no espaço.

2.1.1 Equação de balanço de massa

Seja V um volume arbitrário de um meio contínuo. Implica do princípio de conservação da massa que

$$\frac{Dm}{Dt} = 0, \quad (2.1)$$

onde m é a massa associada ao volume V e $\frac{D}{Dt}$ é denominada derivada total ou material, sendo uma derivada temporal associada a um referencial (Lagrangeano) que se desloca com a velocidade do meio contínuo, \mathbf{u} . A derivada total pode ser escrita como $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$. A massa do volume V é dada por

$$m = \int_V \rho dV, \quad (2.2)$$

onde ρ é a massa específica do material. Dessa forma, substituindo a Eq. (2.2) na Eq. (2.1), obtém-se:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.3)$$

Utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds (para detalhes, consultar o trabalho de Chandrasekharaiah e Debnath (2014)), obtemos:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (2.4)$$

O fato do volume V ser arbitrário e o integrando ser contínuo implica em

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.5)$$

pelo Teorema da Localização (CHANDRASEKHARAIAH; DEBNATH, 2014). Esta equação é chamada de Equação da continuidade e representa a conservação da massa de um meio contínuo. No caso de incompressibilidade, a Eq. (2.5) se reduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

2.1.2 Equação de balanço do momento linear

Como na subseção anterior, considere um volume arbitrário V de um meio contínuo, e delimitado por uma superfície S . Seu momento linear \mathbf{p} pode ser calculado por meio de uma integral no seu volume:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (2.7)$$

A 2ª Lei de Newton postula que a taxa de variação do momento linear com o tempo é igual à força resultante \mathbf{F} sobre o corpo. Portanto:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

Utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds e a Equação da continuidade, pode-se facilmente mostrar que:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \quad (2.9)$$

A força resultante pode ser escrita como a soma das forças de campo \mathbf{F}_c e de superfície \mathbf{F}_s sobre o corpo, que podem ser escritas como integrais envolvendo uma densidade de forças de campo \mathbf{b} e uma densidade de forças de superfície \mathbf{t} , respectivamente. Tem-se:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (2.10)$$

Sabe-se que

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.11)$$

resultado conhecido como Teorema de Cauchy (CHANDRASEKHARAIAH; DEBNATH, 2014), onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à área e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões do material.

Substituindo (2.11) em (2.10), usando o Teorema da Divergência para um tensor de 2ª ordem e substituindo (2.10) e (2.9) em (2.8), obtém-se:

$$\int_V \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] dV = 0 \quad (2.12)$$

Usando, como na subseção anterior, o Teorema da Localização e rearranjando os termos, obtém-se

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.13)$$

Esta equação é geral para todos os materiais contínuos e é conhecida como Equação de Cauchy. Para fechar esta equação, é necessária uma relação constitutiva que descreva o tensor de tensões para cada tipo de material. As equações da continuidade e de Cauchy serão essenciais no desenvolvimento do modelo bifásico para leitos fluidizados, dado na seção seguinte.

2.2 Equações contínuas para leitos fluidizados

Nesta seção serão apresentadas as equações do modelo bifásico onde partículas e o fluido são tratados como materiais contínuos interpenetrantes. Nas subseções a seguir, ϕ será a concentração de partículas, \mathbf{v} será a velocidade da fase sólida e \mathbf{u} , a velocidade da fase fluida.

2.2.1 Considerações sobre empacotamento e expansão do leito

Leitos fluidizados encontram-se dentro do escopo de análise de uma área geral que considera escoamentos através de leitos de partículas ou meios porosos. Para as discussões posteriores, algumas definições e conceitos a respeito de empacotamento das partículas sólidas e da expansão do leito serão úteis.

No modelo aqui utilizado, as partículas sólidas são consideradas esferas monodispersas. Inicialmente, em um leito fixo, as partículas tendem a ficar em contato, ficando muito empacotadas. A distribuição de esferas que possui a menor concentração possível é a cúbica. Na prática, em um leito real, as esferas têm uma distribuição que contenha certa aleatoriedade. Dessa forma, a concentração quando o leito está fixo é maior do que a de uma distribuição cúbica, e esse valor será denominado concentração de empacotamento aleatório frouxo, sendo denotado por ϕ_{rlp} . A princípio, quando o leito é chacoalhado, as esferas passam a apresentar um empacotamento maior. A teoria de materiais granulares prevê que há um limite, após o qual a concentração de partículas não pode mais aumentar por meio do chacoalhamento. Esse valor limite é denominado concentração de empacotamento aleatório denso e aqui será denotado por ϕ_{cp} . A palavra "aleatório" é central nessa definição, sendo esse limite baseado em observações estatísticas. Para esferas monodispersas, a teoria prevê $\phi_{cp} \approx 0.64$. As distribuições mais empacotadas possíveis para esferas

monodispersas são as de cúbicas de face centrada e a hexagonal, mas estas são simétricas, e não aleatórias.

Leitos fluidizados permanecem empacotados enquanto fixos. À medida que a velocidade superficial aumenta, as partículas começam a afrouxar um pouco sua configuração, e quando a velocidade de mínima fluidização, q_{mf} , é atingida, com uma concentração ϕ_{mf} , o leito começa sua expansão, enquanto as partículas afrouxam consideravelmente sua configuração, diminuindo a concentração. Num importante trabalho, [Richardson e Zaki \(1954\)](#) propuseram uma relação empírica entre a velocidade superficial e a concentração do estado de fluidização homogênea, que a partir deste momento será denotada por ϕ_0 :

$$q = v_t(1 - \phi_0)^n, \quad (2.14)$$

onde n é um expoente medido experimentalmente, sendo função do número de Reynolds, Re , do escoamento. A Eq.(2.14) envolve a velocidade superficial e a concentração do estado homogêneo ϕ_0 , que são propriedades globais. Alternativamente, pode-se escrever de forma local:

$$\bar{u} = v_t(1 - \phi)^n, \quad (2.15)$$

onde \bar{u} é a velocidade média local do fluido. Estas expressões receberam o nome de relações de Richardson-Zaki. Uma justificativa para seu uso é que ela recupera, no regime assintótico em que $\phi_0 \rightarrow 0$, a velocidade de uma única partícula. Dessa forma, traça-se uma curva $q \times \phi_0$ e obtém-se o expoente n que melhor descreva os pontos.

2.2.2 Apresentação das equações governantes

Uma descrição contínua bifásica dos leitos fluidizados é obtida através de um processo de cálculo de variáveis médias numa escala adequada, que seja grande comparada ao espaçamento entre partículas, mas pequena o suficiente para não captar variações macroscópicas das propriedades. Esse processo de médias foi proposto em ([ANDERSON; JACKSON, 1967](#)) e mais recentemente realizado em ([SOBRAL; CUNHA, 2002](#)). A chave para obtenção das equações governantes é o uso de uma função peso, $g(r)$, que possua as seguintes propriedades:

$$g(r) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

$$g(r) > 0 \quad \text{para todo } r \quad (2.17)$$

e

$$\int_V g(r) dV = 1 \quad (2.18)$$

Nas equações (2.16), (2.17) e (2.18), r é a distância entre o ponto analisado, \mathbf{x} , e um ponto arbitrário \mathbf{y} , enquanto V é todo o volume do sistema. Portanto, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Não é necessário conhecer uma forma explícita para a função $g(r)$; basta que ela satisfaça as

propriedades (2.16),(2.17) e (2.18). A função peso é usada para definir a concentração de partículas em uma posição \mathbf{x} e um tempo t . Tem-se:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{V_s(t)} g(r) dV_y, \quad (2.19)$$

onde $V_s(t)$ é o volume total ocupado pelas partículas num tempo t . Analogamente, a fração de fluido, $1 - \phi \equiv \epsilon(\mathbf{x}, t)$, pode ser definida como:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{V_f(t)} g(r) dV_y, \quad (2.20)$$

onde $V_f(t)$ é o volume de fluido num tempo t . Variáveis médias são definidas da seguinte maneira:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \bar{h}(\mathbf{x}, t) = \int_{V_s(t)} h(\mathbf{y}, t) g(r) dV_y \quad (2.21)$$

$\bar{h}(\mathbf{x}, t)$ é uma propriedade média qualquer da fase sólida e foi definida a partir de uma integral envolvendo o seu valor local de ponto, $h(\mathbf{x}, t)$ e a função peso. Propriedades médias da fase fluida são definidas analogamente, com $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ e $V_f(t)$ no lugar de $\phi(\mathbf{x}, t)$ e $V_s(t)$, respectivamente. São necessárias também definições para as derivadas espaciais e temporais das variáveis médias, que serão omitidas nesse trabalho. Com essas definições, podemos proceder para a apresentação das equações governantes. Podemos escrever as equações da continuidade e de Cauchy para as fases sólida e fluida:

$$\frac{\partial \rho_s(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_s(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \rho_f(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_f(\mathbf{y}, t) \mathbf{u}(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (2.23)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \rho_s \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = \rho_s \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}_s(\mathbf{y}, t) \quad (2.24)$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \rho_f \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = \rho_f \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T}_f(\mathbf{y}, t) \quad (2.25)$$

Nas equações acima, \mathbf{T}_s é o tensor de tensões para a fase sólida e \mathbf{T}_f , para a fase fluida. As equações (2.22),(2.23),(2.24) e (2.25) são válidas para todos os pontos \mathbf{y} que pertençam ao volume da fase correspondente. As equações que se referem à fase sólida podem ser multiplicadas pela função peso e integradas no volume da fase sólida, enquanto as equações que se referem à fase fluida podem ser multiplicadas pela função peso e integradas no volume da fase líquida. No que vem a seguir, as variáveis médias assumirão os símbolos das variáveis locais, por facilidade de notação. Após a realização do processo de médias, obtém-se as equações da continuidade para as fases sólida e líquida, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = 0 \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot [(1 - \phi) \mathbf{u}] = 0 \quad (2.27)$$

Após um longo processo de cálculo, obtém-se as equações de momento para a fase sólida e para a fase fluida, já na forma em que apareceram em (SOBRAL; HINCH, 2017):

$$\phi\rho_s\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = \nabla\cdot\mathbf{T}_s + \mathbf{f} + \phi(\rho_s - \rho_f)\mathbf{g} + \phi\rho_f\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) \quad (2.28)$$

$$(1 - \phi)\rho_f\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = \nabla\cdot\mathbf{T}_f - \mathbf{f} + (1 - \phi)\rho_f\mathbf{g} \quad (2.29)$$

Nas equações (2.28) e (2.29), \mathbf{f} é a força que o fluido exerce sobre as partículas sólidas. Para fechar o problema, são necessárias equações constitutivas para \mathbf{T}_s , \mathbf{T}_f e \mathbf{f} . Assumindo que os tensores de tensão para as fases sólida e fluida são de fluido newtoniano compressível, tem-se:

$$\mathbf{T}_s = -p_s(\phi)\mathbf{I} + \mu_s(\phi)\left[\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}\right] \quad (2.30)$$

$$\mathbf{T}_f = -p\mathbf{I} + \mu_f\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{I}\right] \quad (2.31)$$

A pressão de partícula $p_s(\phi)$ e a viscosidade de partícula $\mu_s(\phi)$ são quantidades cruciais para o fechamento do modelo e que afetam muito as ondas obtidas como solução das equações. A dependência funcional da pressão de partícula e da viscosidade de partícula com a concentração não é ainda totalmente conhecida, sendo objeto de estudo. Ambas as funções tem sua origem devida às flutuações de velocidade das partículas sólidas. Neste trabalho, para a viscosidade, foi utilizada a expressão proposta por (DURU et al., 2002), através de uma análise experimental. Esta expressão é válida pelo menos para o intervalo de parâmetros investigados naquele trabalho e é dada por:

$$\mu_s(\phi) = 0.18\frac{\rho_s d_s v_t}{\phi_{rlp} - \phi}. \quad (2.32)$$

Para a pressão de partícula, é tradicional na literatura utilizar uma expressão sempre crescente com a concentração, já que a natureza do seu mecanismo é basicamente colisional, e a princípio o número de colisões de partículas deve aumentar quando a concentração aumenta. Neste trabalho, foram utilizados dois modelos: um tradicional na literatura, usado pela primeira vez por (HERNÁNDEZ; JIMENEZ, 1991) e utilizado também em (SOBRAL; HINCH, 2017), cujos resultados serviram de ponto de partida para este projeto. A expressão para a pressão de partícula deste modelo é dada por:

$$p_s(\phi) = \sigma\phi^3 \exp\left(\frac{r\phi}{\phi_{cp} - \phi}\right), \quad (2.33)$$

onde r e σ são parâmetros de ajuste do modelo. Este modelo foi utilizado ao longo da maior parte deste trabalho. Um segundo modelo, *ad hoc*, foi proposto neste trabalho. No trabalho experimental de (DURU et al., 2002), foi obtido o seguinte gráfico para a derivada da pressão de partícula:

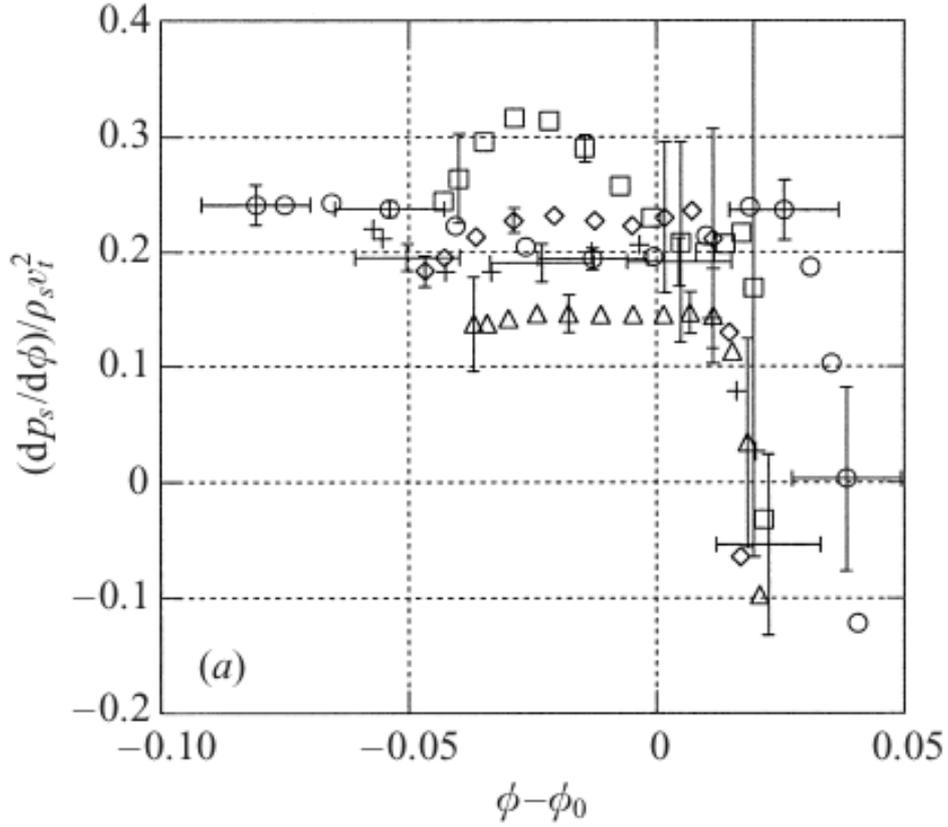


Figura 2 – $(dp_s/d\phi)/(\rho_s v_t^2)$ em função de $\phi - \phi_0$ obtido em (DURU et al., 2002)

Cada tipo de ponto corresponde a uma combinação de parâmetros dos experimentos lá executados. Em (DURU et al., 2002), a partir desse gráfico, foi proposto lá um modelo linear simples do tipo:

$$\frac{dp_s}{d\phi} = 0.2\rho_s v_t^2, \quad (2.34)$$

modelo este que despreza a região onde $dp_s/d\phi$ é negativo. Sobral e Hinch (2017) mostrou que esse modelo é inadequado e não retornava bons resultados para as simulações lá executadas. Neste, trabalho, propõe-se uma expressão *ad hoc* que corrige a proposta de Duru et al. (2002):

$$p_s(\phi) = \rho_s v_t^2 \left(a\phi + b(\phi_{cp} - \phi)^k + e \right), \quad (2.35)$$

onde a , b e o expoente k , que satisfaz $0 < k < 1$, são parâmetros importantes do modelo e c é apenas um parâmetro necessário para garantir que o limite assintótico de que quando a concentração tende a 0, a pressão tenda a 0 também seja satisfeito. Dessa forma, para $dp_s/d\phi$ tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{dp_s}{d\phi} = \rho_s v_t^2 \left(a - \frac{d}{(\phi_{cp} - \phi)^{1-k}} \right), \quad (2.36)$$

onde $d = bk$. Os parâmetros a e d são positivos. Para baixas concentrações, o termo $\rho_s v_t^2 a$ é muito maior do que o segundo termo e a pressão de partícula é crescente, como espera-se, considerando a natureza colisional de seu mecanismo. Entretanto, quando ϕ se

aproxima de ϕ_{cp} , o segundo termo passa a ser mais relevante e $dp_s/d\phi$ passa a ser negativo, capturando o comportamento observado na Figura 2. Tal comportamento acontece porque, ao contrário do que preveem os modelos puramente colisionais da literatura, para concentrações excessivamente altas as partículas começam a se agrupar em estruturas sólidas maiores, tendo tensões de contato não hidrodinâmicas, dessa forma diminuindo a quantidade de colisões. Esse novo modelo de pressão de partícula foi testado neste trabalho para a combinação 6 do artigo de [Duru et al. \(2002\)](#), cujos pontos são os triângulos da Figura 2. Os valores dos parâmetros a , d e k utilizados neste trabalho são fornecidos na seção referente aos resultados obtidos com este modelo de pressão.

Resta então a equação de fechamento para a força \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \beta(\phi)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \rho_f \hat{c}(\phi) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \right] + \phi \nabla \cdot \mathbf{T}_f \quad (2.37)$$

Em (2.37), o primeiro termo do lado direito da equação é uma força de arrasto devida à velocidade relativa entre o fluido e as partículas sólidas; o segundo termo do lado direito da equação é um arrasto de massa virtual e o terceiro, um arrasto de pressão ([SOBRAL; HINCH, 2017](#)). O coeficiente de arrasto β é função de ϕ e pode ser deduzido usando a Relação de Richardson-Zaki (2.14) e sabendo que para a condição de mínima fluidização a força de arrasto sobre as partículas balanceia com o peso líquido sobre as partículas:

$$F_a = F_p, \quad (2.38)$$

onde F_a é a força de arrasto sobre as partículas e F_p é o peso líquido sobre as partículas sólidas. Para F_a pode-se escrever:

$$F_a = \beta(\phi) \bar{u} V, \quad (2.39)$$

onde $\beta(\phi) \bar{u}$ é a força de arrasto por unidade de volume e é multiplicada pelo volume do leito V para obter a força de arrasto. Para o peso líquido global sobre as partículas pode-se escrever:

$$F_p = (1 - \phi)(\rho_s - \rho_f) g N V_p, \quad (2.40)$$

onde N é o número total de partículas sólidas no leito e V_p é o volume de uma partícula. Dessa forma, obtém-se que:

$$\beta(\phi) \bar{u} V = (1 - \phi)(\rho_s - \rho_f) g N V_p \quad (2.41)$$

Lembrando da Eq.(2.15), e sabendo que $N V_p / V = \phi$, por definição, obtém-se a seguinte expressão para o coeficiente de arrasto:

$$\beta(\phi) = \frac{(\rho_s - \rho_f) g}{v_t} \frac{\phi}{(1 - \phi)^{n-1}} \quad (2.42)$$

O coeficiente de massa virtual é definido de forma que recupera o valor 1/2 para o caso de uma única esfera isolada:

$$\hat{c}(\phi) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \phi} \quad (2.43)$$

Neste projeto, foram estudadas ondas unidimensionais que se propagam num leito líquido-sólido. Para o caso 1D, as equações (2.26) e (2.27) se reduzem a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi v)}{\partial x} = 0 \quad (2.44)$$

e

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(1 - \phi)u] = 0. \quad (2.45)$$

Somando e integrando as equações (2.44) e (2.45), obtém-se uma importante relação para a velocidade superficial:

$$q = \phi v + (1 - \phi)u. \quad (2.46)$$

Neste problema, estamos interessados apenas na solução do problema para a fase sólida, não sendo necessário resolver a equação para a fase líquida. Substituindo as equações (2.37), (2.30) e (2.31) na equação (2.28) e tomando o caso 1D, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \phi(\rho_s + \hat{c}(\phi)\rho_f) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \phi \rho_f (1 + \hat{c}(\phi)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p_s}{\partial x} \\ = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_s \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \beta(u - v) - \phi(\rho_s - \rho_f)g. \end{aligned} \quad (2.47)$$

A equação (2.47) em conjunto com as equações (2.45) e (2.46) descreve a dinâmica de leitos fluidizados 1D.

3 Equação das ondas saturadas

Como mencionado anteriormente, leitos fluidizados possuem uma natureza instável; a solução trivial para as equações (2.44), (2.45) e (2.47) é o estado homogêneo de fluidização:

$$\phi = \phi_0, \quad v = 0, \quad u = q/(1 - \phi_0) \quad (3.1)$$

Entretanto, perturbações naturais afetam os leitos, provocando a formação de regiões mais concentradas e menos concentradas, que se propagam ao longo do leito. Portanto, é de interesse realizar análises de estabilidade e estudar a natureza dessas instabilidades. Um exemplo desse tipo de estudo é a primeira parte do artigo de Sobral e Hinch (2017). Porém, no capítulo 6 deste artigo, realizam-se simulações de ondas saturadas, na tentativa de validá-las com os resultados experimentais de (DURU et al., 2002). Nesse projeto, foi dada continuidade à análise de ondas saturadas. Para isso, é importante definir o estado saturado.

Ondas estáveis são rapidamente dissipadas no leito fluidizado, não sendo de nosso interesse nesse caso; porém, as instáveis aumentam sua amplitude e mudam a forma enquanto se propagam no tubo. Esse crescimento possui um limite de saturação, a partir do qual as ondas não mudam mais de amplitude, de forma nem de velocidade de propagação, c . Mapear os estados saturados é o verdadeiro fim deste trabalho, entendendo a dependência das propriedades das ondas com os parâmetros do problema.

No experimento de Duru et al. (2002), as perturbações eram impostas ao sistema provocando um forçamento harmônico sobre a placa porosa, sendo a frequência, f , um importante parâmetro de controle experimental. Nas análises deste projeto, a frequência de uma onda aparecerá indiretamente.

Na análise do estado saturado, foi utilizada em Duru et al. (2002) uma EDO não-linear, obtida por meio de mudanças de variáveis convenientes. Na seção abaixo, essa EDO é deduzida.

3.1 Dedução da equação governante das ondas saturadas não-lineares

Como dito em [Duru et al. \(2002\)](#), o estado saturado é mais convenientemente descrito em um referencial que se move com a velocidade de propagação da onda, c , que é constante. Portanto, a onda é estacionária nesse referencial, definido por uma transformação Galileana:

$$X = x - ct. \quad (3.2)$$

As velocidades das fases líquida e sólida nesse novo referencial, são, respectivamente:

$$u(X) = u(x, t) - c \quad (3.3)$$

e

$$v(X) = v(x, t) - c, \quad (3.4)$$

e para a concentração de partículas tem-se:

$$\phi(X) = \phi(x, t). \quad (3.5)$$

Aplicando essa transformação e usando a regra da cadeia, a equação não-linear dos estados saturados será obtida. Considere as equações (2.44), (2.45) e (2.47). Trabalhando com o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.44):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = -c \frac{d\phi}{dX}. \quad (3.6)$$

O segundo termo é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = v(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = (v(X) + c) \frac{d\phi}{dX} + \phi(X) \frac{dv(X)}{dX}. \quad (3.7)$$

Usando as equações (3.6) and (3.7) e executando alguns cálculos simples, a equação da continuidade para a fase sólida é obtida:

$$\frac{d(\phi v)}{dX} = 0. \quad (3.8)$$

Integrando a equação (3.8), obtém-se:

$$\phi v = -c\phi_0, \quad (3.9)$$

já que no estado de fluidização homogênea a fase sólida seria estacionária, o que significa que no novo referencial seria vista com velocidade c na direção descendente. Executando cálculos análogos com a equação (2.45), a Equação da Continuidade para a fase fluida é obtida:

$$-u \frac{d\phi}{dX} + (1 - \phi) \frac{du}{dX} = 0. \quad (3.10)$$

Agora, trabalhando com o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.47):

$$\begin{aligned} & \phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f) \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) = \\ & \phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f) \left(-c \frac{dv(X)}{dX} + (v(X) + c) \frac{dv(X)}{dX} \right) = \\ & \phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f) v(X) \frac{dv(X)}{dX}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Analogamente, para o segundo termo do lado esquerdo:

$$-\phi\rho_f(1 + \hat{c}) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = -\phi\rho_f(1 + \hat{c})u(X) \frac{du(X)}{dX}. \quad (3.12)$$

Nesse momento, é conveniente deduzir algumas relações; da equação (3.8), temos:

$$\frac{dv(X)}{dX} = -\frac{v(X)}{\phi} \frac{d\phi}{dX}. \quad (3.13)$$

Analogamente, da equação (3.10),

$$\frac{du}{dX} = \frac{u}{(1 - \phi)} \frac{d\phi}{dX}. \quad (3.14)$$

Trabalhando com a equação (2.46) e tendo a equação (2.14) em mente, temos:

$$\begin{aligned} q &= v_t(1 - \phi_0)^n \\ &= \phi v(x, t) + (1 - \phi)u(x, t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora, usando a transformação (3.2) e continuando a manipular (3.15) obtém-se:

$$\begin{aligned} q &= \phi(v(X) + c) + (1 - \phi)(u(X) + c) \\ &= \phi v(X) + (1 - \phi)u(X) + c. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Isolando a velocidade da fase fluida na equação (3.16), obtém-se:

$$u(X) = \frac{v_t(1 - \phi_0)^n - \phi v(X) - c}{1 - \phi}. \quad (3.17)$$

A última equação importante para se lembrar é (3.9). Agora estamos prontos para mostrar que o primeiro e o segundo termos do lado esquerdo da equação (2.47) podem ser manipulados de forma a eliminar as velocidades das fases fluida e sólida, respectivamente.

$$\phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f)v \frac{dv}{dx} = -\phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f) \frac{v^2}{\phi} \frac{d\phi}{dX}, \quad (3.18)$$

onde a equação (3.13) foi usada. A equação (3.9) implica que

$$\phi(\rho_s + \hat{c}\rho_f)v \frac{dv}{dx} = -(\rho_s + \hat{c}\rho_f) \left(\frac{c\phi_0}{\phi} \right)^2 \frac{d\phi}{dX}. \quad (3.19)$$

Analogamente, para o segundo termo:

$$\phi\rho_f(1 + \hat{c})u \frac{du}{dX} = \phi\rho_f(1 + \hat{c}) \frac{u^2}{(1 - \phi)} \frac{d\phi}{dX}, \quad (3.20)$$

onde a equação (3.14) foi usada. Eqs. (3.16) e (3.9) implicam em

$$\phi\rho_f(1+\hat{c})u\frac{du}{dX} = \frac{\phi\rho_f(1+\hat{c})}{(1-\phi)^3} [v_t(1-\phi_0)^n - c(1-\phi_0)]^2 \frac{d\phi}{dX}. \quad (3.21)$$

Para o gradiente de pressão temos:

$$\frac{\partial p_s}{\partial x} = \frac{dp_s}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{dp_s}{dX} = \frac{dp_s}{d\phi} \frac{d\phi}{dX}, \quad (3.22)$$

já que a pressão de partícula é função da concentração de partículas. Trabalhando com o primeiro termo do lado direito da equação (2.47):

$$\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_s \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{4}{3} \frac{d}{dX} \left(\mu_s \frac{dv(X)}{dX} \right). \quad (3.23)$$

Usando (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_s \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \\ \frac{4}{3} \frac{d}{dX} \left(\mu_s \left(\frac{-v}{\phi} \right) \frac{d\phi}{dX} \right) &= \\ \frac{4}{3} c\phi_0 \frac{d}{dX} \left(\frac{\mu_s}{\phi^2} \frac{d\phi}{dX} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde a Eq.(3.9) foi usada. Agora trabalhando com o segundo termo do lado direito da eq.(2.47), lembrando que $\beta(\phi)$ é dado por (2.42) e usando a Eq.(3.16) obtém-se:

$$\beta(u-v) = \beta \left[\frac{v_t(1-\phi_0)^n - \phi v - c}{1-\phi} - v \right]. \quad (3.25)$$

Usando as eqs. (3.9) e (2.42), podemos então mostrar que:

$$\beta(u-v) = (\rho_s - \rho_f)g\phi \left[\frac{v_t(1-\phi_0)^n - c(1-\phi_0/\phi)}{v_t(1-\phi_0)^n} \right]. \quad (3.26)$$

Não é necessário manipular o termo de peso corrigido para empuxo. Pode-se agora reescrever a equação de momento da fase sólida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -(\rho_s + \hat{c}\rho_f) \left(\frac{c\phi_0}{\phi} \right)^2 \frac{d\phi}{dX} - \frac{\phi\rho_f(1+\hat{c})}{(1-\phi)^3} [v_t(1-\phi_0)^n - c(1-\phi_0)]^2 \frac{d\phi}{dX} + \frac{dp_s}{d\phi} \frac{d\phi}{dX} = \\ \frac{4}{3} c\phi_0 \frac{d}{dX} \left[\frac{\mu_s}{\phi^2} \frac{d\phi}{dX} \right] + (\rho_s - \rho_f)\phi g \left[\frac{v_t(1-\phi_0)^n - c(1-\phi_0/\phi)}{v_t(1-\phi_0)^n} \right] - (\rho_s - \rho_f)\phi g. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) chega então à sua forma final:

$$\frac{4}{3} c\phi_0 \frac{d}{dX} \left[\frac{\mu_s}{\phi^2} \frac{d\phi}{dX} \right] + \left[F_2(\phi) - \frac{dp_s}{d\phi} \right] \frac{d\phi}{dX} + F_1(\phi) = 0, \quad (3.28)$$

onde

$$F_1(\phi) = \phi g(\rho_s - \rho_f) \left[\frac{v_t(1-\phi_0)^n - c(1-\phi_0/\phi)}{v_t(1-\phi_0)^n} - 1 \right], \quad (3.29)$$

e

$$F_2(\phi) = \frac{\phi\rho_f(1 + \hat{c})}{(1 - \phi)^3} [v_t(1 - \phi_0)^n - c(1 - \phi_0)]^2 + (\rho_s + \hat{c}\rho_f) \left(\frac{c\phi_0}{\phi}\right)^2. \quad (3.30)$$

Eq. (3.28) é a EDO não-linear para a concentração de partículas, onde a velocidade de propagação c também é *a priori* desconhecida. As soluções dessa EDO são ondas saturadas. O termo $F_1(\phi)$ reúne os termos associados à força de arrasto entre fluido e partículas e à diferença entre o peso e o empuxo sobre as partículas. $F_2(\phi)$ reúne os termos de inércia e massa virtual. $\left[F_2(\phi) - \frac{dp_s}{d\phi}\right] \frac{d\phi}{dX}$ é um termo associado à simetria das ondas, de forma que ondas simétricas possuem um aproximado equilíbrio entre os termos de inércia e a derivada da pressão de partícula. Quando os termos associados à pressão de partícula e inércia são desprezados na equação governante geral para leitos fluidizados, é possível mostrar que as ondas não decaem nem crescem, apenas se propagando de forma neutra com uma velocidade que foi calculada em (SOBRAL; HINCH, 2017). A equação (3.28) por si só não fecha o problema adequadamente, já que é uma EDO com duas incógnitas e apenas uma equação. Para fechar o problema, é usada a condição de periodicidade das ondas. Multiplicando (3.28) por $\frac{\mu_s}{\phi^2} \frac{d\phi}{dX}$ e integrando de 0 a λ , onde λ é o comprimento de onda, obtém-se a seguinte restrição integral:

$$\int_0^\lambda \mu_s(\phi) \left[F_2(\phi) - \frac{dp_s}{d\phi} \right] \left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dX} \right)^2 dX = 0. \quad (3.31)$$

Usando (3.28) e (3.31), uma solução para c e ϕ pode ser obtida. Neste projeto, foram encontradas ondas integrando de um ponto de máximo até outro, encontrando a velocidade de propagação, perfil de concentração e comprimento de onda, também desconhecido. Assim, foram usadas as seguintes condições de contorno:

$$\frac{d\phi}{dX} = 0 \quad \text{quando} \quad X = 0 \quad \text{e} \quad \phi = \phi_{max} \quad \text{quando} \quad X = \lambda, \quad (3.32)$$

onde ϕ_{max} é uma concentração máxima de uma onda.

3.2 Adimensionalização da equação governante

Para obter uma compreensão melhor a respeito da influência dos parâmetros do problema, uma adimensionalização para a EDO (3.28) foi proposta por meio das seguintes

variáveis adimensionais:

$$\begin{cases} c^* = \frac{c}{v_t}, \\ X^* = \frac{X}{d_s}, \\ \mu_s(\phi)^* = \frac{\mu_s(\phi)}{\rho_s d_s v_t}, \\ p_s^*(\phi) = \frac{p_s(\phi)}{\rho_s v_t^2}, \\ F_1^*(\phi) = \frac{F_1(\phi) d_s}{\rho_s v_t^2}, \\ F_2^*(\phi) = \frac{F_2(\phi)}{\rho_s v_t^2}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Para a velocidade, foi utilizada a velocidade terminal, v_t , como escala típica. Como escala típica de comprimento, foi usado o diâmetro das partículas. Espera-se que o comprimento de onda dos distúrbios seja um múltiplo grande deste diâmetro, garantindo que as ondas simuladas contêm uma quantidade de partículas suficiente para que as hipóteses do modelo bifásico contínuo sejam válidas. A viscosidade de partícula já possui em sua definição uma escala típica natural, $\rho_s d_s v_t$, onde aparecem as já usadas escalas de velocidade típica e comprimento típico. Para adimensionalizar p_s, F_1 e F_2 , foi utilizada uma escala típica de pressão de Bernoulli, dada por $\rho_s v_t^2$, utilizando a massa específica da fase sólida e a já referida escala típica para a velocidade. Define-se ainda a razão de densidades R_ρ por

$$R_\rho = \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (3.34)$$

Dessa forma, obtém-se as seguintes expressões para as variáveis e funções adimensionais:

$$F_1^*(\phi) = \frac{\phi(1 - R_\rho)}{Fr} \left[\frac{(1 - \phi_0)^n - c^*(1 - \phi_0/\phi)}{(1 - \phi)^n} - 1 \right]; \quad (3.35)$$

$$F_2^*(\phi) = \frac{\phi R_\rho (1 + \hat{c})}{(1 - \phi)^3} [(1 - \phi_0)^n - c^*(1 - \phi_0)]^2 + (1 + \hat{c} R_\rho) \left(\frac{c^* \phi_0}{\phi} \right)^2; \quad (3.36)$$

$$\mu_s^*(\phi) = \frac{0.18}{\phi_{rlp} - \phi}, \quad (3.37)$$

e

$$p_s^*(\phi) = \sigma^* \phi^3 \exp\left(\frac{r\phi}{\phi_{cp} - \phi}\right), \quad (3.38)$$

onde σ^* é dado por $\sigma^* = \sigma/\rho_s v_t^2$. Com isso, a versão adimensional da EDO governante é finalmente obtida:

$$\frac{4}{3}c^*\phi_0 \frac{d}{dX^*} \left[\frac{\mu_s^*(\phi)}{\phi^2} \frac{d\phi}{dX^*} \right] + F_1^*(\phi) + \left[F_2^*(\phi) - \frac{dp_s^*}{d\phi} \right] \frac{d\phi}{dX^*} = 0, \quad (3.39)$$

Na Eq.(3.39), é possível identificar os parâmetros adimensionais centrais do problema, Fr e R_ρ . A influência deles sobre os perfis de ondas saturadas será investigada no próximo capítulo. A Eq.(3.39) representa um balanço entre os termos viscoso, termo que reúne forças de arrasto e peso líquido e um termo que envolve a diferença entre as forças de inércia e a derivada da pressão de partícula.

4 Metodologia numérica

4.1 Métodos utilizados

Recapitulando, estamos interessados em resolver o problema composto pelas equações (3.28) e (3.31) com condições iniciais (3.32). Sabemos que as soluções para a concentração de partículas são ondas de concentração periódicas saturadas; a velocidade de propagação das ondas, c , o comprimento de onda, λ , além do próprio perfil de concentração, são incógnitas.

O método de solução foi proposto em (SOBRAL; HINCH, 2017). A EDO (3.28) possui duas incógnitas. Suponhamos que c seja dado. Nesse caso, a equação pode ser integrada até um novo ponto de máximo ser encontrado, que dificilmente coincide com o valor de concentração inicial, ϕ_{max} . Para cada valor de c (dentro de um intervalo que seja razoável para a velocidade; um limite superior foi calculado na análise de estabilidade em Sobral e Hinch (2017)) a equação é resolvida numericamente e a integral em (3.31) é avaliada. Um perfil de concentração e uma velocidade são solução do sistema se satisfazem simultaneamente (3.28) e (3.31) com as condições iniciais. Nas seções subsequentes, h é o passo de integração. Foram utilizados os seguintes métodos numéricos no algoritmo:

4.1.1 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Para uma dada velocidade de propagação da onda, a EDO de 2ª ordem (3.28) pode ser resolvida, sendo decomposta em dois problemas de 1ª ordem; definindo $\frac{d\phi}{dX} = s$ e realizando manipulações algébricas, obtém-se as equações

$$\phi' = s, \quad (4.1)$$

e

$$s' = \frac{3}{4c} \frac{\phi^2}{\phi_0 \mu_s} \left[-F_1 + \left(\frac{dp_s}{d\phi} - F_2 \right) s \right] + \left[\frac{2}{\phi} - \frac{1}{\phi_{rlp} - \phi} \right] s^2 \quad (4.2)$$

onde ' denotada derivada. As condições iniciais para a simulação são dadas em (3.32). Foi utilizado um Runge-Kutta de 4ª ordem para resolver o sistema de EDOs. Definindo um vetor de incógnitas:

$$\mathbf{a}(X) = [\phi(X) \quad s(X)] \quad (4.3)$$

Pode-se então definir:

$$\mathbf{a}'(X) = \mathbf{j} = [j_1 \quad j_2], \quad (4.4)$$

onde $j_1 = \phi'$ e $j_2 = s'$. Assim, usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, pode-se escrever:

$$X_{n+1} = X_n + h \quad (4.5)$$

e

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (4.6)$$

onde

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{j}(X_n, \mathbf{a}_n) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{j}\left(X_n + \frac{h}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{j}\left(X_n + \frac{h}{2}, \mathbf{a}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{j}(X_n + h, \mathbf{a}_n + h\mathbf{k}_3) \quad (4.10)$$

O código numérico foi escrito de tal maneira a integrar \mathbf{a} numericamente até que um ponto de máximo para a concentração seja atingido.

4.1.2 Método dos Trapézios

O Método dos Trapézios foi utilizado para avaliar a integral que garante a periodicidade das ondas, (3.31), numericamente. Considere a integral $\int_a^b f(x)dx$. Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n partes, definindo $x_0 = a$, $x_n = b$ e $h = (b - a)/n$, a integral, de acordo com o Método dos Trapézios, é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]. \quad (4.11)$$

4.1.3 Método da Bisseção

O Método da Bisseção é utilizado para encontrar a raiz de uma função $f(x) = 0$ em um dado intervalo $[a, b]$ onde $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos. Em cada passo, o método divide o intervalo em dois, sendo tomado o ponto médio

$$d = \frac{a + b}{2}. \quad (4.12)$$

Ou $f(d)$ é a raiz e o processo termina, ou $f(a)$ e $f(d)$ têm sinais opostos, ou $f(b)$ e $f(d)$ têm sinais opostos. O método seleciona o subintervalo que possui valores da função avaliados nos limites com sinais opostos e segue a iteração. O processo continua até que

um valor próximo o suficiente à raiz seja encontrado, considerando uma tolerância. Nesse código, foram usadas bisseções para encontrar a velocidade de propagação correta das ondas, tal que elas satisfaçam a (3.31). Em outra parte do trabalho, foi utilizado um método da bisseção também para encontrar ϕ_{max} de forma a obter uma frequência de onda dada.

4.2 Convergência

Uma dificuldade na resolução do problema dado por (3.28), (3.31) e (3.32) é que embora as condições iniciais sejam dadas, o domínio a princípio não é conhecido, já que integramos uma onda até achar um próximo ponto de máximo, e não se sabe *a priori* qual será o comprimento de onda. Apenas quando encontra-se uma onda que satisfaça (3.28) e (3.31) e (3.32) é que sua velocidade de propagação, comprimento de onda e frequência passam a ser conhecidos. Durante a realização do projeto foram encontrados valores de comprimento de onda que variaram de $0,38cm$ até $3,70cm$. Dessa forma, foi tomado o cuidado de se selecionar um h que fosse da ordem de $10^{-3}\lambda$ para um caso de λ pequeno, de forma a garantir que os resultados obtidos sejam corretos.

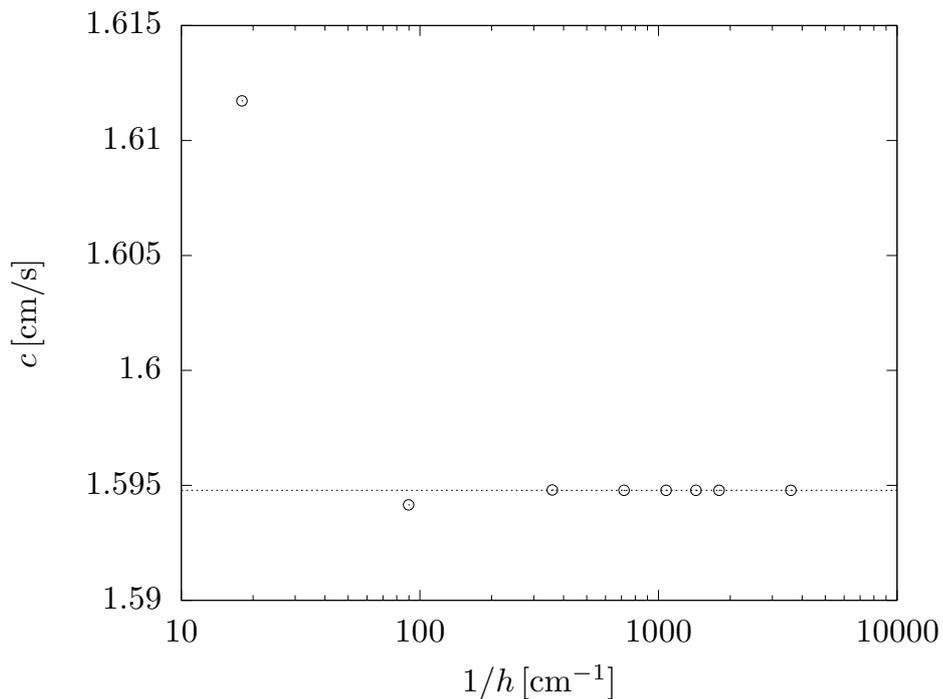


Figura 3 – Teste de convergência

Foi feito um gráfico de convergência do método para uma onda específica, com $\phi_0 = 0.525$, $\phi_{max} = 0.535$, apresentado na Figura (3). Por conveniência, os resultados foram apresentados em função de $1/h$. A partir de $h \approx 10^{-3}cm$, a variação de c com h é da ordem de $10^{-7}cm/s$. Por garantia, foi utilizado neste projeto o valor $h = 2.10^{-4}cm$.

4.3 Algoritmo

O algoritmo implementado é bastante simples. Seus passos são:

1. Estimativa inicial para c .
2. Integrar a equação (3.28) de ϕ_{max} até achar outro ponto de máximo.
3. Avaliar a integral (3.31). Se o módulo do resultado da integral for menor que a tolerância, o processo terminou e achamos a solução. Se não, voltar para o passo 1.
4. Método da bisseção para encontrar o c correto, tal que (3.31) seja satisfeita. Quando c for encontrado, tem-se a solução, obtendo-se uma onda saturada e conhecendo seu comprimento de onda, amplitude, frequência ($f = c/\lambda$), etc.

Uma variação deste algoritmo é, quando deseja-se fixar uma frequência, acoplar uma bisseção para encontrar ϕ_{max} tal que a frequência da onda seja a desejada.

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos através da integração numérica da Eq. (3.39). Como mencionado no capítulo anterior, o balanço de forças dado pela Eq.(3.39) representa uma competição entre os mecanismos envolvidos no fenômeno da fluidização. Os parâmetros adimensionais centrais do problema são Fr , R_ρ e ϕ_0 . Os resultados deste capítulo estão organizados de modo a estudar a influência destes parâmetros sobre o comprimento de onda λ (ou λ^*), a velocidade de propagação c (ou c^*), a frequência f dos distúrbios, a amplitude das ondas e também sua forma. Observações puramente matemáticas acerca das soluções puderam ser relacionadas com argumentos físicos envolvendo a competição de mecanismos responsável pela fluidização.

Embora a EDO governante do problema seja unidimensional, e portanto, apenas ondas saturadas planas possam ser obtidas, o formato de algumas das ondas obtidas nesse capítulo pode sugerir uma tendência das ondas de concentração unidimensionais evoluir para outros tipos de instabilidade no leito, tais como choques e bolhas. Tal transição se daria, na prática, através do crescimento da instabilidade secundária pelo leito, fenômeno que não pode ser previsto diretamente pela equação (3.39). Na parte final do capítulo, resultados das simulações realizadas utilizando a expressão de pressão de partícula *ad hoc* proposta a partir dos dados experimentais obtidos em Duru et al. (2002) são apresentados. Parte das análises do capítulo são realizadas usando a versão dimensional da EDO governante (Eq.(3.28)) e parte usando a versão adimensional (Eq.(3.39)). Os resultados dimensionais são convenientes no sentido de manter uma proximidade maior entre o leitor e valores reais dos parâmetros que possam ser reproduzidos em um experimento; os resultados adimensionais levam a importantes conclusões qualitativas sobre as ondas.

A incerteza a respeito de uma expressão geral para a viscosidade de partícula e pressão de partícula não permite garantir que as ondas aqui simuladas possam ser encontradas na prática. Porém, mesmo com essa limitação do modelo, os resultados das simulações fornecem informações úteis a respeito dos distúrbios unidimensionais de concentração. Apesar das soluções para a equação governante do problema serem ondas já saturadas, sem crescimento da amplitude nem mudança da velocidade de propagação, e, portanto, terem uma tendência de serem altamente assimétricas e distantes de distúrbios que se propagam no regime linear, soluções de ϕ_{max} próximo de ϕ_0 , como veremos, possuem uma forma bastante simétrica. Assim, chega-se à conclusão de que as ondas de baixa

amplitude são ondas instáveis com baixas taxas de crescimento no regime linear, que ao saturarem, não foram tomadas por não-linearidades e se propagam como modos neutros, basicamente.

Resultados nesse capítulo foram tomados para ondas normais e invertidas, procurando entender as semelhanças e diferenças entre os dois regimes de fluidização. Ondas invertidas são ainda pouco exploradas na literatura e podem ajudar a entender melhor os mecanismos por trás da transição entre diferentes tipos de instabilidade. Algumas conclusões obtidas nos trabalhos de [Duru et al. \(2002\)](#), [Sobral e Hinch \(2017\)](#) e [Howley e Glasser \(2005\)](#) foram corroboradas neste trabalho.

Cabe ainda fazer um comentário acerca do modelo e algoritmo aqui implementado; em um leito fluidizado real, dada uma concentração do estado homogêneo ϕ_0 , um pequeno distúrbio de frequência f pode ser amplificado e se propagar ao longo do leito, até saturar ou evoluir para outro tipo de instabilidade, mas sem mudar sua frequência. Assim, espera-se que uma dada frequência e uma concentração do estado homogêneo já fixem um eventual estado saturado. Na EDO dos estados saturados (3.39), não há como impor uma frequência. Pelo contrário, ϕ_{max} é uma variável de entrada, e a partir daí, a velocidade de propagação, o perfil de onda e a amplitude são encontrados, assim como sua frequência (já que $c = \lambda f$). Entretanto, devido às já citadas incertezas nos modelos constitutivos e também à própria natureza de sistemas não-lineares, que não possuem unicidade de solução, é possível que algumas ondas aqui obtidas sejam espúrias, até pelo fato de ser possível encontrar em alguns casos ondas com mesma concentração do estado homogêneo ϕ_0 e mesma frequência f . Assim, resultados desse tipo, que carecem de explicação física e sugeririam um não determinismo da mecânica de leitos fluidizados, podem indicar uma linha de corte a partir do qual os resultados deixam de representar a física do problema (o que indica também que as expressões constitutivas podem ter deixado de ser adequadas para aquele conjunto de parâmetros) e passam a ser apenas soluções matemáticas para a equação governante. Apesar disso, mesmo esse fenômeno de múltiplas soluções pode ter algo a ensinar sobre os distúrbios unidimensionais de leitos fluidizados líquido-sólido e os mecanismos de transição entre tipos de instabilidade.

Para realizar a integração da versão dimensional da equação governante, foi utilizado o seguinte conjunto de parâmetros, correspondentes à combinação 6 de parâmetros experimentais utilizada em [Duru et al. \(2002\)](#).

$$\begin{aligned}
 \rho_f &= 0.997 \text{ g/cm}^3 & \mu_f &= 0.9 \text{ cP} & d_s &= 685 \text{ }\mu\text{m} \\
 \rho_s &= 4.08 \text{ g/cm}^3 & v_t &= 16.4 \text{ cm/s} & \phi_{cp} &= 0.612 \\
 \phi_{rlp} &= 0.58 & \sigma &= 0.0667 \text{ Pa} & n &= 3.25 \\
 r &= 0.3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Esses parâmetros determinam os seguintes valores para os parâmetros adimensionais:

$$Fr = 4.0, \quad R\rho = 0.25, \quad \sigma^* = 6.08 \times 10^{-4}. \tag{5.2}$$

Quando outros valores dos parâmetros dimensionais e adimensionais forem utilizados, isto será explicitado.

5.1 Demonstração do efeito de $F_2(\phi) - dp_s/d\phi$ sobre as ondas

Nesta seção, demonstra-se o efeito de desprezar o termo $F_2(\phi) - dp_s/d\phi$ na Eq.(3.39). Como mencionado no capítulo anterior, este termo contém a diferença entre os termos de inércia (responsável máxima pelas instabilidades em leitos fluidizados) e a derivada da pressão de partícula, estabilizadora (se for suficientemente grande, não há instabilidades). Como a figura 4 evidencia, a onda obtida desprezando $F_2 - dp_s/d\phi$ é simétrica (seu ponto de mínimo se dá em $X/\lambda=0.5$), enquanto a onda considerando o termo $F_2 - dp_s/d\phi$ possui uma leve assimetria para a esquerda. Isto se relaciona com os resultados de Sobral e Hinch (2017), que mostraram que quando a diferença entre a inércia e a derivada da pressão de partícula é desprezada, ondas se propagam como modos neutros, sem taxa de amplificação. Portanto, esse termo é o responsável pela assimetria das ondas, e como veremos nas próximas seções, quando ele é suficientemente grande, as ondas passam a ser muito assimétricas ou mesmo atingem uma forma que contém uma região comprida de mínimo e uma região curta de máximo, fato que pode sugerir uma transição de ondas unidimensionais para instabilidades do tipo pistão, mencionadas no Capítulo 1.

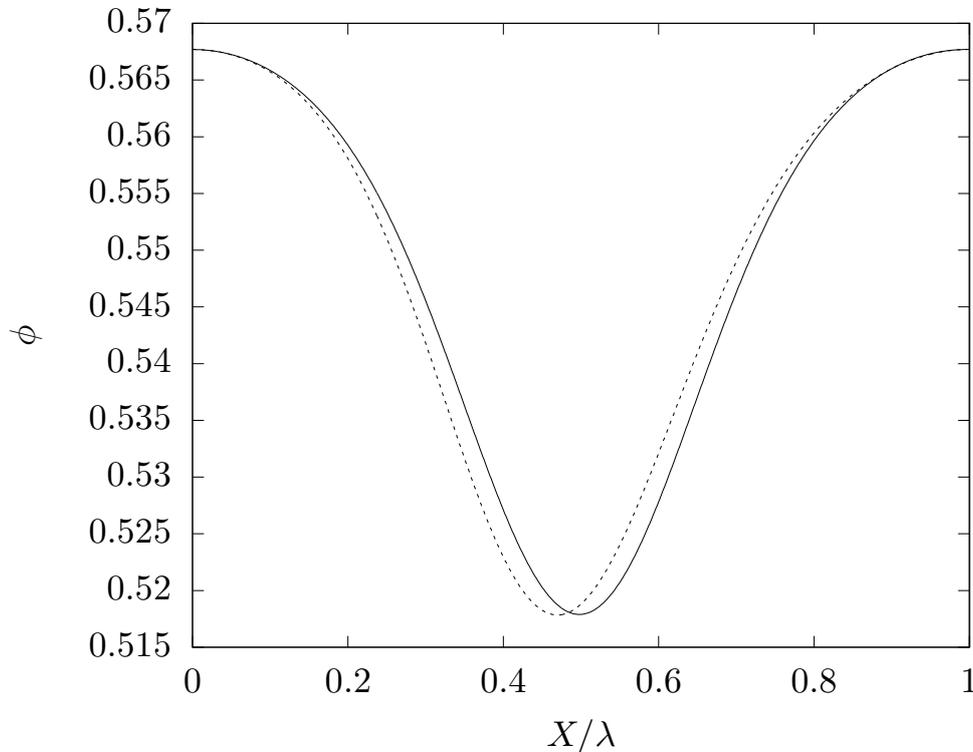


Figura 4 – Comparação entre ondas saturadas obtidas considerando a diferença entre termos de inércia e a derivada da pressão de partícula, no gráfico tracejado, e sem considerar, no gráfico de linha cheia. $\phi_{max} = 0.5677$, $f = 1.6Hz$, $\phi_0 = 0.549$

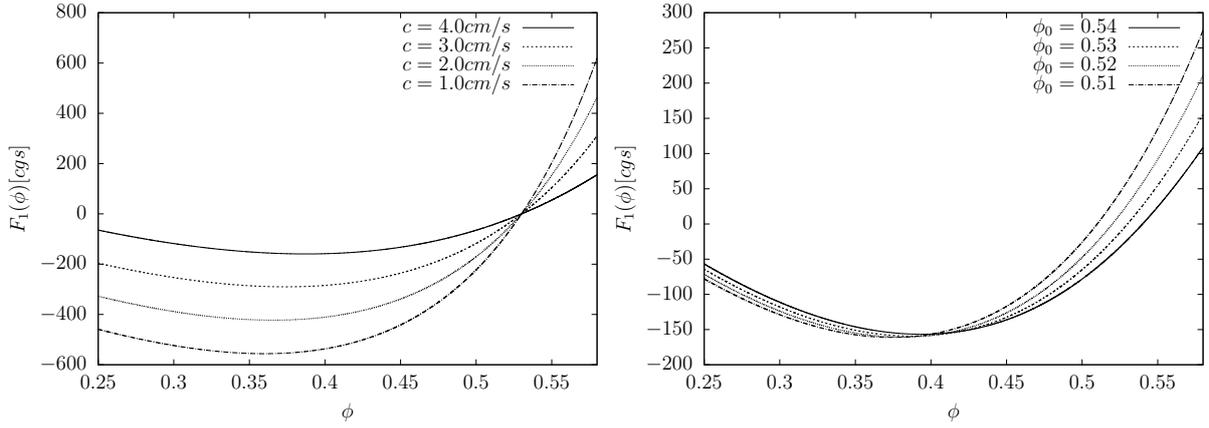
5.2 Influência da concentração de partículas

Nesta seção, para leitos normais e invertidos, foi estudada a influência do parâmetro ϕ_0 e também da variação de ϕ_{max} (que é um parâmetro de entrada no algoritmo) sobre a forma e as propriedades das ondas.

Os diagramas de estabilidade de [Duru et al. \(2002\)](#) e [Sobral e Hinch \(2017\)](#) mostram que, para um ϕ_0 fixo, há uma frequência neutra, f_n , para a qual se propagam ondas que não mudam de forma nem amplitude. Acima de f_n , as ondas são estáveis, sendo rapidamente dissipadas no leito. Abaixo de f_n , as ondas são instáveis, sendo elas objeto de nosso interesse. As conclusões qualitativas a que tanto [Duru et al. \(2002\)](#) quanto [Sobral e Hinch \(2017\)](#) chegaram foram as seguintes: mantendo-se ϕ_0 fixo, a frequência afeta fortemente a simetria das ondas; aumentar a frequência implica em uma redução da amplitude das ondas, tendendo cada vez mais a um perfil do tipo senoidal, simétrico, enquanto abaixar a frequência implica em ondas cada vez mais assimétricas e de grande amplitude. Mantendo-se uma frequência fixa, alterar ϕ_0 não parece afetar muito a forma das ondas. Porém, a amplitude das ondas diminui quando ϕ_0 aumenta e aumenta quando ϕ_0 diminui. A explicação para esse fato é que o termo $\left[F_2 - \frac{dp_s}{d\phi}\right]$ é menor para altas concentrações, sendo um termo responsável pela simetria das ondas. Como dito anteriormente, quando a diferença entre os termos de inércia e da derivada da pressão de partícula não é considerada no modelo, são obtidas ondas simétricas e estáveis. Essas conclusões foram corroboradas nessa seção.

5.2.1 Ondas de concentração em leitos normais

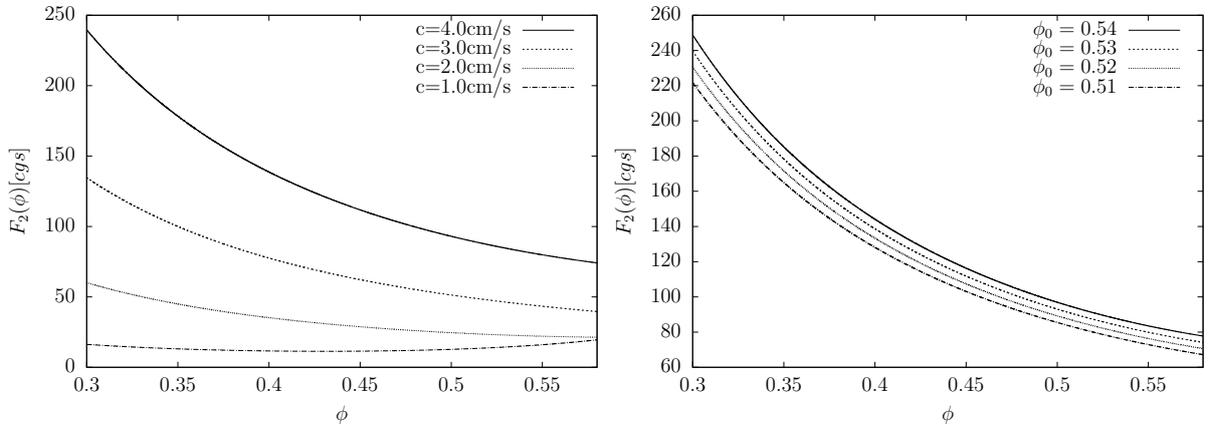
Nesta seção, foram integradas ondas de concentração para diferentes ϕ_{max} e uma concentração do estado homogêneo, $\phi_0 = 0.525$, e demais parâmetros como em (5.1). Para analisar os resultados aqui obtidos, é essencial conhecer como as funções $F_1(\phi)$ e $F_2(\phi)$ variam com a velocidade de propagação da onda c , com a concentração do estado homogêneo ϕ_0 e com a concentração ϕ .



(a) Variação de $F_1(\phi)$ com ϕ mantendo $\phi_0 = 0.53$ para várias velocidades. Demais parâmetros como em (5.1). (b) Variação de $F_1(\phi)$ com ϕ mantendo $c = 3.0\text{cm/s}$ para vários ϕ_0 . Demais parâmetros como em (5.1).

Figura 5 – Variação de $F_1(\phi)$ com ϕ

Como pode ser visto na Figura 5b, $|F_1(\phi)|$ é maior para ϕ_0 menores, ao longo da região onde $F_1(\phi)$ é crescente. $F_1(\phi)$ é decrescente apenas para regiões de baixas concentrações, que só podem ser atingidas se as ondas saturadas possuírem amplitudes muito grandes e forem, portanto, muito assimétricas. Além disso, como pode ser visto na Figura 5a, velocidades maiores implicam em $|F_1(\phi)|$ muito menores.



(a) Variação de $F_2(\phi)$ com ϕ mantendo $\phi_0 = 0.53$ para várias velocidades. Demais parâmetros como em (5.1). (b) Variação de $F_2(\phi)$ com ϕ mantendo $c = 3.0\text{cm/s}$ para vários ϕ_0 . Demais parâmetros como em (5.1).

Figura 6 – Variação de $F_2(\phi)$ com ϕ

$F_2(\phi)$, como pode ser visto nas Figuras 6a e 6b, tende a ser muito maior para velocidades grandes, e ligeiramente maior para ϕ_0 grandes, sendo cada vez menos sensível com a concentração à medida em que ela aumenta. Portanto, só ondas de grandes amplitudes, que podem alcançar baixas concentrações, provocam uma variação apreciável em $F_2(\phi)$. Como mencionado anteriormente, as ondas saturadas possuem amplitudes maiores quando ϕ_0 é baixo, porque o termo $F_2(\phi) - dp_s/d\phi$ atinge valores maiores nesse caso, já que a derivada da pressão de partícula, ao menos no modelo sempre crescente utilizado

costumeiramente na literatura e na maior parte deste trabalho, não atinge valores grandes o suficiente para equilibrar com o termo de inércia. Essas considerações serão importantes nesta seção e nas subsequentes.

A Figura 7 mostra como os comprimentos de onda de ondas saturadas variam com ϕ_{max} , que é um parâmetro de entrada. Ondas com ϕ_{max} próximos de ϕ_0 são bastante simétricas. É natural que distúrbios com baixos comprimentos de onda evoluam (caso não sejam filtrados pela viscosidade de partícula) para ondas saturadas com baixas amplitudes e baixos comprimentos de onda. À medida que a amplitude das ondas aumenta, ondas mais assimétricas são obtidas como solução, e estas possuem comprimentos de onda maiores.

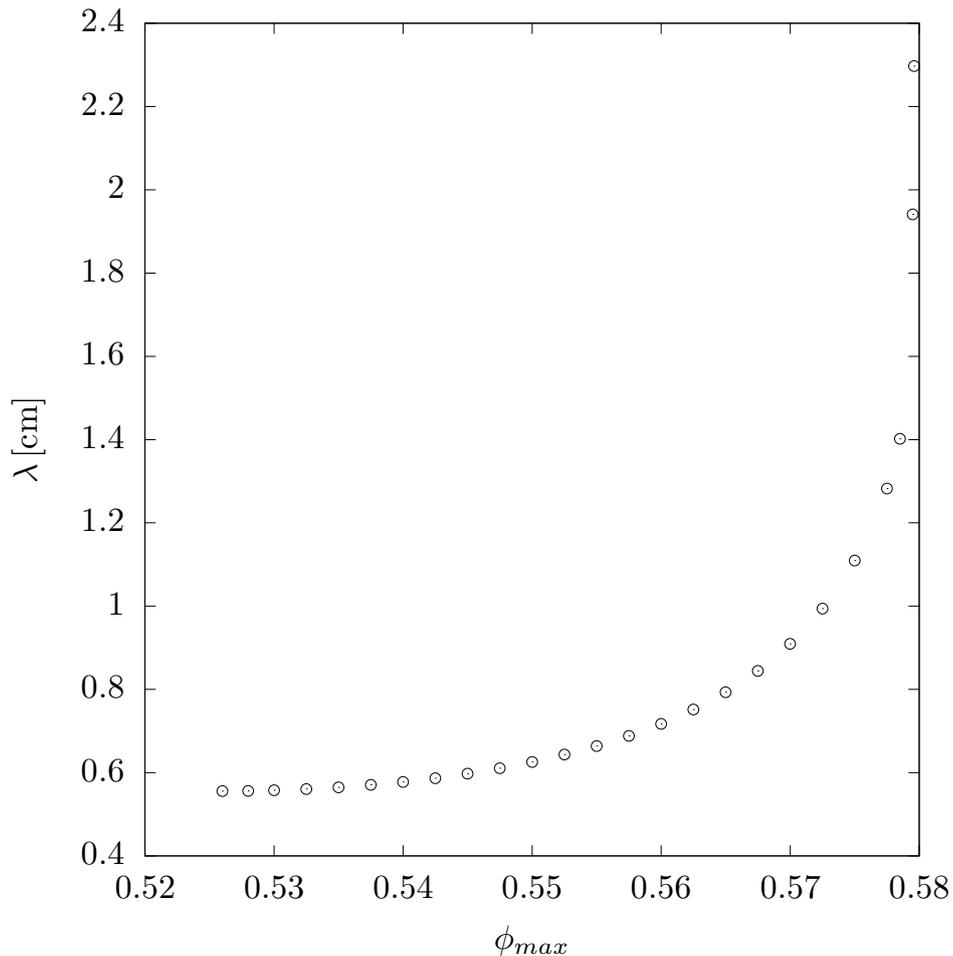


Figura 7 – Comprimentos de onda obtidos para ondas saturadas variando ϕ_{max}

É razoável esperar que a velocidade de propagação de distúrbios aumente para ondas de maior amplitude, já que são mais assimétricas e possuíam maior taxa de amplificação enquanto estavam no regime de crescimento linear. Porém, para regiões perto de ϕ_{rlp} , onde a viscosidade do modelo tende a divergir, a velocidade de propagação das ondas cai bruscamente com ϕ_{max} aumentando, como pode ser visto na Figura 8. Ondas dessa região possuem a amplitude grande suficiente para $F_1(\phi)$ alcançar na região de mínimo da onda o valor de ϕ para o qual passa a ser decrescente. Quando esta condição é atingida, a velocidade diminui. Isto será observado subsequentemente nesta seção. Possivelmente, essa região é apenas uma solução matemática para a equação (3.28) e não captura mais a

física do problema, com as expressões constitutivas deixando de ser válidas. Porém, não deixa de ser interessante observar o formato da onda obtida; pode-se especular que uma onda desse tipo seria uma instabilidade do tipo pistão, tomando um comprimento elevado do leito com uma região de baixas concentrações. Como veremos adiante, nessa região $|F_2 - dp_s/d\phi|$ atinge valores relativamente elevados, o que explica a grande assimetria da onda.

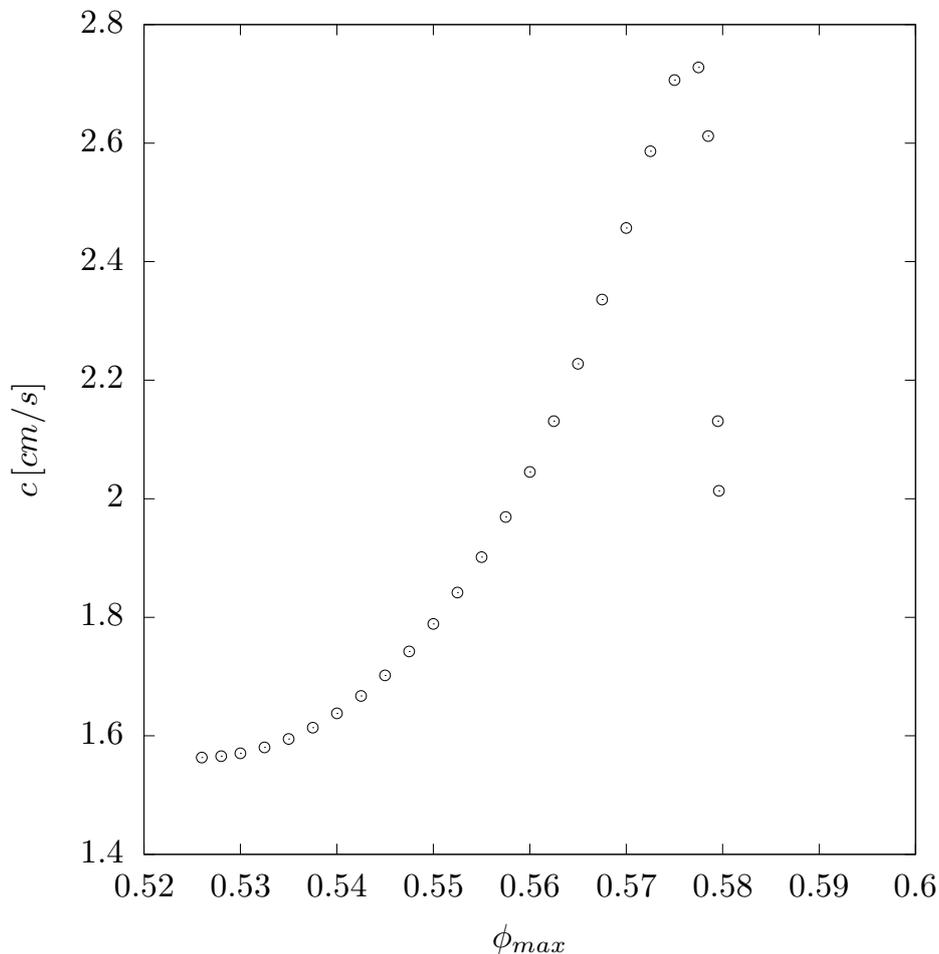


Figura 8 – Velocidades obtidas para ondas saturadas variando ϕ_{max}

Sobral e Hinch (2017) discutiram que ondas de menor amplitude e mais simétricas possuem frequências altas, perto da frequência para a qual o distúrbio seria estável. Como pode ser visto na Figura 9, para este modelo e algoritmo esta conclusão funciona quando ϕ_{max} está suficientemente longe de ϕ_0 ; antes dessa região, há uma espécie de patamar, inclusive com leve crescimento da frequência com ϕ_{max} das ondas saturadas. Isto se dá porque para ϕ_{max} perto de ϕ_0 a taxa de crescimento da velocidade com ϕ_{max} é inicialmente maior do que a taxa de crescimento do comprimento de onda.

Como a velocidade de propagação dos distúrbios c e o próprio perfil da onda são profundamente acoplados pelos termos $F_1(\phi)$ e $F_2(\phi)$ e há uma incerteza considerável acerca das expressões de fechamento para a pressão de partícula e a viscosidade de partícula, não há garantia de que todas as ondas simuladas realmente poderiam existir em um leito fluidizado real; o que é possível é argumentar que com estes parâmetros e estas

expressões constitutivas os leitos simulados se comportaram dessa maneira, e é possível unir essas conclusões com argumentos físicos envolvendo o balanço entre os termos de força de arrasto e peso líquido e a diferença entre as forças de inércia com a derivada da pressão de partícula (termo este que ainda envolve $d\phi/dX$, o que acopla mais profundamente ainda a velocidade de propagação dos distúrbios com o perfil de concentração da onda) e o termo viscoso.

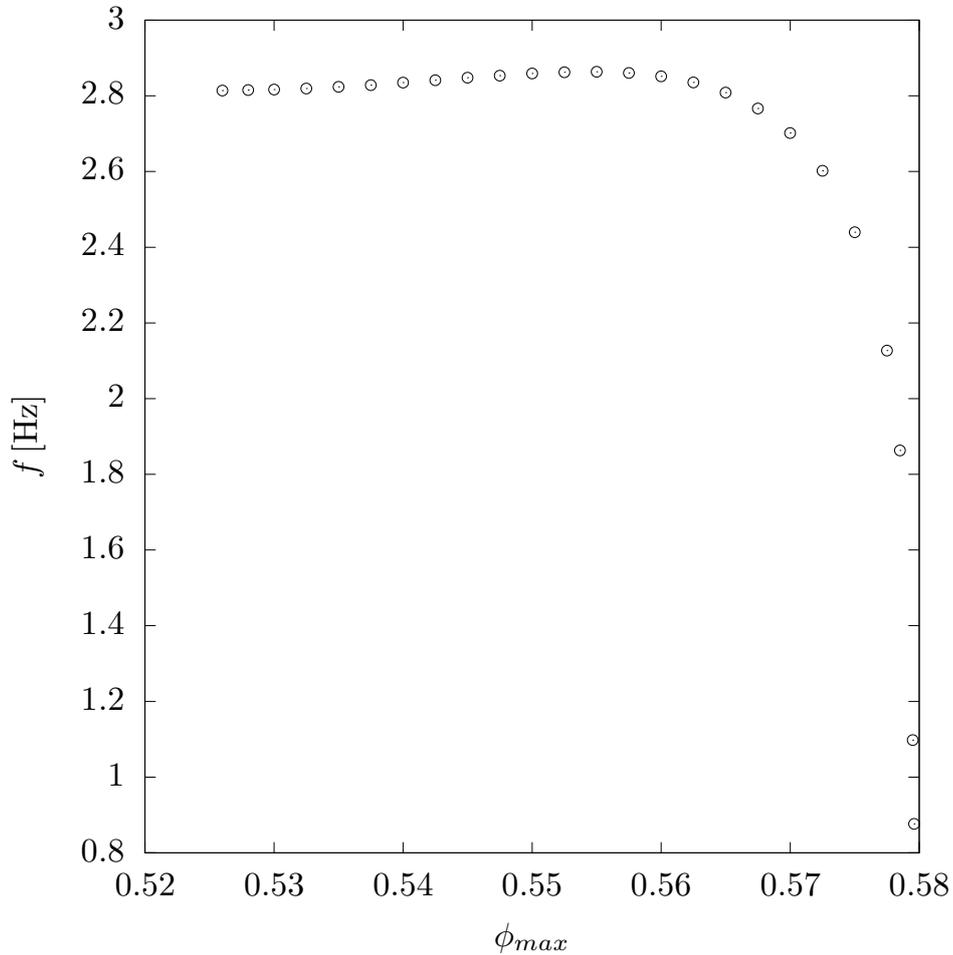
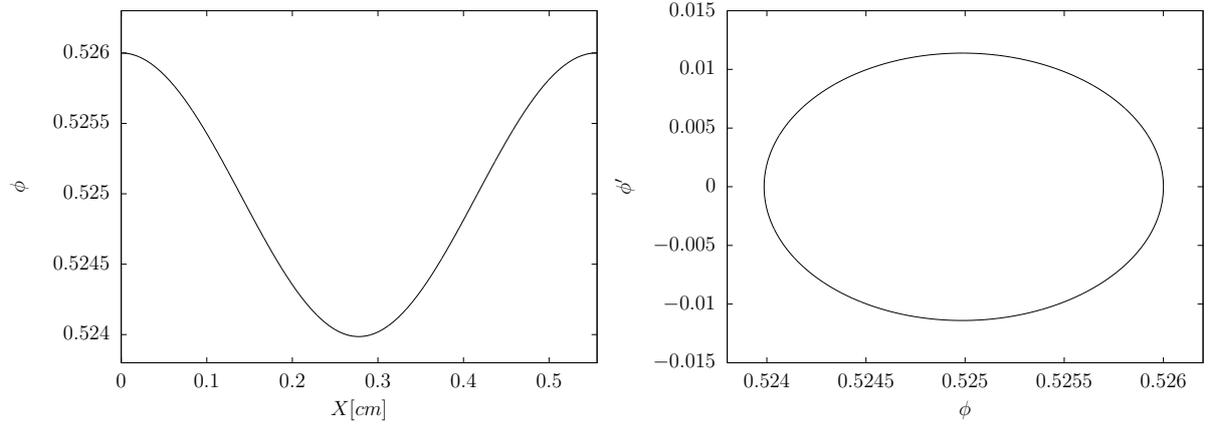


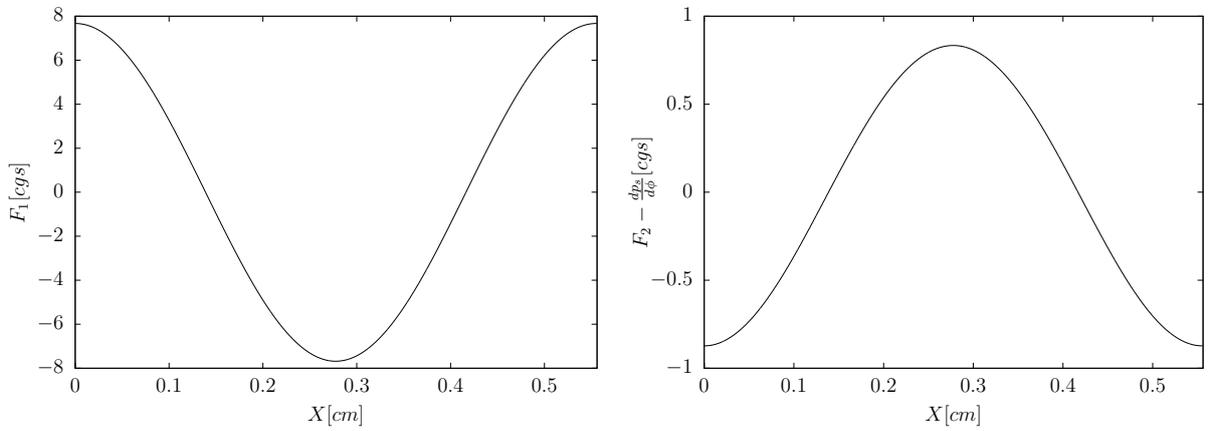
Figura 9 – Frequências obtidas para ondas saturadas variando ϕ_{max}

Como já mencionado, cada ponto dos gráficos anteriores representa uma onda saturada. Entretanto, observar em gráficos que relacionam suas propriedades pode não ser suficiente para captar os mecanismos que influenciam os mais variados perfis de onda que foram obtidos. Para isso, foi tomada a decisão de evidenciar a onda com o menor ϕ_{max} , uma onda com um ϕ_{max} intermediário e a onda com maior ϕ_{max} entre os simulados com estes parâmetros. Dessa forma, são mostradas três ondas e seus respectivos diagramas de fase (que ajudam a visualizar a não-linearidade e a assimetria das ondas), além das funções $F_1(\phi)$ e $F_2(\phi) - dp_s/d\phi$ destes perfis, para que o leitor tenha um contato maior com as formas e comportamentos esperados para os perfis e funções, além de visualizar a ordem de grandeza dos termos. Estes conjuntos de gráficos serão chamados apenas de estados subsequentemente.

5.2.1.1 Estado 1



(a) Perfil de onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.526$ (b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.526$

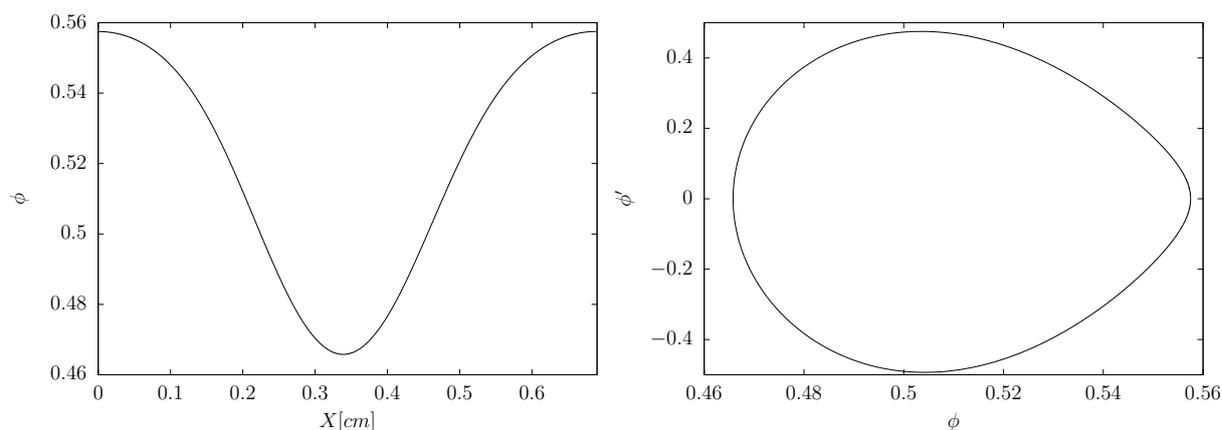


(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.526$ (d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.526$

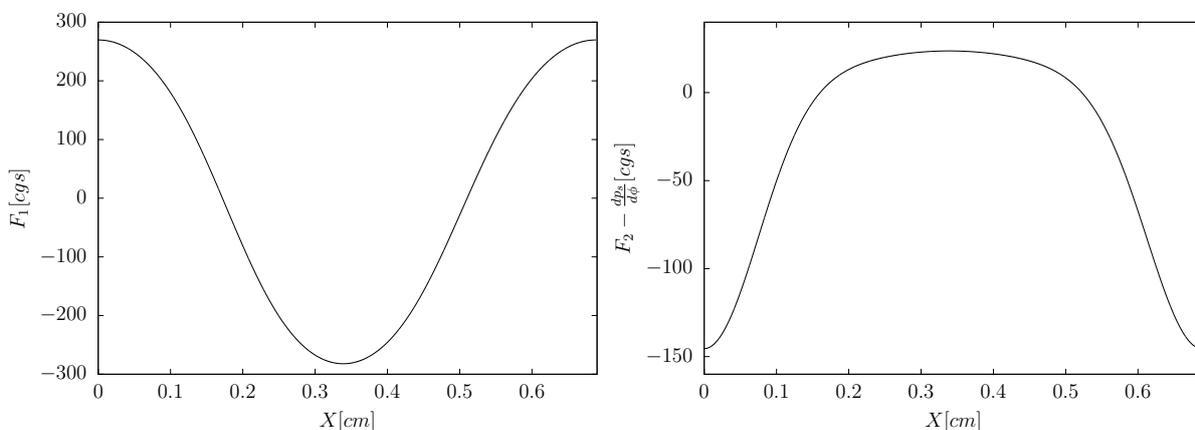
Figura 10 – Estado 1

Na Figura 10, podemos ver que o estado 1 possui um perfil simétrico, quase senoidal, e de pequena amplitude. O diagrama de fase, com formato quase perfeitamente elíptico, evidencia também esta simetria. A função F_1 oscila em torno de 0, acompanhando o perfil da onda e atingindo o valor 0 quando $\phi = \phi_0$. Cabe também observar a ordem de grandeza dos termos. A função F_1 atinge valores de no máximo $O(10cgs)$, onde $O()$ é uma escala de valores típicos. Na equação (3.28), o termo $F_2 - dp_s/d\phi$ é ainda multiplicado por $d\phi/dX$. A função $F_2 - dp_s/d\phi$ é $O(1cgs)$, mas $d\phi/dX$ é $O(1/100)$. Dessa forma, F_1 é muito maior que $(F_2 - \frac{dp_s}{d\phi}) \frac{d\phi}{dX}$, o que explica o perfil simétrico da onda.

5.2.1.2 Estado 2



(a) Perfil de onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.5575$ (b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.5575$



(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.5575$ (d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.5575$

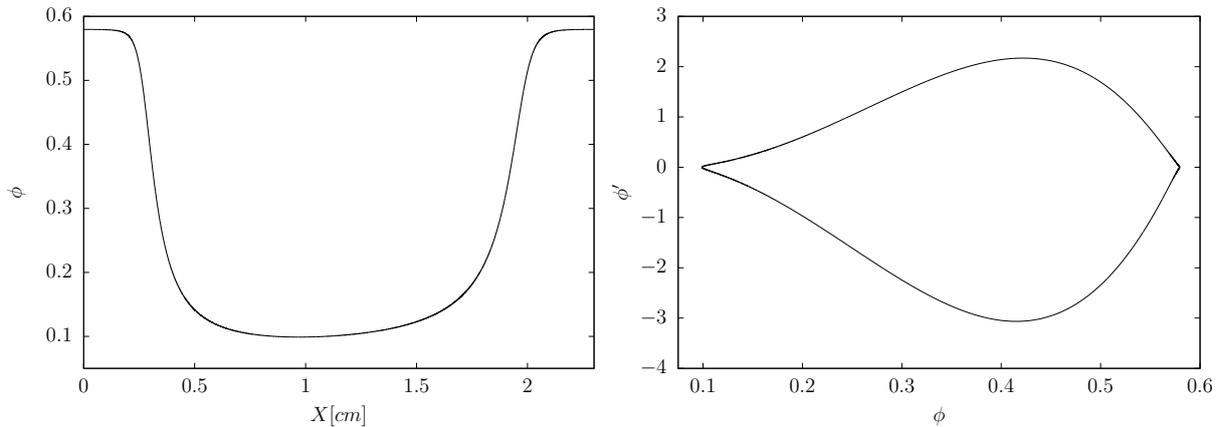
Figura 11 – Estado 2

O estado 2 é uma onda com ϕ_{max} intermediário, estando já bastante longe de ϕ_0 . Esta já é uma onda de grande amplitude e é possível notar uma leve assimetria, que fica mais evidente no diagrama de fase. F_1 é $O(100\text{cgs})$ e $F_2 - dp_s/d\phi$ também. Porém, é notável que $F_2 - dp_s/d\phi$ só é razoavelmente grande nas extremidades do gráfico; esse valor apreciável causa a diminuição do comprimento da região de $\phi \approx \phi_{max}$ no topo do gráfico, levando a onda a ter uma queda mais brusca, evidenciado também por $d\phi/dX$, que é $O(0.5)$.

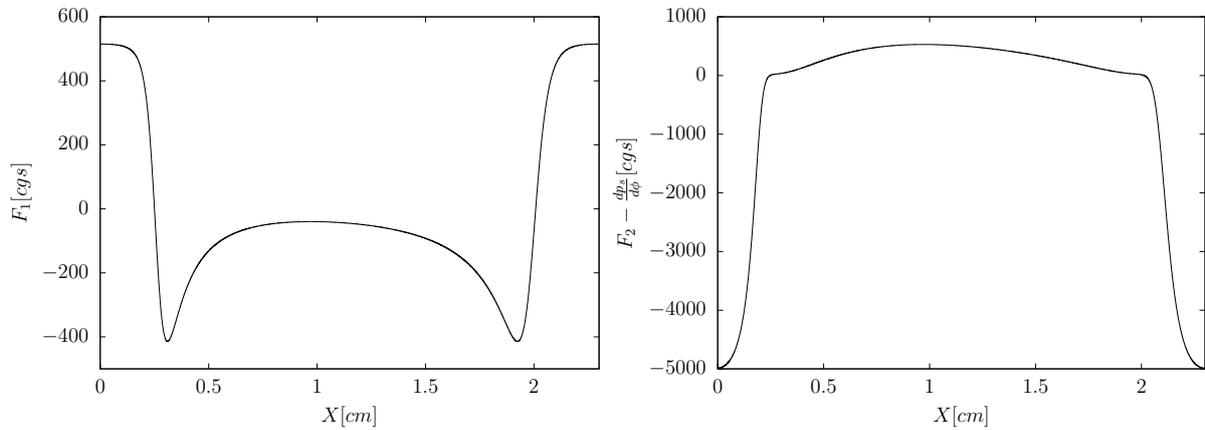
5.2.1.3 Estado 3

O estado 3 representa o tipo de onda de amplitude muito grande e região comprida de baixíssima concentração que foi discutida anteriormente. O formato completamente irregular e assimétrico do diagrama de fase mostra que essa é uma onda completamente

tomada por não-linearidades. F_1 é $O(500\text{cgs})$ e inclusive atinge a região onde passa a ser decrescente com ϕ , mas $F_2 - dp_s/d\phi$ é $O(1000\text{cgs})$ (principalmente nas extremidades do gráfico) e $d\phi/dX$ é $O(1)$. Nessas condições, a onda é rapidamente puxada para regiões de baixa concentração, e lá permanece sustentada pelas forças de arrasto e peso líquido, até que o caráter restitutivo de F_1 consegue fazer com que a onda retorne para a região de máximo. Pode-se especular que este tipo de instabilidade é uma "tentativa" do modelo de avisar que ondas com amplitudes tão grandes, ainda que não se saiba se ondas desse tipo possam ser observadas na prática, tendem a ter uma grande região de baixas concentrações e assimetria, passando para uma transição para outro tipo de instabilidade, do tipo bolha ou pistão. Isso ocorre exatamente devido ao tamanho do termo $F_2 - dp_s/d\phi$.



(a) Perfil de onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.579$ (b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.579$



(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.579$ (d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados em (5.1), $\phi_0 = 0.525$ e $\phi_{max} = 0.579$

Figura 12 – Estado 3

5.2.2 Ondas de concentração em leitos invertidos

Leitos fluidizados invertidos são um caso ainda pouco explorado na literatura. Um leito fluidizado é dito invertido se $\rho_f > \rho_s$, e, portanto, $R_\rho > 1$. Dessa maneira, as partículas tendem a subir e o leito é fluidizado por meio de um escoamento descendente.

Assim, ondas saturadas se propagam agora de cima pra baixo e tem, portanto, velocidade de propagação c negativa, assim como a velocidade terminal das partículas v_t . Com isso, em ondas invertidas, o termo viscoso e a função $F_1(\phi)$ estarão multiplicados por -1 em relação ao seu comportamento usual, enquanto $F_2 - dp_s/d\phi$ permanece tendo o mesmo sinal. Assim, em leitos fluidizados invertidos é possível observar os termos de forças se organizando de maneira diferente para promover seu balanço. Sabe-se que leitos fluidizados invertidos são mais instáveis (HOWLEY; GLASSER, 2005), tendendo a possuir taxas de amplificação maiores. Essa conclusão será verificada indiretamente aqui também. A assimetria das ondas saturadas em leitos invertidos é para o lado oposto em relação aos leitos normais.

Para esta seção, foram utilizados os mesmos parâmetros da Eq.(5.1) invertendo apenas os valores de ρ_s e ρ_f ; ou seja, $\rho_s = 0.997g/cm^3$ e $\rho_f = 4.08g/cm^3$. Foram obtidas ondas saturadas variando ϕ_{max} para dois valores diferentes de ϕ_0 : 0.549 e 0.54. Sabe-se que diminuir ϕ_0 mantendo demais parâmetros fixos aumenta a amplitude das ondas. De um modo geral, análises de estabilidade mostram que as taxas de amplificação de ondas planas com ϕ_0 baixos são maiores. Há um valor mínimo de ϕ_0 a partir do qual não há mais como obter ondas saturadas, já que a integral (3.31) nunca atinge 0. Devido ao fato de leitos invertidos serem mais instáveis, $\phi_0 = 0.54$ já está próximo desse valor mínimo, ao passo que leitos normais com os mesmos parâmetros podiam ser simulados até $\phi_0 \approx 0.5$.

Gráficos da velocidade de propagação, comprimento de onda e frequência possuem basicamente o mesmo comportamento funcional com a variação de ϕ_{max} já observados em leitos normais e por isso não serão apresentados. Velocidades de propagação dos distúrbios são negativas, mas seu módulo tende a aumentar quando a amplitude das ondas aumenta. Ao invés disso, desse conjunto de ondas, serão apresentadas a onda de menor ϕ_{max} e a onda de maior ϕ_{max} para os dois casos ($\phi_0 = 0.549$ e $\phi_0 = 0.54$). Ondas para $\phi_0 = 0.549$ serão chamadas de estados 1 e 2 e ondas para $\phi_0 = 0.54$ serão chamadas de estados 3 e 4 nesta seção.

5.2.2.1 Estado 1

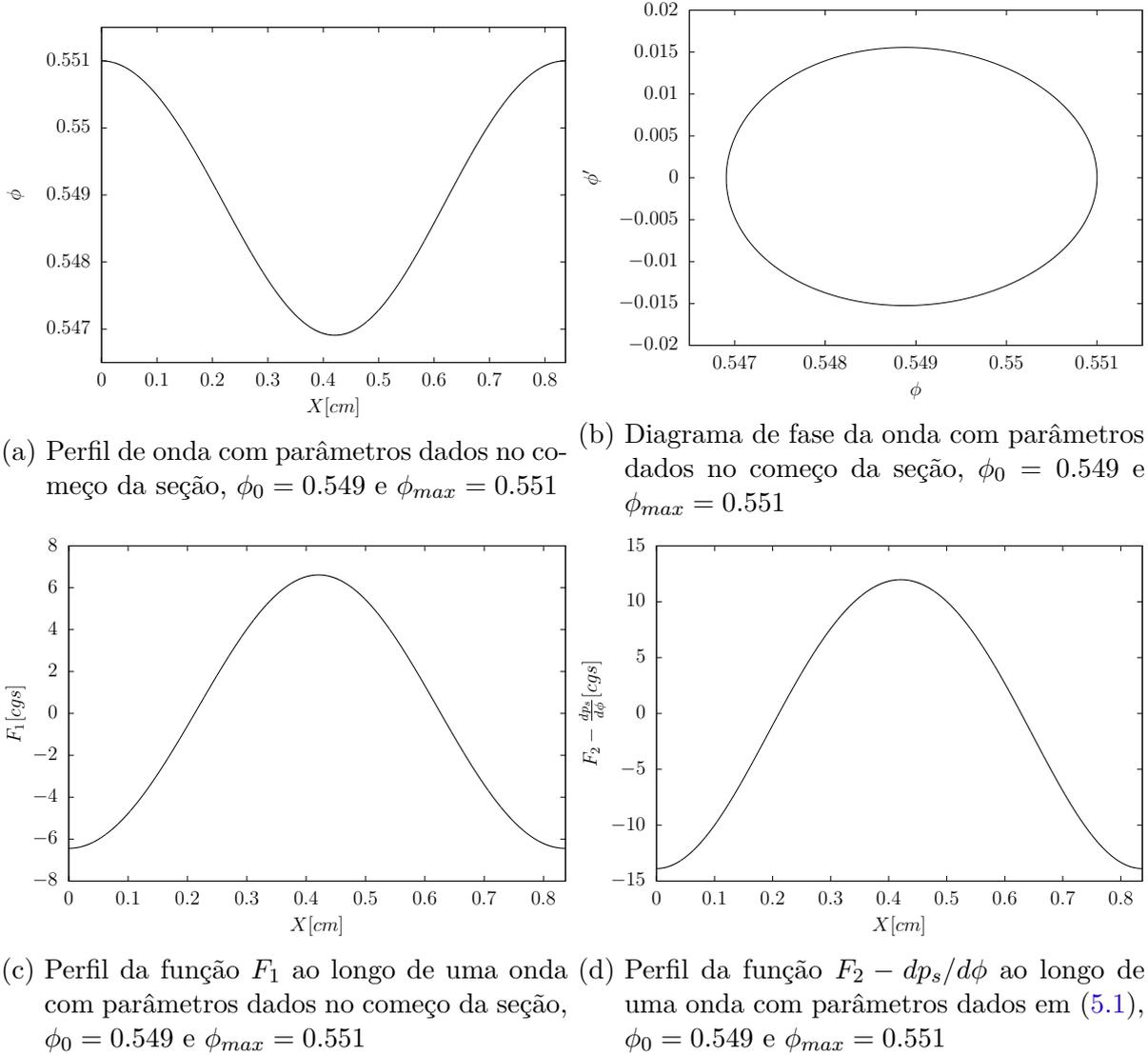
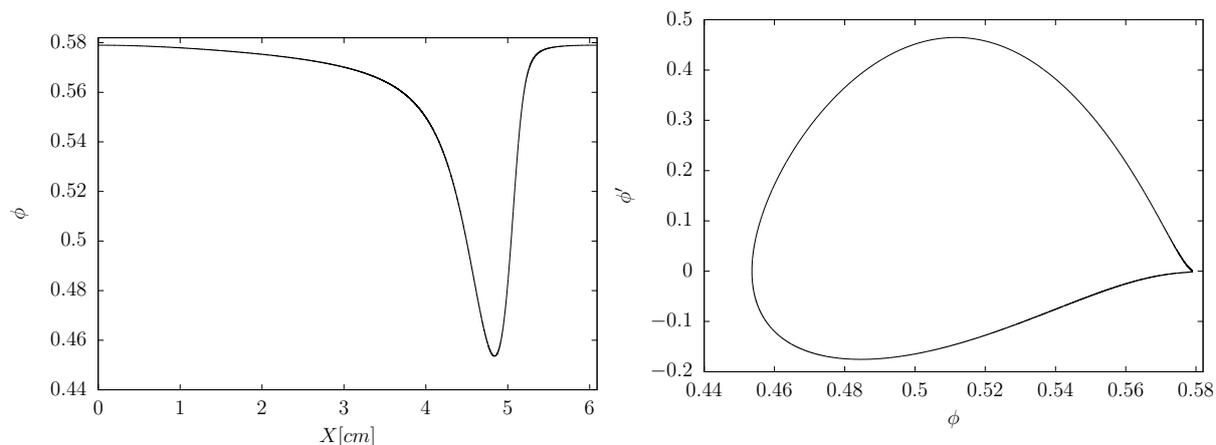


Figura 13 – Estado 1 de ondas em leitos invertidos

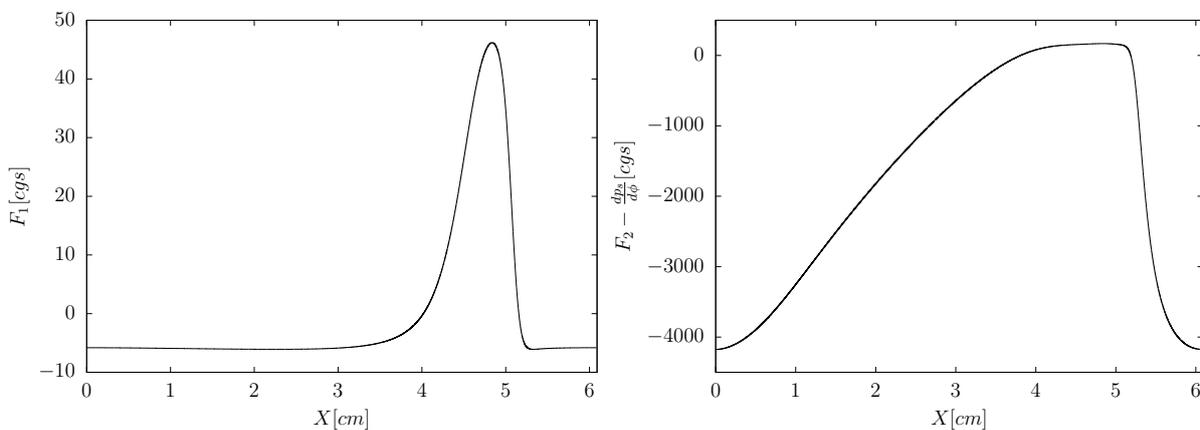
O estado 1 apresenta o já conhecido comportamento de onda simétrica, quase senoidal, com um diagrama de fase elíptico. F_1 , como já mencionado antes, possui um comportamento oposto ao do já visto em ondas normais, apesar de ter a mesma ordem de grandeza. O termo $F_2 - dp_s/d\phi$, quando multiplicado por $d\phi/dX$, não possui tamanho apreciável a ponto de causar assimetrias.

5.2.2.2 Estado 2



(a) Perfil de onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.5794$

(b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.5794$



(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.5794$

(d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.5794$

Figura 14 – Estado 2 de leitos invertidos

Embora o estado 2 possivelmente não possa ocorrer na prática, já que o modelo para a viscosidade de partícula deixa de funcionar bem quando ϕ_{max} está próximo de ϕ_{rlp} , a curiosa forma de onda obtida permite conhecer melhor o modelo e as soluções que podem vir a ocorrer, permitindo também especular que esse resultado possa ser um indicativo de transição entre tipos de instabilidades. A onda saturada do estado 2 possui um formato de choque, com um comprimento de onda bastante grande (e muito maior do que o comprimento de onda do estado 1), sendo que a região onde $\phi \approx \phi_{max}$ é comprida e a região de baixa concentração é extremamente curta, havendo ali um vazio local de partículas. Observando as Figuras 14c e 14d, percebe-se que F_1 é $O(10)$, ao passo que $F_2 - dp_s/d\phi$ é $O(1000)$. Mesmo multiplicando $F_2 - dp_s/d\phi$ por $d\phi/dX$, percebe-se que a diferença entre as forças de inércia e a derivada da pressão balanceiam com o termo viscoso ao longo de boa parte da onda, com F_1 sendo relevante na região de mínimo da

onda. Quando isso ocorre, as ondas apresentam esse aspecto de choque, fato que será observado novamente ao longo do capítulo.

Cabe ainda observar que tipicamente, com o modelo de pressão de partícula sempre crescente utilizado nesta seção e na maior parte do trabalho, a região de mínimo da onda saturada tem um valor para o termo $F_2 - dp_s/d\phi$ próximo de 0, já que a derivada da pressão é baixa para baixas concentrações, e a força de inércia também é baixa, já que em baixas concentrações simplesmente há menos partículas para sofrer essa força. Para altas concentrações, a derivada da pressão explode por ser exponencial, dessa forma explicando porque o termo $F_2 - dp_s/d\phi$ é negativo nas extremidades do gráfico. Um comportamento diferente será exibido na seção 5.5, com um diferente modelo de pressão de partícula.

5.2.2.3 Estado 3

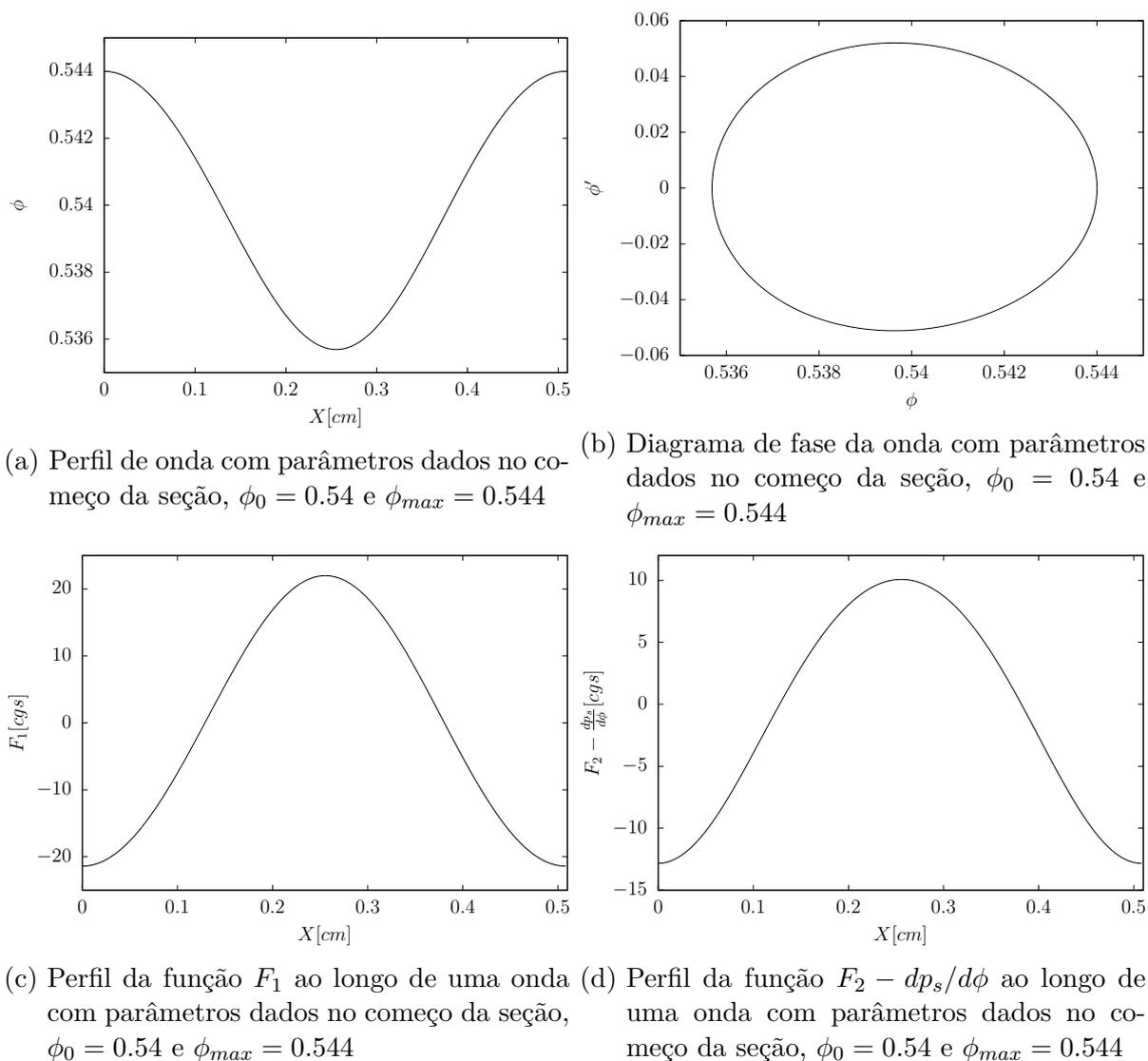
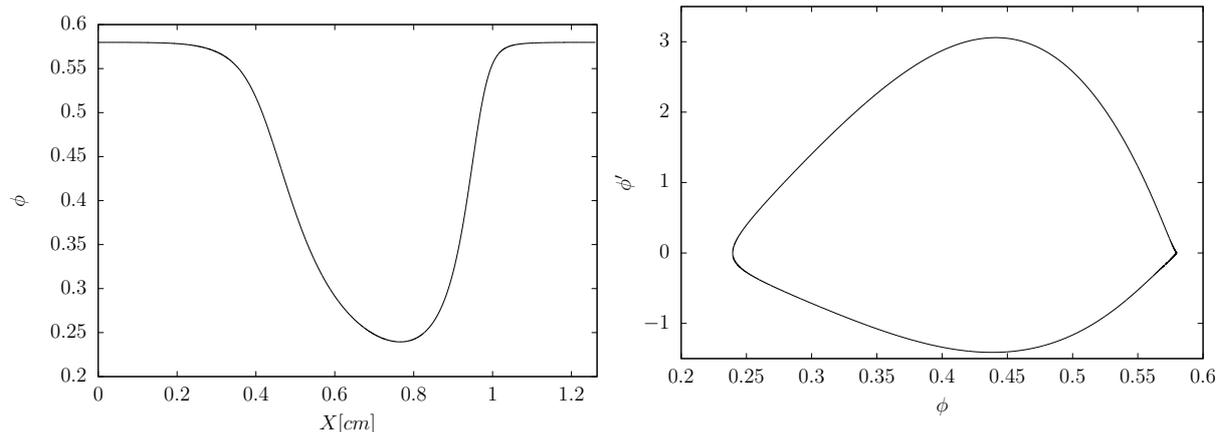


Figura 15 – Estado 3 de leitos invertidos

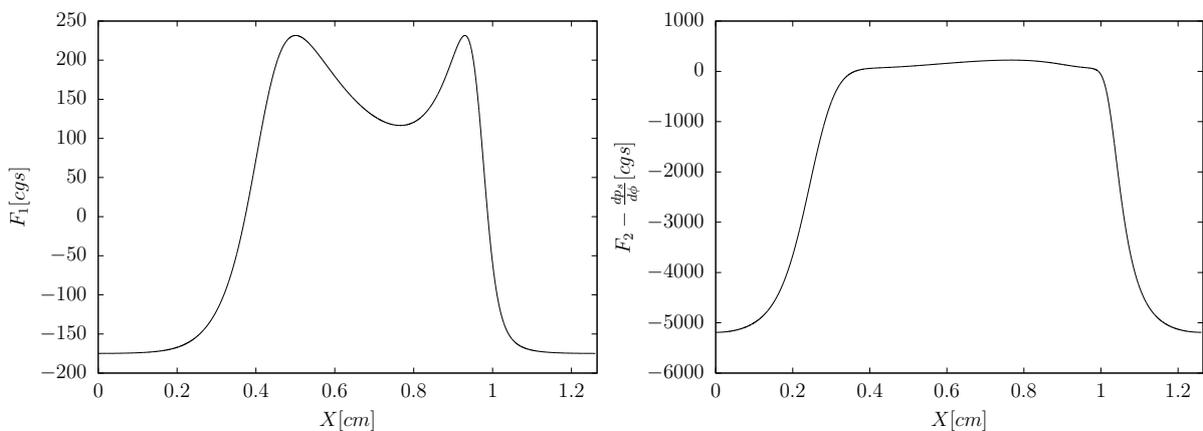
O estado 3 é uma onda saturada quase simétrica, com diagrama de fase elíptico, com a qual já estamos familiarizados. Assim como no estado 1, F_1 é $O(10)$. Entretanto, quando analisamos o do estado 4, uma forma de onda completamente diferente do estado 2 vem à tona.

5.2.2.4 Estado 4



(a) Perfil de onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.54$ e $\phi_{max} = 0.579$

(b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.54$ e $\phi_{max} = 0.579$



(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.54$ e $\phi_{max} = 0.579$

(d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_0 = 0.54$ e $\phi_{max} = 0.579$

Figura 16 – Estado 4 de leitos invertidos

No estado 4, devido ao fato de ϕ_0 ser menor do que no estado 2, F_1 tem $O(100)$ e consegue sustentar por um comprimento maior o termo $F_2 - dp_s/d\phi$, de forma que não se observa o aspecto de choque do estado 2. Chama a atenção que F_1 atinge na região de mínimo da onda saturada a condição quando $dF_1/d\phi$ muda seu sinal. Isso provoca a já conhecida queda brusca das velocidades de propagação dos estados com $\phi_0 = 0.54$ e ϕ_{max} perto de ϕ_{rlp} , fato que não foi verificado para os estados com $\phi_0 = 0.549$. Portanto, os

estados 2 e 4 evidenciam a diferença que a ordem de grandeza dos termos F_1 e $F_2 - dp_s/d\phi$ pode ter sobre a forma e o comportamento das propriedades das ondas.

5.3 Influência do número de Froude

Nesta e na próxima seção são apresentados resultados da integração da versão adimensional da EDO governante, Eq.(3.39). O número de Froude, ou simplesmente Fr , é talvez o parâmetro adimensional central em leitos fluidizados. Como mencionado na introdução, houve tentativas de conectar diretamente um valor crítico de Fr com a transição entre leitos borbulhantes e leitos particulados. Depois, foi percebido que tal transição ocorre de forma mais complexa, não sendo possível caracterizar só por Fr . Apesar disso, mudar Fr significa mudar a própria natureza dos mecanismos e ordens de grandeza das forças no leito, e está intimamente relacionado com os diferentes regimes de fluidização.

O parâmetro Fr compara forças de inércia com forças de campo. Portanto, mais especificamente em leitos fluidizados, compara a tendência das partículas de serem arrastadas pelo escoamento com a tendência delas sedimentarem. Dessa forma, espera-se que para valores elevados de Fr as ondas sejam muito assimétricas e instáveis, podendo na prática ocorrer uma transição para um regime borbulhante.

Análises de estabilidade (SOBRAL, 2004) também atestam o fato de que distúrbios com Fr maiores possuem taxas de amplificação maiores e maior intervalo de estados instáveis (SOBRAL, 2004), (HOWLEY; GLASSER, 2005).

Nas análises desta seção, para não haver um excesso de parâmetros variando, foram simuladas ondas com parâmetros ϕ_{cp} , ϕ_{rlp} , n e r como na Eq. (5.1), R_ρ e σ^* como na Eq. (5.2) e $\phi_0 = 0.549$. Além disso, as ondas saturadas desta seção têm em comum o fato de $\phi_{max} = 0.567$ para todas. Dessa forma, embora haja variações leves de ϕ_{min} para essas ondas, não há variações consideráveis de amplitude para os distúrbios. Em compensação, é possível analisar o efeito de Fr sobre as outras propriedades da onda, como velocidade de propagação, comprimento de onda e frequência adimensional f^* , definida por $f^* = c^*/\lambda^*$.

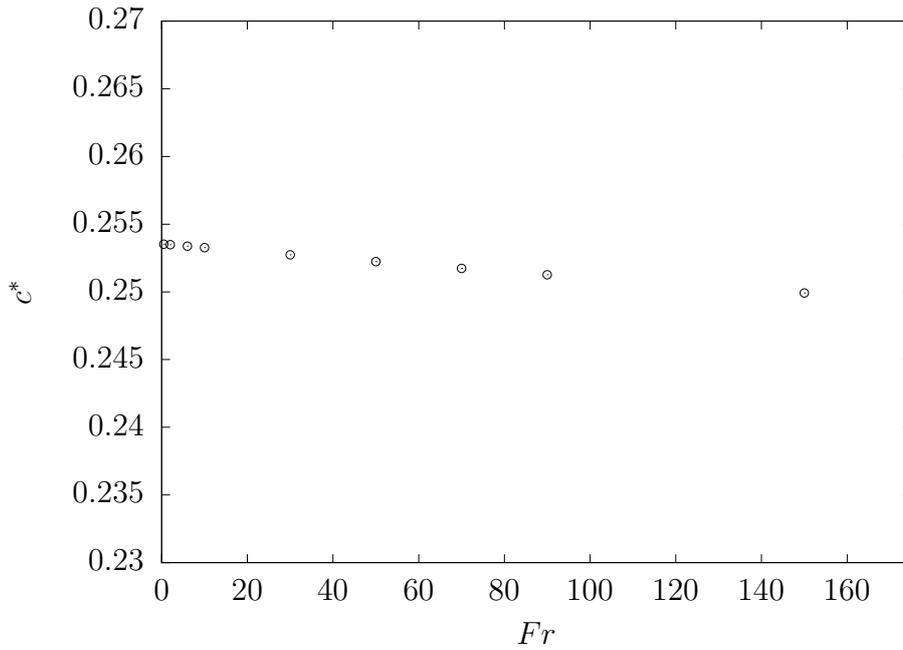


Figura 17 – Variação das velocidades de propagação dos distúrbios com Fr . Parâmetros dados no começo da seção.

Na condição de ϕ_{max} fixo para todas as ondas, a velocidade de propagação dos distúrbios se mostrou pouco sensível a variações de Fr , como mostra a Figura 17. Em compensação, o comprimento de onda é muito sensível a variações de Fr , como pode ser visto na Figura 18. Isso se correlaciona com o fato de que quando Fr aumenta, as forças de inércia ganham em importância e a tendência é ter ondas mais assimétricas e não-lineares.

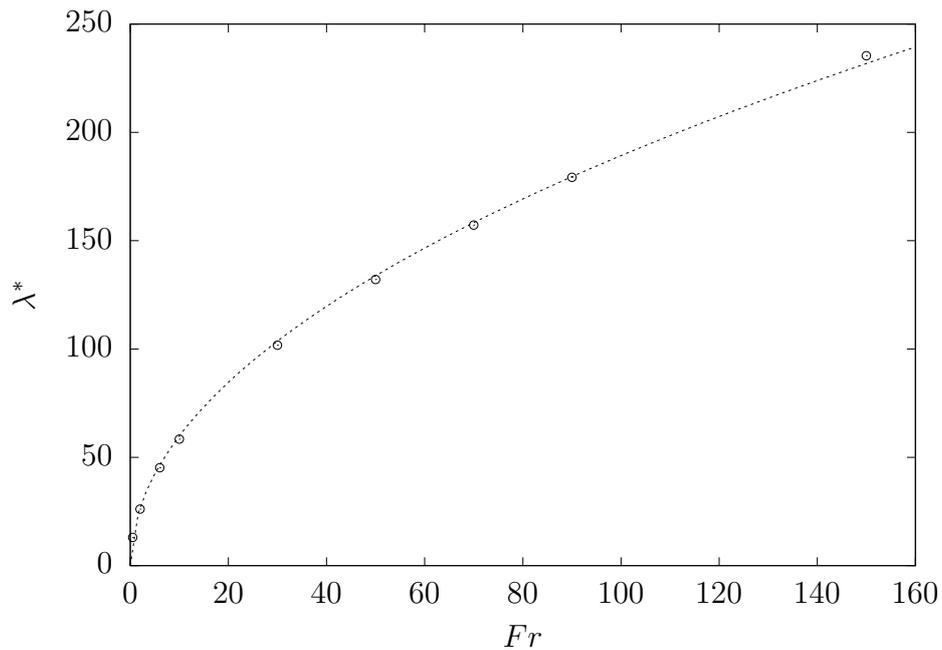


Figura 18 – Variação dos comprimentos de onda com Fr . Pontos representam ondas saturadas; linha tracejada corresponde à proposta de escala (5.4)

Com uma simples análise de escala, foi possível estabelecer que $\lambda^* \sim \sqrt{Fr}$. De fato, sabendo que a velocidade c^* não é muito sensível a Fr , aproximando a viscosidade ao longo da onda por $\mu_s^*(\phi) \approx \mu_s^*(\phi_0)$, e desprezando por ora a diferença entre inércia e a derivada da pressão, pode-se escrever a Eq.(3.39) aproximando as derivadas de ϕ de forma grosseira:

$$\phi_0 \mu_s^*(\phi_0) \frac{\Delta\phi}{\lambda^{*2}} \sim F_1^*, \quad (5.3)$$

onde $\Delta\phi$ é a amplitude da onda. Lembrando que F_1 possui em sua definição $(1 - R_\rho)/Fr$ multiplicando o resto dos termos, pode-se supor que $\lambda^{*2} \sim Fr$, e portanto,

$$\lambda^* \sim \sqrt{Fr}. \quad (5.4)$$

Como pode-se ver na Figura 18, esta escala funciona bem até mesmo para valores elevados de Fr , quando as forças de inércia e a derivada da pressão são relevantes e não podem ser desprezadas.

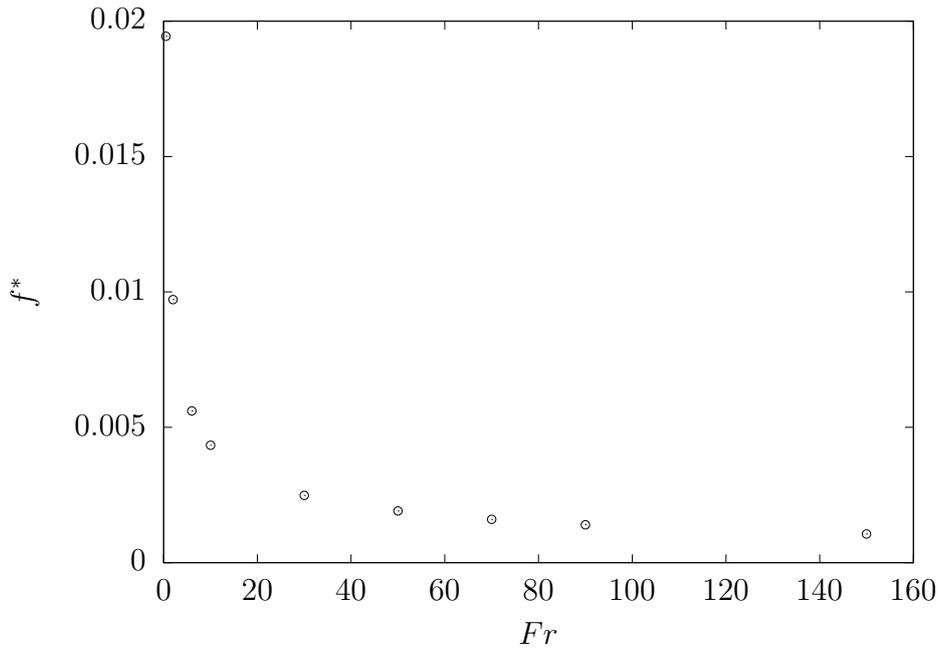
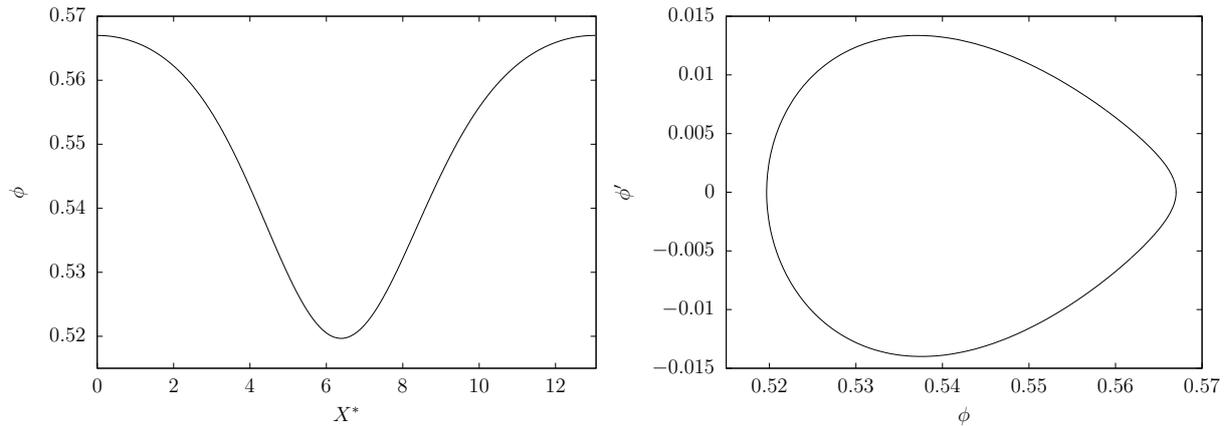


Figura 19 – Variação das frequências dos distúrbios com Fr . Parâmetros dados no começo da seção.

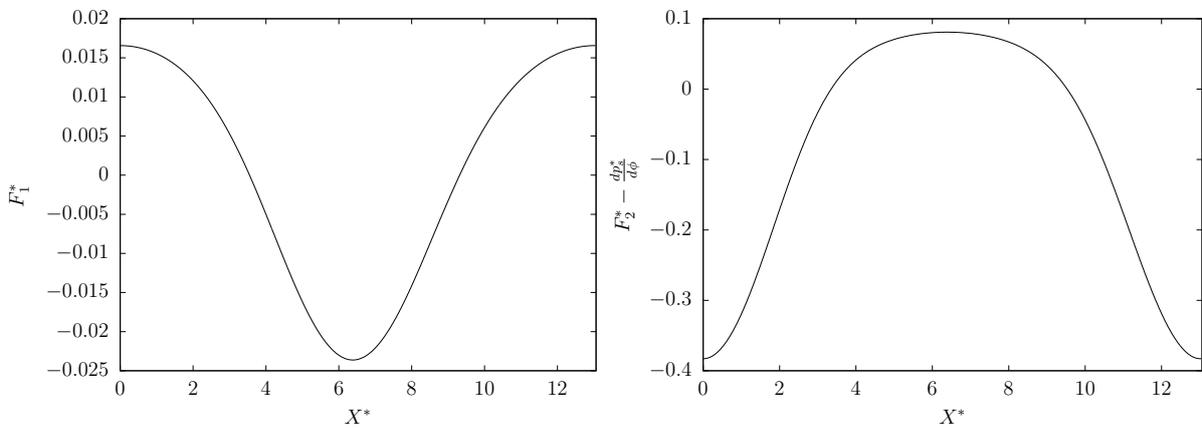
A Figura 19 mostra que a frequência dos distúrbios cai bruscamente com o aumento de Fr . Isto se relaciona com o fato de que ondas com Fr baixos são mais simétricas e próximas do regime linear de propagação. Distúrbios simétricos são ondas de frequências mais altas, segundo os resultados das análises de estabilidade de Sobral e Hinch (2017).

Nesta seção são também mostrados dois estados para ilustrar a influência de Fr sobre a forma das ondas; são mostrados uma onda de $Fr = 0.5$ e uma de $Fr = 150$.

5.3.1 Estado 1



(a) Perfil de onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 0.5$ (b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 0.5$

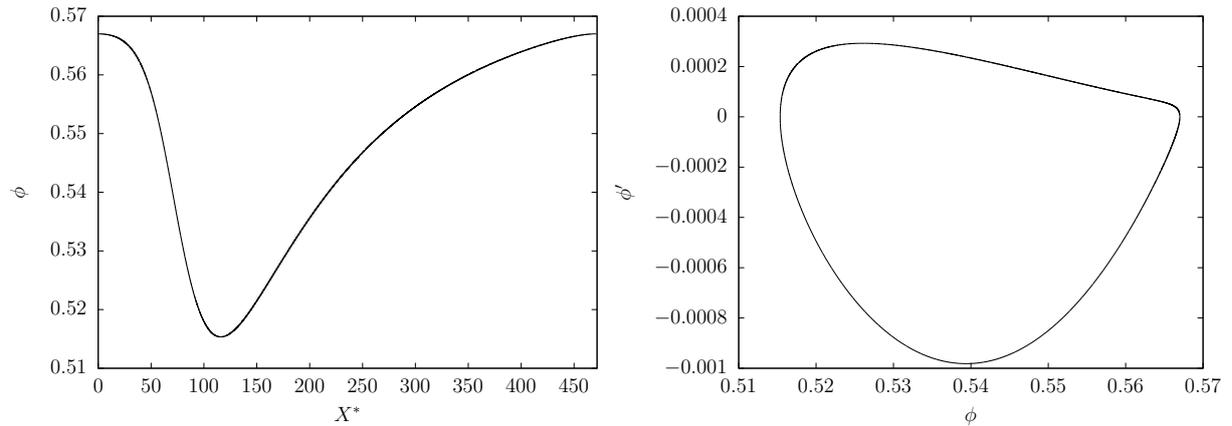


(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 0.5$ (d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 0.5$

Figura 20 – Estado 1 de resultados com Fr variável

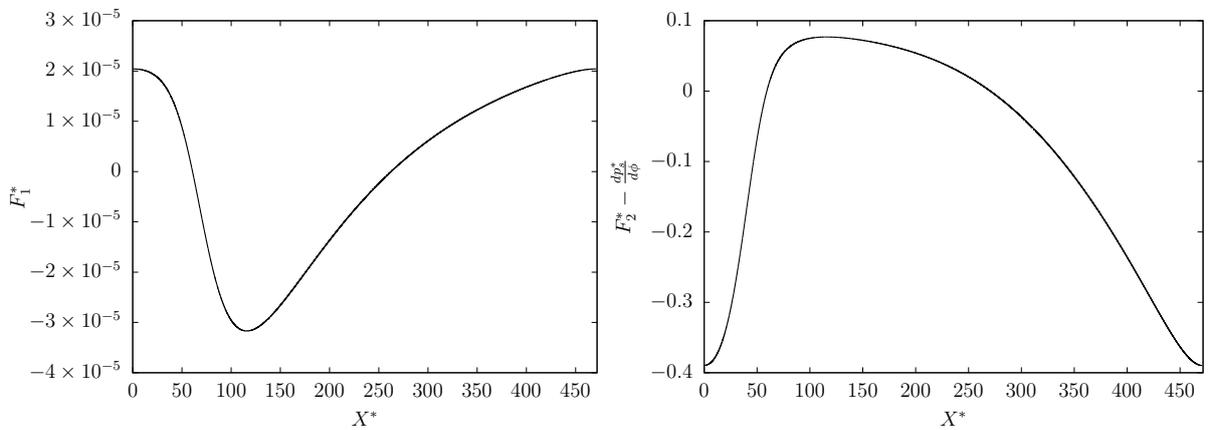
Fr só aparece no termo F_1 , e conseqüentemente, afeta seu tamanho e indiretamente aumenta a relevância do termo $F_2 - dp_s/d\phi$. No estado 1, com Fr baixo, a onda saturada possui uma tendência a ser simétrica, embora a amplitude seja moderadamente grande.

5.3.2 Estado 2



(a) Perfil de onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 150$

(b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 150$



(c) Perfil da função F_1^* ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 150$

(d) Perfil da função $F_2^* - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $Fr = 150$

Figura 21 – Estado 2 de resultados com Fr variável

O estado 2, com $Fr = 150$, apresenta uma onda com um aspecto um tanto semelhante ao choque observado em ondas invertidas, embora a região de baixa concentração não seja tão curta quanto lá e a queda da concentração não seja tão abrupta. Novamente, o deslocamento da assimetria pra esquerda ocorre devido ao relativamente baixo tamanho do termo F_1^* , exatamente devido ao elevado valor de Fr . Portanto, chega-se à conclusão de que Fr é responsável por causar assimetrias nas ondas e que quanto maior Fr , maior a tendência da instabilidade primária evoluir para outros tipos de instabilidade, corroborando as previsões da literatura. Resultados bastante semelhantes, mas com a assimetria para o lado direito foram obtidos para ondas invertidas e não serão aqui apresentados.

5.4 Influência da razão de densidades

A razão de densidades é um parâmetro adimensional fundamental na análise de leitos fluidizados. Sua ordem de grandeza está intimamente ligada ao tipo de instabilidade que ocorre no leito, sendo leitos líquido-sólido e leitos gás-sólido profundamente diferentes no seu comportamento. Taxas de amplificação de distúrbios enquanto estes estão em regime de crescimento linear são muito maiores em leitos gás-sólido, cuja razão de densidades R_ρ é $O(1/100)$. Ondas planas muito rapidamente são tomadas por não-linearidades e evoluem nesses leitos para bolhas. Para leitos líquido-sólido a razão de densidades R_ρ é $O(1/10)$ e dependendo dos valores dos parâmetros, ondas planas apenas crescem até saturar, sem evoluir para um regime borbulhante. Leitos fluidizados invertidos são caracterizados por razões de densidades $R_\rho > 1$, sendo que as ordens de grandeza dos termos e a competição dos mecanismos ocorrem de maneira totalmente diferente para leitos invertidos. R_ρ aparece na Eq. (3.39) tanto em F_1 quanto em F_2 , e por afetar ao mesmo tempo as forças de arrasto e peso líquido e as de inércia, ocorre uma região de transição onde o efeito sobre um termo passa a ser mais importante para explicar o que acontece com as ondas e suas propriedades do que o efeito sobre o outro termo. Nesta seção, cabe mostrar o que acontece com a variação de R_ρ tanto para ondas normais quanto invertidas.

5.4.1 Variação de R_ρ para ondas de concentração em leitos normais

Os resultados aqui apresentados foram simulados com os parâmetros ϕ_{cp} , ϕ_{rlp} , n e r como na Eq. (5.1), Fr e σ^* como na Eq. (5.2), $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.567$. Como mostra a Figura 22, a velocidade de propagação das ondas é muito sensível a R_ρ , sendo que quando R_ρ cresce, c^* diminui. Isto faz sentido, já que imagina-se que leitos com baixa razão de densidades sejam mais instáveis e tenham, portanto, valores maiores de velocidade de propagação das ondas. Há de se considerar ainda que o fato de ϕ_{max} estar fixo força as ondas a terem uma amplitude quase fixa também, dessa forma impedindo-nos de ver o efeito que a razão de densidades causaria sobre as amplitudes e formas da onda se ϕ_{max} não estivesse amarrado.

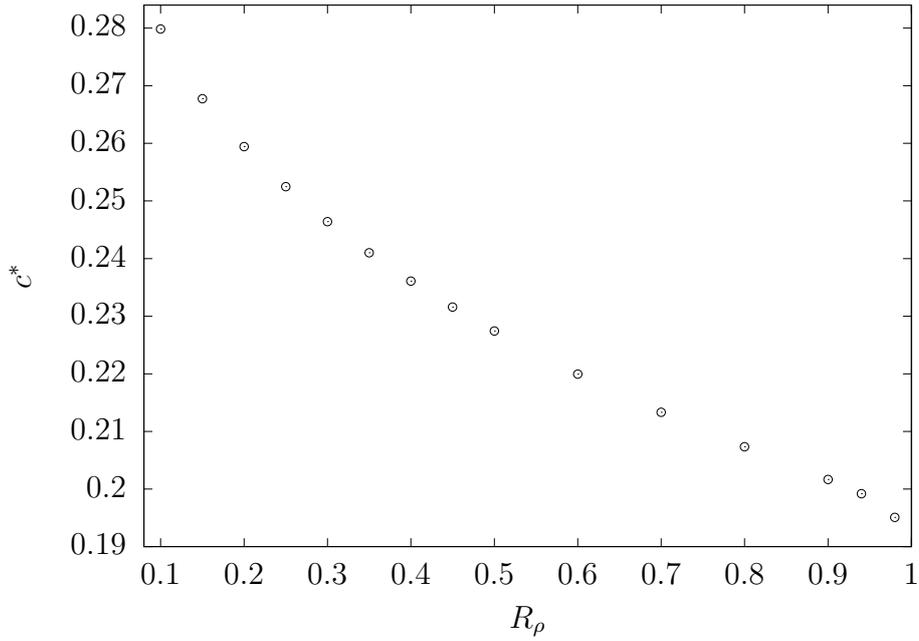


Figura 22 – Variação das velocidades de propagação das ondas com R_ρ

O comprimento de onda dos distúrbios, porém, assim como a frequência dos distúrbios, apresenta duas regiões de comportamento oposto. Inicialmente, quando R_ρ cresce, o comprimento de onda diminui; posteriormente o comprimento de onda passa a crescer quando R_ρ cresce. Provavelmente, a existência dessas duas regiões ocorre devido ao fato de R_ρ influenciar tanto F_1 quanto F_2 , ocorrendo em $R_\rho \approx 0.5$ a transição de qual efeito da razão de densidades é mais importante.

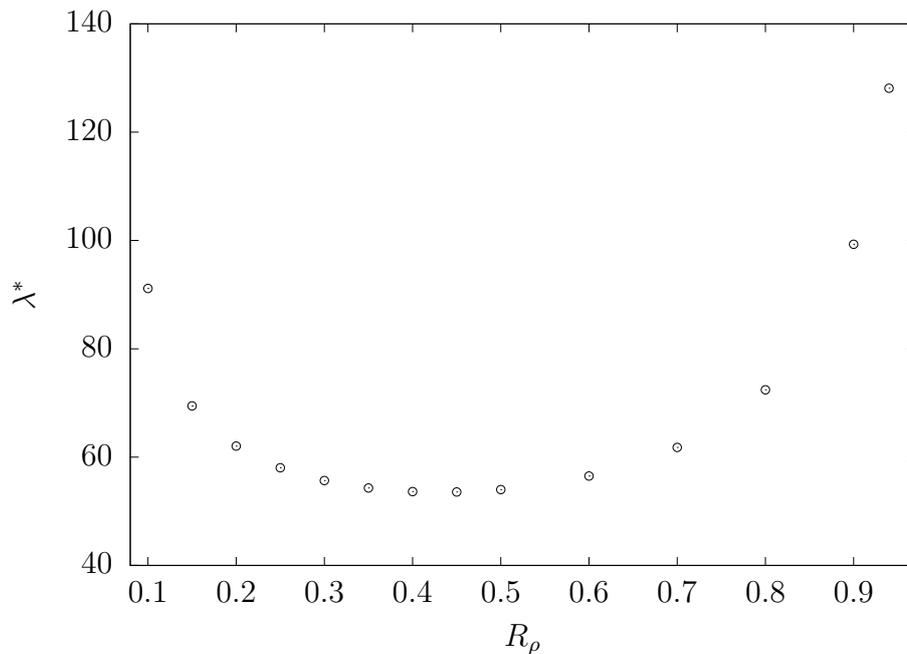


Figura 23 – Variação dos comprimentos de onda das ondas com R_ρ

Para a frequência dos distúrbios também ocorre fenômeno semelhante. Pode ser

interessante tentar comparar futuramente esses resultados obtidos em ondas saturadas com análises de estabilidade, de modo a investigar se há essa região de transição em diagramas de estabilidade também. O fato de ϕ_{max} estar fixo nessas análises significa que as ondas possuíam no regime linear de crescimento taxas de amplificação semelhantes, o que limita um pouco o escopo da visualização do efeito da razão de densidades sobre a natureza dos leitos. Cabe ainda destacar que quando R_ρ se aproxima de 1, causa um efeito semelhante a aumentar Fr , já que F_1 contém $(1 - R_\rho)/Fr$ multiplicando todos os seus termos. De fato, ondas com R_ρ próxima de 1 passam a apresentar um comportamento semelhante às de Fr elevado, com a assimetria muito deslocada para a esquerda.

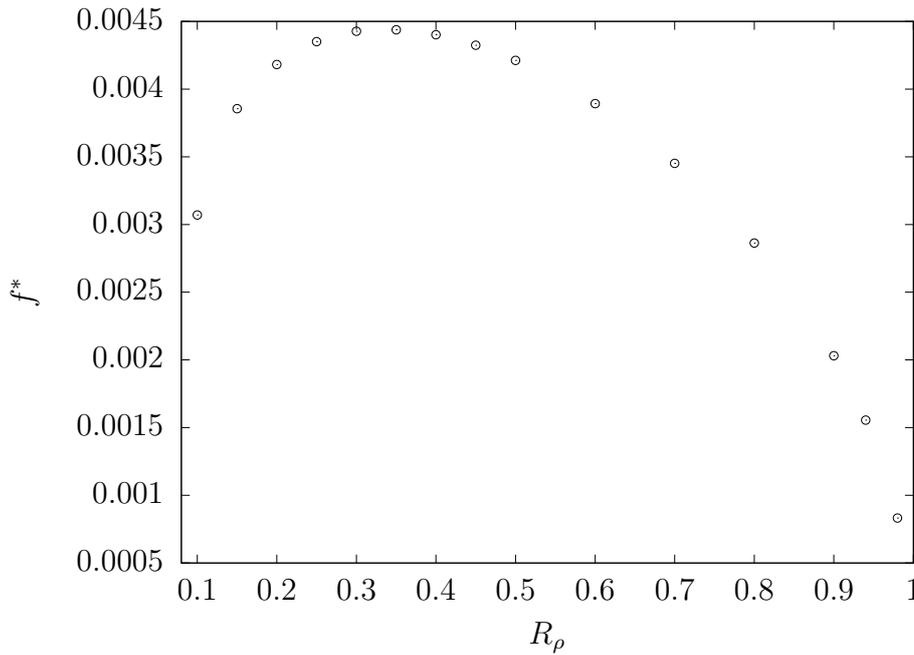


Figura 24 – Variação da frequência com R_ρ

5.4.2 Variação de R_ρ para ondas de concentração em leitos invertidos

Leitos invertidos apresentam comportamentos das propriedades bastante diferentes com a razão de densidades. Isto não é muito surpreendente, já que os valores dos parâmetros (inclusive do coeficiente de pressão adimensional) são de ordem de grandeza distinta de leitos normais. Nesta seção, foram usados os parâmetros ϕ_{cp} , ϕ_{rlp} , n e r como na Eq. (5.1), Fr e como na Eq. (5.2), $\sigma^* = 2.49 \times 10^{-3}$, $\phi_0 = 0.549$ e $\phi_{max} = 0.567$.

Para leitos invertidos com os parâmetros aqui utilizados, não há a presença de duas regiões distintas de influência de R_ρ sobre as forças. Novamente, R_ρ próximo de 1 implica em ondas muito assimétricas.

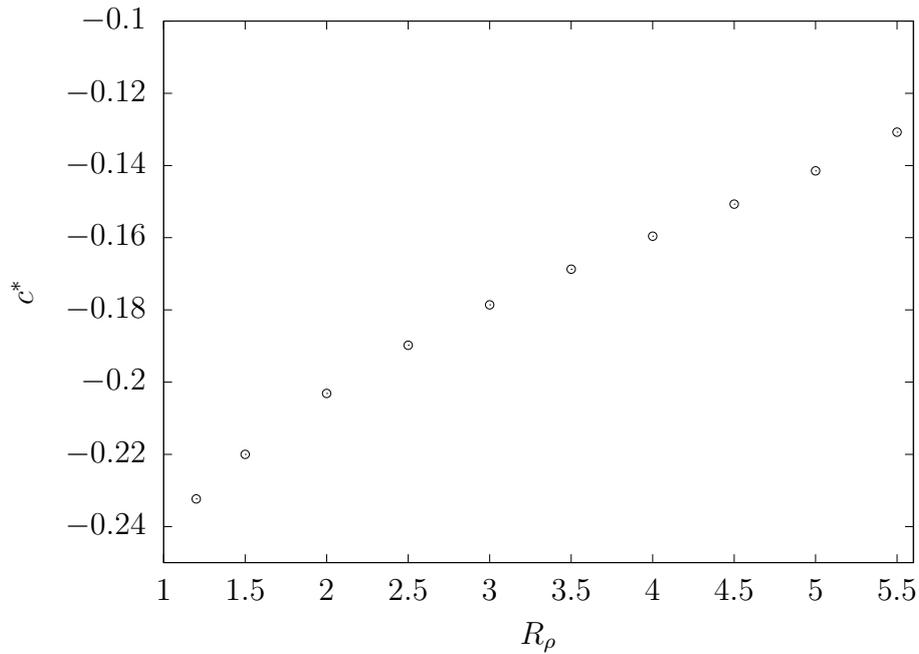


Figura 25 – Variação das velocidades de propagação com R_ρ

Quando a razão de densidades aumenta, as velocidades de propagação diminuem seu valor em módulo, como pode ser visto na Figura 25. Além disso, os comprimentos de onda dos distúrbios caem muito intensamente com o aumento da razão de densidades. As ondas passam a ser mais simétricas e as frequências aumentam. Portanto, ao que parece, aumentar R_ρ faz com que as ondas sejam mais simétricas e mais próximas a ondas neutras, com baixas taxas de amplificação.

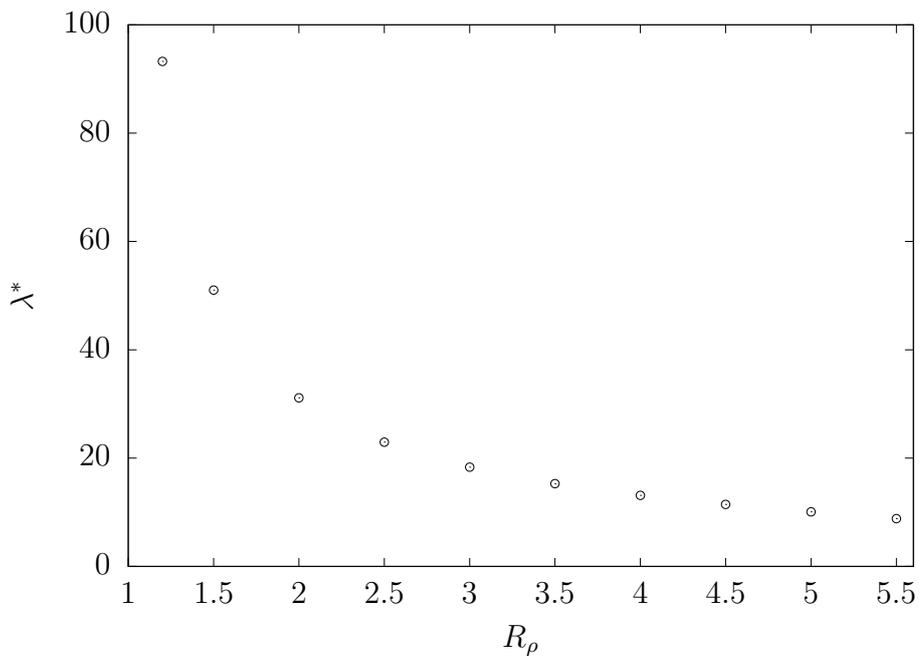


Figura 26 – Variação dos comprimentos de onda com R_ρ

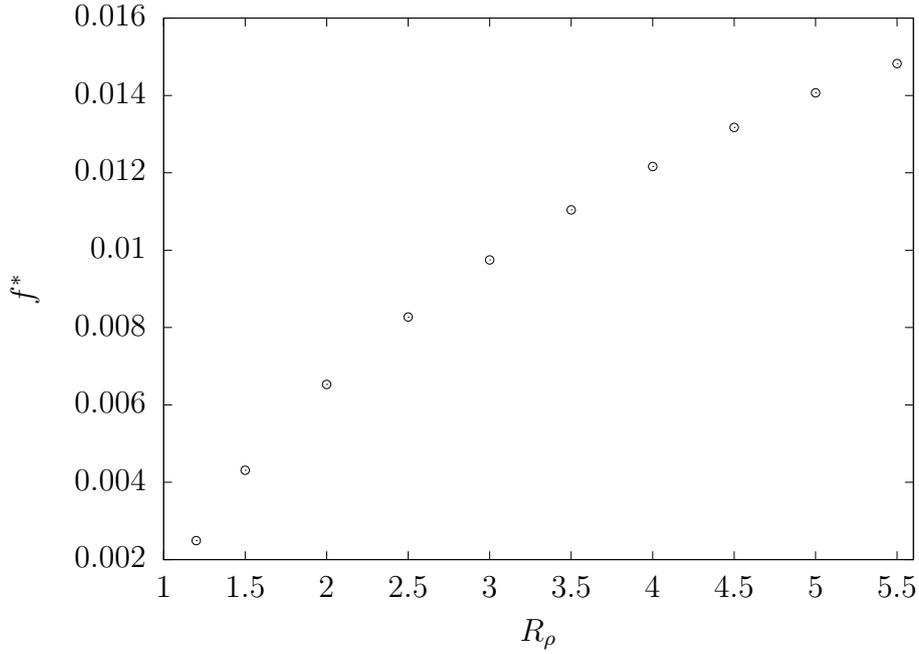


Figura 27 – Variação das frequências com R_ρ

Perfis de onda não foram apresentadas nesta seção por apresentarem formas já vistas antes, sem muitas novas informações a respeito do modelo.

5.5 Ondas saturadas obtidas utilizando uma nova proposta de pressão de partícula

Nesta seção, são integradas ondas saturadas usando a versão dimensional da EDO governante, Eq.(3.28) com uma nova proposta de pressão de partícula que corresponda melhor aos resultados experimentais obtidos em (DURU et al., 2002) e que considere o fato de que para altas concentrações a quantidade de colisões entre as partículas sólidas diminui, fazendo com que $dp_s/d\phi$ passe a ser negativo nesse caso, em detrimento dos modelos usuais da literatura, sempre crescentes. Com esta nova expressão constitutiva para a pressão de partícula, as ondas saturadas aqui obtidas estiveram qualitativamente e quantitativamente mais próximas das medidas experimentalmente em (DURU et al., 2002). Os resultados desta seção foram tomados novamente para parâmetros como na Eq.(5.1), com $\phi_0 = 0.549$. Os valores dos parâmetros a , d e k do modelo (2.36) que representaram melhor os dados experimentais da combinação 6 de Duru et al. (2002) foram $a = 0.2$, $d = 0.007$ e $k = 0.001$. Por conveniência, o modelo (2.36) é apresentado de novo, sem numeração:

$$\frac{dp_s}{d\phi} = \rho_s v_t^2 \left(a - \frac{d}{(\phi_{cp} - \phi)^{1-k}} \right).$$

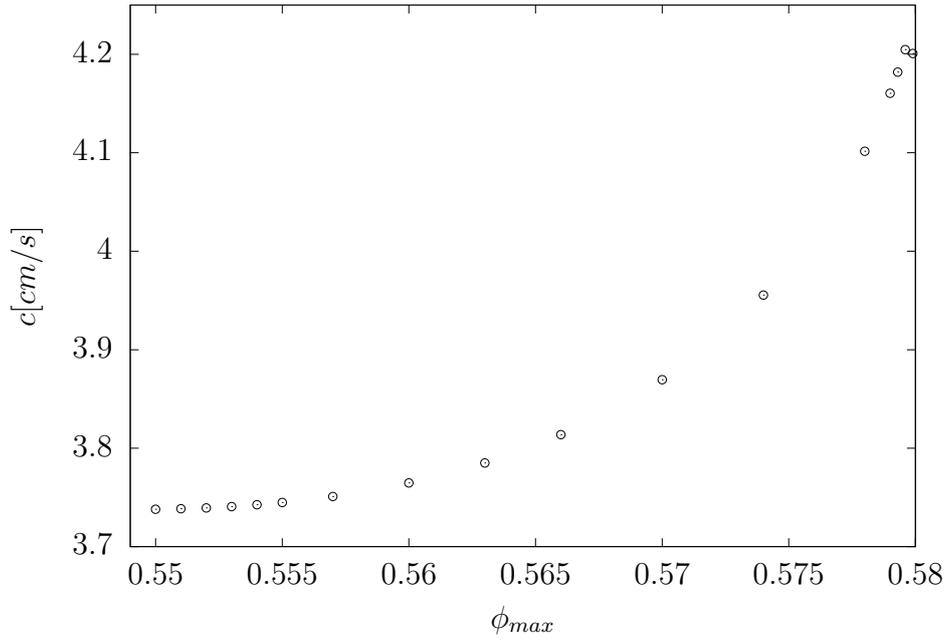


Figura 28 – Variação das velocidades de propagação com ϕ_{max}

Apesar da diferença no modelo de pressão de partícula, as conclusões qualitativas obtidas a respeito da variação da velocidade de propagação, do comprimento de onda e da frequência dos distúrbios quando se varia ϕ_{max} com o modelo usual continuam válidas. A velocidade de propagação dos distúrbios aumenta quando a amplitude dos distúrbios aumenta, mas com uma taxa menor do que com o modelo sempre crescente de pressão. Perto de ϕ_{rlp} , ocorre uma leve queda da velocidade de propagação. Possivelmente esse resultado é espúrio, mas novamente ele corresponde ao ϕ_{max} a partir do qual a onda atinge a região onde F_1 troca o sinal da sua derivada na região de mínimo da onda.

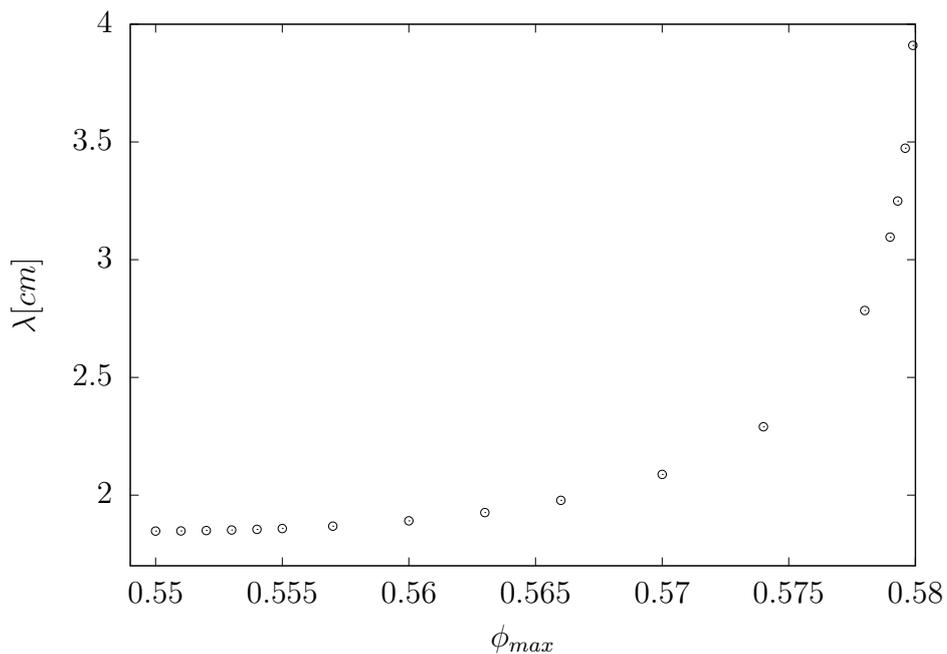


Figura 29 – Variação dos comprimentos de onda com ϕ_{max}

O comprimento de onda dos distúrbios também aumenta à medida que a amplitude das ondas aumenta, também com uma taxa muito menor do que no caso de pressão sempre crescente, tendo inclusive uma região onde o comprimento de onda é quase constante.

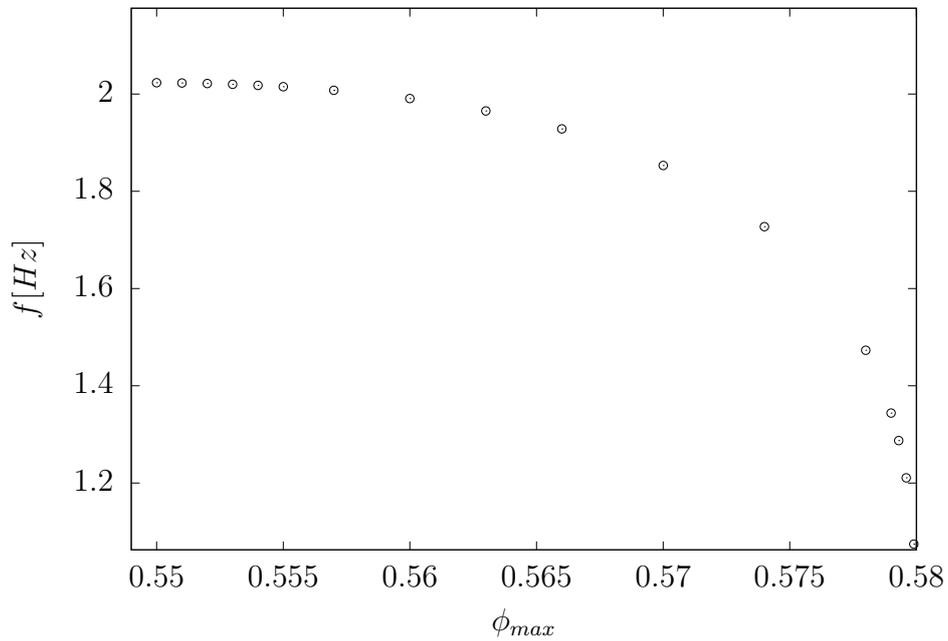
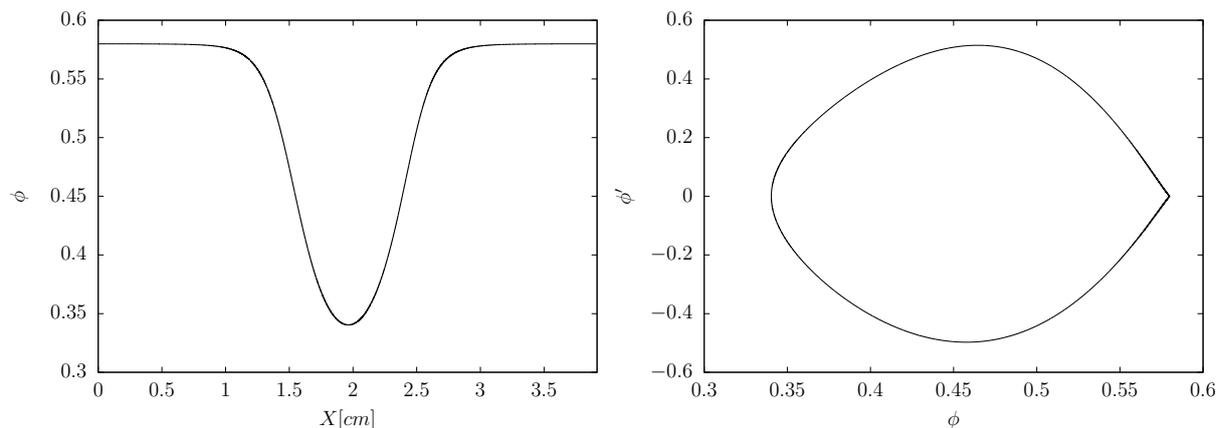


Figura 30 – Variação das frequências com ϕ_{max}

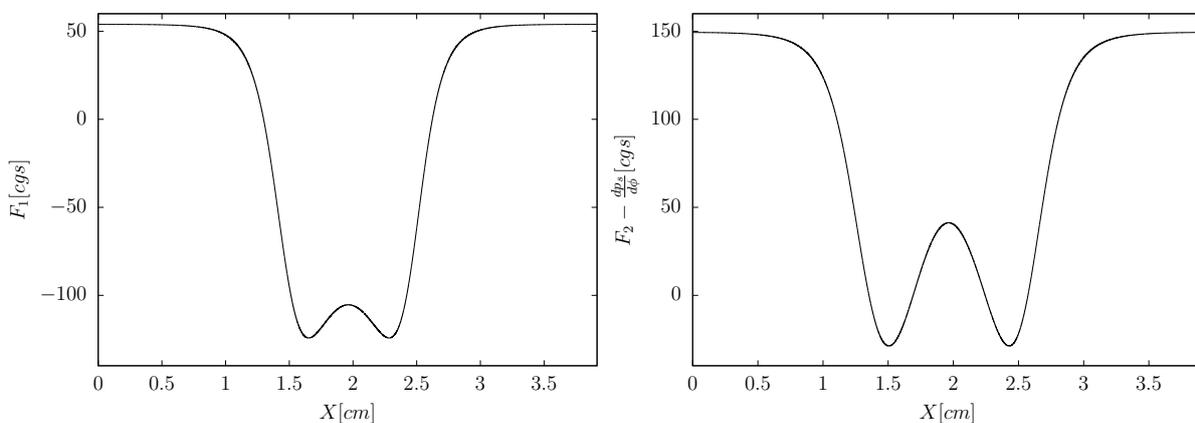
A frequência dos distúrbios diminui quando ϕ_{max} aumenta. Isso corresponde às conclusões de (SOBRAL; HINCH, 2017), já que frequências mais altas estão mais próximas da frequência neutra na qual não há taxa de crescimento dos distúrbios. Assim, à medida que a amplitude das ondas aumenta, ondas passam a ser mais assimétricas.

As diferenças qualitativas entre as ondas obtidas usando este modelo de pressão e o sempre crescente ficam evidentes ao se analisar o estado de maior ϕ_{max} (resultados para baixos ϕ_{max} são sempre ondas simétricas e não acrescentam muito a essa altura). Este estado será chamado de estado 1.

5.5.1 Estado 1



(a) Perfil de onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_{max} = 0.5794$ (b) Diagrama de fase da onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_{max} = 0.5794$



(c) Perfil da função F_1 ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_{max} = 0.5794$ (d) Perfil da função $F_2 - dp_s/d\phi$ ao longo de uma onda com parâmetros dados no começo da seção, $\phi_{max} = 0.5794$

Figura 31 – Estado 1 para novo modelo de pressão de partícula

Como pode-se ver na Figura 31, mesmo uma onda com ϕ_{max} muito perto de ϕ_{rlp} apresenta apenas uma leve assimetria. F_1 é $O(50\text{cgs})$ e na região central do gráfico muda sua derivada em relação a ϕ . $F_2 - dp_s/d\phi$ não atinge os valores $O(1000\text{cgs})$ que costumava alcançar com o modelo sempre crescente de pressão. Além disso, agora $F_2 - dp_s/d\phi$ assume valores positivos na extremidade do gráfico, já que a derivada da pressão é negativa para altas concentrações nesse modelo. Dessa forma, a região de $\phi \approx \phi_{max}$ é comprida e a região de $\phi \approx \phi_{min}$ é curta, como nas ondas medidas experimentalmente em (DURU et al., 2002). Dessa forma, com esse tipo de modelo de pressão de partícula, as ondas saturadas continuam mantendo uma forma esbelta mesmo para altas amplitudes, não havendo resultados do tipo choque ou bolha. Portanto, é razoável concluir que em leitos líquido-sólido reais que não passam para um regime borbulhante a pressão de partícula obedeça a um modelo do tipo utilizado nesta seção.

6 Conclusões

Neste projeto, foi realizada uma investigação detalhada qualitativa e quantitativa a respeito de ondas saturadas em leitos líquido-sólido fluidizados normais e invertidos. Foram apresentadas as equações gerais do movimento para as fases líquida e sólida, dentro do contexto do modelo bifásico contínuo.

Para ondas planas instáveis, já no regime saturado, foi deduzida, por meio de uma transformação de variáveis conveniente, uma EDO de 2ª ordem não-linear envolvendo a concentração de partículas e a velocidade de propagação das ondas saturadas. A EDO obtida foi então integrada numericamente, junto com uma restrição integral que garante a periodicidade das ondas obtidas. Foi proposta uma adimensionalização original para a EDO governante, que permitiu identificar os parâmetros centrais do problema cuja influência sobre as ondas foi investigada. Uma compreensão sobre como se dá o balanço entre forças na EDO governante foi obtida, permitindo entender os mais variados formatos de perfil de onda e permitindo especular a respeito deles com argumentos físicos.

Uma expressão constitutiva original para a pressão de partícula foi proposta, de forma a capturar os resultados experimentais de [Duru et al. \(2002\)](#). Ondas saturadas com formas e valores das propriedades semelhantes às lá medidas experimentalmente foram obtidas, o que depõe em favor da correção da pressão proposta. A diferença entre as formas das ondas para a expressão com pressão de partícula sempre crescente e a pressão proposta foi notável. De qualquer maneira, é possível especular que existam intervalos dos parâmetros onde a derivada da pressão atinja valores elevados positivos mesmo para altas concentrações; dessa forma, poderiam ser formadas ondas saturadas com aspecto do tipo choque ou pistão, e que ondas desse tipo poderiam evoluir para um regime borbulhante, na prática.

Leitos normais e invertidos foram comparados, sendo percebido que a assimetria dos dois tipos de distúrbio ocorre para lodos opostos; indiretamente, foi possível perceber que leitos invertidos são mais instáveis, com distúrbios mais assimétricos do que os dos leitos normais.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se propor:

- Realizar análises de estabilidade linear que permitam comparar a influência dos parâmetros do problema sobre as taxas de amplificação; com isso, seria possível comparar as conclusões obtidas para a análise da influência dos parâmetros sobre as ondas já saturadas com as conclusões obtidas na análise de estabilidade.
- Resolver numericamente as equações governantes do problema ainda na versão que permite acompanhar a evolução temporal das ondas até a saturação. Com isso, seria possível comparar as ondas saturadas obtidas dessa maneira com as ondas saturadas utilizando a EDO governante com o algoritmo utilizado neste trabalho. Esse tipo de trabalho já foi realizado em (SOBRAL; HINCH, 2017); entretanto, seria interessante estender a análise lá feita para uma maior quantidade de valores dos parâmetros adimensionais, estudando também sua influência sobre as ondas. Além disso, é interessante observar que tipo de resultados o modelo *ad hoc* aqui proposto para a pressão de partículas vai gerar.
- O trabalho experimental de Duru et al. (2002) mediu ondas saturadas para alguns conjuntos de parâmetros. Com os resultados deles, foi possível propor uma expressão para a pressão de partícula. Uma ideia possível seria medir mais ondas saturadas a ponto de observar até que ponto a expressão aqui proposta é válida, e tentar medir os parâmetros a , d e k do modelo proposto para essas ondas. Executar esse tipo de trabalho seria uma contribuição importante porque a pressão de partícula, apesar dos avanços na recentes na literatura, ainda é uma grande questão em aberto do modelo, afetando muito as ondas obtidas em simulações. Assim, ter conhecimento sobre a pressão de partícula significa ter conhecimento sobre a própria natureza dos leitos fluidizados, permitindo realizar previsões sobre o comportamento de suas instabilidades, e permitindo à indústria reduzir eventuais perdas de eficiência causadas pela propagação de instabilidades em leitos.

Referências

- ANDERSON, K.; SUNDARESAN, S.; JACKSON, R. Instabilities and the formation of bubbles in fluidized beds. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 303, p. 327–366, 1995. Citado na página 3.
- ANDERSON, T.; JACKSON, R. A fluid mechanical description of fluidized beds. i & ec fundamentals 6, 527–539. *Google Scholar*, 1967. Citado na página 9.
- BATCHELOR, G. Secondary instability of a gas-fluidized bed. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 257, p. 359–371, 1993. Citado na página 3.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2014. Citado na página 7.
- DAVIDSON, J. F.; HARRISON, D. *Fluidised particles*. [S.l.]: UMI Out-of-Print Books on Demand, 1990. Citado na página 1.
- DURU, P. et al. Constitutive laws in liquid-fluidized beds. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 452, p. 371–404, 2002. Citado 15 vezes nas páginas viii, 4, 5, 11, 12, 13, 15, 16, 26, 27, 29, 51, 54, 55 e 56.
- EL-KAISSY, M.; HOMSY, G. Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds: Part 1: Experiments. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 379–395, 1976. Citado na página 3.
- GARG, S.; PRITCHETT, J. Dynamics of gas-fluidized beds. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 46, n. 10, p. 4493–4500, 1975. Citado na página 4.
- GELDART, D. Types of gas fluidization. *Powder technology*, Elsevier, v. 7, n. 5, p. 285–292, 1973. Citado na página 3.
- HERNÁNDEZ, J. A.; JIMENEZ, J. Bubble formation in dense fluidised beds. In: *The Global Geometry of Turbulence*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 133–142. Citado na página 11.
- HOEF, M. A. van der et al. Numerical simulation of dense gas-solid fluidized beds: a multiscale modeling strategy. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Annual Reviews, v. 40, p. 47–70, 2008. Citado na página 3.
- HOWLEY, M. A.; GLASSER, B. J. A comparison of one-dimensional traveling waves in inverse and normal fluidized beds. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 201, n. 1-2, p. 177–198, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 4, 27, 37 e 42.
- JACKSON, R. The mechanics of fluidized beds. i. the stability of the state of uniform fluidization. *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, v. 41, p. 13–21, 1963. Citado na página 3.

RICHARDSON, J.; ZAKI, W. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 3, n. 2, p. 65–73, 1954. Citado na página 9.

SOBRAL, Y. D. *Estabilidade hidrodinâmica e magnética de leitos fluidizados*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2004. Citado 3 vezes nas páginas [viii](#), [2](#) e [42](#).

SOBRAL, Y. D.; CUNHA, F. R. d. A linear stability analysis of a homogeneous fluidized bed. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 3, n. 2, p. 197–206, 2002. Citado na página 9.

SOBRAL, Y. D.; HINCH, E. J. Finite amplitude steady-state one-dimensional waves in fluidized beds. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 77, n. 1, p. 247–266, 2017. Citado 14 vezes nas páginas [4](#), [11](#), [12](#), [13](#), [15](#), [19](#), [22](#), [27](#), [28](#), [29](#), [32](#), [44](#), [53](#) e [56](#).

SUNDARESAN, S. Instabilities in fluidized beds. *Annual review of fluid mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 35, n. 1, p. 63–88, 2003. Citado na página 4.