

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**PREVISÃO DE VIDA A FADIGA COM BASE
EM MODELO DE DUAS ESCALAS**

Por

Lucas Mangas Araújo

Brasília, 9 de julho de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**PREVISÃO DE VIDA A FADIGA COM BASE
EM MODELO DE DUAS ESCALAS**

Por,

Lucas Mangas Araújo

Relatório submetido como requisito para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Lucival Malcher, UnB/ENM (Orientador)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ENM

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ENM

MSc. Guilherme Vaz Ferreira, UnB/ENM (Coorientador)

Brasília 9 de julho de 2019

*Os números são a Linguagem
Universal ofertada por Deus aos
humanos como confirmação da verdade*
Santo Agostinho, (354–430 d.C.)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe Bia, e ao meu Pai Alex, a quem devo tudo o que tenho e aquilo que sou hoje. Pela educação, disciplina, apoio, incentivos, conselhos, pelas broncas, pelos carinho, pelos momentos em família, pela ajuda nos estudos, pelo amor que recebi ao longo de toda minha trajetória. Obrigado

Agradeço ao meu irmão Rafael, o qual acompanhei desde o seu nascimento até a hoje e com quem a partir de conversas e discussões, a partir de brincadeiras e brigas, pude aprender e me divertir. Obrigado

Agradeço aos meus avós Gloria, Edith, Francisco e Oyma, que cuidaram muito de mim quando pequeno e que me ensinaram diversos aspectos da vida. Pelo apoio, pelo carinho, pelas broncas, pelas companhias, e pelas gargalhadas, pelas horas de jogos de cartas. Obrigado

Agradeço aos meus tios Guga e Lilian, que me ajudaram bastante em conversas em momentos difíceis e que me ensinaram muitas lições e momentos alegres. Os quais me deram 2 primas Giulia e Luisa que me alegram muito. Obrigado

Agradeço a todos os amigos que fiz a partir da escola, faculdade, futebol, violão, inglês, francês, os quais compartilhei momentos inesquecíveis, que para sempre estarão comigo, e que ajudaram a ter leveza. Sem vocês também não estaria onde estou hoje. Obrigado

Agradeço aos alunos de doutorado Guilherme Ferreira e Ranieri Neves, o primeiro por ter me auxiliado como coorientador e o segundo por ter me introduzido no tema o qual veria ser o meu trabalho. Obrigado

Agradeço a cada Professor que tive ao longo da minha vida sem os quais não poderia me tornar quem sou atualmente. Em especial agradeço ao Prof.Dr. Lucival Malcher, com o qual tive a honra de trabalhar por cerca de três anos, por ter me orientado ao longo de todo esse tempo e não somente nesse trabalho. Obrigado

A cada um de vocês, que me ajudaram e me possibilitaram chegar aqui. Obrigado.

Muito Obrigado.

Lucas Mangas Araújo

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo propor uma metodologia de previsão de vida à fadiga com base em um Modelo de Dano Contínuo em Duas Escalas. O material estudado foi a liga de alumínio 7050-T7451. Os dados de fadiga para a liga foram obtidos de ensaios controlados por força no regime de alto número de ciclos. As trajetórias de carregamento empregadas foram axiais, cisalhantes e multiaxiais proporcionais. As estimativas foram primeiramente realizadas utilizando uma abordagem desacoplada e em seguida levando em conta o dano de maneira acoplada. É proposto o uso de um modelo de dano melhorado, considerando o denominador de dano um parâmetro variável. As melhores estimativas geradas são comparadas com o bem estabelecido critério de Smith-Watson-Topper a fim de apresentar o potencial da metodologia proposta no trabalho. A análise acoplada e com denominador de dano variável obteve 87,8% das previsões no interior da banda de fator 4, próximo dos 92,7% obtidos pelo critério SWT.

Palavras-chaves: Fadiga, Plasticidade, Duas Escalas, Dano Contínuo, Fadiga Multiaxial, Fadiga de Alto Número de Ciclos, Ensaios Controlados por Força

Abstract

The present work aims to propose a fatigue life prediction methodology based on a Two-Scale Continuous Damage Model. The material studied was the 7050-T7451 aluminum alloy. Fatigue data for the alloy were obtained from force controlled tests in a high cycle regime. The loading paths applied were tension-compression, pure shear and proportional multiaxial. The life estimates were performed by first employing an uncoupled approach and then considering damage in a coupled manner. It is proposed an improved damage model, on which the damage denominator is variable. The best estimates produced are compared to the well established Smith-Watson-Topper criterion in order to show the potential of the methodology. The coupled analysis in association with a varying damage denominator achieved 87,8% of the predictions within a band width of 4, close to the 92,7% obtained by the SWT criterion.

Key-words: Fatigue, Plasticity, Two Scales, Continuous Damage, Multiaxial Fatigue, High Cycle Fatigue, Force Controlled Tests

Lista de Figuras

Figura 1 – Função de escoamento representada no plano π . Os eixos σ_1 , σ_2 e σ_3 não pertencem ao plano.	13
Figura 2 – Superfície de escoamento de von Mises. Plano π também é representado na imagem.	14
Figura 3 – Plasticidade ideal. Representação em um ensaio uniaxial e comportamento no plano π	15
Figura 4 – Endurecimento Isotrópico. Representação em um ensaio uniaxial e comportamento no plano π	16
Figura 5 – Endurecimento cinemático. Resultado de um ensaio uniaxial e comportamento da superfície de escoamento no plano π	17
Figura 6 – Comportamento tensão-deformação com lei de evolução de Prager. . .	18
Figura 7 – Comportamento tensão-deformação com lei de evolução de Armstrong-Frederick.	19
Figura 8 – Comparação entre as leis de evolução	20
Figura 9 – Comportamento de \mathbf{N} sob plasticidade associativa.	21
Figura 10 – Imagem ilustrativa apresentando as ideias do Modelo de Duas Escalas. E é o Módulo de Elasticidade do Material.	26
Figura 11 – Comparação entre os métodos de integração explícitos e implícitos. . .	32
Figura 12 – Algoritmo de integração numérica	32
Figura 13 – Aspecto da matriz Jacobiana.	38
Figura 14 – Corretor Plástico	40
Figura 15 – Trajetórias de carregamento aplicadas nos experimentos de fadiga. . . .	46
Figura 16 – Processo de calibração e comportamento linear do erro em função de S_0 . .	51
Figura 17 – Valores de $S_{0,33}$ obtidos e o valor médio do mesmo utilizado na simulação. .	53
Figura 18 – Valores de $S_{0,0}$ obtidos e o valor médio do mesmo utilizado na simulação. .	54
Figura 19 – Comportamento mecânico do alumínio em condições axiais 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,28\%$	55
Figura 20 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,25\%$	56

Figura 21 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,20\%$	56
Figura 22 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,18\%$	57
Figura 23 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,15\%$	57
Figura 24 – Comportamento mecânico do alumínio em condições torcionais do 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,61\%$	58
Figura 25 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,42\%$	59
Figura 26 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,38\%$	59
Figura 27 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,31\%$	60
Figura 28 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,28\%$	60
Figura 29 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,24\%$	61
Figura 30 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$	61
Figura 31 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$	62
Figura 32 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,09\%$ e $\gamma_a = 0,38\%$	62
Figura 33 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,09\%$ e $\gamma_a = 0,38\%$	63
Figura 34 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,07\%$ e $\gamma_a = 0,31\%$	63
Figura 35 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,07\%$ e $\gamma_a = 0,31\%$	64
Figura 36 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,06\%$ e $\gamma_a = 0,25\%$	64

Figura 37 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,06\%$ e $\gamma_a = 0,25\%$	65
Figura 38 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,08\%$ e $\gamma_a = 0,41\%$	65
Figura 39 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,08\%$ e $\gamma_a = 0,41\%$	66
Figura 40 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\varepsilon_a = 0,28\%$	67
Figura 41 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\gamma_a = 0,61\%$	68
Figura 42 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\varepsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$	68
Figura 43 – Gráfico Vida-Vida para $S = S_{0.33}$	74
Figura 44 – Gráfico Vida-Vida para $S = S_{0.0}$	78
Figura 45 – Gráfico Vida-Vida para $S = f(\sigma)$	82

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Modelo elastoplástico geral	11
Tabela 2 – Modelo Elastoplástico de Duas Escalas baseado no critério de von Mises von Mises com Endurecimento Cinemático	26
Tabela 3 – Resumo da estratégia de integração numérica implícita.	41
Tabela 4 – Composição química da liga de Alumínio 7050 com base na norma ASM Al-223 e análise feita pela empresa TORK	45
Tabela 5 – Parâmetro materiais do alumínio 7050-T7451	45
Tabela 6 – Dados referentes a trajetória "A"puramente axial.	47
Tabela 7 – Dados referentes a trajetória "B"puramente torcional.	48
Tabela 8 – Trajetória C multiaxial proporcional.* simboliza os experimentos para $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ** para $\frac{33\sqrt{3}}{20}$ e *** para $2\sqrt{3}$	49
Tabela 9 – Resultados da calibração do modelo em condições axiais alternadas . .	51
Tabela 10 – Dados selecionados para os carregamentos axiais.	52
Tabela 11 – Dados selecionados para os carregamentos torcionais	53
Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas. . .	71
Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas. . .	72
Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas. . .	73
Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas para $S = S_{0,0}$	75
Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas para $S = S_{0,0}$	76
Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas para $S = S_{0,0}$	77
Tabela 14 – Comparação entre vidas experimentais e e previsões numéricas para S variável.	79

Lista de símbolos

ε_a	Amplitude de deformação axial
γ_a	Amplitude de deformação cisalhante
σ_a	Amplitude de tensão axial
τ_a	Amplitude de tensão cisalhante
ν	Coefficiente de Poisson
ψ	Densidade de Energia de Deformação
$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mu p}$	Evolução de $\bar{\varepsilon}^{\mu p}$
$\dot{\gamma}$	Evolução de γ
ϕ	Função de Escoamento na macro escala
ϕ^μ	Função de Escoamento na micro escala
$\phi_{n+1}^{\mu T}$	Função de Escoamento Tentativa na micro escala
σ_{ut}	Limite de resistência a tração
σ_f^∞	Limite de resistência a fadiga para vida infinita
$\bar{\varepsilon}^{\mu p}$	Micro Deformação Plástica Acumulada
$\bar{\varepsilon}_n^{\mu p}$	Micro Deformação Plástica Acumulada no pseudo-instante t_n
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p}$	Micro Deformação Plástica Acumulada no pseudo-instante t_{n+1}
μ	Micro Escala
γ	Multiplicador Plástico
ψ^e	Parcela elástica da densidade de energia de deformação
ψ^p	Parcela plástica da densidade de energia de deformação
λ	Relação entre τ_a e σ_a

σ_{y0}	Tensão de escoamento inicial cíclico
σ_y	Tensão de escoamento
σ_v	Tensão equivalente de von Mises
η^μ	Tensão de Triaxialidade avaliado na micro escala
σ_F	Tensão na Fratura
σ_n	Tensão Normal
σ_n^{max}	Tensão normal máxima no plano crítico
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões Principais
ξ^μ	Terceiro invariante normalizado avaliado na micro escala
$\dot{\epsilon}^{\mu p}$	Evolução do tensor deformação plástica na micro escala
$\dot{\beta}^\mu$	Evolução do tensor das tensões cinemáticas na micro escala
$\hat{\sigma}$	Função de atualização de σ
$\hat{\alpha}$	Função de atualização das outras variáveis internas
$\Delta \epsilon$	Macro incremento de deformação
$\Delta \epsilon^\mu$	Micro incremento de deformação
ϵ^e	Tensor deformação elástica na macro escala
ϵ_n^e	Tensor deformação elástica na macro escala no pseudo-instante t_n
ϵ_{n+1}^{eT}	Tensor deformação elástica tentativa na macro escala
ϵ_{n+1}^e	Tensor deformação elástica na macro escala no pseudo-instante t_{n+1}
$\epsilon^{\mu e}$	Tensor deformação elástica na micro escala
$\epsilon_n^{\mu e}$	Tensor deformação elástica na micro escala no pseudo-instante t_n
$\epsilon_{n+1}^{\mu eT}$	Tensor deformação elástica tentativa na micro escala
$\epsilon_{n+1}^{\mu e}$	Tensor deformação elástica na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
ϵ^p	Tensor deformação plástica na macro escala
ϵ_n^p	Tensor deformação plástica na macro escala no pseudo-instante t_n
ϵ_{n+1}^{pT}	Tensor deformação plástica tentativa na macro escala
ϵ_{n+1}^p	Tensor deformação plástica na macro escala no pseudo-instante t_{n+1}

$\varepsilon^{\mu p}$	Tensor deformação plástica na micro escala
$\varepsilon_n^{\mu p}$	Tensor deformação plástica na micro escala no pseudo-instante t_n
$\varepsilon_{n+1}^{\mu p T}$	Tensor deformação plástica tentativa na micro escala
$\varepsilon_{n+1}^{\mu p}$	Tensor deformação plástica na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
ε	Tensor deformação total na macro escala
ε^μ	Tensor deformação total na micro escala
β^μ	Tensor das tensões cinemáticas na micro escala
β_n^μ	Tensor das tensões cinemáticas na micro escala no pseudo-instante t_n
$\beta_{n+1}^{\mu T}$	Tensor das tensões cinemáticas tentativa na micro escala
β_{n+1}^μ	Tensor das tensões cinemáticas na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
σ	Tensor das Tensões de Cauchy na macro escala
σ_n	Tensor das Tensões de Cauchy na macro escala no pseudo-instante t_n
σ_{n+1}^T	Tensor das Tensões de Cauchy tentativa na macro escala
σ_{n+1}	Tensor das Tensões de Cauchy na macro escala no pseudo-instante t_{n+1}
σ^μ	Tensor das Tensões de Cauchy na micro escala
σ_n^μ	Tensor das Tensões de Cauchy na micro escala no pseudo-instante t_n
$\sigma_{n+1}^{\mu T}$	Tensor das Tensões de Cauchy tentativa na micro escala
σ_{n+1}^μ	Tensor das Tensões de Cauchy na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
η^μ	Tensor tensão relativo na micro escala
η_n^μ	Tensor tensão relativo na micro escala no pseudo-instante t_n
$\eta_{n+1}^{\mu T}$	Tensor tensão relativo tentativa na micro escala
η_{n+1}^μ	Tensor tensão relativo na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
δ^{k+1}	Vetor solução do método de Newton-Raphson da iteração $k + 1$
A	Área da seção transversal do espécime
a	Constante de localização
b	Constante de saturação
D_c	Dano crítico

S	Denominador de dano
$S_{0.33}$	Denominador calibrado para condições axiais
$S_{0.0}$	Denominador calibrado para condições torcionais
y'	Derivada ordinária de y
x, y, z	Eixos do sistema de coordenadas cartesianos
e	Erro cometido nas previsões
<i>erro</i>	Erro cometido no processo de calibração
e_{NR}	Erro do método de Newton-Raphson
$R_{(\cdot)}$	Equação residual da variável (\cdot)
s	Expoente de dano
f	Função matemática real
R	Força termodinâmica associada ao encruamento isotrópico
I_c	Indicador crítico
I	Indicador de dano
I^μ	Indicador de dano na micro escala
I_{Vaz}	Indicador proposto por Vaz Júnior
I_n^μ	Indicador de dano na micro escala no pseudo-instante t_n
I_{n+1}^μ	Indicador de dano na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
k	Iteração do método de Newton-Raphson
G	Módulo de Cisalhamento
K	Módulo de Compressibilidade
H^k	Módulo de endurecimento cinemático
E	Módulo de elasticidade
N	Número de ciclos
N_f	Número de ciclos para iniciação de trinca
ψ	Parâmetro auxiliar
P_{SWT}	Parâmetro de fadiga de Smith-Watson-Topper

I_1	Primeiro invariante do tensor das tensões da macro escala
I_1^μ	Primeiro invariante do tensor das tensões da micro escala
t_n, t_{n+1}	Pseudo-Instante
J_2	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras da macro escala
J_2^μ	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras da micro escala
y	Solução analítica da equação diferencial de primeira ordem
J_2^μ	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras da micro escala
Y^μ	Taxa de liberação de energia de deformação
q	Tensão equivalente de von Mises na macro escala calculado em relação $\boldsymbol{\eta}$
q^μ	Tensão equivalente de von Mises na micro escala calculado em relação $\boldsymbol{\eta}^\mu$
\bar{q}_n^μ	Tensão Equivalente de von Mises na micro escala no pseudo-instante t_n
$\bar{q}_n^{\mu T}$	Tensão Equivalente de von Mises tentativa na micro escala
\bar{q}_{n+1}^μ	Tensão Equivalente de von Mises na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
J_3	Terceiro Invariante do tensor das tensões desviadoras
p	Tensão hidrostática
D^μ	Variável de Dano na micro escala
D_n^μ	Variável de Dano na micro escala no pseudo-instante t_n
$D_{n+1}^{\mu T}$	Variável de Dano tentativa na micro escala
D_{n+1}^μ	Variável de Dano tentativa na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
N_{NUM}	Vida a fadiga estimada
N_{EXP}	Vida a fadiga experimental
\mathbf{J}^k	Matriz Jacobiana avaliada na iteração k
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbb{I}^D	Tensor identidade desviadora de quarta ordem

\mathbb{D}	Tensor constitutivo elástico de Hooke
\mathbf{S}	Tensor das tensões desviadoras na macro escala
\mathbf{S}_n	Tensor das tensões desviadoras na macro escala no pseudo-instante t_n
$\mathbf{S}_{n_1}^T$	Tensor das tensões desviadoras tentativa na macro escala
\mathbf{S}_{n_1}	Tensor das tensões desviadoras na macro escala no pseudo-instante t_{n+1}
\mathbf{S}^μ	Tensor das tensões desviadoras na micro escala
\mathbf{S}_n^μ	Tensor das tensões desviadoras na micro escala no pseudo-instante t_n
$\mathbf{S}_{n_1}^T$	Tensor das tensões desviadoras tentativa na micro escala
$\mathbf{S}_{n_1}^\mu$	Tensor das tensões desviadoras na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
\mathbf{N}	Vetor de fluxo plástico na macro escala
\mathbf{N}^μ	Vetor de fluxo plástico na micro escala
\mathbf{N}_{n+1}^μ	Vetor de fluxo plástico na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}
:	Operação de dupla contração entre tensores
\otimes	Produto tensorial
$(*)_n$	Variáveis internas na macro escala no pseudo-instante t_n
$(*)_{n+1}$	Variáveis internas na macro escala no pseudo-instante t_{n+1}
$(*)_n^\mu$	Variáveis internas na micro escala no pseudo-instante t_n
$(*)_n^{\mu T}$	Variáveis internas tentativa na micro escala
$(*)_{n+1}^\mu$	Variáveis internas na micro escala no pseudo-instante t_{n+1}

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Contexto	1
1.2	Objetivos	4
1.3	Organização do Trabalho	4
	2 ASPECTOS TEÓRICOS	6
2.1	Introdução	6
2.2	Plasticidade	6
2.3	Modelo Elastoplástico Geral	7
2.3.1	Decomposição Aditiva da Deformação	7
2.3.2	O Potencial de Energia Livre e Lei Elástica	7
2.3.3	Função de Escoamento e Superfície de Escoamento	9
2.3.4	Regra de Fluxo Plástico e Lei de Encruamento	10
2.3.5	Leis de Fluxo e Encruamento Derivados de um Potencial de Fluxo	11
2.4	Critério de von Mises	12
2.5	Modelos de Plasticidade	14
2.5.1	Plasticidade Ideal	14
2.5.2	Endurecimento Isotrópico	15
2.5.3	Endurecimento Cinemático	17
2.6	Leis de Endurecimento Cinemático	18
2.6.1	Prager	18
2.6.2	Armstrong-Frederick	19
2.7	Modelo Elastoplástico em Duas Escalas Baseado no critério de von Mises	20
2.7.1	Lei de Localização	21
2.7.2	Decomposição Aditiva da Deformação	23
2.7.3	Lei Elástica	23
2.7.4	Função de Escoamento	24
2.7.5	Lei de Fluxo Plástico e o Vetor de Fluxo	25
2.7.6	Lei de Evolução das Demais Variáveis Internas	25

2.8	Indicadores de Dano e Fadiga	27
	3 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA IMPLÍCITA	30
3.1	Introdução	30
3.2	Modelo Elastoplástico de Duas Escalas Baseado no Critério de von Mises com Endurecimento Cinemático	33
3.3	Esquema de Integração Numérica do Indicador de Dano	42
	4 METODOLOGIA	44
4.1	Introdução	44
4.2	Materiais e Dados Experimentais	44
4.3	Aspectos Computacionais	49
4.4	Validação do Modelo de Duas Escalas	50
4.5	Calibração do Modelo	50
	5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	55
5.1	Introdução	55
5.2	Validação do Modelo Em Duas Escalas	55
5.3	Comportamento do Indicador de Dano	67
5.4	Previsões Para Fadiga	70
5.4.1	Resultados Obtidos Usando $S_{0.33}$	70
5.4.2	Resultados Obtidos Usando $S = S_{0.0}$	74
5.4.3	Resultados Obtidos Usando S Como uma Função do Estado de Tensão	78
	6 ARTIGO	83
	7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	108
7.1	Conclusões	108
7.2	Recomendações Para Trabalhos Futuros	109
	REFERÊNCIAS	110

1 Introdução

1.1 Contexto

Fadiga é uma das áreas clássicas da engenharia, mas que continua sendo objeto de pesquisas e desenvolvimento tecnológico. Tal observação se deve ao fato de qualquer estrutura ou máquina que se movimenta ou sofre vibrações estar sujeita a esse tipo de falha. A fadiga é caracterizada pela formação de trincas provocadas por cargas variáveis no tempo que podem levar a fratura do componente. Tal falha tem consequências catastróficas, podendo provocar perdas materiais e humanas. Exemplos clássicos de falhas por fadiga são as quedas durante voo dos aviões Comet em 1954, causada pela geração e propagação de trincas nas quinas das janelas do avião (WITHEY, 1997), e o descarrilhamento do trem de alta velocidade alemão ICE, em 1998, provocado pela fadiga em suas rodas (ESSLINGER et al., 2004).

Experimentos para investigar o fenômeno são caros e não triviais, e muitas vezes é desejado ensaiar o próprio componente sendo projetado, o que torna o processo experimental ainda mais difícil e inviável em muitos casos. Tendo em vista essas dificuldades, cada vez mais vem ganhando importância a abordagem numérica para previsão de vida em fadiga, e portanto, o desenvolvimento de modelos e estratégias melhores é essencial.

A fadiga pode ser dividida em dois grandes grupos: fadiga de baixo número de ciclos (LCF, do inglês *Low Cycle Fatigue*; e a fadiga de alto número de ciclos (HCF, do inglês *High Cycle Fatigue*). A LCF é caracterizada pela presença de deformações permanentes (plásticas) perceptíveis e níveis de tensão acima do limite de escoamento monotônico do material. Já a HCF é caracterizada por deformações elásticas e tensões contidas no domínio elástico. Testes de fadiga que visam estudar o regime de baixo ciclo são comumente conduzidos em controle de deformação, já os experimentos que investigam condições de alto ciclo são realizados sob controle de força.

Problemas de fadiga de alto número de ciclos são de especial interesse em engenharia, pois muitos componentes mecânicos são projetados para operarem por um longo período de tempo. Apesar da HCF apresentar tensões e deformações elásticas na escala macroscópica, o fenômeno da iniciação de trincas é governado pelo escorregamento de planos cristalinos. Esse fato de antemão parece ser contraditório, uma vez que não são

observadas deformações plásticas macroscópicas apreciáveis. Para explicar o fenômeno, muitos modelos foram desenvolvidos, cada qual com suas motivações físicas e abordagens. Dentre os modelos, pesquisadores propuseram que apesar das tensões dinâmicas serem macroscopicamente elásticas, plasticidade ocorre microscopicamente, gerando danos permanentes que irão levar a iniciação de trincas. Tal proposta se baseia no fato de que o fenômeno de fadiga mesmo em condições elásticas apresenta sinais de plasticidade.

Estudos sobre a fadiga vêm sendo conduzidos desde o século 19. Os primeiros estudos realizados sobre o assunto buscaram entender e modelar o fenômeno sobre condições uniaxiais. Wöhler (1860) foi um dos primeiros a pesquisar sobre o assunto envolvendo ruptura de eixos ferroviários e proporcionou a origem de curvas S-N, muito usadas atualmente em projetos. A partir desses estudos surgiram uma gama de resultados e métodos para carregamentos alternados e com tensão média, dentre eles destacam-se os trabalhos de Goodman (1918), Soderberg (1939) e Basquin (1910).

Contudo, quando ocorrem condições de carregamento multiaxiais, o fenômeno da fadiga torna-se mais complexo. Condições multiaxiais costumam ser divididos em dois conjuntos, os carregamentos proporcionais e os não-proporcionais. Tais carregamentos são encontrados de forma extensa na indústria, portanto muita atenção foi e vem sendo dada para modelar o problema. Os primeiros critérios de fadiga multiaxial foram propostos usando uma abordagem empírica e deram base para elaboração dos modelos de Gough (1949), Sines (1959), Findley (1958).

Os modelos e critérios da fadiga multiaxial mais utilizados costumam se basear em duas abordagens. A primeira parte da observação que a iniciação e propagação de trincas ocorrem em uma direção preferencial. Essa abordagem é a chamada de modelos de fadiga multiaxial de plano crítico, que consideram que as trincas irão nuclear em determinados planos materiais em que as combinações de tensões atingem valores máximos, como o plano de máxima tensão cisalhante alternada por exemplo. Dentre os modelos de plano crítico destacam-se os propostos por Brown e Miller (1973), McDiarmid (1991), Mataka (1977), Socie (1987), Fatemi e Socie (1988) e Smith et al. (1970). A segunda abordagem, chamada de modelo com base nos invariantes do tensor das tensões, se baseiam em grandezas medidas a partir da história do tensor das tensões e seus invariantes. Dentre esses modelos destacam-se os propostos por Crossland (1956), Deperrois (1991), Zouain et al. (2006), Dang (1971), Papadopoulos et al. (1997), Li et al. (2000), Mamiya e Araújo (2002), Mamiya et al. (2009).

Os trabalhos citados acima são muitas vezes denominados como abordagens clássica de fadiga. Por outro lado existem as metodologias não clássicas, sendo uma delas a denominada Mecânica do Dano Contínuo. Essa metodologia se baseia em uma variável interna incluída na modelagem de plasticidade, o dano. A fadiga seria relacionada ao um valor crítico a que esse variável pode assumir, caracterizando a iniciação de uma trinca. O primeiro a propor um modelo de mecânica do dano contínuo foi Kachanov (KACHANOV, 1958) sem dar um sentido físico para essa nova variável interna. O sentido físico a variável

de dano foi dado somente anos mais tarde por Rabotnov (RABOTNOV, 1963), que propôs que o dano seria a relação da seção transversal do material virgem e da seção transversal do mesmo degradado, com a presença de micro trincas. Após esses trabalhos pioneiros, outros modelos sobre a mecânica do dano foram propostos, dentre os quais podemos citar como os mais relevantes os de Lemaitre (LEMAITRE, 1985a; LEMAITRE, 1985b) e o de Gurson (GURSON, 1977), ambos com motivações físicas diferentes, que refletem nos modelos dos mesmos. O primeiro é conhecido por apresentar uma formulação baseada em princípios da termodinâmica, sendo um modelo assim termodinamicamente consistente. O segundo considera a variável de dano como sendo a fração volumétrica de vazios na matriz do material, além de inserir na formulação uma dependência das parcelas volumétricas dos tensores envolvidos. Por outro lado, o modelo proposto por Gurson não tem consistência termodinâmica.

A Mecânica do dano é uma abordagem bem estabelecida na previsão de fratura dúctil, no entanto o seu emprego no estudo da fadiga vem somente sendo utilizado recentemente. A principal motivação para tal está no fato de que uma metodologia baseada em modelos de dano não requer métodos de contagem de ciclos ou acúmulo de dano de fadiga, como por exemplo o procedimento proposto por Palmgren e Miner (PALMGREN, 1924; MINER et al., 1945), uma vez que tal método requer somente o histórico de carregamento. Portanto, a abordagem com dano vem sendo empregada para análises de fadiga em carregamentos de amplitude variável ou muito complexos. Li et al. (2001) empregaram uma modelagem baseada na teoria de dano contínuo proposto por Lemaitre para realizar análises de fadiga para a ponte Tsing Ma, uma das principais rotas para o aeroporto de Hong Kong. No estudo, foi demonstrado que os resultados obtidos pela teoria eram mais realistas do que as obtidas pelo regra de Palmgren-Miner. Shenoy et al. (2010) utilizaram uma metodologia baseada na Mecânica do Dano para realizar previsões de fadiga para juntas adesivas submetidas a um histórico de carregamento aleatório. O estudo mostrou que o procedimento proposto foi capaz de descrever de forma satisfatória os resultados experimentais. Perreux e Joseph (1997) conduziram estudos de fluência-fadiga em canos feitos de material compósito empregando um modelo baseado em dano. A abordagem proposta permitiu levar em conta dano não dependente do tempo em situações de fluência de longos períodos. Finalmente, Lopes e Malcher (2017) propuseram a utilização da mecânica do dano contínuo para previsão de vida a fadiga para condições multiaxiais não-proporcionais. O trabalho conduzido por eles demonstrou resultados excelentes em condições de baixo ciclo, especialmente para baixas amplitudes de deformação.

No contexto da utilização de um modelo de dano em duas escalas, é crucial o entendimento da transformação de escalas, realizadas pela chamada lei de localização. A lei busca obter a relação entre variáveis da escala macroscópica e microscópica. O trabalho pioneiro nessa área foi realizado por Eshelby (1957). Eshelby demonstrou uma solução analítica de mudança de escala utilizando técnicas de homogenização. Kröner (1961) partiu da solução encontrada por Eshelby e assumindo que a micro inclusão possuía um formato

elipsoidal/esférica e que campos de deformação da macro e micro escala interagem, ele foi capaz de mostrar um outra solução com formato conveniente. Alguns limites apresentados pela solução de Elsheby e Kroner, principalmente em situações com elevados níveis de macro plasticidade, motivaram outras formulações para lei de localização. Hill (1965) aplicou outras condições de contorno e obteve uma outra fórmula analítica para transição de escalas, que utiliza o módulo tangente e as taxas de evolução das variáveis internas. A formulação proposta por Hill encontra alguns problemas relacionados a propriedades matemáticas do módulo tangente, mas é muito empregada em problemas envolvendo compostos. Nesse contexto, Berveiller e Zaoui (1978) utilizaram a solução de Hill sob algumas condições especiais e empregando métodos de cálculo obtiveram uma nova versão da equação, mas sem os incômodos matemáticos que a versão anterior apresentava. No entanto, a nova versão da lei mostrou problemas em condições cíclicas, impossibilitando seu uso nessas situações. A fim de contornar esse empecilho, González e LLorca (2000) empregaram a lei de Hill e aplicando outras condições e operações matemáticas, eles obtiveram uma equação parecida com a produzida por Berveiller e Zaoui, mas que funcionava em situações cíclicas.

1.2 Objetivos

O presente trabalho visa propor uma metodologia alternativa de previsão de vida a fadiga com base em um modelo de Mecânica do Dano Contínuo de Duas Escalas, além de comparar o método com o bem estabelecido critério de fadiga multiaxial de Smith-Watson-Topper.

1.3 Organização do Trabalho

No capítulo 1 são realizadas a contextualização do tema do trabalho, a revisão do estado da arte, a definição dos objetivos e a organização do trabalho

No capítulo 2 são apresentados os aspectos teóricos do trabalho. São mostrados aspectos básicos sobre plasticidade cíclica, todos os fundamentos físicos necessários assim como a modelagem e equacionamento.

No capítulo 3 é descrito o modelo numérico associado para integração do modelo matemático descrito no capítulo 2. São mostrados as metodologias de integração numérica, as diferenças entre essas abordagens e qual é utilizada. Em seguida é mostrado como é feita a discretização das equações e o método da decomposição do operador. Dentro da decomposição do operador é mostrado em detalhes as etapas da mesma bem como o método de Newton-Raphson. Finalmente, a discretização do indicador de dano utilizado é descrito.

No capítulo 4 é apresentado a metodologia do trabalho, o material utilizado , os programas e softwares utilizados. Primeiramente, é apresentado o alumínio 7050 e suas características. Após essa mostrado o material estuda, são discutidos os aspectos computacionais seguido de qual foi a abordagem de validação do modelo proposto. Finalmente, é apresentado o processo de calibração do modelo em detalhes, com todas as considerações feitas.

No capítulo 5 são mostrados todos os resultados obtidos no trabalho , todos os laços de histerese gerados, assim como os gráficos vida-vida e a evolução do indicador de dano com o passar do tempo. Finalmente as previsões realizadas são analisadas e discutidas.

No capítulo 6 é apresentado um artigo que serviu como base para um trabalho visando a publicação em uma revista científica. Nesse artigo, são comparadas os métodos desacoplado e acoplado, além de comparar com o modelo de Smith-Watson-Topper.

No capítulo 7 é feito a conclusão do trabalho e são apresentados as perspectivas futuras.

2 Aspectos Teóricos

2.1 Introdução

A plasticidade pertence ao estudo da mecânica dos sólidos e busca descrever fenômenos em que os materiais sofrem deformações permanentes. Apesar de ser uma área estudada a tempos, ainda é muito investigada pela sua grande aplicabilidade em vários ramos da engenharia. Como a fadiga é um problema de plasticidade localizada, uma das formas de entender esse tipo de falha é estudar a plasticidade.

2.2 Plasticidade

Plasticidade é a área da mecânica dos sólidos que busca descrever o comportamento dos materiais quando estes sofrem deformações permanentes (deformação plástica) quando carregados. Mesmo quando descarregados, o material ainda apresenta níveis de deformação quando o mesmo plastifica. Em nível cristalino, a deformação plástica consiste no movimento de discordâncias na estrutura cristalina do material. Tal fenômeno é irreversível, por isso é observado macroscopicamente a presença de deformações permanentes. A iniciação de trincas é governada pela movimentação das discordâncias, portanto para estudar o fenômeno da fadiga, é necessário o entendimento da plasticidade.

A plasticidade pode ser observada em ensaios simples de tração uniaxial. Nesses ensaios pode-se observar alguns aspectos fenomenológicos que sempre ocorrem em situações elastoplásticas e que são essenciais para o equacionamento do matemático. Esses aspectos são

- A existência de um regime elástico, caracterizado pela reversibilidade do processo e pela não evolução das variáveis associadas a plasticidade. O regime elástico está delimitado pelo limite de escoamento do material.
- A evolução da deformação plástica só ocorre uma vez que o limite de escoamento é superado.
- É observado que o limite de escoamento também evolui acompanhado pela evolução da deformação plástica. Esse fenômeno é chamado de endurecimento ou encruamento.

mento . Tal fato dá indícios que o aumento no limite de escoamento está ligado a evolução da deformação plástica.

Em um ensaio de tração uniaxial é fácil definir o que é a região elástica e quando ocorre evolução das variáveis associadas a plasticidade. Mas para condições mais gerais de carregamento, é necessário a definição de uma função de escoamento para descrever o comportamento elastoplástico do material. A função de escoamento é capaz de dizer se um estado de tensão está contido no domínio elástico ou não. Além disso, é necessário conhecer como as leis de evolução das variáveis associadas a plasticidade e as relações constitutivas.

2.3 Modelo Elastoplástico Geral

A elaboração de um modelo elastoplástico para estados mais genéricos de tensão se baseia nas observações feitas para um ensaio de tensão uniaxial. Apesar de ser um teste simples, o mesmo apresenta as componentes básicas de um modelo geral. Nas subseções que se seguem, um modelo para condições mais gerais é analisado.

2.3.1 Decomposição Aditiva da Deformação

Em um ensaio uniaxial fica claro que a deformação axial pode ser decomposta em duas parcelas, uma elástica e uma plástica. Se tratando de um estado mais geral, é necessário o emprego de um tensor deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$. No contexto de pequenas deformações, a decomposição aditiva postula que $\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser decomposto em dois tensores:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (2.1)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor deformação elástica e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é o tensor deformação plástica.

2.3.2 O Potencial de Energia Livre e Lei Elástica

A formulação de modelos dissipativos em mecânica dos sólidos se baseia nas leis da termodinâmica como passo inicial da formulação. Isso deve-se ao fato que a modelagem deve obedecer certos princípios da termodinâmica e da mecânica dos meio contínuos, como por exemplo a desigualdade de Clausius-Duhem. O ponto inicial da teoria da plasticidade usada nesse trabalho parte da hipótese de que existe um potencial de energia livre ψ (ou também chamada de densidade de energia de deformação) da seguinte forma:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}), \quad (2.2)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é um grupo de variáveis internas associadas ao fenômeno de encruamento. Além disso, é assumido que ψ pode ser separada em duas parcelas de energia:

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}), \quad (2.3)$$

em que ψ^e seria a contribuição elástica e ψ^p seria a contribuição devido a plasticidade. Partindo da desigualdade de Clausius-Duhem, pode-se mostrar que.

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.5)$$

onde $\bar{\rho}$ é a massa específica do material no estado de referência ou lagrangiano, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ é a taxa de evolução do tensor deformação plástica, \mathbf{A} é a força termodinâmica de encruamento, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ é a taxa de evolução do grupo de variáveis internas e $*$ denota o produto apropriado entre \mathbf{A} e $\boldsymbol{\alpha}$. A partir da Eq.2.4 vem que $-\boldsymbol{\sigma}$ é a força associada a deformação plástica. A desigualdade da Eq.2.4 implica uma lei elástica da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad (2.6)$$

de tal forma que os mecanismos de dissipação sejam positivos:

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq 0, \quad (2.7)$$

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (2.8)$$

Υ^p é chamada de função de dissipação plástica. Um ponto importante a ser observado é a forma em que o tensor das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ é obtido a partir de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. Nessas condições, é dito que $\boldsymbol{\sigma}$ é a força termodinâmica associada a variável interna $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. Além disso, quando $\boldsymbol{\sigma}$ é gerado por uma equação do tipo da Eq.(2.6), o material é dito ser um sólido hiperelástico. Nesse contexto, o presente trabalho considera que o material analisado é um sólido hiperelástico. Para essas considerações, vem que ψ^e é escrito como:

$$\bar{\rho} \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.9)$$

em que \mathbb{D} é o tensor elástico de Hooke de quarta ordem. Assumindo também que o material é isotrópico e que possa ser modelado por meio de um modelo de Saint Venant-Kirchhoff, pode-se reescrever a Eq.2.9 :

$$\bar{\rho}\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e : \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \frac{1}{2}K(\varepsilon_v^e)^2, \quad (2.10)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do material, K é o módulo de compressibilidade, $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ é a parte desviadora de $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\varepsilon_v^e \equiv tr(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ é a deformação elástica volumétrica. Portanto, usando as Eq.2.6 e 2.9 chegamos na relação geral:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K\varepsilon_v^e\mathbf{I}, \quad (2.11)$$

2.3.3 Função de Escoamento e Superfície de Escoamento

Em um ensaio de tração ou em um caso uniaxial, o escoamento ocorre quando a tensão atinge o limite de escoamento do material. Para um estado mais geral de tensão pode-se expressar o escoamento de forma semelhante por meio de uma função escalar ϕ . A função ϕ seria negativa para um estado elástico e seria nula na iminência do escoamento. Nesse contexto, pode-se definir então que o escoamento só ocorre se:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0, \quad (2.12)$$

Com essa definição, defini-se o domínio elástico $\bar{\mathcal{E}}$ como sendo um conjunto fechado de tensores de tensão tal que:

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{\sigma} | \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0\}, \quad (2.13)$$

Qualquer estado de tensão que esteja no interior de $\bar{\mathcal{E}}$ ou no seu bordo $\partial\bar{\mathcal{E}}$ é também dito ser plasticamente admissível. O conjunto de tensores em que o escoamento pode ocorrer estão na fronteira $\partial\mathcal{E}$ do domínio elástico, ou seja, $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$. Esse conjunto define uma superfície no espaço das tensões. Essa superfície é chamada de superfície de escoamento, definida formalmente por:

$$\mathcal{Y} = \{\boldsymbol{\sigma} | \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0\}, \quad (2.14)$$

A forma da superfície depende na forma escolhida para a função de escoamento. No presente trabalho, o critério adotado é baseado na função de von Mises.

2.3.4 Regra de Fluxo Plástico e Lei de Encruamento

A formulação do modelo constitutivo se torna completa com a definição das leis de evolução das variáveis internas (NETO et al., 2011). No caso particular estudado, as variáveis de interesse são $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e $\boldsymbol{\alpha}$. São postulados as seguintes leis de fluxo plástico e encruamento:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \quad (2.18)$$

onde o tensor \mathbf{N} é chamado de vetor de fluxo, \mathbf{H} é o módulo de endurecimento generalizado que define a evolução das variáveis de encruamento e $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico. As equações 2.15 e 2.16 são complementadas pela condição de carga e descarga:

$$\phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \phi \dot{\gamma} = 0, \quad (2.19)$$

A equação 2.19 define as condições para que as variáveis internas evoluam. Mais do que isso, a Eq. 2.19 mostra que as variáveis internas associadas ao fenômeno de plasticidade não podem evoluir em condições elásticas. A condição de carga e descarga é obtida a partir da solução de um problema de otimização que postula que dentro todos os estados de tensão plasticamente admissíveis, o estado real é aquele que maximiza Υ^p sob a condição $\phi \leq 0$. Portanto, a Eq.2.19 também é conhecida como as condições ótimas de Kunh-Tucker. A Tabela 2.19 resume o modelo elastoplástico geral:

Tabela 1 – Modelo elastoplástico geral

1. Decomposição aditiva da deformação
$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
2. Função de energia livre
$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{A})$
3. Equações constitutivas para $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{A}
$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \mathbf{A} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$
4. Função de Escoamento
$\phi = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$
5. Leis de fluxo plástico e de encruamento
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N}$
$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}$
6. Regra de carga e descarga
$\phi \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \phi \dot{\gamma} = 0$

2.3.5 Leis de Fluxo e Encruamento Derivados de um Potencial de Fluxo

Na modelagem de problemas multidimensionais de plasticidade, é comum a definição de um potencial de fluxo, do qual são derivadas as leis de fluxo e encruamento. Para tal, assume-se que exista um potencial de fluxo plástico Ψ não negativo tal que :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}), \Psi(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (2.20)$$

O potencial de fluxo e o vetor de fluxo se relacionam da seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.21)$$

Além disso, se a lei de encruamento é obtida a partir de Ψ , então vem que:

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.22)$$

Quando Ψ é tomado como sendo igual a ϕ , é dito que o modelo é de plasticidade associativa. Tal fato possui consequências importantes, pois partindo da Eq. 2.21 nota-se que \mathbf{N} é normal a superfície de escoamento. Portanto, uma metodologia associativa implica que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ é normal superfície definida por $\phi = 0$. Portanto, quando um modelo é dito ser associativo, tal afirmação diz respeito somente a evolução do tensor deformação plástica. No presente trabalho, somente modelos de plasticidade associativa são usados.

2.4 Critério de von Mises

O tensor das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser dividido em duas componentes. Uma hidrostática simétrica associada somente a mudanças volumétricas do elemento de tensão (de tamanho), e outra desviadora \mathbf{S} , associada a distorções do elemento de tensão. Matematicamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \mathbf{S}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}, \quad (2.24)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e $tr(\boldsymbol{\sigma})$ é o traço de $\boldsymbol{\sigma}$, também chamado de primeiro invariante do tensor das tensões I_1 . A equação 2.24 pode ser escrita de outra forma mais elegante notando que $tr(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ e $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{I} : \boldsymbol{\sigma}$. Portanto:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.25)$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem e \mathbb{I}^D seria um operador de projeção que aplicado a tensores de segunda ordem, como $\boldsymbol{\sigma}$, extrai a componentes desviadora da mesma. O critério de von Mises parte de uma observação experimental para materiais dúcteis isotrópicos que o limite de escoamento não depende da parcela hidrostática de $\boldsymbol{\sigma}$. Portanto somente \mathbf{S} seria a responsável pelo escoamento do material.

O critério de von Mises, também chamado de critério da máxima energia de distorção, postula que a o escoamento do material ocorre quando a energia de distorção elástica atinge seu máximo valor. A energia de distorção está associada ao segundo invariante de \mathbf{S} , denominado de J_2 . O segundo invariante é pode ser escrito como:

$$J_2(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}, \quad (2.26)$$

Como é desejado alguma forma de comparar J_2 com o limite de escoamento, von Mises então propôs uma tensão equivalente σ_v que se relaciona com J_2 por (MISES, 1913):

$$\sigma_v = \sqrt{3J_2(\mathbf{S})}, \quad (2.27)$$

É possível mostrar que em relação as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 , a Eq. 2.27 pode ser escrita como:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \quad (2.28)$$

Finalmente, a função de escoamento ϕ é definida como sendo:

$$\phi = \sigma_v - \sigma_Y(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.29)$$

onde $\sigma_Y(\boldsymbol{\alpha})$ é o limite de escoamento definido como uma função de $\boldsymbol{\alpha}$. A equação 2.29 quando representada no plano π (espaço das tensões desviadoras) determina um circunferência nesse espaço. A Fig.1 ilustra a superfície de escoamento no referido plano.

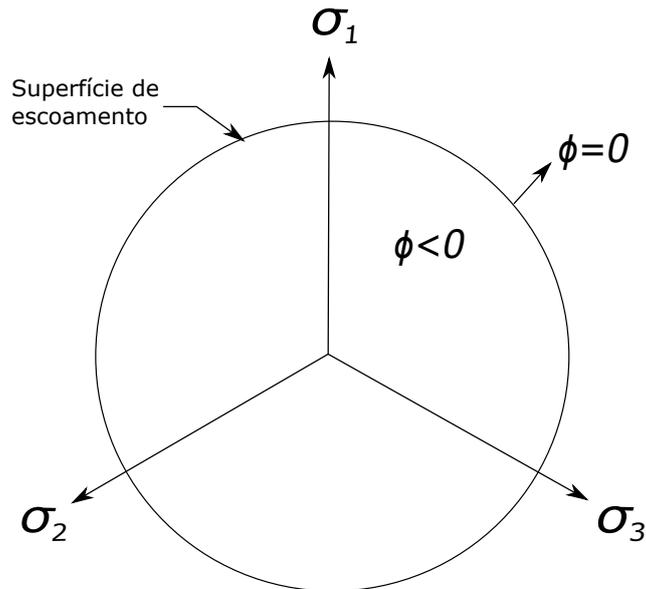


Figura 1 – Função de escoamento representada no plano π . Os eixos σ_1, σ_2 e σ_3 não pertencem ao plano.

Analisando a Fig. 1 fica claro o conjunto de estado de tensões plasticamente admissíveis, ou seja $\bar{\mathcal{E}}$, seguindo as definições dadas para a função de escoamento. A circunferência estende-se ao longo de todo espaço das tensões principais, gerando um cilindro cujo eixo coincide com o eixo da tensão hidrostática, em outras palavras $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, como ilustrado na Fig 2.

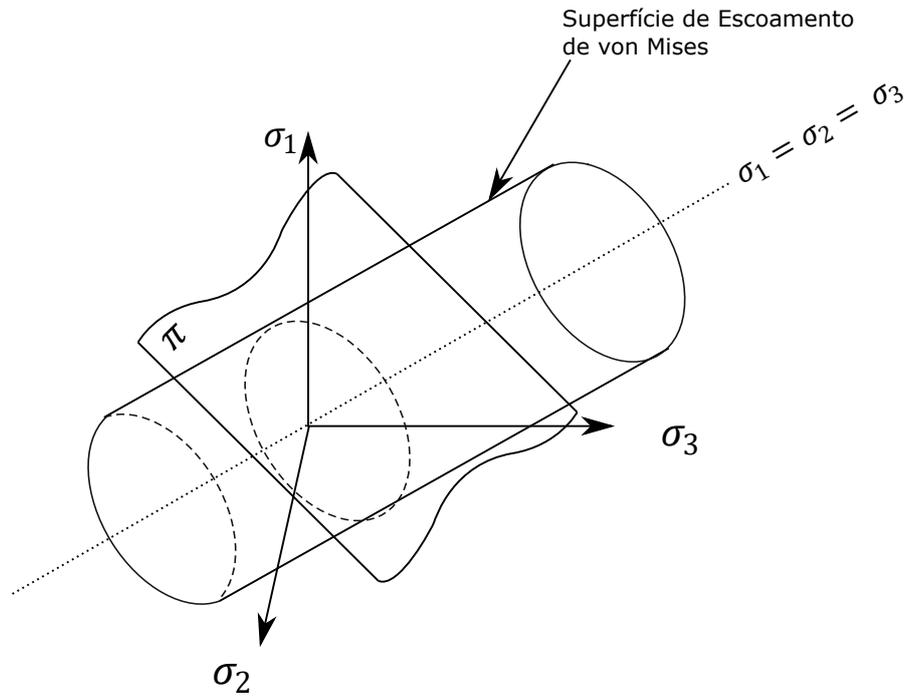


Figura 2 – Superfície de escoamento de von Mises. Plano π também é representado na imagem.

2.5 Modelos de Plasticidade

Um material quando carregado acima do seu limite de escoamento σ_Y , pode apresentar um fenômeno chamado de encruamento (endurecimento), que é basicamente a dependência de σ_Y com o histórico da deformação plástica ϵ^p e de α . Com esse fato em mente, torna-se necessário descrever a dependência entre σ_Y , ϵ^p e α . Os modelos de encruamento são plasticidade ideal, endurecimento isotrópico e endurecimento cinemático. A escolha do modelo de encruamento afeta diretamente o comportamento de ϕ e σ_Y com a presença de fluxo plástico. A seguir cada modelo de plasticidade é descrito assim como suas respectivas consequências. Para todos os modelos o critério de escoamento é tomado como sendo de von Mises.

2.5.1 Plasticidade Ideal

A plasticidade ideal (material perfeitamente plástico) é caracterizada pela ausência de encruamento quando a deformação plástica evolui. Em outras palavras, uma vez que o limite de escoamento inicial σ_{Y0} é atingido, o mesmo permanece inalterado para qualquer nível de deformação plástica e evolução de ϵ^p e α . Sob o ponto de vista da superfície de escoamento, a mesma permanece inalterada no plano π , tanto formato e posição. A figura 3 ilustra o comportamento da superfície de escoamento sob condições de plasticidade ideal.

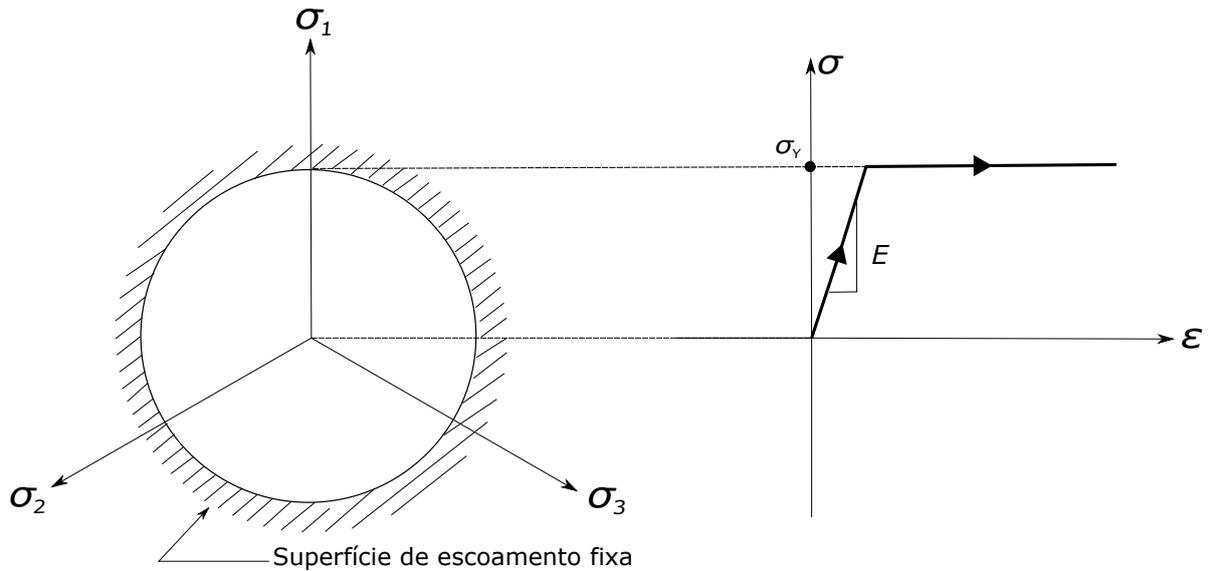


Figura 3 – Plasticidade ideal. Representação em um ensaio uniaxial e comportamento no plano π

Do ponto de vista prático, muitos poucos materiais exibem o comportamento perfeitamente plástico. No entanto o modelo são usados para análise de estabilidade de estruturas e solos e são muito empregados na determinação de fatores de segurança de engenharia (NETO et al., 2011)

2.5.2 Endurecimento Isotrópico

O modelo de endurecimento isotrópico é caracterizado pela mudança na superfície de escoamento tal que quando a plastificação ocorre, a superfície inicial sofre uma expansão isotrópica sem qualquer translação. Considerando o critério de escoamento de von Mises, o modelo isotrópico consiste em um aumento do raio da circunferência no plano π , ou o raio do cilindro no espaço das tensões principais. A figura 4 ilustra o aspecto da curva tensão-deformação e da superfície de escoamento no plano π em endurecimento isotrópico:

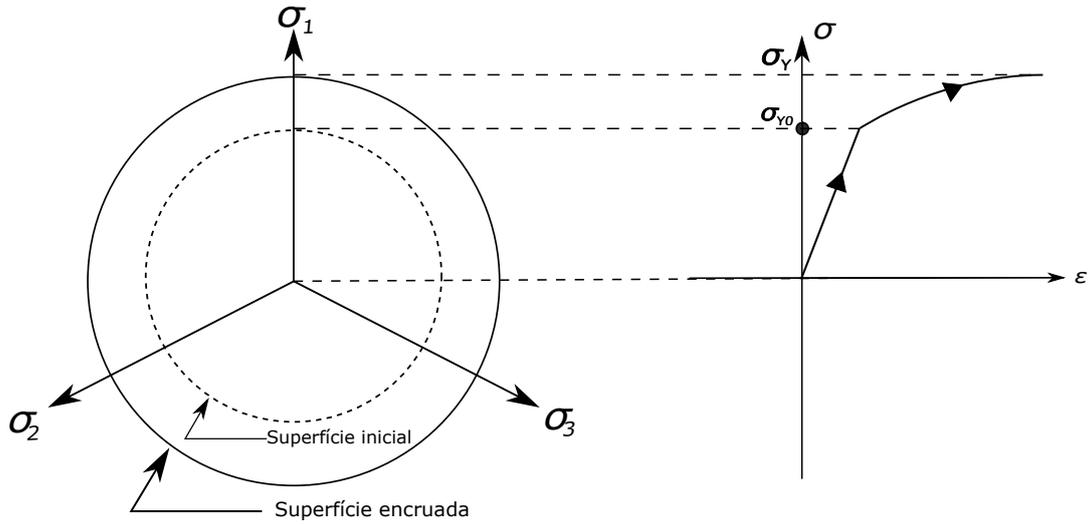


Figura 4 – Endurecimento Isotrópico. Representação em um ensaio uniaxial e comportamento no plano π

Para descrever completamente o fenômeno é necessário escolher o grupo de variáveis α . Como a mudança observada na superfície de von Mises é no raio (uma grandeza escalar), a escolha de uma variável interna escalar é usualmente feita. A escolha pode ser a deformação plástica equivalente $\bar{\epsilon}^p$ ou o trabalho de endurecimento. Para essa seção será exemplificado usado $\bar{\epsilon}^p$, mas as duas escolhas são análogas. $\bar{\epsilon}^p$ é definida como:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} dt \quad (2.30)$$

É possível mostrar também, por meio da equação de Prandtl-Reuss que:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \quad (2.31)$$

Portanto, σ_Y é descrita como uma função de $\bar{\epsilon}^p$:

$$\sigma_Y = \sigma_Y(\bar{\epsilon}^p) \quad (2.32)$$

A forma da Eq. 2.32 depende do equacionamento proposto, podendo ser linear ou não-linear. Portanto, poderia-se expressar uma equação de encruamento isotrópico geral da seguinte forma:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + \mathbf{R}(\bar{\epsilon}^p) \quad (2.33)$$

onde \mathbf{R} seria uma função matemática linear ou não linear. \mathbf{R} pode ser interpretado também como a força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico.

2.5.3 Endurecimento Cinemático

O endurecimento cinemático surgiu no estudo da plasticidade para tentar modelar um fenômeno observado experimentalmente chamado de efeito Bauschinger. O efeito consiste na constatação de que comumente muitos materiais quando carregados e encruados em uma certa direção, os mesmos possuem uma menor resistência ao escoamento na direção contrária (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994). Portanto, o endurecimento cinemático busca modelar materiais que apresentam esse comportamento. Um típico resultado de ensaio uniaxial em condições cinemáticas é mostrado na Fig. 5.

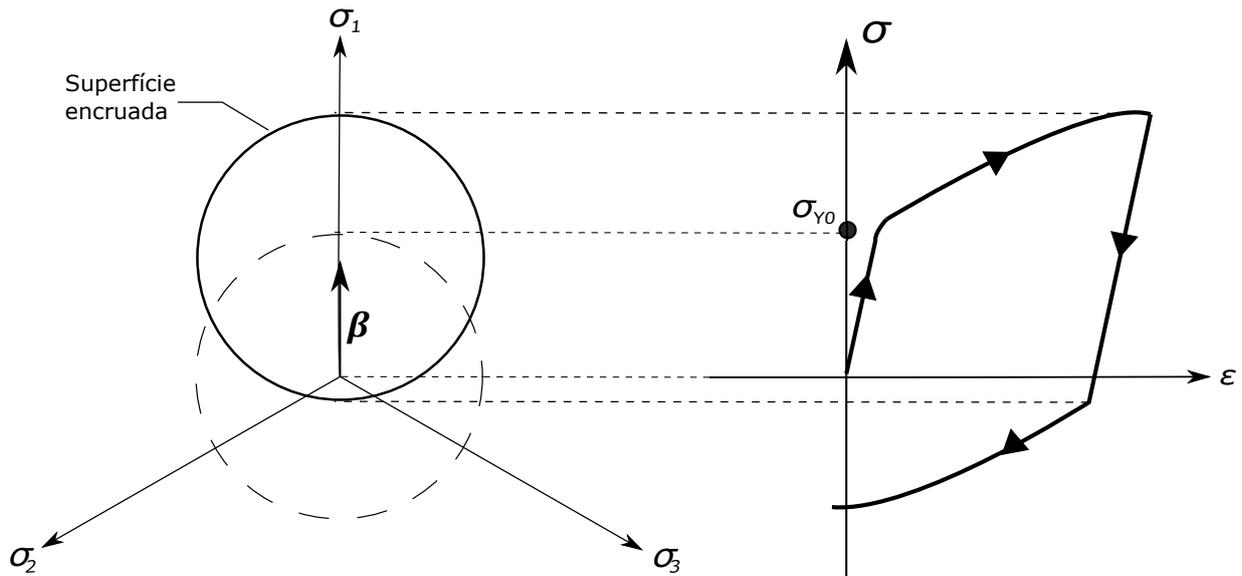


Figura 5 – Endurecimento cinemático. Resultado de um ensaio uniaxial e comportamento da superfície de escoamento no plano π

A partir da Fig. 5 fica claro que no carregamento invertido, o material escoava em compressão com um valor de tensão inferior ao de escoamento em tração. Além disso, observa-se que a superfície de escoamento sofreu uma translação no plano π , mas não sofreu nenhuma alteração de forma ou tamanho. Tal fato consiste na definição de encruamento cinemático, como sendo uma translação da superfície de escoamento sem alterações de tamanho. A função de escoamento para esse tipo de encruamento é definida como:

$$\phi = \sqrt{3J_2(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta})} - \sigma_{Y0} \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.35)$$

onde $\boldsymbol{\beta}$ é o tensor de endurecimento cinemático (chamado de *backstress* em inglês) e $\boldsymbol{\eta}$ é o tensor tensão relativo. Portanto, quem passa a ser responsável pela admissibilidade de certo estado de tensão é $\boldsymbol{\eta}$. Ao analisar a Eq. 2.35 nota-se que $\boldsymbol{\eta}$ seria a distância de um ponto até o centro instantâneo da superfície de escoamento. Além disso, o centro

instantâneo é localizado por β em relação a origem do plano π (eixo hidrostático), sendo análogo ao vetor posição no estudo da mecânica cinemática. Finalmente, é importante notar que η tem natureza desviadora.

A descrição consistente do modelo de encruamento cinemático depende do conhecimento da lei de evolução de β . Existem muitas leis sugeridas, dentre elas ganham destaque as de Prager (1955), Armstrong e Frederick (1966) e Chaboche (1986). No presente trabalho somente o encruamento cinemático é considerado, portanto na próxima seção será detalhado cada as leis de evolução de Prager e Armstrong-Frederick.

2.6 Leis de Endurecimento Cinemático

2.6.1 Prager

A lei de endurecimento de Prager foi uma das primeiras a serem propostas. Ela possui a seguinte forma em termos de taxa de evolução de β , ou seja $\dot{\beta}$:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\epsilon}^p \quad (2.36)$$

Onde H^k é o módulo de endurecimento cinemático. Nota-se a partir da Eq. 2.36 que a lei possui um caráter linear. Esse caráter é uma das limitações da Eq. 2.36, pois ela prevê que a tensão cinemática cresce linearmente de forma indefinida com $\dot{\epsilon}^p$, fato que não é observado experimentalmente. A lei de Prager consegue capturar o efeito de Bauschinger para carregamentos simples e modela razoavelmente o encruamento para pequenos níveis de plastificação. A Figura 6 mostra um típico laço de histerese com lei de evolução de Prager.

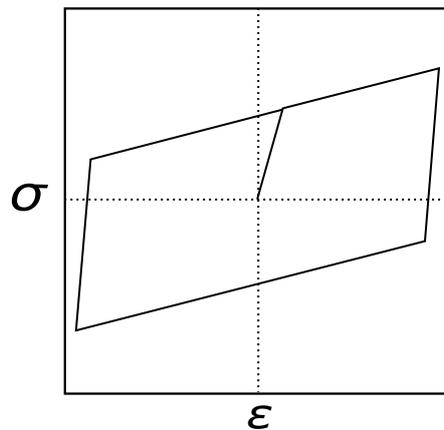


Figura 6 – Comportamento tensão-deformação com lei de evolução de Prager.

2.6.2 Armstrong-Frederick

A lei de evolução de Armstrong-Frederick foi proposta de forma a inserir uma não linearidade na para solucionar as inconsistências da lei de Prager. A nova equação proposta consiste na Eq.2.36 com adição de um termo não linear:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H^k \dot{\varepsilon}^p - \dot{\varepsilon}^p b \beta \quad (2.37)$$

Onde b seria uma constante do material. O termo $-\dot{\varepsilon}^p b \beta$, além da introdução de uma não-linearidade, gera um efeito de saturação na lei cinemática. Por isso a constante b é chamada também de constante de saturação. Usando o critério de von Mises, o termo de saturação corresponde ao máximo valor que a norma de β pode atingir. Quando esse máximo é atingido, o material passa a se comportar de maneira perfeitamente plástica. É importante notar que a lei se resume a de Prager quando se toma $b = 0$.

A lei de Armstrong-Frederick consegue modelar os resultados experimentais de forma melhor que Prager, umas vez que grande parte dos materiais dúcteis apresentam comportamentos não-linear. Além desse fato, o modelo proposto é capaz de capturar ciclos estabilizados, o que não era possível com a lei linear.

Apesar dos bons resultados mostrados, o modelo de Armstrong-Frederick possui algumas limitações sob certas condições de carregamento. O modelo superestima os resultados numéricos dos efeitos do chamado colapso incremental ou no inglês *ratchetting*. Esse fenômeno ocorre quando a em testes cíclicos que ao invés de serem controlados por deformação são controlados por força. Nessas condições, observa-se um acúmulo de deformação com a evolução do tempo evidenciado pela traslação do laço de histerese ao longo do eixo das abcissas. Existem ainda outros modelos capazes de capturar efeitos que os outros dois modelos não são capazes de modelar, como por exemplo Chaboche (CHABOCHE, 1989). A Figura 7 ilustra um laço de histerese com lei de evolução de Armstrong-Frederick:

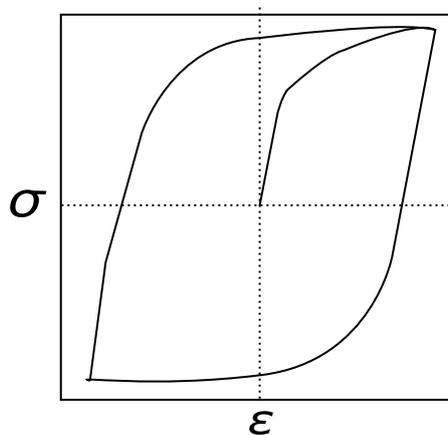


Figura 7 – Comportamento tensão-deformação com lei de evolução de Armstrong-Frederick.

A Figura 8 a seguir ilustra as diferenças gráficas entre os dois modelos em termos de $\dot{\beta}$ e $\dot{\epsilon}^p$:

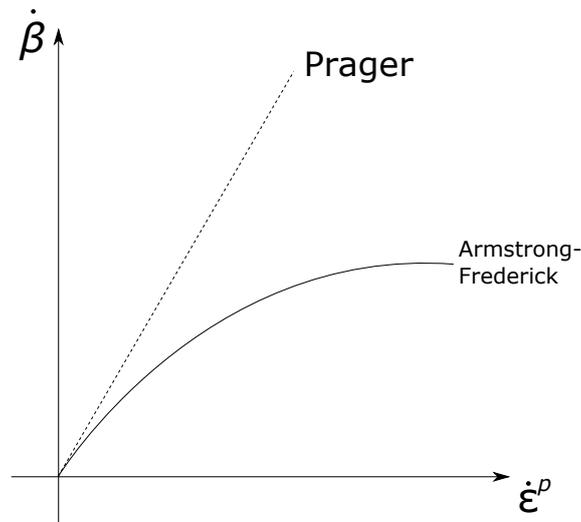


Figura 8 – Comparação entre as leis de evolução

2.7 Modelo Elastoplástico em Duas Escalas Baseado no critério de von Mises

Nessa seção do trabalho será descrito um modelo elastoplástico de duas escalas baseada na função de escoamento de von Mises. A descrição será feita com base na lei de evolução de Armstrong-Frederick, mas a análise é igual para o modelo de Prager, bastando tomar $b = 0$. Além disso o modelo é independente do tempo (não depende das taxas de carregamento), ou seja efeitos viscoplásticos serão desconsiderados. Finalmente, o modelo é de plasticidade associativa, ou seja, o potencial de fluxo é tomado como sendo igual a ϕ , e conseqüentemente o vetor de fluxo \mathbf{N} é normal a superfície de escoamento. A Figura 9 ilustra a consequência provocada pela hipótese de plasticidade associativa.

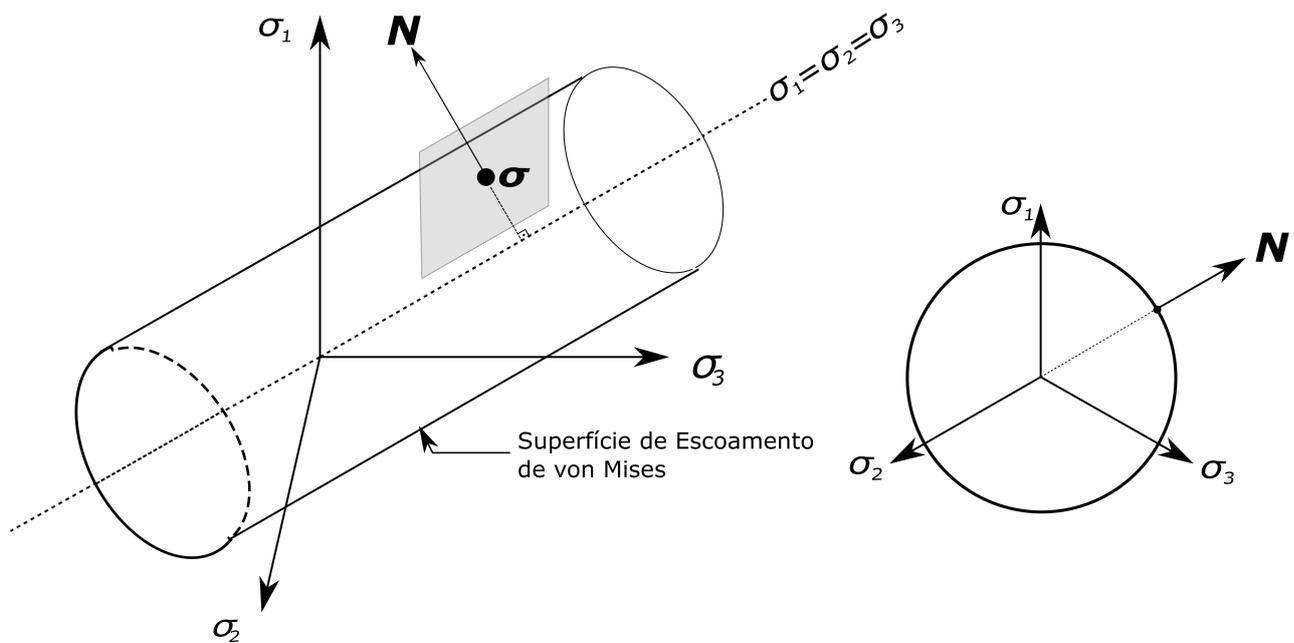


Figura 9 – Comportamento de \mathbf{N} sob plasticidade associativa.

É importante notar que quando um modelo é dito ser associativo, isso se refere a lei de fluxo do mesmo, mas não as outras evoluções. A Eq.2.37 que descreve $\dot{\beta}$ por exemplo é um lei não associativa. A seguir o modelo descrito na Tabela 1 será particularizado para um contexto de duas escalas de baseando do critério de von Mises.

A motivação física do modelo em duas escalas está no fato de que o fenômeno de fadiga mostra indícios de plasticidade ainda que somente condições elásticas sejam observadas. Portanto, em algum nível do material, plasticidade está ocorrendo. Nesse contexto, é proposto que existe uma micro inclusão inserida em uma matriz elástica. A inclusão possui propriedades materiais inferiores as do material que o cerca. Portanto, essa micro escala tem a presença de deformações plásticas, permitindo a iniciação de uma trinca caracterizando uma falha por fadiga.

Um dos aspectos cruciais em um modelagem de duas escalas é a lei de localização do modelo. Tal lei consiste basicamente em uma transformação de escalas ou, em outras palavras, como as variáveis da macro e da micros escala se relacionam. Nesse contexto, a próxima subseção é dedicada para uma descrição das leis de localização encontrados na literatura.

2.7.1 Lei de Localização

O trabalho pioneiro de Eshelby (ESHELBY, 1957) foi responsável por apresentar a primeira lei de localização. Eshelby foi capaz de demonstrar uma solução analítica para o problema de mudança de escalas conduzindo técnicas de homogenização, conhecendo o campo de tensão e deformação distante da inclusão (comumente também chamada de a condição de contorno no "infinito") e supondo que não existiam interações entre

diferentes inclusões. Anos depois, Kröner (KRÖNER, 1961) obteve uma nova versão mais conveniente para a lei partindo da solução de Eshelby e aplicando as hipóteses de que as componentes plásticas de deformação das duas escalas interagem e que a inclusão possuía um formato esférico/elipsoidal. A equação obtida é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + a(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (2.38)$$

$$a = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}, \quad (2.39)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ é o tensor deformação total na micro escala, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor deformação total na macro escala, a é uma constante que depende somente do coeficiente de Poisson ν , $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}$ é a parcela plástica de $\boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é a parte plástica de $\boldsymbol{\varepsilon}$. A Eq.2.38 possui problemas quando os níveis de macro plasticidade são elevados, por exemplo em condições de fadiga de baixo número de ciclos.

A limitação da solução de Eshelby e Kröner motivaram outros estudos na área que propuseram outras transformações de escalas. Hill (HILL, 1965) considerou outras condições de contorno e aplicando técnicas de homogenização ele foi capaz de obter uma outra forma analítica. A nova equação proposta por Hill considerava o módulo tangente na sua formulação além da taxa de evolução das macro e micro variáveis internas. A abordagem de Hill é muito empregada no estudo de materiais compósitos e de materiais policristalinos. No entanto, pelo fato de do módulo tangente não ser isotrópico, diversos autores ao usarem a formulação encontraram respostas muito rígidas (ou no inglês "*stiff reponses*") (GONZÁLEZ; LLORCA, 2000; CHABOCHE et al., 2005). A fim de corrigir esse problema, Berveiller e Zaoui (BERVEILLER; ZAOUI, 1978) utilizaram a formulação de Hill sob condições especiais e integraram as relações constitutivas, obtendo uma nova versão para a lei de localização. No entanto, a nova equação mostrou não ser apropriada para condições cíclicas, pois sob essa condições a formulação apresentou respostas descontínuas. Gonzales e Llorca (GONZÁLEZ; LLORCA, 2000) partiram também da equação de Hill e utilizaram uma versão isotropizada do módulo tangente tomando a projeção da lei de Hill na superfície de escoamento. A metodologia proposta por Gonzales e Llorca é similar a obtida por Berveiller e Zaoui, com a diferença que a primeira não apresenta descontinuidades em condições cíclicas.

Para os objetivos desse trabalho, a formulação utilizada para a mudança de escalas é a proposta por Eshelby e Kröner, por causa da sua simplicidade e pelo fato de que as condições estudadas são de alto número de ciclos, situação onde a Eq.2.38 não apresenta problemas, uma vez que não há macro plasticidade. Uma vez estabelecido a relação das macro e micro variáveis, o modelo elastoplástico em duas escalas pode ser desenvolvido.

2.7.2 Decomposição Aditiva da Deformação

A decomposição aditiva postula que o tensor deformação total pode ser dividido em uma soma de duas parcelas, uma elástica e outra plástica. Essa separação é somente válida sob condições de pequenas deformações. Assumindo tais condições para ambas escalas, pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (2.40)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor deformação elástica da macro escala. Em situações de alto número de ciclos (HCF) ou em testes controlados de força, a presença de macro plasticidade é inexistente ou negligenciável, permitindo escrever a Eq.2.40: da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.41)$$

A Equação 2.41 implica que Eq.2.38 pode ser rescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + a\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}, \quad (2.42)$$

De forma análoga, para a micro escala a decomposição é definida como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}, \quad (2.43)$$

2.7.3 Lei Elástica

A lei elástica é uma relação constitutiva que relaciona o tensor deformação elástica com o tensor das tensões de Cauchy. Se baseando na equação dada pela Eq.2.11, ambas escalas possuem o seguinte formato:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}, \quad (2.45)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões de Cauchy da macro escala e $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ é tensor das tensões avaliado na micro escala. As Eq.2.44 e 2.45 mostram a primeira hipótese que é feita na

elaboração do modelo. É assumido que ambas escalas possuem as mesmas propriedades materiais exceto o limite de escoamento inicial em condições cíclicas.

Uma vez definida as leis elásticas, a decomposição de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ em uma parcela desviadora e outra hidrostática pode ser conduzida. Em particular para a componente desviadora tem-se:

$$\mathbf{S} = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{S}^\mu = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}, \quad (2.47)$$

onde \mathbf{S} é o tensor das tensões desviadoras avaliado na macro escala e \mathbf{S}^μ é o mesmo tensor só que avaliado na micro escala.

2.7.4 Função de Escoamento

Uma função de escoamento deve ser definida para a micro escala, umas vez que em situações de fadiga de alto número de ciclos somente ela sofre plasticidade. Utilizando o critério de falha proposto por von Mises com endurecimento cinemático e se baseando na Eq.2.27 define-se função de escoamento na micro escala ϕ^μ como:

$$\phi^\mu = \bar{q}^\mu(\boldsymbol{\eta}^\mu) - \sigma_{Y0}^\mu, \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\eta}^\mu = \mathbf{S}^\mu - \boldsymbol{\beta}^\mu, \quad (2.49)$$

$$\bar{q}^\mu(\boldsymbol{\eta}^\mu) = \sqrt{3J_2^\mu(\boldsymbol{\eta}^\mu)}, \quad (2.50)$$

$$J_2^\mu(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^\mu : \boldsymbol{\eta}^\mu \quad (2.51)$$

onde \bar{q}^μ é a tensão equivalente de von Mises, $\boldsymbol{\eta}^\mu$ é o tensor relativo conforme descrito pela Eq. 2.35 e $\boldsymbol{\beta}^\mu$ é o tensor das tensões cinemáticas, todos estes avaliados na micro escala. Como descrito na seção sobre endurecimento cinemático, a admissibilidade do estado de tensão deve ser feito em relação a $\boldsymbol{\eta}^\mu$, por isso o segundo invariante J_2^μ usado é o de $\boldsymbol{\eta}^\mu$. A Eq.2.48 requer o conhecimento de σ_{Y0}^μ . Como dito anteriormente, a única propriedade material que se difere entre as escalas é o limite de escoamento inicial. No presente trabalho, é assumido que σ_{Y0}^μ seja igual ao limite de fadiga do material σ_f^∞ .

2.7.5 Lei de Fluxo Plástico e o Vetor de Fluxo

Como dito anteriormente, o modelo é assumido como sendo associativo, o que implica que o fluxo plástico na micro escala é normal a superfície de escoamento. Portanto, sob essa condição, a Eq.2.21 pode ser escrito como:

$$\mathbf{N}^\mu = \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\mu} \quad (2.52)$$

onde \mathbf{N}^μ é o vetor de fluxo na micro escala. Realizando a diferenciação da Eq.2.52, obtém-se:

$$\mathbf{N}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|} \quad (2.53)$$

A lei de fluxo pode portanto ser representada com base na 2.15 como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma}^\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|} \quad (2.54)$$

em que $\dot{\gamma}^\mu$ é o multiplicador plástico, que para as presentes condições pode ser definido pela Eq.2.31

2.7.6 Lei de Evolução das Demais Variáveis Internas

A completa modelagem matemática é atingida pela descrição das leis de evolução restantes, em particular $\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu$. A forma para $\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu$ é a proposta por Armstrong-Frederick dada pela Eq.2.37, bastando adicionar o super escrito μ nas variáveis de associadas a plasticidade. As propriedades cinemáticas da micro escala são consideradas como sendo as mesmas da macro, que podem ser obtidas pela calibração da versão integrada da Eq.2.37 em relação a dados tensão-deformação cíclicos.

A regra de carga descarga impõe restrições matemáticas que tornam a modelagem matemática fisicamente consistente, uma vez que não pode haver plastificação em regime elástico e a resposta do material não pode ser elástico se existe fluxo plástico. Uma condição que não está na Tabela 2 mas que possui uma certa importância é a chamada condição de persistência. Basicamente, ela implica por meio de restrições matemáticas que na presença de fluxo plástico não nulo, estado de tensão tem que permanecer sob a superfície de escoamento por toda evolução das variáveis. A Tabela 2 sumariza o modelo elastoplástico em duas escalas, enquanto a Fig.10 ilustra de forma esquemática as ideias centrais do modelo:

Tabela 2 – Modelo Elastoplástico de Duas Escalas baseado no critério de von Mises von Mises com Endurecimento Cinemático

1. Decomposição Aditiva da Deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p},$ $\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon}^e$
2. Lei de Localização
$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + a\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}$
3. Lei de Hooke
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^e,$ $\boldsymbol{\sigma}^\mu = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}$
4. Função de Escoamento
$\phi^\mu = \bar{q}^\mu - \sigma_f^\mu, \bar{q}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}^\mu : \boldsymbol{\eta}^\mu}$
5. Lei de Fluxo Plástico
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \dot{\gamma}^\mu \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu}{ \boldsymbol{\eta}^\mu }}, \dot{\bar{q}}^\mu = \dot{\gamma}^\mu$
6. Lei de Evolução de $\boldsymbol{\beta}^\mu$
$\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} - \dot{\bar{q}}^\mu b \boldsymbol{\beta}^\mu$
7. Regra de carga e descarga
$\phi^\mu \leq 0, \dot{\gamma}^\mu \geq 0, \phi^\mu \dot{\gamma}^\mu = 0$

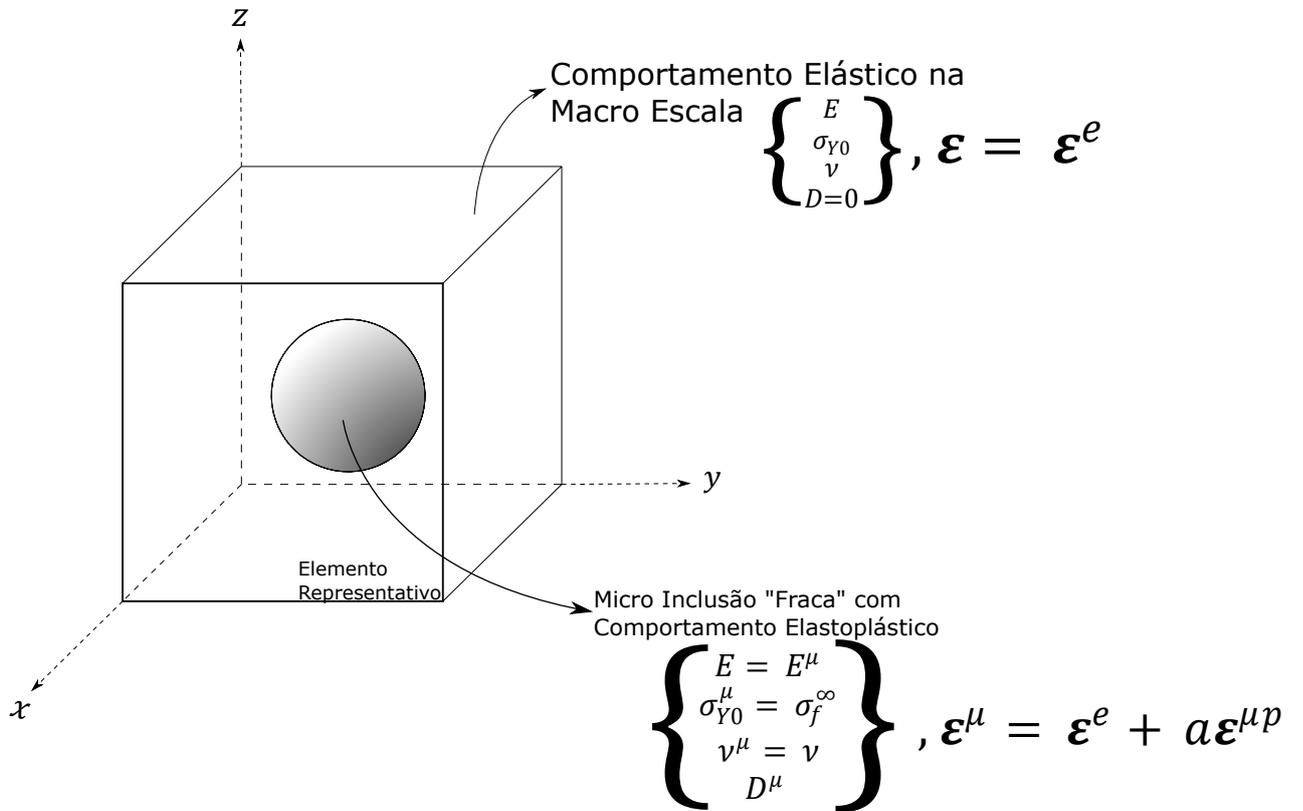


Figura 10 – Imagem ilustrativa apresentando as ideias do Modelo de Duas Escalas. E é o Módulo de Elasticidade do Material.

2.8 Indicadores de Dano e Fadiga

A fadiga é um fenômeno caracterizado pela nucleação e propagação de trincas em componentes mecânicos e estruturas sob esforços dinâmicos. A aparição de trincas requer que o material passe pela sua fase plástica, portanto a compreensão da fadiga requer o estudo da plasticidade. Por consequência, a deformação plástica provoca degradação do material, apesar de provocar um aumento do limite de escoamento por exemplo.

No entanto, a descrição matemática descrita nas seções anteriores não demonstra qualquer degradação das propriedades materiais, principalmente referentes a \mathbb{D} . Dessa forma, é necessário acrescentar alguma variável no modelo matemático capaz de mensurar o nível de degradação do material. Existem muitos modelos na literatura que incorporam variáveis que são capazes de mensurar essa degradação. Os modelos mais comumente usados são os chamados modelos de dano contínuo, os quais podem-se destacar os modelos de Lemaitre (1985a), Lemaitre (1985b) e de Gurson (1977). A variável capaz de mensurar a degradação introduzida por esses modelos é o dano D . D para os dois modelos descritos é uma variável escalar que varia de 0 (material virgem) e 1 (material completamente degradado). É importante notar que o dano só evolui com a presença de fluxo plástico.

O dano pode ser definido de várias formas dependendo do modelo utilizado mas de maneira geral ele é definido como uma razão entre os defeitos do material e o seu estado virgem. Além disso, para os modelos existe um valor crítico D_c que caracteriza a falha do material. Portanto, utilizando a formulação matemática descrita pela Tabela 2 associada ao dano, pode-se aplicar uma ciclagem até que D atinga D_c e registrar quantos ciclos foram necessários para tal. Dessa forma é possível fazer previsões de vida a fadiga.

Apesar de D ser capaz de modelar a fadiga, introdução de uma nova variável interna no problema aumenta a complexidade da formulação do problemas e consequentemente aumenta também a implementação de estratégias numéricas, acarretando mais memória e tempo de processamento. No entanto a teoria mostra bons resultados apesar da complexidade do mesmo.

Uma forma alternativa de mensurar o dano e consequentemente o quão degradado está o material são os chamados indicadores de dano. Como o próprio nome sugere, esses indicadores dão uma noção da evolução do dano ao longo do carregamento. Eles são comumente chamados também de indicadores de fratura, pois assim como D , os indicadores também possuem um valor crítico que quando atingido indicam a fratura do material. Um indicador de dano I de forma geral é:

$$I = \int_0^{\bar{\varepsilon}_c^p} \{\mathcal{U}(p, \sigma_v, \dots)\} d\bar{\varepsilon}^p, \quad (2.55)$$

onde $\mathcal{U}(p, \sigma_v, \dots)$ é uma função escalar das variáveis usadas pelo indicador, e $\bar{\varepsilon}_c^p$ é de-

formação plástica acumulada crítica. A vantagem do uso de I para analisar a falha do material é que ele pode ser calculado em uma etapa de pós processamento do procedimento numérico adotado. Dessa forma, o indicador gera um custo computacional menor apesar de modelar de forma menos acurada os dados experimentais, principalmente modelando ensaios de problemas com deslocamentos prescritos e com níveis de plasticidade apreciáveis.

Na literatura podem-se ser encontrados muitos modelos para os indicadores. O que diferencia uma proposta da outra é a definição de $\mathcal{U}(p, \sigma_v, \dots)$ e qual fenômeno físico o mesmo se baseia. Os indicadores de dano baseados non trabalho plástico total realizado se baseiam no trabalho necessário para causar plastificação. Quando o trabalho total chegar em um valor crítico o material fraturou. Dentre essa categoria, pode se citar os critérios de Freudenthal (FREUDENTHAL, 1950) e o de Datsko (DATSKO, 1966).

Os critérios com base em indicadores de dano mais aceitos nas comunidades de plasticidade e da mecânica são aqueles baseados na nucleação, crescimento e coalescência de micro defeitos. Os indicadores baseados nesse fato buscam levar em conta a geometria do defeito o mecanismo de geração e propagação desse defeito. Na literatura pode-se destacar os modelos propostos de Rice & Tracey (RICE; TRACEY, 1969), Crockcroft & Latham (COCKCROFT; LATHAM, 1968), Brozzo *et al.* (BROZZO *et al.*, 1972) e Xue & Wierzbicki (XUE, 2008).

Por outro lado, existe um último grupo de indicadores de dano que se baseia na própria mecânica do dano contínuo. Esses modelos buscam incorporar alguma variável de dano ao indicador de forma explícita. Segundo Andrade Pires (PIRES *et al.*, 2001) as propostas baseadas na mecânica do dano contínuo não servem apenas para descrever o comportamento do material, mas também permitem uma abordagem sistemática a análise da fratura, desde a nucleação da trinca seguido de sua propagação até o valor crítico de ruptura. Dentre os modelos desse grupo, pode-se citar os propostos por Lemaitre (LEMAITRE, 1986) e Vaz Jr. (JR, 1998).

Como futuramente é desejado que a abordagem em duas escalas seja associada com a mecânica do dano contínuo, o indicador usado no presente trabalho é de Vaz Jr. O critério é definido como:

$$I_{Vaz} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_c^p} \left\{ \frac{\sigma_v^2}{2ES} \frac{2}{3} [(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)(\eta^2)] \right\}^s d\bar{\varepsilon}^p, \quad (2.56)$$

$$\eta = \frac{p}{q}, \quad (2.57)$$

em que I_{Vaz} é o indicador de dano, e η é a razão de triaxialidade, S ó denominador de Dano e s é o expoente de dano. Tanto S quanto s são constantes materiais a serem

calibradas. É importante ressaltar que $I_{V_{az}}$, e todos os demais indicadores, só evoluem com o passar do tempo com a presença de fluxo plástico. Dessa forma, considerando o objetivo do presente trabalho, $I_{V_{az}}$ é calculado na micro escala, uma vez que é nessa escala em que ocorre fluxo plástico não nulo sob condições de HCF. Tendo em mente esse fato e visando um método capaz de realizar previsões de vida para fadiga de alto números de ciclos, cicla-se o material e calcula-se $I_{V_{az}}^{\mu}$ até que o mesmo atinga um valor crítico, caracterizando a falha do material. O fato inovador na utilização dessa metodologia para previsão de vida é que os indicadores são mais utilizados para previsão de ruptura me carregamentos monotônicos e não cíclicos.

Uma abordagem alternativa pode ser dada a Eq.2.56 se for assumido que S não é uma constante, mas sim uma função do estado de tensão. Essa metodologia se baseia nos processo de calibração desse parâmetro, em que se observa uma dependência relativamente forte se S com o tipo de carregamento aplicado(axial ou torcional). Portanto, deve-se buscar um denominador de dano da forma $S = f(\boldsymbol{\sigma})$. Na literatura existem algumas propostas de como seria essa função f . No presente trabalho será usado a função proposta por Malcher (MALCHER, 2011), onde a função se baseia no invariantes de tensão I_1 e J_3 . A função é definida como:

$$S = \frac{S_{0.33}}{3|\eta| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}}(1 - \xi^2)}, \quad (2.58)$$

onde:

$$J_3 = \det(\mathbf{S}), \quad (2.59)$$

$$\xi = \frac{27 J_3}{2 \sigma_v^3}, \quad (2.60)$$

Os parâmetros $S_{0.0}$ e $S_{0.33}$ são respectivamente os denominadores de dano calibrados para para um carregamento puramente cisalhante e para um carregamento de tração feita em um corpo de prova cilíndrico liso. A Equação 2.58 mostra claramente a dependência de S com estado de tensão. Por exemplo, para um carregamento axial tem-se que $\eta = 0$ e $\xi = 0$, de forma que $S = S_{0.0}$, como esperado. Portanto, para carregamentos multiaxiais, o denominador irá flutuar entre os valores de $S_{0.0}$ e $S_{0.33}$, dependendo de que qual tipo de carregamento possui uma contribuição maior.

3 Algoritmos de Integração Numérica implícita

3.1 Introdução

A formulação matemática descrita no Capítulo 2 é dependente da trajetória do carregamento aplicado. Em outras palavras, para se ter conhecimento por exemplo do campo de tensão de dada situação, é necessário conhecer a história pregressa de deformação da mesma. Dessa forma a implementação de um algoritmo de integração numérica é necessária, uma vez que geralmente as soluções analíticas não são conhecidas para muitas trajetórias. Portanto, o presente capítulo será dedicado a elaboração de um modelo para a integração numérica das equações descritas na Tabela 2. É importante notar que o problema de plasticidade pode ser enquadrado no grupo de problemas de valor inicial (PVI)

A modelagem numérica do problema de plasticidade consiste em elaborar um algoritmo de integração que seja capaz de atualizar a tensão e as variáveis internas ao final do incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ dado no intervalo de pseudo-instante $[t_n, t_{n+1}]$. Nesse procedimento, todas as variáveis do instante t_n são conhecidas. A atualização da tensão e das variáveis internas pode ser dada pelas seguintes equações:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}), \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}), \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ é o tensor das tensões atualizado, $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ é o grupo de variáveis internas atualizadas, $\boldsymbol{\alpha}_n$ é o grupo de variáveis internas no começo do passo incremental e $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ é o tensor deformação ao final do passo. Posteriormente, é feita uma discretização das equações constitutivas.

Os algoritmos de integração numérica, também chamados de métodos de Euler, se dividem em dois grandes grupos: os explícitos e os implícitos. Os métodos explícitos são

aqueles que buscam obter as variáveis do instante t_{n+1} por meio das variáveis conhecidas t_n . Esses métodos são de fácil implementação matemática e computacional, e geralmente não exigem a solução de sistemas de equações para atualização das variáveis. No entanto, os algoritmos explícitos são condicionalmente convergentes, de forma que a escolha do tamanho de passo seja feita de forma cuidadosa para garantir a convergência. Muitas vezes o tamanho de passo precisa ser pequeno, o que pode acarretar em um maior custo de tempo. Os métodos explícitos são comumente usados na modelagem de processos onde se deseja saber detalhes do percurso entre t_n e t_{n+1} .

Os métodos implícitos buscam por outro lado a obtenção das variáveis t_{n+1} usando as já conhecidas em t_n e utilizando também as desconhecidas de t_{n+1} no processo de cálculo. Em contraste com os explícitos, esses métodos são de dificuldade de implementação computacional e matemática maiores. Contudo, os algoritmos implícitos são incondicionalmente convergentes, de forma que o tamanho do passo incremental não é uma decisão crítica. Portanto, passos maiores podem ser usados de forma que existem um ganho de tempo considerável em comparação com os métodos explícitos. Os algoritmos implícitos são muito usados quando o interesse é somente no ponto de partida e no ponto final.

A diferença entre os dois métodos pode ser também entendido facilmente de forma gráfica. Considere um PVI genérico como $y' = f(t)$ com f uma função real de t . A solução desse PVI no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ é dado pela seguinte integral:

$$y = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \tag{3.3}$$

Do cálculo, sabe-se que a integral dada pela Eq.3.3 é área sobre a curva $f(t)$ contra t . No entanto, muitas vezes a solução analítica da integral é de difícil obtenção ou muitas vezes não existe. Nesses casos, por exemplo, lança-se mão dos métodos de Euler explícitos e implícitos para a aproximação retangular da área dada pela solução do PVI. A Figura 11 mostra de forma grosseira as aproximações referentes a cada método. O retângulo pintado de verde é aproximação implícita e a azul é a explícita. No presente trabalho a abordagem adotada é a implícita que será descrita com mais detalhes nas seções seguintes

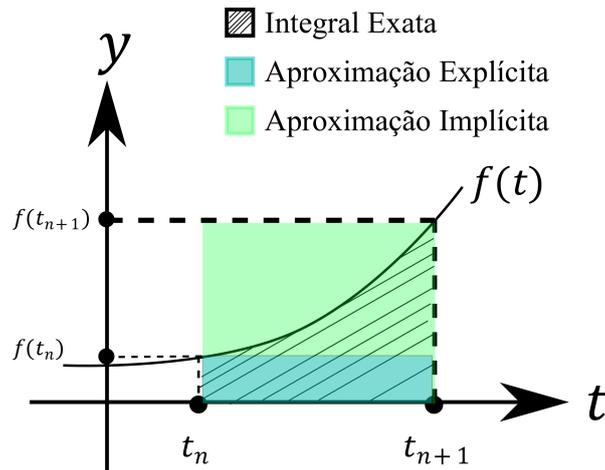


Figura 11 – Comparação entre os métodos de integração explícitos e implícitos.

No contexto da plasticidade, a atualização das variáveis é feita por meio de um procedimento chamado de decomposição do operador. Essa metodologia consiste em duas partes em ordem: o preditor elástico e o corretor plástico. A primeira parte consiste em assumir que $\Delta\varepsilon$ é puramente elástico. Dessa forma, monta-se o estado tentativa $(*)^T$. Em seguida é a validação do estado tentativa é feita por meio da função de escoamento ϕ_{n+1}^T . Caso $\phi_{n+1}^T \leq 0$ então o estado tentativa é verdadeiro e iguala-se as variáveis as do estado tentativa, ou seja $(*) = (*)^T$. A segunda parte ocorre quando $\phi_{n+1}^T \geq 0$, nesse caso é aplicado o corretor plástico. O corretor consiste basicamente na resolução de um sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Rapshon. A solução desse sistema é a atualização das variáveis. A Figura 12 mostra o algoritmo de integração numérica implementado no presente trabalho.

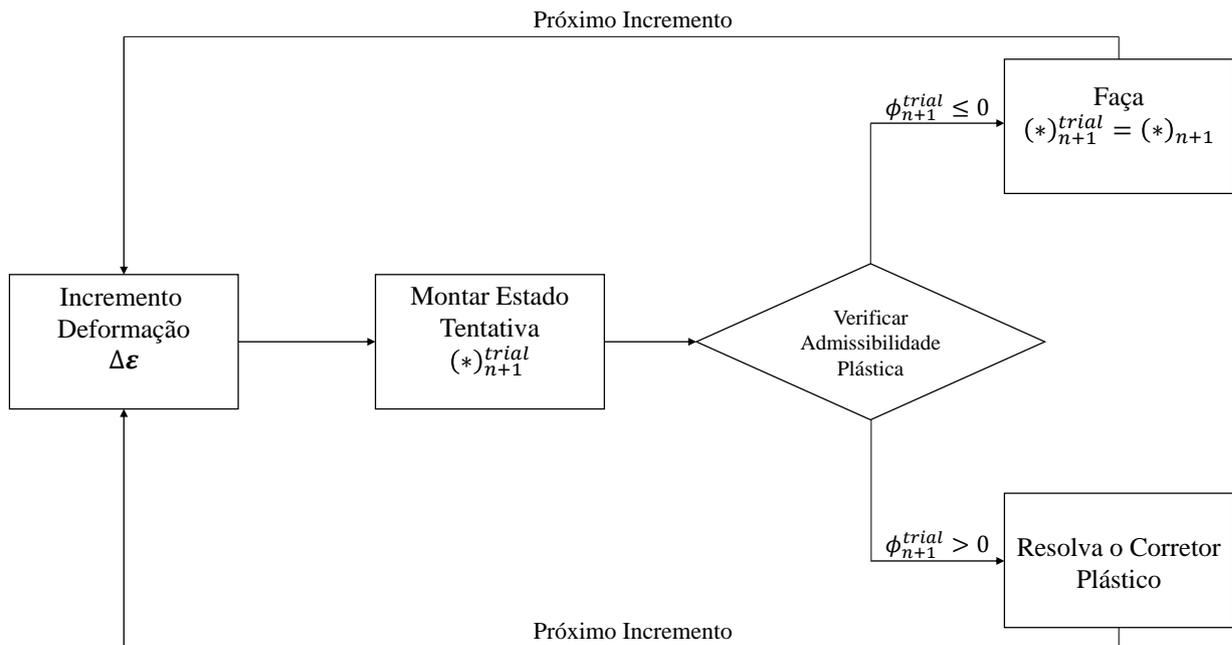


Figura 12 – Algoritmo de integração numérica

Assim como o modelo matemático, o modelo numérico é válido para ambas as escalas discutidas na seção anterior. A diferença reside na montagem do estado tentativa da micro escala. Um ponto importante a ser notado é que o instante de tempo t não é propriamente uma variável do problema, ela somente serve para estabelecer uma ordem de eventos. O algoritmo desenvolvido em FORTRAN se encontra em anexo ao presente trabalho. Nas próximas seções, a modelagem numérica será discutida em mais detalhes.

3.2 Modelo Elastoplástico de Duas Escalas Baseado no Critério de von Mises com Endurecimento Cinemático

A primeira etapa da metodologia consiste no preditor elástico. O incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ de forma geral é composta por uma parcela elástica $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e uma parcela plástica $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$. No entanto, como condições HCF são impostas na macro escala, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ é sempre elástico. Portanto, nessa escala não há a necessidade de se empregar o procedimento numérico, pois em regime elástico o estado de tensão é função somente do valor instantâneo de deformação. Dessa forma, pode-se escrever para qualquer pseudo-instante t_n :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e, \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^p = \mathbf{0}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p = \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ é o tensor deformação total, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ é o tensor deformação elástica, $\boldsymbol{\sigma}_n$ é o tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ é o tensor deformação plástica, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ é a deformação plástica acumulada, $\boldsymbol{\beta}_n$ é o tensor das tensões cinemáticas, todos calculados na macro escala para um pseudo-instante qualquer t_n .

Embora as macro condições sejam elásticas, a micro escala sofre plasticidade, portanto o procedimento numérico inteiro é requerido. O preditor elástico supõem que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ provoca um incremento de deformação na micro escala $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ puramente elástico. Portanto, discretizando o modelo contido na Tabela 2 e usando as suposições descritas, monta-se o estado tentativa na micro escala $(*)_{n+1}^{\mu T}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + c\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p}, \quad c = a - 1, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mu T} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T}, \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p T} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p}, \quad (3.9)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\mu p T} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{\mu p}, \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu T} = \boldsymbol{\beta}_n^{\mu}, \quad (3.11)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mu T}$ é o tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p T}$ é o tensor de deformação plástica, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\mu p T}$ á deformação plástica acumulada, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu T}$ é o tensor das tensões cinemáticas, todos no estado tentativa na micro escala. As demais variáveis possuem a mesma nomenclatura apresentada anteriormente, só que são valoradas no pseudo-instante t_n . Como não há evolução da deformação plástica, as variáveis cujas evoluções que dependem da presença desta não se alteram no preditor.

A validação do estado tentativa é feito por meio da função escoamento, portanto é necessário definir outras variáveis com as equações do estado tentativa acima:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{\mu T} = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T} \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu T} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_n^{\mu} \quad (3.13)$$

$$\bar{q}_{n+1}^{\mu T} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu T} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu T}} \quad (3.14)$$

$$\phi_{n+1}^{\mu T} = \bar{q}_{n+1}^{\mu T} - \sigma_f^\infty \quad (3.15)$$

em que $\mathbf{S}_{n+1}^{\mu T}$ é o tensor desviador, $\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu T}$ é o tensor relativo, $\bar{q}_{n+1}^{\mu T}$ é a tensão equivalente de von Mises, $\phi_{n+1}^{\mu T}$ é a função de escoamento, todos na micro escala e no estado tentativa.

Se $\phi_{n+1}^{\mu T} \leq 0$ então o preditor elástico está correto e faz-se $(*)_{n+1}^\mu = (*)_{n+1}^{\mu T}$. Caso contrário, em outras palavras $\phi_{n+1}^{\mu T} > 0$, então a hipótese de que $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ somente tenha

componente elástica é falsa, e portanto que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p T} \neq \mathbf{0}$. Assim sendo, o corretor plástico precisa ser aplicado.

O corretor plástico parte do fato que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mu$ possui uma componente plástica não nula. Dessa forma, é possível deduzir que a deformação elástica real é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + c\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p}, \quad (3.16)$$

O incremento de deformação plástica pode ser calculado pela integração da Lei de Fluxo Plástica dada pela Eq.2.54:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} = \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{N}_{n+1}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu\|}, \quad (3.18)$$

Dessa forma vem que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + c\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p} + c\Delta\gamma^\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu\|}, \quad (3.19)$$

A Equação 3.19 pode ser reescrita em termos de tensão por meio da Lei de Hooke dada pela Eq.2.11 :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\mu = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + c\mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_n^\mu + c\Delta\gamma^\mu 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu\|}, \quad (3.20)$$

Uma vez conhecida a equação de atualização de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\mu$ a parte desviadora \mathbf{S} pode ser calculada:

$$\mathbf{S}_{n+1}^\mu = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\mu \quad (3.21)$$

A deformação plástica real pode ser obtida de forma análoga a elástica, usando a própria definição de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p} + \Delta\gamma^\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu\|}, \quad (3.22)$$

Com base na lei de evolução da deformação plástica equivalente, vem que a atualização de $\bar{\varepsilon}^p$ é dada por:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p} = \bar{\varepsilon}_n^{\mu p} + \Delta\gamma^\mu, \quad (3.23)$$

A atualização das tensões cinemáticas é feita por meio da integração da sua lei de evolução dada pela Eq.2.37:

$$\beta_{n+1}^\mu = \beta_n^\mu + \frac{2}{3} H^k \Delta\gamma^\mu \mathbf{N}_{n+1}^\mu - \Delta\gamma^\mu b \beta_{n+1}^\mu, \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu = \mathbf{S}_{n+1}^\mu - \beta_{n+1}^\mu, \quad (3.25)$$

$$\bar{q}_{n+1}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu}, \quad (3.26)$$

Dessa forma a função de escoamento do estado real pode ser calculada:

$$\phi_{n+1}^\mu = \bar{q}_{n+1}^\mu - \sigma_f^\infty, \quad (3.27)$$

Ao observar as equações descritas para atualização das variáveis, nota-se que as mesmas consistem em um sistema de equações não lineares. A solução desses sistemas requer usualmente o uso de métodos numéricos. Um dos métodos mais utilizados é o de Newton-Raphson por possuir convergência quadrática (NETO et al., 2011). A ideia do método é basicamente buscar uma linearização do sistema não linear, de forma que a solução do mesmo passa a ser realizada pela solução de um sistema linear. Matematicamente o método é expresso como:

$$\mathbf{J}^k \cdot \delta^{k+1} = -R^k, \quad (3.28)$$

em que \mathbf{J}^k é a matriz Jacobiana da iteração k , δ^{k+1} é o vetor solução do sistema consistindo da diferença entre as variáveis da iteração $k+1$ e k , e R^k é o vetor das equações residuais. No contexto da plasticidade o sistema de equações não lineares é composto pelas equações 3.20, 3.23, 3.24 e 3.27. Portanto, pode-se escrever o método de Newton-Raphson como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_\sigma}{\partial \sigma} & \frac{\partial R_\sigma}{\partial \bar{\varepsilon}^p} & \frac{\partial R_\sigma}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_\sigma}{\partial \beta} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \sigma} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial R_\beta}{\partial \sigma} & \frac{\partial R_\beta}{\partial \bar{\varepsilon}^p} & \frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \\ \delta\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_\sigma \\ R_{\bar{\varepsilon}^p} \\ R_\beta \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Em que :

$$\begin{cases} \sigma_{n+1}^\mu = \sigma_{n+1} + c\mathbb{C} : \varepsilon_n^\mu + c\Delta\gamma^\mu 2GN_{n+1}^\mu \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p} = \bar{\varepsilon}_n^{\mu p} + \Delta\gamma^\mu, \\ \phi_{n+1}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu} - \sigma_f^\infty \\ \beta_{n+1}^\mu = \beta_n^\mu + \frac{2}{3}\Delta\gamma^\mu H^k \mathbf{N}_{n+1}^\mu - \Delta\gamma^\mu b\beta_{n+1}^\mu \end{cases} \quad (3.30)$$

O sistema descrito pela Eq.3.29 é resolvido até que o erro do método seja menor do que uma tolerância pré definida. O erro para o presente caso é dado por:

$$e_{NR} = \frac{|\phi_{n+1}|}{\sigma_f^\infty} \quad (3.31)$$

Primeiramente, as equações residuais referentes a cada variável são escritas com base nas equações do sistema de uma forma tal que $R_{(\cdot)} = 0$. Em outras palavras:

$$\begin{cases} R_\sigma = \sigma_{n+1}^\mu - \bar{\sigma}_{n+1} - c\Delta\gamma^\mu 2GN_{n+1}^\mu \\ R_{\bar{\varepsilon}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma^\mu, \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^\mu} - \sigma_f^\infty \\ R_\beta = \beta_{n+1} - \beta_n - \frac{2}{3}\Delta\gamma^\mu H^k \mathbf{N}_{n+1}^\mu + \Delta\gamma^\mu b\beta_{n+1} \end{cases} \quad (3.32)$$

onde $\bar{\sigma}_{n+1} = \sigma_{n+1} + c\mathbb{C} : \varepsilon_n^\mu$.

Antes da descrição mais detalhada da matriz Jacobiana, é necessária a introdução de uma representação de tensores diferente da usual, mas que gera importantes consequências para implementação computacional do método. Tensores de 2º ordem são comumente representados de forma de matrizes três por três. No entanto, a representação de forma análoga para tensores de 4º ordem encontra dificuldades, por se tratar de um espaço vetorial de dimensão 81. Para contornar esse problema, uma representação alternativa desses tensores é comumente empregada de forma que os mesmos possam ser representados por meio de matrizes e vetores. Nesse contexto alternativo, tensores de 2º ordem passam a ser representados por meio de vetores de de 6 entradas e tensores de 4º por matrizes seis por seis. Contudo, essa transformação de representações necessita de certos cuidados para que as propriedades e operações entre os tensores permaneçam corretas, como por exemplo a simetria de $\boldsymbol{\sigma}$.

Com base na representação alternativa descrita e tendo em mente o cálculo tensorial, é possível obter um aspecto geral da matriz Jacobiana. A Figura 13 ilustra o espaço que cada derivada das equações residuais irá ocupar bem como o aspecto da matriz Jacobiana:

4° Ordem $\frac{\partial R_\sigma}{\partial \sigma}$	2° Ordem $\frac{\partial R_\sigma}{\partial \bar{\epsilon}^p}$	2° Ordem $\frac{\partial R_\sigma}{\partial \Delta\gamma}$	4° Ordem $\frac{\partial R_\sigma}{\partial \beta}$
2° Ordem $\frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \sigma}$	Escalar	Escalar	2° Ordem $\frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \beta}$
2° Ordem $\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma}$	Escalar	Escalar	2° Ordem $\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta}$
4° Ordem $\frac{\partial R_\beta}{\partial \sigma}$	2° Ordem $\frac{\partial R_\beta}{\partial \bar{\epsilon}^p}$	2° Ordem $\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta\gamma}$	4° Ordem $\frac{\partial R_\beta}{\partial \beta}$

Figura 13 – Aspecto da matriz Jacobiana.

O valor das derivadas precisa ser calculado para uma descrição completa de \mathbf{J} . Primeiramente, para a equação residual de σ^μ :

$$\frac{\partial R_\sigma}{\partial \sigma} = \mathbb{I} - c2G\Delta\gamma^\mu \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^\mu}{\partial \sigma} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial R_\sigma}{\partial \bar{\epsilon}^p} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial R_\sigma}{\partial \Delta\gamma} = -c2G\mathbf{N}_{n+1}^\mu \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial R_\sigma}{\partial \beta} = -c2G\Delta\gamma^\mu \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta} \quad (3.36)$$

Analisando agora a equação residual para $\bar{\epsilon}^{\mu p}$ vem que:

$$\frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \sigma} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\epsilon}^p}}{\partial \bar{\epsilon}^p} = 1 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -1 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}^p}}{\partial \beta} = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Para a equação residual de $\Delta\gamma^\mu$:

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma} = \mathbf{N}_{n+1}^\mu \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta} = -\mathbf{N}_{n+1}^\mu \quad (3.44)$$

Finalmente, para a equação residual de β :

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \sigma} = -\frac{2}{3}\Delta\gamma^\mu H^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{2}{3}H^k \mathbf{N}_{n+1}^\mu \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} = \mathbb{I} - \frac{2}{3}\Delta\gamma^\mu \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta} + b\Delta\gamma^\mu \mathbb{I} \quad (3.48)$$

Onde:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\mathbb{I}^D}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|} - \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu \otimes \boldsymbol{\eta}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|^3} \right) \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\mathbb{I}^D}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|} + \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu \otimes \boldsymbol{\eta}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|^3} \right) \quad (3.50)$$

O corretor plástico pode ser visto de forma ilustrativa na Fig.14:

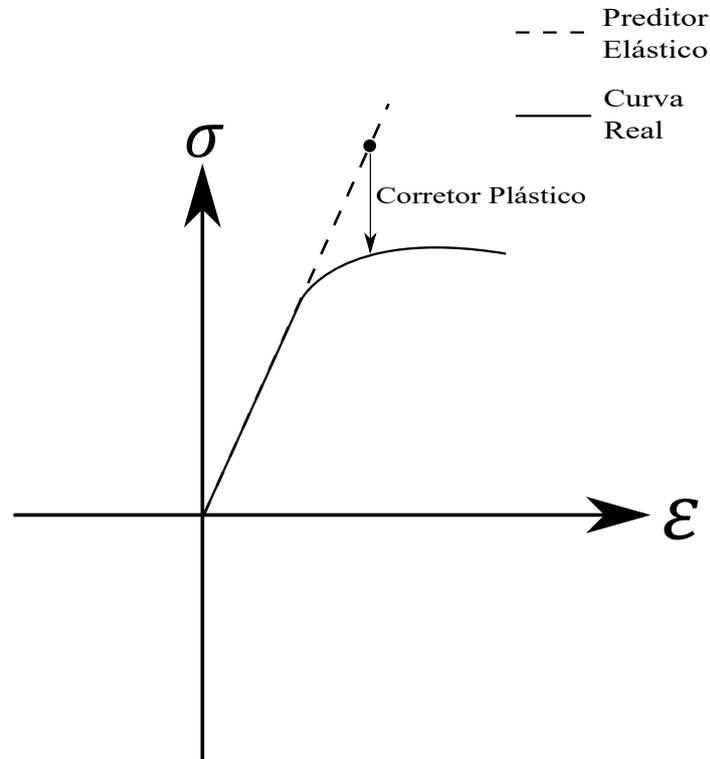


Figura 14 – Corretor Plástico

Analisando a Fig.14 nota-se que o preditor elástico na região plástica superestima o valor de tensão. Portanto como o próprio nome diz, cabe ao corretor plástico corrigir a defasagem que existem entre o estado tentativa e o verdadeiro estado quando existem plasticidade. A tabela que se segue resume a estratégia numérica implementada:

Tabela 3 – Resumo da estratégia de integração numérica implícita.

1. Dado um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ montar estado tentativa na micro escala:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mu T} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p T} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mu p},$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{\mu p T} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{\mu p},$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\mu T} = \boldsymbol{\beta}_n^{\mu},$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{\mu T} = \mathbb{I}^D : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\mu e T},$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu T} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_n^{\mu},$$

$$\phi_{n+1}^{\mu T} = \bar{q}_{n+1}^{\mu T} - \sigma_f^{\infty}$$

2. Verificar admissibilidade do estado tentativa

$$\phi_{n+1}^{\mu T} = \bar{q}_{n+1}^{\mu T} - \sigma_f^{\infty}$$

-Se $\phi_{n+1}^{\mu} \leq 0$ então o estado tentativa é verdadeiro, portanto $(*)_{n+1}^{\mu} = (*)_{n+1}^{\mu T}$

-Se $\phi_{n+1}^{\mu} \geq 0$ o estado tentativa é falso, portanto o corretor plástico é aplicado.

3. Corretor Plástico (algoritmo de retorno):

Resolver sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson:

$$R_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\mu} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - c\Delta\gamma^{\mu}2G\mathbf{N}_{n+1}^{\mu}$$

$$R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \Delta\gamma^{\mu},$$

$$R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}^{\mu} - \sigma_f^{\infty}$$

$$R_{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_n - \frac{2}{3}\Delta\gamma^{\mu}H^k\mathbf{N}_{n+1}^{\mu} + \Delta\gamma^{\mu}b\boldsymbol{\beta}_{n+1}$$

4. Atualizar as variáveis internas:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k + \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\,k+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\,k} + \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\,k+1}$$

$$\Delta\gamma^{k+1} = \Delta\gamma^k + \delta\Delta\gamma^{k+1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^k + \delta\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{k+1}$$

5. Fim

O método descrito nessa seção foi implementado na linguagem FORTRAN, reaproveitando uma modelagem numérica que o Professor Doutor Lucival Malcher produziu, reprogramando-o para um contexto de duas escalas.

3.3 Esquema de Integração Numérica do Indicador de Dano

Uma vez resolvidos os problemas elastoplástico e de transformação do campo de formação macro para a micro escala, é necessário elaborar alguma estratégia numérica para resolver a integral que define o Indicador de Dano I^μ , dada pela Eq.2.56 quando o critério de Vaz Jr. é adotado. O método numérico empregado para atualização de I^μ é feita de forma semelhante a abordagem de integração numérica implícita de um problema de valor inicial. Primeiramente é necessário realizar um discretização da integral referente ao indicador. De forma geral, para um dado I escolhido vem que:

$$I_{n+1}^\mu = I_n^\mu + \mathcal{U}(p_{n+1}, \sigma_{v_{n+1}}, \dots) \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p} \quad (3.51)$$

em que I_{n+1}^μ é o valor de I^μ ao final do incremento de deformação, I_n^μ é o valor no começo no incremento, $\mathcal{U}(p_{n+1}, \sigma_{v_{n+1}}, \dots)$ é o valor da função escalar calculado com base nos parâmetros de interesse atualizados e $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{\mu p}$ é o incremento de deformação plástica acumulada definido como a diferença entre as deformações acumuladas ao final e início do incremento. É importante notar que a escala onde ocorre plasticidade é a micro, logo todas as variáveis contidas na na Eq.3.51 são referentes a essa escala.

Conforme dito no capítulo anterior, o critério adotado é o de Vaz.Jr, de forma que particularizando a Eq.3.51 para esse critério vem que:

$$I_{n+1}^\mu = I_n^\mu + \left\{ \frac{(\bar{q}_{n+1}^\mu)^2}{2ES} \frac{2}{3} \left[(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) (\eta_{n+1}^\mu)^2 \right] \right\}^s \quad (3.52)$$

Como dito no capítulo anterior, a grande vantagem no uso dos indicadores de dano está no fato de poderem ser calculados em uma etapa de pós-processamento, ou seja, após o método resolução implícita do modelo elastoplástico constitutivo. Dessa forma, o procedimento de previsão de vida em fadiga consiste em basicamente resolver a integral dada pela Eq.3.52 ao longo de todos os ciclos, até que o mesmo atinja um valor crítico I_c pré-determinado, ou seja quando I_{n+1}^μ na micro escala for maior ou igual do que I_c .

Se o denominador de dano dependente do estado do tensão for utilizado, a Eq.3.52 ainda é aplicável. No entanto, antes de realizar a integração discreta, um passo anterior é

necessário:

$$S_{n+1} = \frac{S_{0.33}}{3|\eta_{n+1}^\mu| + \frac{S_{0.33}}{S_{0.0}} [1 - (\xi^\mu)_{n+1}^2]} \quad (3.53)$$

onde:

$$\xi^\mu = \frac{27}{2} \frac{J_3^\mu}{(\bar{q}^\mu)_{n+1}^3} \quad (3.54)$$

$$J_3^\mu = \det(\mathbf{S}_{n+1}^\mu) \quad (3.55)$$

4 Metodologia

4.1 Introdução

A implementação computacional dos modelos descritos nos capítulos anteriores exige o conhecimento de programação em linguagens como por exemplo FORTRAN, Python e MATLAB, bem como o compilador usados para rodar os programas. Além disso, a validação de qualquer modelo numérico e matemático necessita de dados experimentais. No presente capítulo, as abordagens e métodos utilizados são discutidos com detalhes.

4.2 Materiais e Dados Experimentais

O material estudado nesse trabalho é o alumínio 7050-T7451, conhecida pela sua aplicação na indústria aeronáutica. A nomenclatura da liga mostra os constituintes da mesma e quais tratamentos térmicos foram empregado. Por exemplo, a série 7XXX de ligas de alumínio indica que o segundo material abundante é o zinco e o símbolo T7451 informa que um tratamento de solubilização seguido de envelhecimento interrompido foi conduzido na liga. Esse material é protegido pela patente U.S N° 3.881.966 fabricada segundo a norma AMS Al-233. Dentre as características relevantes dessa liga, pode-se citar a alta resistência mecânica, elevada resistência a corrosão, considerável resistência a fadiga, alta tenacidade a fratura e alta relação resistência-peso (SÁ, 2017). Em aeronaves, essa liga pode-se ser encontrado em componentes importantes como longarinas de estabilizadores horizontais e verticais e no revestimento superior das asas.

A Tabela 4 que segue mostra a composição química em termos percentuais da liga estudada segundo a norma e segundo a empresa TORC, que realizou a caracterização química do material por meio do método de emissão ótica.

Tabela 4 – Composição química da liga de Alumínio 7050 com base na norma ASM Al-223 e análise feita pela empresa TORK

Referência	Zn	Ti	Mg	Cu	Zr	Fe	Mn	Cr	Si
Norma AMS Al-223 [%p]	5,7 – 6,7	0,06	1,9 – 2,6	2,0 – 2,6	0,08 – 0,15	0,15	0,1	0,04	0,12
TORK [%p]	6,75	0,03	2,31	2,65	0,12	0,05	< 0,01	< 0,01	0,02

As constantes determinadas para esse material considerando um endurecimento cinemático com Lei de Evolução de Armstrong-Frederick encontram-se na Tabela 5:

Tabela 5 – Parâmetro materiais do alumínio 7050-T7451

Parâmetro	Valor
Módulo de Elasticidade E	73,4 GPa
Coefficiente de Poisson ν	0,3
Limite de Escoamento Inicial σ_{Y0}	306,7 MPa
Limite de Resistência a Fadiga σ_f^∞	100,0 MPa
Modulo de Endurecimento Cinemático H^k	66764,0 MPa
Constante de Saturação b	508,0

O limite de escoamento inicial σ_{Y0} mostrado foi obtido em condições cíclicas e o limite de resistência a fadiga σ_f^∞ foi considerado tomando a amplitude de tensão para uma vida de 10^7 ciclos. Essa decisão foi tomada pelo fato das ligas de alumínio não estabelecerem patamares assintóticos para elevadas vidas (tipicamente entre 10^6 e 10^7 ciclos) em gráficos tensão-vida (S-N) como muitas ligas de aço. O material no presente trabalho é considerado como sendo isotrópico, de forma que o módulo de cisalhamento G pode ser calculado como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.1)$$

A curva S-N para esse material e os dados experimentais referentes a vida experimental foram retiradas do trabalho de Sá (SÁ et al., 2018). No trabalho citado, foram ensaiados corpos de prova cilíndricos lisos e entalhados. No entanto, para o presente trabalho foram somente usados os dados referentes ao corpos sem entalhe.

Os ensaios realizados foram realizados sob controle de força em condições axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais, todos completamente reversos (razão de tensão $R =$

–1). Os carregamentos proporcionais são definidos com base no parâmetro λ , chamado de razão entre as amplitudes de tensão normal σ_a e cisalhantes τ_a . Em outras palavras:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}\tau_a}{\sigma_a} \quad (4.2)$$

Os valores de λ usados foram de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}33}{20}$ e $2\sqrt{3}$. Os experimentos realizados tiveram amplitudes de tensão abaixo dos limites de escoamento axial e torcional, de forma que, como esperado, nenhuma plasticidade macroscópica foi percebida. Portanto, o conjunto de dados extraídos se encaixa adequadamente a proposta do presente trabalho. Finalmente, as trajetórias de carregamento aplicados estão ilustradas na Fig.15

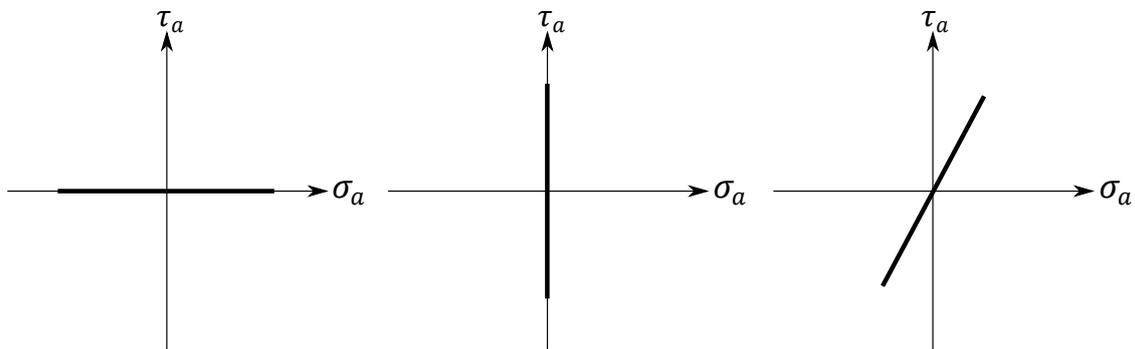


Figura 15 – Trajetórias de carregamento aplicadas nos experimentos de fadiga.

Os carregamentos na Fig.15 são, da esquerda para direita respectivamente, axial, torcional e proporcional. A inclinação da reta que caracteriza a trajetória do caso multiaxial depende de λ . Os carregamentos proporcionais são aqueles em que as direções principais não mudam sua direção com o passar do tempo.

Como tanto σ_a e τ_a estão abaixo do limite de escoamento, a Lei de Hooke pode ser aplicada. Dessa forma, pode-se transformar as amplitudes de tensão nas amplitudes de deformação associadas, ε_a e γ_a . As Tabelas 6, 7 e 8 que se seguem apresentam σ_a e τ_a usados nos ensaios, ε_a e γ_a e a vida observada N_{EXP} . Na Tabela 8 os asteriscos nos números indicam o valor de λ empregados no ensaio.

Tabela 6 – Dados referentes a trajetória "A" puramente axial.

$\sigma_a(MPa)$	$\tau_a(MPa)$	$\varepsilon_a(\%)$	$\gamma_a(\%)$	N_{EXP} (Ciclos)
205,0	0,0	0,28	0,00	$7,80 \times 10^4$
205,0	0,0	0,28	0,00	$4,58 \times 10^4$
180,0	0,0	0,25	0,00	$6,57 \times 10^4$
180,0	0,0	0,25	0,00	$5,26 \times 10^4$
180,0	0,0	0,25	0,00	$1,19 \times 10^5$
180,0	0,0	0,25	0,00	$9,49 \times 10^4$
180,0	0,0	0,25	0,00	$5,45 \times 10^4$
146,0	0,0	0,20	0,00	$2,13 \times 10^5$
146,0	0,0	0,20	0,00	$1,45 \times 10^5$
129,0	0,0	0,18	0,00	$9,77 \times 10^5$
129,0	0,0	0,18	0,00	$3,00 \times 10^5$
129,0	0,0	0,18	0,00	$1,47 \times 10^5$
112,0	0,0	0,15	0,00	$8,23 \times 10^6$
112,0	0,0	0,15	0,00	$8,23 \times 10^6$
112,0	0,0	0,15	0,00	$2,92 \times 10^5$
112,0	0,0	0,15	0,00	$1,27 \times 10^6$

Tabela 7 – Dados referentes a trajetória "B" puramente torcional.

$\sigma_a(MPa)$	$\tau_a(MPa)$	$\varepsilon_a(\%)$	$\gamma_a(\%)$	N_{EXP} (Ciclos)
0,0	173,2	0,0	0,61	$8,90 \times 10^4$
0,0	173,2	0,0	0,61	$5,36 \times 10^4$
0,0	173,2	0,0	0,61	$2,86 \times 10^4$
0,0	173,2	0,0	0,61	$2,86 \times 10^4$
0,0	118,4	0,0	0,42	$3,68 \times 10^5$
0,0	108,6	0,0	0,38	$1,54 \times 10^6$
0,0	108,6	0,0	0,38	$6,45 \times 10^5$
0,0	108,6	0,0	0,38	$5,00 \times 10^5$
0,0	86,6	0,0	0,31	$3,24 \times 10^6$
0,0	86,6	0,0	0,31	$2,76 \times 10^6$
0,0	86,6	0,0	0,31	$2,42 \times 10^6$
0,0	86,6	0,0	0,31	$2,07 \times 10^6$
0,0	79,7	0,0	0,28	$2,50 \times 10^6$
0,0	79,7	0,0	0,28	$2,35 \times 10^6$
0,0	67,7	0,0	0,24	$1,74 \times 10^6$
0,0	67,7	0,0	0,24	$6,23 \times 10^6$
0,0	67,7	0,0	0,24	$9,47 \times 10^6$
0,0	67,7	0,0	0,24	$5,11 \times 10^6$

Tabela 8 – Trajetória C multiaxial proporcional.* simboliza os experimentos para $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 ** para $\frac{33\sqrt{3}}{20}$ e *** para $2\sqrt{3}$

$\sigma_a(MPa)$	$\tau_a(MPa)$	$\varepsilon_a(\%)$	$\gamma_a(\%)$	N_{EXP} (Ciclos)
121,9*	61,0 *	0,17 *	0,22 *	$1,56 \times 10^5$
121,9*	61,0 *	0,17 *	0,22 *	$2,30 \times 10^5$
64,6**	106,6**	0,09**	0,38**	$2,47 \times 10^5$
53,5**	88,2**	0,07**	0,31**	$1,47 \times 10^6$
47,5**	78,3**	0,06**	0,28**	$2,50 \times 10^6$
42,1**	69,5**	0,06**	0,25**	$1,86 \times 10^6$
42,1**	69,5**	0,06**	0,25**	$4,54 \times 10^6$
42,1**	69,5**	0,06**	0,25**	$6,78 \times 10^6$
57,5***	115,00 ***	0,08 ***	0,41 ***	$2,12 \times 10^5$

4.3 Aspectos Computacionais

O modelo numérico descrito no capítulo anterior precisa ser implementado computacionalmente. Dessa forma, um programa elaborado pelo Professor Doutor Lucival Malcher em linguagem FORTRAN foi reprogramado de forma a simular o modelo em duas escalas proposto. O programa recebe como entrada ε_a e γ_a , por isso é pertinente a obtenção das amplitudes de deformação mostradas nas Tabelas 6, 7 e 8. Basicamente, o código simula o comportamento de um ponto de Gauss sob deformações prescritas. Nesse programa, encontra-se somente o algoritmo mostrado na Fig.12. Portanto, foram realizadas alterações a fim de incorporar todo o modelo numérico.

A primeira alteração realizada foi a inserção de uma subrotina chamada de PATH em que foram programadas as trajetórias de carregamento mostradas na Fig.15, tornando o programa principal menos carregado de informações. A segunda alteração foi a implementação da Lei da Localização discretizada. A última alteração foi a programação do indicador de dano na subrotina chamada de SUAFM_3D.

O código final fornece como saída para usuário 3 arquivos em formato .dat. Os arquivos contêm a deformação total e tensão nas macro e micro escalas, o indicador de dano e a quantidade de ciclos rodados.

Para a visualização gráfica dos resultados fornecidos pelo programa, um código foi escrito em MATLAB. O programa lê os arquivos e realiza a plotagem dos dados contidos nos arquivos. Em relação aos resultados relacionados a fadiga, um processo análogo foi feito. Todos os programas e subrotinas descritas encontram-se em anexo a esse trabalho.

4.4 Validação do Modelo de Duas Escalas

Uma vez implementado o código responsável pela simulação do problema, é necessário verificar se o modelo de duas escalas é capaz de descrever o comportamento elastoplástico na micro escala. Como dito no começo desse trabalho, deseja-se obter algum sinal de plasticidade em um material sob condições de HCF. Para tal, utilizou-se os dados contidos nas Tabelas 6, 7 e 8 e inseriu-se no programa, aplicando 100 ciclos de carregamento para cada caso. Em seguida, com os códigos em MATLAB responsáveis para visualização gráfica dos resultados, observou-se o comportamento tanto da micro e macro escalas, vendo se de fato existe um laço de histerese na micro. Uma vez validado o modelo proposto, aplicou-se mais ciclos de forma a observar o comportamento de I com o passar dos ciclos na micro escala.

4.5 Calibração do Modelo

O modelo proposto com base no Indicador de Vaz necessita que os parâmetros S e s sejam conhecidos para o material em questão. Dessa forma, é necessário ajustar esses parâmetros para que se aproximem o máximo dos dados experimentais. Tal procedimento é chamado de calibração.

Primeiramente, é necessário definir um valor crítico de I , ou seja de I_c . No presente trabalho, o valor adotado foi 1,0. Dessa forma, a falha do material é caracterizada quando $I \geq I_c$. Em posse de I_c , um dado experimental de fadiga para o alumínio 7050 com carregamento axial alternado foi tomado, e com base nessa informação o modelo foi calibrado. O dado em questão escolhido foi uma vida experimental $N_{EXP} = 78000$ e uma amplitude de tensão normal $\sigma_a = 205MPa$. É importante notar que $\sigma_a < \sigma_{Y0}$ de forma que a condição de regime elástico na macro é respeitado.

De forma a tornar o processo de calibração mais simples, o expoente de dano s foi mantido fixo com valor de $s = 1,0$. Assim sendo, o único parâmetro a ser calibrado é o denominador de dano S_0 . O procedimento obtenção de S foi feito seguindo uma metodologia análoga ao método da bisseção, método muito utilizado para obtenção de raízes de funções. A primeira etapa consistiu em definir um intervalo para possíveis de S_0 . Para a primeira etapa de calibração o intervalo considerado foi de $[0, 0; 100, 0]$, intervalo esse que foi determinado por um processo de tentativa e erro. Uma vez definido o intervalo, pontos contidos no mesmo são selecionados e inseridos no programa elastoplástico e I_{n+1}

é calculado até que a falha ocorra para o dado valor de S_0 selecionado. Quando ocorrer a fratura do material, verifica-se quantos ciclos até a ruptura foram realizados pelo algoritmo, obtendo assim uma vida estimada N_{NUM} . Finalmente, calcula-se o erro da metodologia definido como:

$$erro = \frac{|N_{EXP} - N_{NUM}|}{N_{EXP}} \quad (4.3)$$

O processo é iterativo, de forma que a cada iteração novos valores são testados até que o erro dado pela Eq.4.3 atinja um valor aceitável. A Tabela 9 mostra os valores tentados para o denominador e o respectivo erro percentual:

Tabela 9 – Resultados da calibração do modelo em condições axiais alternadas

S	N_{NUM} (Ciclos)	N_{EXP} (Ciclos)	$erro$ (%)
15	26136	78000	73,9
20	35558	78000	64,4
30	53337	78000	46,6
45	80005	78000	20
55	97785	78000	2,1

Traçando um gráfico do erro em função de S_0 , observa-se um comportamento aproximadamente linear, de forma que pode se ajustar uma reta a esses dados. Extrapolando a mesma reta até interceptar o eixo das abcissas. A Figura 16 ilustra o comportamento descrito.

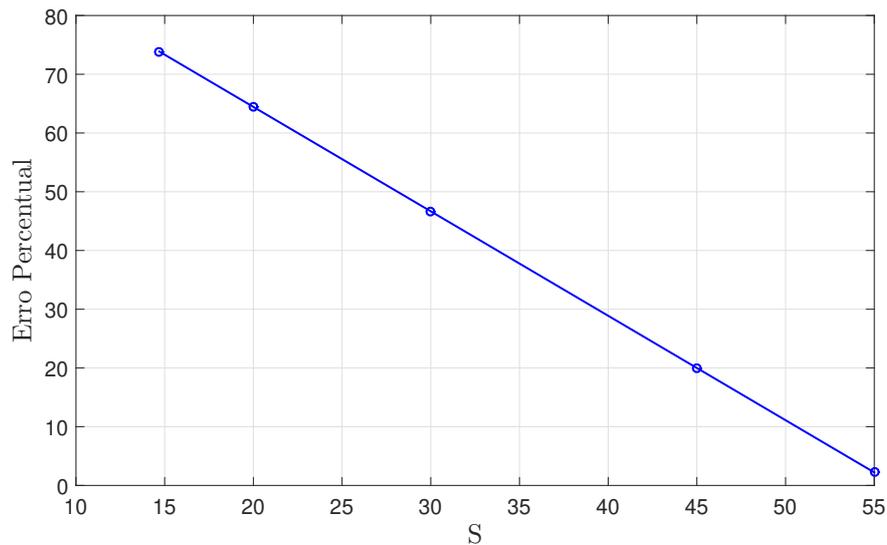


Figura 16 – Processo de calibração e comportamento linear do erro em função de S_0 .

O valor encontrado pela extrapolação da reta até o eixo das abcissas é de $S_0 = 56,2 MPa$. Esse valor encontrado foi passado ao programa com as outras propriedades

do alumínio 7050 e vários ciclos foram simulados. Primeiramente, aplicou-se quantidades cada vez maiores de ciclos a fim de observar a evolução de I na micro escala com o ciclagem, como dito anteriormente. Em seguida, o código foi rodado para cada uma das amplitudes dadas na Tabela 6 até que I_c fosse atingido, registrando quantos ciclos foram necessários para tal. Em seguida, em posse da vida calculada numericamente N_{NUM} e de N_{EXP} constrói-se um gráfico em escala logarítmica vida-vida com bandas de fatores 2 e 4 para analisar os resultados obtidos pelo modelo em duas escalas.

A calibração por meio de somente um ponto experimental muito provavelmente não é adequada, dada a dispersão dos dados. Portanto, a fim de realizar uma calibração mais satisfatória, o mesmo procedimento descrito anteriormente foi realizado para cada amplitude de deformação axial e cisalhante. No entanto, como cada ε_a e γ_a possui diferentes vidas experimentais obtidas, uma seleção dos dados teve que ser realizada.

A metodologia de escolha dos dados se baseou em uma constatação feita no trabalho que S tem uma relação inversamente proporcional com a vida calculada. Em outras palavras, em uma dada amplitude de deformação, um maior valor de S implica em um menor N_{NUM} . Dessa forma, para cada ε_a e γ_a foram selecionados os maiores valores N_{EXP} . Uma vez feito isso, a calibração foi realizada para os carregamentos axiais e em seguida para os cisalhantes.

Em posse dos dados selecionados para os carregamentos axiais, calibrou-se para cada ponto um valor de S . O mesmo comportamento linear mostrado na Fig.16 foi observado, de forma que o mesmo procedimento de obtenção do denominador de dano usada pode ser empregada novamente. A Tabela 10 que se segue mostra os resultados do processo.

Tabela 10 – Dados selecionados para os carregamentos axiais.

ε_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	$S_{0.33}$ (MPa)
0,28	$7,80 \cdot 10^4$	23,0
0,25	$1,19 \cdot 10^5$	23,7
0,20	$2,13 \cdot 10^5$	25,1
0,18	$3,00 \cdot 10^5$	26,3
0,15	$8,23 \cdot 10^6$	437,1

Observando os dados da Tabela 10 pode-se notar uma dispersão relativamente pequena dos valores de $S_{0.33}$ quando se desconsidera o último valor obtido pela calibração. Dessa forma, essa última informação contida na tabela foi considerada espúria, e a média das demais foi tomado como sendo o valor calibrado de $S_{0.33}$, em outra palavras, $S_{0.33} =$

24,5 MPa. Ao término do processo de obtenção do denominador de dano axial, passa-se esse parâmetro ao programa e simula-se para todos os dados quantos ciclos serão necessárias até a falha. Terminada, a simulação, gera-se outro gráfico vida-vida. A Figura 17 ilustra o processo de seleção do do valor de $S_{0,33}$ escolhido para os carregamentos axiais.

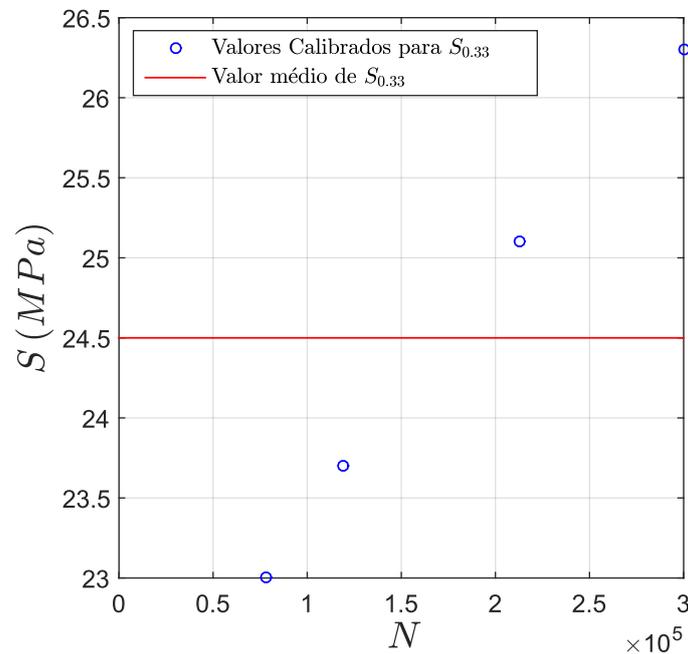


Figura 17 – Valores de $S_{0,33}$ obtidos e o valor médio do mesmo utilizado na simulação.

Repete-se o mesmo procedimento para os dados de cisalhamento puro. A Tabela 11 mostra o conjunto de informações cisalhantes usadas para calibração de $S_{0,0}$.

Tabela 11 – Dados selecionados para os carregamentos torcionais

γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	$S_{0,0}$ (MPa)
0,61	$8,90 \cdot 10^4$	70,6
0,42	$3,68 \cdot 10^5$	113,4
0,38	$1,54 \cdot 10^6$	373,0
0,31	$3,24 \cdot 10^6$	493,2

Nota-se na Tabela 11 que a dispersão dos valores obtidos de $S_{0,0}$ é mais elevada do que a observada para $S_{0,33}$. Portanto, foi decidido que o valor final de $S_{0,0}$ seria a média de todos os valores obtidos, apesar da primeira linha da tabela mostrar um valor relativamente distante dos demais. Além disso, observa-se que algumas amplitudes foram desprezadas, decisão tomada pelos valores extremamente elevados de $S_{0,0}$ nesses casos. Assim, o valor de $S_{0,0} = 813,0 \text{ MPa}$ foi passado ao programa e calcula-se N_{NUM} para

os dados da Tabela 7, gerando outro gráfico vida-vida. A Figura 18 mostra os valores calibrados de $S_{0,0}$ e o valor médio do mesmo.

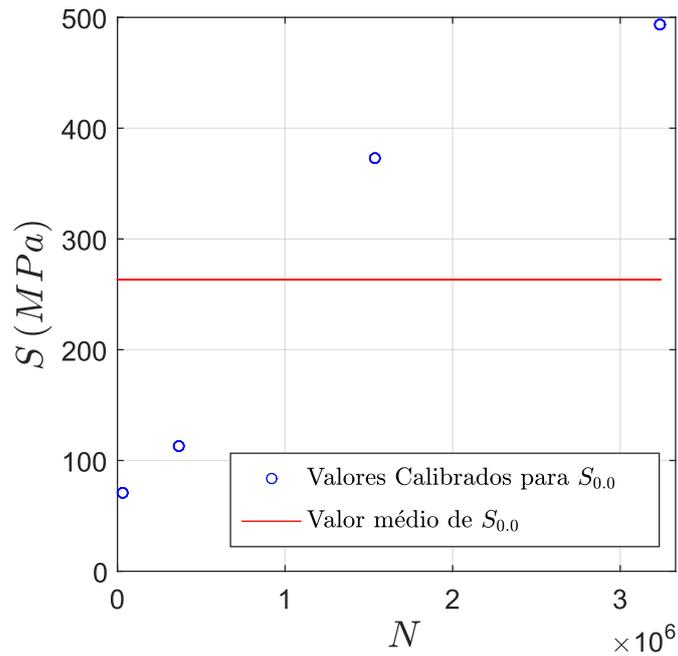


Figura 18 – Valores de $S_{0,0}$ obtidos e o valor médio do mesmo utilizado na simulação.

Em posse dos valores de $S_{0,0}$ e de $S_{0,33}$ é possível implementar no algoritmo a Eq.2.58 e usar S como uma função do estado de tensão e repetir as previsões de fadiga realizados anteriormente, gerando mais um gráfico vida-vida.

Finalmente, com todos os valores de N_{NUM} calculados para os cenários descritos e com os respectivos gráficos vida-vida, calculou-se a proporção de pontos que ficaram dentro da banda de fator 2 e os que ficaram dentro da banda 4. O termo "banda", citado aqui e anteriormente, é muito usado nos meios acadêmicos sobre fadiga e designa a ordem do erro que está sendo cometido na previsão.

5 Resultados e Discussão

5.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtido com base em tudo que foi dito nos capítulos anteriores do trabalho. Os resultados são discutidos em detalhes, observações são feitas e conclusões são tiradas a respeito dos resultados. Em seguida é feito uma análise geral do trabalho e recomendações de trabalhos futuros.

5.2 Validação do Modelo Em Duas Escalas

Como dito no capítulo referente a metodologia do trabalho, a previsão de vida a fadiga necessita que antes seja averiguada se de fato modelo em duas escalas é capaz de descrever um comportamento elastoplástico na micro escala. A seguir são mostrados os resultados obtidos pelo programa desenvolvido para os carregamentos puramente axiais. Para todos os gráficos mostrados nessa seção, o número de ciclos aplicados foi de 100.

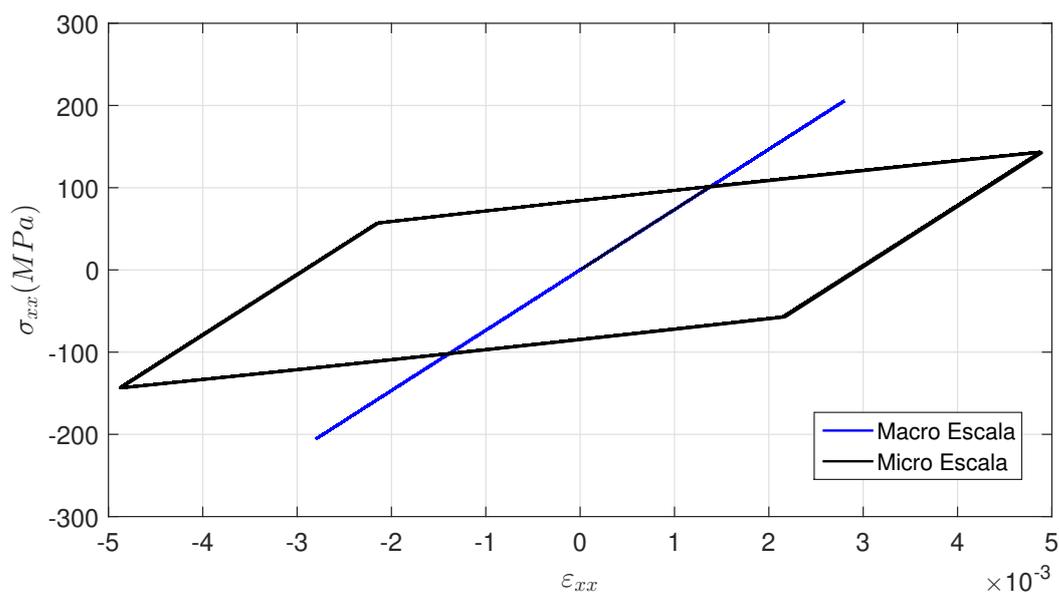


Figura 19 – Comportamento mecânico do alumínio em condições axiais 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\epsilon_a = 0,28\%$.

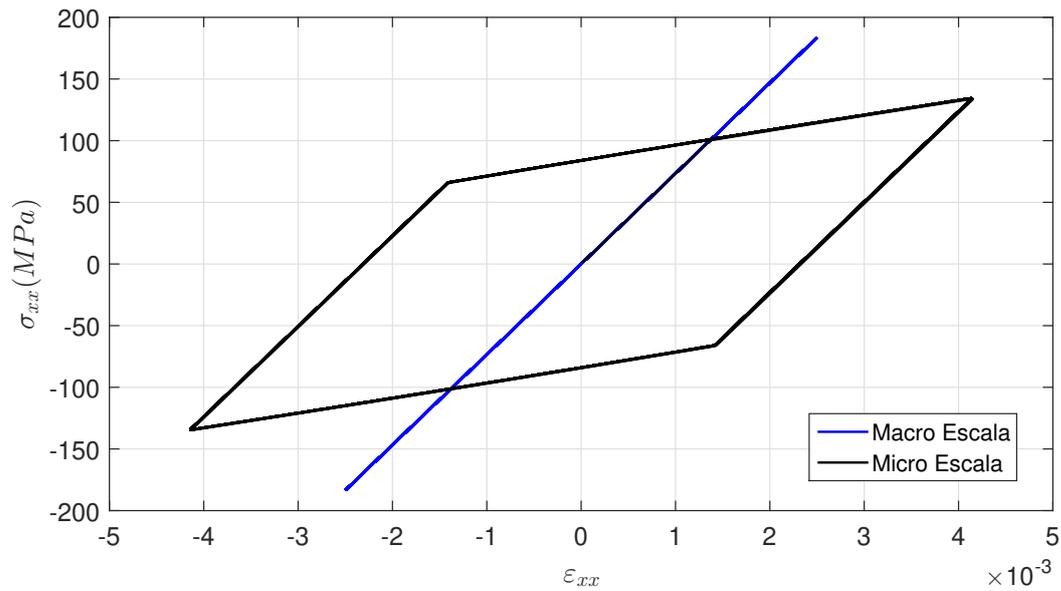


Figura 20 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\epsilon_a = 0,25\%$.

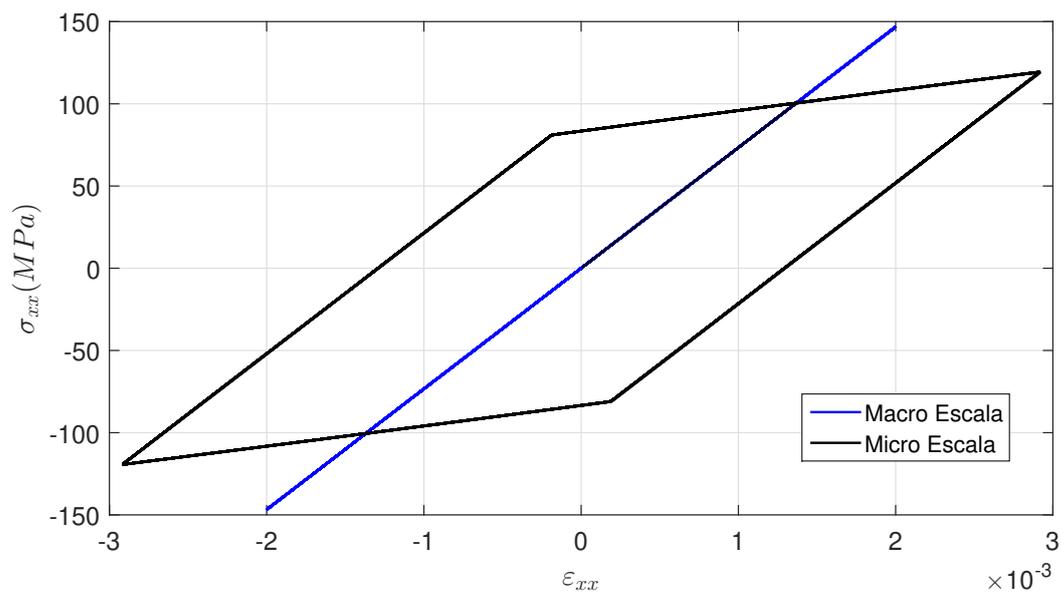


Figura 21 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\epsilon_a = 0,20\%$.

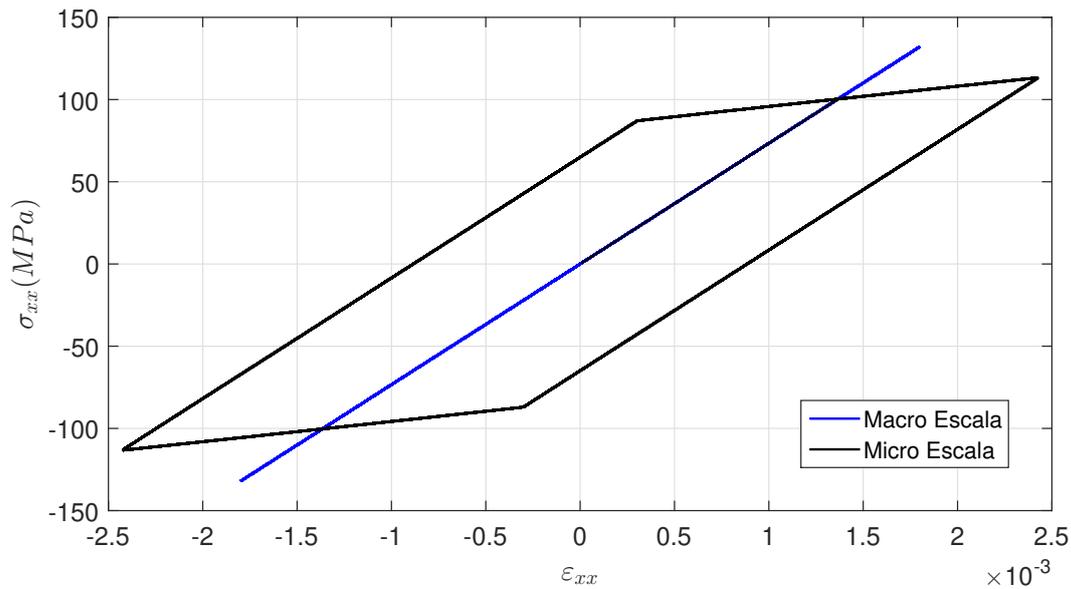


Figura 22 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,18\%$.

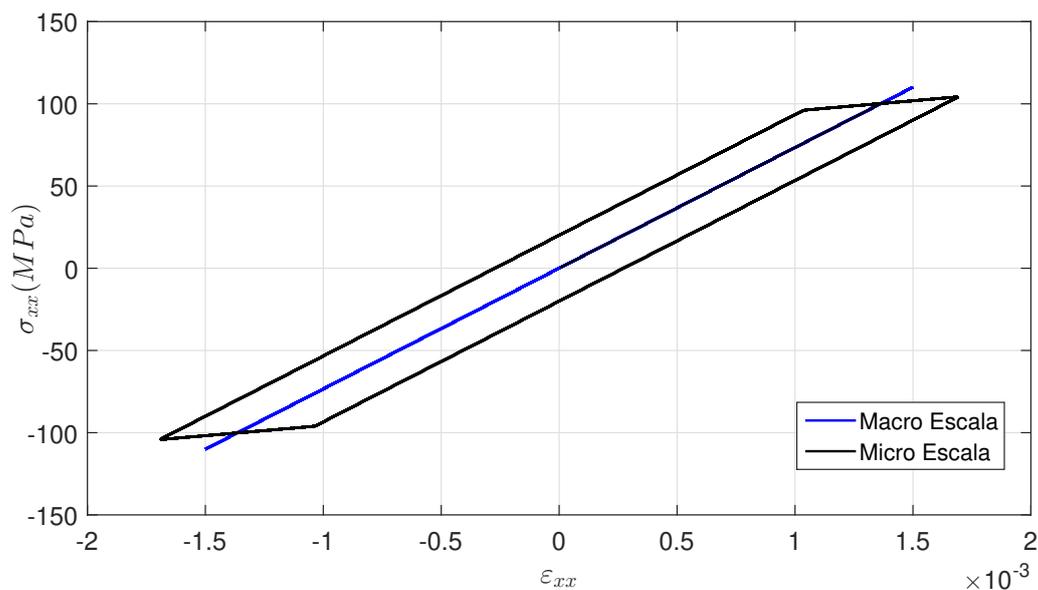


Figura 23 – Comportamento mecânico em condições axiais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,15\%$.

Analisando os gráficos, observa-se claramente que, de fato, a macro escala mostra um comportamento puramente elástico e que o modelo de duas escalas proposto é capaz de descrever um comportamento elastoplástico na micro escala, no mínimo em condições puramente axiais. Como dito em capítulos anteriores, o dano, e consequentemente o indicador, depende da ocorrência de plasticidade para sua evolução. Portanto, como a plasticidade ocorre em nível microscópico, a evolução do dano ocorre nesse nível de forma que existe a possibilidade de realizar previsões de vida.

Nota-se também que para todos os gráficos o comportamento não linear característico do modelo de Armstrong-Frederick não é muito pronunciado, se assemelhando ao comportamento linear do modelo de Prager. A explicação disso reside no fato de que em particular para carregamentos axiais, a quantidade de deformação plástica acumulada não evoluiu de forma suficiente para que o termo $-\dot{\epsilon}^p b \beta$ se sobressaísse em relação ao termo linear. Portanto, para amplitudes de deformação axiais usadas, o modelo de Prager é satisfatório para descrever o comportamento mecânico microscópico, o que traz certas vantagens. Primeiro, o modelo é linear, trazendo simplicidade matemática. Segundo, a linearidade acarreta em menos tempo computacional.

Apesar de ter sido constatado que não existem aparentes diferenças entre as propostas de endurecimento cinemático de Armstrong-Frederick e Prager, o programa foi mantido com a equação de evolução não linear, uma vez que somente para carregamentos puramente axiais foi observado um comportamento linear da região plástica na micro escala. Em outras palavras, existe a possibilidade de que em carregamento puramente torcionais (cisalhantes) e multiaxiais o efeito provocado pela saturação seja mais pronunciado. Para averiguar isso, os carregamentos torcionais foram simulados, gerando as seguintes resultados:

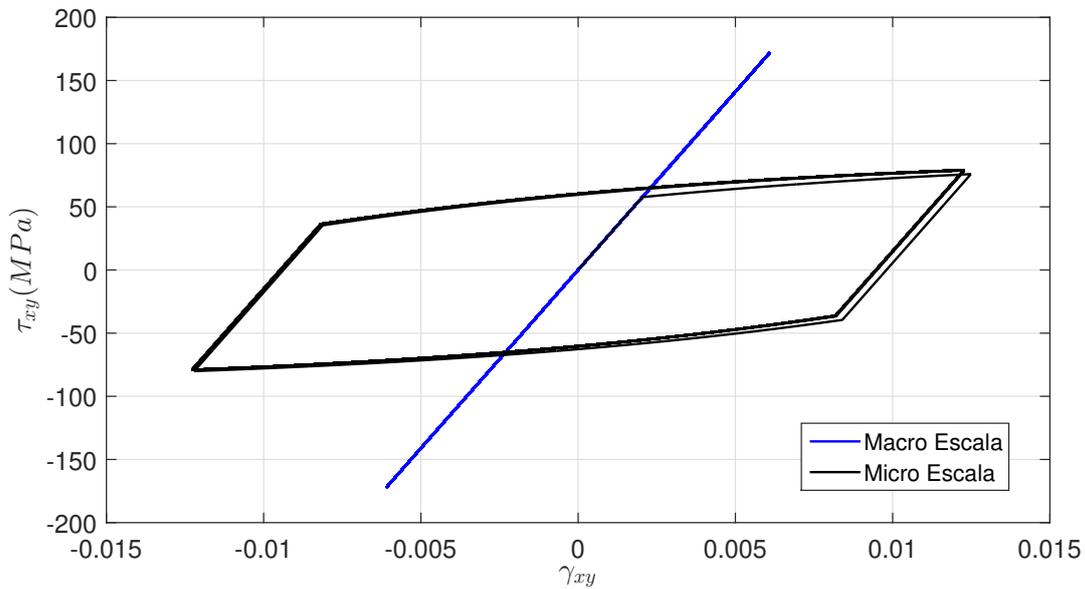


Figura 24 – Comportamento mecânico do alumínio em condições torcionais do 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,61\%$.

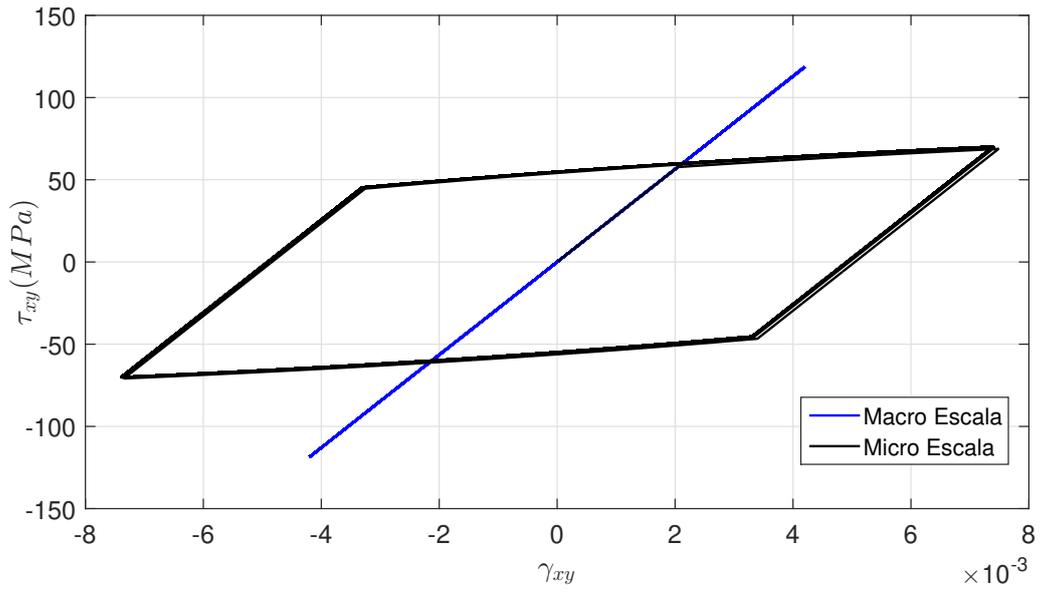


Figura 25 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,42\%$.

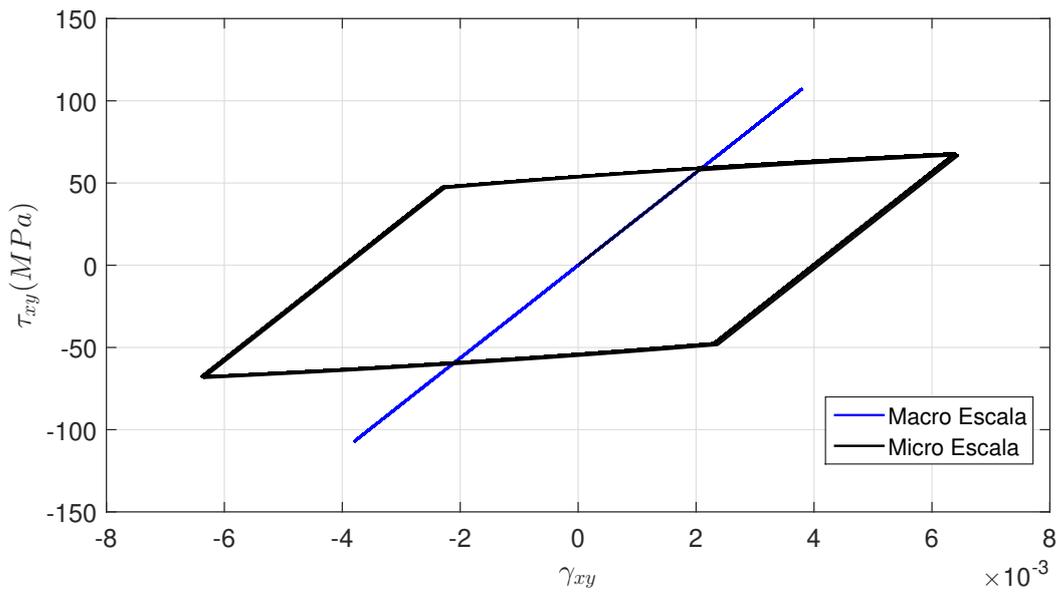


Figura 26 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,38\%$.

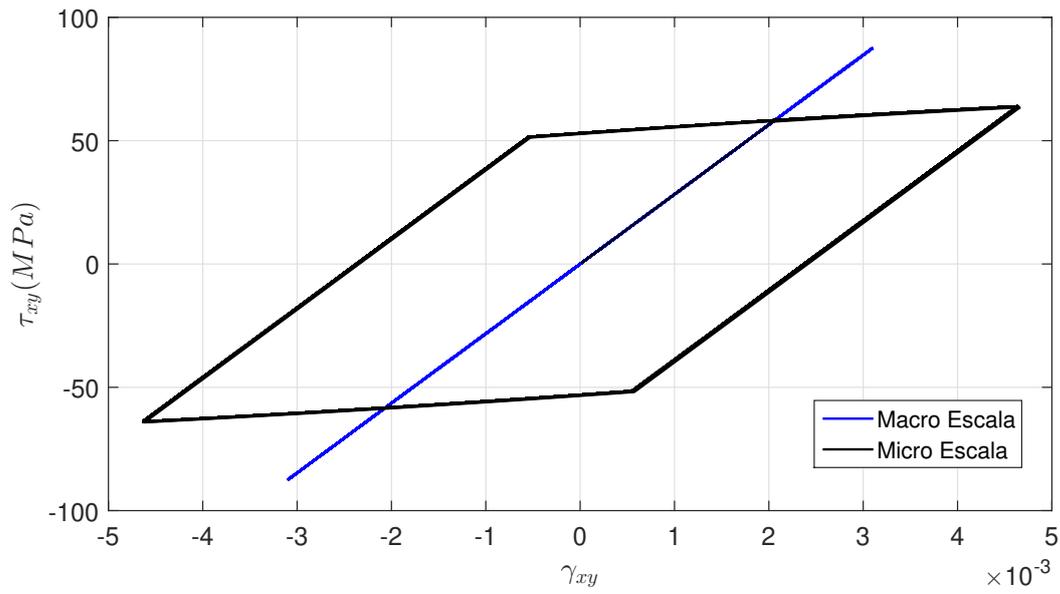


Figura 27 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,31\%$.

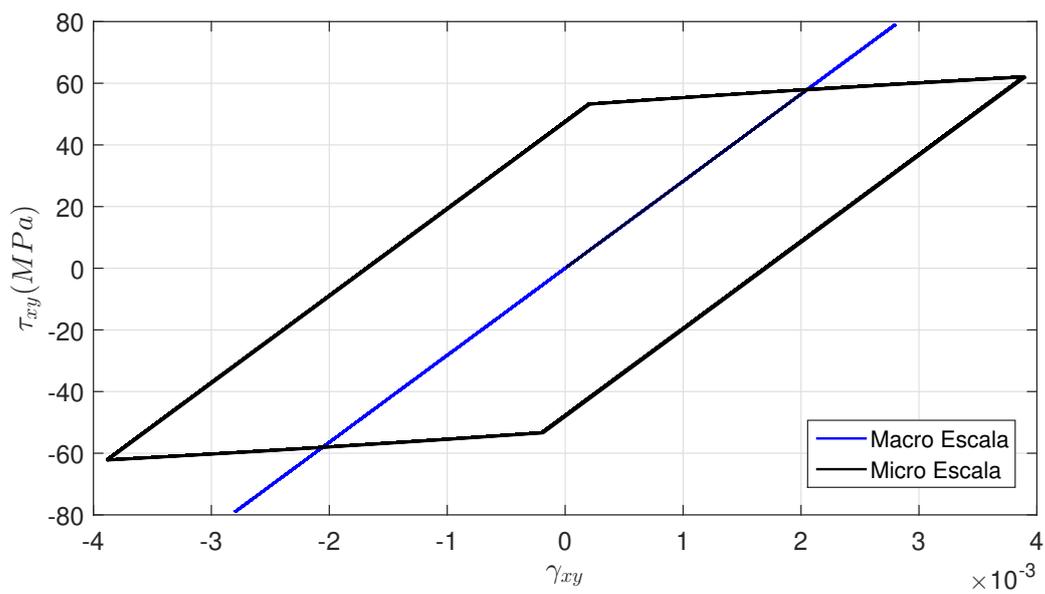


Figura 28 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,28\%$.

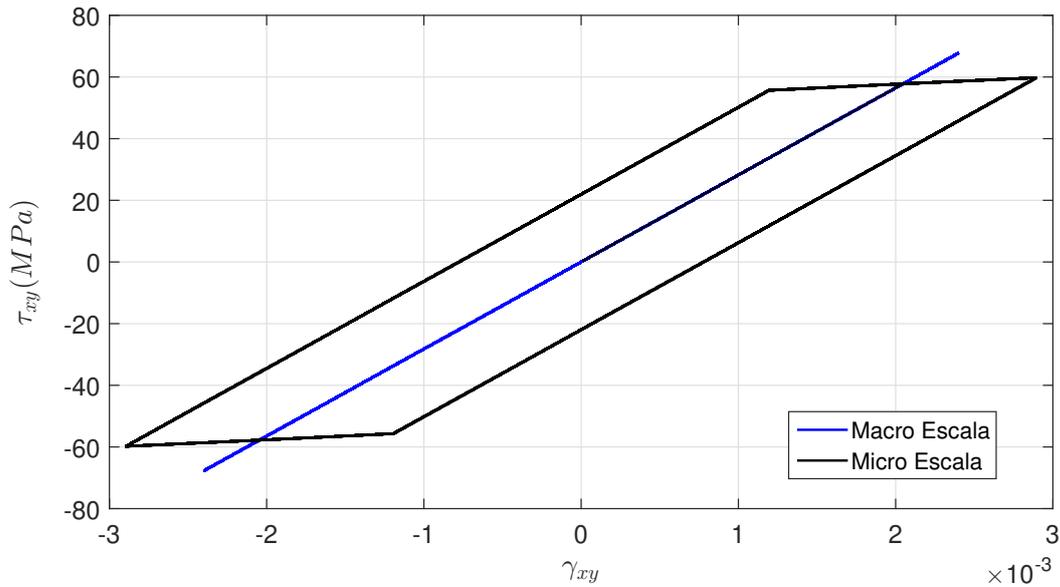


Figura 29 – Comportamento mecânico em condições torcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\gamma_a = 0,24\%$.

Os carregamentos torcionais mostraram um comportamento distinto daquele observado sob condições axiais. Nota-se nas Fig.24, 25 o comportamento não linear é mais pronunciado. Pode-se afirmar que para as amplitudes γ_a referentes a essas figuras a deformação plástica equivalente evoluiu de forma suficiente para que o termo $-\dot{\epsilon}^p b \beta$ disputasse com relação a parcela linear em contribuição para β . No entanto, quando γ_a nota-se que a influência da não linearidade torna-se fraca, e o laço de histeres em cisalhamento passa a ter um formato semelhante aos observados nos casos axiais. Simulando os casos multiaxiais obtém-se graficamente:

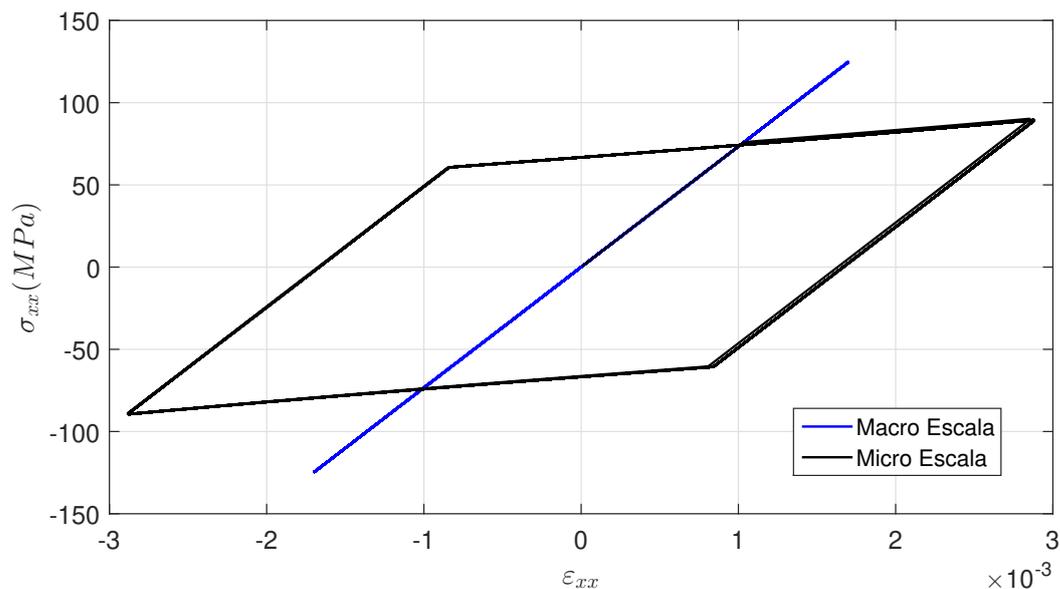


Figura 30 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\epsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$.

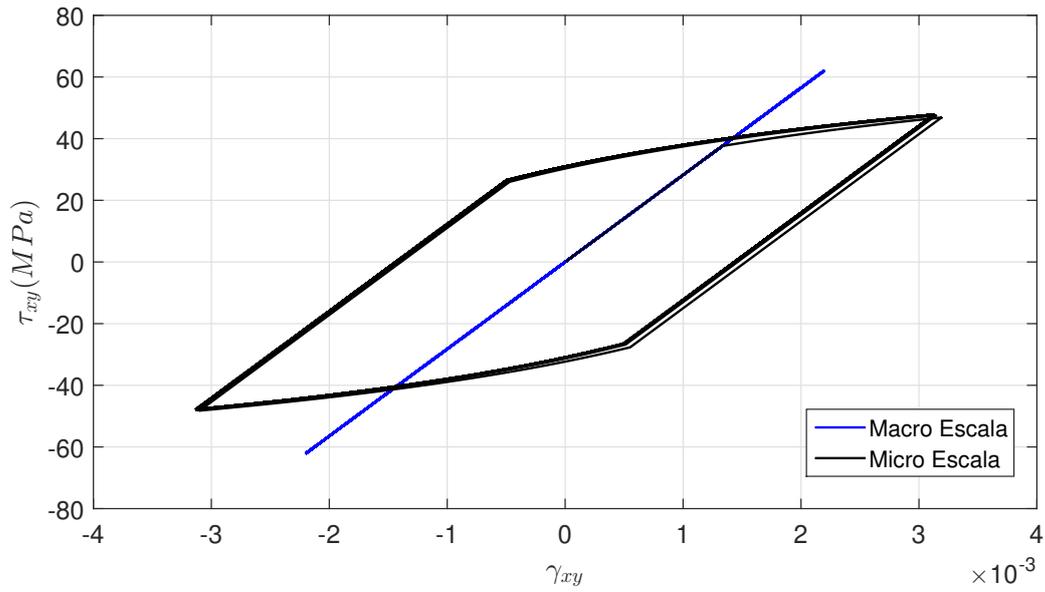


Figura 31 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$.

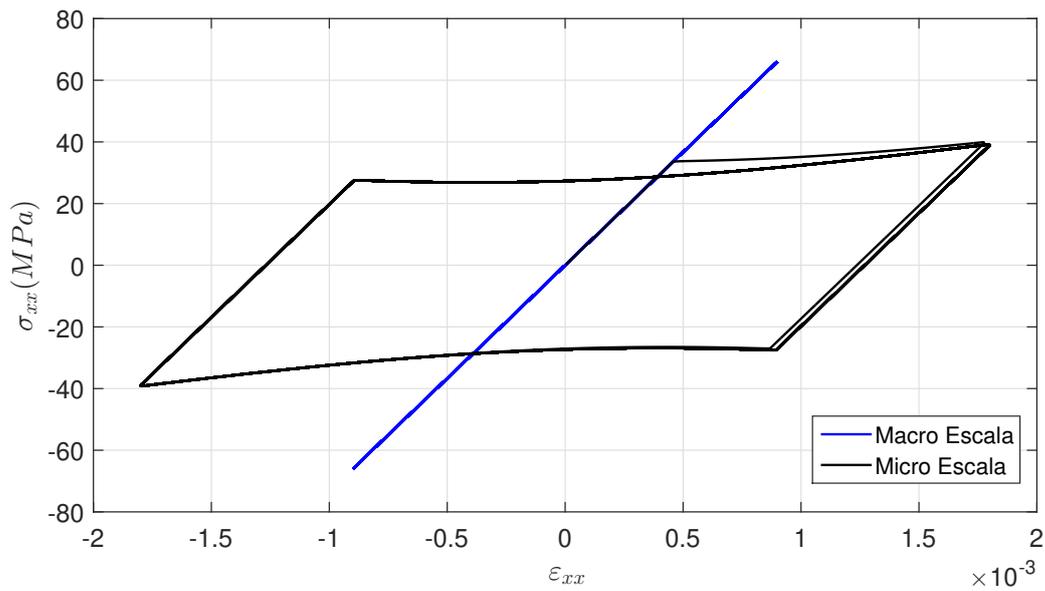


Figura 32 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,09\%$ e $\gamma_a = 0,38\%$.

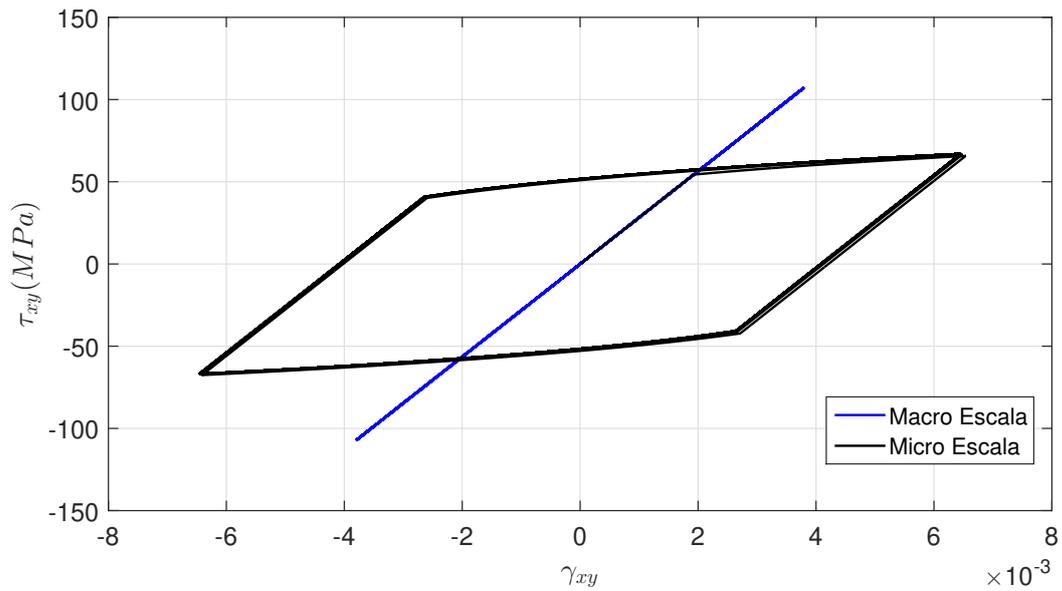


Figura 33 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,09\%$ e $\gamma_a = 0,38\%$.

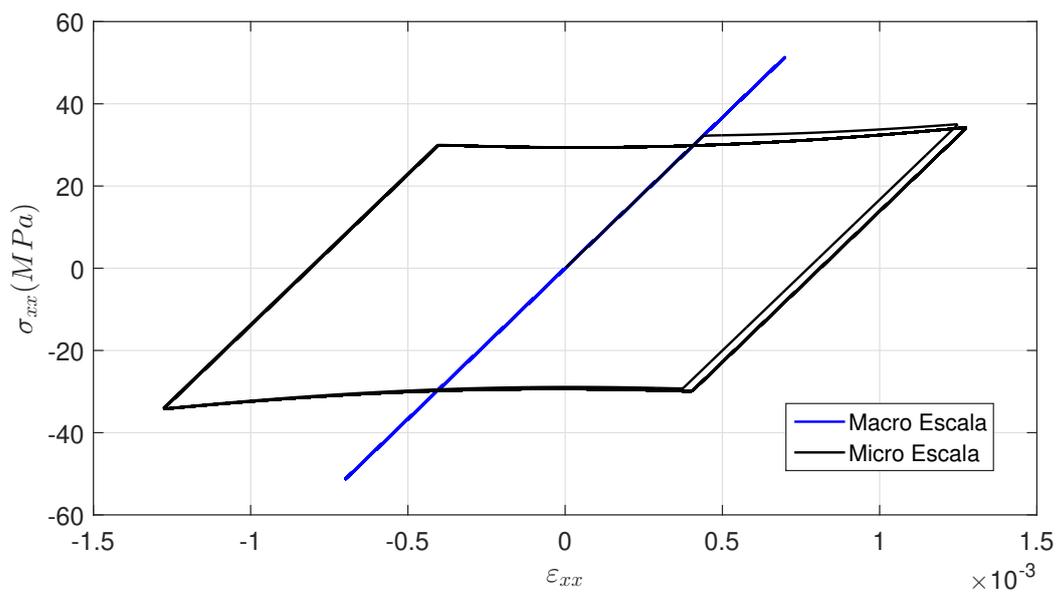


Figura 34 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,07\%$ e $\gamma_a = 0,31\%$.

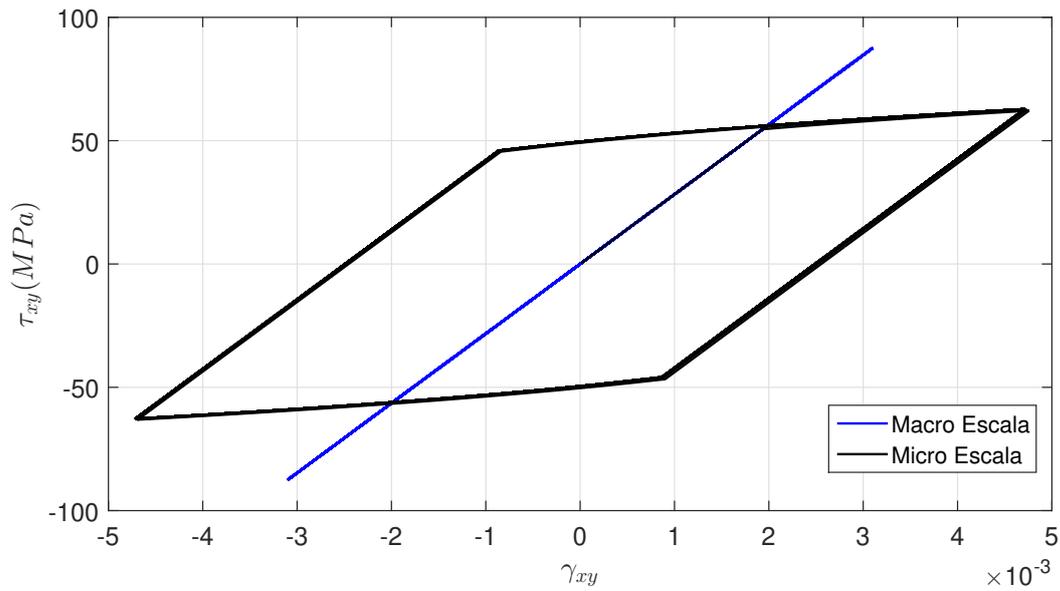


Figura 35 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,07\%$ e $\gamma_a = 0,31\%$.

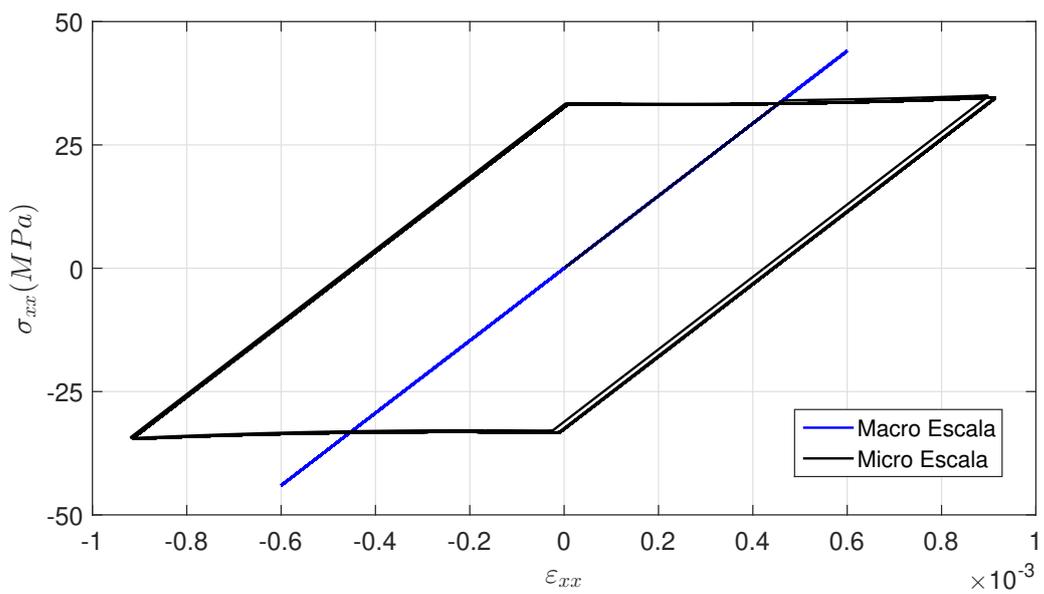


Figura 36 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,06\%$ e $\gamma_a = 0,25\%$.

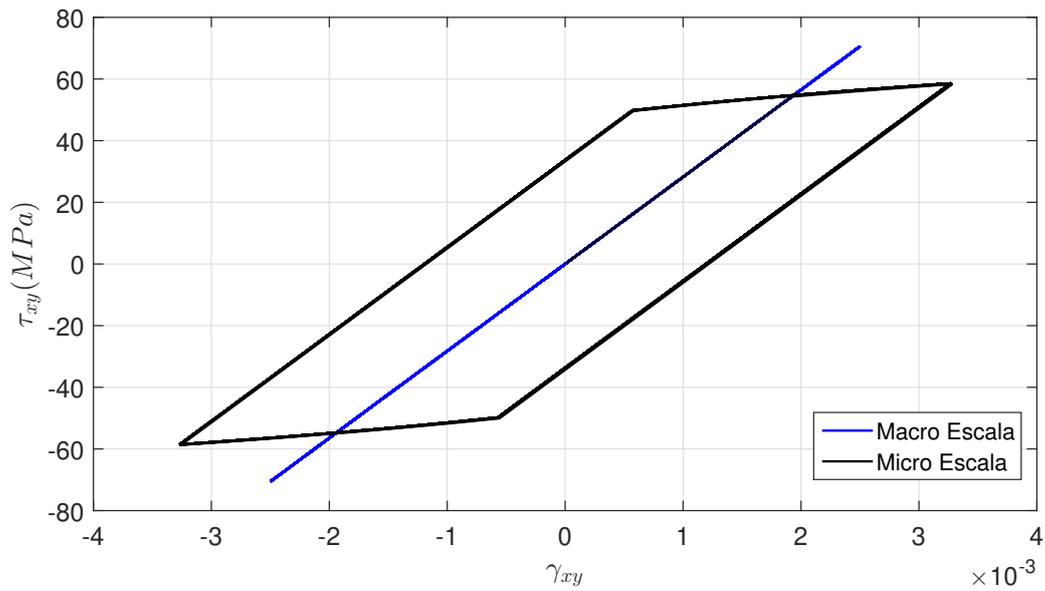


Figura 37 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,06\%$ e $\gamma_a = 0,25\%$.

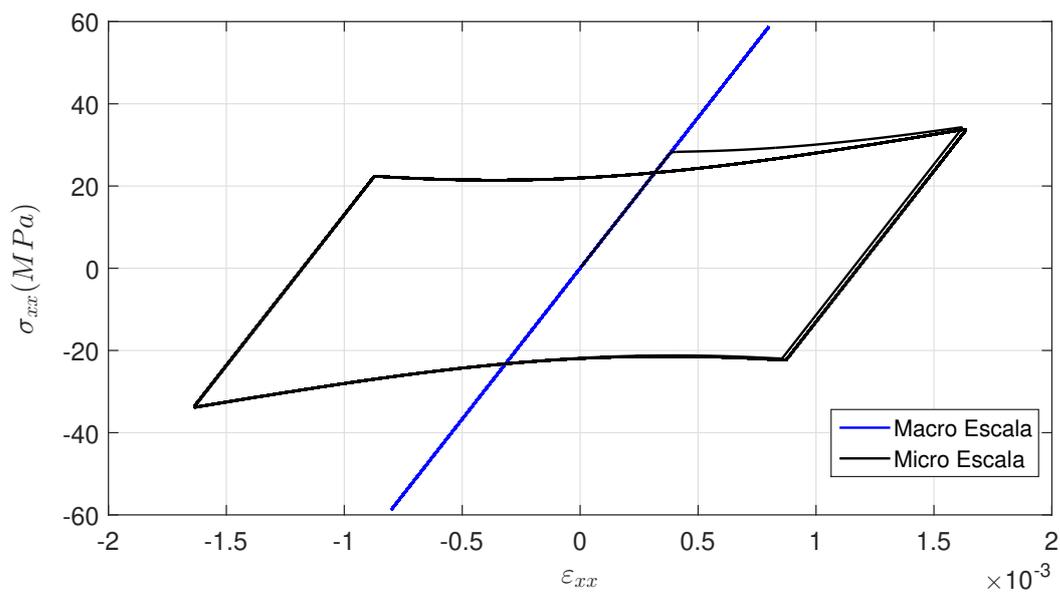


Figura 38 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,08\%$ e $\gamma_a = 0,41\%$.

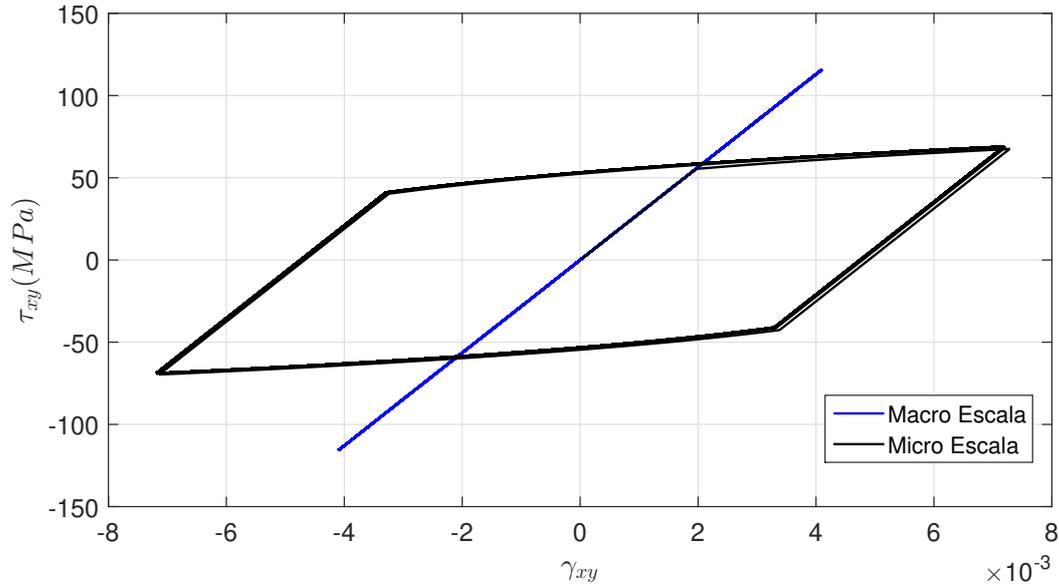


Figura 39 – Comportamento mecânico em condições multiaxiais proporcionais do alumínio 7050-T7451 nas macro e micro escalas para $\varepsilon_a = 0,08\%$ e $\gamma_a = 0,41\%$.

Pode-se observar para os gráficos dos carregamentos que o comportamento não linear é bem pronunciado tanto nas curvas σ vs. ε e τ vs. γ para a maioria dos casos. Assim, o modelo de Armstrong-Frederick distancia-se do comportamento linear previsto por Prager. Ao observar as figuras 32, 34, 36, 38 e compara-las com os gráficos referentes aos carregamentos axiais existe uma aparente contradição, uma vez que nos casos multiaxiais a amplitude de deformação ε_a^μ é menor ou de mesma ordem. No entanto, essa aparente contradição não é verdade. No capítulo 3, $\bar{\varepsilon}^p$ foi definido por meio da Eq.2.30. Nessa equação mostra-se que basicamente $\bar{\varepsilon}^p$ é uma função do tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Para o caso particular de uma condição axial, a única componente do tensor deformação plástica que é não nula é a associada a direção de aplicação da carga, portanto somente ela contribui para o valor final da deformação plástica acumulada. Contudo, em condições multiaxiais outras entradas do tensor são não nulas também, em particular aquelas associadas a γ , em que a direção de aplicação da carga axial é normal ao plano que contém γ . Portanto, ao calcular $\bar{\varepsilon}^p$, outras componentes contribuem para o valor final do mesmo (aumentando-o), de maneira que tal fato é refletido no aumento do comportamento não linear dos laços de histeres nesses casos. O mesmo raciocínio é aplicável aos gráficos torcionais onde a mesma contradição é observada.

Ao analisar todos os resultados gráficos, duas conclusões podem ser tiradas. Primeiro, o modelo em duas escalas consegue capturar presença de plasticidade na micro escala, mesmo que a macro escala seja totalmente elástica, em carregamentos axiais, torcionais e multiaxiais proporcionais. Assim, o cálculo do crescimento do indicador de dano pode, de fato, ser realizado na micro escala. Finalmente, apesar de em alguns casos ter sido observado que o comportamento elastoplástico da inclusão ser aproximadamente linear, existem amplitudes de deformação cisalhante e condições multiaxiais em que a não

linearidade é pronunciada. Dessa forma, é necessário o uso do modelo não linear, apesar do mesmo ser mais complexo matematicamente e gerar aumento em tempo de processamento (mesmo que mínimo). Portanto, foi decidido manter no código de simulação a equação de Armstrong-Frederick, pois o mesmo é capaz de capturar os casos com não linearidade forte e os demais em que tal fato é menos presente.

5.3 Comportamento do Indicador de Dano

A previsão de vida a fadiga necessita que a evolução do indicador I na micro escala seja acompanhado até que o mesmo atinja o valor crítico de $I_c = 1$, que significa a iniciação de uma micro trinca e a conseqüente falha do material. Dessa forma, foram rodados 10^5 ciclos de maneira a observar o comportamento do indicador de dano com o passar dos ciclos N . A seguir são mostrados os resultados obtidos para alguns dos dados contidos na Tabela ?? simulados. Para os gráficos mostrados, o valor de S utilizado foi o dado pela Eq.2.58.

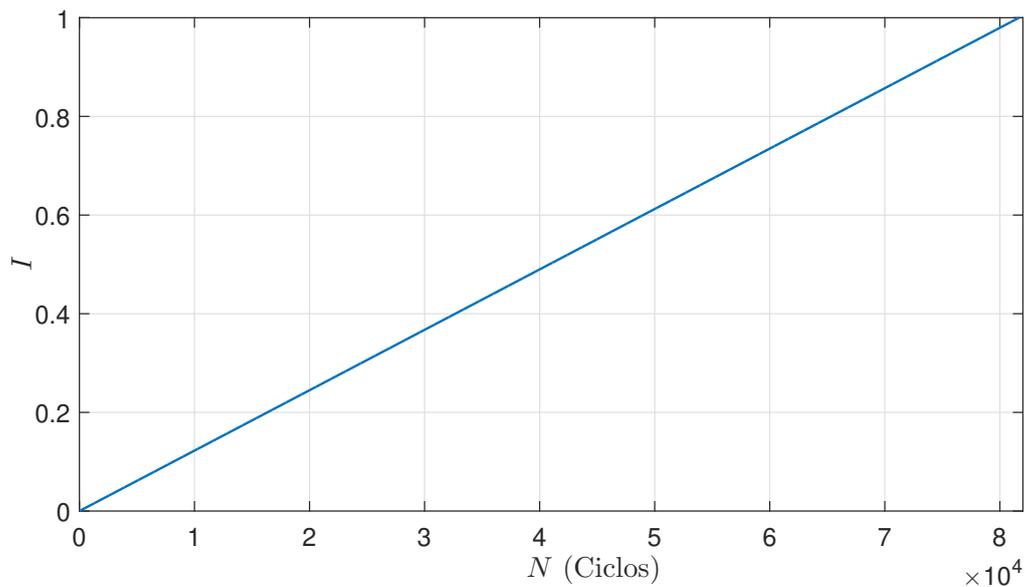


Figura 40 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\varepsilon_a = 0,28\%$.

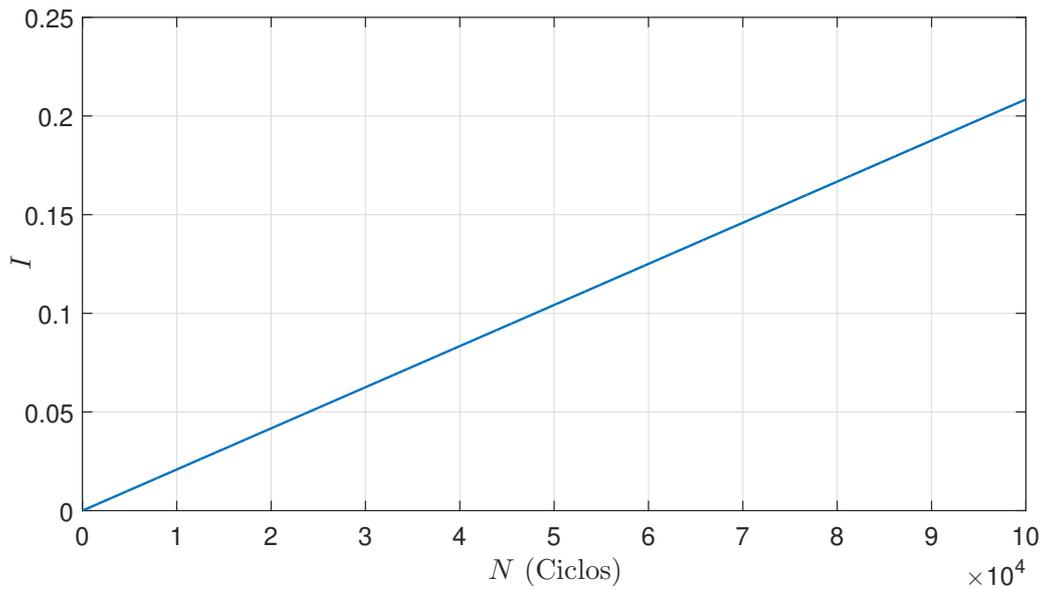


Figura 41 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\gamma_a = 0,61\%$.

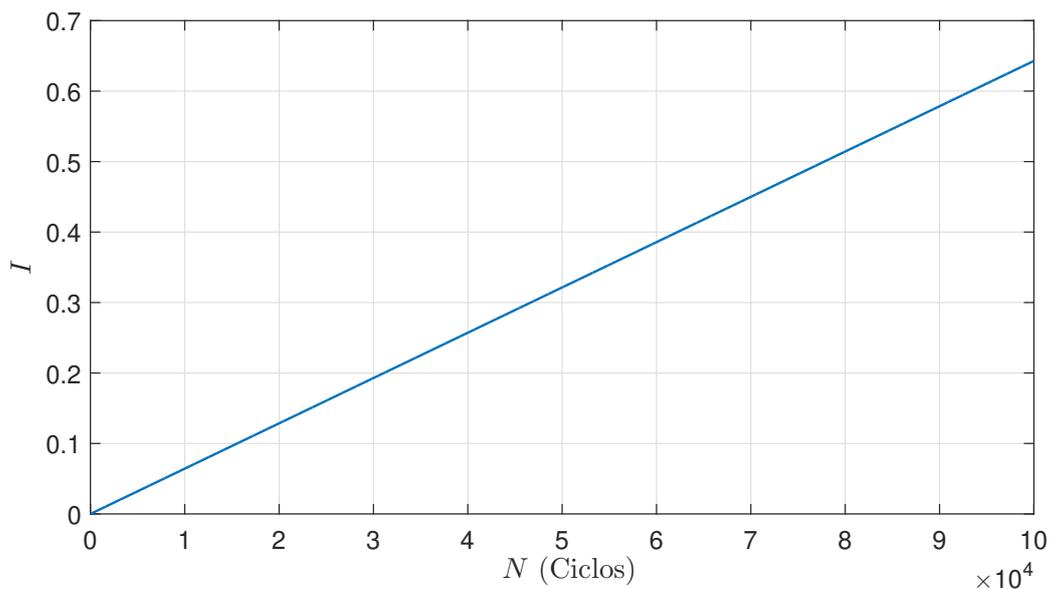


Figura 42 – Comportamento do Indicador de Dano de Vaz.Jr com o passar dos ciclos para $\epsilon_a = 0,17\%$ e $\gamma_a = 0,22\%$.

Nota-se que o comportamento observado nas figuras 40, 41 e 42 é linear e além disso, esse fato foi observado para todas simulações. Por isso foi decidido mostrar por ora somente três gráficos de I vs. N , um para cada caso de carregamento (axial, torcional e multiaxial). Além disso, pode-se observar que para o caso puramente axial com ϵ_a , o material falha antes dos 10^5 ciclos, fato esse que tem explicação por meio de S , que será explicado posteriormente.

A resposta pode ser explicada por meio da evolução de $\bar{\epsilon}^p$ com N . Ao se plotar uma curva $\bar{\epsilon}^p$ vs N nota-se o mesmo perfil linear. Logo, como I é uma função de $\bar{\epsilon}^p$ é natural

que a linearidade fosse refletida em I . É importante ressaltar que o comportamento linear de $\bar{\varepsilon}^p$ somente ocorre pois no presente trabalho o dano, e conseqüentemente I , é tratado de forma desacoplada.

O que diferencia os gráficos de cada simulação é o coeficiente angular da reta, que está diretamente associado as amplitudes de deformação aplicadas. A inclinação da reta está intimamente ligada a velocidade de crescimento de I , ou seja, quanto maior essa inclinação mais rapidamente I evolui. A relação do coeficiente angular e as amplitudes ε_a^μ e γ_a^μ nos casos não multiaxiais, pode ser explicada ao notar-se que amplitudes maiores significam uma maior chance de que se leve menos tempo para ocorrer a falha do material. Logo, as maiores inclinações observadas ocorrem nos maiores valores de amplitudes. Por exemplo, analisando as curvas I vs N para os maiores e menores valores de ε_a^μ e γ_a^μ nota-se que os maiores valores claramente mostram retas mais íngremes.

Para os caso multiaxiais proporcionais, o coeficiente angular será uma combinação dos mesmos coeficientes que seriam gerados caso as componentes de deformação do carregamento estivessem atuando sozinhas. O comportamento linear observado apresenta uma vantagem para previsão de vida que poucos modelos de fadiga apresentam. Como I evolui em função de N por uma reta, pode-se obter a equação da referida curva por meio de uma regressão linear. Em posse da descrição matemática da curva, ela pode ser extrapolada até o ponto em que $I = 1,0$, identificando assim a vida prevista numericamente N_{NUM} . Dessa forma, não é necessário que o programa seja rodado até que I_c seja atingido, o que economiza um tempo considerável.

A metodologia adotada de obtenção de N_{NUM} segue as seguintes etapas:

- Primeiramente, roda-se uma quantidade suficiente de ciclos, de forma que sejam colhidos uma quantidade razoável de pontos para traçar a curva I vs N . No presente trabalho, foi considerado que $N = 10000$ é uma quantidade razoável de ciclos.
- Em posse do gráfico, realiza-se uma regressão linear do mesmo, obtendo a equação da reta traçada. Desse ajuste, espera-se que a correlação $R^2 \cong 1,00$ e que o coeficiente linear seja algo muito próximo de zero.
- Iguala-se a equação da reta com o valor de $I_c = 1,0$, resolvendo essa igualdade, obtém-se N_{NUM} . Alternativamente, como o coeficiente linear é praticamente zero, N_{num} pode ser tomado como o inverso da inclinação do gráfico.

Como dito anteriormente em capítulos prévios, a Mecânica do Dano Contínuo é uma alternativa aos métodos clássicos de fadiga e apresenta a vantagem de não depender de uma contagem de ciclos para realizar previsões, dispensando assim procedimentos como *rainflow*. A mecânica do dano depende somente do histórico de carregamento para realização dos cálculos. Em comparação com os modelos de mecânica do dano que são acoplados, a utilização de indicadores possui a vantagem de ser desacoplada do problema

elastoplástico, podendo ser calculada em etapas de pós processamento, como foi o caso do algoritmo feito neste trabalho. Esse fato proporciona economia de tempo.

Sobre a metodologia de obtenção de N_{NUM} podem ser feitas algumas observações apesar de faltar a validação do mesmo com base nos dados experimentais. Primeira, a metodologia em si é simples, o que em um contexto industrial por exemplo é relevante. Pode-se observar no procedimento que não são necessários cálculos complexos ou ferramentas computacionais sofisticadas, de forma que em posse do código desenvolvido e das etapas para obter N_{NUM} , qualquer usuário poderia usufruir do programa, podendo ser usado por qualquer funcionário da indústria, inclusive em nível técnico. Segundo, o algoritmo simula o que ocorre em um ponto de Gauss somente. No entanto, ele mostra potencial de ser anexado a um problema de Elementos Finitos, de forma que seria possível simular um componente de geometria complexa em condições cíclicas, extrair o ponto mais solicitado, e passar para o programa com o modelo de duas escalas.

5.4 Previsões Para Fadiga

Com base na metodologia explicada na seção anterior e com as informações do capítulo anterior, realizou-se uma comparação entre os resultados numéricos e experimentais. No estudo da fadiga, essa comparação é feita de forma qualitativa por um gráfico chamado de Vida-vida. Nessa gráfico em escala logarítmica, tem-se no eixo das abcissas a vida experimental N_{EXP} e a ordenada relacionada a N_{NUM} , plotando-se assim um ponto referente ao par ordenado (N_{EXP}, N_{NUM}) . Além dos pontos são traçados também uma linha com inclinação de 45° , que indicaria uma previsão exata, e outras linhas paralelas a essa só que defasadas, chamadas de bandas. As bandas dão uma noção da ordem do erro que está sendo cometido na previsão. Os resultados também foram colocados em tabelas para uma visualização quantitativa dos resultados alcançados.

5.4.1 Resultados Obtidos Usando $S_{0.33}$

As primeiras previsões realizadas usaram como valor calibrado para S sendo igual a $S_{0.33}$. Em outras palavras, o denominador de dano foi calibrado somente em relação aos dados para carregamentos axiais. Recordando do capítulo 5 vem que $S_{0.33} = 56,2 MPa$. A tabela foi obtida usando o procedimento de previsão descrito da seção anterior e possui N_{NUM} , N_{EXP} e o erro cometido na previsão e . É importante ressaltar que diferentemente do que foi mostrado antes, o erro foi mantido sem o valor absoluto de maneira a ser enxergar se a previsão foi conservadora (subestimou a vida) ou não (superestimou a vida). Então, e é definido como:

$$e = \frac{N_{EXP} - N_{NUM}}{N_{EXP}} \quad (5.1)$$

A definição do erro contido na Tabela 12 mostra que se $e < 0$ então a previsão feita superestimou a vida, caso $e > 0$ então a previsão subestimou a mesma.

Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,28	0,00	$7,80 \cdot 10^4$	$9,38 \cdot 10^4$	-20,27
0,28	0,00	$4,58 \cdot 10^4$	$9,38 \cdot 10^4$	-104,82
0,25	0,00	$6,57 \cdot 10^4$	$1,21 \cdot 10^5$	-84,09
0,25	0,00	$5,26 \cdot 10^4$	$1,21 \cdot 10^5$	-129,87
0,25	0,00	$1,19 \cdot 10^5$	$1,21 \cdot 10^5$	-1,64
0,25	0,00	$9,49 \cdot 10^4$	$1,21 \cdot 10^5$	-27,45
0,25	0,00	$5,45 \cdot 10^4$	$1,21 \cdot 10^5$	-121,92
0,20	0,00	$2,13 \cdot 10^5$	$2,21 \cdot 10^5$	-3,91
0,20	0,00	$1,45 \cdot 10^5$	$2,21 \cdot 10^5$	-52,22
0,18	0,00	$9,77 \cdot 10^5$	$1,06 \cdot 10^6$	96,67
0,18	0,00	$3,00 \cdot 10^5$	$3,25 \cdot 10^6$	-8,31
0,18	0,00	$1,47 \cdot 10^5$	$3,25 \cdot 10^6$	-120,91
0,15	0,00	$8,23 \cdot 10^6$	$1,06 \cdot 10^6$	87,17
0,15	0,00	$2,92 \cdot 10^5$	$1,06 \cdot 10^6$	-262,40
0,15	0,00	$1,27 \cdot 10^6$	$1,06 \cdot 10^6$	16,68
0,00	0,61	$8,90 \cdot 10^4$	$3,32 \cdot 10^4$	62,75
0,00	0,61	$5,63 \cdot 10^4$	$3,32 \cdot 10^4$	41,11

Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,00	0,61	$2,86 \cdot 10^4$	$3,32 \cdot 10^4$	-15,93
0,00	0,42	$3,68 \cdot 10^5$	$6,39 \cdot 10^4$	82,63
0,00	0,38	$1,54 \cdot 10^6$	$7,89 \cdot 10^4$	94,88
0,00	0,38	$6,54 \cdot 10^5$	$7,89 \cdot 10^4$	87,94
0,00	0,38	$5,00 \cdot 10^5$	$7,89 \cdot 10^4$	84,23
0,00	0,31	$3,24 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^5$	95,92
0,00	0,31	$2,76 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^5$	95,21
0,00	0,31	$2,42 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^5$	94,53
0,00	0,31	$2,07 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^5$	96,61
0,00	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$1,86 \cdot 10^5$	92,56
0,00	0,28	$2,35 \cdot 10^6$	$1,86 \cdot 10^5$	92,08
0,00	0,24	$1,74 \cdot 10^6$	$4,04 \cdot 10^5$	76,80
0,00	0,24	$6,23 \cdot 10^6$	$4,04 \cdot 10^5$	93,52
0,00	0,24	$9,47 \cdot 10^6$	$4,04 \cdot 10^5$	95,74
0,00	0,24	$5,11 \cdot 10^6$	$4,04 \cdot 10^5$	92,10
0,17	0,22	$1,56 \cdot 10^5$	$1,33 \cdot 10^4$	14,59
0,17	0,22	$2,30 \cdot 10^5$	$1,33 \cdot 10^5$	42,07
0,09	0,38	$2,47 \cdot 10^5$	$7,22 \cdot 10^4$	70,79

Tabela 12 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,07	0,31	$1,47 \cdot 10^6$	$1,17 \cdot 10^5$	92,03
0,07	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$1,60 \cdot 10^5$	93,62
0,06	0,25	$1,86 \cdot 10^6$	$1,99 \cdot 10^5$	89,29
0,06	0,25	$4,54 \cdot 10^6$	$1,99 \cdot 10^5$	95,61
0,06	0,25	$6,87 \cdot 10^6$	$1,99 \cdot 10^5$	97,06
0,08	0,41	$2,12 \cdot 10^5$	$6,34 \cdot 10^4$	70,11

Analisando os resultados da tabela pode se observar que de forma geral os menores erros cometidos em valor absoluto foram cometidos nos carregamentos axiais e no caso multiaxial proporcional com $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Esse fato já era esperado, uma vez que o denominador de dano S foi calibrado para esse conjunto de dados. Em relação ao caso multiaxial citado, o valor λ indica que o carregamento tem uma contribuição dominante da parcela axial, portanto o valor S utilizado serviu de mesma maneira como para as condições axiais. No entanto aos olharmos os dados torcionais e aqueles referentes as demais outras condições multiaxiais, os erros cometidos forma em média grandes, o que indica que a previsão feita para esses casos não foi satisfatória.

Em relação a natureza dos erros cometidos, nota-se que para as condições axiais a previsão superestimou a vida (não-conservadora), e para o multiaxial com $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o valor calculado subestimou o período até a falha (conservadora). Para os torcionais e demais multiaxiais, a maioria das previsões realizadas foram conservadoras.

As observações feitas podem ser explicadas com base no valor de S utilizado. Primeiramente, recordando da Eq.2.56, deve se notar que existe uma aparente relação inversamente proporcional entre I e S , relação essa que foi de fato observada nas simulações realizadas no trabalho. Em outras palavras, pode-se deduzir que S tem influência sobre a forma que o indicador de dano evolui. Como será mostrado posteriormente, para carregamentos cisalhantes, S costuma ter valores bem maiores do que o valor $S_{0,33}$ utilizado, de forma que nesses casos a o indicador cresce de forma mais lenta do que em comparação com os axiais. O mesmo fato se verifica para os carregamentos proporcionais em que a parcela cisalhante possui a maior influência. Por isso o valor de N_{NUM} obtido para essas condições foi conservadora, pois I cresceu de forma mais rápida do que deveria.

As informações contidas na Tabela 12 e as demais observações feitas podem ser vistas mais claramente a partir do gráfico vida-vida feito a seguir:

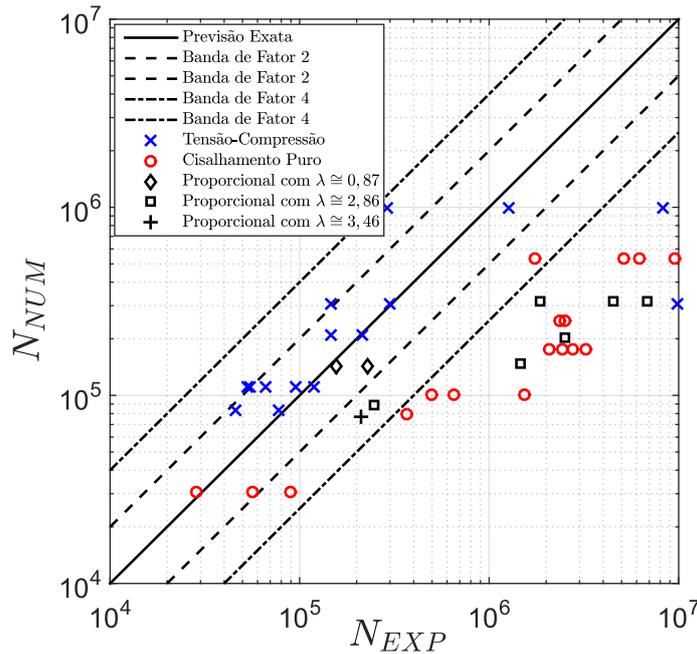


Figura 43 – Gráfico Vida-Vida para $S = S_{0.33}$.

A partir da Figura 43 pode-se entender de forma mais clara o que são previsões conservadoras ou (conservativas) e não conservadoras (ou não conservativas). A linha sólida mostrada na Fg.43 é a que define a previsão exata, ou seja $N_{NUM} = N_{EXP}$. Os pontos que se encontram abaixo dessa linha são os pontos que definem as previsões conservadoras, pois qualquer ponto abaixo dessa linha é tal que $N_{NUM} < N_{EXP}$. Os pontos acima da linha de previsão exata, ou seja $N_{NUM} > N_{EXP}$, são aqueles em que o valor previsto foi não conservativo.

Além disso, pode-se analisar a proporção de pontos referentes a distribuição sobre o gráfico. Primeiramente, cerca de 73,3 % dos pontos axiais ficaram no interior da banda de fator 2, e 86,7% no interior da banda de fator 4. Para os pontos de cisalhamento, 11,8% dos pontos ficaram contidos na banda 2 e 23,5% na banda de fator 4. Para os casos multiaxiais proporcionais, 22,2% dos pontos ficaram dentro da banda de fator 2 e 44,4%. Do ponto de vista global, 36,7% dos pontos ficaram no interior da banda de fator 2 e 51,2% na de fator 4. Nota-se que a maior proporção de pontos no interior das bandas foi de fato para o conjunto de dados axiais, e que do ponto de vista global, quase metade da totalidade dos pontos residem no interior das bandas.

5.4.2 Resultados Obtidos Usando $S = S_{0,0}$

Uma vez realizada a primeira bateria de previsões de vida, realizou-se o cálculo de N_{NUM} agora usando o valor do denominador de dano calibrado para o conjunto de dados em cisalhamento puro, ou seja $S_{0,0} = 813,0MPa$. Nessa etapa, espera-se que as

previsões sejam satisfatórias para o conjunto de dados em cisalhamento e multiaxiais com contribuição cisalhante mais influente. Da mesma forma como feito anteriormente, gerou-se uma tabela semelhante a Tabela 12 só que para o novo valor de S usado nas simulações.

Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentais e as previsões numéricas para $S = S_{0.0}$.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,28	0,00	$7,80 \cdot 10^4$	$1,36 \cdot 10^6$	-1640, 26
0,28	0,00	$4,58 \cdot 10^4$	$1,36 \cdot 10^6$	-2863, 77
0,25	0,00	$6,57 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^6$	-2563, 76
0,25	0,00	$5,26 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^6$	-3226, 09
0,25	0,00	$1,19 \cdot 10^5$	$1,75 \cdot 10^6$	-1370, 66
0,25	0,00	$9,49 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^6$	-1744, 14
0,25	0,00	$5,45 \cdot 10^4$	$1,75 \cdot 10^6$	-3111, 17
0,20	0,00	$2,13 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	-1403, 31
0,20	0,00	$1,45 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	-2102, 17
0,18	0,00	$9,77 \cdot 10^6$	$4,70 \cdot 10^6$	51, 56
0,18	0,00	$3,00 \cdot 10^5$	$4,70 \cdot 10^6$	-1467, 04
0,18	0,00	$1,47 \cdot 10^5$	$4,70 \cdot 10^6$	-3096, 19
0,15	0,00	$8,23 \cdot 10^6$	$1,53 \cdot 10^7$	-86, 02
0,15	0,00	$2,92 \cdot 10^5$	$1,53 \cdot 10^7$	-5142, 89
0,15	0,00	$1,27 \cdot 10^6$	$1,53 \cdot 10^7$	-1105, 45

Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentiais e as previsões numéricas para $S = S_{0,0}$.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,00	0,61	$8,90 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-439,15
0,00	0,61	$5,63 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-752,30
0,00	0,61	$2,86 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-1577,78
0,00	0,42	$3,68 \cdot 10^5$	$9,25 \cdot 10^5$	-151,38
0,00	0,38	$1,54 \cdot 10^6$	$1,14 \cdot 10^6$	25,92
0,00	0,38	$6,54 \cdot 10^5$	$1,14 \cdot 10^6$	-74,43
0,00	0,38	$5,00 \cdot 10^5$	$1,14 \cdot 10^6$	-128,15
0,00	0,31	$3,24 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	40,92
0,00	0,31	$2,76 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	30,64
0,00	0,31	$2,42 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	20,90
0,00	0,31	$2,07 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	7,52
0,00	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$2,69 \cdot 10^6$	-7,64
0,00	0,28	$2,35 \cdot 10^6$	$2,69 \cdot 10^6$	-14,51
0,00	0,24	$1,74 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	-235,70
0,00	0,24	$6,23 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	6,24
0,00	0,24	$9,47 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	38,32
0,00	0,24	$5,11 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	-14,31
0,17	0,22	$1,56 \cdot 10^5$	$1,93 \cdot 10^6$	-1135,83

Tabela 13 – Comparação entre as vidas experimentiais e as previsões numéricas para $S = S_{0,0}$.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,17	0,22	$2,30 \cdot 10^5$	$1,93 \cdot 10^6$	-738, 22
0,09	0,38	$2,47 \cdot 10^5$	$1,04 \cdot 10^6$	-322, 52
0,07	0,31	$1,47 \cdot 10^6$	$1,69 \cdot 10^6$	-15, 24
0,07	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$2,31 \cdot 10^6$	7, 64
0,06	0,25	$1,86 \cdot 10^6$	$3,60 \cdot 10^6$	-93, 46
0,06	0,25	$4,54 \cdot 10^6$	$3,60 \cdot 10^6$	20, 74
0,06	0,25	$6,87 \cdot 10^6$	$3,60 \cdot 10^6$	46, 93
0,08	0,41	$2,12 \cdot 10^5$	$9,14 \cdot 10^4$	-331, 17

Ao analisar a Tabela 13, nota-se que como esperado, os erros cometidos para os carregamentos cisalhantes e proporcionais com influencia maior da parcela cisalhante ($\lambda = \frac{33\sqrt{3}}{20}$) foram menores em valor absoluto do que os observados na Tabela12 para as mesmas condições de carga. Esse fato só não foi observado para a condição multiaxial com $\lambda = 2\sqrt{3}$. No entanto, ao analisarmos os demais casos, percebe-se que o erro passou a tomar valores bem elevados. Quanto a natureza dos erros, observa-se que para as condições cisalhantes as previsões foram em boa parte conservadoras, ou seja com $e > 0$. Para os carregamentos multiaxiais com $\lambda = \frac{33\sqrt{3}}{20}$ e $\lambda = 2\sqrt{3}$ as previsões foram metade conservadoras para o primeiro e não conservadoras para o segundo. Se tratando dos dados axiais e da outra condição multiaxial, os cálculos de N_{NUM} mostraram-se não conservadoras em sua maioria.

De forma oposta ao que foi constatado quando usado $S = S_{0,33}$, o valor mais alto do denominador proporcionou um crescimento mais lento do indicador requerido para os carregamentos torcionais. No entanto, o crescimento foi muito lento para os casos axiais, explicando o fato de as previsões para estes indicarem falhas ocorrerem muito depois do que na realidade. Portanto, pode-se observar que de fato, S mostra uma dependência com as condições de carga impostas, tornando propício o uso de S como dependente do estado de tensão.

Da mesma forma, a Tabela 13 pode ser vista de forma gráfica pelo gráfico vida-vida como segue:

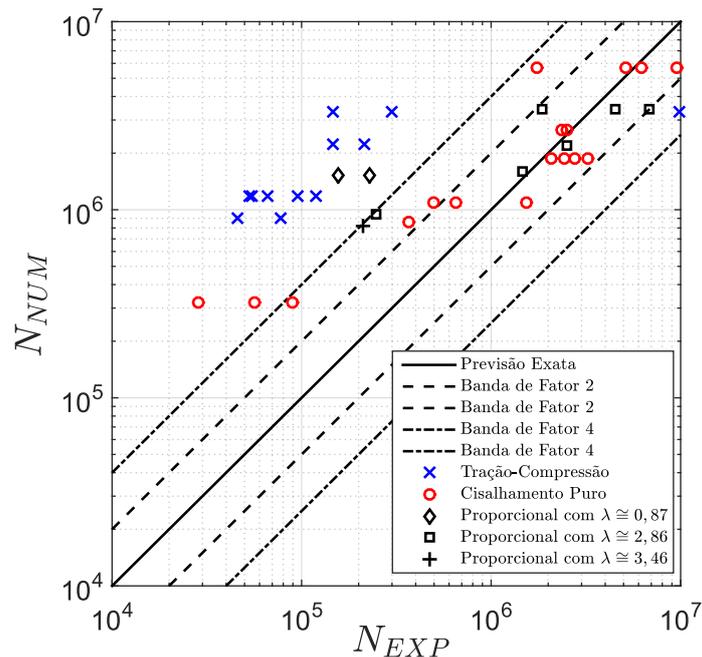


Figura 44 – Gráfico Vida-Vida para $S = S_{0,0}$.

Observando a Fig.44 pode-se ver claramente que a maioria dos pontos axiais e o multiaxial com $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ficaram todos praticamente acima da linha de previsão exata e que a maioria dos cisalhantes ficaram abaixo. No tocante a distribuição dos pontos no gráfico, para os pontos axiais 6,7% ficaram no interior da banda de fator 2, mesma quantidade de pontos na de fator 4. Em relação aos pontos para condições torcionais, 64,7% dos pontos ficaram contidos na banda de fator 2 e 82,4% dentro da de fator 4. Para os casos multiaxiais, 55,6% dos pontos ficaram no interior da banda de fator 2 e 77,8% na de fator 4. Em aspectos globais, 39,0% de todos os pontos ficaram contidos na banda de fator 2 e 53,7% no interior na de fator 4. Nota-se que a proporção de pontos totais contidos nas bandas foi relativamente maior do que aquele quando $S_{0,33}$ foi utilizado.

5.4.3 Resultados Obtidos Usando S Como uma Função do Estado de Tensão

Como observado, o denominador de dano assume valores consideravelmente diferentes para as calibrações em condições axiais e cisalhantes. Dessa a forma, o uso de S sendo dependente das condições de carregamento mostra-se como uma boa solução para a implementação de um único programa de simulação, que calcula valores de S de acordo com o estado de tensão no passo analisado. Recordando da Eq.2.58, para sua implementação são necessários os valores já calibrados para os carregamentos axiais $S_{0,33} = 24,5MPa$ e cisalhantes $S_{0,0} = 263,2MPa$. Em posse desses valores, a forma discretizada da função, dada pela Eq.3.53, pode ser passado ao programa. Novamente, uma tabela como as Tabelas 12 e 13 foi gerada para a nova implementação feita:

Tabela 14 – Comparação entre vidas experimentais e e previsões numéricas para S variável.

ε_a (%)	γ_a (%)	N_{EXP} (Ciclos)	N_{NUM} (Ciclos)	e (%)
0,28	0,00	$7,80 \cdot 10^4$	$7,97 \cdot 10^4$	-2,16
0,28	0,00	$4,58 \cdot 10^4$	$7,97 \cdot 10^4$	-73,98
0,25	0,00	$6,57 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^5$	-62,79
0,25	0,00	$5,26 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^5$	-103,23
0,25	0,00	$1,19 \cdot 10^5$	$1,07 \cdot 10^5$	10,12
0,25	0,00	$9,49 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^5$	-12,70
0,25	0,00	$5,45 \cdot 10^4$	$1,07 \cdot 10^5$	-96,24
0,20	0,00	$2,13 \cdot 10^5$	$2,02 \cdot 10^5$	5,14
0,20	0,00	$1,45 \cdot 10^5$	$2,02 \cdot 10^5$	-38,97
0,18	0,00	$9,77 \cdot 10^6$	$3,00 \cdot 10^5$	96,93
0,18	0,00	$3,00 \cdot 10^5$	$3,00 \cdot 10^5$	0,10
0,18	0,00	$1,47 \cdot 10^5$	$3,00 \cdot 10^5$	-103,75
0,15	0,00	$8,23 \cdot 10^6$	$9,84 \cdot 10^5$	88,04
0,15	0,00	$2,92 \cdot 10^5$	$9,84 \cdot 10^5$	-237,07
0,15	0,00	$1,27 \cdot 10^6$	$9,84 \cdot 10^5$	22,50
0,00	0,61	$8,90 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-439,15
0,00	0,61	$5,63 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-752,30

0,00	0,61	$2,86 \cdot 10^4$	$4,80 \cdot 10^5$	-1577,78
0,00	0,42	$3,68 \cdot 10^5$	$9,25 \cdot 10^5$	-151,38
0,00	0,38	$1,54 \cdot 10^6$	$1,14 \cdot 10^6$	25,92
0,00	0,38	$6,54 \cdot 10^5$	$1,14 \cdot 10^6$	-74,45
0,00	0,38	$5,00 \cdot 10^5$	$1,14 \cdot 10^6$	-128,18
0,00	0,31	$3,24 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	40,91
0,00	0,31	$2,76 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	30,63
0,00	0,31	$2,42 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	20,88
0,00	0,31	$2,07 \cdot 10^6$	$1,91 \cdot 10^6$	7,51
0,00	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$2,69 \cdot 10^6$	-7,64
0,00	0,28	$2,35 \cdot 10^6$	$2,69 \cdot 10^6$	-14,51
0,00	0,24	$1,74 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	-235,70
0,00	0,24	$6,23 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	6,24
0,00	0,24	$9,47 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	38,32
0,00	0,24	$5,11 \cdot 10^6$	$5,84 \cdot 10^6$	-14,31
0,17	0,22	$1,56 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^5$	0,28
0,17	0,22	$2,30 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^5$	32,36
0,09	0,38	$2,47 \cdot 10^5$	$1,77 \cdot 10^5$	28,15
0,07	0,31	$1,47 \cdot 10^6$	$2,87 \cdot 10^5$	80,49
0,07	0,28	$2,50 \cdot 10^6$	$3,96 \cdot 10^5$	84,16

0,06	0,25	$1,86 \cdot 10^6$	$6,27 \cdot 10^5$	66,29
0,06	0,25	$4,54 \cdot 10^6$	$6,27 \cdot 10^5$	86,19
0,06	0,25	$6,87 \cdot 10^6$	$6,27 \cdot 10^5$	90,75
0,08	0,41	$2,12 \cdot 10^5$	$1,80 \cdot 10^5$	15,15

Ao analisar-se os dados referentes a cargas axiais, a Tabela 14 mostrou resultados melhores quando comparados com a Tabela 13 e erros relativamente menores do que os observados para o mesmo conjunto de informações dado pela Tabela 12. No tocante a natureza dos erros cometidos pode-se notar que em sua grande maioria N_{NUM} fio não conservativo.

Observando o conjunto de informações referentes ao cisalhamento puro, observaram-se poucas diferenças perceptíveis entre os resultados contidos nas Tabelas 14 e 13, o que já era esperado, pois para uma condição de cisalhamento puro, vem que $\eta = 0,0$ e $\xi = 0,0$, conseqüentemente pela Eq.2.58 S recupera o valor $S_{0,0}$. No entanto, observa-se uma divergência significativa para ambas tabelas em relação aos dados com $\gamma_a = 0,61\%$. Isso ocorre porque o valor de $S_{0,0}$ foi grande de mais do que o requerido para essa amplitude, basta olhar no capítulo anterior que no processo de obtenção de $S_{0,0}$, a referida amplitude foi que mostrou o menor valor se S . Ao comparar a Tabela 14 com a Tabela 12, nota-se que os resultados alcançados para o conjunto de pontos em cisalhamento foi consideravelmente melhor. Em relação a natureza das previsões, N_{NUM} foi em boa parte conservador.

Finalmente, analisando os dados multiaxiais pode-se observar um fato interessante. De modo geral, ao utiliza-se S como um parâmetro variável, o modelo foi capaz de realizar previsões com erros em média menores dos que observados para as outras duas condições de S usados. Então de fato, o uso de uma denominador de dano como uma função do estado de tensão foi capaz de conciliar os dois valores calibrados de S de forma a obter simulações que se adequassem a cada tipo de carregamento imposto. Portanto, pode-se afirmar que a proposta da utilização de S dado pela Eq.2.58 cumpriu sua função de aliar os dois valores calibrados de S .

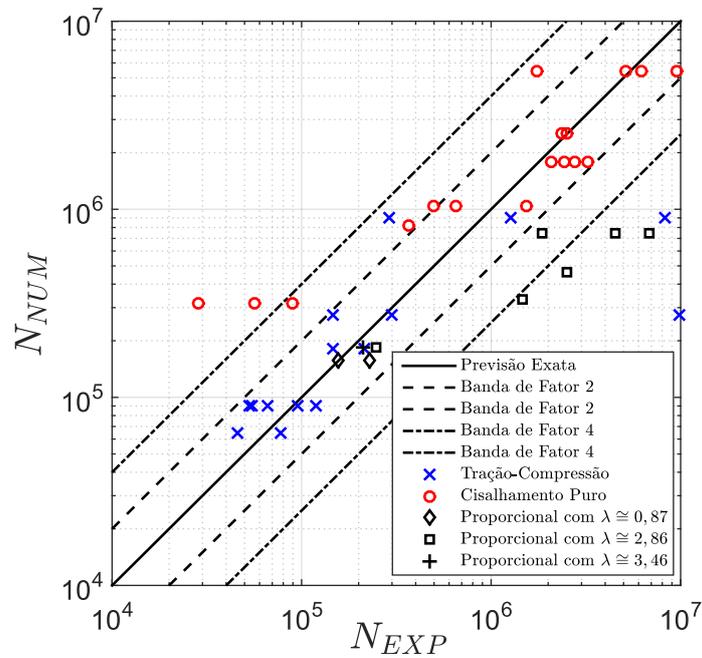


Figura 45 – Gráfico Vida-Vida para $S = f(\sigma)$.

Em relação a distribuição dos pontos no interior das bandas, cerca de 80,0% dos pontos em condições axiais ficaram contidos na banda de fator 2 e 86,7% na de fator 4. Para as condições torcionais, 64,7% dos pontos ficaram no interior da banda de fator 2 e 82,4% dentro da de fator 4. Para os pontos multiaxiais, 44,4% dos pontos ficaram dentro da banda de fator 2 e 66,7% na de fator 4. Finalmente, em aspectos globais tem-se que 65,9% de todos os pontos ficaram contidos na banda de fator 2 e 78,0% na de fator 4. Nota-se que a utilização da Eq.2.58 proporcionou a melhor distribuição de pontos no interior das bandas dentre todas as condições de simulação usadas.

6 Artigo

O presente Capítulo apresenta um artigo elaborado para publicação no contexto do Projeto de Graduação 2. Nesse trabalho, uma análise acoplada é conduzida e comparada com a abordagem desacoplada. É demonstrado que a metodologia acoplada gera as melhores previsões de vida. A fim de mostrar o potencial do modelo proposto, os melhores resultados são comparados com o bem critério bem estabelecido de Smith-Watson-Topper.

Fatigue Analysis For The Aluminum Alloy 7050-T7451 Performed By A Two Scale Continuum Damage Mechanics Model

L.M. Araújo, G.V. Ferreira, R.S. Neves, L. Malcher

malcher@unb.br

*Department of Mechanical Engineering, University of Brasilia, 70910-900 Brasilia, DF,
Brazil*

Abstract

The aim of this work is to propose a fatigue life prediction tool based on a two scale elastoplastic model and Continuum Damage Mechanics for tests performed in force control. In such experiments, traditional Continuum Damage Mechanics (CDM) Theory does not show satisfactory results, since this tests are designed to produce only elastic behavior. In this setting, an elastoplastic two scale model is proposed in order to extend the standard CDM method to tests conducted in force control for the aluminum alloy 7050-T7451. Furthermore, the Improved CDM model is also employed to demonstrate the effect of the calibration point in the fatigue analysis and to refine the life predictions. The estimates generated applying the Improved CDM methodology are compared to the well established Smith-Watson-Topper criterion in order to show that the developed method is a promising alternative fatigue tool. The results described adequately the fatigue behavior of the alloy under force control, allowing a proportion of 87,6% within the band width 4, which is a satisfactory result for an alloy with a complex fatigue behavior, such as the 7050-T7451, and it is close to the proportion predicted by the SWT criterion.

Keywords: Two Scales, Continuum Damage Mechanics, Improved Continuum Damage Mechanics , Plasticity, Force Controlled Tests.

1. Introduction

Fatigue is still a largely studied engineering topic since this type of phenomenon is crucial in the design of machines, vehicles and structures that are submitted to time-varying load conditions. One of the main goals of the studies in fatigue is conducting life predictions of components. These predictions are of great interest in engineering applications, since the fatigue experiments are expensive and it is impractical to conduct tests in true scale components. In this context, many approaches have been used in the past years trying to perform life estimates using as few as possible experiments.

The fatigue life predictions methods for crack initiation in cases where the loads causes multiaxial conditions can be divided into two main approaches, the classical stress/strain based methods and the damage mechanics ones. The first one is mainly based on empirical observations from fatigue data, for example the fact that cracks tend to nucleate and grow in some preferential planes. The stress/strain methodology can be also dived into two other groups: the critical plane ones, such as the Fatemi-Socie[1], Smith-Watson-Topper[2] and Matake [3] criteria, and the stress invariant ones such as Crossland [4], Sines[5] and Dang Van[6] criteria. In more realistic situations though, where loads are random and complex, the classical methods require the knowledge of other techniques for damage accumulation and cycle counting. Thus in this cases, the traditional approach cannot be used alone.

The second approach is based on the damage mechanics theory. The aim of the this methodology is to model in a satisfactory manner the macro and micro response in the fracture of materials. Damage mechanics can be divided furthermore in two groups: the micro mechanics of defects models, such as the Gurson [7] and GTN [8] methodologies, and the Continuum Damage Mechanics (CDM) theory, such as the Lemaitre[9, 10] and Improved CDM models[11]. In this paper, the methodology is based on the last group of damage models. This analysis is well established for ductile fracture and its use in fatigue problems has been applied more recently then the traditional approach.

The CDM theory has gained special interest in modern applications, since it does not depend on any kind of cycle counting methods or fatigue damage accumulation rule, it only depends on the load history. Thus, the method is largely applied for problems that have random or complex loads. For instance, Li *et. al.* [12] used the the CDM methodology to make fatigue analysis on the Tsing Ma Bridge, one of the main routes leading to Hong Kong airport. In this work, the results showed that the CDM analysis yield results that are more realistic then the ones given by Miner's rule. Shenoy *et. al.* [13] applied the theory for fatigue life predictions in adhesively bonded joints subjected to random load history. They showed that a CDM methodology was able to perform life estimates that was within the experimental data and can model load interaction effects. Perreux, and Joseph [14] studied the creep-fatigue behavior of composite pipes using a damage based model, which allowed them to take into account time-dependent damage in a context of long-time creep. Finally, Lopes and Malcher [15] used CDM theory for life prediction under non-proportional load conditions. They demonstrated that the theory presents excellent results for Low Cycle regime, specially for low strain amplitudes.

Even though the standard CDM approach is a powerful technique, the reliability of the model depends on the presence of considerable macro plastic strains. Thus, for tests performed in displacement or strain control conditions the CDM methodology is suitable, since in these type of experiments are conducted to produce significant levels of plasticity. Studies for this type of analysis are still being conducted as it can be seen in [16, 17, 18, 19] . In this setting, a two scale approach is necessary to extend the CDM theory for force controlled situations, where often there are no macro plastic strains. The main idea of the two scale

model is that although the macro scale has an elastic behavior, there is a micro inclusion in the macro that suffers plasticity[20]. Since micro plasticity occurs, damage can evolve and fatigue life estimates can be conducted. It is important to note that the two scale model has its physical motivation on the fact that fatigue is a phenomenon that shows signs of plasticity, even in problems inside the elastic domain. In this context, even in this conditions, in some level there must be occurring plastic strains.

A lot of work has been carried out in the past years about the application of localization laws in multi scale problems. These laws are responsible for performing the change in scales and relate macro to micro variables. Doghri and Ouair [21] applied Hill's [22] approach to study the behavior of composites. They could successfully describe macro and micro behaviors and showed the differences between the different uses of the tangent modulus. Argente dos Santos et. al. used a two scale analysis to analyzed the fatigue behavior of cardiovascular balloon-expandable stents. The study showed good life predictions close to experimental tests.

In this setting, the present work aims to use two scale model and Continuum Damage Theory to conduct fatigue life predictions for the aluminum alloy 7050-T7451. Moreover, comparisons are performed between the best results obtained and the Smith-Watson-Topper criterion.

2. Theory

The Continuum Damage Theory is based on the plasticity theory and principles from thermodynamics, such as the first and second law of thermodynamics. In this setting, a mathematical model based in this concepts must be developed. First, in a two scale approach, one of the crucial parts of the model is the achievement of the relation between macro and micro variables, the so called localization law. Traditionally, the localization laws are obtained by means of homogenization procedures[20].

2.1. Localization Law

The pioneer work of Eshelby [23] was responsible for give the very first localization law. Eshelby was able to achieve an analytic solution to the problem conducting homogenization techniques with the hypothesis of no interactions between different micro inclusions and knowing the stress-strain field far from the inclusion, also called inhomogeneity. Kroner [24] used Eshelby's result, and with the assumptions that the plastic components of both macro and micro strains interact and assuming that the inclusion has a spheroidal shape, achieved the following localization equation:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + a(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (1)$$

$$a = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}, \quad (2)$$

where ε^μ is the total micro strain tensor, ε is the macro total strain tensor, $\varepsilon^{\mu p}$ is the micro plastic strain tensor, ε^p is the macro plastic strain tensor, a is the localization constant, which only depends of the Poisson ratio ν . The Elsheby and Kroner solution has its limits when the levels of macro plasticity are high, thus in displacement controlled problems. In the past years, attention has been given to the problem of localization to achieve different localization laws. Hill [22] considered other boundary conditions to the problem and was able to
100 achieve another closed expression for the transformation macro-micro, which accounts for the tangent modulus and uses the rates of macro and micro variables. The Hill's approach is commonly used for problems regarding polycrystal materials and composites. However, since the tangent modulus is not isotropic, authors [25, 26] have find too stiff responses. Berveiller and Zaoui [27] used Hill's solution under special conditions and integrated the constitutive relations to get another expression for the localization rule. However, the Berveiller and Zaoui's approach is not proper for cyclic conditions, since it gives discontinuous responses under this problems. In order to overcome this problem, Gonzales and Llorca started with the Hill's approach and used and isotropized tangent modulus by taking the projection of the transformation law into the yield surface. This method gave another expression that is similar to the Berveiller and Zaoui's one, but shows no discontinuities under cyclic loads.

Nevertheless, for the purposes of the present work, the localization law that will be utilized is the one given by Eq.1, due to its simple form and the fact that in macro elastic conditions the levels of macro plasticity are zero or negligible. When using this conditions, Eq.1 yields:

$$\varepsilon^\mu = \varepsilon + a\varepsilon^{\mu p}. \quad (3)$$

The Two Scale Elastoplastic Model

Once the transformation of scales is understood and defined, the mathematical elastoplastic damage model must be developed. First, it is assumed in both scales small deformation conditions. In this setting, it follows the macro and micro strain additive split:

$$\varepsilon = \varepsilon^e, \quad (4)$$

$$\varepsilon^\mu = \varepsilon^{\mu e} + \varepsilon^{\mu p}, \quad (5)$$

where ε^e is the macro elastic strain tensor, $\varepsilon^{\mu e}$ is the micro elastic strain tensor. It is worth noting that, if plasticity not occurs in the macro scale, the plastic part of ε is taken as the zero second order tensor $\mathbf{0}$. Since it is desired to make a coupled damage analysis, the coupling is done associating the damage variable at micro scale D^μ to the elastic law. By performing thus modification on the elastic law, it is introduced the notion of an effective stress field proposed

by Lemaitre [28]. Assuming a hyper elastic material, it follows a Hooke type constitutive relation.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = (1 - D^\mu) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu e}, \quad (7)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the macro Cauchy stress tensor, $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ is the micro Cauchy stress tensor and \mathbb{C} is the fourth order elastic tensor. As it is clear in Equations 6 and 7, it is assumed that the scales have the same elastic properties. Once more, it is important to notice that because the macro scale is elastic, damage will not evolve at this scale, in other words the macro damage variable is taken as 0. Since the problem have micro plasticity, a yield function is required for this scale. The present work used a von Mises [29] based criterion as follows:

$$\phi^\mu = \frac{\bar{q}^\mu}{1 - D^\mu} - \sigma_f^\infty, \quad (8)$$

$$\bar{q}^\mu = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}^\mu : \boldsymbol{\eta}^\mu}, \quad (9)$$

in which ϕ^μ is the yield function, q^μ is the von Mises equivalent stress at micro scale, calculated due respect to the micro relative stress tensor $\boldsymbol{\eta}^\mu$. Is is worth noting that the yield strength of the micro scale is equal to the fatigue limit σ_f^∞ of the matrix on which the inclusion is embedded. Thus, it is expected that plasticity occurs first at the micro scale. $\boldsymbol{\eta}^\mu$ is a tensor that is a function of the deviatoric part of $\boldsymbol{\sigma}^\mu$, \mathbf{S}^μ , and the backstress tensor $\boldsymbol{\beta}^\mu$, in the following manner:

$$\boldsymbol{\eta}^\mu = \frac{\mathbf{S}^\mu}{1 - D^\mu} - \boldsymbol{\beta}^\mu. \quad (10)$$

It is also required the evolution of $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu p}$, in other words $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p}$. This is accomplished by the Plastic Flow Rule. Assuming an associative flow rule, it yields:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mu p} = \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu}{\|\boldsymbol{\eta}^\mu\|}, \quad (11)$$

where $\dot{\gamma}^\mu$ is the plastic multiplier. Another evolution law that must be stated is the one for the Damage variable. Using Lemaitre's damage model [28], it follows:

$$\dot{D}^\mu = \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu} \left(\frac{-Y^\mu}{S} \right)^s, \quad (12)$$

$$-Y^\mu = \frac{1}{(1 - D^\mu)^2} \left[\frac{q^{\mu 2}}{6G} + \frac{p^{\mu 2}}{2K} \right], \quad (13)$$

in which Y^μ is the strain energy release rate, G is the shear modulus of the material, K is the bulk modulus, p^μ is the hydrostatic stress, defined as one

third of the trace of $\boldsymbol{\sigma}^\mu$, S is the damage denominator or damage strength and s is the damage exponent. It is important to state that when computing Y , the variables that depends on stress tensors must be computed using only \mathbf{S}^μ instead of $\boldsymbol{\eta}^\mu$. It is worth to also remark that the original evolution law given by Eq.12 assumes S constant. D^μ is inside of the interval $[0, 1]$ where $D^\mu = 0$ represents the virgin material and $D^\mu = 1$ represents the total loss of cross section area. However, it is observed that failure occurs on a value D_c lower than $D^\mu = 1$, provoked by an instability phenomenon. D_c is called the critical damage, and it is the value that characterizes the failure of the material point.

In cyclic plasticity, the evolution of $\boldsymbol{\beta}^\mu$ is also required in order to get a well posed model. Hu et al; [30] showed that for the aluminum alloy 7050-T7451, the Armstrong-Frederick [31] evolution law describes reasonably the plastic cyclic behavior of this alloy. The evolution equations is written as:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^\mu = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mu p} - b \frac{\dot{\gamma}^\mu}{1 - D^\mu} \boldsymbol{\beta}^\mu, \quad (14)$$

where H^k is the kinematic hardening modulus and b is the saturation constant, both material properties. Finally, it follows the load and unload conditions, which give restrictions for $\dot{\phi}^\mu$ and $\dot{\gamma}^\mu$:

$$\dot{\phi}^\mu \leq 0, \dot{\gamma}^\mu \geq 0, \dot{\phi}^\mu \dot{\gamma}^\mu = 0. \quad (15)$$

Figure 1 illustrates schematically the basic ideas of the mathematical model:

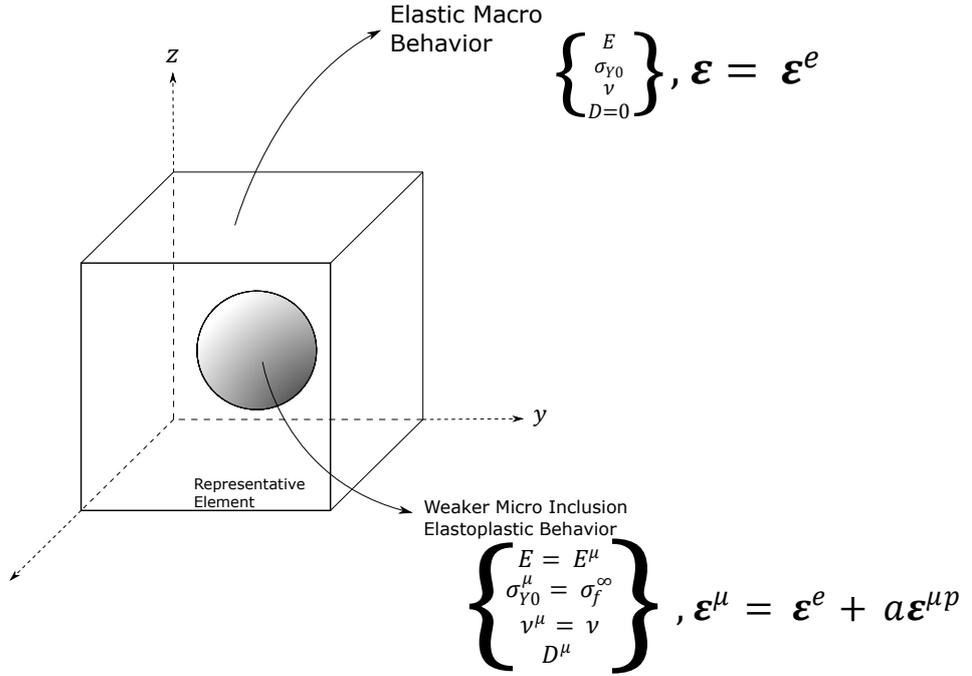


Figure 1: Two Scale Continuum Damage Model.

3. Numerical Solution and Life Prediction Methodology

The mathematical model described earlier is path dependent, thus an incremental numerical solution is required in order to achieve the internal variables over a cycle of load. In this setting, the operator split procedure will be carried out for the numerical model. First, it is worth noting that since viscous effects are neglected, the time variable t is actually a pseudo time one, thus it is only used to set an order of events.

The procedure discretizes the macro loading history into macro strain increments $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. These increments will generate micro increments $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^\mu$. The goal of the method is to achieve the actualized internal variables $(*)_{n+1}^\mu$ at pseudo time t_{n+1} , knowing the same variables $(*)_n^\mu$ at the previous step t_n . Since no plasticity conditions are imposed on the macro scale, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ will always be elastic, implying that no further analysis is required at this scale. On the other hand, micro plasticity occurs and the split procedure is needed. This methodology is divided into two steps, the trial state and plastic corrector. The first one consists

in assuming that $\Delta\varepsilon^\mu$ has only elastic components and with this hypothesis assemble the trial state $(*)_{n+1}^{\mu T}$. Next, the assumption must be verified by the yield criterion ϕ^μ . If $\phi^\mu \leq 0$ then the hypothesis is true and $(*)_{n+1}^\mu = (*_{n+1}^{\mu T})$. Otherwise, $\Delta\varepsilon^\mu$ has a plastic part and the plastic corrector must be solved. When a implicit Euler scheme is employed, the corrector consists of the solution of a nonlinear system. The nonlinear system to be solved is given by:

$$\begin{cases} \sigma_{n+1}^\mu = (1 - D_{n+1}^\mu) \sigma_{n+1} + 2G\psi (1 - D_{n+1}^\mu) \varepsilon_n^\mu + \Delta\gamma^\mu \psi 2G \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu \\ D_{n+1}^\mu = D_n^\mu + \frac{\Delta^\mu}{1 - D_{n+1}^\mu} \left(\frac{-Y_{n+1}^\mu}{S} \right)^s \\ \phi_{n+1}^\mu = \frac{\bar{q}_{n+1}^\mu}{1 - D_{n+1}^\mu} - \sigma_f^\infty \\ \beta_{n+1}^\mu = \beta_{n+1}^\mu + \frac{2}{3} H^k \frac{\Delta\gamma^\mu}{1 - D_{n+1}^\mu} \bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu - b \Delta\gamma \beta_{n+1}^\mu \end{cases} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1}^\mu = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\eta}^\mu}{\bar{q}^\mu}, \psi = a - 1 \quad (17)$$

$\bar{\mathbf{N}}^\mu$ is often called the flow vector. The solution of the system given in 16 is done by the Newton-Raphson method.

Once established the numerical solution of the problem, the fatigue life estimate methodology can be developed. The life prediction is conducted verifying by the end of each loading cycle the value of D_{n+1}^μ . If $D_{n+1}^\mu < D_c$ then failure did not happen and another cycle is applied. Otherwise, failure has occurred and the number of cycles for this to happen N_{NUM} is registered. Thus, N_{NUM} is the estimated fatigue life. Failure in the present paper is defined when $D^\mu \geq D_C$ on a material point, and physically means a crack initiation. Figure 2 shows the main ideas of the methodology.

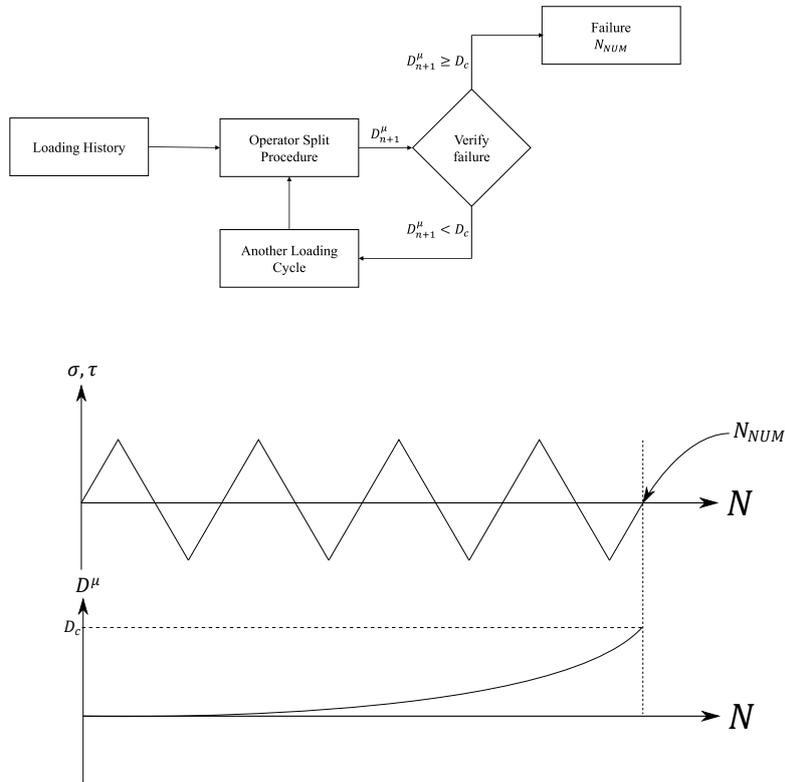


Figure 2: Life prediction methodology

200 One parameter that has an important role in the fatigue analysis is the damage strength S and the damage exponent s . Both must be obtained due respect to the fatigue data of the studied material. In the present work, the only parameter that will be calibrated is S , while s will be taken as equal to 1, a reasonable assumption for metallic materials[28]. However, it is observed in the process of calibration that there is a great difference between the values achieved for S using axial and torsional conditions. Moreover, when the fatigue predictions are performed using the value obtained from the axial data only, it is seen that the estimates are too conservative for the torsional data and the multiaxial ones with a large contribution coming for its shear component. When the torsional calibrated value is applied the estimates are too optimistic for the axial experiments and for the multiaxial ones with large axial part. In this setting, Malcher and Mamiya [11] proposed an analysis that assumes that S is a function of the stress tensor rather than a constant parameter. The function

proposed is given in its discretized form as:

$$S = \frac{S_{0.33}}{3 \left| \eta_{n+1}^\mu \right| + S_{0.0} \left(1 - \xi_{n+1}^\mu \right)^2}, \quad (18)$$

$$\eta_{n+1}^\mu = \frac{\frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^\mu}{\bar{q}_{n+1}^\mu}, \quad (19)$$

$$\xi_{n+1}^\mu = \frac{27 \det (\mathbf{S}^\mu_{n+1})}{2 \left(\bar{q}_{n+1}^\mu \right)^3}, \quad (20)$$

where $S_{0.33}$ is the damage strength calibrated regarding fully reversed ($R = -1$) tension-compression loading condition, $S_{0.0}$ is the S value obtained from the torsion experiments with $R = -1$, η_{n+1}^μ is the stress triaxiality, ξ_{n+1}^μ is the normalized third invariant. It is worth noticing that the dependence of S due respect to $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ is by means of the invariants of the micro stress tensor. Using Equation 18, the value of S that is more suitable for the loading applied is calculated in an automatic manner once $S_{0.33}$ and $S_{0.0}$ are known. It is worth to note that, the utilization of a varying damage denominator is commonly called an Improved CDM methodology.

In other to compare the results achieved by the two scale model to a well established fatigue criterion, the Smith-Watson-Topper (SWT) approach [2] was also conducted to perform life predictions. The SWT methodology was chosen due to its good results when the material studied is an aluminum alloy [32], which is the case of the present work. Another reason to justify the use of this criterion is the brittle behavior of this alloy. Originally the criterion was proposed as follows:

$$P_{SWT} = \sigma_n^{max} \varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c}, \quad (21)$$

where P_{SWT} is the Smith-Watson-Topper parameter, σ_n^{max} is the maximum normal stress and ε_a is the strain amplitude in a given material plane. The critical plane is one such that P_{SWT} is maximized. σ'_f , ε'_f , b and c are material parameters that are obtained from curve fitting and $2N_f$ is the number of reversals over a cycle. The version given in Eq. 21 is the most general form of the criterion. However, in a force control context, it can be shown that the model leads to:

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma_n^{max} \sigma_a} = AN^b \quad (22)$$

in which σ_a is the normal stress amplitude in a given material plane and A , b are material properties to be obtained from a S-N curve. Solving Equation 22 in the critical plane for the fatigue life N will yield the life estimate for a given loading condition.

4. Material Studied and Experimental Data

In order to validate the proposed methodology, a set of experimental data is required to verify if the life estimates N_{NUM} are good or not. For this purpose, the fatigue data for the aluminum alloy 7050-T7451 generated by Sá et.al. [33] and [34] were used. This alloy is largely employed in the aerospace industry because of its special mechanical properties, for instance its excellent strength-weight ratio. Table 1 displays some material parameters for the aluminum alloy 7050-T7451 :

Table 1: Important material properties of 7050-T7451 alloy

Parameter	Value
Stiffness Modulus E	73.4 GPa
Poisson Ratio ν	0.3
Initial Yield Strength σ_{Y0}	306.7 MPa
Fatigue Limit for 10^7 cycles σ_f^∞	100.0 MPa
Kinematic Hardening Modulus H^k	6035.68 MPa
Saturation Constant b	100.88
Tensile Strength σ_u	536.0 MPa
Stress at Fracture σ_F	483.0 MPa

In Sá et.al. [33] work, fully reversed fatigue tests under force control were carried out in smooth and notched cylindrical specimens, but only the data coming from the smooth ones will be considered in the present work. In the experiments, macro plasticity did not occur in a considerable level, thus the tests were in the elastic domain. Such conditions are also commonly called high cycle conditions (HCF) in fatigue analysis. The loading paths used can be seen in Fig.3:

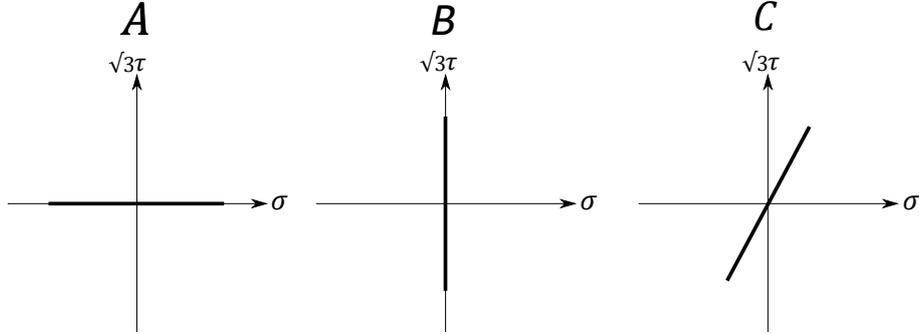


Figure 3: Loading paths.

Path A is a purely axial load, B is purely torsional load and C is a multi-axial proportional loading path. σ_a and τ_a are normal and shear stress amplitudes respectively. For path C , the angular coefficient of the trajectory is controlled by a parameter λ that basically consists in the τ_a - σ_a ratio. Formally speaking, λ is defined as

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}\tau_a}{\sigma_a} \quad (23)$$

The employed values of λ were $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{20}$ and $2\sqrt{3}$. Since the loads are in the elastic regime and considering that the material is isotropic, the transformation of macro stress amplitudes into macro strain amplitudes ε_a and γ_a is straight forward. The Tables 2,3 and 4 that follow presents the experimental life N_{EXP} obtained for different amplitudes for each path:

Table 2: Fatigue data for the tension-compression tests represented by path "A".

σ_a (MPa)	τ_a (MPa)	N_{EXP} (cycles)
205.0	0.0	7.80×10^4
205.0	0.0	4.58×10^4
180.0	0.0	6.57×10^4
180.0	0.0	5.26×10^4
180.0	0.0	1.19×10^5
180.0	0.0	9.49×10^4
180.0	0.0	5.45×10^4
146.0	0.0	2.13×10^5
146.0	0.0	1.45×10^5
129.0	0.0	9.77×10^5
129.0	0.0	3.00×10^5
129.0	0.0	1.47×10^5
112.0	0.0	8.23×10^6
112.0	0.0	2.92×10^5
112.0	0.0	1.27×10^6

Table 3: Fatigue data for the torsional tests represented by path "B".

σ_a MPa	σ_a MPa	N_{EXP} (cycles)
0.0	173.2	8.90×10^4
0.0	173.2	5.36×10^4
0.0	173.2	2.86×10^4
0.0	118.4	3.68×10^5
0.0	108.6	1.54×10^6
0.0	108.6	6.45×10^5
0.0	108.6	5.00×10^5
0.0	86.6	3.24×10^6
0.0	86.6	2.76×10^6
0.0	86.6	2.42×10^6
0.0	86.6	2.07×10^6
0.0	79.7	2.50×10^6
0.0	79.7	2.35×10^6
0.0	67.7	1.74×10^6
0.0	67.7	6.23×10^6
0.0	67.7	9.47×10^6
0.0	67.7	5.11×10^6

Table 4: Fatigue data for the multiaxial tests represented by path "C".

σ_a MPa	τ_a MPa	λ	N_{EXP} (cycles)
121.9	61.0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.56×10^5
121.9	61.0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2.30×10^5
64.6	106.6	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	2.47×10^5
53.5	88.2	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	1.47×10^6
47.5	78.3	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	2.50×10^6
42.1	69.5	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	1.86×10^6
42.1	69.5	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	4.54×10^6
42.1	69.5	$\frac{33\sqrt{3}}{20}$	6.78×10^6
57.5	115.0	$2\sqrt{3}$	2.12×10^5

Using the information contained in Tables 2 and 3, the calibration of $S_{0.33}$ and $S_{0.0}$ can be accomplished. The procedure was conducted using a standard bisection method where the input data of the procedure is the largest experimental life N_{EXP} for a given macro strain amplitude and an initial guess for the interval which contains S for a given tolerance. The main idea of the method is to get a damage strength value that will estimate a fatigue life N_{NUM} as close as possible to N_{EXP} . This process is carried out for all purely axial data and torsional data. The final values of $S_{0.33}$ and $S_{0.0}$ are taken as the mean value of the calibrated S for all single amplitudes. The calibration method leads to $S_{0.33} = 284.4 MPa$ and $S_{0.0} = 2154.3 MPa$. The full procedure can be seen schematically in Figure 4:

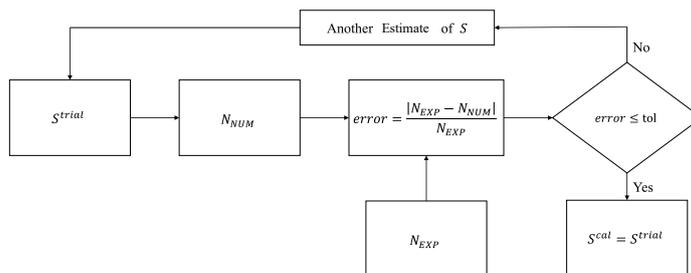


Figure 4: Calibration methodology

Another material parameter that is required for the model is the critical damage D_c , which characterizes the failure of the material point, or in other words a crack initiation. D_c can be obtained by two approaches, both based on the monotonic response of the material. The first one is suggested by Lemaitre

[28] and uses the values of σ_u and σ_F in the following manner:

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_F}{\sigma_u} \quad (24)$$

The second approach is by conducting a parametric identification of elastoplastic parameters using Lemaitre model and the hardening curve of the material. Once the optimization procedure finds the optimized constants, D_c comes as a consequence. In this present paper, both analysis were performed and the two analysis showed results that were really close one to another. The value achieved was of $D_c = 0.1$. This value is another sign that this material is indeed brittle, since its D_c is close to 0.

The Smith-Watson-Topper model needs the calibration of the parameters A and b from Eq.22. This is accomplished by the use of the S-N data contained in Table 2. Conducting a curve fitting of the data in semi-log stress amplitude versus fatigue life graphic, the values achieved were $A = 1686.1 MPa$ and $b = -0.2$. The graphic result of the fitting can be seen in Figure 5:

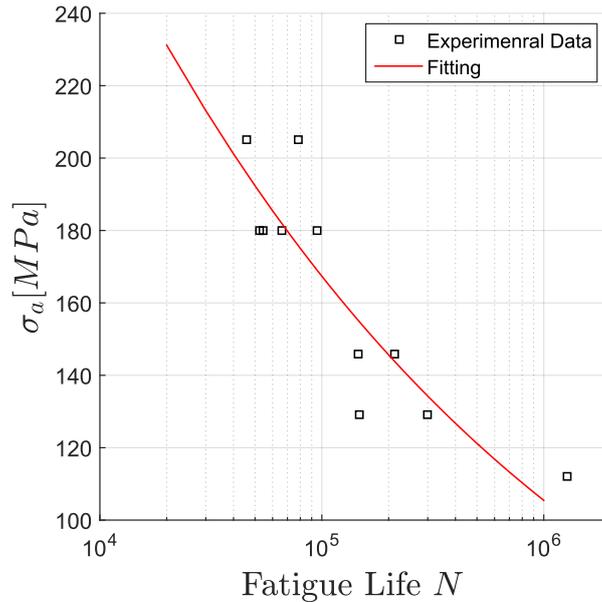


Figure 5: Fitting of the S-N data

5. Results And Discussion

In order to show how the calibration point affects the life estimates, the prediction methodology was carried out first by setting the damage strength as a constant value. It is worth noting that this procedure is the standard analysis recomened by Lemaitre [28].In this conditions, the first analysis is conducted by

assuming $S = S_{0.33}$ and then setting $S = S_{0.0}$. The predictions are illustrated in a life-life graphic, where the bands of factor 2 and 4 are highlighted. Figure 6 shows the results achieved using $S = S_{0.33}$:

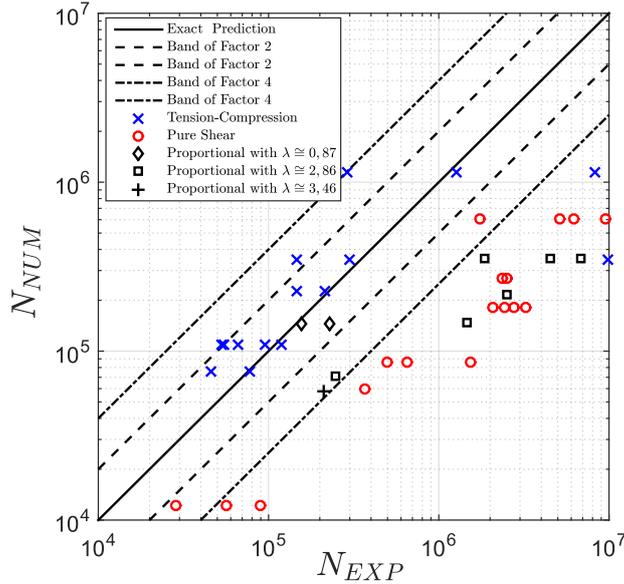


Figure 6: Fatigue life estimates by setting $S = S_{0.33}$

Analyzing Figure 6 it can be seen that the model was able to capture within the bands most part of the axial data and the multi-axial ones that have a large contribution coming from its axial component. This fact was expected due the fact that $S_{0.33}$ is obtained by the tension-compression tests. However, it is also clear that the estimates for the torsional data and the remaining multi-axial loads are too conservative. This behavior can be explained by the value of $S_{0.33}$, which is lower than $S_{0.0}$. The damage strength parameter controls the rate of increase of damage in an inverse manner. Thus a large value of S implies a low damage rate, and a low one causes a fast increase in D^μ . In this context, since $S_{0.0} > S_{0.33}$, when $S_{0.33}$ is used in the model, damage evolves too fast for the torsional data and the remaining multi-axial points, predicting a premature failure for this set of experimental lives.

Further analysis in Fig.6 shows that 73.3% of the estimates for the tension-compression data were inside the band of factor 2 and 86.7% inside the band of factor 4. On the other hand, for the torsional experiments, no estimates fell within the band-width 2 and 11.8% was inside the width 4. For the multi-axial case, 22.2% of the estimates were inside the band of factor 2 while 44.4% were in the band of factor 4. Globally speaking, 36.6% of the predictions were within of the band of 2 and 46.3% were in the one of 4.

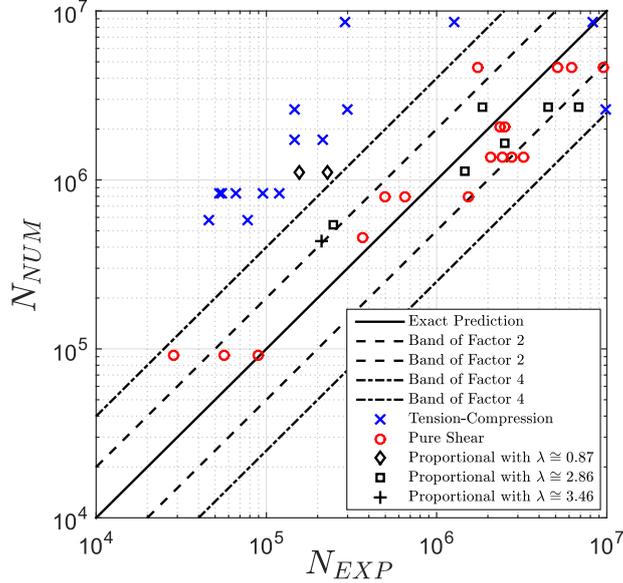


Figure 7: Fatigue life estimates by setting $S = S_{0,0}$

Figure 7 shows the results when $S = S_{0,0}$. The results displayed in Fig.7 now shows a distinct behavior than the one in Figure 6. The predictions for the torsional data and the multiaxial ones with a major contribution from its shear component were within the bands, while the axial experiments and the remaining multiaxial ones were outside, in a optimistic region. Once more, the influence of S in the rate of evolution of D^μ is the cause for such phenomenon. Since $S_{0,0} > S_{0,33}$, damage evolves in overly slow rate for the set of data with an axial aspect, predicting a late failure for them. This observation partially explains why the use of a non fixed damage strength is an advantage, since in this case Eq.18 is responsible to propose a suitable value of S for a given situation.

A more detailed analysis in Fig.7 shows that 6.7% of predictions for the tension-compression tests fell inside the band of factor 2, which was the proportion in the one of factor 4. On the other hand, for the purely torsional experiments, 76.5% of life estimates were in the band-width 2, and 100.0% in the band 4. For the proportional data, 33.3% of predictions fell inside the band of factor 2 and 58.3% in the one of factor 4. Globally speaking, 46.3% of estimates were inside the band-width 2 while 63.4% were within the band of 4.

Finally, the model is applied in association with Eq.18, which implies that S is now a variable parameter. Figure 8 displays the results achieved with the new assumption:

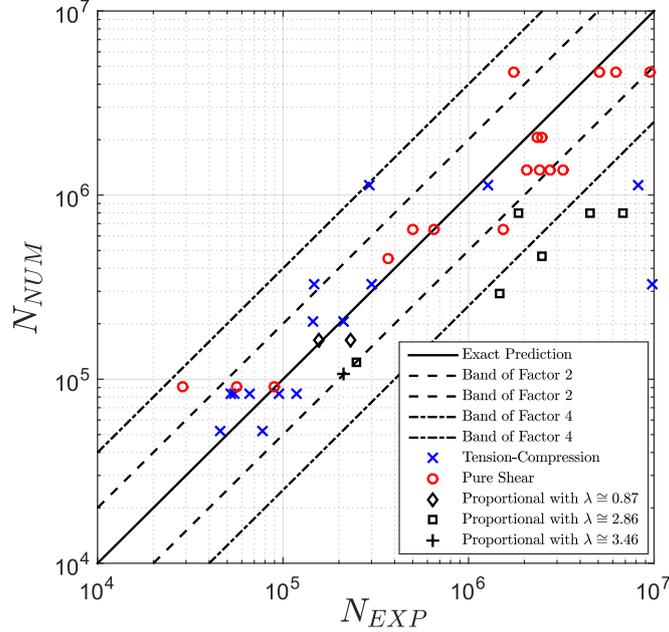


Figure 8: Fatigue life estimates by setting S as Equation 18

Figure 8 clearly shows that the use of a varying damage strength is able to capture almost all data inside the bands in a automatic manner, only using two points of calibration. A good fatigue life prediction tool is one that requires as few as possible test for its calibration, which is the case of the model proposed in the present paper. As a matter of fact, a good number of critical planes and stress invariant based modes requires tension-compression and pure shear data to obtain the model parameters. In this setting, the use of Eq.18 in the model is similar to the classical approach speaking in terms of calibrations needs.

It worth noting that for the group of experimental life on which the normal macro strain amplitudes were $\varepsilon_a = 0.28\%$ and $\varepsilon_a = 0.25$ the model in association with Eq.18 predicted virtually the same life. This behavior can be explained by the fact that for this set of experiments the strain amplitudes are very close one to another, in a sense that the model does not capture any significant difference in fatigue life for this two cases.

Further analysis in Fig.8 demonstrates that 46.7% of estimates for the tension-compression tests fell within the band-width 2 and 86.7%. For the the pure shear case, 76.5% of predictions were inside the band of 2 and 100.0% were within the band o 4. On the other hand, for the multiaxial data 44.4% of estimates fell inside the band of width 2 while 66.7% were within the one of 4. Globally speaking, 58.5% of the total predictions were in the band of 2 and 87.8% fell within the band of 4. Thus, the model in association with Eq.18 presents the best results from all the analysis conducted, which proves that the

use of a damage strength function provides an improvement in the model.

Figure 9 presents the life estimates when the SWT model is carried out:

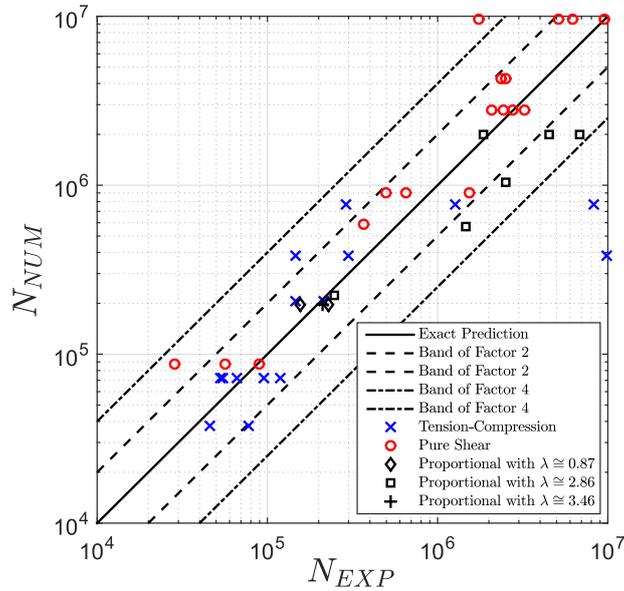


Figure 9: Results achieved by the Smith-Watson-Topper model .

A detailed analysis in Fig.9 presents that for the tension-compression 66.7% of the predictions fell in the band of factor 2 and 86.7, % in the band of 4. For the set of torsional data, 88.2% of estimates were within the band-width 2 and 94.1% inside the one with width 4. In the multiaxial case, 55.6% of predictions fell in the band of 2 while 100.0% were in the band of factor 4. Globally speaking, 73.2% of total predictions were inside the band-width 2 and 92.7% in the band of 4.

Figure 10 displays the comparison between the results from SWT model and the methodology developed in the present work, while Table 5 conducts a quantitative balance from both methodologies.

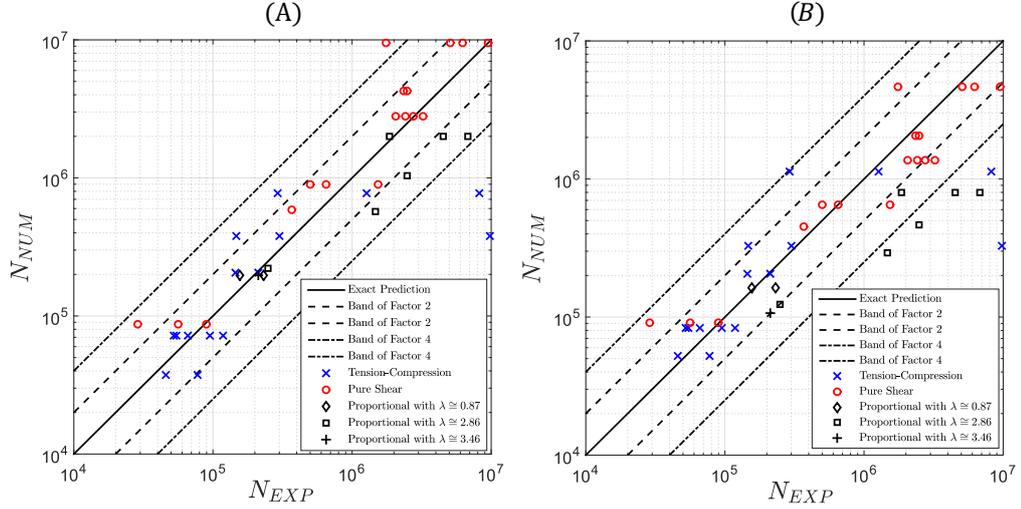


Figure 10: Comparison between the SWT model and the one proposed in the present work, where *A* shows the predictions for the SWT analysis and *B* for two scale one.

Table 5: Comparison between the proportion of predictions by the SWT model and the two scale one.

	Band of Factor 2 SWT (%)	Band of Factor 2 Coupled (%)	Band of Factor 4 SWT (%)	Band of Factor 4 Coupled (%)
Axial	66.7	73.3	86.7	86.7
Torsional	88.2	76.5	94.1	100.0
Proportional	55.6	44.4	100.0	66.7
Global	73.2	68.3	92.7	87.8

The information contained in Fig.10 and Table 5 shows that the results achieved by the two scale model are relatively close to the ones by the SWT criterion. In some cases the proportion of points inside the band of 4 are greater or equal than the SWT model, as it is the case for the pure shear and tension-compression experiments. On the other hand, the SWT methodology presents better proportions within the band of 2, but even in these cases, the percentage of estimates in the same bands by the two scale model is not too far behind. Globally speaking, the SWT criterion has a relative larger number of predictions within the band-width 2 than the methodology developed in this paper. However, analyzing the band of 4, the two analyses are really close one to another.

Some more information can be extracted from all the analysis carried in this work. First, it is worth noting that this aluminum alloy has a complex fatigue behavior, especially in for lives greater than approximately 10^6 cycles. As it can be seen in Tables 2, 3 and 4, as lives becomes bigger, the dispersion of them

grows as well, specially for the tension-compression tests and the proportional data with $\lambda = \frac{33\sqrt{3}}{20}$. This behavior was observed by Sá [33]. For instance, the dispersion of almost a factor of 100 is observed for the lowest macro normal stress amplitude. However, even for this complex material, the model proposed presents reasonable results which shows a good potential of this methodology. Second, even though lives of the order of 10^7 cycles are observed, both the two scale CDM model and the SWT criterion do not predict lives of this order. This can be explained by this great dispersion described previously and the calibration procedure of the damage parameters. Third, although the proportion of predictions within the bands of the two scale approach is close to the obtained by the SWT criterion, it worth noting that for the proportional set of data the estimates are not satisfactory, specially for the cases where a considerable contributions comes from its shear component. This suggests that some improvements are required in the proposed model, specially speaking of the calibration method. The authors believe that if a more robust calibration strategy is carried out, such as multi variables optimization techniques, the results will become even better, and possible surpass the ones from the SWT analysis.

6. Conclusion

The present work aimed to demonstrate that the CDM theory in association to multi scale analysis can be an alternative tool in fatigue life prediction. It was presented that the calibration point of the model has great influence in the life estimates, which implies that a varying damage strength parameter should be employed in other to adequate S for the type of load analyzed. In order to do so, Equation 18 was applied in the methodology and as a consequence of that, the results had a significant improvement.

The hole model described in this paper can be conducted considering damage in post-processing stage, or in other words, a uncoupled damage model. In this case, a damage indicator should be applied such as de Vaz.Jr one [35]. It is important to highlight that the methodology carried out in this work it is concerned only in performing life estimates. Thus, crack orientations were not studied or predicted. If such an analysis is desired, it is recommended to perform the two scale damage model considering a damage tensor.

Finally, it was presented a comparison between the well established Smith-Watson-Topper criterion and the two scale model proposed. The results achieved by the SWT approach were better, however the ones obtained by the proposed model were relatively close, principally analyzing the band-width 4. It was also observed that there are room for improvements in the methodology proposed. It is recommended that a parametric search strategy to be applied in the calibration process in order to achieve the set S , s and D_c which minimizes an objective function, such as the least squares function, for the group of experimental lives. It is also worth to note that even for the proposed calibration procedure and the complex behavior of the analyzed alloy, the estimates achieved were reasonable, which shows the good potential the Continuum Damage Model in two scales in conditions where there are not sings of macro plasticity.

Acknowledgments

The authors would like to acknowledge the financial support provided by Federal District Research Support Foundation (FAPDF) and Lucival Malcher would also like to to acknowledge the support from the Brazilian Council for the scientific and Technological Development-CNPq (contract 311933/2018-1).

References

References

- [1] A. Fatemi, D. F. Socie, A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 11 (3) (1988) 149–165 (1988).
- [2] K. Smith, T. Topper, P. Watson, A stress strain function for the fatigue of metals (stress-strain function for metal fatigue including mean stress effect), *J. Materials* 5 (1970) 767–778 (01 1970).
- [3] T. Matake, An explanation on fatigue limit under combined stress, *Bulletin of JSME* 20 (141) (1977) 257–263 (1977).
- [4] B. Crossland, Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel, in: *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, Vol. 138, Institution of Mechanical Engineers London, 1956, pp. 12–12 (1956).
- [5] G. Sines, Behavior of metals under complex static and alternating stresses, *Metal fatigue* 1 (1959) 145–169 (1959).
- [6] V. K. Dang, Sur la résistance à la fatigue des métaux, Ph.D. thesis, Université de Paris VI (1971).
- [7] A. L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of engineering materials and technology* 99 (1) (1977) 2–15 (1977).
- [8] V. Tvergaard, A. Needleman, Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta metallurgica* 32 (1) (1984) 157–169 (1984).
- [9] J. Lemaitre, A continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of engineering materials and technology* 107 (1) (1985) 83–89 (1985).
- [10] J. Lemaitre, Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations, *Computer methods in applied mechanics and engineering* 51 (1-3) (1985) 31–49 (1985).
- [11] L. Malcher, E. Mamiya, An improved damage evolution law based on continuum damage mechanics and its dependence on both stress triaxiality and the third invariant, *International Journal of Plasticity* 56 (2014) 232–261 (2014).

- [12] Z. Li, T. H. Chan, J. M. Ko, Fatigue damage model for bridge under traffic loading: application made to tsing ma bridge, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 35 (1) (2001) 81–91 (2001).
- [13] V. Shenoy, I. A. Ashcroft, G. W. Critchlow, A. Crocombe, Fracture mechanics and damage mechanics based fatigue lifetime prediction of adhesively bonded joints subjected to variable amplitude fatigue, *Engineering Fracture Mechanics* 77 (7) (2010) 1073–1090 (2010).
- [14] D. Perreux, E. Joseph, The effect of frequency on the fatigue performance of filament-wound pipes under biaxial loading: experimental results and damage model, *Composites science and technology* 57 (3) (1997) 353–364 (1997).
- [15] J. Lopes, L. Malcher, Fatigue life estimates under non-proportional loading through continuum damage evolution law, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 88 (2017) 64–73 (2017).
- [16] Y.-y. JIANG, A fatigue criterion for general multiaxial loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23 (1) (2000) 19–32 (2000).
- [17] Y. Jiang, W. Ott, C. Baum, M. Vormwald, H. Nowack, Fatigue life predictions by integrating evicd fatigue damage model and an advanced cyclic plasticity theory, *International Journal of Plasticity* 25 (5) (2009) 780–801 (2009).
- [18] F. Shen, G. Voyiadjis, W. Hu, Q. Meng, Analysis on the fatigue damage evolution of notched specimens with consideration of cyclic plasticity, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 38 (10) (2015) 1194–1208 (2015).
- [19] F. Castro, Y. Jiang, Fatigue of extruded az31b magnesium alloy under stress-and strain-controlled conditions including step loading, *Mechanics of Materials* 108 (2017) 77–86 (2017).
- [20] J. Lemaitre, J. Sermage, R. Desmorat, A two scale damage concept applied to fatigue, *International Journal of fracture* 97 (1-4) (1999) 67 (1999).
- [21] I. Doghri, A. Ouaar, Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms, *International Journal of Solids and structures* 40 (7) (2003) 1681–1712 (2003).
- [22] R. Hill, Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (2) (1965) 89–101 (1965).
- [23] J. D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. Lond. A* 241 (1226) (1957) 376–396 (1957).

- [24] E. Kröner, Zur plastischen verformung des vielkristalls, *Acta metallurgica* 9 (2) (1961) 155–161 (1961).
- [25] C. González, J. LLorca, A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (4) (2000) 675–692 (2000).
- [26] J. Chaboche, P. Kanouté, A. Roos, On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites, *International journal of Plasticity* 21 (7) (2005) 1409–1434 (2005).
- [27] M. Berveiller, A. Zaoui, An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 26 (5-6) (1978) 325–344 (1978).
- [28] J. Lemaitre, Local approach of fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 25 (5-6) (1986) 523–537 (1986).
- [29] R. v. Mises, *Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand*, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1913 (1913) 582–592 (1913).
- [30] W. Hu, C. H. Wang, S. Barter, Analysis of cyclic mean stress relaxation and strain ratchetting behaviour of aluminium 7050., Tech. rep., AERONAUTICAL AND MARITIME RESEARCH LAB MELBOURNE (AUSTRALIA) (1999).
- [31] P. J. Armstrong, C. Frederick, A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, Vol. 731, Central Electricity Generating Board [and] Berkeley Nuclear Laboratories, Research & Development Department Berkeley, 1966 (1966).
- [32] N. E. Dowling, S. Thangjitham, An overview and discussion of basic methodology for fatigue, in: *Fatigue and Fracture Mechanics: 31st Volume*, ASTM International, 2000 (2000).
- [33] M. Sá, J. Ferreira, C. da Silva, J. Araújo, The role of the shear and normal stress gradients on life estimation of notched al7050-t7451 under multiaxial loadings, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 97 (2018) 38–47 (2018).
- [34] K. V. Fabara Hernández, Fatigue and stress-strain cyclic behavior of the aluminum alloy 7050-t7451, Master’s thesis, Universidade de Brasília (2016).
- [35] M. Vaz Jr, Computational approaches to simulation of metal cutting process, Ph.D. thesis, PhD. Thesis, University College of Swansea (1998).

7 Conclusões e Perspectivas Futuras

7.1 Conclusões

Avaliando os resultados obtidos nos capítulos anteriores, pode-se notar que o modelo de duas escalas proposto foi capaz de descrever um comportamento elastoplástico em escala microscópica mesmo em condições de fadiga de alto número de ciclos, onde ocorre somente regime elástico. Esse resultado obtido pelo modelo tornou possível a utilização de uma abordagem de dano desacoplado na forma de um indicador de dano para realização de previsões de vida. Essa metodologia tornou possível que modelos de dano desacoplados, que eram em sua grande maioria aplicados a casos com plasticidade perceptível, passassem a ser usados em casos puramente elásticos. Além disso, a utilização de indicadores de dano para previsão de vida a fadiga, ainda mais no contexto do trabalho, é um fato pouco utilizado, tornando o trabalho relativamente inédito.

Em relação as previsões empregando a metodologia desacoplada, pode ser observado que os resultados foram satisfatórios para os casos simulados com $S = S_{0.33}$ e $S_{0.0}$ somente quando analisados os dados utilizados para calibração dos mesmos. No entanto, os melhores resultados foram de fato obtidos assumindo o denominador de dano variável com as condições de carregamento aplicadas. Quando essa abordagem foi utilizada, quase 80% de todos os pontos ficaram no interior das bandas, o que mostra que a metodologia é promissora.

Por outro lado, de maneira geral as previsões obtidas utilizando o dano como uma variável interna do problema mostraram melhores resultados, seja usando $S = S_{0.33}$, $S = S_{0.0}$ ou assumindo o denominador de dano como uma função do estado de tensão (método aperfeiçoado). Em particular, o emprego da abordagem aperfeiçoada produziu 87,8 % de previsões no interior da banda de fator 4. O critério de fadiga de Smith-Watson-Topper apresentou quantidades de pontos maiores no interior das bandas do que a modelagem proposta no presente trabalho. Contudo, observa-se que as proporções obtidas no presente trabalho estão próximas daquelas vistas no critério SWT, o que dá indícios que se aperfeiçoamentos forem feitos no modelo, principalmente do ponto de vista de calibragem, resultados melhores que o critério de plano crítico podem ser atingidos.

A metodologia desenvolvida no presente trabalho apresentou um procedimento alternativo para precisão de vida a fadiga que cumpriu seu objetivo, principalmente assumindo um denominador de dano variável. Os resultados demonstraram que o método realizou previsões dentro de uma banda de fator 4 para condições simples de carregamento, o que permite que a abordagem seja empregada em situações onde a Mecânica do Dano é mais vantajosa, como por exemplo em condições de solicitações complexas, de amplitude variável ou não periódicos.

7.2 Recomendações Para Trabalhos Futuros

Visando a continuação do presente trabalho em nível de pós graduação, recomenda-se o emprego do modelo com outros materiais além do emprego de outras leis de localização. No contexto do presente trabalho, indica-se também a utilização de uma metodologia de calibração mais robusta, baseada em métodos de busca, como por exemplo os métodos baseados em gradiente, os genéticos e os híbridos. Um outro aspecto a ser analisado é se a hipótese de que a micro inclusão seja isotrópica é razoável, uma vez que a mesma é da ordem de um grão de material, que por sua vez é anisotrópico. Finalmente, é também sugerida a utilização de outras formulações para o denominador de dano, como a usada por Castro e Bemfica (2018).

Referências

- ARMSTRONG, P. J.; FREDERICK, C. *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*. [S.l.]: Central Electricity Generating Board [and] Berkeley Nuclear Laboratories, Research & Development Department Berkeley, 1966. v. 731.
- BASQUIN, O. The exponential law of endurance tests. In: *Proc Am Soc Test Mater*. [S.l.: s.n.], 1910. v. 10, p. 625–630.
- BERVEILLER, M.; ZAOUI, A. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 26, n. 5-6, p. 325–344, 1978.
- BROWN, M. W.; MILLER, K. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 187, n. 1, p. 745–755, 1973.
- BROZZO, P.; DELUCA, B.; RENDINA, R. A new method for the prediction of formability limits in metal sheets. In: *Proc. 7th biennial Conf. IDDR*. [S.l.: s.n.], 1972.
- CASTRO, F.; BEMFICA, C. Calibration and evaluation of the lemaitre damage model using axial-torsion fatigue tests on five engineering alloys. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 15, n. 10, 2018.
- CHABOCHE, J.; KANOUTÉ, P.; ROOS, A. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International journal of Plasticity*, Elsevier, v. 21, n. 7, p. 1409–1434, 2005.
- CHABOCHE, J.-L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of plasticity*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 149–188, 1986.
- CHABOCHE, J.-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International journal of plasticity*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 247–302, 1989.
- COCKCROFT, M.; LATHAM, D. Ductility and the workability of metals. *J Inst Metals*, v. 96, n. 1, p. 33–39, 1968.
- CROSSLAND, B. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In: INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS LONDON. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. [S.l.], 1956. v. 138, p. 12–12.
- DANG, V. K. *Sur la résistance à la fatigue des métaux*. Tese (Doutorado) — Université de Paris VI, 1971.
- DATSKO, J. *Material properties and manufacturing processes*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1966.

- DEPERROIS, A. *Sur le calcul de limite d'endurance des aciers*. Tese (Doutorado), 1991.
- ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 241, n. 1226, p. 376–396, 1957.
- ESSLINGER, V.; KIESELBACH, R.; KOLLER, R.; WEISSE, B. The railway accident of eschede—technical background. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier, v. 11, n. 4, p. 515–535, 2004.
- FATEMI, A.; SOCIE, D. F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 149–165, 1988.
- FINDLEY, W. N. *A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending*. [S.l.]: Engineering Materials Research Laboratory, Division of Engineering, Brown University, 1958.
- FREUDENTHAL, A. M. *The inelastic behavior of engineering materials and structures*. [S.l.]: Wiley, 1950.
- GONZÁLEZ, C.; LLORCA, J. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 48, n. 4, p. 675–692, 2000.
- GOODMAN, J. *Mechanics applied to engineering*. [S.l.]: Longmans, Green, 1918.
- GOUGH, H. Engineering steels under combined cyclic and static stresses. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 160, n. 1, p. 417–440, 1949.
- GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology*, American Society of Mechanical Engineers, v. 99, n. 1, p. 2–15, 1977.
- HILL, R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 89–101, 1965.
- JR, M. V. *Computational approaches to simulation of metal cutting process*. Tese (Doutorado) — PhD. Thesis, University College of Swansea, 1998.
- KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions, izy akad. *Nank SSR Otd Tech Nauk*, v. 8, p. 26–31, 1958.
- KRÖNER, E. Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta metallurgica*, Elsevier, v. 9, n. 2, p. 155–161, 1961.
- LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of engineering materials and technology*, American Society of Mechanical Engineers, v. 107, n. 1, p. 83–89, 1985.
- LEMAITRE, J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 51, n. 1-3, p. 31–49, 1985.
- LEMAITRE, J. Local approach of fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 25, n. 5-6, p. 523–537, 1986.

- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. *Mechanics of solid materials*. [S.l.]: Cambridge university press, 1994.
- LI, B.; SANTOS, J.; FREITAS, M. d. A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. Taylor & Francis, 2000.
- LI, Z.; CHAN, T. H.; KO, J. M. Fatigue damage model for bridge under traffic loading: application made to tsing ma bridge. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 81–91, 2001.
- LOPES, J.; MALCHER, L. Fatigue life estimates under non-proportional loading through continuum damage evolution law. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 88, p. 64–73, 2017.
- MALCHER, L. Da mecânica do dano contínuo: uma evolução do modelo de lemaître para redução da dependência do ponto de calibração. 2011.
- MAMIYA, E.; ARAÚJO, J.; CASTRO, F. Prismatic hull: a new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 31, n. 7, p. 1144–1153, 2009.
- MAMIYA, E. N.; ARAÚJO, J. A. Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 29, n. 2-3, p. 141–151, 2002.
- MATAKE, T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of JSME*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 20, n. 141, p. 257–263, 1977.
- MCDIARMID, D. Mean stress effects in biaxial fatigue where the stresses are out-of-phase and different frequencies. In: *ICBMFF3*. [S.l.: s.n.], 1991.
- MINER, M. et al. Cumulative fatigue damage. *Journal of applied mechanics*, v. 12, n. 3, p. A159–A164, 1945.
- MISES, R. v. Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, v. 1913, p. 582–592, 1913.
- NETO, E. A. de S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- PALMGREN, A. Die lebensdauer von kugellagern (life length of roller bearings. in german). *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (VDI Zeitschrift)*, ISSN, p. 0341–7258, 1924.
- PAPADOPOULOS, I. V.; DAVOLI, P.; GORLA, C.; FILIPPINI, M.; BERNASCONI, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 19, n. 3, p. 219–235, 1997.
- PERREUX, D.; JOSEPH, E. The effect of frequency on the fatigue performance of filament-wound pipes under biaxial loading: experimental results and damage model. *Composites science and technology*, Elsevier, v. 57, n. 3, p. 353–364, 1997.
- PIRES, F. M. A. et al. Modelação por elementos finitos da iniciação da fractura dúctil nos processos de enformação plástica em massa. 2001.

- PRAGER, W. The theory of plasticity: a survey of recent achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 169, n. 1, p. 41–57, 1955.
- RABOTNOV, Y. N. Paper 68: on the equation of state of creep. In: SAGE PUBLICATIONS SAGE UK: LONDON, ENGLAND. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*. [S.l.], 1963. v. 178, n. 1, p. 2–117.
- RICE, J. R.; TRACEY, D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 17, n. 3, p. 201–217, 1969.
- SÁ, M. V. C. Estudo sobre o comportamento em fadiga da liga de alumínio 7050-t7451 na presença de entalhe e carregamento axial-torcional. 2017.
- SÁ, M.; FERREIRA, J.; SILVA, C. da; ARAÚJO, J. The role of the shear and normal stress gradients on life estimation of notched al7050-t7451 under multiaxial loadings. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 97, p. 38–47, 2018.
- SHENOY, V.; ASHCROFT, I. A.; CRITCHLOW, G. W.; CROCOMBE, A. Fracture mechanics and damage mechanics based fatigue lifetime prediction of adhesively bonded joints subjected to variable amplitude fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 77, n. 7, p. 1073–1090, 2010.
- SINES, G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue*, McGraw-Hill, New York, v. 1, p. 145–169, 1959.
- SMITH, K.; TOPPER, T.; WATSON, P. A stress strain function for the fatigue of metals (stress-strain function for metal fatigue including mean stress effect). *J. Materials*, v. 5, p. 767–778, 01 1970.
- SOCIE, D. Multiaxial fatigue damage models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, American Society of Mechanical Engineers, v. 109, n. 4, p. 293–298, 1987.
- SODERBERG, C. R. Factor of safety and working stress. *Trans Am Soc Mech Eng*, v. 52, p. 13–28, 1939.
- WITHEY, P. Fatigue failure of the de havilland comet i. *Engineering failure analysis*, Elsevier, v. 4, n. 2, p. 147–154, 1997.
- WÖHLER, A. Versuche über die festigkeit eisenbahnwagenuachsen. *Z Bauwesen*, v. 10, 1860.
- XUE, L. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 75, n. 11, p. 3343–3366, 2008.
- ZOUAIN, N.; MAMIYA, E. N.; COMES, F. Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 51–71, 2006.