

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE AVANÇADO BASEADO EM MODELO
PARA SISTEMAS DE IRRIGAÇÃO**

Carlos Gabriel Atta Austriaco
João Pedro Ramos do Amaral

Brasília, julho de 2019



**ENGENHARIA
MECATRÔNICA**
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

TRABALHO DE GRADUAÇÃO
**CONTROLE AVANÇADO BASEADO EM MODELO
PARA SISTEMAS DE IRRIGAÇÃO**

Carlos Gabriel Atta Austriaco
João Pedro Ramos do Amaral

*Relatório submetido como requisito parcial de obtenção
de grau de Engenheiro de Controle e Automação*

Banca Examinadora

Prof. Eugênio Liborio Feitosa Fortaleza

Prof. Mário Benjamin Baptista Siqueira

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Brasília, julho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Carlos Gabriel Atta Austriaco e João Pedro Ramos do Amaral
Controle avançado baseado em modelo para sistemas de irrigação

[Distrito Federal] 2019.

xi, 35p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2019). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1. Água
2. Irrigação
3. Redução modal

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Austriaco, Carlos Gabriel e Amaral, João Pedro, (2019). Controle Avançado Baseado em Modelo para Sistema de Irrigação. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-*n*º010, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 35p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTORES: Carlos Gabriel Atta Austriaco e João Pedro Ramos do Amaral

TÍTULO DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO: Controle Avançado Baseado em Modelo para Sistema de Irrigação.

GRAU: Engenheiro

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Carlos Gabriel Atta Austriaco

SEPS 713/913, Lt A, Bl. C, Ap 16 - Asa Sul

70390-135– DF – Brasil.

Dedicatórias

A minha mãe, por ter me dado toda a força e suporte necessário para que eu conseguisse chegar até aqui e ao meu pai pelo incentivo à carreira de engenheiro e pelo auxílio. Dedico também ao meu amigo compson, que foi de grande importância para este projeto . Por último dedico também a minha falecida vó, o qual acreditou em mim e até hoje me dá forças.

João Pedro Ramos do Amaral

A minha mãe, por ter me incentivado a chegar até aqui e não permitido eu desistir e a meu pai por todo o auxílio que pode dar mesmo em momentos difíceis. Dedico também ao meu amigo pegson por ter trabalhado comigo em todo este trabalho. Dedico, por último, a Luna, que partiu mas permanece em memórias..

Carlos Gabriel Atta Austriaco

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos que me fizeram ter grandes risadas e diminuíram a seriedade e pressão do curso. Agradeço a minha irmã e meus avôs e avós por, mesmo a distância, nunca deixarem de se comunicar e interagir comigo. Agradeço aos professores Eugênio Fortaleza e Mário Siqueira pelos diversos auxílios que nos puderam dar. Agradeço também a Jéssica, que sempre me incentiva a continuar e me ajuda, não importando no que seja.

Carlos Gabriel Atta Austriaco

Agradeço a toda a minha família pelo apoio e suporte. Agradeço também aos meus amigos, em especial ao leoson, o qual conheço desde de antes desta jornada, por todos os momentos compartilhados. E aos professores Eugênio Fortaleza e Mário Siqueira pelo apoio para a realização deste trabalho.

João Pedro Ramos do Amaral

RESUMO

Sabe-se que é um tema de bastante relevância o uso correto e coerente da água por ser um recurso escasso e cada vez mais utilizado pelo crescente aumento populacional. A utilização eficiente e sustentável deste tem se tornado com mais frequência pauta de pesquisas de diversas áreas como, por exemplo, no setor agrícola em que a irrigação é responsável por grande parte do uso do recurso no globo.

Analisa-se as taxas de absorção pela raiz radialmente e verticalmente a partir de equações diferenciais parciais e aproxima-se esse sistema para um sistema de infinitos estados na análise de controle.

Tem-se a expectativa de se utilizar as técnicas de redução modal em controle para reduzir esse sistema de infinitos estados para um sistema reduzido cuja resposta esperada fique em tolerância aceitável. Esse sistema reduzido será utilizado para desenvolver um sistema de controle que permitirá o uso mais eficiente da água em aplicações envolvendo irrigação e, portanto, evitar o desperdício deste recurso.

Palavras Chave: Água, Irrigação, Eficiente, Controle, Redução Modal

ABSTRACT

It is known that is a subject of great relevance the correct and consistent use of water as a scarce resource and with increasingly used by the growing populational increase. The most efficient and sustainable utilization of water has become more frequent the field of research in several areas like, for example, in the agricultural sector where irrigation is responsible for much of the resource use on the globe.

The root absorption rates are analyzed radially and vertically from partial differential equations and this system is approached for a system of infinite states in the control analysis.

It is expected to use modal reduction techniques in control to reduce this system from infinite states to a reduced system whose expected response is in tolerance acceptable. This reduced system will be used to develop a control system that will allow the more efficient use of water in applications involving irrigation and, therefore, to avoid the waste of this resource.

Keywords: Water, Control, Irrigation, Efficient, Modal Reduction

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	OBJETIVO GERAL	2
1.2.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	ESPAÇO DE ESTADOS	4
2.2	DIFERENÇAS FINITAS	6
2.3	LINEARIZAÇÃO	6
2.4	MÉTODO DE NEWTON PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMA NÃO LINEAR	7
2.5	REDUÇÃO MODAL	10
2.6	CONTROLADOR DE ERRO ZERO COM OBSERVADOR DE ESTADOS	11
2.6.1	IMPOSIÇÃO DE PÓLOS COM ERRO ZERO	11
2.6.2	OBSERVADOR DE ESTADOS	14
2.6.3	CONTROLADOR DE ERRO ZERO COM OBSERVADOR DE ESTADOS	15
3	DESENVOLVIMENTO	16
3.1	MODELAGEM DO SISTEMA PLANTA-SOLO	16
3.2	MUDANÇA DE VARIÁVEL	18
3.3	LINEARIZAÇÃO	19
3.4	DISCRETIZAÇÃO	21
3.5	CÁLCULO DA TRANSPIRAÇÃO	22
3.6	DESCRIÇÃO DO SISTEMA	26
3.7	REDUÇÃO MODAL	28
3.8	CONTROLADOR	30
4	CONCLUSÃO	33
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

LISTA DE FIGURAS

1.1	Participação setorial do uso de água no Brasil [1].....	1
2.1	Diagrama de blocos de um controlador com erro 0 com imposição de pólos. Retirado de [2].	12
2.2	Diagrama de blocos de um observador de estados.....	14
2.3	Diagrama de blocos de um controlador de erro zero utilizando um observador de estados [2].....	15
3.1	Transpiração da planta em um solo arenoso a diversas temperaturas.....	25
3.2	Transpiração da planta em um solo com lodo a 25°C.....	25
3.3	Transpiração da planta em um solo com argila a 25°C.....	26
3.4	Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário, para diversas condições de contorno no solo arenoso.	27
3.5	Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário para a condição de contorno como 1.....	27
3.6	Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário, para diferentes tipos de solo.	28
3.7	Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.	29
3.8	Resposta do sistema Planta-Solo (amarelo) e do sistema reduzido (azul) a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.	29
3.9	Resposta do sistema Planta-Solo (amarelo) e do sistema reduzido (azul) a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.	30
3.10	Diagrama de blocos do sistema com o controlador.....	30
3.11	Diagrama de blocos do observador.	31
3.12	Resposta do controlador a uma entrada degrau com amplitude 0,1.	31
3.13	Transpiração do sistema controlado ao longo do tempo.	32
3.14	Gasto de água do tempo.	32

LISTA DE TABELAS

3.1	Tabela de símbolos utilizados para transpiração [3] [4]	24
3.2	Tabela de símbolos para diferentes tipos de solo [3, 4].	27

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

t	Tempo	[s]
K	Condutividade hidráulica	[m/s]
K_s	Condutividade hidráulica saturada	[m/s]
z	Sistema de coordenada vertical	[m]
q_z	Taxa de fluxo vertical	[m/s]
E_s	Evaporação de água no solo	[s ⁻¹]
r_r	Raio da raiz	[m]
R	Domínio radial	[m]
g_s	Condutância estomatal	[mol/m ² s]
g_0	Condutância estomatal residual	[mol/m ² s]
g_0	Condutância estomatal máxima	[mol/m ² s]
r_s	Resistência estomatal	[mol/m ² s]

Símbolos Gregos

θ	Umidade	[m ³ m ⁻³]
θ_s	Umidade saturada no solo	[m ³ m ⁻³]
ψ	Potencial da água no solo	[m]
ψ_e	Potencial da água no ar	[m]
ψ_v	Potencial de água na folha	[m]
ψ_r	Potencial de água referente ao nível terra	[m]
ψ_f	Potencial de água de referência	[m]
ϕ	Potencial da água matricial	[m ² /s]
λ	Densidade de comprimento da raiz	[m ⁻²]

χ	Resistência hidráulica da raiz da planta	[s]
β	Fator de conversão de unidades molares para resistência física	[mol/m ³]

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

A Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU) propõe 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), fruto do consenso obtido pelos delegados dos seus Estados-Membros em 2015 [5]. Dentre eles, o ODS 6 se propõe a “Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos” [6]. Dados recentes coletados pela Agência Nacional de Águas (ANA) de uso de água no Brasil indicam que o mais significativo é para irrigação, como mostrado na figura 1.1, respondendo por de 52% dos 2082 m^3/s de média anual de vazão da água retirada no ano de 2017 e 68,4% dos 1157 m^3/s consumida naquele mesmo ano [1].



Figura 1.1: Participação setorial do uso de água no Brasil [1]

Projeções descritas no Plano Nacional de Segurança Hídrica sugerem que essas proporções devem permanecer nestes níveis até 2030 [7]. Diante deste cenário, a ANA, em seu estudo de indicadores sobre o estágio atual do Brasil no contexto do ODS 6, notando o baixo valor agregado bruto no uso da água do setor agropecuário em comparação com outros setores, sinaliza para necessidade de “especial atenção ao uso da água para irrigação no Brasil, passando-se a adotar métodos mais eficientes, para redução de desperdícios e maior aproveitamento dos recursos hídricos disponíveis, rumo ao alcance da Meta 6.4 do ODS 6, tanto para redução do stress hídrico quanto para melhoria crescente da eficiência do uso da água no País” [6].

Métodos tradicionais de irrigação se baseiam em medições locais condições atmosféricas e, principalmente, de umidade do solo [8]. Apesar dos avanços tecnológicos, uma parte considerável da água retirada acaba não sendo consumida pela planta e sendo perdida, entre outras coisas, por evaporação (sem retornar para o recurso hídrico local) ou sofrendo infiltração profunda sem cumprir o seu objetivo de controlar o estresse hídrico da planta [9]. Além disso, essas metodologias, apesar de eficazes, tem eficiências comprometidas porque as plantas tem respostas fisiológicas associadas ao estado hídrico nos seus tecidos que pode diferir do que ocorre no solo [8]. Numa tentativa de maximizar a eficiência de uso d'água, algumas iniciativas foram desenvolvidas para levar em conta diretamente o estresse hídrico da planta em si, em substituição do "indicador" umidade do solo [10]. Essas tentativas, apesar de promissoras, esbarram na complexidade do processo trocas de energia e água entre a vegetação e a atmosfera.

As variáveis atmosféricas são de relativa facilidade de obtenção por medição dos dados meteorológicos (temperatura, umidade relativa, precipitação, irradiação solar, etc) A resposta fisiológica dos estômatos aos potenciais hídricos das plantas também é relativamente bem estabelecida por experimentos controlados específicos, tanto de campo quanto de laboratório. No entanto, a complexa dinâmica do movimento de água no solo na presença de um sistema radicular com geometria multiforme, que é responsável por características intrínsecas do processo de absorção de água, como por exemplo, absorção compensatória, histerese e redistribuição hidráulica [11, 12, 13, 4], características estas que influenciam diretamente no estresse hídrico da planta, comprometem a performance dos métodos tradicionais de modelagem de absorção de água no solo pela adição de um termo de sumidouro na equação que rege o fenômeno.

Modelos para resolver cada uma dessas importantes características do processo foram propostas na literatura, como por exemplo os trabalhos de [4, 11]. No entanto, o modelo de Siqueira [3] é o único de nosso conhecimento que resolve o problema de absorção de água pelas raízes capturando a dinâmica do movimento de água no solo responsáveis pelos potenciais hídricos que provocam o estresse da planta, caso as aproximações do modelo sejam consistentes com a aplicação. Portanto, o desenvolvimento de um sistema de Manejo de Irrigação baseado no estresse hídrico da vegetação (ao invés de uma umidade do solo média pré-definida) estimado por um modelo Solo-Vegetação-Atmosfera (SVAT) que incorpore um modelo dinâmico de absorção de água pelas raízes deve proporcionar um salto de eficiência do uso de água de irrigação fornecendo quantidade de água proporcional à demanda da planta dadas as condições ambientais.

1.2 Objetivo Geral

Desenvolver um sistema de controle para o estresse hídrico de planta específica utilizando as técnicas de controle avançado e modelagem do fluxo hídrico entre planta, solo e atmosfera. Desta maneira, espera-se um aumento de produtividade e uma redução no uso dos recursos hídricos utilizando de maneira mais racional os mesmos através de um sistema de irrigação de precisão automático.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Desenvolvimento modelo solo-vegetação-atmosfera: o modelo deve capturar a dinâmica dos processos de movimentação de água no solo nas escalas espacial e temporal relevantes para o fenômeno de absorção de água pelas raízes.
- Desenvolvimento de modelo reduzido modal para fins de controle: o sistema que relaciona a taxa de absorção da raiz e transpiração da planta com a quantidade necessária de água para irrigação é de infinitos estados. Há a necessidade de desenvolver, portanto, um modelo modal reduzido, em uma faixa de tolerância aceitável, para facilitar a controlabilidade e, assim, ter uma maior eficiência na utilização do recurso.
- Aplicação de controle baseado em observação de estados do modelo reduzido: o modelo reduzido desenvolvido tem que ser tanto controlável quanto observável com fins de estimar os estados internos do sistema. A observabilidade é requerida para possibilitar de estabilização do sistema com o auxílio de uma malha fechada.

1.3 Definição do problema

O problema em questão trata-se de controlar o estresse hídrico de uma planta utilizando controle por observador de estados. Porém o sistema modelado apresenta alto grau de não linearidade e uma quantidade elevada de estados. [3]

Capítulo 2

Fundamentação teórica

2.1 Espaço de Estados

Um sistema dinâmico formado por um número finito de elementos agrupados pode ser descrito com equações diferenciais ordinárias na qual o tempo é uma variável independente. Com o uso da notação vetor-matriz, uma equação diferencial de ordem n pode ser expressa como um vetor-matriz de equação diferencial de primeira ordem. Se n elementos do vetor forem colocados como variáveis de estado, então o vetor-matriz de equações diferenciais é uma equação de estados. [2]

$${}^{(n)}\dot{y} + a_1 {}^{(n-1)}\dot{y} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \quad (2.1)$$

Nota-se que o conhecimento de $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n)}(0)$ juntos com a entrada $u(t)$ para $t > 0$, determina completamente o comportamento futuro do sistema. Pode-se pegar $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ como um conjunto de n variáveis de estado.

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= y^{(n)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Então a equação (2.1), pode ser escrita como mostrado em (2.3)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n, \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u
\end{aligned} \tag{2.3}$$

De forma alternativa, (2.3) pode ser descrita como (2.4).

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.4}$$

Com A e B sendo (2.5).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

A saída y é dada por (2.6).

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

De forma alternativa, (2.6) pode ser descrita como (2.7).

$$y = Cx \tag{2.7}$$

Com C sendo (2.8).

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

O espaço de estados representa uma função de transferência, demonstrada em (2.9).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.9)$$

2.2 Diferenças Finitas

A ideia básica do método das diferenças finitas é transformar o problema de resolver uma equação diferencial em um problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isto aproximações das derivadas que aparecem na equação por diferenças finitas.

Faz-se $x_0 = a$ e $x_n = b$ e divide-se o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais de comprimento $h = \frac{b-a}{n}$ cada.

Assim, tem-se que:

$$x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, \dots, (n - 1) \quad (2.10)$$

$$y_k \simeq y(x_k) = y(x_0 + kh), k = 0, 1, \dots, (n - 1) \quad (2.11)$$

Utilizando a fórmula mais precisa para a primeira derivada, obtém-se que, pelo método das diferenças finitas, (2.11) pode ser dada por [14]:

$$y'(x_k) \simeq \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \quad (2.12)$$

Dessa forma, por meio da série de Taylor, pode-se obter a derivada segunda como mostrado a seguir:

$$y''(x_k) \simeq \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \quad (2.13)$$

2.3 Linearização

Linearização de sistemas não lineares em engenharia de controle é uma operação normal de um sistema que deve estar próximo ao seu ponto de equilíbrio, e os sinais devem ser considerados pequenos ao redor do equilíbrio (deve ser destacado que existem exceções para este caso). No entanto, se o sistema opera próximo do ponto de equilíbrio e com sinais pequenos, é possível aproximar um sistema não-linear por um linear. Tal sistema linear é equivalente a um sistema não linear com um limite operacional de alcance [2].

O método de linearização apresentado a seguir é baseado na expansão de um sistema não-linear para uma série de Taylor próximo ao ponto de operação e a retenção somente do termo linear porque são negligenciados termos de alta ordem da expansão da série de Taylor. Estes

devem ser pequenos o suficiente, isto é, as variáveis devem desviar levemente da condição operante (de outra forma o resultado será inexato) [2].

Considerando um sistema cuja a entrada é $x(t)$ e a saída é $y(t)$. A relação entre $y(t)$ e $x(t)$ é dada por:

$$y(t) = f(x) \quad (2.14)$$

Se a condição de operação corresponde à $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, então a equação (2.14) pode ser expandida em uma série de Taylor neste ponto como a seguir:

$$\begin{aligned} y(t) &= f(x) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde as derivadas $\frac{df}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \dots$ são calculados em $x = \bar{x}$. Se a variação $x - \bar{x}$ é pequena o suficiente, pode-se negligenciar os termos de alta-ordem em $x - \bar{x}$. Então a equação (2.15) pode ser escrita como:

$$y = \bar{y} + K_l(x - \bar{x}) \quad (2.16)$$

com:

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \quad (2.17)$$

$$K_l = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

A equação (2.14) pode ser rescrita como:

$$y - \bar{y} = K_l(x - \bar{x}) \quad (2.18)$$

O que mostra que $y - \bar{y}$ é proporcional à $x - \bar{x}$. A equação (2.18) é um modelo matemático linear para o sistema não linear dado pela equação (2.14), próximo do ponto operacional $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

2.4 Método de Newton para resolução de sistema não linear

Frequentemente, ocorre a necessidade de resolução de um sistema de equações não lineares em problemas práticos, como o do presente trabalho.

Seja uma função não linear $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, o objetivo é encontrar as soluções de:

$$F(x) = 0 \quad (2.19)$$

Ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Supõe-se que $F(x)$ está definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e que existe derivadas contínuas nesse conjunto, além de que existe pelo menos um ponto $x^* \in D$, tal que $F(x^*) = 0$.

O vetor das derivadas parciais da função $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é denominado vetor gradiente de $f_i(x)$ e será denotado por $\nabla f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)^T \quad (2.21)$$

A matriz das derivadas parciais de $F(x)$ é chamada de matriz Jacobiana e será denotada por $J(x)$:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Os métodos de resolução de sistemas não lineares são iterativos, ou seja, a partir de um ponto inicial x^0 , geram um sequência $x^{(k)}$ de vetores e, na situação de convergência:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \quad (2.23)$$

Em qualquer método iterativo, é preciso estabelecer critérios de parada para se aceitar um ponto $x^{(k)}$ como aproximação para a solução exata x^* ou para se detectar a divergência do processo.

Sabendo que na solução exata x^* temos $F(x^*) = 0$, um critério de parada consiste em verificar se todas as componentes de $F(x^{(k)})$ têm módulo pequeno.

Como $F(x^{(k)})$ é um vetor do \mathbb{R}^n , verificamos se $\|F(x^{(k)})\| < \epsilon$. Outro critério de parada é verificar se $\|x^{k+1} - x^k\|$ está próximo de zero.

Para se detectar divergência e interromper o processo de cálculos, usamos o teste com um número máximo de iterações. Pode-se também interromper o processo se, para algum k , $\|F(x^k)\|$ for maior que uma determinada tolerância.

O método mais estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não lineares é o método de Newton.

No caso de uma equação não linear a uma variável, geometricamente, o método de Newton consiste em tomar o modelo local linear da função $f(x)$ em torno de x_k , e este modelo é a reta tangente à função em x_k .

Ampliando a motivação de se construir um modelo local não linear para o caso de um sistema de equações não lineares, teremos: conhecida a aproximação $x^{(k)} \in D$, para qualquer $x \in D$, existe um c_i , tal que:

$$f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(c_i)^T(x - x^{(k)}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x^{(k)})$, $i = 1, 2, \dots, n$, temos um modelo local linear para $f_i(x)$ em torno de $x^{(k)}$:

$$f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

E, portanto, o modelo local linear para $F(x)$ em torno de $x^{(k)}$ fica:

$$F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \quad (2.26)$$

A nova aproximação $x^{(k+1)}$ será o zero do novo modelo linear $L_k(x)$. Agora,

$$L_k(x) = 0 \iff J(x_k)(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}) \quad (2.27)$$

Se denotarmos $(x - x^{(k)})$ por $s^{(k)}$ temos que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é a solução do sistema linear:

$$J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)}) \quad (2.28)$$

Então, o algoritmo para a resolução do sistema não linear pelo método de Newton é o seguinte: dados x_0 , $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, faça:

Passo 1: calcule $F(x^{(k)})$ e $J(x^{(k)})$;

Passo 2: se $\|F(x^k)\| < \epsilon_1$, faça $\bar{x} = x^{(k)}$ e pare; caso contrário:

Passo 3: obtenha $s^{(k)}$, solução do sistema linear: $J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)})$;

Passo 4: faça: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$;

Passo 5: se $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon_2$, faça $\bar{x} = x^{(k+1)}$ e pare; caso contrário:

Passo 6: $k = k + 1$; volte ao passo 1. [14]

2.5 Redução Modal

A redução modal é uma técnica utilizada quando um modelo de um sistema de ordem infinita é representado no espaço de estados. E, por se tratar de um sistema com um número muito elevado de estados, torna-se difícil o controle deste. [15]

Primeiramente, é necessário passar o sistema para a base modal utilizando os autovalores a partir do sistema (2.29), onde A , B e C são matrizes e D é um valor.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases} \quad (2.29)$$

O primeiro passo para a redução modal é calcular os autovalores da matriz A , formando uma matriz V o qual também é uma matriz quadrada da mesma ordem da matriz A . A matriz V contém dois tipos de colunas (autovetores): uma correspondente a a valores reais negativos de autovalores e outra correspondente a um par de autovalores complexos conjugados. O segundo tipo de coluna pode ser substituído por duas colunas, a primeira com a parte real do par de complexos conjugados e outra com a parte imaginária. Isto nos leva a outra matriz \bar{V} . [15]

Com a matriz \bar{V} é possível deixar o sistema na base modal utilizando as seguintes equações (2.30).

$$\begin{aligned} A_{Modal} &= \bar{V}^{-1}A\bar{V} \\ B_{Modal} &= \bar{V}^{-1}B \\ C_{Modal} &= C\bar{V} \\ X_{Modal} &= \bar{V}^{-1}X \end{aligned} \quad (2.30)$$

Com o sistema todo na base modal, pode-se descobrir quais estados do sistema tem o maior ganho estático e usá-los como o sistema reduzido [15]. São escolhidos os estados com menores ganhos estáticos, pois em sistemas mecânicos os estados de menor frequência geralmente são os que exercem maior influência no sistema. A matriz dos ganhos estáticos Q é achada transformando a matriz C_{Modal} em quadrada com os valores de cada estado dela na diagonal principal, resultando na nova matriz C_{Md} e, após isto, utiliza-se a equação (2.31). [15]

$$Q = (C_{Md} * ((A_{Modal})^{-1}) * B_{Modal})^{-1} \quad (2.31)$$

Agora basta selecionar os estados com maior ganho estático na matriz-coluna Q . Com os estados escolhidos, pode-se descobrir as matrizes reduzidas A_r , B_r e C_r . [15]

Visando que o sistema reduzido possua o mesmo comportamento do sistema modelado, é necessário fazer com que ambos os sistemas possuam o mesmo ganho estático e para satisfazer tal condição é necessário que uma matriz D_r seja criada utilizando a equação (2.32). [15]

$$D_r = (C_r * ((A_r)^{-1}) * B_r) - (C_{Modal} * ((A_{Modal})^{-1}) * B_{Modal}) \quad (2.32)$$

Porém, ainda é necessário adicionar um tempo morto ao sistema para que este funcione de forma adequada. Isto é feito utilizando um bloco de *delay* no *software* Matlab com o tempo necessário para o tempo morto. Calcula-se um novo B_d e D_d utilizando as equações (2.33) e (2.34), onde tm é o tempo morto e I é uma matriz identidade. [15]

$$B_d = A_r * (e^{(tm * A_r)} - I(nestados)) * A_r^{-1} * B_r + B_r \quad (2.33)$$

$$D_d = C_r * (e^{(tm * A_r)} - I(nestados)) * A_r^{-1} * B_r + D_r \quad (2.34)$$

Agora tem-se o sistema reduzido em (2.35).

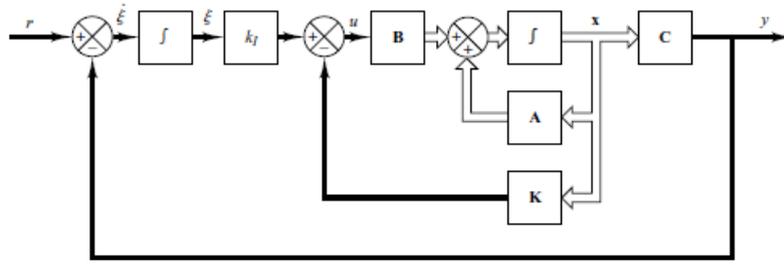
$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_d u \\ y = C_r x_r + D_d \end{cases} \quad (2.35)$$

2.6 Controlador de erro zero com Observador de Estados

2.6.1 Imposição de Pólos com erro zero

Caso a planta não possua um integrador (sistema do tipo 0), o principio básico para desenvolver um controlador é inserir um integrador no caminho de realimentação entre o comparador de erro e a planta como visto na Figura 2.1. [2]. Do diagrama é obtido:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \\ u = -Kx + k_I \xi \\ \dot{\xi} = r - y = r - Cx \end{cases} \quad (2.36)$$



u = control signal (scalar)
 y = output signal (scalar)
 ξ = output of the integrator (state variable of the system, scalar)
 r = reference input signal (step function, scalar)
 A = $n \times n$ constant matrix
 B = $n \times 1$ constant matrix
 C = $1 \times n$ constant matrix

Figura 2.1: Diagrama de blocos de um controlador com erro 0 com imposição de pólos. Retirado de [2].

Assumindo que uma entrada degrau é aplicada em $t = 0$, a dinâmica do sistema para $t > 0$ pode ser descrita pela equação (2.36) reescrita como em (2.37).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.37)$$

Agora deve-se projetar um sistema assintoticamente estável de forma que $x(\infty)$, $\xi(\infty)$, $u(\infty)$ sejam valores aproximadamente constantes. Então no estado estacionário pode-se conseguir $y(\infty) = r$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (2.38)$$

Nota-se que $r(t)$ é uma entrada degrau, e $r(\infty) = r(\text{constante})$ para $t > 0$. Subtraindo as equações (2.37) de (2.38) é obtida a equação (2.39).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (2.39)$$

Definindo:

$$x(t) - x(\infty) = x_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t) \quad (2.40)$$

A equação (2.39) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.41)$$

onde:

$$u_e(t) = -Gx_e(t) + g_I\xi_e \quad (2.42)$$

Um novo vetor $e(t)$ é obtido abaixo:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

A equação (2.41) pode ser reescrita como:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (2.44)$$

onde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

A equação (2.42) se transforma em:

$$u_e = -\hat{G}e \quad (2.46)$$

onde:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & : & -g_I \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

A equação do erro pode ser obtida substituindo a equação (2.47) em (2.44):

$$\dot{e} = (\hat{A} - \hat{V}\hat{K})e \quad (2.48)$$

Se os autovalores desejados da matriz $\hat{A} - \hat{B}\hat{G}$ (os pólos de malha fechada) são especificados como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, então a matriz de realimentação G e a constante de ganho integral podem ser encontradas utilizando a formula de Ackermann:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}C & \dots & (\hat{A})^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix}^{-1} \phi(s) \quad (2.49)$$

sendo $\phi(s)$ é o polinômio característico desejado para o controlador e dado por:

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) + \dots + (s - \mu_n) \quad (2.50)$$

2.6.2 Observador de Estados

O observador de estados estima as variáveis de estado com a medida da saída e variáveis controladas. Isto é necessário nos casos onde as variáveis de estado não estão disponíveis. Para que o observador de estados funcione de maneira correta é necessário que o sistema seja totalmente observável. [2]

Considerando a planta definida por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases} \quad (2.51)$$

O observador é uma reconstrução do sistema que busca reconstruir o vetor de estados da planta. O modelo matemático do observador é basicamente o mesmo que o da planta, com exceção que deve-se incluir um termo adicional que é a estimativa do erro para compensar a falta de precisão das matrizes A e B e a falta de um erro inicial. A estimativa do erro ou o erro do observador é a diferença entre a saída medida e a estimada. O erro inicial é a diferença entre o estado inicial e o estimado. Então o modelo matemático do observador é:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_e(y - C\hat{x}) \quad (2.52)$$

Onde \hat{x} é o estado estimado e $C\hat{x}$ é a saída estimada. As entradas do observador são a saída y e a entrada de controle u . A matriz K_e , o qual é chamada de ganho do observador, é uma matriz de ponderação para a correção do termo envolvendo a diferença entre a saída y e a saída estimada. Este termo corrige constantemente a saída do modelo e aumenta a performance do observador. O diagrama de blocos do observador pode ser visto na Figura 2.2. [2]

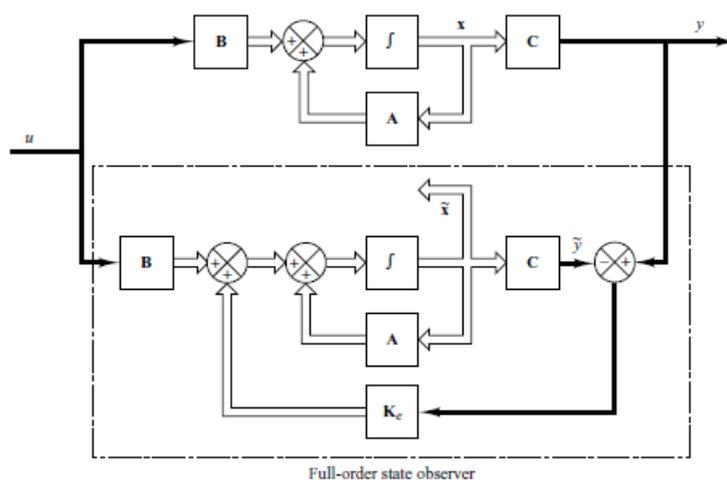


Figura 2.2: Diagrama de blocos de um observador de estados.

onde K_e pode ser achado por meio da formula de Ackermann (2.53), a mesma utilizada para a imposição de pólos, porém mudando as matrizes utilizadas.

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1} \phi(s) \quad (2.53)$$

No qual $\phi(s)$ é o polinômio característico desejado para o observador.

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) + \dots + (s - \mu_n) \quad (2.54)$$

2.6.3 Controlador de erro zero com Observador de Estados

Para o controlador de erro zero com observador de estados as equações tanto da imposição de pólos com erro zero como do observador de estados se mantém com a única alteração que os estados utilizados no ganho K, da imposição de pólos não são mais os estados da planta e sim o do observador dos estados. O diagrama de blocos do sistema pode ser observado a partir da Figura 2.3.

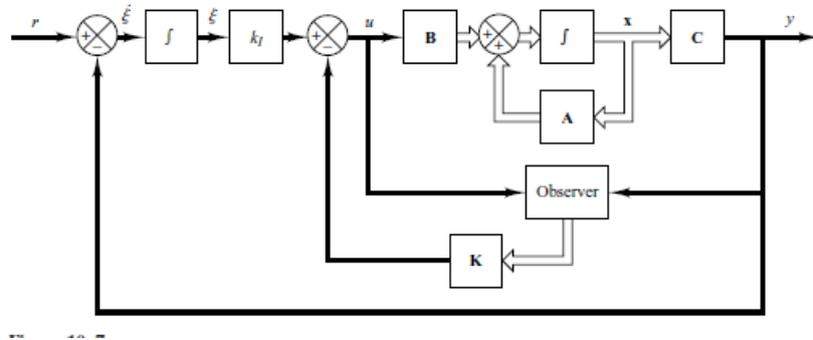


Figura 2.3: Diagrama de blocos de um controlador de erro zero utilizando um observador de estados [2].

Capítulo 3

Desenvolvimento

3.1 Modelagem do Sistema Planta-Solo

O movimento da água no solo é descrito pela equação de Richards, em que θ representa a umidade em termos de volume de água por volume de solo, K a condutividade hidráulica e ψ o potencial hídrico do solo [16]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla[K \nabla(\psi - z)] \quad (3.1)$$

As variáveis θ , ψ e K são relacionadas através das funções de retenção de água e da condutividade hidráulica (3.2) e (3.3), respectivamente:

$$\frac{\psi}{\psi_e} = \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{-b} \quad (3.2)$$

$$\frac{K}{K_s} = \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{2b+3} \quad (3.3)$$

com θ_s representando a umidade saturada, ψ_e o potencial de água no ar e K_s a condutividade hidráulica saturada e b é um parâmetro empírico [17].

Aplica-se, então, a transformação integral de Kirchhoff dada por (3.4) na equação (3.1) para ψ , definindo o potencial de água matricial, dado por ϕ , para assim linearizar o termo de segunda ordem desta equação, escrevendo ϕ como sendo a força motriz, mostrado na equação (3.5) [4, 17, 18].

$$\phi = \int_{-\infty}^{\psi} K_s(\psi) d\psi \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \phi - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (3.5)$$

Na tentativa de solucionar a equação de Richards, a presença do sistema radial muda profundamente a dinâmica de umidade do solo. A absorção de água pela raiz induz um fluxo radial em

direção a ela [19].

Pode-se fazer uma separação de escalas assumindo uma homogeneidade horizontal na distribuição de raízes. Portanto, a equação (3.5) pode ser aproximada para um sistema de duas equações diferenciais parciais acopladas, sendo uma para o fluxo de água radial nas vizinhanças da raiz e a outra para o fluxo de água vertical como mostrado nas equações (3.6) e (3.7) [3]:

$$\frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial q_z(z, t)}{\partial z} - E_s(z, t) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial q_z(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi(\theta(z, t))}{\partial z^2} - \frac{\partial K(\theta(z, t))}{\partial z} \quad (3.7)$$

onde q_z é a taxa de fluxo vertical. Vale destacar que foi introduzido o termo E_s para a evaporação de água no solo.

O modelo estima a distribuição da umidade do solo dividindo o domínio vertical em camadas e solucionando a equação (3.6) de r_r para R para cada camada individual. Para solucioná-la, é necessário saber as condições de contorno (*boundary conditions*).

Para $r = R$, a simetria do modelo requer fluxo nulo. Para $r = r_r$, ocorre a absorção de água pela raiz na interface solo-raiz. Quando a absorção é hidraulicamente controlada, é dada por:

$$q_r(z) = K_r[\psi_r - z - \psi(r_r, z)] \quad (3.8)$$

onde K_r é a permeabilidade da membrana da raiz e ψ_r a pressão de raiz referente ao nível da terra. A transpiração TR aproxima-se como igual ao fluxo da seiva no capilar e é dado por (3.9) [4]:

$$TR = \frac{\psi_r - \psi_v}{\chi} = \frac{M_w}{\rho_w R_g} \frac{1}{r_s + r_b} \left(\frac{h_v e_{sv}}{T_{sv}} - \frac{e_{av}}{T_{av}} \right) \quad (3.9)$$

onde TR pode ser calculado a partir das condições ambientais da planta, com ψ_v representando o potencial de água na folha e χ a resistência hidráulica da raiz para a planta.

Ainda na última parte da equação referente à transpiração, M_w e ρ_w são o peso molecular da água e sua densidade, respectivamente, R_g é a constante universal dos gases, r_b e r_s são as resistências da camada limite e do estômato, nesta ordem, T_{sv} e e_{sv} são a temperatura da folha e a pressão de vapor nessa temperatura, T_{av} e e_{av} são a temperatura e a pressão de vapor ao redor da folha e h_v é dado por (3.10) com g sendo a aceleração da gravidade.

$$h_v = e \frac{M_w \psi_v g}{R_g T_{sv}} \quad (3.10)$$

A resistência da camada limite pode ser dada por (3.11) com z_0 sendo o comprimento da rugosidade do solo, h_c a altura da planta, C_t o coeficiente de transferência, U_{hc} a velocidade do vento no topo da planta, l_c a largura média da folha e η sendo dado por (3.12) com c_d o coeficiente de arrasto na folha e LAI o index de área da folha.

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_c - z_0} \int_{z_0}^{h_c} \frac{U_{hc}^{0.5}}{C_t l_c^{0.5}} e^{\left[\frac{\eta}{2} \left(\frac{z}{h_c} - 1\right)\right]} dz \quad (3.11)$$

$$\eta = h_c \left(\frac{c_d L A I}{2 l_c^2 h_c} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.12)$$

A resposta do estômato, que é uma estrutura microscópica localizada na epiderme da folha permitindo as trocas gasosas, a um solo que está secando regula as perdas por transpiração a partir de um aviso químico e/ou hidráulico da raiz para a folha por meio do potencial de água da raiz que se torna cada vez mais negativo. A função logística que é usualmente descrita para descrever a sensibilidade estomatal em relação ao potencial de água na folha são dados por [4, 3, 20]:

$$g_s = \frac{\beta}{r_s} = g_0 + (g_{max} - g_0) f_\psi \quad (3.13)$$

$$f_\psi = \frac{1 + e^{s_f \psi_f}}{1 + e^{s_f (\psi_f - \psi_v)}} \quad (3.14)$$

com g_s a condutância estomatal, g_0 a condutância estomatal residual, g_{max} a condutância estomatal máxima, β um fator de conversão de unidades molares para resistência física, f_ψ uma função de redução com um parâmetro de sensibilidade s_f determinado empiricamente e o potencial de referência ψ_f . Percebe-se então, pelas equações (3.13) e (3.14) que a função de redução f_ψ se torna máxima quando ψ_v é mínimo e vice-versa.

3.2 Mudança de variável

Faz-se necessário colocar toda a equação (3.6) em termos de uma função para poder utilizar as técnicas de controle. Para isso, inicialmente, obtemos uma relação entre K e ψ a partir das equações (3.2) e (3.3), obtendo, assim, a equação (3.15).

$$\left(\frac{K}{K_s} \right)^{\frac{1}{2b+3}} = \left(\frac{\psi}{\psi_e} \right)^{-\frac{1}{b}} \quad (3.15)$$

Manipula-se (3.15) para isolar K como se segue:

$$K(\psi) = \frac{K_s}{\psi_e^{-2-\frac{3}{b}}} \psi^{-2-\frac{3}{b}} \quad (3.16)$$

Pela transformada de Kirchhoff dada por (3.4), tem-se a relação entre ϕ e K . Utilizando a (3.16), pode-se mostrar que:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\psi} \frac{K_s}{\psi_e^{-2-\frac{3}{b}}} \psi^{-2-\frac{3}{b}} d\psi \quad (3.17)$$

Tirando as constantes para fora da integral de (3.17), chega-se a:

$$\phi = \frac{K_s}{\psi_e^{-2-\frac{3}{b}}} \int_{-\infty}^{\psi_e} \psi^{-2-\frac{3}{b}} d\psi \quad (3.18)$$

Resolvendo a integral anterior, obtém-se que ϕ pode ser expresso por:

$$\phi = \frac{K_s}{\psi_e^{-2-\frac{3}{b}}} \frac{\psi^{-1-\frac{3}{b}}}{(-1-\frac{3}{b})} \quad (3.19)$$

Expande-se,então, a (3.19) por meio da (3.2):

$$\phi = \frac{K_s}{\psi_e^{-2-\frac{3}{b}}} \frac{\psi_e^{-1-\frac{3}{b}}}{(-1-\frac{3}{b})} \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{b+3} \quad (3.20)$$

Por fim, simplifica-se da seguinte maneira:

$$\phi = \frac{K_s \psi_e}{(-1-\frac{3}{b})\theta_s^{b+3}} \theta^{b+3} \quad (3.21)$$

3.3 Linearização

Note que a equação (3.21), o qual define o funcionamento do sistema, obtida na seção anterior, é uma equação não linear. Isto impede o uso do métodos de controle convencionais, que se baseiam em sistemas lineares. Visando conseguir utilizar tal método, é necessário que o sistema seja linearizado.

Para facilitar reescreve-se a equação (3.21) como descrito em (3.22).

$$\phi = K_c \theta^{(b+3)} \quad (3.22)$$

$$K_c = \frac{K_s \psi_e}{(-1-\frac{3}{b})\theta_s^{b+3}}$$

Utiliza-se a equação (2.17) para se calcular K_{l1} , sendo que o ponto de equilíbrio utilizado foi $\bar{\theta} = 0,1$. Este ponto foi escolhido pois a planta se encontra em um comportamento regular, ou seja, não se encontrando em estresse hídrico, e não está nem seca e nem excessivamente saturada de água [3].

$$K_{l1} = \left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=\bar{\theta}}$$

$$K_{l1} = K_c(b+3)\bar{\theta}^{(b+2)} \quad (3.23)$$

$$K_{l1} = K_c(b+3)0,1^{(b+2)}$$

Calcula-se $\bar{\phi}$ a partir da (3.24).

$$\bar{\phi} = K_c 0,1^{(b+3)} \quad (3.24)$$

Substituindo as equações (3.23) (3.24) na equação (2.18), têm-se que:

$$\phi = K_c(b+3)0,1^{(b+2)}(\theta - 0,1) + K_c 0,1^{(b+3)} \quad (3.25)$$

Agora, separa-se em constantes visando facilitar a visualização e a manipulação da equação:

$$\phi = C_1\theta + C_2$$

$$C_1 = K_c 0,4^{(b+2)}(b+3) \quad (3.26)$$

$$C_2 = K_c 0,1^{b+3} - K_c 0,1^{b+3}(b+3)$$

Assim a linearização da variável ϕ está completa como observado na equação (3.26).

Necessita-se, porém, linearizar a variável referente à condutividade hidráulica de água no solo, simbolizada por K . Utiliza-se a equação de Campbell (3.3) para isolar K :

$$K(\theta) = \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} \theta^{2b+3} \quad (3.27)$$

Novamente, por meio da equação (2.17), calcula-se K_{l2} , com o mesmo ponto de equilíbrio anterior $\bar{\theta} = 0,1$.

$$K_{l2} = \left. \frac{dK}{d\theta} \right|_{\theta=\bar{\theta}}$$

$$K_{l2} = (2b+3) \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} \bar{\theta}^{2b+2} \quad (3.28)$$

$$K_{l2} = (2b+3) \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} 0,1^{2b+2}$$

Calcula-se \bar{K} a partir da equação (3.29).

$$\bar{K} = \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} \bar{\theta}^{2b+3} \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.28) e (3.29) na (2.18), obtém-se:

$$K = (2b + 3) \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} 0, 1^{2b+2} (\theta - 0, 1) + \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} \bar{\theta}^{2b+3} \quad (3.30)$$

Separando em constantes visando facilitar a visualização e a manipulação da equação:

$$\begin{aligned} K &= C_3 \theta + C_4 \\ C_3 &= (2b + 3) \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} 0, 1^{2b+2} \\ C_4 &= \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} 0, 1^{2b+3} - (2b + 3) \frac{K_s}{\theta_s^{2b+3}} 0, 1^{2b+3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Assim a linearização da variável K , que representa a condutividade hidráulica no solo, está completa como observado na equação (3.31).

3.4 Discretização

Utilizando o método das diferenças finitas, explicado no capítulo 2, discretizar-se-ão as equações (3.6) e (3.7). Percebe-se que em (3.6) há o termo E_s , o qual refere-se à evaporação da água no solo. Por fins de simplicidade, pode-se desconsiderá-lo sem perda de generalidade do sistema. Reescreve-se, pois, (3.6) como mostrado em (3.32). [4]

$$\frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi(\theta(z, t))}{\partial z^2} - \frac{\partial K(\theta(z, t))}{\partial z} \quad (3.32)$$

Pode se substituir a equação já linearizada (3.26) na equação (3.32), com a finalidade de se ter uma equação para o sistema somente com uma variável.

$$\frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (C_1 \theta(r, z, t) + C_2)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 (C_1 \theta(r, z, t) + C_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial (C_3 \theta(r, z, t) + C_4)}{\partial z} \quad (3.33)$$

Resolvendo a derivada, com a utilização da regra do produto, tem-se que:

$$\frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = C_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) - C_3 \frac{\partial K}{\partial z} \quad (3.34)$$

Agora com a utilização do método das diferenças finitas obtém-se (3.35) com i sendo a discretização radial e j referente à discretização vertical.

$$\dot{\theta}_{i,j} = C_1 \left(\frac{1}{ir_0} \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2r_0} + \frac{\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{r_0^2} + \frac{\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{z_0^2} \right) - C_3 \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2z_0} \quad (3.35)$$

Na equação (3.35), r_0 é o volume de controle dividido pelo número de discretizações da direção radial e z_0 é o comprimento total da raiz dividido pelo número de discretizações na direção vertical como mostrado em (3.36).

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{R}{n_r} \\ z_0 &= \frac{Z}{n_z} \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde R é o valor máximo do volume de controle, Z o comprimento total da raiz, n_r o número de discretizações na direção radial e n_z o número de discretizações na direção vertical.

Porém somente isto não é suficiente para discretizar o sistema, necessita-se também estar atento as condições de contorno para definir a primeira e última discretização, tanto radial quanto verticalmente. Na direção radial, no raio mais externo, devido a simetria, requer fluxo nulo e portanto espelha-se o último em relação ao posterior; no raio mais interno, utiliza-se a (3.8), que é a equação que descreve a absorção de água pela raiz. Na direção vertical, a parte superior também requer fluxo nulo e portanto espelhou-se a primeira camada; na última camada, como a água ainda pode fluir para camadas ainda inferiores, decidiu-se um valor de porcentagem de retenção de água.

3.5 Cálculo da Transpiração

Inicialmente, calcula-se a integral (3.11) referente a resistência da camada limite chegando a (3.37).

$$\frac{1}{r_b} = \frac{2h_c U_{hc}^{0,5} e^{-\frac{\eta}{2}} (e^{\frac{\eta}{2}} - e^{\frac{\eta z_0}{2h_c}})}{\eta(h_c - z_0) C_{tlc}^{0,5}} \quad (3.37)$$

Percebe-se que para o cálculo da transpiração, é necessário resolver o sistema não linear com as duas equações (3.9) e (3.13) com as incógnitas ψ_v e r_s e para isso utiliza-se o método de Newton, explicado na fundamentação teórica.

Utilizando a equação da transpiração (3.9), cria-se uma função f_1 dependendo das variáveis ψ_v e r_s mostrada em (3.38).

$$f_1(\psi_v, r_s) = \frac{\psi_r - \psi_v}{X} - \frac{M_w}{\rho_w R_g} \frac{1}{r_s + r_b} \left(\frac{e^{\frac{M_w \psi_v g}{R_g T_{sv}}} e_{sv}}{T_{sv}} - \frac{e_{av}}{T_{av}} \right) \quad (3.38)$$

Para facilitar a visualização, cria-se constantes em (3.39).

$$\begin{aligned}
A &= \frac{M_w}{\rho_w R_g} \\
B &= \frac{M_w g}{R_g T_{sv}} \\
C &= \frac{e_{av}}{T_{av}} \\
D &= \frac{e_{sv}}{T_{sv}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Substituindo (3.39) em (3.38), chega-se a (3.40)

$$\begin{aligned}
f_1(\psi_v, r_s) &= \frac{\psi_r - \psi_v}{X} - \frac{A(e^{B\psi_v} D - C)}{r_s + r_b} \\
f_1(\psi_v, r_s) &= \frac{\psi_r}{X} - \frac{\psi_v}{X} - \frac{ADe^{B\psi_v}}{r_s + r_b} + \frac{AC}{r_s + r_b}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Para a segunda equação, substitui-se (3.14) em (3.13), mostrado em (3.41).

$$\frac{\beta}{r_s} = g_0 + \frac{(g_{max} - g_0)(1 + e^{s_f \psi_f})}{1 + e^{s_f(\psi_f - \psi_v)}} \tag{3.41}$$

Para facilitar a visualização, é criada uma constante em (3.42).

$$E = (g_{max} - g_0)(1 + e^{s_f \psi_f}) \tag{3.42}$$

$$\frac{\beta}{r_s} = g_0 + \frac{E}{1 + e^{s_f(\psi_f - \psi_v)}} \tag{3.43}$$

Com o uso de (3.43), chega-se a f_2 :

$$f_2(\psi_v, r_s) = \frac{\beta}{r_s} - g_0 - \frac{E}{1 + e^{s_f(\psi_f - \psi_v)}} \tag{3.44}$$

Temos então que nosso F e o Jacobiano J para utilizar o método de Newton é (3.45).

$$F = \begin{bmatrix} f_1(\psi_v, r_s) \\ f_2(\psi_v, r_s) \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\psi_v, r_s)}{\partial \psi_v} & \frac{\partial f_1(\psi_v, r_s)}{\partial r_s} \\ \frac{\partial f_2(\psi_v, r_s)}{\partial \psi_v} & \frac{\partial f_2(\psi_v, r_s)}{\partial r_s} \end{bmatrix}$$

Calcula-se agora as derivadas parciais do jacobiano em (3.46).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(\psi_v, r_s)}{\partial \psi_v} &= -\frac{1}{X} - \frac{ADBe^{B\psi_v}}{r_s + r_b} \\
\frac{\partial f_1(\psi_v, r_s)}{\partial r_s} &= \frac{ADe^{B\psi_v}}{(r_s + r_b)^2} - \frac{AC}{(r_s + r_b)^2} \\
\frac{\partial f_2(\psi_v, r_s)}{\partial \psi_v} &= -\frac{Es_f e^{s_f \psi_f} e^{s_f \psi_v}}{(e^{s_f \psi_f} + e^{s_f \psi_v})^2} \\
\frac{\partial f_2(\psi_v, r_s)}{\partial r_s} &= -\frac{\beta}{r_s^2}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

A tabela 3.1 contém os valores utilizados para a simular a transpiração.

Símbolo	Valor
l_c	0,2 m
h_c	0,8 m
C_t	156,2
U_{hc}	41,76 m/s
c_d	3
z_0	0,005 m
χ	$1,06 \cdot 10^9 s$
M_w	0,01801528 kg/mol
d_w	997 kg/m^3
R_g	8,31 J/(mol K)
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
Pa	101325 N/m^2
g_0	$4,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol/(m}^2 \text{ s)}$
g_{max}	$0,56 \text{ mol/(m}^2 \text{ s)}$
s_f	$3,14 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$
ψ_f	-193 m

Tabela 3.1: Tabela de símbolos utilizados para transpiração [3] [4]

Os valores de ϵ_1 e ϵ_2 para simular foram de 0,0001. A simulação para diversos tipos de solos e diversas temperaturas encontra-se a seguir:

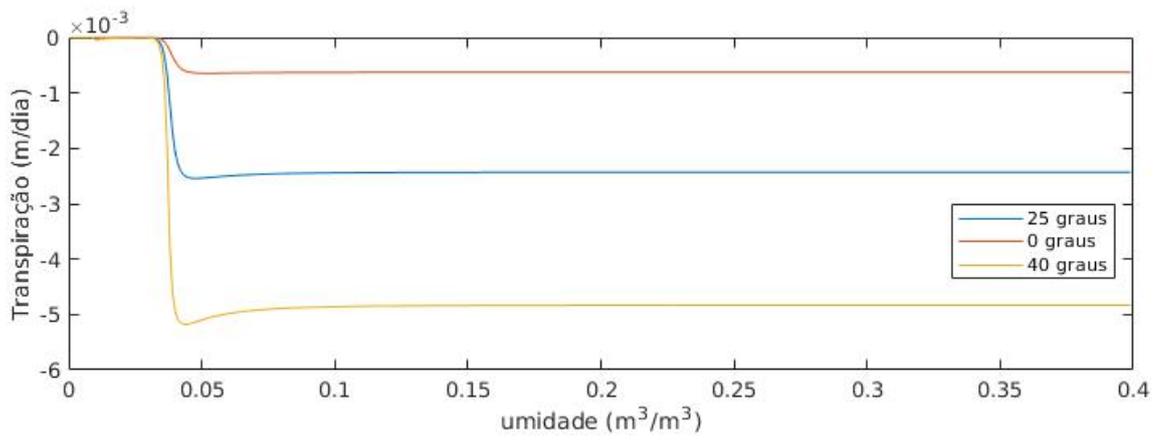


Figura 3.1: Transpiração da planta em um solo arenoso a diversas temperaturas

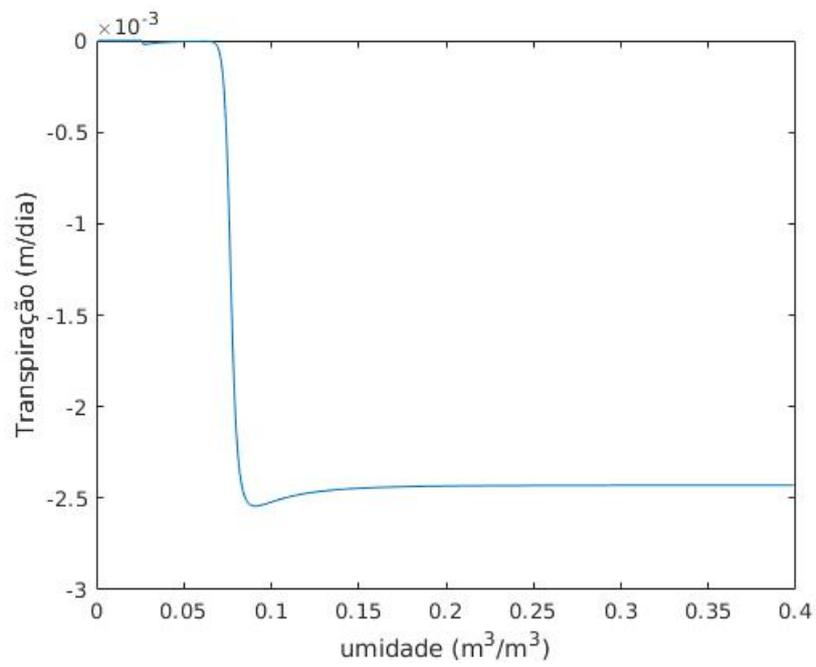


Figura 3.2: Transpiração da planta em um solo com lodo a 25°C

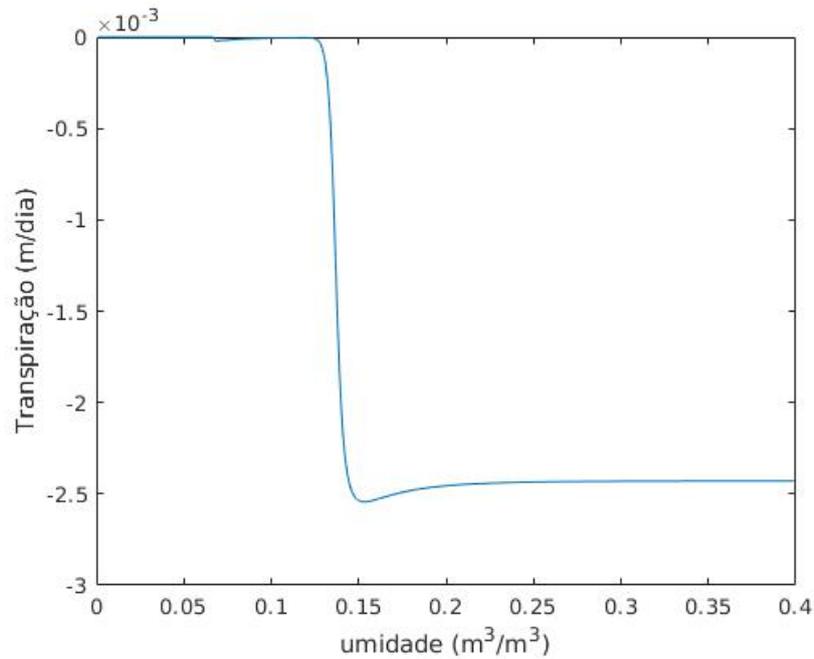


Figura 3.3: Transpiração da planta em um solo com argila a 25°C

3.6 Descrição do Sistema

O sistema planta-solo admitiu uma densidade de raiz constante utilizando como raio do volume de controle de 10 centímetros e o tamanho máximo da profundidade da raiz de 1 metro.

A matriz A do sistema de controle em espaço de estados é dado por (3.35) com um adicional na última linha referente a raiz e a absorção dela. A matriz B tem duas colunas, uma referente a entrada da irrigação e a outra referente a entrada da transpiração, sendo que no sistema só será utilizado sua primeira coluna, a segunda é usada para a redução modal, pois o observador terá a transpiração como uma de suas entradas. A matriz C é um vetor-linha preenchido por 0, excetuando a última coluna que é 1, sendo assim a saída do sistema o estado da planta.

Nas Figuras 3.4 e 3.5, pode-se ver o comportamento do sistema a uma entrada degrau unitário para diferentes condições de contorno do solo abaixo da discretização vertical, o qual é uma porcentagem do valor desta última camada.

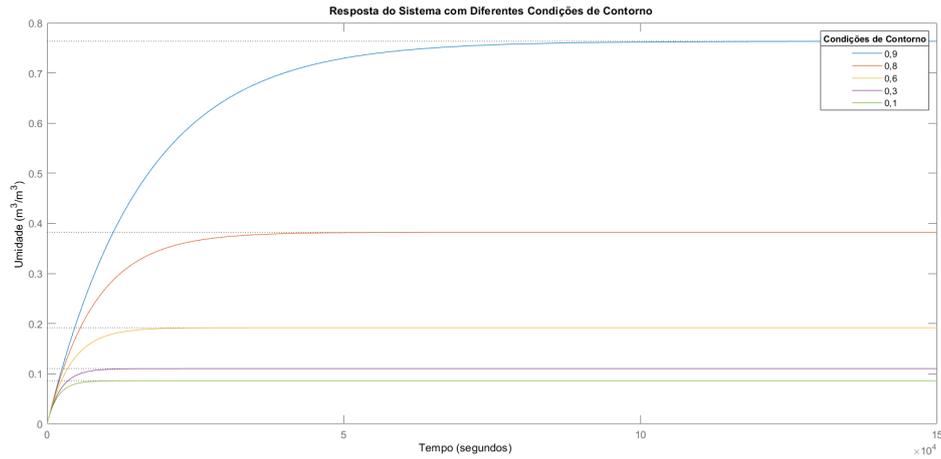


Figura 3.4: Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário, para diversas condições de contorno no solo arenoso.

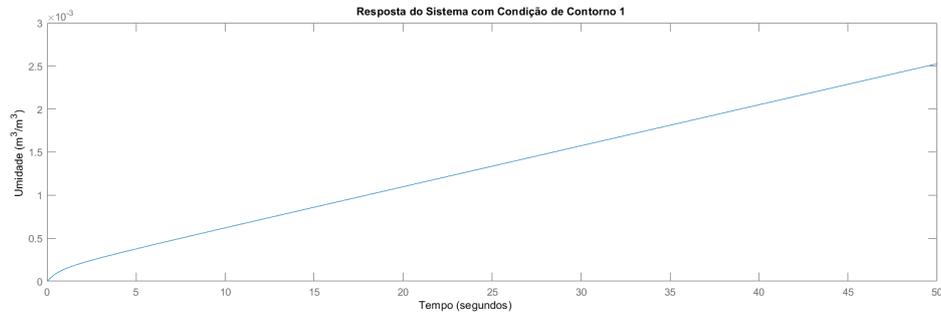


Figura 3.5: Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário para a condição de contorno como 1.

Comportamento do sistema a uma entrada degrau para diferentes tipos de solo com o valor da condição de contorno da discretização da última camada igual à 0,6 do valor desta camada pode ser visto na Figura 3.6. O que varia para cada tipo de solo são as constantes mostradas em 3.2.

Solo	b	θ_s	ψ_e	K_s
Arenoso	3,31	0,4	-0,093	$9,39 \times 10^{-6}$
Argiloso	4,38	0,4	-0,161	$2,14 \times 10^{-6}$
Lodo	6,58	0,4	-0,192	$2,24 \times 10^{-6}$

Tabela 3.2: Tabela de símbolos para diferentes tipos de solo [3, 4].

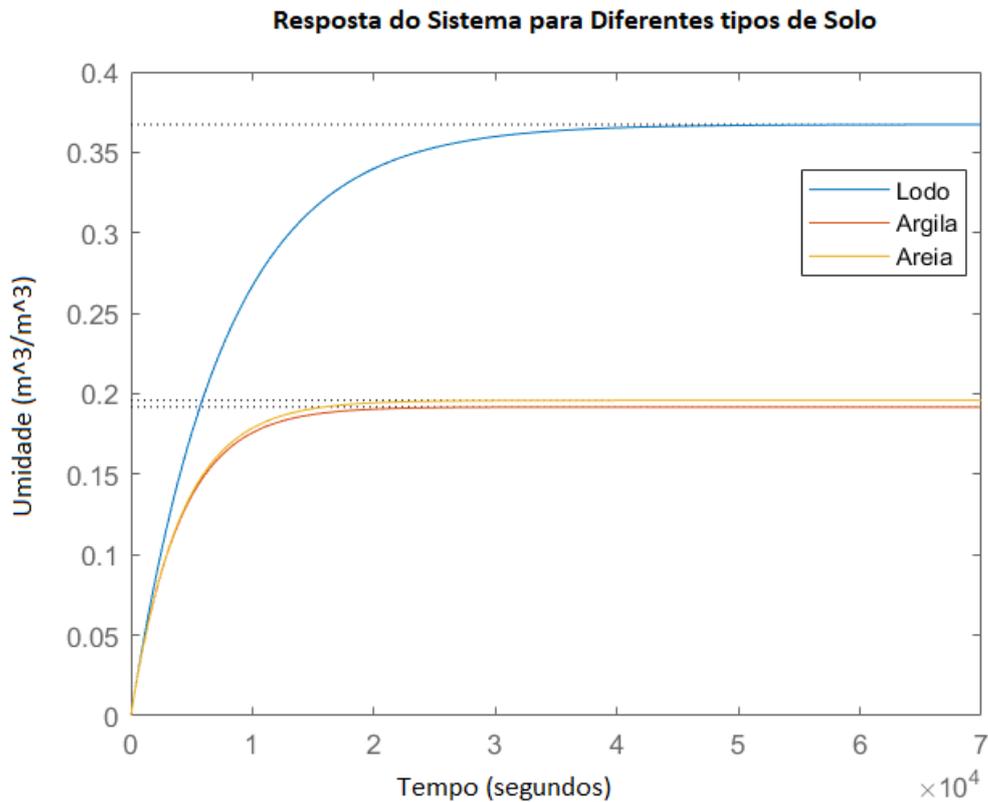


Figura 3.6: Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau unitário, para diferentes tipos de solo.

Para as simulações feitas nas seções Redução Modal e Controlador, foi utilizada a condição de contorno da última discretização do solo, como 0,6 do valor desta camada. E o tipo de solo utilizado foi de areia.

3.7 Redução Modal

Utilizando do software Matlab foram criadas as matrizes A, B, C e D, sendo D com o valor nulo, os quais representam o sistema Planta-Solo no formato espaço de estado com $(nr \cdot nz + 1)$ estados, onde nr é o número de discretizações radiais e nz o número de discretizações na altura, calculado conforme descrito na seção . E o comportamento deste há uma entrada degrau, com amplitude 0,1, pode ser vista na Figura 3.7.

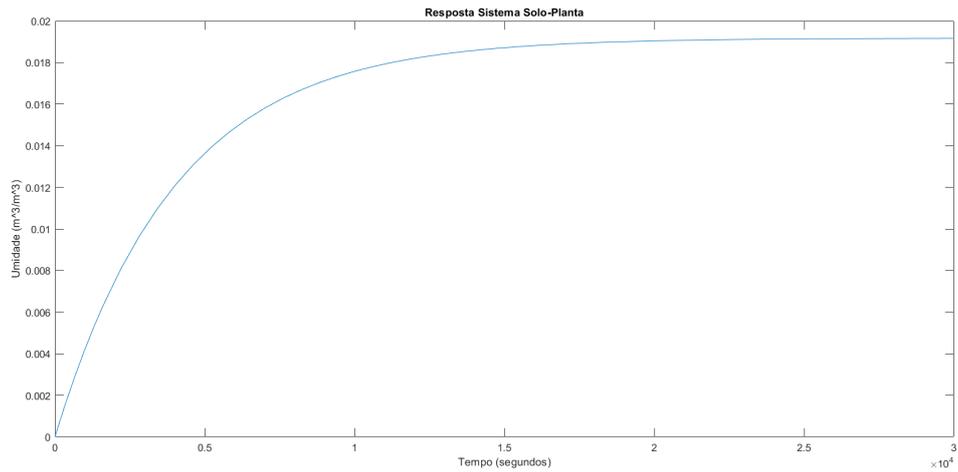


Figura 3.7: Resposta do sistema Planta-Solo a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.

Agora utilizando a técnica de redução modal [15], têm-se um sistema reduzido, no qual A_r (A reduzido) é uma matriz 2×2 , B_r também é uma matriz 2×2 , pois ele terá como uma das entradas a transpiração. Com ambos os sistemas é possível compará-los, o resultado pode ser visto nas Figuras 3.8 e 3.9 .

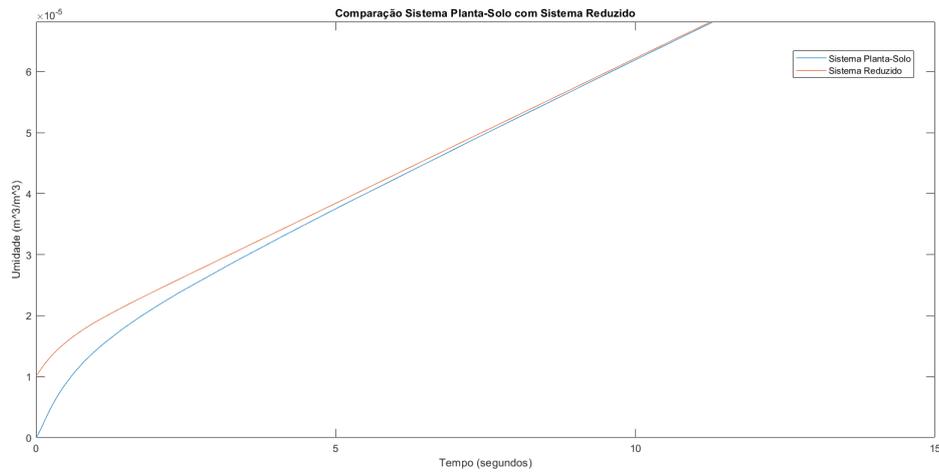


Figura 3.8: Resposta do sistema Planta-Solo (amarelo) e do sistema reduzido (azul) a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.

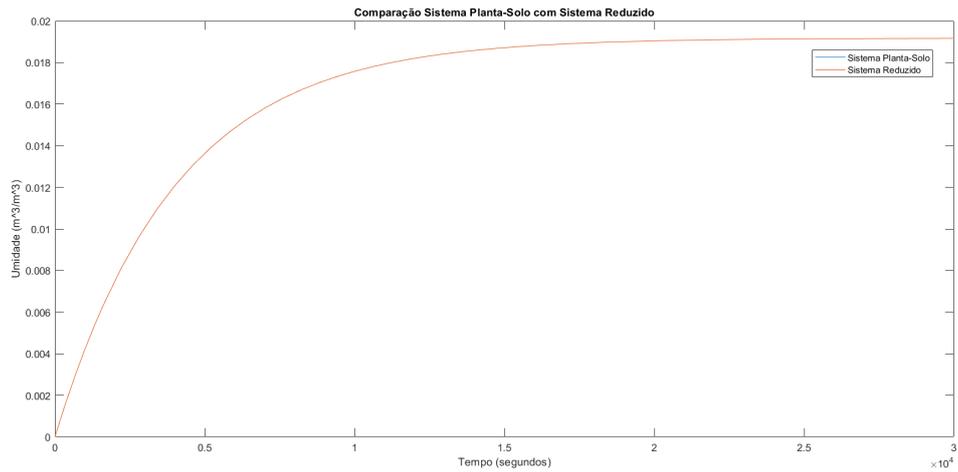


Figura 3.9: Resposta do sistema Planta-Solo (amarelo) e do sistema reduzido (azul) a uma entrada degrau com amplitude de 0,1.

Com isso pode-se perceber que o sistema reduzido se comporta de maneira muito similar ao sistema original, porém há uma pequena divergência entre eles no início. Como o tempo desta divergência é muito pequeno em relação ao tempo que o sistema demora para estabilizar, logo não foi adicionado um delay ao sistema.

3.8 Controlador

O sistema com o controlador de erro zero com um observador de estados pode ser observado nas Figuras 3.10 e 3.11.

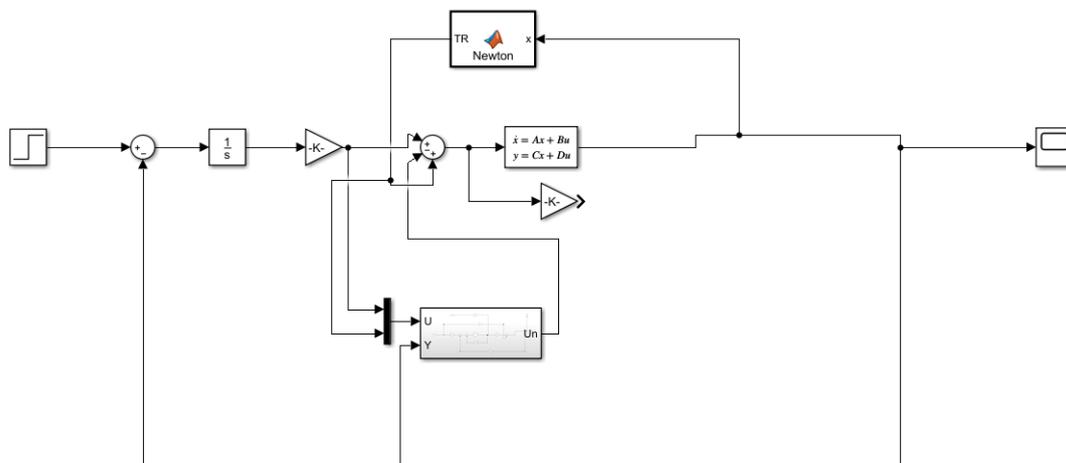


Figura 3.10: Diagrama de blocos do sistema com o controlador.

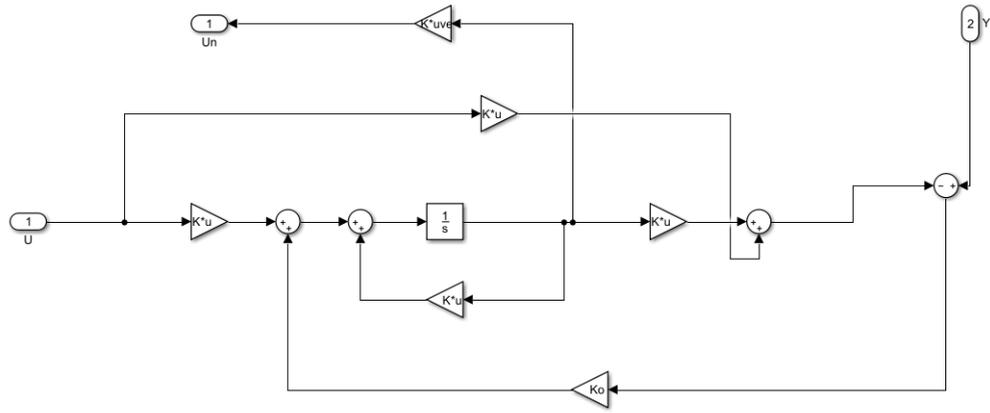


Figura 3.11: Diagrama de blocos do observador.

Os pólos utilizados para a imposição, ou seja, os que definiram os ganhos da matriz K e de k_l , foram os mesmos pólos do sistema repetindo o pólo mais lento, para o cálculo de k_l . Já os pólos do observador foram definidos como -50 , porque com este valor eles são suficientemente mais rápidos que os pólos impostos e da planta.

As matrizes utilizadas no observador são fruto da redução modal, e o observador também possui como entrada a transpiração assim otimizando o sistema.

A resposta do sistema com o controlador à uma entrada degrau com amplitude $0,1$, ou seja a umidade desejada na planta é de $0,1$, pode ser visto na Figura 3.12.

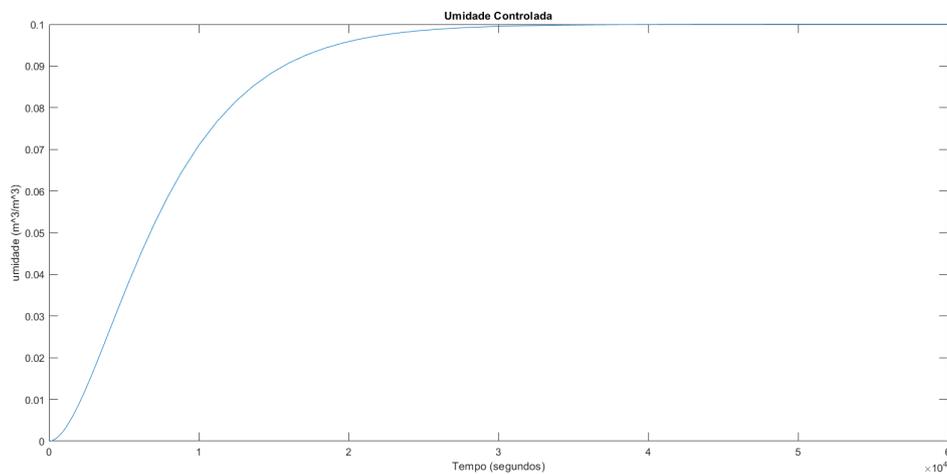


Figura 3.12: Resposta do controlador a uma entrada degrau com amplitude $0,1$.

A resposta da transpiração ao longo do tempo com o sistema controlado pode ser visto na Figura 3.13

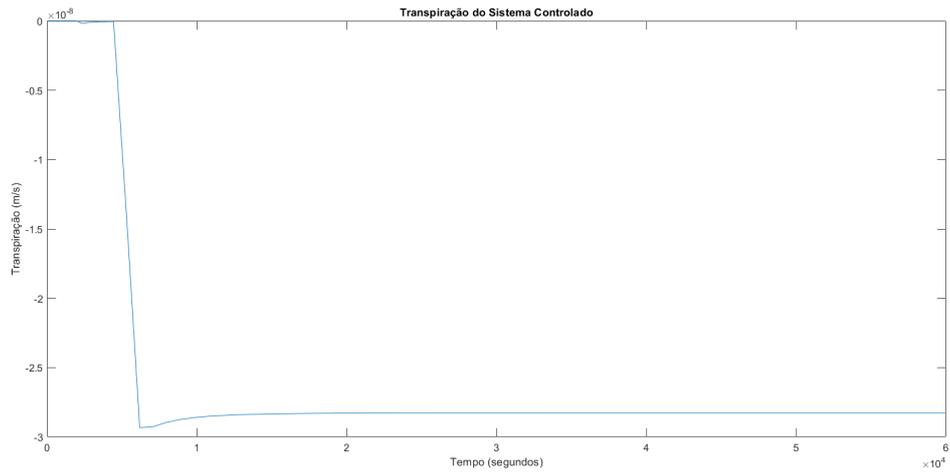


Figura 3.13: Transpiração do sistema controlado ao longo do tempo.

O gasto de água em litros utilizado pelo sistema pode ser visto por meio da Figura 3.14

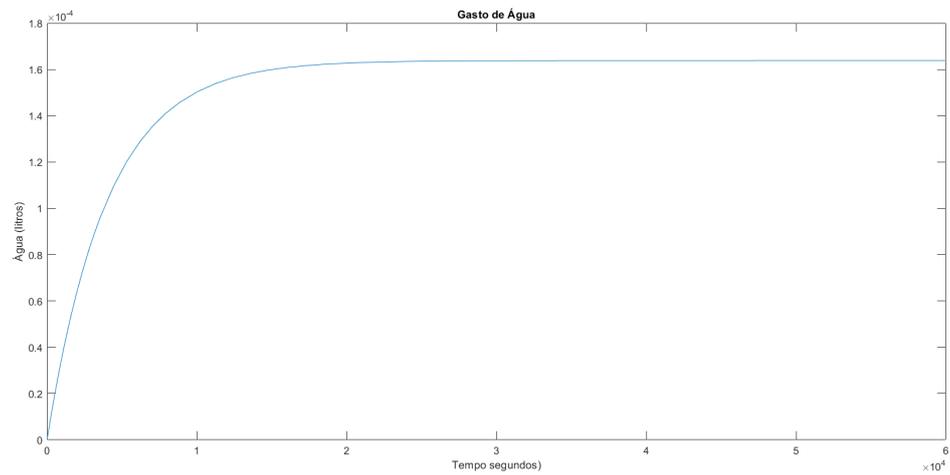


Figura 3.14: Gasto de água do tempo.

O gasto em litros por dia da planta é de 13 litros por dia em média o que está de acordo com o consumo de uma árvore pequena [21].

Capítulo 4

Conclusão

Percebeu-se que a modelagem do sistema utilizando as técnicas de discretização, linearização e a teoria de espaço de estados agiu conforme esperado como verificado nas simulações. Observou-se que quanto maior a perda de água na última camada discretizada, mais rápido o sistema atinge um estado estacionário e com menor amplitude. Também presente nos gráficos do presente trabalho, percebe-se que a transpiração é maior quanto maior a temperatura, condizente, assim, com a realidade.

A partir dos gráficos da redução modal do sistema planta-solo, verificou-se que a resposta do sistema reduzido foi similar ao sistema real, sendo assim, portanto, um bom recurso a ser usado no observador de estados. É válido afirmar também que o controlador agiu conforme projetado para manter a umidade em um nível desejado.

O sistema proposto obteve o comportamento desejado, porém este ainda pode ser melhorado pois possui poucas entradas e só funciona próximo à área linearizada. É possível aprimorá-lo adicionando mais entradas a transpiração, que depende da temperatura e da radiação, assim como utilizar técnicas de controle não linear já que o sistema possui uma alta não linearidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANA. Conjuntura dos recursos hídricos no brasil 2018: informe anual. 2018.
- [2] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. [S.l.]: PhB, 2010.
- [3] SIQUEIRA, M.; KATUL, G.; PORPORATO, A. Onset of water stress, hysteresis in plant conductance, and hydraulic lift: Scaling soil water dynamics from millimeters to meters. *Water Resour. Res.*, v. 44, 2008.
- [4] TUZET, A.; PERRIER, A.; LEUNING, R. A coupled model of stomatal conductance, photosynthesis and transpiration. *Plant Cell Environment*, v. 26, p. 1097–1116, 2003.
- [5] NATIONS, U. Transforming our world: The 2030 agenda for sustainable development. *Resolution Adopted by the General Assembly*, 2015.
- [6] ANA. Ods 6 no brasil: Visão da ana sobre os indicadores. 2019.
- [7] ANA. Pnsh - plano nacional de segurança hídrica. 2019.
- [8] STEPPE, K.; PAUW, D. J. W. D.; LEMEURE, R. A step towards new irrigation scheduling strategies using plant-based measurements and mathematical modelling. *Irrigation Science*, p. 505–517, 2008.
- [9] ANA. Atlas irrigação - uso da Água na agricultura irrigada. 2017.
- [10] MORILLO, J. G. et al. Toward precision irrigation for intensive strawberry cultivation. *Agricultural Water Management*, p. 43–51, 2015.
- [11] CAI, G. et al. Parameterization of root water uptake models considering dynamic root distributions and water uptake compensation. *Vadose Zone Journal*, p. 17, 2017.
- [12] CADWELL, M. M.; DAWSON, T. E.; RICHARDS, J. H. Hydraulic lift: consequences of water efflux from the roots of plants. *Oecologia*, p. 151–161, 1998.
- [13] PETERS, A. Modified conceptual model for compensated root water uptake - a simulation study. *Journal of Hydrology*, p. 1–10, 2016.
- [14] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.: s.n.].

- [15] FORTALEZA, E. *Active Control Applied to Offshore Structures: Positioning and Attenuation of Vortex Induced Vibrations*. Tese (Doutorado) — Mines ParisTech, 209.
- [16] RICHARDS, L. Capillary conduction of liquid through porous medium. *Physics*, v. 1, p. 318–333, 1931.
- [17] CAMPBELL, G. S. *Soil Physics With BASIC: Transport Models for Soil-Plant Systems*. [S.l.]: Elsevier, 1985.
- [18] REDINGER, G. J. et al. Infiltration-rate of slot mulches—measurement and numerical-simulation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, v. 48, p. 982–986, 1984.
- [19] MENDEL, M.; HEGARTEN, S.; NEUGEBAUER, H. J. On a better understanding of hydraulic lift: A numerical study. *Water Resour. Res.*, v. 38, p. 1183, 2002.
- [20] DAVIES, W. J.; ZANG, J. H. Root signals and the regulation of growth and development of plants in drying soil. *Annu. Rev. Plant Physiol. Plant Mol. Biol.*, v. 42, p. 55–76, 1991.
- [21] RAIN Bird. Disponível em: <<https://rainbirdrj.com.br/calculo-da-agua-necessaria-as-plantas-de-jardim/>>. Acesso em: 27 junho. 2019.