



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Departamento de Estatística - EST

Tábua de vida: uma aplicação atuarial

Antônio Carlos Sousa Uchôa

Orientadora: Prof. Dra Ana Maria Nogales Vasconcelos

Brasília

2018

Antônio Carlos Sousa Uchôa

Tábua de vida: uma aplicação atuarial

Trabalho de conclusão de curso apresentado junto ao Departamento de graduação em Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientadora: Prof. Dra Ana Maria Nogales Vasconcelos

Brasília

2018

Antônio Carlos Sousa Uchôa

Tábua de vida: uma aplicação atuarial

Trabalho de conclusão de curso apresentado junto ao Departamento de graduação em Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Trabalho aprovado. Brasília, 03 de Julho de 2018:

**Prof. Dra Ana Maria Nogales
Vasconcelos**
Orientadora e Membro da banca

**Prof. Dra. Marília Miranda Forte
Gomes**
Membro da Banca

Prof. Dra. Me. Claudete Ruas
Membro da Banca

Brasília
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, principalmente meus pais e minha irmã, por ter me apoiado durante toda a minha vida, me incentivando a seguir em frente nos momentos difíceis sem se deixar abalar com as barreiras que surgem no caminho.

Agradeço aos meus amigos Pedro, Marina, Laís, Giovanna e, principalmente, Rodrigo pelos dias de descontração e apoio nas matérias, vocês foram muito importantes para a minha caminhada na universidade.

Dedico um agradecimento à minha companheira, Izabella, que por muitas vezes foi minha válvula de escape de problemas envolvendo ou não a universidade, me apoiando e incentivando a cada novo dia.

Em especial, dedico meus sinceros agradecimentos à professora Ana Maria Nogales Vasconcelos, pelo apoio e empenho em orientar o meu trabalho, se disponibilizando de tempo para encontros de auxílio e de esclarecimento de dúvidas. Agradeço também a professora Maria Teresa Leão pelos incentivos durante toda a minha formação que me fizeram acreditar ter escolhido o curso certo para minha vida.

Dedico um grande agradecimento a Fundação Sistel que possibilitou a realização desse trabalho com o fornecimento dos dados.

Por último um agradecimento por todas as pessoas que não foram citadas no texto, mas que foram importantes para a minha trajetória na graduação.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Participantes da Fundação Sistel segundo sexo e idade entre 2007 a 2017	22
Figura 2 – Participantes falecidos segundo sexo e idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	23
Figura 3 – Participantes falecidos segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	24
Figura 4 – Probabilidades de morte segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	25
Figura 5 – Intervalo de confiança para as probabilidades de morte segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	25
Figura 6 – Probabilidade de Morte Suavizada segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	26
Figura 7 – Comparação entre as esperanças de vida por método de suavização - Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 - 2017	29
Figura 8 – Comparação entre as probabilidade de morte por método de suavização – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017	29

Lista de tabelas

Tabela 1 – Idade dos participantes da Fundação Sistel de Seguridade Social segundo medidas de posição	22
Tabela 2 – Tábua de Vida Completa com as probabilidades suavizadas pelo método de Whittaker-Henderson – Fundação Sistel de Seguridade Social 2017 .	27
Tabela 3 – Tábua de Vida Completa com as probabilidades suavizadas pelo método de Karup King – Fundação Sistel de Seguridade Social 2017	28
Tabela 4 – P-valor para o teste de Kolmogorov-Smirnov	30

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Objetivo Geral	13
1.1.1	Objetivos Específicos	13
2	METODOLOGIA	14
2.1	Base de dados	14
2.2	Tábua de vida	15
2.3	Método de Suavização	18
2.4	Testes de Comparação de Tábuas	20
3	RESULTADOS	22
3.1	Perfil dos participantes dos planos da Fundação Sistel de Seguridade Social	22
3.2	Construção da Tábua de Vida	24
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
	REFERÊNCIAS	32
5	APÊNDICE	34
6	ANEXO	35

1 Introdução

Nos últimos dois anos, um dos assuntos mais comentados no cenário político e entre os brasileiros é a situação da previdência social no Brasil, que fechou o ano de 2016 com um déficit de R\$ 151,9 bilhões, segundo o secretário de previdência do Brasil (Previdência Social, 2017). Para o combate desse déficit, o governo criou uma proposta para a reformulação na previdência social que, segundo o chefe de assessoria especial do ministério da fazenda, é condição fundamental para o reequilíbrio fiscal do país (Ministério da Fazenda, 2017). Algumas das propostas apresentadas nessa reformulação é a alteração da idade mínima para a aposentadoria e a limitação ao teto do INSS de todos os funcionários (PEC 287, 2017).

Com a reformulação da Previdência Social sendo debatida, a previdência complementar ganhou visibilidade diante à população devido à possibilidade de ter uma maior renda no momento da aposentadoria, podendo trazer uma melhor qualidade de vida ao aposentado. Esse aumento na visibilidade foi verificado pela FenaPrevi (Federação Nacional de Previdência Privada e Vida), que apurou que os investimentos nos planos de previdência complementar no país cresceram aproximadamente 5,8% durante o ano de 2016 (Folha de São Paulo, 2016). A previdência complementar tem como objetivo a complementação do benefício de previdência social, de acordo com o art. 40 da Ementa Constitucional número 20 da Legislação Brasileira.

Para uma entidade de previdência complementar, é importante analisar a sobrevivência de seus beneficiários a fim de traçar políticas administrativas e de investimentos. Para tanto, uma das ferramentas utilizadas é a tábua de vida, a partir da qual é possível se obter as probabilidades de morte e sobrevivência de indivíduos de acordo com a idade. Neste trabalho, esta ferramenta foi utilizada para estimar probabilidade de morte e sobrevivência dos beneficiários da Fundação SISTEL, entidade de previdência complementar de empresas de telecomunicações brasileiras.

No Brasil, as entidades de previdência complementar utilizam tábuas atuariais estrangeiras para a elaboração e para estimativa a sua população, isso pois ainda é deficitário de tábuas atuariais nacionais com grupos populacionais específicos. As duas tábuas muito utilizadas no mercado brasileiro são: a AT-2000 e a AT-83, ambas americanas e criadas há mais de 15 anos, nas quais para melhor ajuste da população é realizado um desagramento ou agravamento da mortalidade dessas tábuas. Isso demonstra uma carência no mercado brasileiro de tábuas próprias, atuais e representativas. A tábua atuarial mínima vigente que deve ser utilizada por uma entidade de previdência complementar, na legislação brasileira, é a AT-83 (CGPC 18, 2006).

Com o intuito de buscar melhores estimativas de probabilidades de morte e sobrevivência para os beneficiários da Fundação Sistel, este trabalho tem como finalidade construir uma tábua de vida com dados reais, fornecidos pela Fundação Sistel de Seguridade Social, contendo participantes ativos, aposentados e pensionistas no período de 2007 a 2017.

Para a construção de uma tábua de vida, primeiramente, foram estimadas as probabilidades de morte com base nos dados observados. Em seguida, procedeu-se a uma suavização dessas estimativas, para a posterior obtenção das demais funções de uma tábua de vida.

1.1 **Objetivo Geral**

Elaborar tábua de vida com base nos dados das Fundação Sistel de Seguridade do período de 2007 a 2017.

1.1.1 **Objetivos Específicos**

- Estudar técnicas de construção de Tábuas de vida;
- Analisar a partir de técnicas estatísticas descritivas os dados fornecidos pela Fundação Sistel de Seguridade Social;
- Estudar métodos de suavização;
- Comparar a tábua de vida construída com tábuas de vida utilizadas pelo mercado.

2 Metodologia

2.1 Base de dados

Para a elaboração desse trabalho, foram utilizados dados da Fundação Sistel de Seguridade Social, que é uma entidade de previdência complementar do Brasil criada em 1977 pelo General José Antonio de Alencastro e Silva e focada exclusivamente na previdência complementar para os funcionários de empresas de Telecomunicações Brasileiras.

Segundo seu estatuto, é uma entidade de fins previdenciais e não lucrativos, com autonomia patrimonial, administrativa e financeira, que tem por objeto instituir planos privados de concessão de rendas aos empregados vinculados as patrocinadoras da fundação, sendo considerado patrocinadora as empresas de telecomunicações que estejam vinculadas à entidade.

A Fundação Sistel de Seguridade Social administra atualmente 7 planos de previdência complementar e um plano de saúde, sendo que 5 desses planos de previdência estão com situação em extinção na PREVIC (Superintendência Nacional de Previdência Complementar) que é o órgão fiscalizador do governo. Um plano torna-se extinto quando não se é permitida a entrada de mais nenhum participante no plano.

Com o intuito de utilizar dados confiáveis, foi realizada uma dupla verificação da base disponibilizada pela Fundação Sistel, observando o batimento de registro dos participantes e avaliando a sua duplicidade.

Os dados utilizados neste trabalho referem-se ao histórico de participantes, no período de 2007 a 2017, em sete planos da Fundação Sistel. Desses sete planos, cinco encontram-se em extinção, mas para o presente estudo não foi levado em consideração a qual plano o participante encontrava-se vinculado.

Para cada participante, foram obtidas as seguintes variáveis: tipo de participante (ativo, aposentado, pensionista), sexo, data de nascimento, data de entrada no plano¹, e para os falecidos no período, data de óbito. Todos os participantes encontravam-se em atividade ou em gozo de benefício (aposentadoria ou pensão).

A Fundação Sistel disponibilizou para este estudo duas bases de dados. Uma primeira, gerada em dezembro de 2017, contendo 31.622 participantes durante o período de 2007 a 2017. Nessa base, 2.541 participantes possuíam dois ou mais registros, que foram excluídos, resultando em um total de 29.081 participantes.

¹ Para os pensionistas, a data de entrada no plano refere-se à data de início do benefício de pensão. Para os aposentados, a data de entrada no plano refere-se à adesão ao plano quando em atividade.

A segunda base disponibilizada referia-se ao período de 2002 a 2017. No entanto, devido a inconsistências com relação ao número de participantes, decidiu-se utilizar a primeira base.

Para a elaboração da tábua de vida, obteve-se a variável idade ao óbito, como diferença entre a data do óbito e a data de nascimento. A idade ao óbito foi categorizada segundo grupos quinquenais. A idade dos participantes vivos em dezembro de 2017 foi calculada a partir da data de nascimento e a data de referência (31 de dezembro de 2017).

Para avaliar a qualidade da informação e a existência de padrões de comportamento da mortalidade segundo idade, procedeu-se a uma análise descritiva dos dados. Para os cálculos e ajustes foram utilizados o software estatístico R e o Office Excel da Microsoft.

Do total de 29.081 participantes, 4.368 faleceram durante o período e 24.713 sobreviveram. Com relação ao tipo de participante, 24.984 eram titulares de planos (ativos ou aposentados) e 4.097 pensionistas.

No Apêndice 1, é possível verificar o crescente aumento na quantidade de óbitos ocorridos no decorrer do estudo, o que já era esperado devido ao envelhecimento da população. Pode-se observar 3 quedas na distribuição de óbitos, sendo a maior delas em 2017. Isso pode ser explicado pelo fato de o arquivo fornecido ter informação dos óbitos que foram fornecidos até o fim do ano de 2017, sendo que é possível ter ocorrido falecimentos não declarados neste ano. O decréscimo no ano de 2012 pode-se ser ligado com a troca do sistema de armazenamento das informações pela Entidade.

2.2 Tábua de vida

Siegel e Swanson (2004) informam que, em Roma, já se tinha alguns registros sobre o controle de nascimento e morte de chefes de família, de contribuintes ao estado e de cidadãos adultos e, raramente, de mulheres e crianças. Essas informações tinham como objetivo determinar as obrigações fiscais, trabalhistas e militares, prologando-se por aproximadamente 800 anos. Há relatos de controle sobre a mortalidade da população na China em 2300 aC, mas John Graunt foi o primeiro a publicar um livro apresentando métodos de construção de tábuas de vida. O livro foi publicado em 1662 com o título “*Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*”. Nele, é observado um grupo inicial de pessoas vendo a sobrevivência de um ano para o outro e relatando o comportamento da mortalidade de uma geração de pessoas.

Cerca de 30 anos depois, Edmond Halley apresentou a *Breslau table*, considerada por alguns autores a primeira tábua de vida, por conter cálculos não meramente descritivos a respeito da sobrevivência. Essa tábua foi publicada em 1693 na obra “*Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind*” e, nela, foram observados as mortes e nascimentos

na cidade de Breslau, na Polônia, em um período de 5 anos.

No âmbito atuarial, o inglês Joshua Milne apresentou a primeira tábua com conceitos atuariais. Essa tábua foi apresentada na obra “*A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances*”, em 1815, para a cidade de Carlisle na Inglaterra. Ao longo dos anos, os países europeus passaram a elaborar suas tábuas estendendo-as para as demais regiões com o passar do tempo.

Segundo Ortega (1987), uma tábua de vida, também conhecida como tábua de mortalidade, é um instrumento que permite medir as probabilidades de sobrevivência e morte de uma população em função da idade, sendo a descrição estatística mais completa da mortalidade.

As tábuas de mortalidade podem ser classificadas segundo três aspectos: período de referência, classificação por idade e fatores compreendidos. Com relação ao aspecto do período, é possível separar as tábuas em dois tipos: as tábuas longitudinais e as de momento.

As tábuas longitudinais, ou de geração, são úteis para a análise do comportamento da mortalidade de uma determinada coorte². As tábuas de momento são as mais utilizadas no mercado, essa tábua calcula a mortalidade para uma coorte hipotética que está sujeita às condições de mortalidade observada em um mesmo período de tempo.

Para o aspecto de idade, as tábuas são classificadas em completas e abreviadas. Nas tábuas completas, as diferentes funções são calculadas para cada ano de idade, enquanto nas tábuas abreviadas, são apresentadas as funções por grupo etário. Nesse trabalho, será construída uma tábua completa. Por se tratar de um estudo em uma população adulta sem a informação de idades menores, a idade inicial da tábua a ser construída foi fixada em 50 anos.

Em relação aos fatores compreendidos, há dois tipos de tábuas: de decrementos simples e múltiplo. As tábuas de decremento múltiplo descrevem a diminuição de uma coorte original através de dois ou mais fatores, sendo possível verificar o efeito de adesão e retirada da coorte original em vários estágios da vida. Já a de decremento simples, descreve essa diminuição relacionada apenas a um fator, sem a necessidade de buscar as causas, e esse será utilizado para esse trabalho.

Foi utilizada nesse trabalho a metodologia apresentada por Ortega (1987) para a elaboração da tábua de vida, na qual são necessárias quatro etapas:

1. A primeira de ajuste dos dados;
2. Cálculo de probabilidade de morte;

² Coorte é um conjunto de pessoas que compartilham um evento origem em comum.

3. Suavização dessas probabilidades;
4. Derivação das outras funções da tábua.

As funções das tábuas de vida são:

- l_x é o número de pessoas que alcançam com vida a idade exata x , a tábua de vida se inicia pelo l_0 que é chamado de raiz da tábua e normalmente é utilizado um valor inteiro alto para a sua escolha para trazer uma comparabilidade para a tábua.

- ${}_n d_x$: é o número de óbitos ocorridos entre as idades exatas x e $x+n$, sendo calculado da seguinte maneira:

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (2.1)$$

- ${}_n q_x$: é a probabilidade de uma pessoa falecer após alcançar a idade exata x e antes de completar a idade de $x+n$. Seu método de cálculo é:

$${}_n q_x = \frac{(l_x - l_{x+n})}{l_x} \quad (2.2)$$

- ${}_n p_x$: é a probabilidade dos indivíduos com a idade exata x chegar a idade exata $x+n$. O cálculo é da seguinte forma:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.3)$$

- ${}_n L_x$: é o tempo médio vivido entre as idades x e $x+n$. É calculado da seguinte forma:

$${}_n L_x = \left(\frac{l_x + l_{x+n}}{2} \right) * n. \quad (2.4)$$

- T_x : é o número total de anos vividos pela geração de l_0 nascimentos entre as idades x e w , sendo w a última idade da tábua. O método de cálculo é:

$$T_x = \sum_n L_a \quad (2.5)$$

- e_x : esperança de vida à idade exata x , calculada da seguinte maneira:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \quad (2.6)$$

As tábuas de vida são utilizadas principalmente para previsões atuariais visando a sustentabilidade financeira dos planos. A estimativa de sobrevivência dos participantes é fundamental para o cálculo da *duration* de um plano de previdência, que é uma média dos prazos de vencimento de todas as obrigações projetadas, ponderadas pelo valor presente dessas obrigações.

Após o ajuste dos dados é preciso calcular a probabilidade de morte, que para esse trabalho, foi utilizado um modelo apresentado por Béhar (2005), no qual são elaboradas tabelas de probabilidade de mortalidade por idade e ano. As tabelas obtidas são:

- $EF(x,n)$: número de pessoas vivas no final do ano n para cada idade x ;
- $D(x,n)$: número de óbitos ocorridos no ano n por idade x ;
- $L(x,n)$: número de entradas no ano n por idade x ;
- $ED(x,n)$: número de pessoas vivas no início do ano n por idade x .

Essa última é obtida através da seguinte fórmula:

$$ED(x, n) = EF(x, n) + D(x, n) - L(x, n) \quad (2.7)$$

Com o cálculo das tabelas citadas, obtém-se uma nova tabela representando a população em risco de morte por idade e ano, representada por $P(x, n)$ e para seu cálculo utilizou-se da seguinte fórmula:

$$P(x, n) = ED(x, n) + 0,5 * L(x, n) \quad (2.8)$$

Para encontrar as probabilidades de morte, foi utilizada a seguinte fórmula:

$$qm\hat{(x)} = \frac{D(x)}{P(x)} = \frac{\sum_n D(n, x)}{\sum_n P(n, x)} \quad (2.9)$$

sendo $qm\hat{(x)}$ a probabilidade de morte por idade, $D(x)$ a soma dos óbitos por idade nos anos observados e $P(x)$ a soma da população em risco por idade nos anos observados.

Além da obtenção das probabilidades por idade, foi encontrado o intervalo de confiança para as estimativas através da estimativa de uma proporção.

$$IC(95\%, qm\hat{(x)}) = qm\hat{(x)} \pm 1,96 * \sqrt{\frac{qm\hat{(x)} * (1 - qm\hat{(x)})}{P(x)}} \quad (2.10)$$

2.3 Método de Suavização

O terceiro passo na construção de uma tábua de vida, segundo Ortega, é a suavização das probabilidades. Serão utilizados métodos de suavização para imputar valores intermediários, extrapolar valores e, em alguns casos, estimar populações anuais. Para esse trabalho serão utilizados dois tipos de métodos de suavização: Interpolação Osculatória e Whittaker-Henderson. A utilização de mais de um método de suavização tem intuito de verificar se a alteração no método influencia significativamente nas probabilidades de morte.

A interpolação é a arte de inferir valores intermediários ou de deduzir valores que vão além da série através de fórmulas matemáticas ou por gráficos, sendo, dessa forma, um tipo de estimação. A interpolação osculatória envolve a combinação de dois polinômios

sobrepostos em uma única equação e apresenta uma variação suave nos pontos de união das partes interpoladas (Siegel e Swanson, 2004), não apresentando rupturas bruscas. A fórmula escolhida para a utilização no trabalho foi a de Karup-King.

A interpolação de Karup-King permite estimar valores intermediários e a utilização de sua fórmula ocorre através de multiplicadores que são aplicados aos dados. O cálculo desse valor interpolado é através da multiplicação da série de dados pelos coeficientes correspondentes sendo acumulados os produtos (Siegel e Swanson, 2004). A sua aplicação é em 4 pontos igualmente espaçados com a seguinte fórmula de cálculo:

$$N_x = m_1 * N_1 + m_2 * N_2 + m_3 * N_3 + m_4 * N_4 \quad (2.11)$$

na qual x é o valor a ser suavizado; e os N_i representam os quatro multiplicadores associados aos quatro pontos.

Foram disponibilizados, em anexo, os multiplicadores de Karup-King. Na tabela existem 3 painéis, sendo que os valores do primeiro são utilizados para suavizações de idades inferiores a 5 anos, os valores do terceiro painel são utilizados para idades elevadas e os valores do painel intermediário são utilizados para idades intermediárias, que serão as idades abordadas na criação da tábua de vida desse trabalho. Cada painel possui 5 linhas de multiplicadores que irão variar de acordo com a escolha do valor x a ser suavizado.

O método de Whittaker-Henderson foi apresentado por Greville e utilizado para suavizar as probabilidades de morte da tábua de mortalidade dos Estados Unidos de 1967 a 1971. Nele são apresentados dois tipos de fórmula: do tipo A, o qual considera o coeficiente de ponderação igual a 1 e o tipo B, que trata de um caso mais geral (Ortega, 1987). Para esse trabalho foi utilizada a fórmula de Whittaker-Henderson do tipo A, com a qual é possível suavizar a informação e manter a concordância dos valores observados. Sua fórmula consiste em minimizar a seguinte expressão:

$$\sum w_x * (q_x'' - q_x)^2 + k * \sum Z^t * q_x^2, \text{ sendo :} \quad (2.12)$$

- W_x : coeficiente de ponderação;
- q_x'' : valores que se deseja suavizar;
- q_x : valores suavizados;
- Z^t : diferença finita de ordem t , sendo que foi utilizado o valor de $t=2$ conforme apresentado no livro do Ortega (1987) para o método do Tipo A.
- k : constante que regula a importância que o usuário deseja na suavização, levando em consideração a proximidade com os dados observados.

Para encontrar os valores suavizados de qx'' é apresentado outra expressão:

$$q(x) = \frac{2 * a}{a + 1} * q(x + 1) - \frac{a}{a + 2} * q(x + 2) + \frac{2}{(a + 1) * (a + 2)} * qx' \quad (2.13)$$

no qual o “a” está vinculado ao k mediante a seguinte relação:

$$k = \frac{1}{4} * a * (a + 1)^2 + (a + 2) \quad (2.14)$$

Considerando que a suavização será realizada entre as idades y e v, os valores iniciais são obtidos da seguinte maneira:

$$q_{(y-2)} = q''_y - (a + 2) * Z * q''_y \quad (2.15)$$

$$q_{(y-1)} = q''_{y+1} - (a + 2) * Z * q''_y \quad (2.16)$$

e para os valores finais:

$$q_{(v-1)} = q'_{v-1} + a * Z * q''_{v-1} \quad (2.17)$$

$$q_{(v)} = q'_v + a * Z * q''_{v-1} \quad (2.18)$$

Finalmente precisa-se apenas definir o valor do parâmetro a . Para isso é recomendado que se varie dentro do intervalo de 2 a 5, pois se o valor de a é igual a 1, as séries suavizada e a observada são praticamente iguais enquanto que para a superior a 5, os valores suavizados se afastam dos observado. Para o trabalho, foi considerado um a igual a 3, mesmo valor informado e sugerido por Ortega (1987).

2.4 Testes de Comparação de Tábuas

A tábua de vida que será construída trará informações da população da Fundação Sistel de Seguridade Social, que é fundamental para se implementar políticas de investimento e administrativas na entidade, com o objetivo de garantir a solvência de todos os planos. No intermédio entre as informações disponibilizadas pela tábua e pela implementação das políticas nas entidades de previdência complementar está a área atuarial, que é a responsável por realizar cálculos com o intuito de analisar riscos e expectativas. Um exemplo desses cálculos é o provisionamento de cada plano, que é o valor que o plano necessita ter para pagar todos os seus beneficiários.

Para a comparação da tábua construída a partir dos dados da Sistel com as tábuas utilizadas pelo mercado AT-2000 e AT-83, utilizar-se-á o teste estatístico não-paramétrico de Kolmogorov-Smirnov, que é um dos testes mais utilizados no mercado brasileiro para a comparação de dois públicos.

O teste pode ser adaptado para testar a homogeneidade de distribuições. Para esse trabalho foram utilizadas as seguintes hipóteses:

$$H_0 : F(u) = G(u) \quad (2.19)$$

$$H_1 : F(u) \neq G(u) \quad (2.20)$$

que são distribuições independentes, com o mesmo número de observações, pois a variável de interesse será a idade. Estimam-se $F(u)$ e $G(u)$ por meio de distribuições empíricas, sendo a principal ideia do teste observar a máxima discrepância entre as distribuições.

Será observado no teste o p-valor, que é a probabilidade de que a estatística de teste tenha um valor extremo ao valor observado, isso dado que a hipótese nula é verdadeira.

3 Resultados

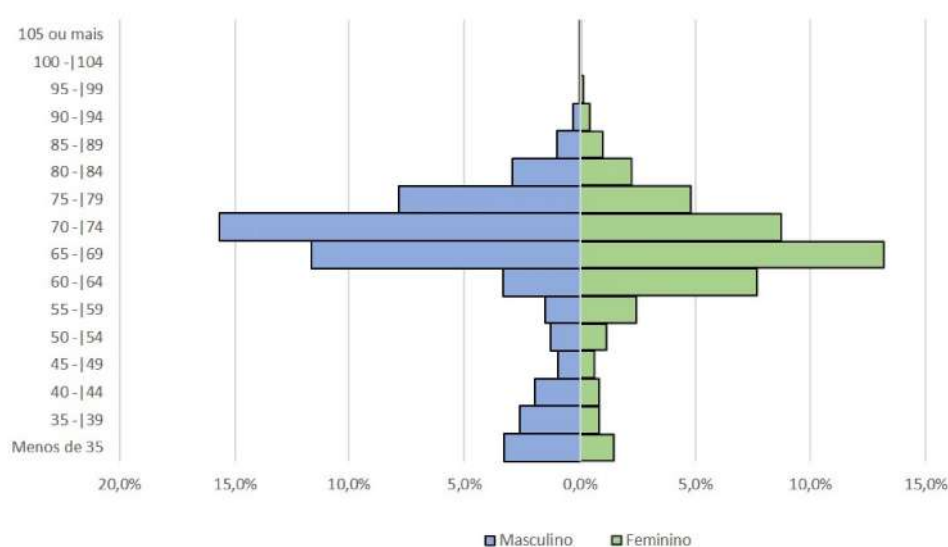
3.1 Perfil dos participantes dos planos da Fundação Sistel de Seguridade Social

Tabela 1 – Idade dos participantes da Fundação Sistel de Seguridade Social segundo medidas de posição

Participantes		Média	Mediana	Q1	Q3
Sobrevivente	Geral	65,74	69,00	63,00	73,00
	Homem	69,81	71,00	65,00	75,00
	Mulher	62,74	67,00	55,00	71,00
Falecidos	Geral	72,32	71,00	66,00	79,00
	Homem	73,20	71,00	66,00	78,00
	Mulher	71,90	73,00	65,00	82,00

A idade máxima das observações é de 110 anos que pertence a um dependente que está em gozo de pensão. Com relação a idade mínima têm-se a idade de 16 anos também pertencente a um dependente em gozo do benefício de pensão. Quando observados apenas os titulares do plano, a idade mínima passa a ser 18 anos e a idade máxima a de 102 anos.

Figura 1 – Participantes da Fundação Sistel segundo sexo e idade entre 2007 a 2017



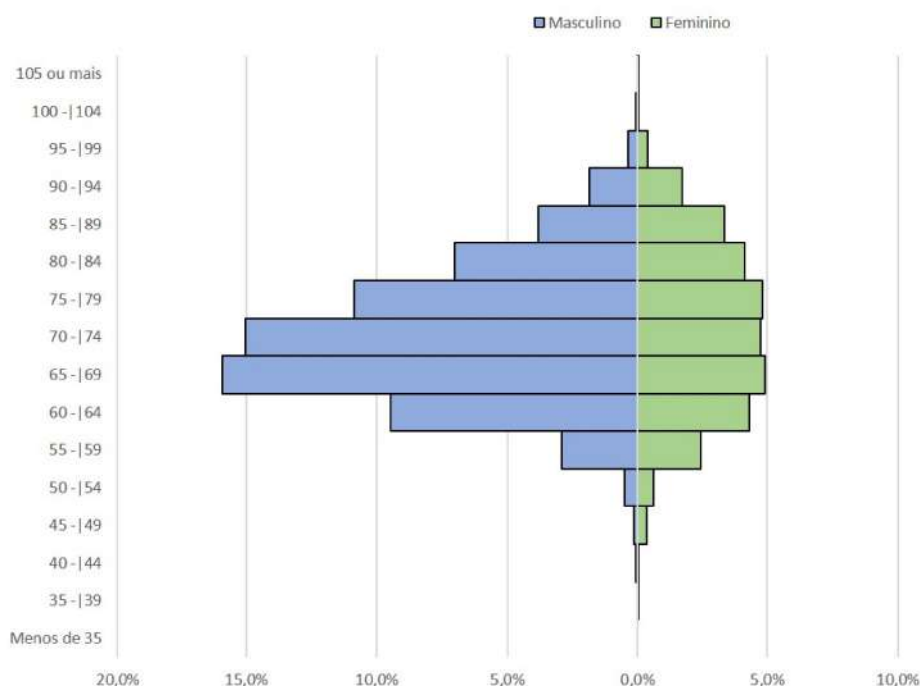
Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

A pirâmide etária dos participantes sobreviventes em 2017 apresenta a maior quantidade de participantes na faixa etária de 60 a 84 anos, sendo possível perceber uma

maior quantidade de participantes do sexo masculino do que do sexo feminino, apurou-se que 43,6% são do sexo feminino e 56,4% do sexo masculino. Quando observadas apenas as informações de titulares dos planos, o percentual de pessoas do sexo feminino diminuiu para 35,8%. Dos participantes sobreviventes, 75% tem idade superior a 60 anos.

Ela foi construída com grupos etários de 5 anos iniciando na idade de 35 anos até a idade de 104 anos, sendo que para idades superiores e inferiores a essa faixa etária foi agregado a quantidade em dois novos intervalos denominados de "menos de 35", para idades inferiores a 35 anos e "105 ou mais", para idades superiores a 105 anos. Além disso, ela pode ser classificada como uma população envelhecida, justamente por apresentar uma grande quantidade de idosos com uma quantidade inferior de adultos ativos. Esse resultado já era esperado pela maioria dos participantes serem de um plano em extinção.

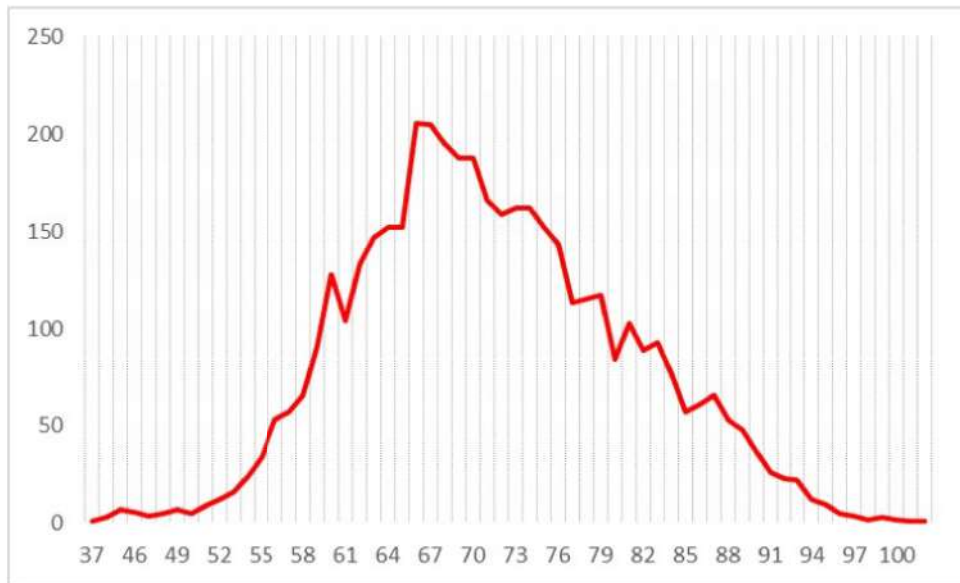
Figura 2 – Participantes falecidos segundo sexo e idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

No estudo, foram observados 4.368 óbitos durante o período de 2007 a 2017, sendo que 68% são do sexo masculino e 32% são do sexo feminino. O lado do sexo masculino apresenta uma maior quantidade de participantes, sendo que a maioria deles está entre as faixas etárias de 60 a 79 anos. A maior concentração de óbitos está entre 62 anos e 80 anos.

Figura 3 – Participantes falecidos segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

Ao detalhar a idade ao óbito, observar-se que há uma grande concentração de óbitos na faixa etária de 58 a 82 anos, aumentando a precisão em relação a Figura 2, tendo apresentado uma moda de 67 anos com 207 óbitos registrados, nesse período para essa idade. Devido a baixa frequência de óbitos para idades extremas, foram utilizados apenas os dados de participantes com 45 anos até participantes com 95 anos para a elaboração da probabilidade de morte.

3.2 Construção da Tábua de Vida

Para a elaboração da tábua de vida, primeiro calculam-se as probabilidades de morte. Esse trabalho utilizou da metodologia apresentada por Béhar (2005). As probabilidades de morte aumentam com a idade mas também é possível verificar uma grande redução entre as idades de 93 a 95 anos. Como citado anteriormente, a probabilidade de morte calculada foi para as idades de 45 a 95 anos.

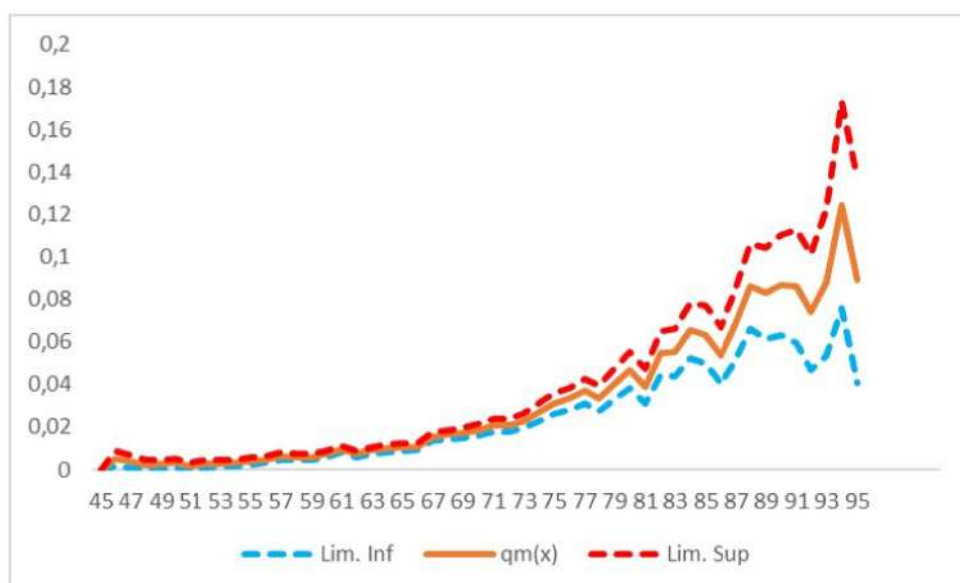
Figura 4 – Probabilidades de morte segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

As estimativas das probabilidades de morte apresentam variações importantes ao longo das idades e, para a suavização dessas probabilidades, foram utilizados os métodos de Karup-King e Whittaker-Henderson. Na suavização pelo método de Karup-King, foram utilizados os multiplicadores intermediários do anexo 01 deste trabalho, o qual considera o espaçamento de 5 anos entre as idades fornecidas, sendo alteradas essas idades a cada faixa suavizada. Para o início da suavização é necessário um período inicial superior aos valores que serão suavizados, devido a isso a probabilidade de morte suavizada inicia-se a partir dos 50 anos finalizando com 95 anos.

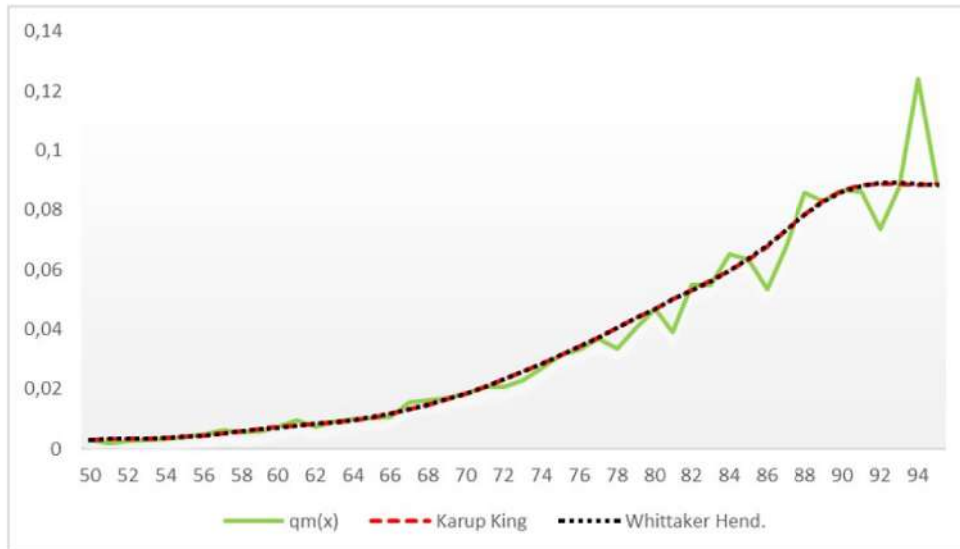
Figura 5 – Intervalo de confiança para as probabilidades de morte segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

A variabilidade do intervalo de confiança aumenta quando observado idades mais avançadas, tendo a maior variabilidade entre a faixa etária de 87 a 95 anos.

Figura 6 – Probabilidade de Morte Suavizada segundo idade – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

A suavização pelos dois métodos apresentaram resultados muito semelhante, não sendo possível verificar diferença visualmente entre os dois métodos.

Após encontrar os valores da probabilidade de morte suavizados, foi elaborada uma tábua de vida a partir de 50 até 95 anos para os participantes da Fundação Sistel. O grupo inicial hipotético (l_0) adotado foi de 100.000 participantes nas duas tábuas, uma com a suavização pelo método dos multiplicadores de Karup King e a outra pelo método de Whittaker-Henderson.

Observando as duas tábuas de vida, é possível avaliar o perfil dos participantes da fundação através dos resultados das funções calculadas. As probabilidades de morte das tábuas elaboradas com as funções suavizadas apresentaram pequenas variação superior e inferior entre si. Quando observado a esperança de vida, destaca-se que aos 65 anos a esperança de vida para as tábuas criadas é de aproximadamente 19 anos. A esperança de vida pela suavização de Karup King apresentou, aos 50 anos, um valor de 32 anos, mesma idade apresentada pelo outro método. Já aos 82 anos a esperança de vida é de 8 anos nas duas tábuas.

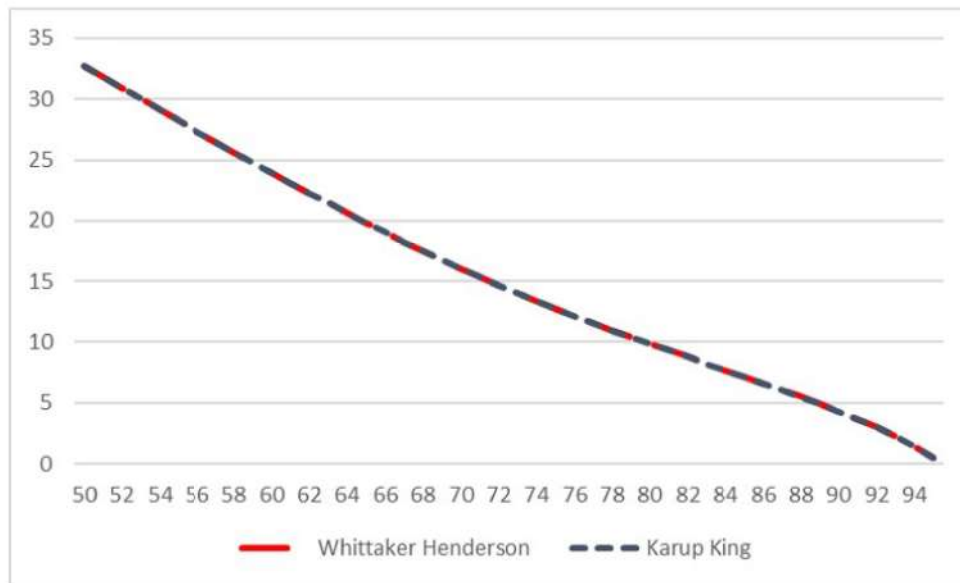
Tabela 2 – Tábua de Vida Completa com as probabilidades suavizadas pelo método de Whittaker-Henderson – Fundação Sistel de Seguridade Social 2017

Idade	lx	ndx	nqx	npx	nLx	Tx	ex
50	100000	300	0,0030	0,9970	99850	3274496	32,74
51	99700	329	0,0033	0,9967	99536	3174646	31,84
52	99371	338	0,0034	0,9966	99202	3075110	30,95
53	99033	347	0,0035	0,9965	98860	2975908	30,05
54	98686	365	0,0037	0,9963	98504	2877048	29,15
55	98321	393	0,0040	0,9960	98125	2778544	28,26
56	97928	441	0,0045	0,9955	97708	2680419	27,37
57	97487	497	0,0051	0,9949	97239	2582711	26,49
58	96990	572	0,0059	0,9941	96704	2485472	25,63
59	96418	636	0,0066	0,9934	96100	2388768	24,78
60	95782	699	0,0073	0,9927	95433	2292668	23,94
61	95083	751	0,0079	0,9921	94708	2197235	23,11
62	94332	792	0,0084	0,9916	93936	2102527	22,29
63	93540	833	0,0089	0,9911	93124	2008591	21,47
64	92707	890	0,0096	0,9904	92262	1915467	20,66
65	91817	964	0,0105	0,9895	91335	1823205	19,86
66	90853	1072	0,0118	0,9882	90317	1731870	19,06
67	89781	1185	0,0132	0,9868	89189	1641553	18,28
68	88596	1311	0,0148	0,9852	87941	1552364	17,52
69	87285	1449	0,0166	0,9834	86561	1464423	16,78
70	85836	1597	0,0186	0,9814	85038	1377862	16,05
71	84239	1744	0,0207	0,9793	83367	1292824	15,35
72	82495	1906	0,0231	0,9769	81542	1209457	14,66
73	80589	2071	0,0257	0,9743	79554	1127915	14,00
74	78518	2230	0,0284	0,9716	77403	1048361	13,35
75	76288	2380	0,0312	0,9688	75098	970958	12,73
76	73908	2528	0,0342	0,9658	72644	895860	12,12
77	71380	2662	0,0373	0,9627	70049	823216	11,53
78	68718	2783	0,0405	0,9595	67327	753167	10,96
79	65935	2881	0,0437	0,9563	64495	685840	10,40
80	63054	2964	0,0470	0,9530	61572	621345	9,85
81	60090	3011	0,0501	0,9499	58585	559773	9,32
82	57079	3031	0,0531	0,9469	55564	501188	8,78
83	54048	3043	0,0563	0,9437	52527	445624	8,24
84	51005	3040	0,0596	0,9404	49485	393097	7,71
85	47965	3036	0,0633	0,9367	46447	343612	7,16
86	44929	3051	0,0679	0,9321	43404	297165	6,61
87	41878	3065	0,0732	0,9268	40346	253761	6,06
88	38813	3047	0,0785	0,9215	37290	213415	5,50
89	35766	2976	0,0832	0,9168	34278	176125	4,92
90	32790	2840	0,0866	0,9134	31370	141847	4,33
91	29950	2648	0,0884	0,9116	28626	110477	3,69
92	27302	2427	0,0889	0,9111	26089	81851	3,00
93	24875	2209	0,0888	0,9112	23771	55762	2,24
94	22666	2008	0,0886	0,9114	21662	31991	1,41
95+	20658	20658	1,0000	0,0000	10329	10329	0,50

Tabela 3 – Tábua de Vida Completa com as probabilidades suavizadas pelo método de Karup King – Fundação Sistel de Seguridade Social 2017

Idade	lx	ndx	nqx	npx	nLx	Tx	ex
50	100000	300	0,0030	0,9970	99850	3274496	32,70
51	99700	329	0,0033	0,9967	99536	3174646	31,84
52	99371	338	0,0034	0,9966	99202	3075110	30,95
53	99033	347	0,0035	0,9965	98860	2975908	30,05
54	98686	365	0,0037	0,9963	98504	2877048	29,15
55	98321	393	0,0040	0,9960	98125	2778544	28,26
56	97928	441	0,0045	0,9955	97708	2680419	27,37
57	97487	497	0,0051	0,9949	97239	2582711	26,49
58	96990	572	0,0059	0,9941	96704	2485472	25,63
59	96418	636	0,0066	0,9934	96100	2388768	24,78
60	95782	699	0,0073	0,9927	95433	2292668	23,94
61	95083	751	0,0079	0,9921	94708	2197235	23,11
62	94332	792	0,0084	0,9916	93936	2102527	22,29
63	93540	833	0,0089	0,9911	93124	2008591	21,47
64	92707	890	0,0096	0,9904	92262	1915467	20,66
65	91817	964	0,0105	0,9895	91335	1823205	19,86
66	90853	1072	0,0118	0,9882	90317	1731870	19,06
67	89781	1185	0,0132	0,9868	89189	1641553	18,28
68	88596	1311	0,0148	0,9852	87941	1552364	17,52
69	87285	1449	0,0166	0,9834	86561	1464423	16,78
70	85836	1597	0,0186	0,9814	85038	1377862	16,05
71	84239	1744	0,0207	0,9793	83367	1292824	15,35
72	82495	1906	0,0231	0,9769	81542	1209457	14,66
73	80589	2071	0,0257	0,9743	79554	1127915	14,00
74	78518	2230	0,0284	0,9716	77403	1048361	13,35
75	76288	2380	0,0312	0,9688	75098	970958	12,73
76	73908	2528	0,0342	0,9658	72644	895860	12,12
77	71380	2662	0,0373	0,9627	70049	823216	11,53
78	68718	2783	0,0405	0,9595	67327	753167	10,96
79	65935	2881	0,0437	0,9563	64495	685840	10,40
80	63054	2964	0,0470	0,9530	61572	621345	9,85
81	60090	3011	0,0501	0,9499	58585	559773	9,32
82	57079	3031	0,0531	0,9469	55564	501188	8,78
83	54048	3043	0,0563	0,9437	52527	445624	8,24
84	51005	3040	0,0596	0,9404	49485	393097	7,71
85	47965	3036	0,0633	0,9367	46447	343612	7,16
86	44929	3051	0,0679	0,9321	43404	297165	6,61
87	41878	3065	0,0732	0,9268	40346	253761	6,06
88	38813	3047	0,0785	0,9215	37290	213415	5,50
89	35766	2976	0,0832	0,9168	34278	176125	4,92
90	32790	2840	0,0866	0,9134	31370	141847	4,33
91	29950	2648	0,0884	0,9116	28626	110477	3,69
92	27302	2427	0,0889	0,9111	26089	81851	3,00
93	24875	2209	0,0888	0,9112	23771	55762	2,24
94	22666	2008	0,0886	0,9114	21662	31991	1,41
95+	20658	20658	1,0000	0,0000	10329	10329	0,50

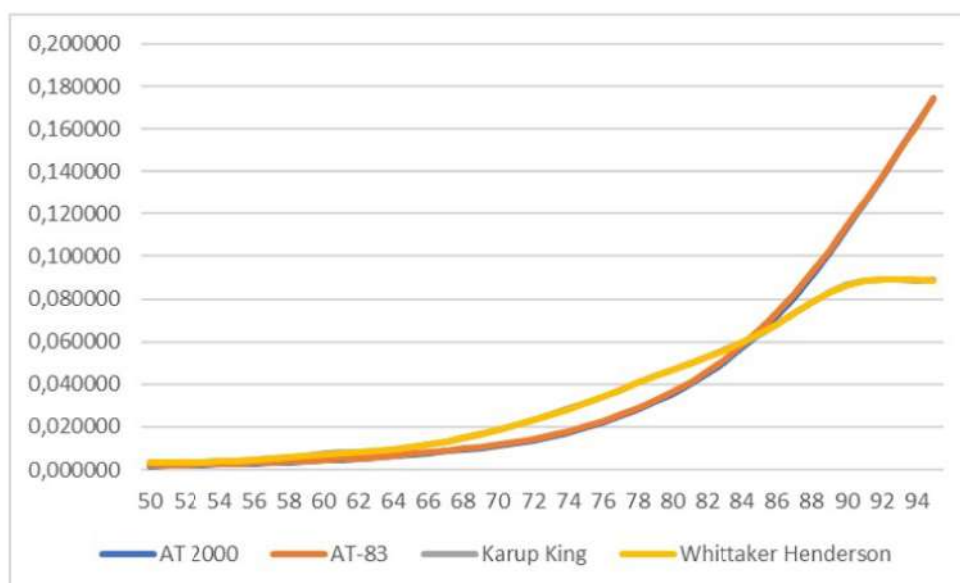
Figura 7 – Comparação entre as esperanças de vida por método de suavização - Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 - 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

Das funções encontradas nas tábuas de vida, uma das mais relevantes é a esperança de vida (e_x), já que está é a que melhor indica o nível de mortalidade de uma certa população. Comparando a esperança de vida utilizando as funções de probabilidade suavizada pelo método de Karup King e pelo método de Whittaker-Henderson é possível observar que ambas seguem a mesma linha, tendo uma diferença pequena de idade entre elas, isso já era esperado devido as probabilidades de morte suavizadas apresentarem resultados semelhantes.

Figura 8 – Comparação entre as probabilidade de morte por método de suavização – Fundação Sistel de Seguridade Social 2007 – 2017



Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

As probabilidades de morte das duas tábuas do mercado (AT-2000 e AT-83) se assemelham com as duas elaboradas no trabalho para as idades inferiores a 68 anos. Além disso apresentam uma pequena diferença na faixa etária de 69 a 82 anos e uma maior discrepância para idades superiores a 90 anos.

Foi elaborado o teste de Kolmogorov-Smirnov e, na tabela 3, são apresentados os p-valores.

Tabela 4 – P-valor para o teste de Kolmogorov-Smirnov

Tabuas	AT 2000	AT 83
Karup King	0,1115	0,1744
Whittaker Henderson	0,1155	0,1744

Considerando a hipótese nula de as tábuas apresentarem os valores de probabilidade iguais e a hipótese alternativa de probabilidade de morte serem diferentes, temos, pelos p-valores encontrados na tabela 4, que para nenhuma das duas tábuas há indícios de rejeição da hipótese nula, mesmo com as duas apresentando uma certa diferença na curva para as tábuas do mercado a partir dos 90 anos.

4 Considerações Finais

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou a construção de tábuas de vida que apresentaram probabilidades de morte semelhante às tábuas atuariais utilizadas no mercado previdenciário. A não rejeição de hipótese de igualdade pelo teste de Kolmogorov-Smirnov se deve sobretudo pela proximidade das estimativas para as idades inferiores a 65 anos. Visualmente, no entanto, é possível verificar uma discrepância entre as estimativas para as idades mais avançadas.

Devido à legislação limitar a utilização da tábua de vida como no mínimo as probabilidades observadas na AT 83, a tábua construída não poderia ser utilizada para os cálculos das provisões matemáticas pela entidade, pois para as idade mais elevadas, as probabilidades de morte são muito menores do que de mercado. Acredita-se que isso se deva à quantidade reduzida de participantes com idade elevada. No entanto, a construção da Tábua de Vida foi relevante para evidenciar que as provisões matemáticas com base nas tábuas de mercado subestimam os riscos de morte entre as idades de 66 a 84 anos. Essa informação é relevante para à entidade de previdência na elaboração de suas políticas.

Os dois métodos de suavização utilizados no trabalho apresentaram resultados semelhantes. É relevante observar que a expectativa de vida nas duas tábuas aos 65 anos é de aproximadamente 19 anos. Considerando que é a 65 anos a proposta de idade mínima para a aposentadoria, torna-se ainda mais importante esse controle para as entidades de previdência complementar, que devem se programar para pagar o benefício de aposentadoria em média por mais 19 anos para o aposentado e mais alguns anos para os pensionistas.

É de fundamental importância para a administração dos planos previdenciais ter os seus dados cadastrais fidedignos para possibilitar a construção de tábuas de vida que reflitam a experiência de mortalidade dos seus participantes.

Referências

ATUARIOS, I. B. de. *Tabuas biométricas*. 2018. Disponível em: <<http://atuarios.org.br/tabuas-biometricas>>.

BEHAR, J. L'ajustement des tables de mortalite des regimes de retraite. application a la population de la cnracl. *Questions Retraite*, 2005.

BRASIL. *Lei Complementar 109*. 2001.

BRASIL. *PEC 287/2016*. 2017. Disponível em: <<http://www.camara.gov.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=2119881>>.

BRASIL. *Resolução MPS/CGPC n 18*. 2017. Disponível em: <<http://sislex.previdencia.gov.br/paginas/72/MPS-CGPC/2006/18.htm>>.

CHIANG, C. L. *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. [S.l.]: Wiley series in probability and mathematical statistics, 1968.

DIAS, J. L. *Aplicações da tábua de vida: Um estudo sobre a mortalidade dos usuários do plano de saúde pró-saúde*. 2014. Monografia. Universidade de Brasília.

DIAS, T. C. M.; FOGO, J. C. *Introdução ao L^AT_EX*. 2014. Slides de Minicurso do DEs - UFSCar.

FAZENDA, M. da. *RGPS: Deficit da Previdência Social em 2016 foi de 151,9 bilhões*. 2017. Disponível em: <<http://www.previdencia.gov.br/2017/01/rgps-deficit-da-previdencia-social-em-2016-foi-de-r-1519-bilhoes/>>.

GOMES MARÍLIA MIRANDA FORTE; OKUBO, M. H. V. A. M. N. Aplicações das tábuas de vida para a previdência complementar: Estimativas e comparação com as tábuas do mercado. *R. Bras. Risco e Seg*, v. 4, p. p. 1–16, abr./set. 2008.

JORDAN, C. W. *Life Contingencies*. [S.l.]: The society of actuaries, 1991.

ORTEGA. *Tablas de Mortalidad*. [S.l.]: Celade, 1982.

ORTEGA, A. *Tablas de Mortalidad*. [S.l.]: San José, Costa Rica: Centro Latino Americano de Demografia, 1987.

PAULO, F. de S. *Procura por planos de previdência privada aumenta em meio à crise*. 2017. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2016/12/1840495-procura-por-planos-de-previdencia-privada-aumenta-em-meio-a-crise.shtml>>.

SHRYOCK HENRY S.; SIEGEL, J. S. A. *The Methods and Materials of Demography*. [S.l.]: Academic Press, Inc. London Ltd., 1976.

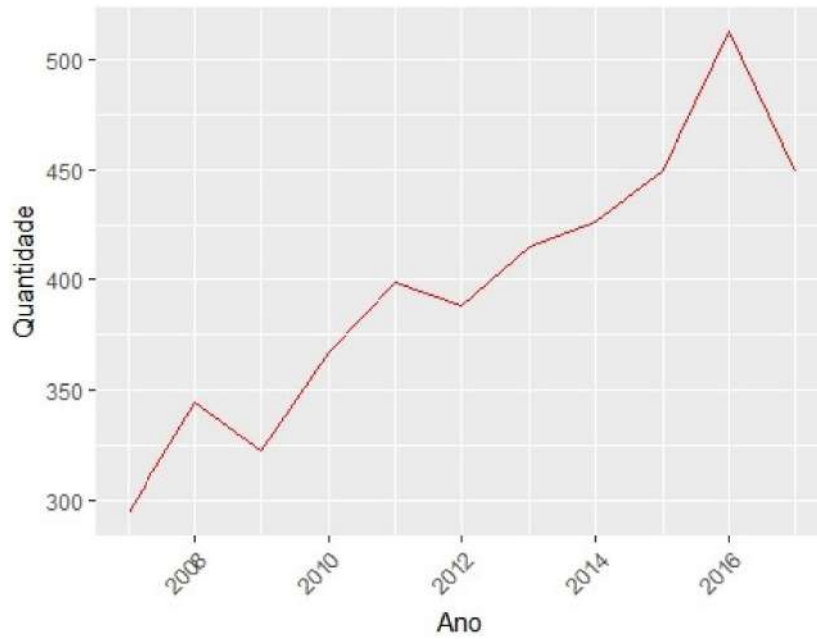
SIEGEL, J.; SWASON, D. *The methods and materials of demography*. [S.l.]: Elsevier, 2004.

SOCIAL, P. *Reformar a Previdência para garantir que as próximas gerações recebam suas aposentadorias e para o país crescer mais*. 2017. Disponível em: <<http://www.fazenda.gov.br/por-dentro-da-reforma-da-previdencia/artigos-e-analises>>.

VIEIRA, M. G. F. *Desigualdades intraurbanas na área metropolitana de Brasília : uma análise da mortalidade segundo níveis de educação*. 2016. Monografia. Universidade de Brasília.

5 Apêndice

Apêndice 01 - Distribuição de Óbitos por ano dos participantes da Fundação Sistel - 2007



a 2017

Fonte: Fundação Sistel de Seguridade Social (2007 – 2017)

6 Anexo

Anexo 01 – Multiplicadores baseados na fórmula de karup-king

		Ponto interpolado	Multiplicadores			
			m1	m2	m3	m4
Primeiro Painel	n(1,0)	1	0	0	0	
	n(1,2)	0,656	0,552	-0,272	0,064	
	n(1,4)	0,408	0,856	-0,336	0,072	
	n(1,6)	0,232	0,984	-0,264	0,048	
	n(1,8)	0,104	1,008	-0,128	0,016	
Primeiro Intermediário	n(2,0)	0	1	0	0	
	n(2,2)	-0,064	0,912	0,168	-0,016	
	n(2,4)	-0,072	0,696	0,424	-0,048	
	n(2,6)	-0,048	0,424	0,696	-0,072	
	n(2,8)	-0,016	0,168	0,912	-0,064	
Último Painel	n(3,0)	0	0	1	0	
	n(3,2)	0,016	-0,128	1,008	0,104	
	n(3,4)	0,048	-0,264	0,964	0,232	
	n(3,6)	0,072	-0,336	0,856	0,408	
	n(3,8)	0,064	-0,272	0,552	0,656	
	n(4,0)	0	0	0	1	

Fonte: Siegel Swanson, 2004