

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise de Sensibilidade em Experimentos de Vibrações

Por,

Rodolfo de Souza Moraes

Brasília, 4 de julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise de Sensibilidade em Experimentos de Vibrações

Por,

Rodolfo de Souza Moraes

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Alberto C. G. C. Diniz, UnB/ENM (Orientador) _____

Prof. Adriano Todorovic Fabro , UnB/ENM _____

Prof. Antônio Piratelli Filho , UnB/ENM _____

Brasília 4 de julho de 2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a oportunidade de concluir mais uma etapa da minha vida, tornando meu sonho possível.

Agradeço a minha mãe por ter me apoiado desde o início, acreditando no meu potencial e por ajudar em minhas escolhas. E a minha avó que sempre me incentivou.

Agradeço a minha família, pois eles sempre estiveram ao meu lado, em especial aos meus primos que passaram e/ou estão passando pela mesma situação, e com isso souberam me ajudar a concluir mais essa etapa.

Agradeço ao meu orientador Alberto C. G. C. Diniz, o qual sempre esteve à disposição para ajudar da melhor forma possível, repassando seus conhecimentos para conclusão desse projeto. Também agradeço aos professores Adriano T. Fabro e Antônio P. Filho, os quais fizeram observações pontuais para melhoria desse projeto.

E por fim, agradeço a todos amigos e colegas de faculdade, em especial Daniel Robbi, Helson Albernaz, João Pedro Freire e Lucas Rebello. Todos só vieram pra somar, a partir da troca de conhecimentos e experiências.

Rodolfo de Souza Morais

Resumo

O presente trabalho apresenta o estudo dos métodos de Análise de Sensibilidade Globais para cálculo de incerteza. O objetivo deste trabalho é aplicar os métodos FAST e Sobol para estimar os coeficientes de sensibilidade, além de propor, para o método FAST, uma metodologia alternativa para cálculo de incerteza, comparando os resultados obtidos com as metodologias já apresentadas no ISO GUM e no Suplemento 1 do ISO GUM. Foram utilizadas rotinas em MATLAB para aplicação dos métodos FAST e Sobol nos modelos propostos. Os resultados dos coeficientes de sensibilidade e das incertezas calculadas foram comparados com os valores encontrados em literatura. A implementação da metodologia para obtenção dos coeficientes de sensibilidade e para sua utilização no cálculo de incerteza padrão foi validada. Foram realizados estudos sobre o método de Monte Carlo para cálculo de incerteza, e o mesmo foi implementado no experimento do Modelo do Sistema Vibrante, identificando amortecimento e comparando o valor com os outros métodos. Além disso, aplicou-se os três métodos de cálculo de incerteza, método ISO GUM tradicional, o método FAST e o método de Monte Carlo, para cálculo de incerteza em experimentos realizados no projeto Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais.

Palavras-chaves: Análise de Sensibilidade, FAST, Sobol, ISO GUM, Coeficiente de Sensibilidade, Incerteza, Método de Monte Carlo, Número de onda.

Abstract

The present work presents the study of the methods of Global Sensitivity Analysis for calculating uncertainty. The objective of this work is to apply the FAST and Sobol methods to estimate the sensitivity indices. Besides offering, for the FAST method, an alternative approach for calculating uncertainty, the results obtained were compared with the ones calculated by methodology already presented in ISO GUM and in ISO GUM Supplement 1. MATLAB scripts were used for application of the FAST and Sobol methods in the proposed models. The results of the calculated sensitivity indices and uncertainty were compared with the values found in the literature. The implementation methodology to obtain the sensitivity indices and their use in the standard uncertainty calculation was validated. Studies were carried out on the Monte Carlo method to calculate uncertainty and implemented it in the experiment of the Vibrant System Model, identifying damping and comparing the value with the other methods. In addition, the three uncertainty calculation methods, the traditional ISO GUM method, the FAST method and the Monte Carlo method were used to calculate uncertainty in experiments carried out in the project Experimental characterization of the wave number in structural metamaterials.

Key-words: Sensitivity Analysis, FAST, Sobol, ISO GUM, Sensitivity Index, Uncertainty, Monte Carlo method, Wave number.

Lista de Figuras

Figura 1 – Análise de Sensibilidade. Traduzido de Wagener et al., 2016.	4
Figura 2 – Aplicação do método <i>Scatter Plots</i>	7
Figura 3 – Esquema de aplicação do eFAST. Traduzido de Saltelli et al. (1999). . .	12
Figura 4 – Análise de Sensibilidade de Sobol. Traduzido de Zhang et al., 2015. . .	14
Figura 5 – Fluxograma representando a metodologia do ISO GUM.	21
Figura 6 – Princípio da lei de propagação de PDFs aplicando em uma função de medição.	22
Figura 7 – Fluxograma simplificado da avaliação de incerteza de medição usando a SMC (adaptado de (JCGM, 2004b)).	25
Figura 8 – Distribuições empíricas obtidas para diferentes tamanhos de amostras. . .	26
Figura 9 – Fluxograma das rotinas de MATLAB.	29
Figura 10 – Modelo da Máquina Linear de Medir, (LINK, 1999).	34
Figura 11 – Montagem experimental.	36
Figura 12 – Representação das conexões na placa de aquisição e no módulo NI 9234. .	37
Figura 13 – Diagrama de blocos desenvolvido no <i>LabViewTM</i>	38
Figura 14 – Painel frontal do Instrumento Virtual.	39
Figura 15 – Decremento Logarítmico.	40
Figura 16 – Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 0.	41
Figura 17 – Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 1.	41
Figura 18 – Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 2.	42
Figura 19 – Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 3.	42
Figura 20 – Diagrama da modelagem.	43
Figura 21 – Modelo matemático.	43
Figura 22 – Experimento em metamaterial.	52
Figura 23 – Montagem do experimento. (HINKE; MACE; BRENNAN, 2004)	52
Figura 24 – Gráfico do ponto a_1 no domínio da frequência.	55
Figura 25 – Aproximação da curva do ponto a_1 no domínio da frequência.	55
Figura 26 – Gráfico do ponto a_2 no domínio da frequência.	56
Figura 27 – Aproximação da curva do ponto a_2 no domínio da frequência.	56
Figura 28 – Gráfico do ponto a_3 no domínio da frequência.	56

Figura 29 – Aproximação da curva do ponto a_3 no domínio da frequência.	56
Figura 30 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência.	57
Figura 31 – Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o método do ISO GUM tradicional.	57
Figura 32 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método FAST.	59
Figura 33 – Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o método FAST.	59
Figura 34 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método de Monte Carlo.	61
Figura 35 – Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o MCM.	61
Figura 36 – Experimento em viga de aço (MATOS, 2018).	62
Figura 37 – Gráfico do ponto a_1 no domínio da frequência.	64
Figura 38 – Aproximação da curva do ponto a_1 no domínio da frequência.	64
Figura 39 – Gráfico do ponto a_2 no domínio da frequência.	64
Figura 40 – Aproximação da curva do ponto a_2 no domínio da frequência.	64
Figura 41 – Gráfico do ponto a_3 no domínio da frequência.	65
Figura 42 – Aproximação da curva do ponto a_3 no domínio da frequência.	65
Figura 43 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência.	65
Figura 44 – Aproximação da curva da viga de aço utilizando o ISO GUM tradicional.	66
Figura 45 – Curva de dispersão via FRF para o experimento da viga de aço.	67
Figura 46 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método FAST.	68
Figura 47 – Aproximação da curva da viga de aço utilizando o método FAST.	69
Figura 48 – Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método de Monte Carlo.	70
Figura 49 – Aproximação da curva da viga de aço utilizando o MCM.	71
Figura 50 – Gráfico do número de onda utilizando o ISO GUM tradicional.	75
Figura 51 – Gráfico do número de onda utilizando MCM.	75
Figura 52 – Gráfico do número de onda utilizando FAST.	75
Figura 53 – Gráfico do número de onda utilizando ISO GUM tradicional.	76
Figura 54 – Gráfico do número de onda apresentando a solução analítica.	76
Figura 55 – Gráfico do número de onda utilizando FAST.	76
Figura 56 – Gráfico do número de onda utilizando MCM.	76

Lista de abreviaturas e siglas

AD	<i>Automatic Differentiation</i>
ANOVA	<i>Analysis of Variance</i>
CIPM	Comitê Internacional de Pesos e Medidas
Δ LOR	<i>Difference in Log-Odds Ratio</i>
eFAST	<i>extended FAST</i>
FAST	<i>Fourier Amplitude Sensitivity Test</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRF	<i>Função Resposta em Frequência</i>
GSA	<i>Global Sensitivity Analysis</i>
GSAT	<i>Global Sensitivity Analysis Tool</i>
GUM-S1	<i>Suplemento 1 do ISO GUM</i>
ISO GUM	Guia para Expressão de Incerteza de Medição
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>
MII	<i>Mutual Information Index</i>
MCM	<i>Monte Carlo Method</i>
MCS	<i>Monte Carlo Simulation</i>
PDF	<i>Probability Density Function</i>
PRCC	<i>Partial Rank Correlation Coefficient</i>
RRC	<i>Rank Regression Coefficient</i>
RSM	<i>Response Surface Method</i>
MCS	<i>Monte Carlo Simulation</i>

SRC	<i>Standardized Regression Coefficient</i>
SRRC	<i>Standardized Rank Regression Coefficient</i>
TSI	<i>Total Sensitivity Indices</i>

Lista de símbolos

a	Amplitude
a_+	Extremo máximo do intervalo de resolução
a_-	Extremo mínimo do intervalo de resolução
A	Amplitude do deslocamento
A	Ponto no decaimento logarítmico
A_j	Amplitude da transformada de Fourier
A_n	Ponto no decaimento logarítmico
A_1	FRF do tempo no ponto 1
A_2	FRF do tempo no ponto 2
A_3	FRF do tempo no ponto 3
B_j	Amplitude da transformada de Fourier
c_{eq}	Amortecimento equivalente
d	Espaçamento entre os pontos
df	Distância entre frequências
dt	Intervalo entre dois tempos consecutivos
d_n	Diâmetro
D	Variância do modelo
D_i	Variância de saída
EC_{eq}	Energia cinética do sistema equivalente
f	Função modelo
f_0	Média da função f

f_s	Maior frequência da função
f^r	R-ésimo momento da função f
$F(t)$	Força de excitação
g	Aceleração gravitacional
g_x	PDF da grandeza de entrada
g_y	PDF do mensurando
h_{min}	Altura mínima que a pessoa atinge o solo
H	Distância da plataforma de salto ao asfalto
I_b	Momento de inércia da barra
k	Constante elástica da mola
k	Número de onda
K	Constante elástica da corda
k_{eq}	Rigidez equivalente
K_{eq}	Rigidez equivalente
K^n	Domínio das grandezas de entrada
k	Fator de abrangência
L_m	Indicação na Máquina Linear
L_p	Dimensão nominal do bloco padrão
L	Comprimento da barra
L_1	Localização da mola na barra
L_2	Localização do acelerômetro na barra
L_3	Localização do amortecedor na barra
m_a	Massa do acelerômetro
m_b	Massa da barra
m_c	Massa do amortecedor
m_{eq}	Massa equivalente
m_k	Massa da mola

M	Massa
M_{eq}	Massa equivalente
M_k	Massa real da mola
n	Número de grandezas de entrada
$P(x)$	Função densidade de probabilidade
S_i	Coefficiente de sensibilidade de primeira ordem
S_{T_i}	Coefficiente de sensibilidade de ordem total
t	Tempo
t_s	Último tempo apresentado no vetor
s	Variável escalar
u	Deslocamento
u_{ca}	Avaliação tipo A da incerteza
u_{cb}	Avaliação tipo B da incerteza
$u_c(y)$	Incerteza combinada do mensurando
$u(x_i)$	Incerteza padrão
U	Incerteza expandida
v_{eff}	Grau de liberdade das grandezas de entrada
V_a	Velocidade do acelerômetro
V_c	Velocidade do amortecedor
V_k	Velocidade da mola
V_{eq}	Velocidade equivalente
x_i	Valor estimado
X_i	Grandeza de entrada
X_n	Pico no decaimento logarítmico
$x(t)$	Deslocamento
Y	Mensurando
y	Estimativa de saída

$y^{(r)}$	Curva de exploração do espaço
$y(t)$	Resposta de um sistema oscilatório
α	Número de fios na corda
δ	Decremento logarítmico
ΔL	Correção do bloco padrão
ΔL_d	Correção associada à resolução do indicador
$\Delta\alpha$	Correção associada à diferença de temperatura
$\Delta(\Delta t)$	Correção devido à diferença de temperatura
η	Valores do mensurando
Λ	Espectro da transformada de Fourier
ω_d	Frequência natural amortecida
ω_i	Frequência angular
ω_n	Frequência natural
Ω_n	Frequência da curva de exploração
ϕ	Fase do movimento
θ	Velocidade angular
ξ	Amortecimento
ξ_i^k	Valor simulado de cada grandeza de entrada
—	Variação média

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	4
2.1	Métodos de Análise de Sensibilidade Locais	5
2.2	Métodos de Análise de Sensibilidade Globais	6
2.2.1	Método FAST clássico	8
2.2.2	Método eFAST	11
2.2.3	Método Sobol	12
3	METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DE INCERTEZA	17
3.1	Cálculo de Incertezas usando o ISO GUM	17
3.2	Cálculo de Incertezas usando o Suplemento 1 do ISO GUM	21
4	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS	27
4.1	Modelo do Bungee Jumping	30
4.2	Modelo da Máquina Linear de Medir	33
4.3	Modelo do Sistema Vibrante Simples	36
4.3.0.1	Resultados Experimentais	39
4.3.1	Modelo Matemático do Sistema Vibrante	43
4.3.1.1	Cálculo de Incerteza de Medição - ISO GUM	46
4.3.1.2	Cálculo de Incerteza usando o método FAST	49
4.3.1.3	Cálculo de Incerteza usando o método de Monte Carlo	50
4.4	Caracterização experimental do número de onda	51
4.4.1	Viga de poliamida	51
4.4.1.1	Aplicação do método ISO GUM	54
4.4.1.2	Aplicação do método FAST	58
4.4.1.3	Aplicação do método de Monte Carlo	60
4.4.2	Viga de aço	62
4.4.2.1	Aplicação do método ISO GUM	63
4.4.2.2	Aplicação do método FAST	67

4.4.2.3	Aplicação do método de Monte Carlo	69
5	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	72
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

A experimentação da indústria mecânica é cada vez maior e a necessidade de métodos estatísticos também vem crescendo muito. Sabe-se que o cálculo de incerteza é necessário e que existe uma padronização internacional para o método do cálculo de incerteza, que é o Guia para Expressão de Incerteza de Medição (ISO GUM). Porém essa metodologia nem sempre é aplicável, podendo violar princípios teóricos em que seu desenvolvimento se baseia. Existem outros métodos que vem sendo utilizados, como o Suplemento 1 do ISO GUM o qual usa Simulação de Monte Carlo (*MCS*, do inglês *Monte Carlo Simulation*) para realizar uma análise estatística.

No procedimento de Análise de Sensibilidade, alguns métodos estimam a variância total da grandeza de saída para obtenção do coeficiente de sensibilidade. Dessa forma, esse trabalho de graduação assume que essa variância total da grandeza de saída pode ser usada no contexto do cálculo de incertezas.

Nessas circunstâncias, esse projeto estuda a possibilidade de utilizar o método de Análise de Sensibilidade para fazer o cálculo da incerteza da grandeza de saída, além de estimar os coeficientes de sensibilidade dos modelos propostos, utilizando ferramentas do MATLAB. Os resultados obtidos podem ser comparados com os resultados obtidos utilizando a metodologia apresentada no ISO GUM e no Suplemento 1 do ISO GUM. Lembrando que os métodos de Análise de Sensibilidade não são usados com o intuito de calcular a incerteza.

O objetivo desse trabalho de graduação é empregar uma toolbox do MATLAB, que já é utilizada para Análise de Sensibilidade, para propor uma metodologia alternativa para cálculo de incerteza, e comparação com a metodologia já estabelecida no ISO GUM e no Suplemento 1 do ISO GUM.

A metodologia desse projeto de graduação é fazer o estudo e aprofundamento das técnicas de Análise de Sensibilidade Global, do ISO GUM e do método de Monte Carlo, apresentado no Suplemento 1 do ISO GUM. A partir disso, desenvolve-se rotinas em MATLAB que permitam o cálculo dos coeficientes de sensibilidade para os métodos FAST e Sobol, que já era algo feito pela toolbox, e da incerteza para o método FAST, que é uma nova metodologia proposta. Com isso, pode-se comparar os valores obtidos com os apresentados na literatura.

Sabendo que o ISO GUM calcula os coeficientes de sensibilidade a partir de derivadas parciais, e que para equações complexas o cálculo de derivadas parciais é difícil, esse trabalho insere o cálculo dos coeficientes de sensibilidade dos métodos FAST e Sobol, com o objetivo de agregar ao ISO GUM, uma maneira mais simples de obter os resultados pretendidos. Pretende-se mostrar que utilizar a toolbox para cálculo dos coeficientes de sensibilidade é interessante.

Foi realizado inicialmente um estudo dos métodos FAST e Sobol, os quais são métodos de Análise de Sensibilidade Global. Além disso, foi feito estudo do método FAST relacionado ao cálculo de incerteza em experimentos, sabendo que esse está conexo à metodologia apresentada no ISO GUM. Também foram realizados estudos referentes à metodologia de cálculo de incerteza disponibilizada pelo ISO GUM e a apresentada pelo método de Monte Carlo. Desenvolveu-se códigos em MATLAB para aplicação dos métodos nos modelos propostos, visando obter o coeficiente de sensibilidade para ambos os métodos, e para aferir uma estimativa da incerteza padrão para o método FAST.

Para o primeiro modelo, foram feitas comparações entre os coeficientes de sensibilidade teóricos e os coeficientes de sensibilidade calculados a partir das rotinas desenvolvidas, para os métodos FAST e Sobol. Para o modelo da Máquina Linear de Medir, foram feitas comparações dos resultados de incertezas calculados, a partir do método FAST, com os apresentados em literatura. Já para o modelo do Sistema Vibrante, foram feitas comparações entre os resultados das incertezas obtidas a partir da utilização dos métodos FAST, Monte Carlo e da metodologia apresentada no ISO GUM tradicional. Pretendeu-se validar os métodos implementados para obtenção dos coeficientes de sensibilidade e para quantificação da incerteza padrão da grandeza de saída.

Por último, foi utilizado alguns dados apresentados no Projeto de Graduação “Caracterização experimental do número de onda” para fazer cálculo de incerteza utilizando a metodologia do ISO GUM, comparando-a com os métodos de Monte Carlo e FAST .

Portanto, foram produzidas rotinas no MATLAB, que podem ser utilizadas como ferramentas para os alunos que desenvolvem pesquisas nessa área de estudo. Presumindo que os alunos que trabalham no laboratório possam fazer uma avaliação dos parâmetros mais importantes no modelo e a incerteza de medição de cada um deles.

Organização do Relatório

Este relatório é formado por mais cinco capítulos, além desse capítulo 1. No capítulo 2, são apresentados os conceitos de Análise de Sensibilidade. No capítulo 3, é apresentado o método de cálculo de incerteza do ISO GUM segundo os padrões internacionais. Nesse capítulo são expostas as considerações teóricas necessárias para a determinação da incerteza de medição. Além disso, esse apresenta-se o método de Monte Carlo (*MCM*, do inglês *Monte Carlo method*) disponível no Suplemento 1 do ISO GUM, utilizado para cálculo de incerteza.

A aplicação da Análise de Sensibilidade utilizando também a metodologia de cál-

culo de incerteza é feita no capítulo 4. São aplicados os métodos FAST (do inglês, *Fourier Amplitude Sensitivity Test*) e Sobol que são métodos de Análise de Sensibilidade Global. Além disso, no capítulo 4 são feitas comparações entre os resultados obtidos pelo método FAST e pelos outros métodos apresentados, os quais obtêm valores de incerteza. A avaliação desses métodos é apresentada no capítulo 5, onde são feitos os comentários.

2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Análise de Sensibilidade (do inglês *Sensitivity Analysis*) tem como objetivo quantificar a dependência da resposta de um sistema a uma determinada entrada. Ela identifica as entradas que tem grande influência na saída do modelo, contribuindo para a variabilidade de saída do mesmo, conforme pode-se observar na figura 1 (SALTELLI; CHAN; SCOTT, 2000). Essa identificação proporciona percepções úteis entre as entrada que tem maior contribuição na variação da saída.

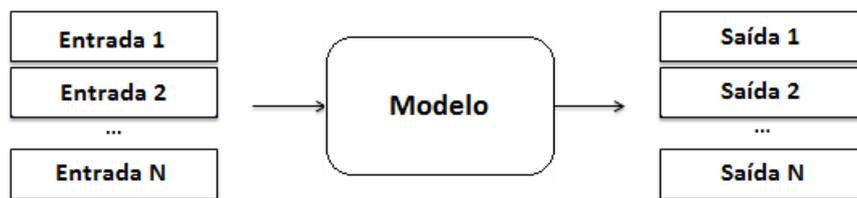


Figura 1: Análise de Sensibilidade. Traduzido de Wagener et al., 2016.

Para melhorar a compreensão da aplicabilidade de métodos específicos a um determinado modelo, existe uma classificação dos métodos de análise de sensibilidade, podendo ser eles classificados como:

- Matemáticos;
- Estatísticos;
- Gráficos.

Métodos matemáticos são bastante utilizados para análise de sensibilidade. Sabe-se que esses não abordam a variância na saída devido à variância nas entradas, mas eles podem avaliar o impacto de variação nos valores de entrada na saída do modelo (MORGAN; SMALL; HERRION, 1990). Os métodos matemáticos podem ser usados para verificar e validar, além de identificar as entradas que requerem a aquisição ou pesquisa de mais dados. Isso se deve à complexidade do modelo.

Métodos estatísticos envolvem a implementação de simulações em que são atribuídas distribuições de probabilidade às entradas, avaliando o efeito da variância das entradas

na distribuição de saída (NETER et al., 1996). Esses métodos permitem identificar o efeito das interações entre múltiplas entradas.

Métodos gráficos representam a sensibilidade na forma gráfica. Normalmente, esses são usados para fornecer uma indicação visual de como uma saída é afetada pela variação de entradas (GELDERMANN; RENTZ, 2001). Esses métodos podem ser usados para selecionar os modelos que serão analisados de forma mais aprofundada, para representar as dependências complexas entre as entradas e saídas, e também para complementar resultados de métodos estatísticos e matemáticos melhorando sua representação.

Sabe-se que atualmente são implementadas em pesquisas, duas escolas de análise de sensibilidade conhecidas como local e global. O método determinístico, mais conhecido como método local, avalia individualmente a influência de cada grandeza do modelo, na resposta do mesmo. Nesse método ocorre variação individual de entrada, mantendo as outras entradas constantes, e obtêm-se a resposta da saída. Para resolução desses métodos utilizam-se derivadas parciais, possivelmente normalizadas pelo valor nominal das entradas ou pelo desvio-padrão (SALTELLI; TARANTOLA; CHAN, 1999).

Os métodos probabilísticos ou métodos globais, surgiram a partir da necessidade de garantir um estudo mais preciso nas condições em que a análise de sensibilidade local possui deficiências. Ele é considerado mais completo devido ao fato de se referir a variação de todas as entradas simultaneamente. Esse método permite uma análise global da influência de diferentes entradas na resposta do sistema. Além disso, possibilita avaliar as interações entre as entradas para a variância do padrão de saída.

2.1 Métodos de Análise de Sensibilidade Locais

Os métodos locais podem ser subdivididos em base diferencial e base determinística. Os locais com base diferencial, possuem as derivadas parciais como principal metodologia de cálculo, como é o caso da AD (do inglês *Automatic Differentiation*) e da *Differential Sensitivity Analysis*.

A AD é uma técnica utilizada para calcular as sensibilidades locais para grandes modelos matemáticos. Códigos computacionais avaliam as derivadas parciais de primeira ordem da saída de interesse a partir de pequenas variações nas entradas, sabendo que os valores das derivadas parciais são medidas de sensibilidades locais (FREY; PATIL, 2002).

A *Differential Sensitivity Analysis* baseia-se na diferenciação parcial do modelo de medição agregado. Quando uma equação algébrica explícita descreve o relacionamento modelado, o coeficiente de sensibilidade para uma grandeza independente particular é calculado a partir da derivada parcial da grandeza dependente em relação à grandeza independente (HAMBY, 1995).

Os mais importantes métodos locais com base determinística são o *Nominal Range*

Sensitivity Analysis, Δ LOR (*Difference in Log-Odds Ratio*) e o RSM (do inglês *Response Surface Method*).

O *Nominal Range Sensitivity* identifica as entradas mais importantes para propagar através de uma estrutura probabilística, a partir de uma análise de triagem (FREY; PATIL, 2002).

Δ LOR é uma aplicação específica do método apresentado anteriormente, o *Nominal Range Sensitivity*. Ela é usada quando a saída é uma probabilidade, e essa diferença influencia a entrada. É uma maneira de redimensionar as probabilidades (SONG; GLENNY; ALTMAN, 2000).

No entanto, o RSM relaciona uma saída à uma ou mais entradas. Esse pode identificar curvaturas na superfície de resposta, respondendo por efeitos de ordem superior. O RSM é geralmente complexo e portanto, usado em estágios posteriores de uma investigação quando um número limitado de grandezas estão sendo analisadas (NETER et al., 1996).

Mesmo sabendo que a aplicação da análise de sensibilidade a partir de métodos locais funcionam bem para o tratamento de grandes sistemas de equações diferenciais, pode-se afirmar que ela possui limitações, devido ao fato de assumir que o sistema é linear e normal, e os resultados são basicamente de abrangência local.

2.2 Métodos de Análise de Sensibilidade Globais

Os métodos globais modelam numericamente fenômenos com alto grau de complexidade, a partir dos avanços computacionais. Esses métodos, também chamados de métodos probabilísticos, avaliam a variação de todas as grandezas simultaneamente.

Um dos primeiros métodos de análise de sensibilidade global desenvolvidos foi o SRC (do inglês *Standardized Regression Coefficient*). A partir desse, foi desenvolvido o RRC (do inglês *Rank Regression Coefficient*). Esse coeficiente é muitas vezes referido como SRRC (do inglês *Standardized Rank Regression Coefficient*).

O método SRC quantifica os efeitos lineares de cada variável de entrada, observando a influência que a entrada tem no modelo. Essa metodologia analisa a sensibilidade da saída em relação às entradas (SALTELLI et al., 2004).

A partir do SRC foi desenvolvido o RRC o qual é calculado analisando a regressão em dados transformados em rankings, sendo esses avaliados de forma ordenada, ao invés de dados brutos. Esse também é conhecido como SRRC (HAMBY, 1995).

Existem também métodos com base probabilística, os quais não são tão aplicados atualmente, mas que têm sua importância. São eles o *Regression Analysis*, ANOVA (do inglês *Analysis of Variance*), MII (do inglês *Mutual Information Index*), *Scatter Plots* e o PRCC (do inglês *The Partial Rank Correlation Coefficient*).

A *Regression Analysis* é uma técnica que descreve a relação entre as grandezas, determinando o valor de certa grandeza de saída, pressupondo uma resposta baseada em grandezas utilizadas no modelo de medição (NETER et al., 1996). A ANOVA possui semelhança com o método citado anteriormente, porém difere na medida em que afirma que não é necessário assumir a forma funcional das relações entre as entrada e a saída. Essa análise é um método não paramétrico usado para determinar se a saída, normalmente distribuídas, variam de forma estatisticamente significativa associada à variação de valores para uma ou mais entradas (KRISHNAIAH, 1984).

Outros métodos globais que podem ser descritos são o MII que produz uma medida de informações sobre a saída que é fornecida por uma entrada. Essa análise de sensibilidade se baseia na análise probabilística condicional. Esse método envolve três etapas, que são (FREY; PATIL, 2002):

- Gerar uma medida total de confiança do valor de saída;
- Obter uma medida de confiança condicional para um valor dado de uma entrada;
- Calcular os coeficientes de sensibilidade.

O *Scatter Plots* é um método de análise de sensibilidade gráfica. Esse avalia a influência das entradas em um resultado (COOK; WEISBERG, 1994). A figura 2 apresenta esse método a partir de pontos de amostragem analisando duas grandezas.

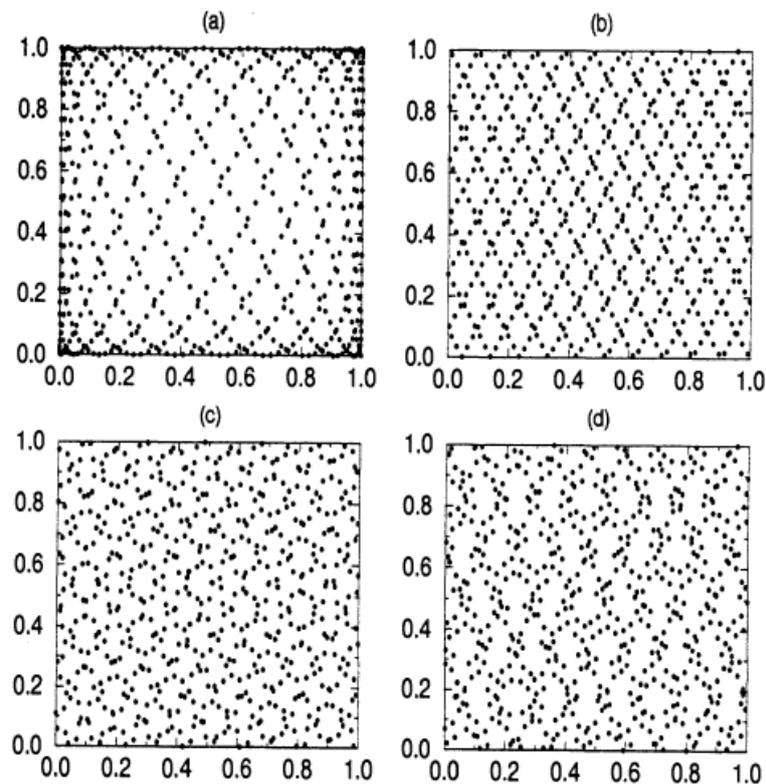


Figura 2: Aplicação do método *Scatter Plots*.

O PRCC é um método que determina a correlação qualitativamente, a partir de um gráfico de dispersão da variável independente e dependente, ou quantitativamente pelo cálculo do coeficiente de correlação (HAMBY, 1995).

Sabendo que frequentemente encontram-se modelos não lineares e não monotônicos, iniciou-se a implementação do método FAST (do inglês *Fourier Amplitude Sensitivity Test*) clássico e a partir dele foi desenvolvido o eFAST (do inglês *extended FAST*), pois esses referem-se aos tipos de modelos não analisados pelos outros métodos. Também foi desenvolvido o *Sobol*, que é um método semelhante ao FAST.

Esses métodos globais têm como objetivos verificar e compreender o modelo, fazer simplificação do modelo e priorizar grandezas, que julguem ser mais importantes.

Pode-se afirmar que o método global exige maior competência do que o local, por efeito dele ter maior interferência no modelo. Isto se deve ao fato das entradas serem exploradas com um limite, sendo ele finito ou infinito, e também devido à variação de saída ser influenciada por uma grandeza tomada globalmente (SALTELLI; TARANTOLA; CHAN, 1999).

2.2.1 Método FAST clássico

A partir da necessidade de uma metodologia de análise de sensibilidade que fosse independente da estrutura do modelo assumido, criou-se o método FAST clássico, o qual estuda a contribuição principal de cada entrada para a variância da saída, que numericamente pode ser definida como:

$$\frac{\text{var}_x[E(Y|X)]}{\text{var}(Y)} \quad (2.1)$$

Onde Y é a saída, X é a entrada, $E(Y|X)$ é a expectativa de Y condicionado a um determinado valor de X , $\text{var}_x[\cdot]$ é a variância obtida através de todos os valores possíveis de X e $\text{var}(Y)$ é a variância da grandeza de saída.

O sucesso dessa análise é experimentalmente avaliada pela soma dos termos: se a soma é dada por um valor próximo a 1, então é dito que a análise alcançou seu objetivo com sucesso (LIEPMANN; STEPHANOPOULOS, 1985).

Esse método pode ser descrito analiticamente a partir da consideração de um modelo que pode ser simplificado por $y = f(x)$, onde y é a saída e x é um vetor de entradas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Deve-se assumir como domínio da entrada a unidade hipercúbica, ou seja, todas as entradas variam de 0 a 1.

Considera-se que x é um vetor caracterizado por uma função densidade de probabilidade conjunta $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Portanto, a representação do r -ésimo momento da função f é dada pela equação:

$$(y^{(r)}) = \int_{K^n} f^r(x_1, x_2, \dots, x_n) P(x_1, x_2, \dots, x_n) dx \quad (2.2)$$

Cukier et al. (1973) notaram que a partir da utilização de uma transformação de Fourier multidimensional de f , seria possível decompor a variância de y como uma função de x . De qualquer forma o custo computacional seria alto, levando o autor a propor uma decomposição monodimensional de f , explorando o espaço hipercúbico através de uma curva de exploração do espaço K^n , a qual é definida pela equação:

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsen(\sen(w_i s)) \quad (2.3)$$

Sendo s uma variável escalar que varia de menos infinito a mais infinito e w_i a frequência angular associada para cada entrada x_i .

De acordo com a variação de s , todas as grandezas mudam simultaneamente, explorando todo o domínio do modelo. Caso a i -ésima grandeza possua influência significativa na saída, a oscilação de y na frequência w_i possuirá uma grande amplitude, tornando possível a quantificação da importância de cada grandeza do modelo.

Para que a curva de exploração verifique de fato todo o domínio, é necessário escolher as frequências de forma que elas sejam linearmente independentes, conforme a equação 2.4:

$$\sum_{i=1}^n r_i w_i \neq 0, \quad (2.4)$$

onde r_i varia de menos infinito a mais infinito.

Segundo Cukier et al. (1973), as frequências angulares devem ser estabelecidas em conformidade com as equações:

$$w_i = \Omega_n \quad (2.5)$$

$$w_i = w_{i-1} + d_{n+1-1} \quad (2.6)$$

O valor das variáveis usadas nas equações 2.5 e 2.6 podem ser obtidos na tabela 1, onde N é o número de entradas, Ω_n é a frequência da curva de exploração e d_n é o diâmetro.

Tabela 1: Parâmetros para a determinação das Frequências da curva de exploração.

N	Ω_n	d_n	N	Ω_n	d_n
1	0	4	26	385	416
2	3	8	27	157	106
3	1	6	28	215	208
4	5	10	29	449	328
5	11	20	30	163	198
6	1	22	31	337	382
7	17	32	32	253	86
8	23	40	33	375	348
9	19	38	34	441	186
10	23	26	35	673	140
11	41	56	36	773	170
12	31	62	37	875	284
13	23	46	38	873	568
14	87	76	39	587	302
15	67	96	40	849	435
16	73	60	41	623	410
17	85	86	42	637	248
18	143	126	43	891	448
19	149	134	44	943	388
20	99	112	45	1171	596
21	119	92	46	1225	216
22	237	128	47	1335	100
23	267	154	48	1725	488
24	283	196	49	1663	166
25	151	34	50	2019	0

A partir da escolha das frequências, sendo essas conforme o procedimento descrito nas equações 2.5 e 2.6, e na tabela 1, pode-se afirmar que a curva de exploração abrange todo o domínio do modelo. Conforme Weyl (1938), os momentos do modelo podem ser calculados conforme a equação:

$$(\bar{y}^r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f^r(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s)) ds \quad (2.7)$$

Devido a precisão dos computadores ter limitações, uma curva de exploração que abrange todo o domínio do modelo é inviável. Sabendo disso, para determinar a variância do modelo é necessário fazer uma aproximação, conforme pode-se observar na equação:

$$\hat{D} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(s) ds - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \right]^2 \quad (2.8)$$

Pode-se expandir $f(s)$ em série de Fourier:

$$y = f(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j \cos js + B_j \sin js \quad (2.9)$$

Onde os coeficientes da série de Fourier A_j e B_j são definidos como:

$$A_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos js ds, \quad (2.10)$$

$$B_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin js ds \quad (2.11)$$

Sabendo que o domínio das frequências j pertence aos inteiros com intervalo de menos infinito a mais infinito. O espectro da transformada de Fourier é determinada por:

$$\Lambda = A_j^2 + B_j^2 \quad (2.12)$$

De acordo com [Saltelli, Tarantola e Chan \(1999\)](#), pode-se estimar que parte da variância de saída é dada por uma determinada entrada (D_i):

$$\hat{D}_i = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \Lambda_{pwi} \quad (2.13)$$

Pelo somatório de todos espectros da transformada de Fourier, ou também considerados variâncias particulares, obtêm-se a variância total do modelo:

$$\hat{D} = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Lambda_j \quad (2.14)$$

2.2.2 Método eFAST

Outro método criado para sanar as limitações que os métodos locais possuem é o eFAST. Esse método foi criado devido o FAST clássico não considerar interações entre as entradas, não considerando portanto, todos os efeitos. Sendo assim, [Saltelli, Tarantola e Chan \(1999\)](#) propuseram uma extensão ao FAST clássico que leva em conta a correção entre as grandezas de entrada.

O método eFAST permite mensurar a covariância entre as entradas, possibilitando assim uma análise mais completa do modelo proposto. Esse se baseia em técnicas para estimar a contribuição dos índices de efeito total de cada grandeza para a variância de saída.

Na figura 3, pode-se observar um esquema geral de um Método de Análise de Sensibilidade Quantitativa. Nota-se que variância total da saída é distribuída às várias entradas, como mostrado pelo diagrama de pizza. Essa é uma aplicação geral do método eFAST.

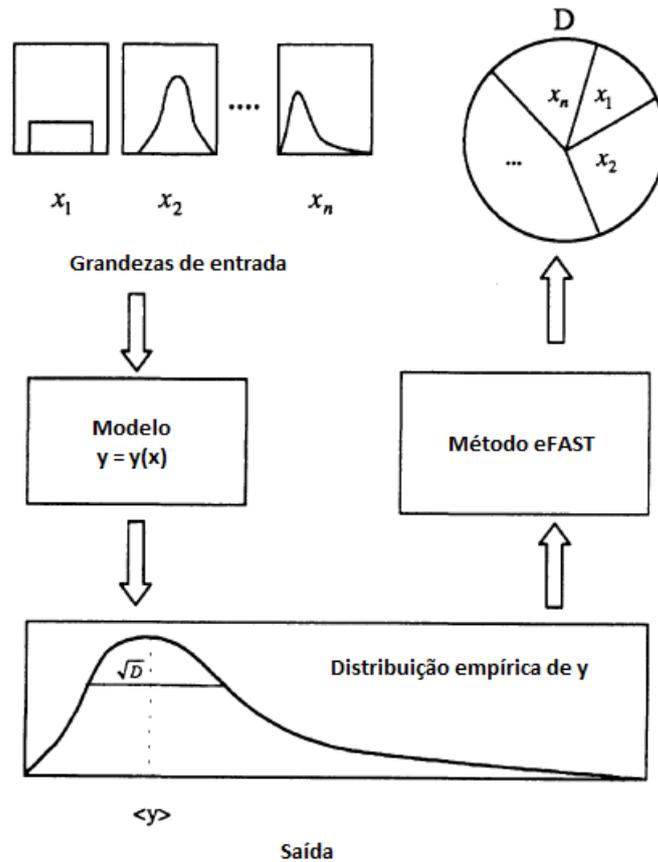


Figura 3: Esquema de aplicação do eFAST. Traduzido de Saltelli et al. (1999).

2.2.3 Método Sobol

O método Sobol é baseado na decomposição do modelo da variância de saída ($f(x)$) em somatórios das variâncias das entradas no aumento da dimensionalidade, conforme pode-se observar na equação 2.17 (SALTELLI; TARANTOLA; CHAN, 1999). A análise de sensibilidade de Sobol determina a contribuição de cada entrada e suas interações para variância geral do resultado do modelo.

A análise de sensibilidade de Sobol tem como objetivo determinar quanto da variabilidade na saída do modelo depende de cada uma das entradas, seja considerando uma única entrada ou a interação entre diferentes entradas. A decomposição da variância de saída em uma análise de sensibilidade de Sobol emprega o mesmo princípio que a análise clássica de variância em um projeto fatorial, utilizando múltiplas integrais. Deve-se notar que a análise de sensibilidade de Sobol não se destina a identificar a causa da variabilidade de entrada. Ela apenas indica qual o impacto e qual extensão ela terá na saída do modelo. Como consequência, não pode ser usada para determinar as fontes de variância.

Para aplicação do método da análise de sensibilidade Sobol, tem-se o interesse em dois coeficientes de sensibilidade, o de primeira ordem e de ordem total. O coeficiente Sobol de primeira ordem representa a redução da variância média de saída que pode ser

alcançada quando X_i está fixo, enquanto o coeficiente Sobol total representa a variância média de saída que permaneceria enquanto X_i estivesse desconhecido (TARANTOLA et al., 2002), ou seja, a contribuição total de X_i para a variação de saída (CANNAVO, 2012). A diferença entre os coeficientes de sensibilidade Sobol de primeira ordem e de ordem total indica o grau de interação entre esse fator e outros fatores.

Enquanto os TSI (do inglês *Total Sensitivity Indices*), conhecidos também como coeficientes de sensibilidade de ordem total, obtidos usando o método Sobol, avaliam a mesma propriedade do modelo de grandeza como no método FAST, o método Sobol de primeira ordem não usa a função de transformação empregada para gerar combinações de grandezas como parte do método FAST, e, como resultado é menos eficiente computacionalmente.

Apresenta-se na figura 4 o fluxograma e as etapas para implementação de uma análise de sensibilidade de Sobol. Existem duas etapas principais que são classificadas como análise de sensibilidade pré-Sobol e Sobol. A análise de sensibilidade de Sobol é dividida em quatro etapas:

- Geração de conjuntos de grandezas;
- Execução da saída do modelo com os conjuntos de grandezas geradas;
- Simulação da saída do modelo com os conjuntos de grandezas geradas;
- Cálculo e a análise dos índices de sensibilidade Sobol total, de primeira e segunda ordem, além dos índices de sensibilidade de Sobol de ordem superior.

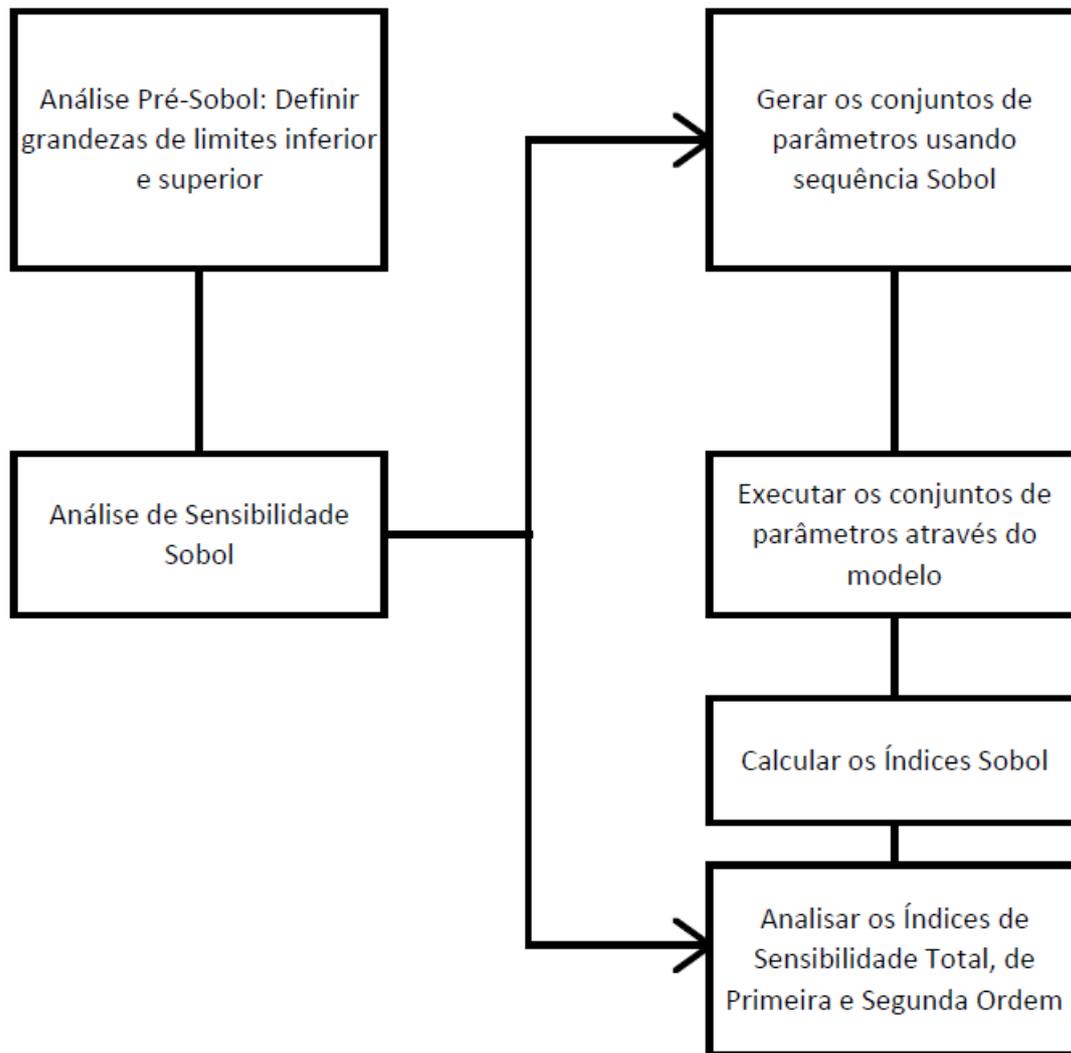


Figura 4: Análise de Sensibilidade de Sobol. Traduzido de Zhang et al., 2015.

A sequência de Sobol possui como características principais:

- A baixa discrepância, também conhecida como "sequência quase aleatória";
- Maior distribuição uniforme;
- Integração *Quasi-Monte Carlo* que produz uma convergência mais rápida e uma melhor precisão;
- Possuem integrais de alta dimensão, sendo isso uma desvantagem.

Para compreender como a variância de saída é atribuída às variáveis de entrada individuais e as interações entre cada uma das variáveis de entrada, os coeficientes de sensibilidade de ordem total, de primeira ordem, de segunda ordem e de ordem superior são calculados para refletir com precisão a influência da grandeza de entrada individual e a interação entre as grandezas de entrada (SOBOL, 2001).

Para descrição analítica do modelo, considera-se as entradas $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ independentes e uniformemente distribuídas. Cada entrada varia em relação a algum intervalo finito que pode ser assumido, após o redimensionamento, como $[0,1]$. É necessário pensar em cada entrada como uma variável aleatória distribuída uniformemente em $[0,1]$, com todas as entradas mutuamente independentes. A saída do modelo cuja sensibilidade às entradas deve ser avaliada é uma função $f(x)$. A partir da interpretação probabilística das entradas, $f(x)$ é uma variável aleatória com média (f_0) e variância (D):

$$f_0 = \int f(x)dx \quad (2.15)$$

$$D = \int f(x)^2 dx - f_0^2 \quad (2.16)$$

Todas as integrais são integrais múltiplas com limites $[0,1]$ em cada dimensão.

O método Sobol é baseado na decomposição de D em contribuições de efeitos de entradas únicas, efeitos combinados de pares de entradas, e assim por diante. Primeiramente, isso é feito pela decomposição de $f(x)$:

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^s f_i(x_i) + \sum_{i=1}^s \sum_{i \neq j}^s f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1\dots s}(x_1, x_2, \dots, x_s) \quad (2.17)$$

Os termos da decomposição são calculados usando (SOBOL, 2001):

$$f_i(x_i) = \int f(x) \prod_{k \neq i} dx_k - f_0 \quad (2.18)$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \int f(x) \prod_{k \neq i, j} dx_k - f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j) \quad (2.19)$$

e assim por diante.

A análise da representação de variância de $f(x)$ é baseado na satisfação das condições mostradas na equação (SOBOL, 2001):

$$\int f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_k = 0 \quad (2.20)$$

para $k = i_1, \dots, i_s$

Devido essas propriedades, elevando ao quadrado os dois lados da equação 2.18 e integrando, tem-se:

$$D = \sum_{i=1}^k D_i + \sum_{i < j} D_{ij} + \sum_{i < j < l} D_{ijl} + \dots + D_{1,2,\dots,k} \quad (2.21)$$

onde $D_{i_1 \dots i_s} = \int f_{i_1 \dots i_s}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ é a variância de $f_{i_1 \dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$, chamada de variância parcial correspondente a esse subconjunto de entradas. Os coeficientes de sensibilidade de Sobol são então definidos como

$$S_{i_1 \dots i_s} = \frac{D_{i_1 \dots i_s}}{D} \quad (2.22)$$

Por exemplo, $S_i = \frac{D_i}{D}$ fornece a contribuição de primeira ordem da i -ésima entrada para a variância de saída e $S_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}$ fornece a contribuição de segunda ordem das interações entre a i -ésima e a j -ésima entradas. Finalmente, os coeficientes de sensibilidade de ordem total, os quais são definidos como a soma de todos os índices de sensibilidade $S_{T_i} = S_i + S_{ij_{i \neq j}} + \dots + S_{1 \dots i \dots s}$, quantificam os efeitos globais de uma saída do modelo.

Os respectivos coeficientes de sensibilidade podem ser obtidos da equação 2.21, dividindo-o por D . Para o caso dos coeficientes de primeira ordem (S_i), dado que S_i relaciona a variância parcial com a variância total para cada entrada, os respectivos coeficientes de sensibilidade devem somar 1:

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_{i < j} S_{ij} + \sum_{i < j < l} S_{ijl} + \dots + S_{1,2,\dots,k} \quad (2.23)$$

Entretanto para o caso dos coeficientes de ordem total (S_{T_i}), que avaliam a contribuição pra variância de saída de X_i , incluindo todas as variações causadas pelas interação de todas as ordens, com qualquer outra variável de entrada. Pode-se observar na equação 2.24 que diferente de S_i ,

$$\sum_{i=1}^d S_{T_i} \geq 1 \quad (2.24)$$

Devido ao fato de que o efeito de interação entre, por exemplo X_i e X_j são contados para todos os coeficientes de sensibilidade calculados, a soma dos coeficientes só é igual a 1, caso o modelo seja de puramente aditivo.

Portanto, os coeficientes de sensibilidade de primeira ordem são usados para medir a contribuição fracionária de uma única entrada para a variância da saída. Os coeficientes de sensibilidade de segunda ordem são usados para medir a contribuição fracionada das interações das entradas para a variância da saída. Os coeficientes de sensibilidade de ordem total levam em consideração os efeitos principais, de segunda ordem e de ordem superior, que envolvem a avaliação incluindo várias entradas. Quanto maior o valor dos coeficientes de sensibilidade, mais influentes são as grandezas do respectivo modelo e as etapas associadas.

3 METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DE INCERTEZA

Com o objetivo de uniformizar o método de cálculo de incerteza para fins comerciais e industriais, o Comitê Internacional de Pesos e Medidas (do francês, *Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)*) solicitou a elaboração do Guia para Incerteza de Medição, conhecido como ISO GUM, no ano de 1993, que tem como objetivo estabelecer critérios e regras gerais, bem como harmonizar métodos e procedimentos relacionados à expressão de incertezas associadas ao processo de medição.

Os Suplementos do GUM tem como objetivo ajudar na interpretação do GUM e aumentar seu âmbito de aplicação. Pretende-se, com os Suplementos do GUM, alcançar uma abrangência consideravelmente maior do que aquela conseguida pelo Guia Original.

O Suplemento 1 do GUM (GUM-S1) pode ser considerado uma ferramenta confiável e consistente na avaliação de incerteza de medição nos casos em que condições de aplicabilidade do GUM não estão completamente atendidas. Esse é usado em situações que apresentam função de medição fortemente não linear, que apresentam Funções de Densidade de Probabilidade (PDF, do inglês, *Probability Density Function*) das grandezas de entrada assimétricas e não gaussianas e que apresenta PDF do mensurando simétrica, e não gaussiana ou assimétrica ([JCGM, 2004b](#)).

3.1 Cálculo de Incertezas usando o ISO GUM

O ISO GUM ([JCGM, 2008a](#)) avalia a incerteza das grandezas de entrada para determinar a incerteza da grandeza de saída. O mensurando é a grandeza que deseja-se determinar. Esse Guia caracteriza a dispersão dos possíveis valores de resposta, resultando em um valor único, que é o desvio padrão, o qual identifica a distribuição associada ao mensurando. O Guia é um método geral, e portanto não utiliza instruções detalhadas a respeito de tecnologias específicas, as quais são casos específicos de medição, e ao invés disso utiliza regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição.

A aplicação do ISO GUM para o cálculo da incerteza de medição abrange, de modo geral, as etapas apresentadas no item 8 do Guia:

- Definição do mensurando, que é a grandeza que se deseja medir;
- Definição do modelo de medição e das grandezas de entrada, relacionando todas as grandezas necessárias para obter o valor do mensurando;
- Determinação dos valores estimados e das incertezas padrão das grandezas de entrada;
- Determinação do valor estimado do mensurando utilizando o modelo de medição;
- Determinação da incerteza expandida do mensurando para um intervalo de confiança definido, caso seja necessário;

Detalhando a metodologia, temos que a **definição do mensurando** (Y) está relacionada à determinação do fenômeno que se deseja estudar, ou seja, do valor da grandeza específica a ser medida. Sendo que para obter essa grandeza é necessário conhecer um número infinito de informações, pois essa determinação especifica alguns estados e condições físicas do resultado da medição. Portanto, pode-se afirmar que o mensurando (Y) depende das grandezas de entrada (X_i).

A **função de medição** (f) expressa a relação entre o mensurando (Y) e as grandezas de entrada (x_i), a partir de uma sequência de operações usadas na execução de medições, sabendo que o modelo de medição deve apanhar todas as grandezas, incluindo as correções e fatores de correção, os quais podem contribuir com um componente significativo de incerteza para o resultado de medição.

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

O **valor estimado** (x_i) da grandeza de entrada (X_i) é determinado a partir de análise estatística, tabelas, constantes físicas, certificados de calibração, entre outros. Esse valor estimado pode ser determinado a partir de uma única observação ou até de observações repetidas, tendo o julgamento baseado na experiência. No caso de várias medições, o melhor estimador é a média aritmética (\bar{x}) dos "N" valores experimentais.

Em relação à determinação da **incerteza padrão** $u(x_i)$, existem dois métodos para obtenção dela, para cada estimativa de entrada x_i :

1. Avaliação Tipo A da incerteza padrão obtida a partir de análise estatística de várias observações, não sendo essas exaustivas. Essa análise utiliza o desvio padrão amostral dos resultados experimentais obtidos:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.2)$$

2. Avaliação Tipo B da incerteza-padrão obtida a partir de métodos que não utilizem análise estatística, aplicando portanto, outros meios e as informações disponíveis, tais como:

- dados de medições prévias;
- experiência com ou conhecimento geral do comportamento e das propriedades materiais e instrumentos relevantes;
- especificações do fabricante;
- dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados;
- incertezas atribuídas a dados de referência extraídos dos manuais.

Quando se trata de uma quantidade comparativamente pequena de observações estatisticamente independentes, tem-se que a avaliação do Tipo B da incerteza padrão pode ser tão confiável quanto uma avaliação do Tipo A da incerteza padrão.

A partir do modelo de medição, determina-se a **estimativa do mensurando** (y) também conhecida como grandeza de saída, utilizando as estimativas das entrada (x_i) para os valores das N grandezas de entrada (X_i).

A **incerteza combinada do mensurando** ($u_c(y)$) é identificada por um desvio padrão estimado e caracteriza a dispersão dos valores que têm a possibilidade de serem atribuídos ao mensurando. Para cálculo dela, no caso de grandezas de entrada não correlacionadas, utiliza-se o desenvolvimento em Série de Taylor da função de medição (f) até a primeira ordem:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2} \quad (3.3)$$

Para cálculo da incerteza combinada do mensurando, no caso de grandezas de entrada correlacionadas, utiliza-se a equação:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{(x_i)}^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (3.4)$$

Se necessário, deve-se fornecer uma **incerteza expandida** (U) que tenha como objetivo prover um intervalo $[y-U, y+U]$ com o qual se deseja abranger uma grande fração da distribuição de valores os quais podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando, sendo este intervalo estimado e declarado. Para cálculo da incerteza expandida multiplica-se a incerteza-padrão combinada ($u_c(y)$) por um fator de abrangência, escolhido a partir do nível de confiança requerido para o intervalo, levando-se em conta o grau de liberdade do mensurando (v_{eff}). Portanto, determina-se a incerteza-padrão expandida:

$$U = ku_c(y) \quad (3.5)$$

O fator k é determinado usando a tabela *T-student* levando-se em conta o grau de liberdade do mensurando y , a qual é função da grandeza de saída de interesse, que é calculado a partir dos graus de liberdade das grandezas de entrada usando a expressão de Welch Satterthwaite:

$$v_{eff} = \frac{[\frac{u_c(y)}{y}]^4}{\sum_{i=1}^N [\frac{u(x_i)}{x_i}]^4 / v_i} \quad (3.6)$$

Para uma grandeza obtida a partir de "N" medições, o grau de liberdade (v_{eff}) é igual a $(N - 1)$. Para uma avaliação Tipo B de incerteza, o grau de liberdade será considerado infinito. O grau de liberdade deve ser um número inteiro, com isso, quando necessário, deve ser arredondado para o inteiro superior mais próximo.

A figura 5 apresenta um fluxograma da metodologia ISO GUM com referências às equações usadas:

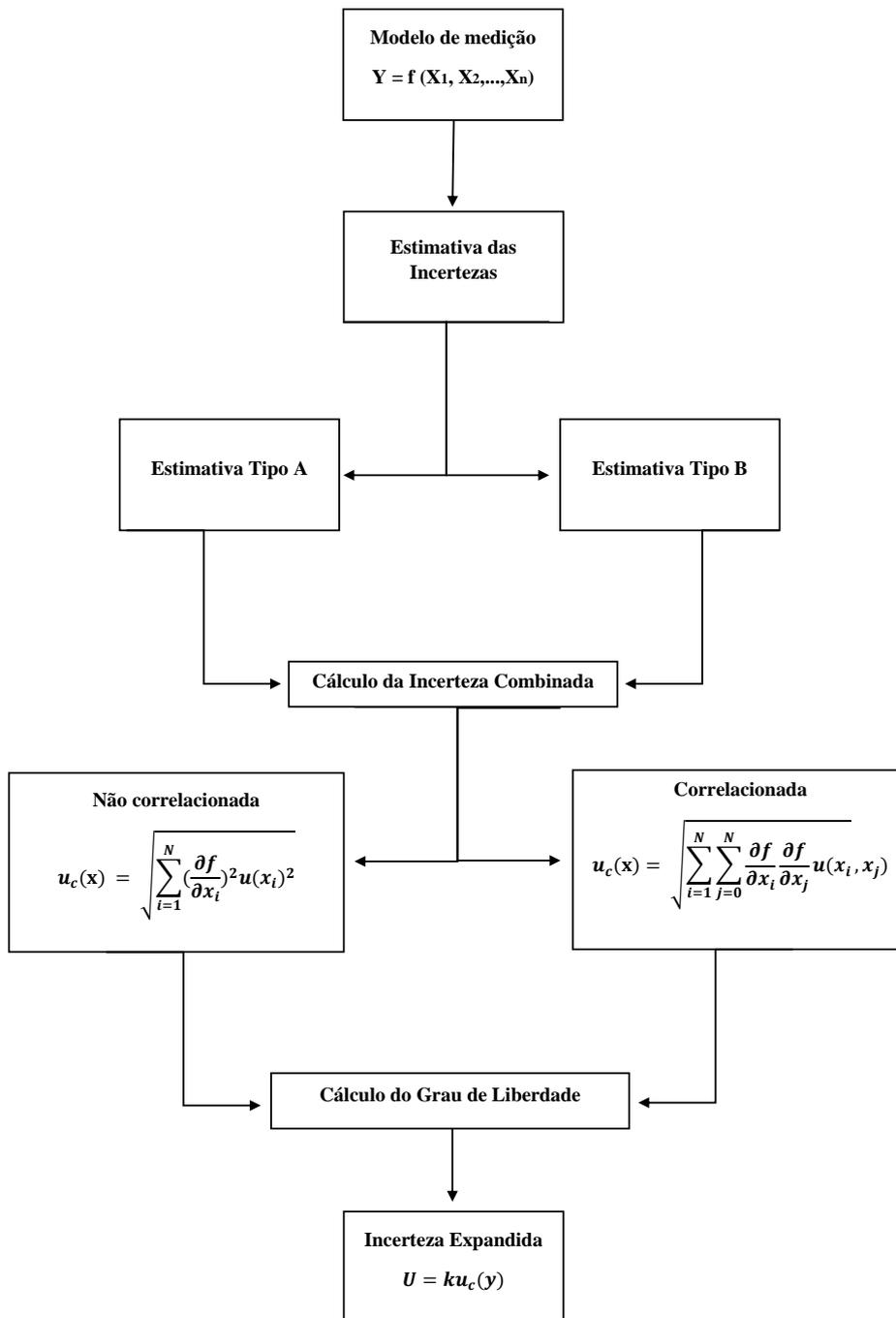


Figura 5: Fluxograma representando a metodologia do ISO GUM.

3.2 Cálculo de Incertezas usando o Suplemento 1 do ISO GUM

A abordagem proposta pelo Suplemento 1 do ISO GUM (GUM-S1) é baseada na lei de propagação de PDFs (figura 6), a qual considera uma base probabilística generalizada

para a avaliação da incerteza de medição por meio do uso direto de PDFs atribuídas às grandezas de entrada X_i ao invés do uso de suas estimativas x_i e suas respectivas incertezas padrão $u(x_i)$ (MARTINS, 2010).

A figura 6 apresenta o princípio da propagação de PDFs sendo que N grandezas de entrada X_i , mutuamente independentes, compõem a função de medição.

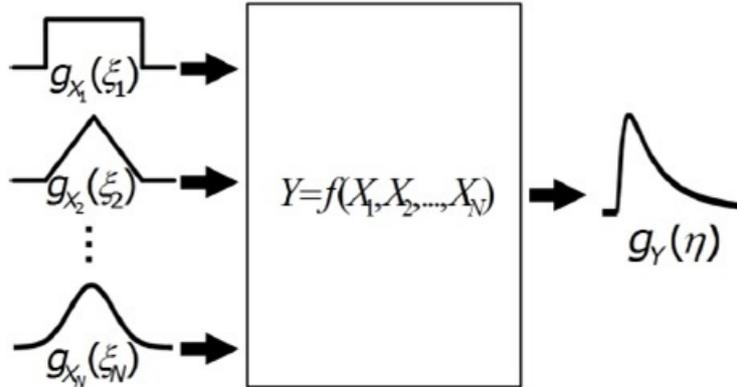


Figura 6: Princípio da lei de propagação de PDFs aplicando em uma função de medição.

A propagação de PDFs tem como ideia obter uma PDF que engloba todas as informações possíveis sobre o mensurando Y baseada na PDF conjunta das grandezas de entrada X_i . Essas PDFs das grandezas de entrada X_i necessitam do conhecimento sobre os valores possíveis das grandezas.

O método numérico recomendado pelo GUM-S1 é o método de Monte Carlo (do inglês, *Monte Carlo method (MCM)*) o qual é um procedimento numérico para resolver problemas matemáticos através de simulações de variáveis aleatórias (HERRADOR; GONZALEZ, 2004).

A ideia do MCM, que avalia a incerteza de medição, é retirar um certo número de amostras M da PDF conjunta $g_{X_1, \dots, X_N}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ das grandezas de entrada X_1, \dots, X_N e propagar os valores obtidos através da função de medição, produzindo M amostras da grandeza de saída (Y).

Sendo assim, faz-se uma PDF empírica ou amostral para Y, a qual representa uma estimativa da PDF do mensurando $g_Y(\eta)$. Assim, o resultado de medição (y) é obtido a partir da média da PDF amostral e da incerteza padrão ($u(y)$) associada ao resultado de medição, obtendo o desvio padrão da mesma PDF amostral. E ainda, o intervalo de abrangência da PDF amostral é determinado com base na probabilidade de abrangência escolhida.

Quanto maior o número de amostras de Monte Carlo (M), melhores serão os resultados para construção da PDF amostral do mensurando, visto que para um número M finito de resultados existe um erro aleatório associado e, portanto, o valor de M deve ser escolhido suficientemente grande para assegurar o erro suficientemente pequeno (JCGM,

2008c). Quando M tende a infinito, os resultados convergem para valores correspondentes aos obtidos da PDF $g_Y(\eta)$ (ELSTER, 2007). A definição formal para a PDF da grandeza de saída é dada pela equação:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi) \delta(\eta - f(\xi)) d\xi_N \dots d\xi_1 \quad (3.7)$$

onde g_X é a PDF das grandezas de entrada e o termo $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac. Para avaliar a **incerteza de medição**, o método GUM-S1 fornece uma PDF amostral $\hat{g}_Y(\eta)$ para o mensurando Y . Os valores simulado ξ_i^k de cada grandeza de entrada X_i são utilizados para calcular os valores η^k da grandeza de saída por meio da função de medição ((MARTINS, 2010)), ou seja:

$$\eta^k = f(\xi_1^k, \dots, \xi_N^k) \quad (3.8)$$

onde k varia de 1 a M . O conhecimento dos valores possíveis do mensurando η^1, \dots, η^M implica na construção de $\hat{g}_Y(\eta)$. Sendo assim, a melhor estimativa y do mensurando Y pode ser estimada pela média dos resultados obtidos pela propagação das PDFs, e a incerteza padrão $u(y)$ associada à estimativa y será o desvio padrão dessa mesma PDF ((MARTINS, 2010)).

As equações de y e $u(y)$ são dadas como:

$$y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \eta^k \quad (3.9)$$

$$u(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (\eta^k - y)^2} \quad (3.10)$$

Esses valores são tomados diretamente a partir da PDF de saída encontrada utilizando o MCM.

A utilização do MCM possui alguns vantagens, listadas a seguir:

- Geração de uma PDF para o mensurando, que permite a determinação do intervalo de abrangência, variância, desvio padrão, média, moda, assimetria, curtose e outros parâmetros estatísticos do mensurando;
- Não existem limitações no que tange à natureza não linear da função de medição, sendo portanto, diferente do método GUM que requer uma aproximação linear da função de medição pela série de Taylor;
- Não existem suposições referentes à distribuição do mensurando, ou seja, a PDF do mensurando pode ser simétrica e não gaussiana ou assimétrica (no método GUM supõe-se que a distribuição do mensurando deve se aproximar de uma gaussiana,

uma vez que esta hipótese é necessária para estimar o intervalo de abrangência baseado na distribuição *t-Student*);

- Não requer o cálculo do número de graus de liberdade efetivos (que incluiria uma hipótese de que o mensurando tem uma distribuição de frequência de *t-Student*);
- Não é necessário calcular derivadas parciais para a avaliação da incerteza de medição.

Além disso, possui também algumas desvantagens:

- Devido à falta de conhecimento dos processos (físicos e/ou químicos) que influenciam um processo de medição e a existência de dados imprecisos, a seleção da PDF apropriada é complexa;
- A necessidade da geração de números aleatórios de PDFs conjuntas não gaussianas, devido os softwares possuírem geradores de números aleatórios somente para PDF gaussiana multivariada;
- Dependendo do caso, como por exemplo em modelos de medição complexos com muitas grandezas de entrada ou modelos de medição fortemente não lineares, o tempo de processamento pode ser longo.

Devido à necessidade do atendimento à certas condições, foram criadas técnicas alternativas para aplicar e validar o método tradicional de avaliação de incerteza de medição. Dentre essas técnicas está o uso da Simulação de Monte Carlo (SMC), para avaliar incertezas de medição.

O método de Simulação de Monte Carlo é dado para modelos que envolvem amostragem aleatória de uma distribuição probabilística.

Os matemáticos norte-americanos John Von Neumann e Stanislaw Ulam são considerados os principais autores da técnica de SMC. Já antes de 1949, foram resolvidos vários problemas estatísticos de amostragem aleatória empregando-se essa técnica.

Estabelecer o modelo de medição e avaliar o modelo são as duas fases para utilização de SMC para avaliar incerteza de medição (COX et al., 2001):

A diferença entre o método clássico e o SMC está no tipo de informação que descreve as grandezas de entrada e na forma de processamento dessas informações para obter a incerteza de medição.

A figura 7 apresenta um fluxograma do *Método de propagação de distribuições*, o qual é uma técnica da SMC.

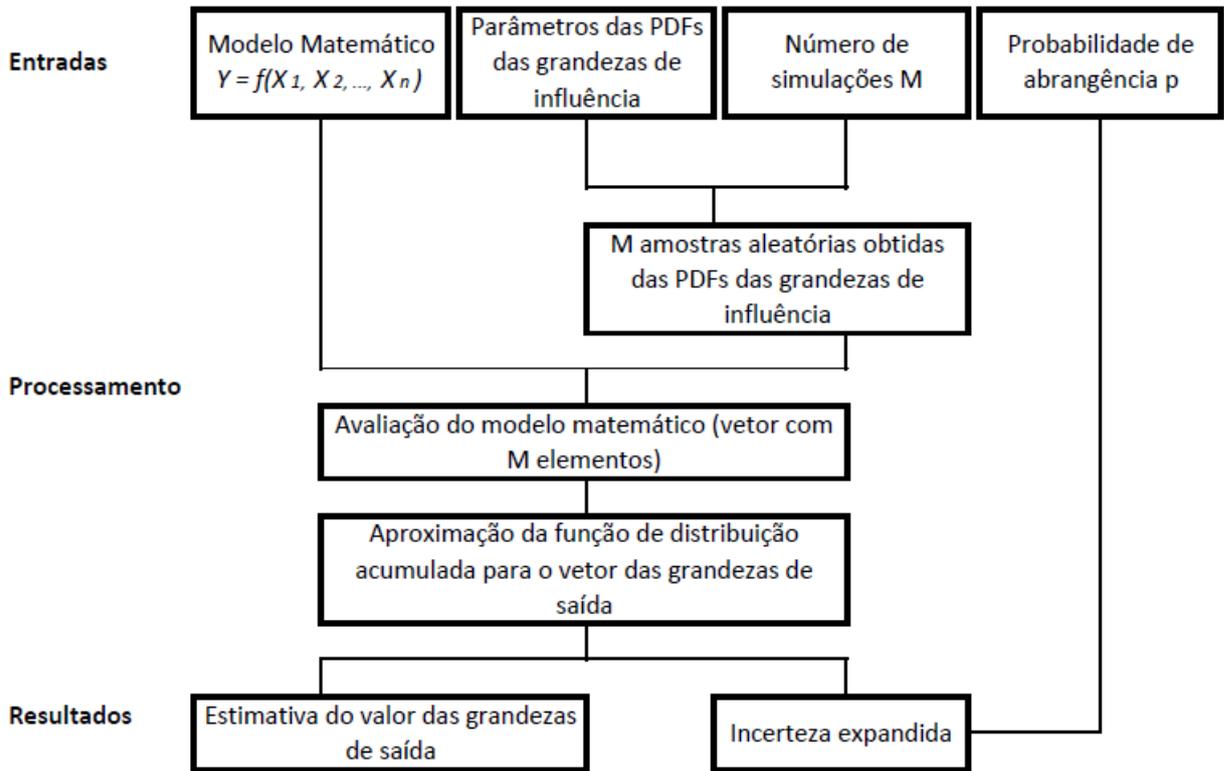


Figura 7: Fluxograma simplificado da avaliação de incerteza de medição usando a SMC (adaptado de (JCGM, 2004b)).

Os resultados obtidos na SMC dependem dos seguintes fatores (DONATELLI; KONRATH, 2005):

- Representatividade do modelo matemático;
- Qualidade da caracterização das grandezas de entrada;
- Número de simulações realizadas (M);
- Procedimento de definição do intervalo de abrangência.

Para a correta aplicação da técnica SMC na avaliação de incertezas de medição, são necessários analisar o número de medições realizadas (M) e a estimativa da incerteza expandida para certa probabilidade de abrangência.

O número de medições simuladas influencia no erro amostral esperado para as estimativas obtidas por SMC, de forma acentuada. A figura 8 apresenta um exemplo relacionado à essa influência.

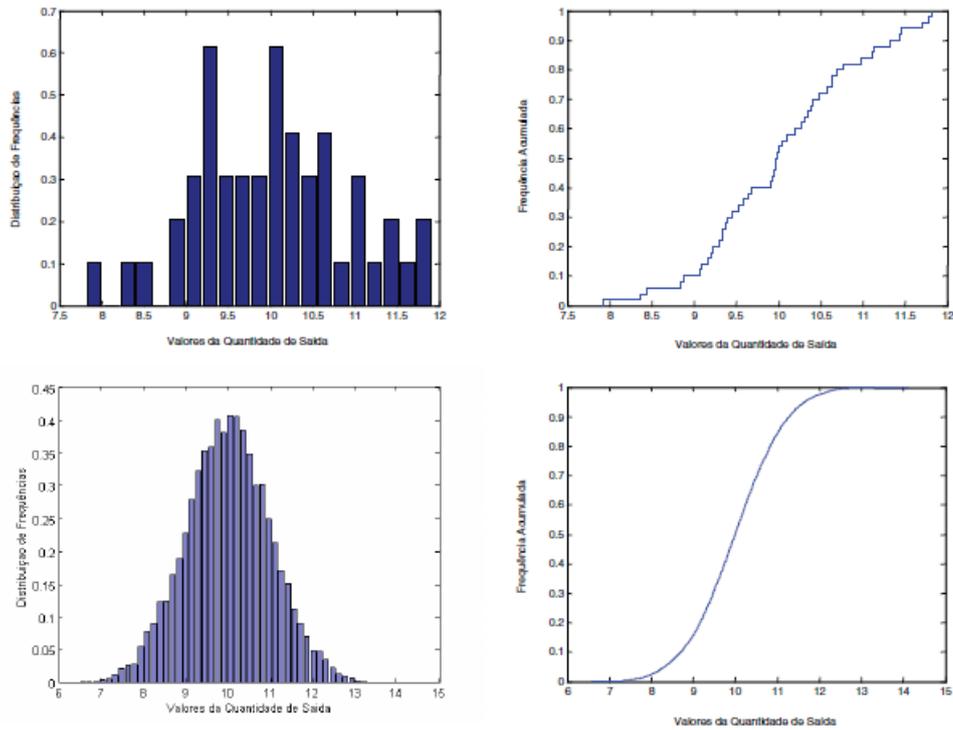


Figura 8: Distribuições empíricas obtidas para diferentes tamanhos de amostras.

Sabe-se que erro amostral de simulação não é a única fonte de desvios potenciais na análise de incerteza por SMC. Modelos matemáticos pouco representativos e grandezas de influência mal caracterizadas podem gerar desvios maiores e mais difíceis de serem detectados. Notando isso, pode-se afirmar que aumentar o número de simulações para reduzir o erro amostral pode não trazer o retorno desejado (DONATELLI; KONRATH, 2005).

Portanto, é necessário minimizar o tamanho da amostra, sem comprometer a qualidade dos resultados da simulação.

A técnica SMC pode ser utilizada para estimar a incerteza expandida, nos casos em que a distribuição que representa os valores possíveis do mensurando não é normal, invalidando portanto, a necessidade de multiplicar o desvio padrão estimado por um fator de abrangência (DONATELLI; KONRATH, 2005).

4 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

Nesse capítulo serão apresentadas a aplicação dos métodos de Análise de Sensibilidade Global e os métodos tradicionais para avaliação da incerteza de sistemas de medição.

Assim o modelo de medição, definido no Capítulo 2, será a função que relaciona a saída às entradas.

Inicialmente, será apresentado no item 4.1 o Modelo do Bungee Jumping o qual compara os resultados apresentados na seção 5.12 do livro *Sensitivity Analysis in Practice* (SALTELLI et al., 2004) com os resultados obtidos das rotinas comentadas nesse capítulo. Já no item 4.2 é apresentado o Modelo da Máquina de Medir que compara os resultados obtidos nas rotinas com os resultados vistos na seção 7.4 do livro *Metrologia Mecânica - Expressão da Incerteza de Medição* (LINK, 1999). No item 4.3 é apresentado a metodologia para cálculo das incertezas na frequência natural do sistema dinâmico. Por último, no item 4.4 é apresentada a metodologia para cálculo de incerteza na caracterização do número de onda.

O primeiro exemplo permite a verificação das rotinas desenvolvidas em MATLAB e os outros dois a aplicação no cálculo da incerteza de medição em dois contextos diferentes. O quarto, e último exemplo, verifica a aplicação das rotinas em MATLAB para cálculo de incerteza, a partir dos dados obtidos pelo experimento realizado por Matos (2018).

Para aplicação dos métodos de análise de sensibilidade FAST clássico e Sobol, serão utilizados códigos computacionais feitos em MATLAB.

Para calcular os coeficientes de sensibilidade dos modelos propostos, utilizou-se o toolbox do MATLAB *Global Sensitivity Analysis Tool* (GSAT), o qual inclui rotinas para Análise de Sensibilidade Global. Em particular esse implementa análise de Sobol e análise FAST para estimar os índices de sensibilidade para os modelos com até 50 entradas diferentes. Na literatura de Análise de Sensibilidade sabe-se que a análise de sensibilidade local refere-se à sensibilidade em um ponto fixo no espaço da grandeza, tipicamente no ponto de ajuste ideal para os dados reais. Já a análise de sensibilidade global se refere a uma sensibilidade integrada em toda a entrada do espaço. O GSAT trata apenas de modelos escalares, que têm uma saída escalar e real.

No campo da análise de sensibilidade global, os métodos baseados na variância

referem-se a formas de quantificar a contribuição de cada grandeza de entrada (x_i) para a variância total da grandeza de saída (y).

Com o objetivo de otimizar a utilização do toolbox e visando obter os valores referentes aos coeficientes de sensibilidade, desenvolveu-se duas rotinas principais, sendo que uma delas têm como resultados os coeficiente de sensibilidade e a quantificação da incerteza de medição para o método FAST clássico e a outra rotina principal apresenta como solução os coeficiente de sensibilidade para o método Sobol.

Foi usado a programação orientada a objetos, a qual é uma forma de programar que se baseia na composição e interação entre as diversas classes de dados, também conhecidos como objetos. Portanto, primeiramente, criou-se um projeto inicial em branco GSAT e vinculou-o ao modelo e suas grandezas. Entende-se que esse é uma classe que relacionará todas as grandezas que posteriormente serão armazenadas sob seu nome. No presente estudo, esse projeto fornecerá os dados necessários para que os valores dos coeficientes de sensibilidade e da incerteza de medição sejam calculados.

Posteriormente, adicionam-se as grandezas que serão necessárias para a resolução do problema - as grandezas de entrada, denominadas *param[.]*, e as distribuições de probabilidade, denominadas *pdf_[.]*, e o intervalo de variação de cada.

Sabendo que a Análise de Sensibilidade Global é um método probabilístico que leva em consideração as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada, e com isso consegue avaliar conceitos mais abrangentes, como a variação de várias variáveis de entrada simultaneamente. Para cada distribuição de probabilidade utiliza-se uma rotina no toolbox do MATLAB *Global Sensitivity Analysis Tool* (GSAT). Portanto, para cada distribuição de probabilidade define-se uma Função Densidade de Probabilidade.

Após a adição das grandezas, aplica-se a função *pro_SetModel* que adiciona o modelo de relação entre as grandezas de entrada e a grandeza de saída. Essa informação será adicionada na classe de dados do projeto. Posterior a isso, é necessário assumir um número de amostra.

A partir daí têm-se uma diferença entre as rotinas para o método FAST clássico e para o método Sobol.

Para a rotina usando o método FAST clássico, utiliza-se a função *GSA_SFAST_GetSi* para obter valores dos coeficientes de sensibilidade para todas as grandezas de entrada adicionadas anteriormente.

Entretanto para a rotina usando o método Sobol, utilizou-se a função *pro = GSA_Init(pro)* que inicializa o projeto calculando o modelo nos pontos de amostragem. Em vista disso, pode-se calcular os coeficientes de sensibilidade. Subsequente à inicialização, utilizou-se as funções $[S * eS * pro] = GSA_GetSy(pro, [*])$ para cada grandeza de entrada com o objetivo de calcular os coeficientes de sensibilidade de primeira ordem para o método Sobol. A variância total do sistema também é calculada no procedimento,

aprovando com isso o cálculo da incerteza padrão da grandeza de saída. Posteriormente, desenvolveu-se as funções $[Stot^* eStot\ pro] = GSA_GetTotalSy(pro, [*])$ para cada grandeza de entrada, com o objetivo de calcular os coeficientes de sensibilidade de ordem total para o método Sobol.

Segue na figura 9 o fluxograma das rotinas utilizando ambos os métodos de análise de sensibilidade global:

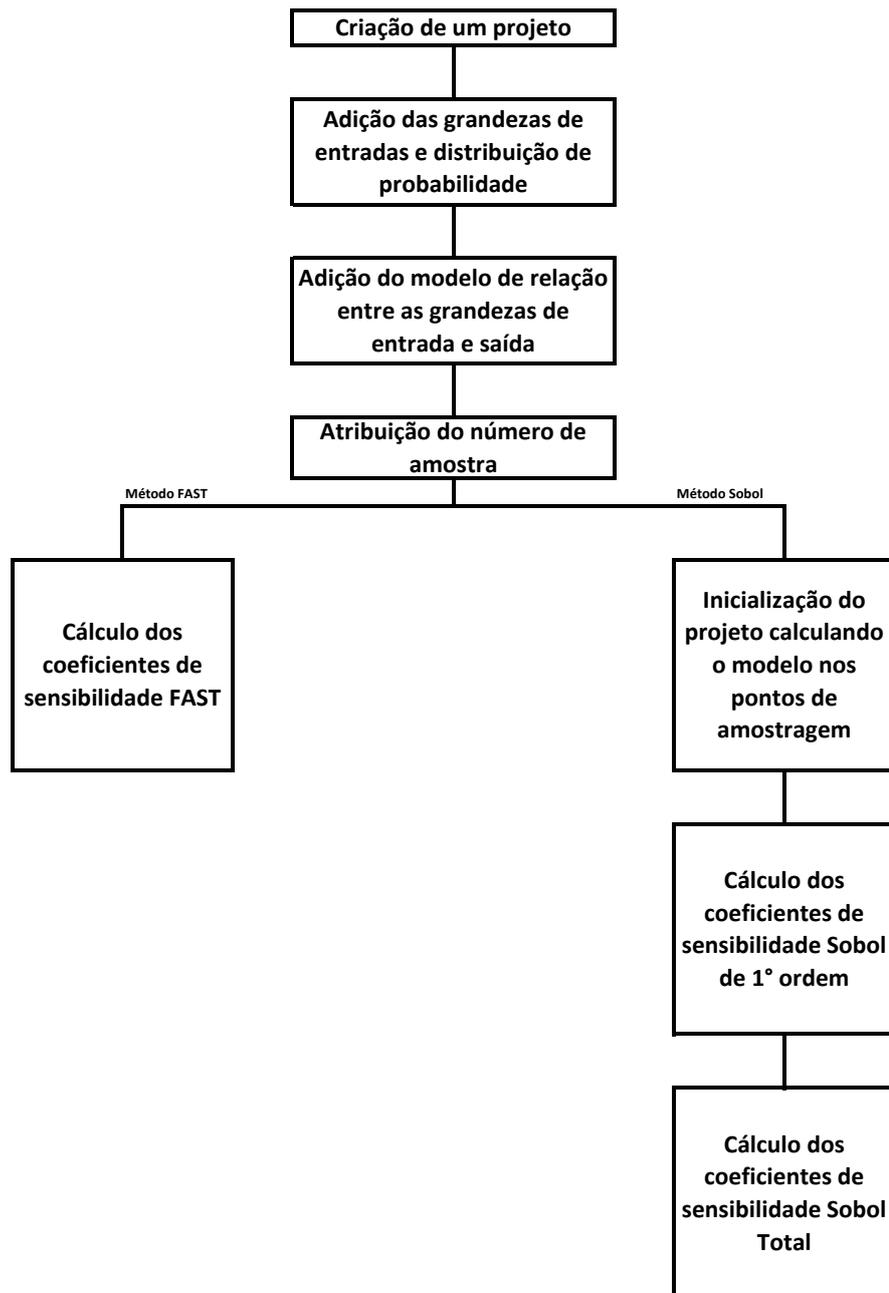


Figura 9: Fluxograma das rotinas de MATLAB.

A variância total do sistema também é calculada no procedimento, aprovando com isso o cálculo da incerteza padrão da grandeza de saída. Multiplica-se a incerteza padrão pelo fator de abrangência $k=2$, garantindo assim que a confiabilidade do resultado seja de 95%.

4.1 Modelo do Bungee Jumping

Com o objetivo de validar o cálculo dos coeficientes de sensibilidade do método FAST, são comparados os resultados obtidos com as rotinas desenvolvidas, com aqueles apresentados no livro *Sensitivity Analysis in Practice* na seção 5.12, onde o autor analisa um modelo para *Bungee Jumping* (SALTELLI et al., 2004).

Nesse modelo, pretende-se minimizar a variável h_{min} , isto é, tornar mínima a distância ao asfalto durante a oscilação, dada a incerteza nas três grandezas de entrada. Quanto menor o h_{min} , maior o risco e excitação do salto. A análise de sensibilidade é aplicada com o intuito de observar como cada grandeza de entrada influencia na incerteza de h_{min} .

A equação governante é dada por:

$$h_{min} = H - \frac{2Mg}{K\alpha} \quad (4.1)$$

Sendo H a distância da plataforma de salto ao asfalto, M a massa da pessoa que está pulando, α o número de fios na corda e K a constante elástica da corda.

A configuração inicial para as grandezas de entrada são apresentadas na tabela 2.

Tabela 2: Lista de grandezas de entrada para o modelo do Bungee Jumping.

Grandeza de entrada	Variação	Distribuição de Probabilidade
H (m)	[40;60]	Retangular
M (kg)	[67;74]	Retangular
α	[20;40]	Retangular
K (N/m)	1,5	Retangular

Para esse caso do Modelo do Bungee Jumping, existem valores estimados na literatura para os coeficientes de sensibilidade para o método FAST e para os métodos Sobol, tanto para coeficientes de primeira ordem (S_i) quanto para ordem total (S_{T_i}). A tabela 3 apresenta os resultados comentados:

Tabela 3: Estimativa dos coeficientes de sensibilidade para o Modelo do Bungee Jumping.

Grandeza	Coefficiente FAST Teórico	Coefficiente Sobol Teórico - 1º Ordem	Coefficiente Sobol Teórico - Ordem Total
H (m)	0,4370	0,4511	0,4538
M (kg)	0,0114	0,0116	0,0115
α	0,5458	0,5610	0,5595

Pode-se observar na tabela 3 que não foram apresentados os coeficientes FAST e Sobol da literatura para a constante elástica da corda (K), pois eles não variam, e portanto, não apresenta valores na literatura, diferente do que acontece para as outras grandezas avaliadas.

Para cálculo dos coeficientes de sensibilidade para o método FAST, utilizou-se o código integrador principal fazendo apelos à objetos que são, nesse caso, às grandezas de entrada da equação 4.1, as quais apresentam os intervalos e a distribuição de probabilidade das grandezas na tabela 2.

Considerando $g = 10m/s^2$, pode-se observar a rotina *mymodel* que relaciona as grandezas:

```
% Definicao do modelo que relaciona as grandezas de entrada com as
% grandezas de saida - Caso Bungee Jumping - FAST

% Grandeza de saida: y
% Grandezas de entrada: x

function [ y ] = mymodel( x )

y=x(1)-2*x(2)*10/(x(3)*x(4));

end
```

Foi assumido 20000 como o número de amostras do projeto.

Com isso, os resultados obtidos pelos códigos desenvolvidos em MATLAB e os apresentados na literatura estão listados na tabela 4, juntamente com as diferenças relativas entre os dois resultados.

Tabela 4: Coeficientes de sensibilidade - Método FAST.

Grandeza	Coefficiente FAST Teórico	Coefficiente FAST Calculado	Diferença Relativa
H (m)	0,4370	0,4305	1,49%
M (kg)	0,0114	0,0115	0,87%
α	0,5458	0,5533	1,37%
K (N/m)	-	0,0002	-

Para aplicação do método de análise de sensibilidade Sobol, conforme dito anteriormente, também foi utilizado códigos computacionais feitos em MATLAB. Para cálculo dos coeficientes de sensibilidade dos modelos, utilizou-se o toolbox citada nesse capítulo voltada para o método Sobol.

O código integrador utilizado para otimizar o toolbox, o qual visa obter os valores dos coeficientes de sensibilidade Sobol de primeira ordem e de ordem total, tem também como objetos as grandezas de entrada da equação 4.1, que apresentam as variações e a distribuição de probabilidade das grandezas na tabela 2.

Posteriormente, inicializa-se o projeto calculando o modelo nos pontos de amostragem. Em vista disso, calcula-se os coeficientes de sensibilidade. Utilizando a função $[S * eS * pro] = GSA_GetSy(pro, [*])$ para cada grandeza de entrada, nesse caso para as 4 grandezas de influência, obtêm-se os coeficientes de sensibilidade de primeira ordem para o método Sobol apresentados na tabela:

Tabela 5: Coeficientes de sensibilidade - Método Sobol de Primeira Ordem.

Grandeza	Coeficiente Sobol Teórico - 1º Ordem	Coeficiente Sobol Calculado - 1º Ordem	Diferença Relativa
H (m)	0,4511	0,4335	3,90%
M (kg)	0,0116	0,0114	1,72%
α	0,5610	0,5547	1,12%
K (N/m)	-	0,0002	-

Na tabela 6 apresenta os resultados obtidos pelo cálculo dos coeficientes de sensibilidade de ordem total utilizando as funções $[Stot* eStot pro] = GSA_GetTotalSy(pro, [*])$ para as quatro grandezas de entrada mostradas na equação 4.1.

Tabela 6: Coeficientes de sensibilidade - Método Sobol de Ordem Total.

Grandeza	Coeficiente Sobol Teórico - Ordem Total	Coeficiente Sobol Calculado - Ordem Total	Diferença Relativa
H (m)	0,4538	0,4330	4,58%
M (kg)	0,0115	0,0108	6,09%
α	0,5595	0,5569	0,46%
K (N/m)	-	0,0002	-

A tabela 7 apresenta os resultados, para todos os métodos de análise de sensibilidade global apresentados nesse capítulo, referentes ao modelo.

Tabela 7: Coeficientes de sensibilidade calculados para o Modelo Bungee Jumping.

Grandeza	Coeficiente FAST Calculado	Coeficiente Sobol Calculado - 1º Ordem	Coeficiente Sobol Calculado - Ordem Total
H (m)	0,4305	0,4335	0,4330
M (kg)	0,0115	0,0114	0,0108
α	0,5533	0,5547	0,5569
K (N/m)	0,0002	0,0002	0,0002

Na tabela 7, apresenta-se de forma resumida, os coeficientes de sensibilidade para os métodos utilizados, levando em conta cada grandeza do modelo. Pode-se perceber que os coeficientes de sensibilidade calculados para a constante elástica da corda (K) são muito pequenos, o que mostra que não há variação dessa grandeza, explicando assim o por que deles não serem apresentados na literatura.

Os coeficientes para a constante elástica (K) foram calculados com a finalidade de mostrar que o método tem êxito, já que ele apresenta um valor muito baixo para o coeficiente, quando o mesmo não tem variação.

A partir dos resultados mencionados nas tabelas 4, 5,6, observando principalmente as porcentagens referentes às diferenças relativas, pode-se afirmar que o código desenvolvido para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade é válido, já que foram obtidos pequena diferença percentual relativa para ambos os métodos de análise de sensibilidade.

4.2 Modelo da Máquina Linear de Medir

Conforme dito anteriormente, além da utilização do toolbox do MATLAB *Global Sensitivity Analysis Tool* (GSAT) para cálculo dos coeficientes de sensibilidade, utilizou-se também esse toolbox para quantificação da incerteza. Essa aplicação teve como estudo o Modelo da Máquina de Medir apresentada na seção 7.4 do livro *Metrologia Mecânica - Expressão da Incerteza de Medição* (LINK, 1999). Com isso, foram comparados os resultados obtidos nas rotinas com os resultados vistos na literatura.

Portanto, propôs-se validar o código desenvolvido para cálculo das incertezas inerentes ao processo de calibração de uma Máquina Linear de Medir, utilizando o toolbox GSAT para cálculo dos coeficientes de sensibilidade para o método FAST clássico. Essa máquina está representada na figura 10.

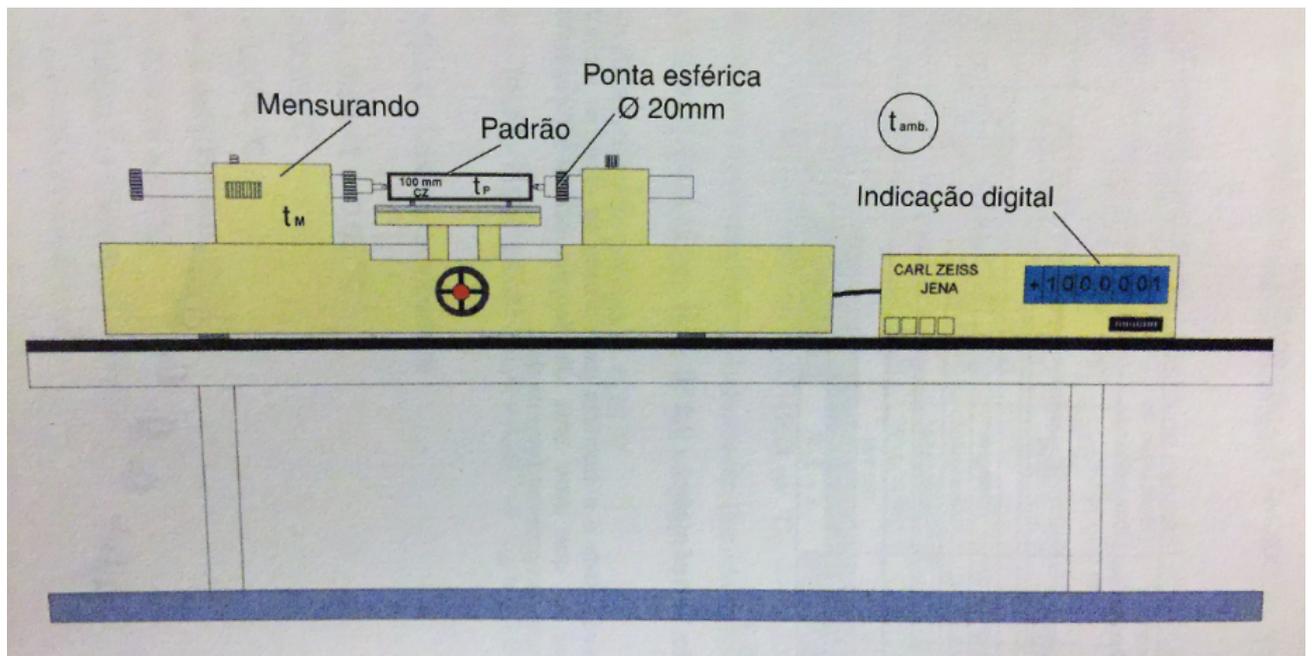


Figura 10: Modelo da Máquina Linear de Medir, (LINK, 1999).

A equação 4.2 apresenta o modelo matemático que descreve o processo de calibração (função de medição):

$$L_m = L_p + \Delta L + \Delta L_d + \Delta \alpha + \Delta(\Delta t) \quad (4.2)$$

Sendo L_m a indicação na Máquina Linear, L_p a dimensão nominal do bloco padrão, ΔL a correção do bloco padrão, ΔL_d a correção associada à resolução do indicador, $\Delta \alpha$ a correção associada à diferença de temperatura (temperatura ambiente e temperatura de referência) e $\Delta(\Delta t)$ a correção devido à diferença de temperatura (temperatura do bloco padrão e temperatura do mensurando).

As estimativas para as grandezas de entrada e suas respectivas incertezas são apresentadas na tabela 8. Além disso, a incerteza da grandeza de saída previamente calculada conforme o ISO GUM, também é apresentada na tabela:

Tabela 8: Incertezas padrão das grandezas de influência do modelo da Máquina de Medir.

Grandeza	Estimativa	Distribuição de Probabilidade	Incerteza padrão
L_p	0,5 mm	Normal	0,043 μm
ΔL	- 0,0001 mm	Normal	0,024 μm
ΔL_d	0	Retangular	0,041 μm
$\Delta \alpha$	0	Retangular	0,000 μm
$\Delta(\Delta t)$	0	Retangular	0,001 μm
L_m	0,4999 mm	-	0,160 μm

Para calcular as incertezas associadas utilizando o método FAST, esse modelo

matemático e as distribuições de probabilidade, mostradas na tabela 8, foram aplicadas.

A rotina *mymodel* para esse caso é dada conforme pode-se observar:

```
% Definicao do modelo que relaciona as grandezas de entrada com as
% grandezas de saida - Caso Máquina Linear de Medir - FAST

% Grandeza de saida :y
% Grandezas de entrada: x

function [ y ] = mymodel( x )

y=x(1)+x(2)+x(3)+x(4)+x(5);

end
```

Para aplicação do método de análise de sensibilidade FAST para o cálculo da incerteza da máquina linear de medir também foi utilizado códigos computacionais feitos em MATLAB. Para cálculo dos coeficientes de sensibilidade dos modelos, utilizou-se a toolbox citada no início do capítulo.

O código integrador principal utilizado para otimizar a toolbox, o qual visa obter a incerteza a partir do cálculo dos coeficientes de sensibilidade FAST, tem como objetos as grandezas de entrada da tabela 8, que apresentam as estimativas, as distribuições de probabilidade das grandezas e as incertezas de cada grandeza. Esses dados apresentados na tabela 8 foram retirados da literatura.

Posteriormente, utiliza-se a função *GSA_SFAST_GetSi* para obter valores dos coeficientes de sensibilidade para todas as grandezas de entrada adicionadas e a incerteza da indicação na máquina. Como para esse modelo, não nos interessa os valores referentes aos coeficientes de sensibilidade, retira-se apenas o valor referente à incerteza da indicação na máquina.

Para o cálculo da incerteza utilizando o toolbox GSAT, em um dos objetos é feito o cálculo da variância total somando os quadrados dos coeficientes de Fourier. A partir disso, é calculada a incerteza, pois ela é dada como o dobro da raiz quadrada da variância total, garantindo com isso que confiabilidade do resultado seja de 95%.

Portanto, o resultado obtido na simulação, usando as rotinas desenvolvidas, para o valor de indicação da máquina L_m foi de $0,4999 \pm 0,0002$ mm. Esse resultado se assemelha bastante com o valor de referência encontrado, e, com o conhecimento à respeito da regra de arredondamento apresentada nas seções 6.1 e 6.2 do livro [Link \(1999\)](#), a qual afirma-se que a incerteza deve ter o mesmo número de casas decimais que o valor medido. Portanto, o valor da incerteza deve conter 4 casas decimais, sendo esse número de casas decimais equivalente às do valor medido. Esse resultado torna válida a hipótese de que o método

FAST pode ser usado para cálculo de incertezas em modelos que não possuem correlação significativa entre as suas grandezas de entrada.

4.3 Modelo do Sistema Vibrante Simples

Neste capítulo um experimento foi realizado na bancada didática desenvolvida no Laboratório de Vibrações da Universidade de Brasília (NETO; ANDRADE, 2006), apresentado na figura 11.

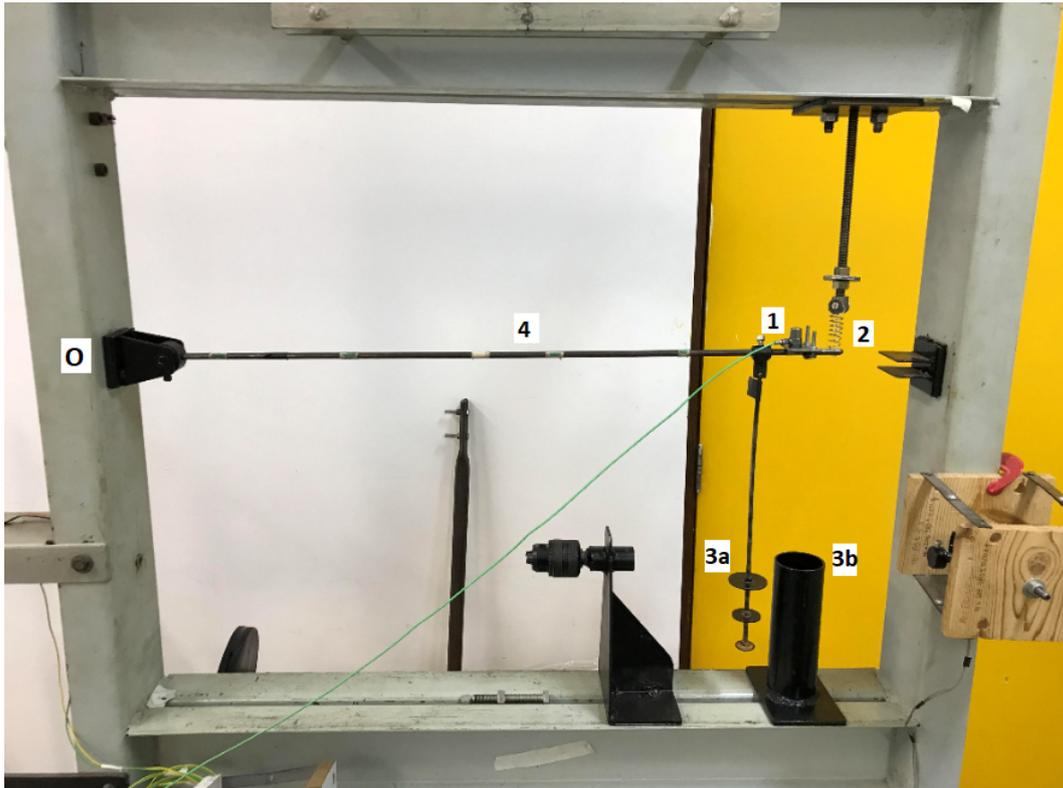


Figura 11: Montagem experimental.

Como pode-se observar, esse experimento se trata de uma barra (4) de seção transversal circular, rotulada em uma das extremidades (O) e suportada por uma mola (2) na outra. Para avaliar a vibração no plano vertical utilizado um acelerômetro (1), apoiado sobre uma pequena placa. Um dispositivo amortecedor é usado para fornecer diferentes condições de amortecimento viscoso ao sistema. Este dispositivo é constituído por uma barra vertical com três discos de diferentes diâmetros (3a) que se movimentam dentro de um recipiente cheio de água (3b).

A variação da quantidade de água dentro do recipiente apresenta quatro condições:

- Sem amortecimento;
- Amortecimento pequeno - apenas um disco mergulhado;

- Amortecimento médio - dois discos mergulhados;
- Amortecimento grande - três discos mergulhados.

Deve-se observar que mesmo quando o dispositivo de amortecimento não é usado, a montagem experimental ainda possui um pequeno amortecimento causado pelo atrito na rótula. Para fins de comparação a barra com os três discos é mantida suspensa na barra principal, mesmo para o caso “sem amortecimento”.

Para aquisição e tratamento dos dados medidos utilizou-se o computador disponibilizado pelo laboratório e desenvolveu-se um instrumento virtual usando o *LabViewTM* e utilizou-se uma placa de aquisição de dados da *National Instruments*. O *LabViewTM* é um ambiente de programação gráfica desenvolvido pela *National Instruments*, que utiliza programação por blocos, onde ícones, ao invés de linhas de texto, são usados para criar sistemas de medição e controle. A placa de aquisição de dados utilizada foi a *NI cDAQ 9174*, juntamente com o módulo de alta velocidade *NI 9234*, sendo ambos da *National Instruments* (figura 12).



Figura 12: Representação das conexões na placa de aquisição e no módulo NI 9234.

A tabela 9 apresenta os instrumentos utilizados na medição das grandezas de entrada do experimento e suas respectivas resoluções.

Tabela 9: Instrumentação utilizada na montagem experimental

Instrumento	Resolução	Grandeza Medida
Acelerômetro PCB Piezotronics Modelo 352C33 Série 128108	0,03 m/s^2	Vibração da barra
Balança digital OHAUS Adventurer	0,1 g	Massa da barra, mola, acelerômetro e amortecedor
Trena	0,5 mm	Comprimento da barra e posição dos componentes (mola, acelerômetro e amortecedor)

O Instrumento Virtual desenvolvido para esse experimento adquire os dados do acelerômetro e os processa, fornecendo como resultado os gráficos de deslocamento pelo tempo e o espectro de frequência do sinal. Para plotar o gráfico de deslocamento, o instrumento virtual integra o sinal da aceleração medido pelo acelerômetro. Para obter o espectro de frequência, o instrumento virtual realiza a Transformada de Fourier do sinal do deslocamento, obtendo assim um gráfico de amplitude por frequência.

Na figura 13 é mostrado o diagrama de blocos desenvolvido no *LabView™*, o qual capta e processa os sinal do deslocamento, e na figura 14 é possível observar o painel frontal do Instrumento Virtual. Esse painel apresenta a média das medições já realizadas, além de plotar os gráficos para análise visual do sinal, à medida que o ensaio está sendo realizado. O número de médias, a taxa de amostragem e a ordem da Transformada Rápida de Fourier (do inglês, *Fast Fourier Transform (FFT)*) podem ser alterados diretamente no painel. Esses fatores influenciam na qualidade do sinal lido e na quantidade de itens que são lidos a cada amostragem. É importante observar que uma maior quantidade de médias, uma taxa de amostragem alta e uma FFT de ordem maior implicam em um sinal com maior qualidade, porém, requerem um trabalho computacional maior. Portanto, um comprometimento entre esses fatores deve ser considerado de forma a obter um sinal com qualidade desejável sem que o processamento seja muito lento.

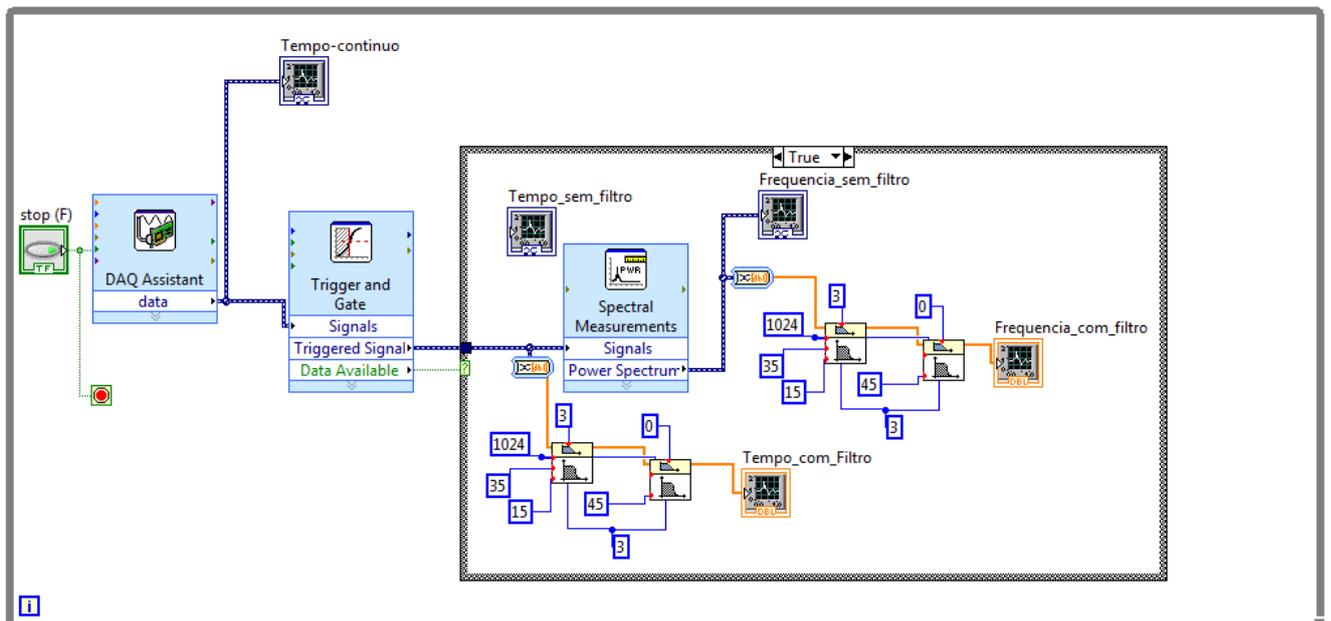


Figura 13: Diagrama de blocos desenvolvido no *LabView™*.

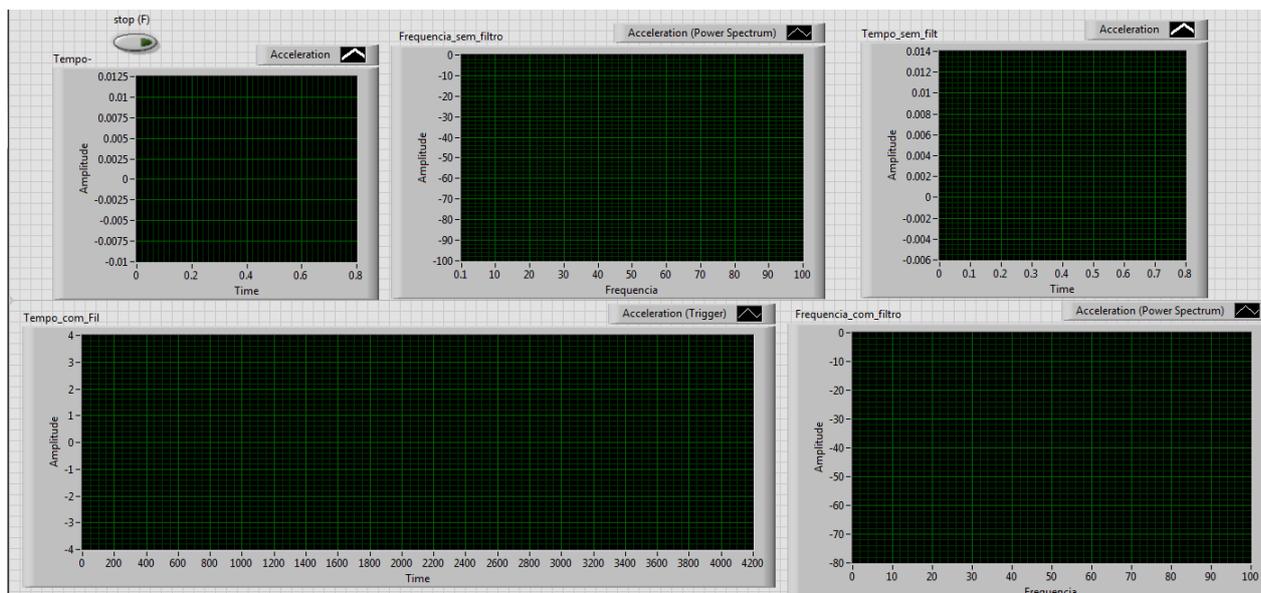


Figura 14: Painel frontal do Instrumento Virtual.

4.3.0.1 Resultados Experimentais

O experimento, comentado anteriormente, se trata de uma barra rotulada em uma de suas extremidades e suportada por uma mola na outra extremidade. Essa recebe um forçamento livre, na extremidade suportada pela mola, e inicia o processo de vibração livre amortecida da barra.

Os ensaios experimentais realizados não desprezam o amortecimento, diferentemente da abordagem analítica, feita posteriormente, a qual não leva em consideração o amortecimento existente no sistema. São considerados 4 níveis de amortecimento, devido a utilização do dispositivo composto pela barra vertical com discos e o recipiente. A partir da vibração da barra e desse amortecimento, pode-se identificar a frequência natural e o amortecimento viscoso do sistema.

Portanto, a partir da vibração da barra, o *LabViewTM* capta e processa o sinal do deslocamento da mesma, gerando gráficos no painel frontal do Instrumento Virtual, apresentado na figura 14. Esse apresenta gráficos de Amplitude por Tempo e Amplitude por Frequência.

Os resultados obtidos a partir do gráfico de Amplitude por Tempo para cada nível, são analisados a partir da metodologia do Decremento Logarítmico, que é a taxa de redução logarítmica, relacionada com a redução do movimento após o impulso, devido a energia ser transferida para outras partes do sistema ou ser absorvida pelo próprio elemento (FÍSICA, 2010).

Conforme pode-se observar na figura 15, quando um sistema oscilatório com um grau de liberdade, com amortecimento viscoso é excitado por um impulso, sua resposta

vem na forma de decaimento no tempo.

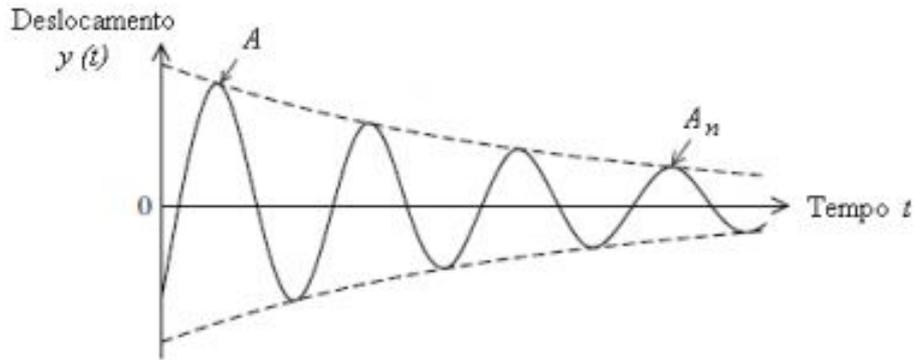


Figura 15: Decremento Logarítmico.

A equação que apresenta essa resposta na forma de decaimento no tempo é:

$$y(t) = ye^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (4.3)$$

A equação 4.4 apresenta a relação entre a resposta no tempo $t = t_n$, denotado por y , e a resposta no tempo $t = t_n + 2\pi r/\omega_d$, indicado por y_n .

$$\frac{y_n}{y} = \exp\left(-\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} 2\pi r\right) \quad (4.4)$$

onde n pertence ao conjunto dos inteiros não negativos.

Supondo que y corresponde a um ponto no decaimento da função com magnitude igual a A , e que y_n corresponde ao pico, r ciclos mais tarde, com magnitude A_n . Assim substituindo o valor da frequência amortecida (equação 4.5), tem-se que:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{A_n}{A} = \exp\left(-\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} 2\pi r\right) = \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} 2\pi r\right) \quad (4.6)$$

Assim, o decremento logarítmico (δ) é obtido pela equação 4.7:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{A}{A_n}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.7)$$

Em termos do amortecimento (ξ), tem-se:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\delta)^2}} \quad (4.8)$$

Então foram feitos gráficos experimentais de amplitude por tempo e esses foram analisados utilizando a metodologia do decaimento logarítmico. Para cada nível de água no recipiente (amortecimento) tem-se um gráfico, os quais foram lidos também no MATLAB. As figuras 16, 17, 18 e 19 apresentam os gráficos obtidos nos ensaios para os quatro níveis.

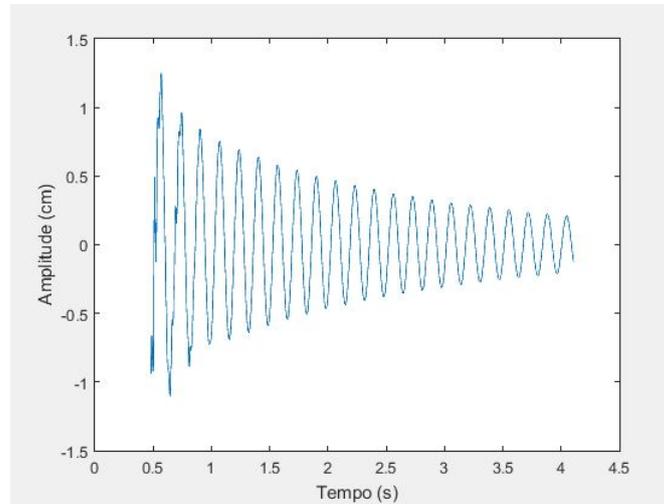


Figura 16: Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 0.

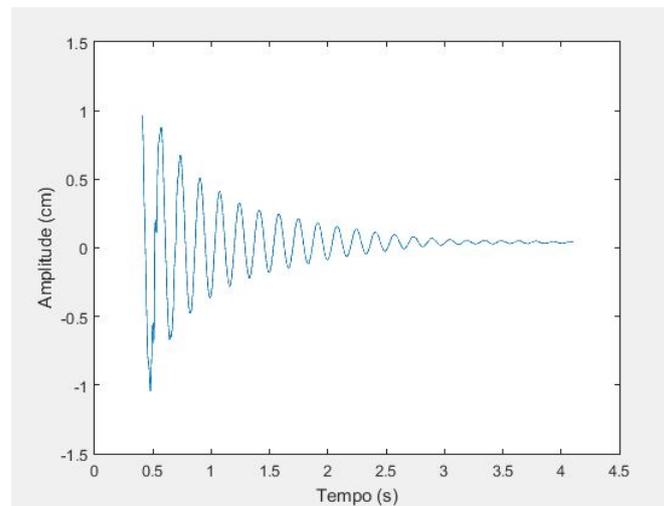


Figura 17: Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 1.

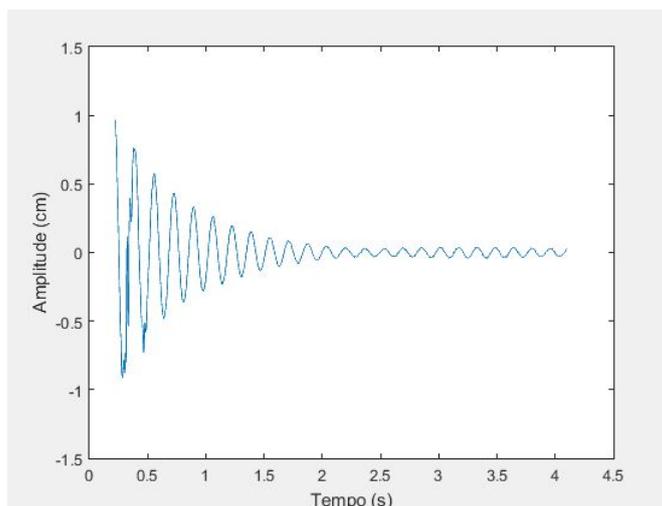


Figura 18: Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 2.

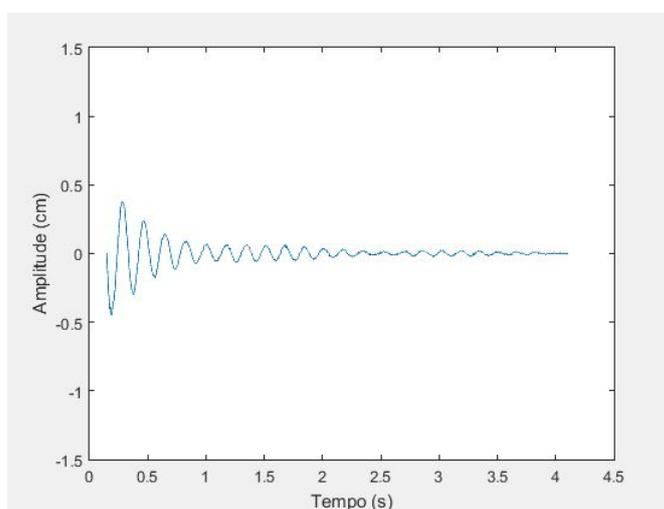


Figura 19: Gráfico de Amplitude por Tempo para o nível 3.

A partir dos gráficos apresentados, aplicou-se a metodologia do decremento logarítmico, e foram obtidos os resultados apresentados na tabela 10:

Tabela 10: Resultados obtidos pelo método do decremento logarítmico.

	Frequência natural amortecida (ω_d)	Frequência natural (ω_n)	Amortecimento (ξ)
Nível 0	5,3624 Hz	5,3668 Hz	0,0406
Nível 1	5,3627 Hz	5,3674 Hz	0,0420
Nível 2	5,3633 Hz	5,3686 Hz	0,0445
Nível 3	5,3737 Hz	5,3894 Hz	0,0764

4.3.1 Modelo Matemático do Sistema Vibrante

O modelo matemático do experimento relaciona a vibração transversal da barra, levando em consideração deslocamento e frequência, com a massa, rigidez e amortecimento da montagem experimental.

Assim o sistema esquematizado na figura 20 foi modelado usando parâmetros concentrados, resultando em um único elemento de massa com um grau de liberdade na direção vertical, mostrado na figura 21. A origem do sistema de coordenadas é o ponto 1 da figura 20, onde está posicionado o acelerômetro, de modo que as comparações entre os resultados analítico e experimental consideram o mesmo ponto de referência.

São considerados os efeitos inerciais do acelerômetro (m_a), do amortecedor (m_c), da mola (m_k) e da barra (m_b). As distâncias entre as respectivas massas e o eixo de rotação (O) estão ilustradas na figura 20. Tanto o comprimento da barra, quanto a distância da extremidade livre ao eixo de rotação, têm o mesmo valor, indicado como “L”, na figura 20.

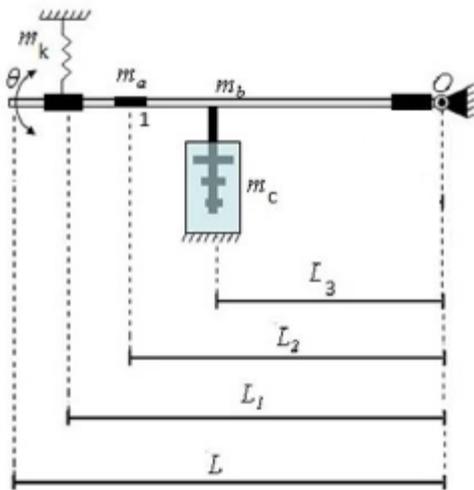


Figura 20: Diagrama da modelagem.

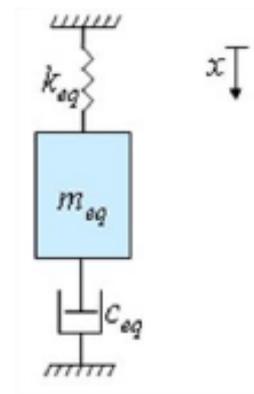


Figura 21: Modelo matemático.

A modelagem matemática do sistema é feita aplicando-se a segunda Lei de Newton para encontrar a equação do movimento, além das equações da energia cinética e potencial de deformação para determinar a massa e a rigidez equivalentes (COCHIN; CADWALLENDER, 1997).

O modelo matemático do sistema pode ser utilizado para calcular a frequência natural do sistema e a propagação da incerteza de medição. De modo a avaliar quais componentes do modelo influenciam, significativamente, na dinâmica do sistema. Realizou-se uma análise de sensibilidade considerando os diferentes elementos da montagem experimental.

Os valores das massas dos componentes apresentados no diagrama, bem como dos

comprimentos das distâncias correspondentes, foram determinados experimentalmente e estão indicados na tabela 11.

Tabela 11: Grandezas de entrada do modelo do Sistema Vibrante Simples.

Componente	Massa (kg)	Distância	Comprimento (m)
Barra (m_b)	0,164	L	0,6640
Mola (m_k)	0,002	L_1	0,6550
Acelerômetro (m_a)	0,074	L_2	0,6340
Amortecedor (m_c)	0,098	L_3	0,6170

Sabe-se que a equação do movimento para um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade, como mostrado na figura 21, é dada por:

$$m_{eq}\ddot{x}(t) + c_{eq}\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = F(t) \quad (4.9)$$

sendo a massa equivalente (m_{eq}), a rigidez equivalente (k_{eq}), o amortecimento equivalente (c_{eq}) a força de excitação ($F(t)$) grandezas da montagem experimental utilizada. Sabe-se que a força de excitação é dependente do tempo (t), assim como o deslocamento ($x(t)$). Nesse caso, considera-se o sistema em vibração livre, com isso o forçamento é nulo ($F(t) = 0$).

Da solução da equação diferencial (4.9) são definidas a frequência natural do sistema (ω_n), relacionando a massa equivalente e a rigidez equivalente, e, devido à presença de amortecimento, a frequência natural amortecida (ω_d) (COCHIN; CADWALLENDER, 1997):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}, \quad (4.10)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.11)$$

onde ξ é o fator de amortecimento.

A partir das equações apresentadas, é definida a função harmônica com decaimento para o movimento de um sistema com pequeno amortecimento:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (4.12)$$

sendo a amplitude do deslocamento (A) e a fase do movimento (ϕ) as grandezas da função.

Além disso, define-se o valor do fator de amortecimento, de forma experimental, considerando a diferença de amplitude (a) entre dois picos do gráfico de deslocamento pelo tempo. Considerando a amplitude no n -ésimo pico (X_n) do gráfico de deslocamentos, tem-se:

$$\frac{X_1}{X_n} = \frac{Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi)}{Ae^{-\xi\omega_n(t + \frac{2i\pi}{\omega_d})} \cos(\omega_d t + \phi)} = e^{\xi\omega_n(\frac{2i\pi}{\omega_d})} \quad (4.13)$$

Sendo a amplitude (a) definida como o logaritmo natural da equação 4.13:

$$a = \ln\left(\frac{X_1}{X_n}\right) = \ln\left(e^{\xi\omega_n(\frac{2i\pi}{\omega_d})}\right) = \xi\omega_n\left(\frac{2i\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (4.14)$$

Portanto, pode-se afirmar que se $\xi \ll 1$, então, tem-se $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$ e o valor do fator de amortecimento é:

$$\xi \approx \frac{a}{2j\pi} \quad (4.15)$$

sendo j maior do que 1.

A massa equivalente da montagem experimental foi calculada considerando que todos os elementos fixados à barra, se movimentam em torno da rótula (O) com uma mesma velocidade angular (θ), visto que a barra é rígida. Assim, considerando todos os elementos e tomando como referência o ponto 1 da figura 11, onde está localizado o acelerômetro, a energia cinética do sistema equivalente (EC_{eq}) é dada pela soma da energia cinética de cada componente e a energia cinética da própria barra (COCHIN; CADWALLENDER, 1997):

$$EC_{eq} = \frac{1}{2}(m_c V_c^2 + m_a V_a^2 + m_k V_k^2 + I_b \dot{\theta}^2) \quad (4.16)$$

sendo a velocidade equivalente (V_{eq}), a velocidade do sistema de amortecimento (V_c), a velocidade do acelerômetro (V_a), a velocidade da mola (V_k), o momento de inércia da barra (I_b) e a velocidade angular da barra (θ) as grandezas da equação 4.16.

Deve-se observar que essa velocidade é a velocidade tangencial do conjunto no ponto do elemento considerado. Com a hipótese de pequenos deslocamentos pode-se considerar:

$$\dot{\theta} = \frac{V_{eq}}{L_2} = \frac{V_k}{L_1} = \frac{V_a}{L_2} = \frac{V_c}{L_3} \quad (4.17)$$

Segundo Cochín e Cadwallender (1997), o momento de inércia de uma barra cilíndrica em relação ao seu centro de massa (localizado em $L/2$) corresponde a um terço do produto de sua massa pelo seu comprimento, e apenas um terço da massa real de uma mola causa efeitos inerciais no sistema. Então, a partir dos valores das massas da barra (m_b) e da mola (m_k), podemos obter os valores do momento de inércia da barra (I_b) e a massa real da mola (M_k), conforme pode-se observar nas equações:

$$I_b = \frac{1}{3}m_b L^2, \quad (4.18)$$

$$M_k = \frac{1}{3}m_k \quad (4.19)$$

A partir das definições feitas nesse capítulo, pode-se determinar a massa equivalente como:

$$m_{eq} = m_c \left(\frac{L_3}{L_2}\right)^2 + m_a + \frac{1}{3}m_k \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \frac{1}{3}m_b \left(\frac{L}{L_2}\right)^2 \quad (4.20)$$

Substituindo os valores da tabela 11 na equação 4.20, obtemos o valor de 0,2275 kg para a massa equivalente. Esse valor foi tomado como referência para outras aplicações.

O cálculo da rigidez equivalente é feito a partir da consideração da energia potencial de deformação do sistema. Algumas considerações foram feitas, como: a barra rígida, o único componente com energia potencial de deformação é a mola, com rigidez “k”, fixada a uma distância “ L_1 ” da rótula. Então, basta calcular o efeito da mola na posição de referência (onde está fixado o acelerômetro, indicado por “ L_2 ”). Assim a rigidez equivalente “ k_{eq} ” é dada por:

$$k_{eq} = k \left(\frac{L_1}{L_2}\right) \quad (4.21)$$

Sabe-se que a constante elástica da mola (k) foi determinada experimentalmente, aplicando-se a Lei de Hooke, em um ensaio estático onde massas conhecidas foram penduradas à mola e o correspondente alongamento dessa foi medido. As massas foram medidas em uma balança digital com resolução de 1g (incerteza de $\pm 10^{-3}$ kg) e o alongamento da mola foi medido usando um graminho com nônio e incerteza de $\pm 10^{-5}$ m. Assim a rigidez da mola utilizada era de 245,1333N/m com incerteza (obtida usando o procedimento do INMETRO (2003)) de $\pm 10^{-3}$ N/m.

4.3.1.1 Cálculo de Incerteza de Medição - ISO GUM

Utilizando a metodologia do ISO GUM, foi feito o cálculo da incerteza da frequência natural.

Primeiramente, calculou-se a incerteza da massa equivalente. Para isso, foi feita avaliação Tipo A da incerteza relacionando a equação 4.20 e a equação 3.2. Sabendo que a incerteza analisada pela avaliação Tipo B é proveniente da resolução do instrumento de medição, considera-se, em conformidade com o INMETRO (2003), uma distribuição de probabilidade retangular (JCGM, 2008a):

$$u(y) = \sqrt{\frac{(a_+ - a_-)^2}{12}} \quad (4.22)$$

onde “ a_+ ” é o extremo máximo do intervalo de resolução e “ a_- ” o extremo mínimo.

A incerteza padrão é obtida a partir da equação (JCGM, 2008a):

$$u_c(y)^2 = u_{ca}(y)^2 + u_{cb}(y)^2 \quad (4.23)$$

Para encontrar o valor do grau de liberdade (v_{eff}) total, deve-se considerar que as contribuições para a incerteza padrão (u_c) são obtidas de duas formas individualizadas: avaliação tipo A da incerteza (u_{ca}) e avaliação tipo B da incerteza (u_{cb}). A equação 3.6, determina o grau de liberdade total.

A tabela 12 apresenta os valores da estimativa das grandezas, com suas respectivas avaliações tipo A e tipo B da Incerteza, bem como a incerteza padrão.

Tabela 12: Resultados experimentais e incertezas.

Grandeza de entrada	Estimativa da grandeza de entrada	Avaliação Tipo A da Incerteza	Avaliação Tipo B da Incerteza	Incerteza Padrão
m_a	0,074 kg	2.10^{-5} kg	6.10^{-4} kg	6.10^{-4} kg
m_c	0,098 kg	6.10^{-6} kg	6.10^{-4} kg	6.10^{-4} kg
m_k	0,002 kg	1.10^{-5} kg	6.10^{-4} kg	6.10^{-4} kg
m_b	0,164 kg	6.10^{-4} kg	6.10^{-4} kg	6.10^{-4} kg
L	0,664 m	2.10^{-4} m	3.10^{-4} m	3.10^{-4} m
L_1	0,655 m	2.10^{-4} m	3.10^{-4} m	3.10^{-4} m
L_2	0,634 m	2.10^{-4} m	3.10^{-4} m	3.10^{-4} m
L_3	0,617 m	2.10^{-4} m	3.10^{-4} m	3.10^{-4} m

Com os valores da tabela 12, pode-se calcular a estimativa da massa equivalente, utilizando a equação 4.20, e sua incerteza combinada, usando a equação 3.3.

A partir da equação 3.6, obtêm-se o número de graus de liberdade, que nesse caso é maior do que 100, sendo considerado ∞ . Conforme visto no Capítulo 3, o fator de abrangência é determinado usando a tabela T-Student, e portanto, para um intervalo de confiança de 95%, tem-se um fator de abrangência de 1,96. Calculou-se, posteriormente, a incerteza expandida, utilizando a equação 3.5.

Assim, a massa equivalente obtida foi:

$$m_{eq} = (227 \pm 3).10^{-3}kg \quad (4.24)$$

Para determinar a incerteza da rigidez equivalente do sistema faz-se necessária a determinação da constante da mola (k) usada.

É realizado o mesmo processo feito para a massa equivalente, aplicando a metodologia ISO GUM, porém tem-se como equação governante a equação 4.21, a qual é a equação da rigidez equivalente. Para esse caso, o número de graus de liberdade é igual a 1, e portanto, para um intervalo de confiança de 95%, tem-se um fator de abrangência igual a 12,71. A partir disso, obtêm-se a incerteza expandida, e a rigidez equivalente é dada por:

$$k_{eq} = 261,6414 \pm 0,0047N/m \quad (4.25)$$

Para obtenção da frequência natural do sistema (ω_n) e da sua incerteza, primeiramente, define-se a frequência natural como:

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (4.26)$$

A melhor estimativa para a frequência natural pode ser definida substituindo os melhores valores da massa equivalente e da rigidez equivalente na equação 4.26. Portanto a melhor estimativa é 5,3975 Hz.

Calcula-se a incerteza padrão da frequência natural a partir do desenvolvimento de Taylor da equação 4.26, considerando " ω_n " a grandeza de saída " y " (mensurando), e sendo " k_{eq} " e " m_{eq} " as grandezas de entrada " x_i ", sendo essas grandezas de entrada não relacionadas entre si (ROBBI et al., 2015). Para isso, determina-se as primeiras derivadas parciais da frequência natural com relação à massa e a rigidez equivalente:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial k_{eq}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{k_{eq} m_{eq}}} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial m_{eq}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2m_{eq}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (4.28)$$

Com isso, aplicando a equação 3.3, tem-se:

$$u(\omega_n) = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial k_{eq}}\right)^2 \cdot (u(k_{eq}))^2 + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial m_{eq}}\right)^2 \cdot (u(m_{eq}))^2\right]} \quad (4.29)$$

$$u(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{k_{eq} m_{eq}}}\right)^2 \cdot (u(k_{eq}))^2 - \left(\frac{1}{2m_{eq}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}\right)^2 \cdot (u(m_{eq}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

Substituindo os valores determinados para massa equivalente, rigidez equivalente e suas respectivas incerteza na equação 4.30, pode-se obter a incerteza combinada da frequência natural:

$$u(\omega_n) = 0,0014Hz \quad (4.31)$$

Sabe-se que o grau de liberdade efetivo da frequência natural analítica (ω_n) é igual a 1, sendo esse calculado pela equação 3.6, e consultando a tabela t-Student, obtêm-se um fator de abrangência igual a 12,71. Portanto a incerteza expandida da frequência natural analítica será 0,0183 Hz.

Com isso, o valor da frequência natural (ω_n) deve ser expresso, segundo a metodologia do ISO GUM, como:

$$\omega_n = 5,40 \pm 0,02Hz \quad (4.32)$$

4.3.1.2 Cálculo de Incerteza usando o método FAST

Utilizando a metodologia FAST, fez-se o cálculo da incerteza da frequência natural.

A tabela 13 apresenta as grandezas de entradas do sistema:

Tabela 13: Grandezas de entrada do Sistema Vibrante Simples.

Grandeza	Estimativa	Distribuição de Probabilidade	Incerteza padrão
K_{eq} (N/m)	261,641	Retangular	0,0047
M_{eq} (kg)	0,227	Retangular	0,003

Tem-se como finalidade a verificação da aplicabilidade da análise de sensibilidade global para determinar a incerteza de medição usando o método FAST. Para isso utilizou-se a mesma rotina de MATLAB aplicada no Modelo da Máquina Linear de Medir.

Portanto, utiliza-se a mesma função *GSA_SFAST_GetSi* para obter valores dos coeficientes de sensibilidade para todas as grandezas de entrada adicionadas e a incerteza da frequência natural.

Conforme feito para o modelo da Máquina Linear de Medir, para o cálculo da incerteza da frequência natural utiliza-se a toolbox GSAT que calcula a variância total somando os quadrados dos coeficientes de Fourier, a partir de classes de dados, ou também chamadas de objetos. A partir disso, é calculada a incerteza, pois ela é dada como o dobro da raiz quadrada da variância total, levando a uma confiabilidade de 95%.

No código principal pode-se notar que na adição de grandezas de entrada na classe de dados, a variação das mesmas corresponde ao intervalo de incerteza das grandezas de entrada e a distribuição utilizada foi a retangular, conforme mostra a tabela 13.

A função *pro_SetModel* define a relação entre as grandezas de entrada e as grandezas de saída para o modelo apresentado, conforme pode-se observar:

```
% Definicao do modelo que relaciona as grandezas de entrada com as
% grandezas de saida - Caso Sistema Vibrante Simples

% Grandeza de saida :y
% Grandezas de entrada: x

function [ y ] = mymodel( x )
```

```
y=(1/(2*pi))*sqrt(x(1)/x(2));
```

```
end
```

O resultado obtido a partir da rotina para a frequência natural do sistema vibrante simples é de $5,4034 \pm 0,0412$ Hz.

Os coeficientes de sensibilidade para o método FAST são apresentados na tabela:

Tabela 14: Coeficientes de Sensibilidade calculados para o modelo Vibrante Simples.

Grandeza	Coefficiente de Sensibilidade FAST
K_{eq} (N/m)	0,0040
M_{eq} (kg)	0,9925

A partir dos valores obtidos na tabela 14 pode-se afirmar que é mais aconselhável um esforço maior na medição da massa equivalente para diminuir a incerteza da frequência natural.

4.3.1.3 Cálculo de Incerteza usando o método de Monte Carlo

Utilizando a metodologia apresentada no Suplemento 1 do ISO GUM, foi feito o cálculo da incerteza da frequência natural.

Couto (2008) apresenta as principais etapas para aplicação da metodologia. Sabe-se que os três primeiros passos, definição do mensurando, elaboração do diagrama causa-efeito e estimativas das incertezas das fontes de entrada, que são apresentados, são idênticas às mostradas na metodologia de cálculo do ISO GUM. Sendo o mensurando, a frequência natural (ω_n), definida pela equação 4.26. O diagrama causa-efeito apresenta as fontes, que são a repetição de leitura e os certificados de calibração da balança e da trena, que definem a incerteza de medição da frequência natural (ω_n), dada pelo desvio padrão dessa. E as estimativas das incertezas das grandezas de entrada estão apresentadas na tabela 12.

A quarta etapa se trata da identificação das PDFs, correspondentes a cada grandeza de entrada, sendo nesse caso Uniforme. Posteriormente, define-se o número de iterações de Monte Carlo, como 10^6 , que é um número escolhido em geral, para uma probabilidade de abrangência de 95%. Para obter-se resultados aceitáveis, o JCGM (2008a) recomenda um número 10^4 vezes maior que $1/(1 - p)$, sendo p o nível da confiança escolhido.

Com base na equação 4.26, calcula-se o mensurando, a partir de cada número aleatório gerado no intervalo da PDF definida da grandeza de entrada. Sendo que a equação utilizada no MATLAB para gerar esse número aleatório para as grandezas de entradas é dado por:

$$X_i = x_i - u(x_i) + ((x_i + u(x_i)) - (x_i + u(x_i)) - (x_i - u(x_i))) * rand(1, 10^6) \quad (4.33)$$

Portanto, utilizando essa metodologia obtêm-se os valores do mensurando, podendo realizar assim o cálculo da média e do desvio padrão, que é a incerteza padrão do mensurando, conforme pode-se observar na tabela 15. Por último, calcula-se a incerteza expandida para uma probabilidade de abrangência de 95%, gerando o resultado apresentado também na tabela 15.

Tabela 15: Tabela dos resultados utilizando MCM

Grandeza de saída	Melhor estimativa do mensurando	Incerteza Padrão	Incerteza Expandida
Frequência natural (ω_n)	5,3974 Hz	0.0107	0.0209

4.4 Caracterização experimental do número de onda

4.4.1 Viga de poliamida

Nesse capítulo foram aplicadas as metodologias desenvolvidas para cálculo de incerteza, utilizando como base o projeto *Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais* (MATOS, 2018), tendo como foco a identificação do número de onda via Função Resposta em Frequência (FRF). Esse experimento é composto por um acelerômetro (3), o qual capta a resposta do sistema a partir da placa de aquisição (4), e por um martelo de impacto (1), o qual excita a estrutura (2), conforme pode-se observar na figura 36.

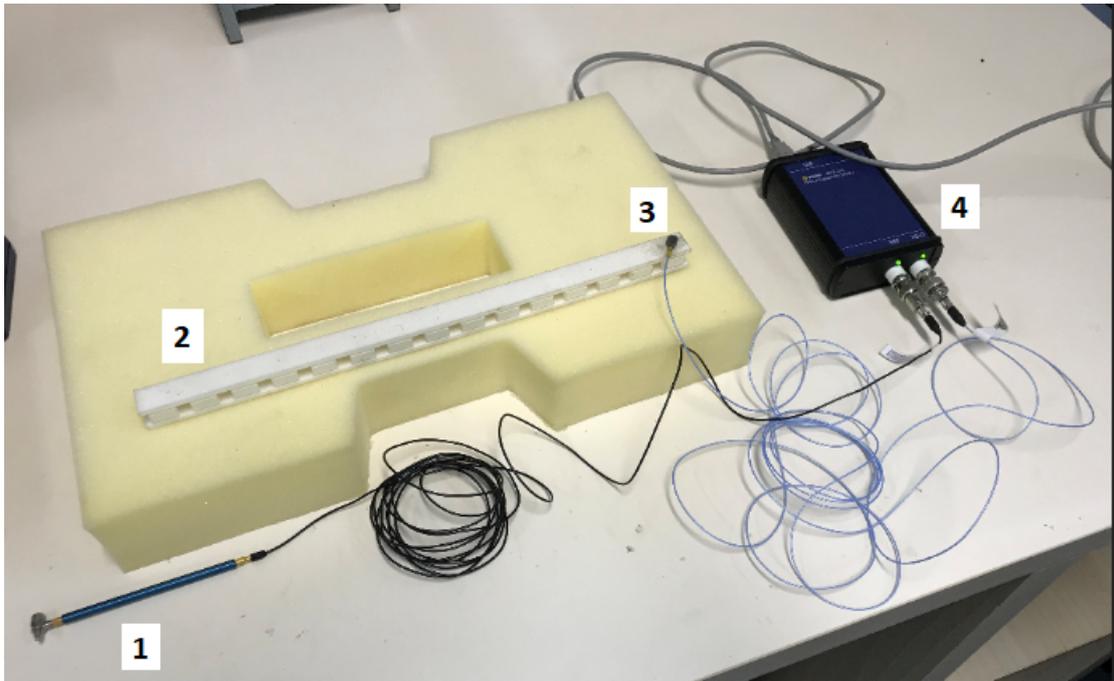


Figura 22: Experimento em metamaterial.

Para realização do experimento, baseou-se em [Hinke, Mace e Brennan \(2004\)](#), que partem da equação da onda geral (equação 4.34), desconsiderando as ondas evanescentes e considerando três pontos igualmente espaçados $x_1 = -d$, $x_2 = 0$ e $x_3 = d$, como pode-se observar na figura 23. Onde a onda $u(x, t)$, função do tempo t e da posição ao longo da viga x é dada por:

$$u(x, t) = (a^+ e^{-ikx} + a^- e^{ikx}) e^{i\omega t} \quad (4.34)$$

Sendo a^+ a amplitude na direção positiva da onda de propagação, a^- a amplitude na direção negativa da onda de propagação, k o número de onda e ω a frequência natural.

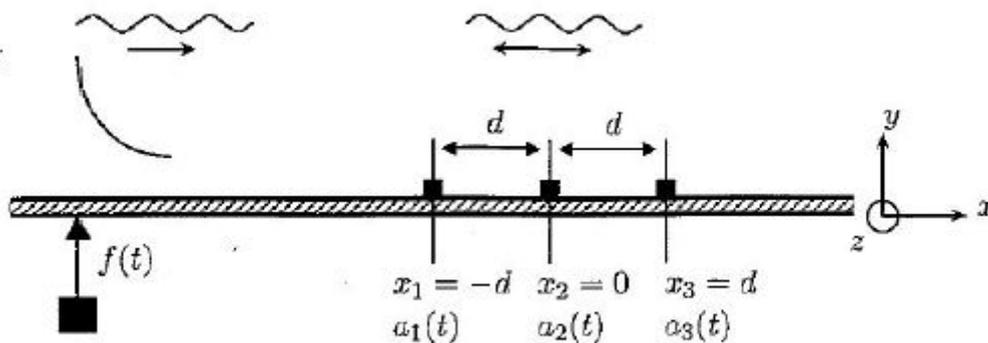


Figura 23: Montagem do experimento. (HINKE; MACE; BRENNAN, 2004)

Tem-se os deslocamentos em cada um desses pontos dados por:

$$u_1(t) = (a^+ e^{ikd} + a^- e^{-ikd}) e^{i\omega t} \quad (4.35)$$

$$u_2(t) = (a^+ + a^-) e^{i\omega t} \quad (4.36)$$

$$u_3(t) = (a^+ e^{-ikd} + a^- e^{ikd}) e^{i\omega t} \quad (4.37)$$

A viga é então sujeita à um forçamento. Após a obtenção das FRFs (*Função Resposta em Frequência*) nos três pontos, dadas por A_1 , A_2 e A_3 , chega-se à seguinte equação:

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = \frac{a^+ e^{ikd} + a^- e^{-ikd} + a^+ e^{-ikd} + a^- e^{ikd}}{a^+ + a^-} \quad (4.38)$$

Sendo d a distância entre os pontos a_1 , a_2 e a_3 .

Sabe-se que a FFT (do inglês, *fast Fourier transform*) transforma uma função do domínio no tempo, para o domínio na frequência. Para o caso em questão, aplica-se a FFT na aceleração e no forçamento, estando ambos no domínio do tempo. Com isso, tanto a aceleração quanto o forçamento passam a estar no domínio da frequência, e a partir da divisão entre a FFT da aceleração e a FFT do forçamento para cada amostra, gera-se FRFs nos pontos a_1 , a_2 e a_3 , sendo essas FRFs A_1 , A_2 e A_3 .

Simplificando a equação 4.38 e utilizando a relação de Euler, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2} = e^{ikd} + e^{-ikd} = 2\cos(k)d \quad (4.39)$$

A equação 4.41 do número de onda a partir das respostas em frequência e da distância entre os pontos de medição, utiliza uma relação entre A_1 , A_2 e A_3 , dada pela equação 4.40:

$$r = \frac{A_1 + A_3}{2A_2} \quad (4.40)$$

$$k = \frac{\arccos(r)}{d} \quad (4.41)$$

Portanto, foram realizadas três batidas com o martelo em pontos equidistantes, obtendo assim três respostas para cada um dos pontos. Essas respostas são funções da aceleração e do forçamento no tempo.

A tabela 16 apresenta os instrumentos utilizados na medição das grandezas de entrada do experimento e suas respectivas resoluções. Sabe-se que para medir forças diretamente da deformação causada pelo martelo de impacto, não é necessário um dinamômetro

ou algum instrumento que meça força, pois o martelo de impacto possui uma célula de carga embutida para fazer a leitura.

Tabela 16: Instrumentação utilizada na montagem experimental.

Instrumento	Resolução	Grandeza Medida
Acelerômetro PCB Piezotronics Modelo 352A21	0,04 m/s^2	Vibração da viga
Martelo Piezoelétrico Modelo 086E80	200 mN	Forçamento realizado na viga
Trena	0,0005 m	Comprimento da viga

A viga de poliamida, classificada como metamaterial devido à distribuição de ressonadores ao longo da mesma, possui comprimento de 330 mm, variando os pontos de 22 mm em 22 mm, começando pelo ponto 11 mm e finalizando no ponto 319 mm. Para a análise em questão foram pegos os pontos 209 mm, 253 mm e 297 mm, sendo, portanto, com espaçamento de $d = 44$ mm (MATOS, 2018).

4.4.1.1 Aplicação do método ISO GUM

Para cálculo de incerteza utilizando a metodologia tradicional apresentada no ISO GUM (JCGM, 2008a), foram lidos valores para aceleração e forçamento, em um determinado tempo. Conforme dito anteriormente, para cada ponto, com espaçamento de 44 mm, da viga, foram geradas funções da aceleração e do forçamento no tempo. Para os pontos 209 mm, 253 mm e 297 mm foram lidos os 1.000 primeiros valores dos vetores da aceleração, do forçamento e do tempo.

A tabela 17 apresenta a incerteza analisada pela avaliação do Tipo B, gerada a partir da resolução do instrumento de medição, dada pela equação 4.22.

Tabela 17: Incertezas analisadas pela avaliação Tipo B

Instrumento	Avaliação Tipo B da Incerteza
Acelerômetro	0,0173 m/s^2
Martelo de impacto	0.1155 N

Esses valores das avaliações das incertezas do Tipo B podem ser consideradas as incertezas padrão relacionada à cada instrumento de medição utilizado no experimento. Já que a incerteza do tipo A apresenta valores insignificantes no cálculo da incerteza combinada.

O número de onda, geralmente se apresenta no domínio da frequência, e portanto, deve-se converter o vetor do tempo para vetor da frequência, através das relações apresen-

tadas nas equações da maior frequência da função (equação 4.42) e a da distância entre as frequências (equação 4.43):

$$f_s = \frac{1}{dt} \quad (4.42)$$

sendo dt o intervalo entre dois tempos consecutivos.

$$df = \frac{1}{t_s} \quad (4.43)$$

sendo t_s o último tempo apresentado no vetor.

Conforme dito anteriormente, foram pegos os 1.000 primeiros valores dos vetores da aceleração, do forçamento e do tempo, e foi feita uma média entre os três vetores gerados pelas três batidas realizadas na viga. Sabe-se que cada vetor possui mais de 15.000 valores e que são pegos parte desses. O problema em utilizar apenas parte desses valores apresentados no vetor, é o fato de que o período (df) em questão, seria bem menor do que se fossem lido o vetor por completo, podendo portanto, ter uma discretização muito grande, influenciando nos números de onda apresentados.

Como resultados, as figuras 24, 26 e 28 apresentam as amplitudes das FRFs medidas nos pontos a_1 , a_2 e a_3 , respectivamente:

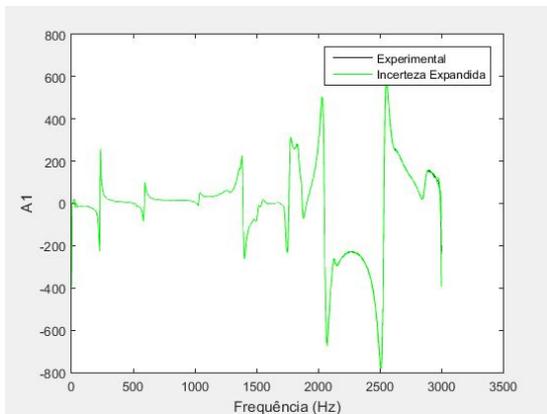


Figura 24: Gráfico do ponto a_1 no domínio da frequência.

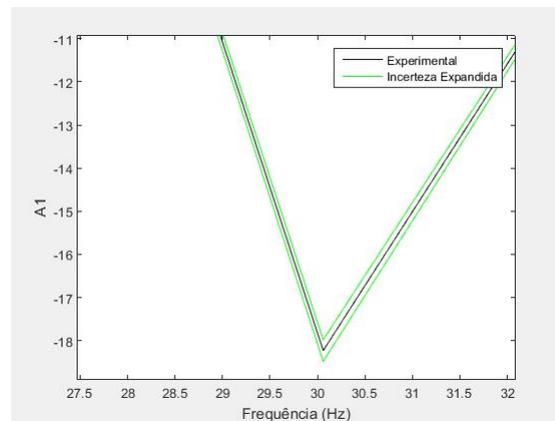


Figura 25: Aproximação da curva do ponto a_1 no domínio da frequência.

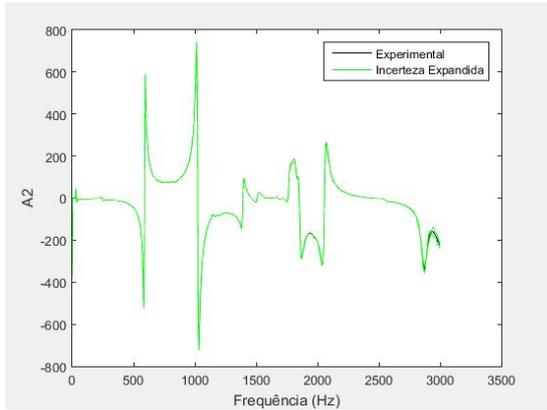


Figura 26: Gráfico do ponto a_2 no domínio da frequência.

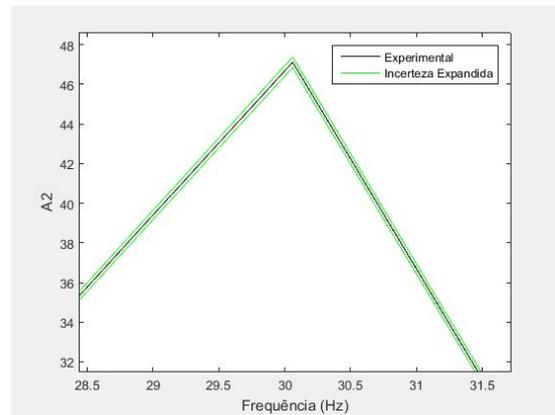


Figura 27: Aproximação da curva do ponto a_2 no domínio da frequência.

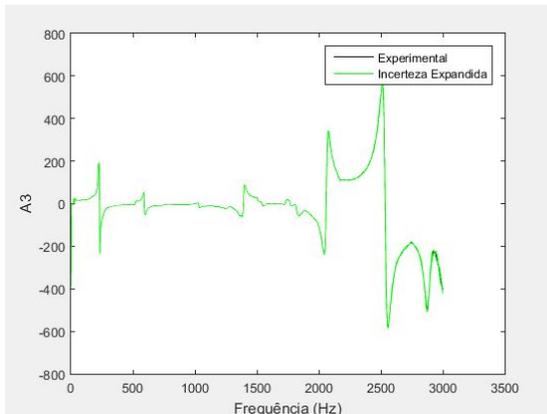


Figura 28: Gráfico do ponto a_3 no domínio da frequência.

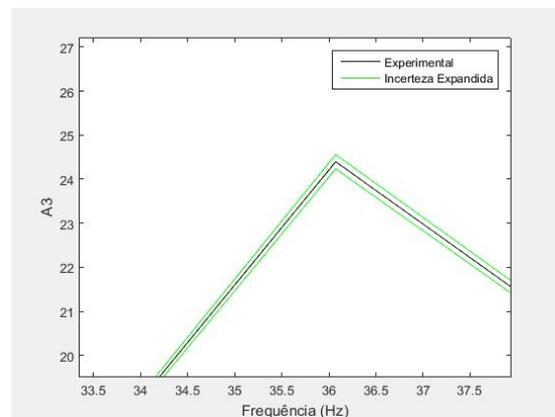


Figura 29: Aproximação da curva do ponto a_3 no domínio da frequência.

Considerando a pequena dispersão dos valores e o título apenas de ilustração, as figuras 25, 27 e 29 fazem um *zoom* nas FRFs das figuras 24, 26 e 28 para mostrar o pequeno afastamento das curvas.

Observa-se que os gráficos apresentados, mostram os pontos no domínio da frequência, e suas incertezas expandidas.

Portanto, a partir dos gráficos apresentados, pode-se progredir, e agora obter o gráfico do número de onda no domínio da frequência. Para isso além dos resultados obtidos até o momento, foi necessário incluir informações, como a resolução da trena apresentada na tabela 16, para cálculo da incerteza avaliada tipo B. Com isso, foi feita a relação entre os resultados, utilizando a metodologia apresentada na figura 5, e obteve-se o número de onda no domínio da frequência para o experimento comentado, conforme pode-se observar na figura 30.

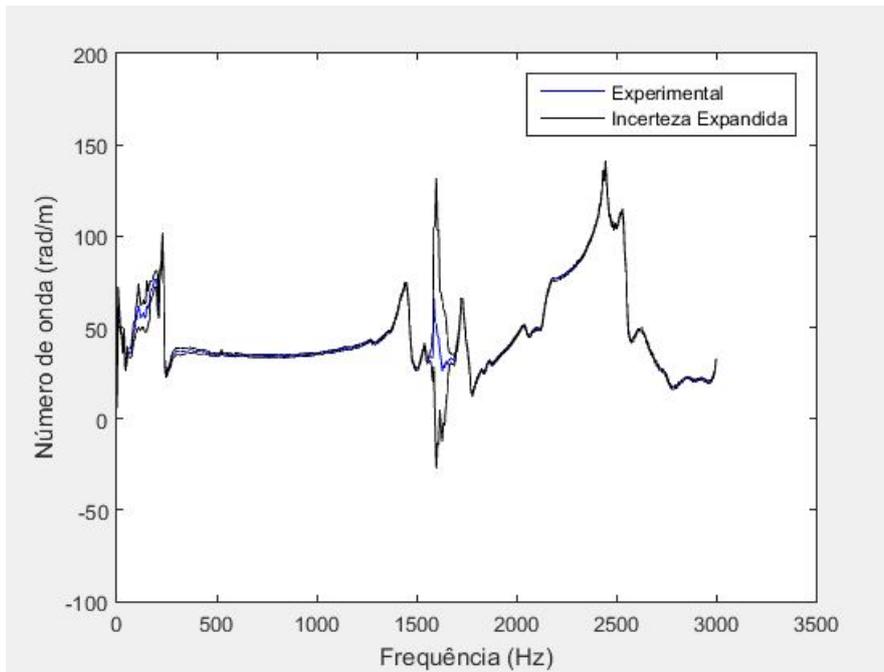


Figura 30: Gráfico do número de onda no domínio da frequência.

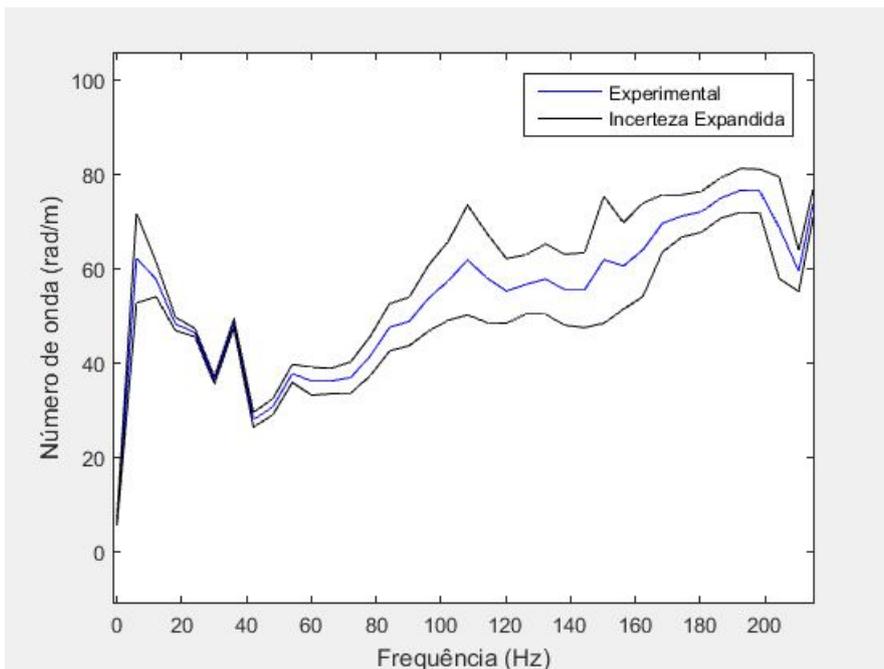


Figura 31: Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o método do ISO GUM tradicional.

A figura 31 apresenta o *zoom* dado na curva da figura 30, podendo assim visualizar a incerteza de uma melhor forma. Para tornar essa incerteza expandida mais aparente, a tabela 18 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado e sua incerteza expandida.

Tabela 18: Número de onda utilizando ISO GUM para viga de poliamida (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
ISO GUM tradicional	61,81 \pm 13,44 rad/m

4.4.1.2 Aplicação do método FAST

Para cálculo de incerteza utilizando a metodologia FAST para viga de poliamida, primeiramente foram lidos os vetores aceleração e forçamento em um determinado vetor tempo, conforme também foi feito para a metodologia do ISO GUM. Foram utilizados os mesmos pontos.

Com isso aplicou-se a FFT nos vetores da aceleração e do forçamento, passando esses para o domínio da frequência, já que os mesmos se encontravam no domínio do tempo.

As incertezas padrão são as incertezas do tipo B, já que não se têm incertezas do tipo A, pois não existe análise estatística no caso em questão. As incertezas foram apresentadas na tabela 17.

Com a finalidade de determinar a incerteza de medição, utilizou-se a mesma rotina de MATLAB aplicada para o Modelo da Máquina Linear de Medir. Primeiramente, foi definido o projeto, onde são estabelecidos a função de probabilidade, as grandezas de entrada e os desvios padrão respectivos. Posteriormente, adiciona-se o modelo de relação entre as grandezas de entrada e as grandezas de saída, sendo ele representado pela equação do número de onda (equação 4.41), conforme pode-se observar:

```
% Definicao do modelo que relaciona as grandezas de entrada com as
% grandezas de saida - Caso Caracterização do número de onda

% Grandeza de saida :y
% Grandezas de entrada: x

function [ y ] = mymodel( x )

y= acos(((x(1)./x(4))+x(3)./x(6))./(2.*x(2)./x(5)))./x(7);

end
```

Depois define-se como 20.000 o número de amostras. Inicializa-se o projeto calculando o modelo nos pontos de amostragem, a partir da função *GSA_Init* e por último, determina-se o valor verdadeiro do número de onda e a incerteza relacionada à mesma a partir da função *GSA_SFAST_GetSi* para cálculo dos coeficientes de sensibilidade.

Com isso obtêm-se a figura 32 que apresenta a curva do número de onda no domínio da frequência.

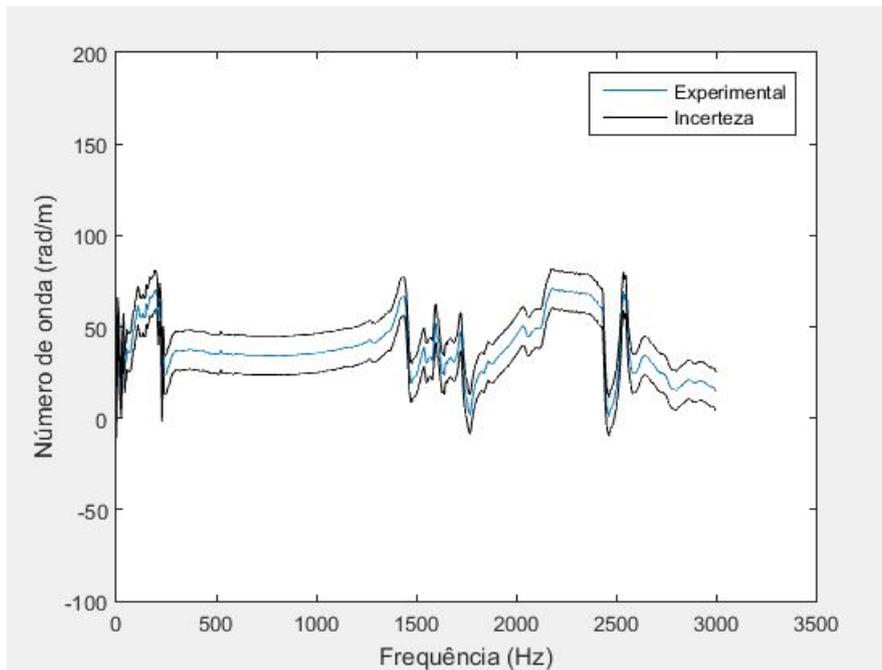


Figura 32: Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método FAST.

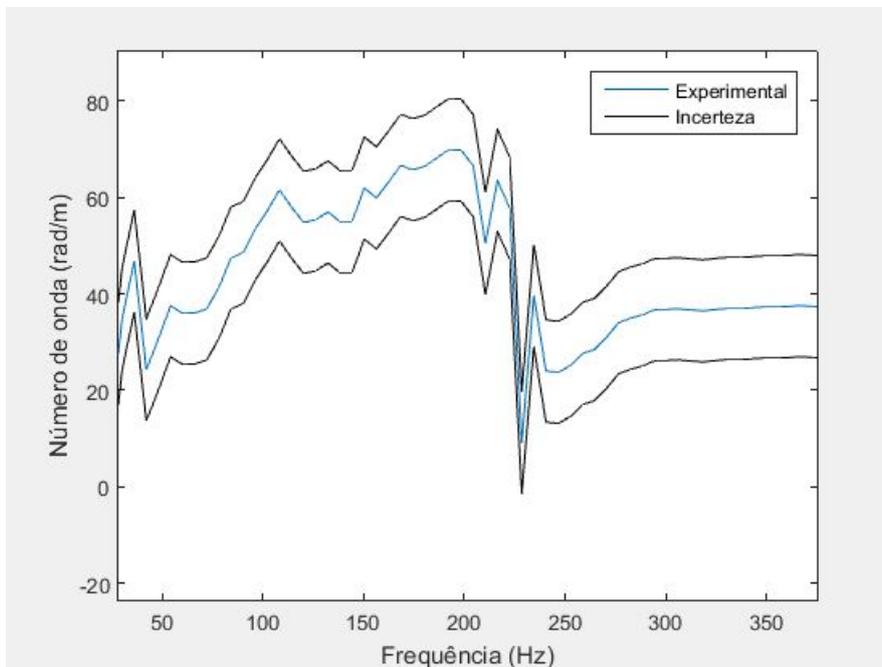


Figura 33: Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o método FAST.

A figura 33 apresenta um *zoom* dado na curva da figura 32, permitindo assim se visualizar a incerteza com maior clareza. Para tornar essa incerteza mais aparente, a tabela 19 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado à incerteza expandida.

Tabela 19: Número de onda utilizando o método FAST para viga de poliamida (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
Método FAST	61,96 \pm 10,60 rad/m

4.4.1.3 Aplicação do método de Monte Carlo

Para cálculo de incerteza utilizando o método de Monte Carlo para a viga de poliamida, primeiramente foram lidos os vetores da aceleração e do forçamento em um determinado tempo para os três pontos escolhidos, conforme feito para as aplicações anteriores. A partir desses sinais da aceleração e da força, aplica-se a FFT nesses sinais, passando-os do domínio do tempo para o domínio da frequência.

As incertezas padrão, como nas aplicações anteriores, estão apresentadas na tabela 17.

Na aplicação do método de Monte Carlo, são definidas as variáveis (A_1 , A_2 , A_3 e d) e relacionadas à elas, são inseridas as incertezas padrão na rotina.

Posteriormente, define-se o tamanho da amostra como 10.000 e com isso, define-se as grandezas de entrada. Considerando que as grandezas de entrada possuem distribuição normal, utiliza-se o função *normrnd* do MATLAB, relacionando as variáveis às incertezas e ao número de amostras.

Portanto, para cada valor de frequência, gera-se uma média e um desvio padrão, obtendo assim uma curva do número de onda no domínio da frequência (figura 34), com cada vetor de Monte Carlo. Sendo essa composta pela incerteza expandida.

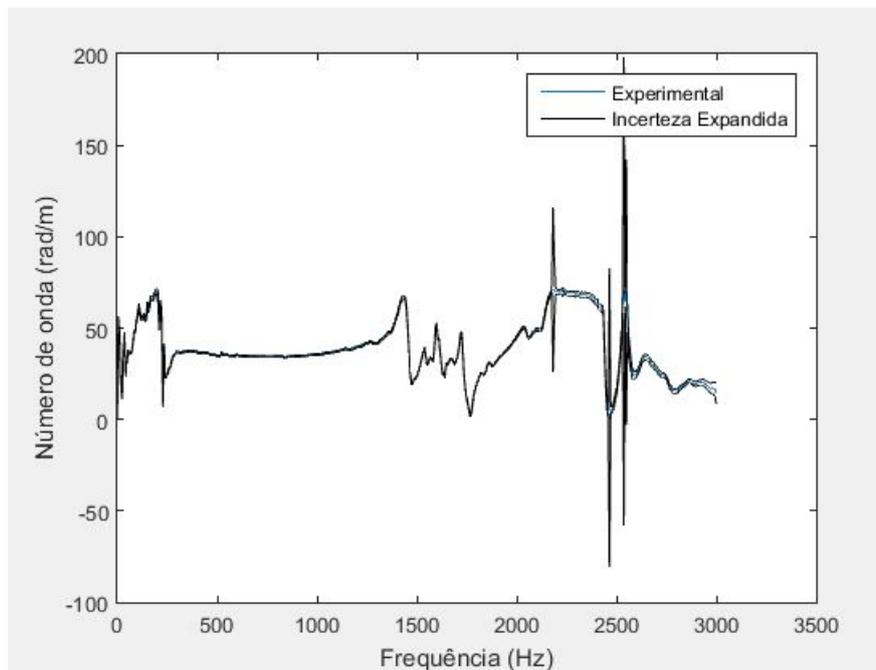


Figura 34: Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método de Monte Carlo.

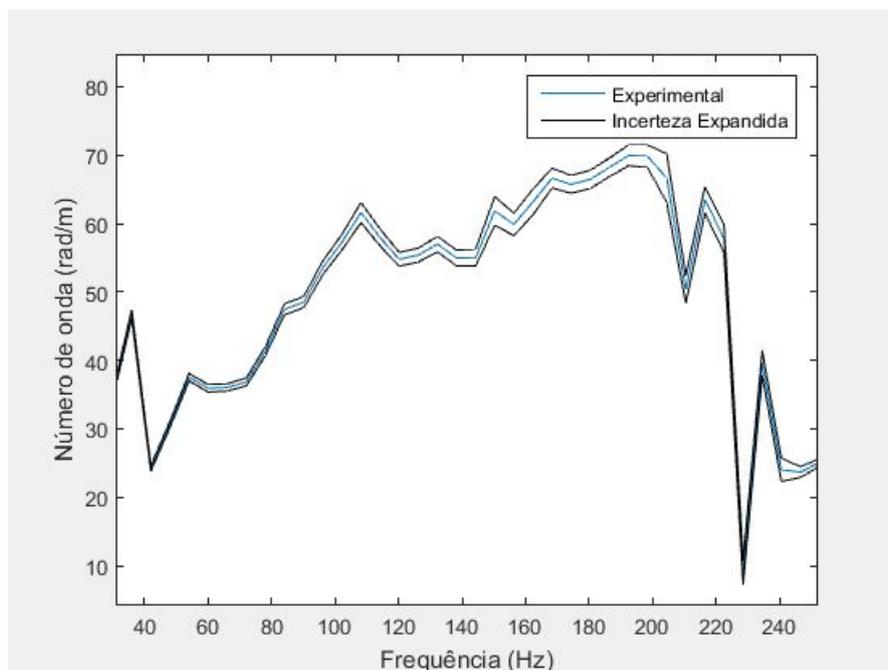


Figura 35: Aproximação da curva da viga de poliamida utilizando o MCM.

A figura 35 apresenta o zoom dado na curva da figura 34, podendo assim visualizar a incerteza de uma melhor forma. Para tornar essa incerteza mais aparente, a tabela 20 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado a sua incerteza expandida.

Tabela 20: Número de onda utilizando o MCM para viga de poliamida (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
Método de Monte Carlo	61,86 \pm 2,15 rad/m

4.4.2 Viga de aço

Com base no projeto *Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais* (MATOS, 2018), também foram aplicadas as metodologias desenvolvidas para cálculo de incerteza, porém nesse caso para a viga de aço, tendo como foco a identificação do número de onda via Função Resposta em Frequência (FRF). Esse experimento é composto por um acelerômetro (3), o qual capta a resposta do sistema a partir da placa de aquisição (4), e por um martelo de impacto (1), o qual excita a viga de aço (2), conforme pode-se observar na figura 36.

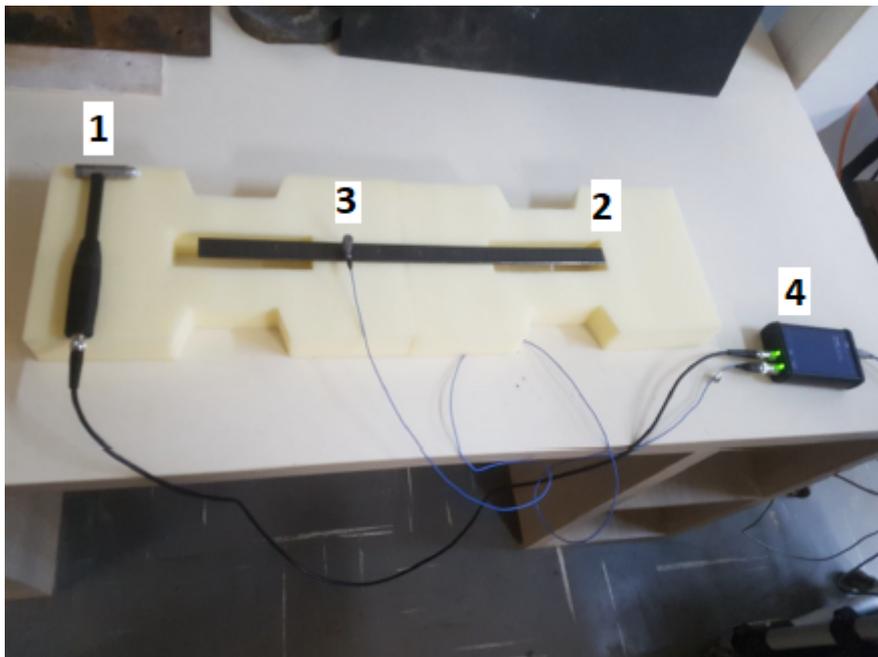


Figura 36: Experimento em viga de aço (MATOS, 2018).

O intuito desse experimento também é determinar o número de onda (k), utilizando a equação 4.41, a partir das relações apresentadas para a viga de poliamida, porém agora aplicadas para a viga de aço.

Para realização do experimento, também baseou-se em Hinke, Mace e Brennan (2004), que partem da equação da onda geral (equação 4.34), considerando três pontos igualmente espaçados $x_1 = -d$, $x_2 = 0$ e $x_3 = d$, conforme observa-se na figura 23.

Como para a viga de poliamida, na viga de aço são estabelecidas relações utilizando as equações apresentadas, e conclui-se obtendo a equação do número de onda (equação

4.41).

Para esse caso, também foram realizadas três batidas com o martelo, obtendo assim três respostas para cada um dos pontos, os quais estão equidistantes, conforme pode-se visualizar na figura 23. Essas respostas são funções da aceleração e do forçamento no tempo.

A tabela 21 apresenta os instrumentos utilizados na medição das grandezas de entrada do experimento e suas respectivas resoluções. Conforme já dito, o martelo de impacto possui uma célula de carga embutida para fazer a leitura da força de deformação causada.

Tabela 21: Instrumentação utilizada na montagem experimental.

Instrumento	Resolução	Grandeza Medida
Acelerômetro PCB Piezotronics Modelo 352C33	0,03 m/s^2	Vibração da viga
Martelo Piezoelétrico Modelo 086D05	200 mN	Forçamento realizado na viga
Trena	0,0005 m	Comprimento da viga

Então, os dados referentes às leituras do martelo de impacto e do acelerômetro para esse caso também foram fornecidos pelo Matos (2018).

A viga de aço possui comprimento de 470 mm. Para a análise em questão foram pegos os pontos 240 mm, 300 mm e 360 mm, sendo, portanto, com espaçamento de $d = 60$ mm (MATOS, 2018).

4.4.2.1 Aplicação do método ISO GUM

Para cálculo de incerteza utilizando a metodologia tradicional apresentada no (JCGM, 2008a), também foram lidos valores para aceleração e forçamento, em um determinado tempo. Para cada ponto, com espaçamento de 60 mm, da viga, foram geradas funções da aceleração e do forçamento no tempo. Para os pontos 240 mm, 300 mm e 360 mm foram lidos os primeiros 1.000 valores dos vetores da aceleração, do forçamento e do tempo.

A tabela 22 apresenta a incerteza analisada pela avaliação do Tipo B, gerada a partir da resolução do instrumento de medição, dada pela equação 4.22.

Tabela 22: Incertezas analisadas pela avaliação Tipo B

Instrumento	Avaliação Tipo B da Incerteza
Acelerômetro	0,0231 m/s^2
Martelo de impacto	0.1155 N

Esses valores das avaliações das incertezas do Tipo B podem ser consideradas as incertezas padrão relacionadas à cada instrumento de medição utilizado no experimento. Já que a incerteza do tipo A apresenta valores insignificantes no cálculo da incerteza combinada.

O número de onda, geralmente se apresenta no domínio da frequência, e portanto, converte-se o vetor do tempo para vetor da frequência, através das relações apresentadas nas equações da maior frequência da função (equação 4.42) e a da distância entre as frequências (equação 4.43).

Como resultados, as figuras 37, 39 e 41 apresentam as amplitudes das FRFs medidas nos pontos a_1 , a_2 e a_3 :

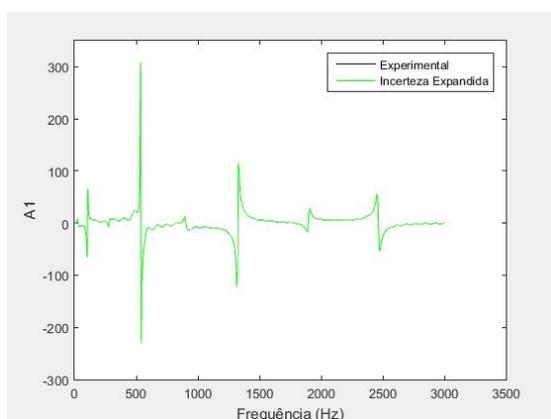


Figura 37: Gráfico do ponto a_1 no domínio da frequência.

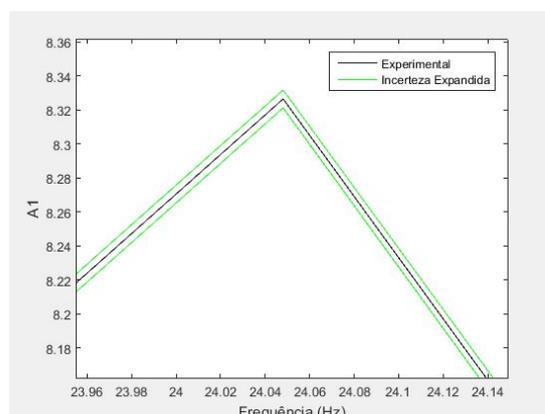


Figura 38: Aproximação da curva do ponto a_1 no domínio da frequência.

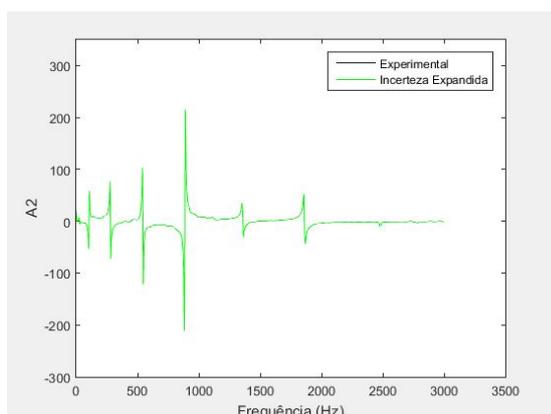


Figura 39: Gráfico do ponto a_2 no domínio da frequência.

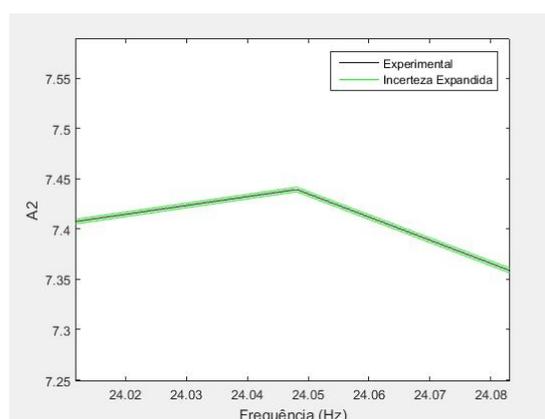


Figura 40: Aproximação da curva do ponto a_2 no domínio da frequência.

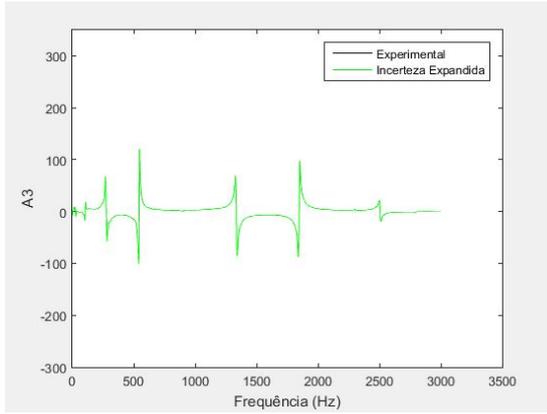


Figura 41: Gráfico do ponto a_3 no domínio da frequência.

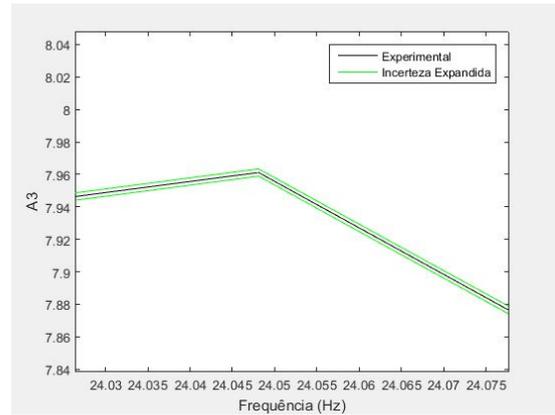


Figura 42: Aproximação da curva do ponto a_3 no domínio da frequência.

Considerando a pequena dispersão dos valores e o título apenas de ilustração, as figuras 38, 40 e 42 apresentam um *zoom* nas FRFs das figuras 37, 39 e 41 para mostrar o pequeno afastamento das curvas.

Portanto, a partir dos gráficos apresentados, pode-se progredir, e agora obter o gráfico do número de onda no domínio da frequência. Para isso além dos resultados obtidos até o momento, foi necessário incluir informações, como a resolução da trena apresentada na tabela 21, para cálculo da incerteza avaliada tipo B. Com isso, foi feita a relação entre os resultados, utilizando a metodologia apresentada na figura 5, e obteve-se o número de onda no domínio da frequência para o experimento comentado, conforme pode-se observar na figura 43.

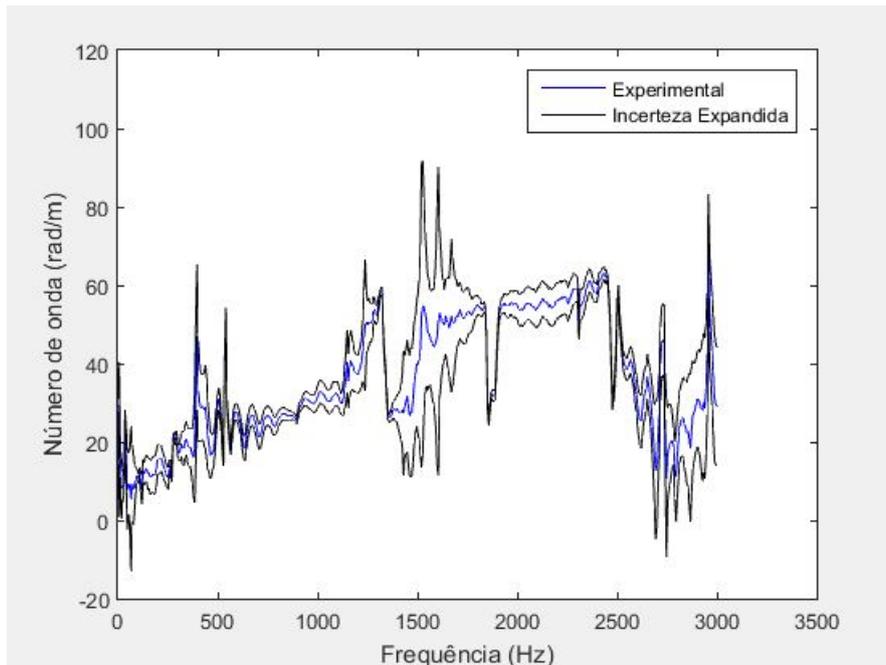


Figura 43: Gráfico do número de onda no domínio da frequência.

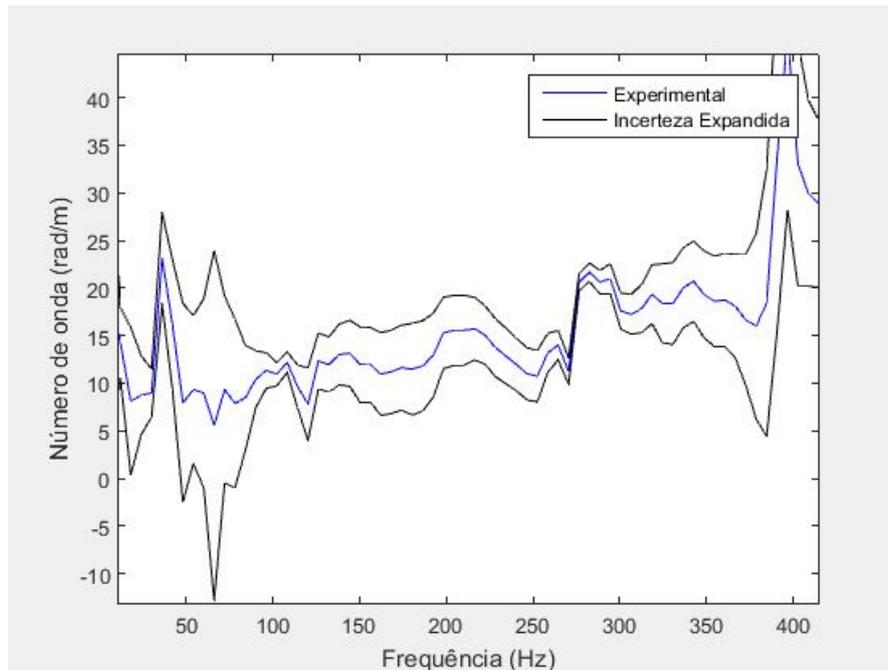


Figura 44: Aproximação da curva da viga de aço utilizando o ISO GUM tradicional.

A figura 44 apresenta o *zoom* dado na curva da figura 43, podendo assim visualizar a incerteza de uma melhor forma. Para tornar essa incerteza expandida mais aparente, a tabela 23 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado e sua incerteza expandida.

Tabela 23: Número de onda utilizando o método ISO GUM para viga de aço (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
ISO GUM tradicional	11,96 \pm 3,95 rad/m

Em questão de comparação, foi utilizado um programa disponibilizado por Matos (2018), o qual apresenta a solução analítica obtida, e a experimental sem as incertezas. Portanto, a figura 45 apresenta uma semelhança em relação à curva apresentada na figura 43.

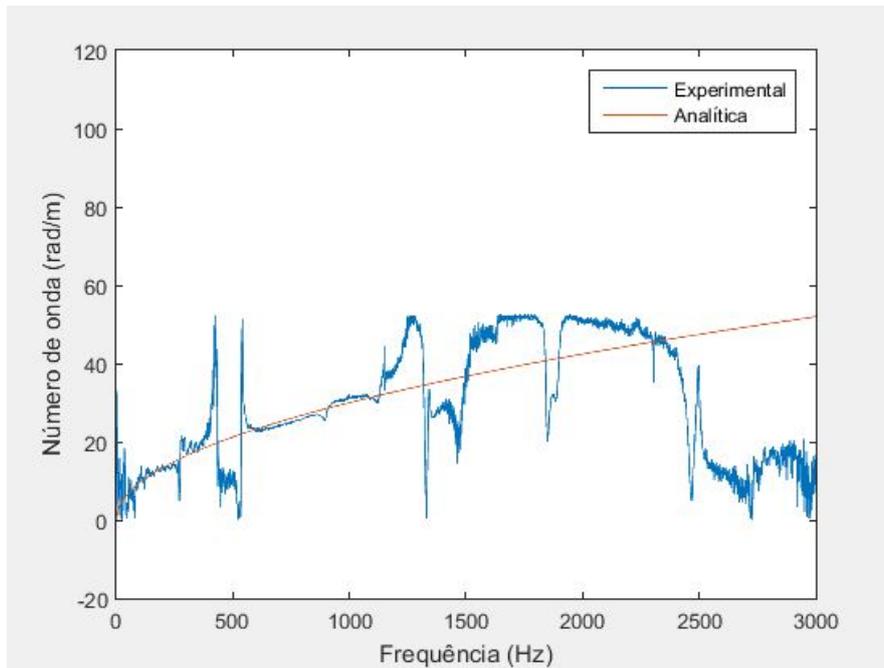


Figura 45: Curva de dispersão via FRF para o experimento da viga de aço.

4.4.2.2 Aplicação do método FAST

Para cálculo de incerteza utilizando a metodologia FAST para viga de aço, realizou-se os mesmos passos que foram feitos para a viga de poliamida. A diferença está nos pontos que foram pegos ($x_1 = 240$ mm, $x_2 = 300$ mm e $x_3 = 360$ mm) e no espaçamento entre cada ponto ($d = 60$ mm).

Outra diferença são as incertezas padrão, que também são representadas pelas incertezas avaliadas do tipo B. Essa é alterada em relação à viga de poliamida, já que alguns equipamentos são alterados. Os valores das incertezas foram apresentadas na tabela 22.

Com a finalidade de determinar a incerteza de medição, também foi utilizada a mesma rotina de MATLAB aplicada para o Modelo da Máquina Linear de Medir. Primeiramente, foi definido o projeto, onde são estabelecidos a função de probabilidade normal, as grandezas de entrada (A_1 , A_2 , A_3 e d) e os desvios padrão representados na tabela 22. Posteriormente, adiciona-se o modelo de relação entre as grandezas de entrada e as grandezas de saída, sendo ele representado pela equação 4.41, conforme pode-se observar:

```
% Definicao do modelo que relaciona as grandezas de entrada com as
% grandezas de saida - Caso Caracterização do número de onda

% Grandeza de saida :y
% Grandezas de entrada: x
```

```
function [ y ] = mymodel( x )

y= acos(((x(1)./x(4))+x(3)./x(6))./(2.*x(2)./x(5)))./x(7);

end
```

Depois define-se como 20.000 o número de amostras. Inicializa-se o projeto calculando o modelo nos pontos de amostragem, a partir da função *GSA_Init* e por último, determina-se o valor verdadeiro do número de onda e a incerteza relacionada à mesma a partir da função *GSA_SFAST_GetSi* para cálculo dos coeficientes de sensibilidade. Com isso obtêm-se a figura 46 que apresenta a curva do número de onda no domínio da frequência.

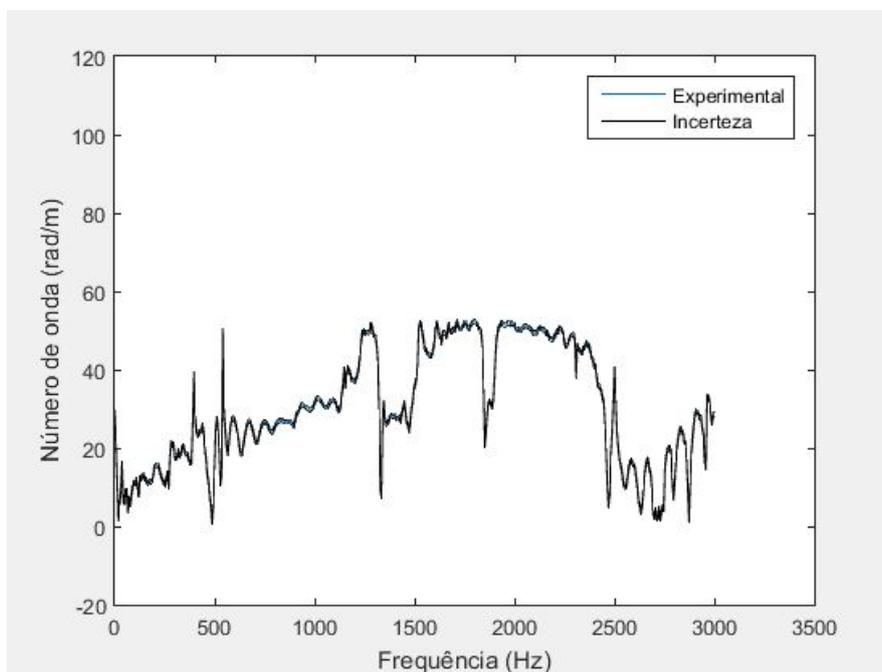


Figura 46: Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método FAST.

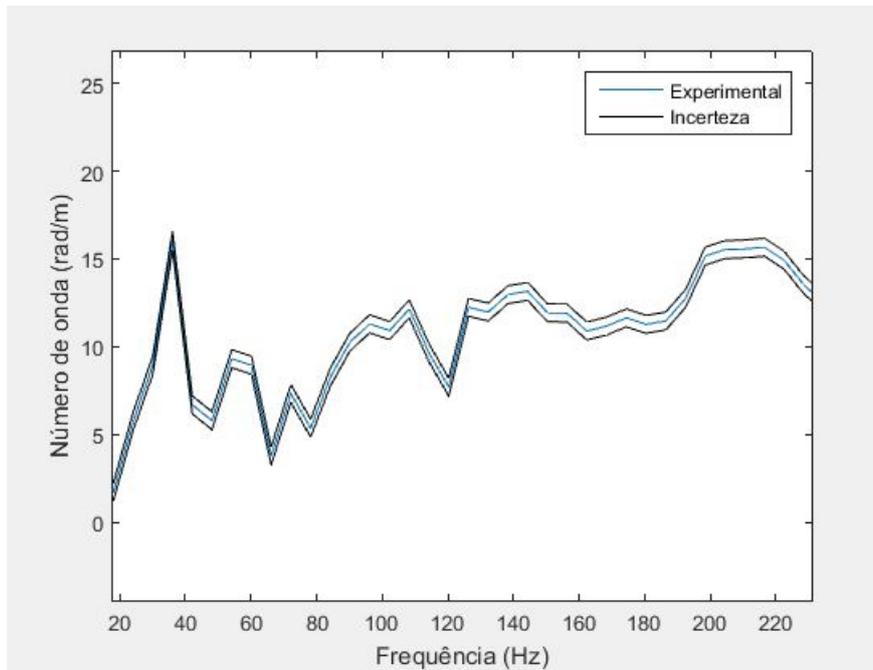


Figura 47: Aproximação da curva da viga de aço utilizando o método FAST.

A figura 47 apresenta um *zoom* dado na curva da figura 46, permitindo assim se visualizar a incerteza de uma melhor forma. Para tornar essa incerteza expandida mais aparente, a tabela 24 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado à incerteza expandida.

Tabela 24: Número de onda utilizando o método FAST para viga de aço (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
Método FAST	11,94 \pm 0,51 rad/m

4.4.2.3 Aplicação do método de Monte Carlo

Para cálculo de incerteza utilizando o método de Monte Carlo para a viga de aço, foram realizadas as mesmas etapas da aplicação para viga de poliamida. A diferença está nos pontos que foram pegos ($x_1 = 240mm$, $x_2 = 300mm$ e $x_3 = 360mm$) e no espaçamento entre cada ponto ($d = 60mm$).

As incertezas padrão, que nesse caso são representadas pelas incertezas avaliadas do tipo B, apresentam seus valores na tabela 22.

As incertezas padrão, como nas aplicações anteriores, estão apresentadas na tabela 17.

Na aplicação do método de Monte Carlo, são definidas as variáveis (A_1 , A_2 , A_3 e d) e relacionadas à elas, são inseridas as incertezas padrão na rotina.

A partir disso, define-se o tamanho da amostra como 10.000, e posteriormente, as grandezas de entrada são definidas. Considerando que as grandezas de entrada possuem distribuição normal, utiliza-se o função *normrnd* do MATLAB, relacionando as variáveis às incertezas e ao número de amostras.

Com isso, para cada valor de frequência, gera-se uma média e um desvio padrão, obtendo assim uma curva do número de onda no domínio da frequência (figura 48), com cada vetor de Monte Carlo. Sendo essa composta pela incerteza expandida.

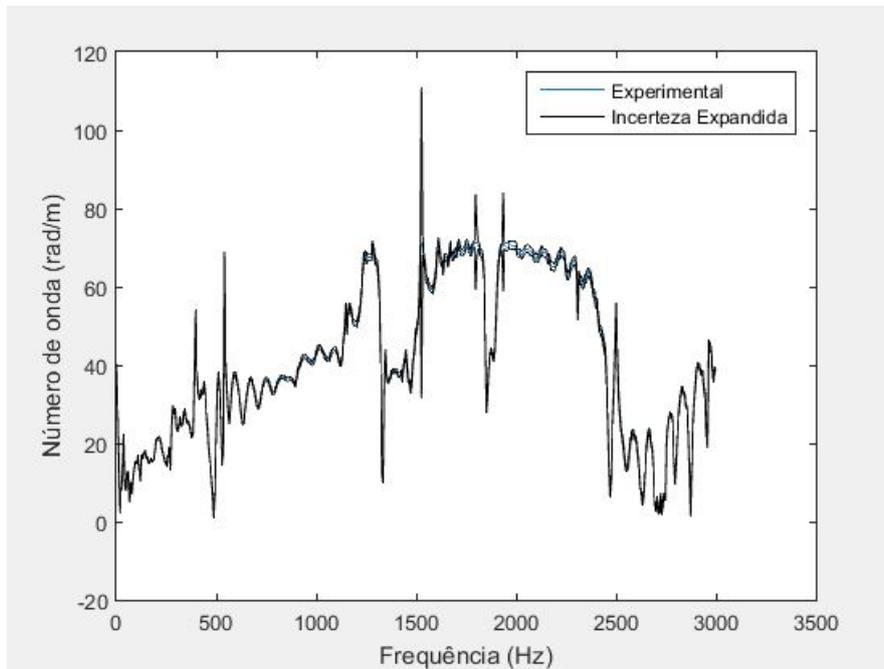


Figura 48: Gráfico do número de onda no domínio da frequência utilizando o método de Monte Carlo.

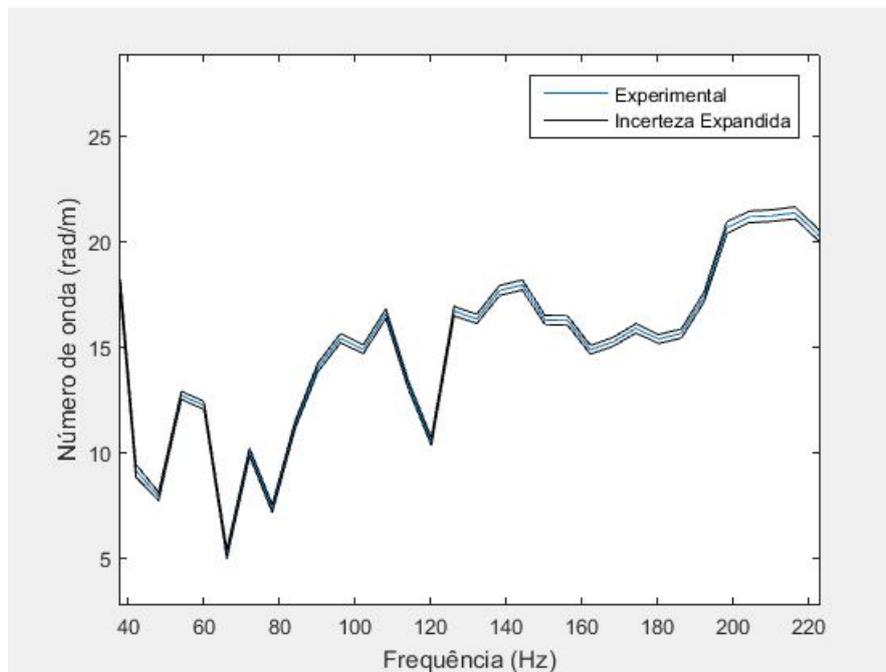


Figura 49: Aproximação da curva da viga de aço utilizando o MCM.

A figura 49 apresenta o *zoom* dado na curva da figura 48, podendo assim visualizar a incerteza de uma melhor forma, com mais clareza. Para tornar essa incerteza expandida mais aparente, a tabela 25 apresenta, para uma determinada frequência de referência de 150,3 Hz, o valor do número de onda associado à incerteza expandida.

Tabela 25: Número de onda utilizando o método de Monte Carlo para viga de aço (Frequência de referência de 150,3 Hz).

	Número de Onda \pm Incerteza Expandida
Método de Monte Carlo	16,28 \pm 0,22 rad/m

5 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

O presente trabalho possibilitou o estudo de dois métodos de Análise de Sensibilidade Global (FAST e Sobol). Para obtenção dos parâmetros importantes na análise, foi necessário consultar a literatura. Cada modelo abordado possui diferentes dados de entrada, assim foi preciso desenvolver diferentes rotinas para aquisição dos resultados.

Com os parâmetros inseridos no software foi possível determinar os coeficientes de sensibilidade para os dois métodos utilizados, além de quantificar a incerteza dos sistemas de medição para o método FAST.

Uma das vantagens da utilização das rotinas desenvolvidas para aplicação de análise de sensibilidade no cálculo de incerteza é a rapidez do método, o qual seleciona os melhores valores para cada grandeza de entrada e varia apenas a distribuição na saída de interesse.

Considerando o modelo do Bungee Jumping foram obtidos os coeficientes de sensibilidade para os métodos FAST, Sobol de primeira ordem (S_i) e Sobol de ordem total (S_{T_i}).

Comparando os valores calculados usando as rotinas desenvolvidas, com os observados em literatura (SALTELLI et al., 2004), verificou-se para o método FAST, pequena diferença relativa para cada grandeza de entrada, sendo essa diferença em torno de 1,24%. Já para o método Sobol de primeira ordem (S_i), a diferença relativa foi maior quando comparada com o método FAST, porém os resultados não superaram uma diferença relativa de 3,9%. O método Sobol de ordem total (S_{T_i}) possui correlação significativa entre as suas grandezas de entrada, e devido a isso possui diferença relativa maior, porém essa não supera 6,1%. Pode-se afirmar, portanto, que a diferença percentual relativa para os métodos é pequena e admissível, conforme pode-se observar na tabela:

Tabela 26: Comparação dos coeficientes de sensibilidade para o modelo Bungee Jumping.

Grandeza	Coeficiente FAST Teórico	Coeficiente FAST - Calculado	Diferença Relativa
H(m)	0,4370	0,4305	1,49 %
M (kg)	0,0114	0,0115	0,87 %
α	0,5458	0,5533	1,37 %
K (N/m)	-	0,0002	-
	Coeficiente Sobol de 1º ordem - Calculado	Coeficiente Sobol de 1º ordem - Calculado	Diferença Relativa
H(m)	0,4511	0,4335	3,90 %
M (kg)	0,0116	0,0114	1,72 %
α	0,5610	0,5547	1,12 %
K (N/m)	-	0,0002	-
	Coeficiente Sobol de ordem total Teórico	Coeficiente Sobol de ordem total - Calculado	Diferença Relativa
H(m)	0,4538	0,4330	4,58 %
M (kg)	0,0115	0,0108	6,09 %
α	0,5595	0,5569	0,46 %
K (N/m)	-	0,0002	-

Os coeficientes de sensibilidade para a constante elástica da corda (K) não apresentam valores na literatura, devido ao fato de não ocorrer variação dessa grandeza. Foram apresentados os resultados calculados dessa grandeza, para provar que os valores são muito próximos de zero, sendo essa a justificativa para que os coeficientes de sensibilidade dessa grandeza não apareçam na literatura, em virtude de não ocorrer variação da estimativa.

Esse exemplo permite verificar a qualidade da metodologia usada e das rotinas desenvolvidas, pois os resultados concordam com os apresentados na literatura. Para o modelo da Máquina Linear de Medir foi feito o cálculo de incerteza para o modelo de medição utilizando o método FAST, comparando o valor obtido com o valor usando o ISO GUM. A tabela 27 apresenta os valores obtidos:

Tabela 27: Comparação da incerteza para o modelo da Máquina de Medir.

Grandeza	Estimativa	Incerteza da Literatura	Incerteza Calculada	Diferença Relativa
L_m	0,4999 mm	0,16 μm	0,2 μm	0,04 μm

Conforme dito anteriormente, o resultado obtido pelo software, usando as rotinas desenvolvidas, se assemelha bastante com o valor de referência encontrado, conforme pode ser visto na tabela 27, e a partir da explicação dada nas seções Compatibilidade dos valores (6.1) e Regras de arredondamento (6.2) do livro Link (1999), onde afirma-se que a incerteza deve ter o mesmo número de casas decimais do valor medido, então como o valor medido contém 4 casas decimais, pode-se afirmar que o resultado teórico e calculado

da incerteza são iguais, quando feito o arredondamento. Esse resultado valida a hipótese de que o método FAST pode ser usado para cálculo de incertezas em modelos que não possuem correlação significativa entre as suas grandezas de entrada.

Para o modelo de Sistema Vibrante Simples foi realizado o experimento que envolve o estudo da barra engastada. O experimento utilizou o *LabViewTM* para fazer a aquisição de dados. E a partir de rotinas feitas em MATLAB, foram obtidos os seguintes resultados experimentais (tabela 28), utilizando o método do decremento (decaimento) logarítmico.

Tabela 28: Resultados utilizando o método do decremento logarítmico.

	Frequência natural amortecida (ω_d)	Frequência natural (ω_n)	Amortecimento (ξ)
Nível 0	5,3624 Hz	5,3580 Hz	0,0406
Nível 1	5,3627 Hz	5,3580 Hz	0,0420
Nível 2	5,3633 Hz	5,3580 Hz	0,0445
Nível 3	5,3737 Hz	5,3580 Hz	0,0764

Portanto, pode-se afirmar que devido à baixa frequência natural amortecida, tem-se um baixo amortecimento.

Além disso, para esse mesmo modelo foi feito o cálculo de incerteza utilizando o método ISO GUM tradicional, o método FAST e o método de Monte Carlo. Sabe-se que para a aplicação dos métodos, o amortecimento do sistema foi desconsiderado. Portanto, a tabela 29 apresenta os valores da frequência natural e sua incerteza associada, considerando apenas duas casas decimais.

Tabela 29: Comparação da incerteza expandida para o modelo do Sistema Vibrante Simples.

Método	Frequência natural (ω_n) \pm Incerteza
ISO GUM	5,40 \pm 0,02 Hz
FAST	5,40 \pm 0,04 Hz
Monte Carlo	5,40 \pm 0,02 Hz

Pode-se afirmar que tanto para o método do Guia tradicional, quanto para o MCM são obtidos os mesmos valores de incerteza. Já o valor obtido pelo método FAST é dado como o dobro dos mesmos.

A última aplicação dos métodos foi feita para o experimento Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais (MATOS, 2018), onde foram feitos experimentos com vigas de poliamida e de aço para identificação do número de onda via FRF. Portanto, nessa aplicação são fornecidos números de onda com incerteza associada.

Para a viga de poliamida foram obtidas curvas utilizando a metodologia do ISO GUM tradicional, FAST e Monte Carlo, conforme pode-se observar nas figuras 50, 51 e 52.

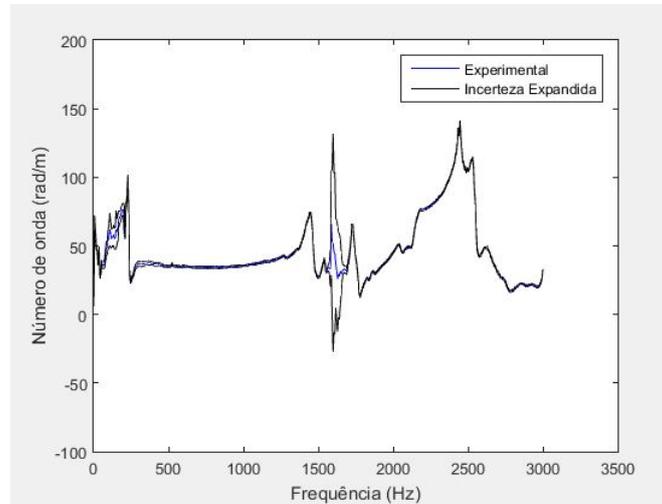


Figura 50: Gráfico do número de onda utilizando o ISO GUM tradicional.

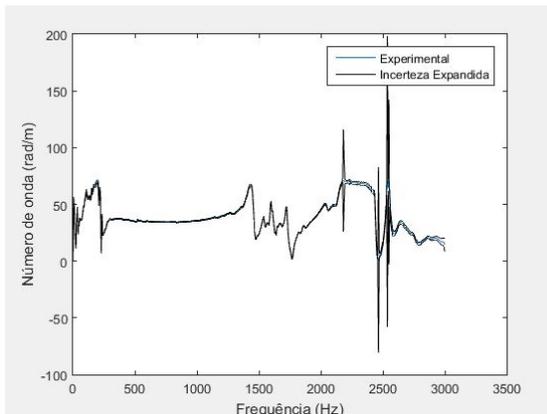


Figura 51: Gráfico do número de onda utilizando MCM.

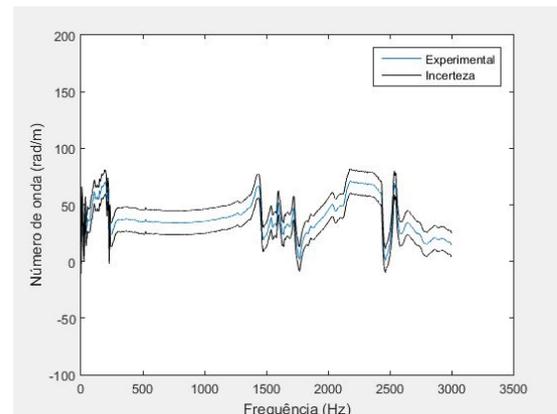


Figura 52: Gráfico do número de onda utilizando FAST.

Observa-se, portanto, que a incerteza em relação ao número de onda experimental para a viga de poliamida é muito pequena. A tabela 30 apresenta a incerteza expandida para uma frequência de referência (150,3 Hz).

Tabela 30: Incerteza expandida para viga de poliamida para frequência de referência de 150,3 Hz

Método	Incerteza Expandida (rad/m)
ISO GUM tradicional	13,44
FAST	10,60
Monte Carlo	2,15

Já para a viga de aço foram obtidas curvas utilizando a metodologia do ISO GUM tradicional, FAST e Monte Carlo, e além disso, foi apresentada a curva com a solução analítica obtida por Matos (2018). As figuras 53, 54, 55 e 56 apresentam essas curvas.

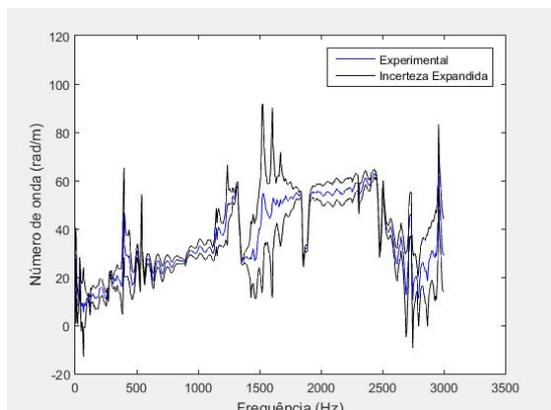


Figura 53: Gráfico do número de onda utilizando ISO GUM tradicional.

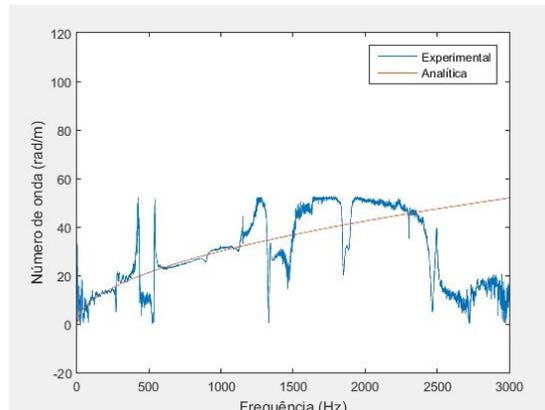


Figura 54: Gráfico do número de onda apresentando a solução analítica.

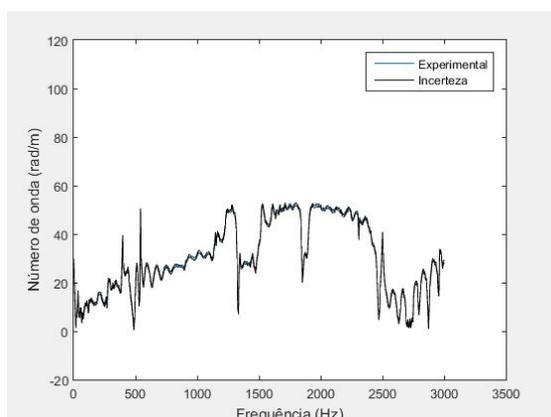


Figura 55: Gráfico do número de onda utilizando FAST.

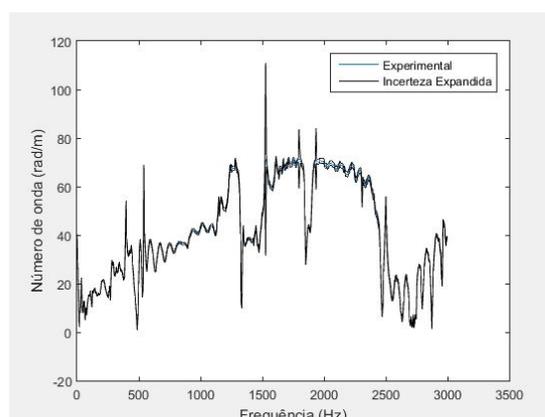


Figura 56: Gráfico do número de onda utilizando MCM.

Com isso, pode-se afirmar que a incerteza em relação ao número de onda experimental para a viga de aço também é muito pequena. A tabela 31 apresenta a incerteza expandida para uma frequência de referência (150,3 Hz).

Tabela 31: Incerteza expandida para viga de aço para frequência de referência de 150,3 Hz

Método	Incerteza Expandida (rad/m)
ISO GUM tradicional	3,95
FAST	0,51
Monte Carlo	0,22

Observando as tabelas 30 e 31, pode-se afirmar que utilizar a metodologia ISO GUM tradicional, no caso da identificação do número de onda, é um modo mais conservativo, por gerar uma maior incerteza. Essa incerteza alta, também está relacionada à complexidade do modelo, podendo esse não ser o melhor método para ser aplicado no caso.

Analisa-se que o MCM apresenta a menor incerteza, tanto para a viga de poliamida, quanto para a viga de aço. O método FAST apresenta um valor de incerteza mais próximo do MCM para a viga de aço. Portanto, sugere-se que para esse caso da identificação do número de onda, esses métodos são mais recomendados, devido a equação governante se referir à um sistema complexo, que possui relações de FRF e FFT.

A partir de todos os resultados, pode-se afirmar que para casos simples, onde não há necessidade de empregar um método mais complexo que necessita da implementação computacional para determinar a incerteza, é preferível a utilização da metodologia ISO GUM tradicional. Contudo, para casos onde a função de medição é complexa ou não-linear o FAST e o MCM se mostram excelentes ferramentas para determinação de incertezas.

Para utilização do ISO GUM tradicional é preciso calcular a derivada parcial da função de medição em relação aos valores estimados das grandezas de entrada o que, em alguns casos, pode ser muito trabalhoso ou até mesmo inviável, enquanto o MCM não exige tal cálculo. No entanto, os métodos FAST e MCM exigem mais conhecimento computacional. Esses exigem um número alto de variáveis aleatória simuladas.

O método FAST por possuir *toolboxes* associadas, necessita de mais memória, quando comparado com os outros métodos, já que tanto para o método do Guia tradicional, quanto para o MCM, é necessário apenas uma código principal.

Portanto, o método FAST se mostra eficaz quando se trata de realizar cálculo de incerteza, utilizando coeficientes de Análise de Sensibilidade Global. Já que para os modelos do *Bungee Jumping* e da Máquina Linear de Medir, foram obtidos os coeficientes de sensibilidade, validando a aplicação. Posteriormente, o método foi aplicado para o modelo do Sistema Vibrante Simples e da Caracterização do Número de Onda, obtendo as incertezas para cada modelo e validando a aplicação.

Como trabalho futuros, sugere-se a realização do cálculo de incerteza do amortecimento do experimento do Sistema Vibrante Simples, e além disso a utilização do método da meia potência para gerar resultados experimentais do amortecimento. Além do mais, sugere-se realizar o cálculo de incerteza mais detalhado dos parâmetros de entrada da identificação do número de onda, já que a estimativa da FRF não foi realizada da forma mais canônica. Lembrando ainda que não foi avaliada a incerteza dinâmica que existe no modelo, podendo ela ser somada à incerteza dos instrumentos de medição.

Referências

- CANNAVO, F. Sensitivity analysis for volcanic source modeling quality assessment and model selection. *Computers and Geosciences*, v. 44, p. 52–59, 2012.
- COCHIN, I.; CADWALLENDER, W. *Analysis and Design of Dynamic Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997. v. 44. 111-116 p.
- COOK, R. D.; WEISBERG, S. *An Introduction to Regression Graphics*. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1994. ISBN 978-0471008392.
- COUTO, P. R. G. A estimativa da incerteza de medição pelos métodos do iso gum 95 e de simulação de monte carlo. *Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. Nota Técnica*, 2008.
- COX, M. et al. Use of monte carlo simulation for uncertainty evaluation in metrology. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology V. Singapore: World Scientific Publishing*, p. 93–105, 2001.
- CUKIER, R. . I. et al. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. i theory. *The Journal of Chemical Physics*, v. 59, p. 3873–3878, 1973.
- DONATELLI, G. D.; KONRATH, A. C. Simulação de monte carlo na avaliação de incertezas de medição. *Revista de Ciência e Tecnologia*, v. 13, p. 5–15, 2005.
- ELSTER, C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. *Metrologia*, v. 44, p. 111–116, 2007.
- FREY, H.; PATIL, S. Identification and review of sensitivity analysis methods. *Risk Analysis*, v. 22, n. 3, p. 553–578, 2002.
- FÍSICA, A. E. *Amortecimento: classificação e métodos de determinação*. São Carlos, São Paulo, 2010.
- GELDERMANN, J.; RENTZ, O. *Integrated technique assessment with imprecise information as a support for the identification of best available techniques (BAT)*. 1st. ed. [S.l.]: OR-Spektrum, 2001. ISSN 1436-6304.
- HAMBY, D. M. A comparison of sensitivity analysis techniques. *Health Physics*, v. 68, p. 195–204, 1995.
- HERRADOR, M. A.; GONZALEZ, A. *Evaluation of measurement uncertainty in analytical assays by means of Monte Carlo simulation*. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2004. ISSN 0039-9140.
- HINKE, L.; MACE, B. R.; BRENNAN, M. *Finite Element Analysis of Waveguides*. [S.l.]: ISVR Technical Memorandum No 932, 2004.

- INMETRO. *ISO GUM – Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*. 3rd. ed. [S.l.]: Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – INMETRO, 2003.
- JCGM. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) – Supplement 1: numerical methods for the propagation of distributions*. [S.l.: s.n.], 2004b.
- JCGM. *Guide to the expression of uncertainty in Measurement – JCGM 100:2008*. [S.l.]: Joint Committee for Guides in Metrology, 2008a.
- JCGM. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement": propagation of distributions using a Monte Carlo method*. [S.l.]: JCGM 101, 2008c. v. 1.
- KRISHNAIAH, P. R. *Analysis of Variance*. 1st. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 1984. ISSN 9780444536709.
- LIEPMANN, D.; STEPHANOPOULOS, G. Development and global sensitivity analysis of a closed ecosystem model. *Ecological Modelling*, v. 30, p. 13–47, 1985.
- LINK, W. *Metrologia Mecânica - Expressão da Incerteza de Medição*. 2nd. ed. [S.l.]: Inmetro IPT, 1999.
- MARTINS, M. *Contribuições para a Avaliação da Incerteza de Medição no Regime Estacionário*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, 2010.
- MATOS, P. H. M. C. *Caracterização experimental do número de onda em metamateriais estruturais*. 2018. Projeto de Graduação, UnB (Universidade de Brasília), Brasília, Brasil.
- MORGAN, M.; SMALL, M.; HERRION, M. *Uncertainty : A Guide to Dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*. 1st. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. ISBN 9780521365420.
- NETER, J. et al. *Applied Linear Statistical Models*. 4th. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill, 1996.
- NETO, J. P. O.; ANDRADE, R. M. C. *Banca Experimental de Vibrações para Aulas Práticas*. 2006. Universidade de Brasília.
- ROBBI, D. et al. Quantificação de incertezas em experimento simples de vibrações. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, 2015.
- SALTELLI, A.; CHAN, K.; SCOTT, E. M. *Sensitivity Analysis*. 1st. ed. [S.l.]: WILEY, 2000. ISBN 9780471998921.
- SALTELLI, A. et al. *Sensitivity Analysis in Practice*. 1st. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2004. ISBN 9780470870952.
- SALTELLI, A.; TARANTOLA, S.; CHAN, K. P.-S. Quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, v. 41, n. 1, p. 39–56, 1999.
- SOBOL, I. M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 55, p. 271–280, 2001.

SONG, F.; GLENNY, A.; ALTMAN, D. Indirect comparison in evaluating relative efficacy illustrated by antimicrobial prophylaxis in colorectal surgery. *Clinical Trials*, v. 21, n. 5, p. 488–497, 2000.

TARANTOLA, S. et al. Can global sensitivity analysis steer the implementation of models for environmental assessments and decision-making ? *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, v. 16, p. 63–76, 2002.

WEYL, H. Mean motion. *American Journal of Mathematics*, v. 60, p. 889–896, 1938.