

**ANÁLISE NUMÉRICA DA CONVECÇÃO
NATURAL DE UM ESCOAMENTO
BIFÁSICO
EM UMA CAVIDADE**

Isadora Montenegro Bugarin

Brasília, 21 de novembro de 2018

PROJETO DE GRADUAÇÃO

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL DE UM ESCOAMENTO BIFÁSICO EM UMA CAVIDADE

POR,

Isadora Montenegro Bugarin

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Taygoara Felamingo de Oliveira, UnB/ENM _____

Adriano Possebon Rosa, UnB/ENM _____

Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, UnB/ENM _____

Brasília, 21 de novembro de 2018

RESUMO

O estudo da transferência de calor por convecção natural vem cada vez mais mostrando sua importância, tanto no meio acadêmico quanto no industrial, estando envolvido em diversos processos de fabricação de produtos e em diversos fenômenos recorrentes da natureza.

A questão principal no que se diz respeito a este assunto consiste em como se ampliar a taxa de calor transferido pela convecção natural sem a necessidade de se ampliar a geração de energia para a sua ocorrência, mas de modo a otimizar as condições já existentes para tanto. Com isso em mente, surge o interesse em se estudar a convecção natural em cavidades ou microcavidades, a fim de se gerar condições favoráveis ao aumento do coeficiente de transferência de calor por convecção.

Além disso, outro foco de interesse neste relatório consiste no estudo dos escoamentos multifásicos e os processos de transferência de calor nestes, em especial a convecção natural, visando se verificar tanto os efeitos da mistura multifásica de fluidos na taxa de calor transferido quanto os efeitos do processo de convecção na movimentação e deformação das gotas adicionadas ao escoamento.

Por fim, unindo-se os dois tópicos acima mencionados, chega-se ao estudo principal deste trabalho, que consiste na investigação da convecção natural para um escoamento multifásico em uma cavidade. Para isso, foram feitas simulações numéricas em *Fortran*, a fim de se gerar a base necessária para este estudo englobando diferentes condições iniciais para o escoamento.

Palavras-chave: convecção natural, Nusselt, Rayleigh, cavidade, escoamento multifásico, gota.

ABSTRACT

The study of the heat transfer process of natural convection has been constantly showing greater importance, not only at the academic field but also at the industrial, since it is involved in vast number of fabrication processes and also in many natural phenomena.

The main matter about this subject consists in expanding the heat rate transferred by natural convection without requiring more energy generation, but optimizing the conditions already established. Thereby comes the interest in estudying the natural convection in a cavity or microcavity, with the porpouse of generating favorable conditions for increasing the convection heat transfer coeficient.

Furthermore, another interest focus on this paper consists on the study of multiphasic flows and the heat transfer processes in them envolved, especially natural convection, aiming to verify not only the effects on the heat transfer from adding a second phase but also the effect of the natural convection itself on the multiphasic flow.

Uniting both topics mentioned above, it results on the main theme of this study, which is the investigation of the natural convection in a multiphasic flow inside a cavity. Therefore, was developed a numerical simulation in *Fortran* aiming to generate the necessary basis for the analisys envolving different initial conditions for the flow.

Key-words: natural convection, Nusselt, Rayleigh, cavity, multiphasic flow, droplet.

Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVO GERAL	2
1.2.1 Objetivos Específicos	2
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
1.3.1 Emulsões	3
1.3.2 Escoamento com Tampa Cisalhante	5
1.3.3 Convecção Natural em uma Cavidade	6
2 REVISÃO DE CONCEITOS	8
2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES	8
2.1.1 Equação da Conservação da Massa	8
2.1.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento	9
2.1.3 Equação da Energia	11
2.2 GRUPOS ADIMENSIONAIS	13
2.3 CONVECÇÃO NATURAL	14
2.3.1 Convecção Natural em Espaços Fechados	14
2.4 TENSÃO SUPERFICIAL	15
3 METODOLOGIA	17
3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	17
3.1.1 Princípio do Método	17
3.1.2 Série de Taylor e Aproximações	18
3.1.3 Malha Deslocada	19

3.1.4	Malha Coalocada	20
3.2	MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO TEMPORAL	20
3.2.1	Método de Euler Implícito	20
3.2.2	Método de Crank-Nicolson	20
3.3	MÉTODO DE PROJEÇÃO	21
3.4	CÁLCULO DOS TERMOS CONVECTIVOS	23
3.5	IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA	24
3.6	CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT	26
3.7	FUNÇÃO LEVEL SET	26
3.7.1	Implementação da equação evolutiva de ϕ	27
3.7.2	Reinicialização de ϕ	29
3.8	VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS	29
3.9	EQUAÇÕES FINAIS PARA O ESCOAMENTO MULTIFÁSICO	30
3.10	VARIAÇÃO DA ÁREA DA GOTA	31
3.11	DESLOCAMENTO DO CENTRO DE GRAVIDADE DA GOTA	31
3.12	CONDIÇÕES DE CONTORNO	31
3.12.1	Cavidade Cisalhante	31
3.12.2	Convecção Natural	32
3.13	MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	32
3.13.1	Método do Gradiente	34
3.13.2	Método do Gradiente Conjugado	35
3.13.3	Pré-condicionamento do Gradiente Conjugado	36
3.14	VERIFICAÇÃO DA ORDEM DO MÉTODO	37
3.14.1	Ordem de Acurácia	37
3.14.2	Determinando a Ordem de Acurácia para u Desconhecido	37
4	RESULTADOS	38
4.1	SOLUCIONADORES DE SISTEMAS LINEARES	38
4.2	ESCOAMENTO CISALHANTE	39
4.2.1	Refinamento da Malha	39
4.2.2	Validação da Ordem do Método	42
4.2.3	Variação do Número de Reynolds	42
4.2.4	Validação dos Resultados	43
4.3	CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE	48
4.3.1	Variação do Número de Rayleigh	48
4.3.2	Cálculo do Número de Nusselt	50
4.4	ESCOAMENTO BIFÁSICO	53

4.4.1	Relevância do Uso de Aproximações de Alta Ordem	53
4.4.2	Importância da Reinicialização	55
4.4.3	Comportamento do Escoamento	57
4.4.4	Efeito da Capilaridade	66
4.4.5	Deslocamento do Centro de Gravidade da Gota	67
4.4.5.1	Influência da posição inicial	67
4.4.5.2	Influência do número de Rayleigh	70
4.4.5.3	Influência das propriedades térmicas	72
4.5	INFLUÊNCIA DA GOTA NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR	73
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
5.1	CONCLUSÃO	78
5.2	TRABALHOS FUTUROS	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

Lista de Figuras

1	Emulsões Simples (SALAGER, 2000).	3
2	Emulsões Múltiplas (SALAGER, 2000).	3
3	Emulsões Duplas (SALAGER, 2000).	3
4	Agentes emulsificantes: a) íons adsorvidos, b) partículas sólidas, c) moléculas de polímeros adsorvidas e d) moléculas de surfactantes adsorvidas (MYERS, 1999).	4
5	Esquema de escoamento com tampa deslizante.	5
6	Esquema de escoamento em convecção natural no interior de uma cavidade.	6
7	Esquema do elemento infinitesimal de fluido (ANDERSON et al., 2009).	9
8	Volume de controle genérico considerado para a dedução da equação da energia (ANDERSON et al., 2009).	11
9	Convecção natural em espaços fechados retangulares verticais (ÇENGEL; GHIAJAR, 2009).	15
10	Forças intermoleculares nas moléculas internas e superficiais de um fluido.	16
11	Malha cartesiana para discretização espacial por diferenças finitas (CZARNESKI, 2017).	18
12	Malha deslocada (ITO; QIAO, 2008).	20
13	Esquema do escoamento bifásico com propriedades térmicas variáveis.	30
14	Curvas de $f(x)$ constante (SHEWCHUK, 1994).	33
15	Gradiente $f'(x)$ em diferentes direções ao longo da linha de busca (SHEWCHUK, 1994).	34
16	Diagrama de decrescimento do resíduo para cada <i>solver</i>	38
17	Desenho esquemático da cavidade simulada (GHIA et al., 1982).	39
18	Resultados obtidos para o comportamento da velocidade em x (u).	40
19	Resultados obtidos para o comportamento da velocidade em y (v).	41
20	Resultados obtidos para u.	43
21	Resultados obtidos para v.	43
22	Legenda dos gráficos apresentados nas figuras 23 e 24 (GHIA et al., 1982)	44
23	Perfil da velocidade u ao longo do centro geométrico e do vórtice primário (GHIA et al., 1982).	44

24	Perfil da velocidade v ao longo do centro geométrico e do vórtice primário (GHIA et al., 1982).	44
25	Resultados obtidos para o comportamento da componente de velocidade u	45
26	Resultados obtidos para o comportamento da componente de velocidade v	46
27	Resultados obtidos para o comportamento das velocidades no centro geométrico da cavidade.	47
28	Ghia et al. (1982).	48
29	Resultados obtidos.	48
30	$Ra=10^3$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994)).	49
31	$Ra=10^3$ (Resultados Obtidos).	49
32	$Ra=10^4$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994)).	49
33	$Ra=10^4$ (Resultados Obtidos).	50
34	$Ra=10^5$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994))	50
35	$Ra=10^5$ (Resultados Obtidos).	50
36	Descrescimento do número de Nusselt em função do tempo.	51
37	Número de Nusselt obtido pela análise numérica e pela equação de Berkovsky e Polevikov (1977).	52
38	Evolução da gota ao longo do tempo (simulação 1).	54
39	Evolução da gota ao longo do tempo (simulação 2).	55
40	Evolução de κ no tempo sem a reinicialização.	56
41	Evolução de κ no tempo com a reinicialização.	57
42	$Ra=1.10^3$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.	58
43	$Ra=1.10^3$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.	59
44	$Ra=5.10^3$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.	60
45	$Ra=5.10^3$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.	61
46	$Ra=1.10^4$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.	62
47	$Ra=1.10^4$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.	63
48	$Ra=5.10^4$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.	64
49	$Ra=5.10^4$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.	65
50	$Ca=0,1$	66
51	$Ca=0,01$	66
52	Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,20 \times 0,50$	67
53	Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,25 \times 0,50$	68
54	Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,30 \times 0,50$	68
55	Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,35 \times 0,50$	69

56	Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,50 \times 0,50$	69
57	$Ra=1.10^3$	70
58	$Ra=5.10^3$	70
59	$Ra=5.10^4$	71
60	Linhas de corrente e de temperatura para diferentes números de Rayleigh.	71
61	Variação da capacidade calorífica a volume constante (C_v).	72
62	Variação da condutividade térmica (k).	73
63	Influência da variação da condutividade térmica no número de Nusselt.	74
64	Influência da variação da capacidade calorífica a volume constante no número de Nusselt.	74
65	Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 2.	75
66	Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 5.	75
67	Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 10.	76
68	Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 2.	76
69	Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 5.	76
70	Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 10.	77

Lista de Tabelas

1	Verificação da ordem do Método.	42
2	Comparação dos resultados numéricos com os obtidos pela equação de Berkovsky e Povikov (1977) para o número de Nusselt.	52
3	Comparação de resultados numéricos.	52

Lista de Símbolos

- Γ Interface da partícula. 26
- $\boldsymbol{\sigma}$ Tensor de tensões. 11, 12, 14, 27
- χ Aproximação para a pressão. 22, 23
- δ Delta de Dirac. 27
- \dot{Q} Taxa de calor transferido. 11, 14
- \dot{W} Trabalho. 11
- κ Curvatura. 26, 27
- C_v Capacidade calorífica a volume constante. 12, 29
- \mathbf{D} Tensor simétrico. 12
- \mathbf{F} Vetor de forças. 5, 9, 10, 27
- \mathbf{W} Tensor assimétrico. 12
- \mathbf{a} Vetor de aceleração. 9
- \mathbf{g} Gravidade. 11, 12
- \mathbf{n} Vetor normal. 8, 26, 27
- \mathbf{u} Vetor de velocidade. 5, 7–12, 20–24, 27, 28, 30, 31
- \mathbf{q}'' Taxa de calor que atravessa a superfície. 11, 12
- μ Viscosidade dinâmica. 10, 12, 14, 25, 30
- ν Viscosidade cinemática. 13, 25
- ϕ Função distância. 20, 26–29, 31
- ρ massa específica. 8–12, 25, 30
- τ Tensão cisalhante. 9, 10
- θ Gradiente de temperatura adimensional. 7, 20, 21, 25, 26, 29, 31, 32
- A Área da partícula. 31
- Ca Capilaridade. 14
- CG Centro de gravidade. 31, 67

- E Energia total. 11
- h Coeficiente de transferência de calor. 13, 14
- k Condutividade térmica do material. 12–15
- L_c Comprimento característico. 13, 14, 25
- m Massa. 8, 9
- Nu Número de Nusselt. 13–15, 26
- p Pressão. 5, 7, 9, 10, 20, 22, 25, 30
- Pr Número de Prandtl. 7, 13, 15, 25, 30, 31, 49
- Ra Número de Rayleigh. v, 7, 13, 15, 25, 31, 49–51
- Re Número de Reynolds. 5, 13, 20, 22, 23, 43, 45, 46, 48
- S superfície de contorno. 11
- T Temperatura. 12–14, 25, 30
- t Variável de tempo. 5, 7–12, 20, 22, 25, 30, 31
- u Componente x da velocidade. iv, 7, 9, 10, 13, 17, 18, 23, 25, 31, 32, 40, 43, 47
- U_c Velocidade característica. 14
- V Volume. 8, 11, 12
- v Componente y da velocidade. iv, v, 7, 10, 25, 31, 32, 41, 43, 44, 47
- w Componente z da velocidade. 10

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Inicialmente, a escolha deste tema foi motivada pela ideia da união de dois assuntos de grande relevância em um mesmo problema físico, sendo eles o estudo da convecção natural em cavidades e os processos de transferência de calor em escoamentos multifásicos.

O estudo da convecção natural como um todo tem abrangido cada vez mais interesse pela indústria, uma vez que consiste em um processo de transferência de calor mais barato, quando comparado com a convecção forçada. Isto se dá principalmente pelo fato de que na convecção forçada há uma variável imprescindível: a velocidade. Portanto, quanto menor for a velocidade, menor será a taxa de calor transferido, o que gera a demanda por um mecanismo de manutenção constante da velocidade do escoamento, como por exemplo uma bomba.

Além disso, a convecção natural está envolvida diretamente com diversos processos na indústria, principalmente no campo de energia e nas indústrias farmacêuticas e alimentícias. Assim, surge-se muitas vezes o interesse em se aumentar a taxa de transferência de calor por convecção natural sem a necessidade de se implementar novos mecanismos de geração de calor, mas sim otimizando os já existentes.

A partir da ideia exposta acima, inciou-se o estudo da convecção natural em cavidades ou microcavidades a fim de se aumentar o coeficiente de troca de calor por convecção. Um exemplo de estudo feito com essa finalidade consistiu na implementação da convecção natural em cavidades para o desenvolvimento do isolamento transparente de um coletor solar, realizado pelo autor GARCIA (2014).

Outro foco importante deste estudo consiste na análise da troca de calor em escoamentos multifásicos. Escoamentos multifásicos são amplamente utilizados na indústria farmacêutica na forma de medicamentos e cosméticos e na indústria alimentícia, sendo vários dos alimentos comumente consumidos compostos por emulsões, tais como o sorvete e a manteiga.

No âmbito das indústrias supracitadas, ocorrem diversos processos de transferência de calor envolvidos nos processos de fabricação, o que torna o estudo do efeito da convecção natural sobre esses produtos necessário. Além disso, tem-se que o estudo mesclado de Mecânica dos Fluidos com Transferência de Calor em geral tem se apresentado cada vez mais relevante, analisando tanto os efeitos do fluido na taxa de transferência de calor quanto os efeitos desta no comportamento do escoamento.

Por fim, tem-se que o foco principal deste estudo consiste na investigação da possibilidade de se melhorar a troca de calor em um escoamento por meio da inserção de partículas de um

fluido com propriedades térmicas superiores em um fluido com piores propriedades, barateando o processo, quando comparado à utilização pura de um fluido termicamente mais nobre. Assim, pode-se desenvolver o aprimoramento das tecnologias de micro-trocadores de calor de um forma prática e rentável.

1.2 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral proposto para este Projeto de Graduação consiste na análise, por meio de uma simulação numérica em *Fortran*, de um escoamento bifásico em um espaço fechado, no caso uma cavidade, submetida a um gradiente de temperatura que inicia um processo de convecção natural. As faces superior e inferior da cavidade são isoladas termicamente e as faces laterais estão submetidas a temperaturas distintas. Desse modo, objetiva-se analisar qual é a influência da imersão do segundo fluido no escoamento para a transferência de calor entre as paredes da cavidade e também o efeito da convecção natural sobre a estrutura deste fluido (gota) e sobre o escoamento em geral.

1.2.1 Objetivos Específicos

- i Discretizar as equações governantes por meio do método de diferenças finitas, a fim de se estruturar a solução do problema proposto;
- ii Estudar diferentes métodos de solução de sistemas lineares, tais como Método do Gradiente, Método do Gradiente Conjugado e Métodos de Relaxação, visando uma convergência mais rápida;
- iii Aplicar diferentes métodos de discretização temporal, tais como os Métodos de Euler (explícito e implícito) e o Método de Crank-Nicolson;
- iv Implementar o Método de Projeção para resolver as equações de conservação de quantidade de movimento linear (equações de Navier-Stokes);
- v Analisar as equações de Navier-Stokes em uma cavidade com tampa cisalhante para um escoamento monofásico;
- vi Implementar a equação da energia, fazendo os respectivos ajustes às equações de Navier-Stokes, para a análise da cavidade submetida à convecção natural para um escoamento monofásico;
- vii Acrescentar uma gota ao escoamento na cavidade sob convecção natural por meio da função Level Set;
- viii Realizar as modificações nas equações governantes do escoamento referentes à inserção da gota no escoamento, tais como adição dos termos de tensão superficial da interface da gota;
- ix Implementar propriedades térmicas distintas para a região do escoamento principal e para a região da gota, a fim de definir a diferenciação termodinâmica de ambos os fluidos;
- x Realizar a análise do comportamento do escoamento bifásico para diferentes números de Rayleigh e capilaridades;
- xi Estudar o deslocamento da gota, por meio da investigação da trajetória traçada pelo seu centro de massa, posicionando-a em diferentes posições iniciais dentro da cavidade;

xii Investigar a transferência de calor para diferentes razões de propriedades térmicas entre os fluidos.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.3.1 Emulsões

Uma emulsão compreende uma dispersão de um líquido em outro, na forma de gotas, tendo em vista que os dois fluidos devem apresentar um certo grau de imiscibilidade entre si. Esta mistura de líquidos é composta por uma fase apolar, geralmente composta por hidrocarbonetos, denominada óleo ou fase oleosa, e uma fase polar, geralmente composta por água e denominada fase aquosa (ALMEIDA, 2014).

Há dois tipos principais de emulsões: água-em-óleo (w/o), a qual consiste em uma emulsão de água em óleo, estando portanto a fase polar dispersa na fase apolar, e a óleo-em-água (o/w), que se refere a uma dispersão de óleo (fase apolar) em água (fase polar). As Figuras 1, 2, 3 exemplificam a composição de diferentes tipos de emulsões.

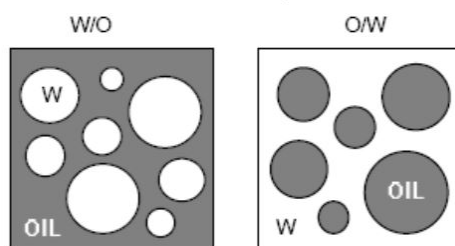


Figura 1: Emulsões Simples (SALAGER, 2000).

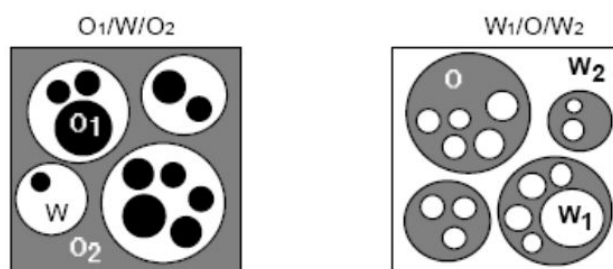


Figura 2: Emulsões Múltiplas (SALAGER, 2000).

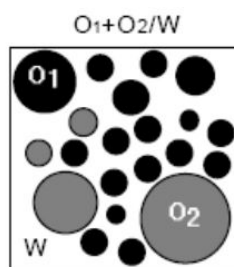


Figura 3: Emulsões Duplas (SALAGER, 2000).

Normalmente, as emulsões são acompanhadas de um agente emulsificante, isso é, um agente estabilizador da emulsão, podendo, eventualmente ser estabilizada por mais de um agente. Existem quatro tipos de agentes emulsificantes: materiais iônicos, sólidos coloidais, polímeros e surfactantes. Estes são apresentados na Figura 4.

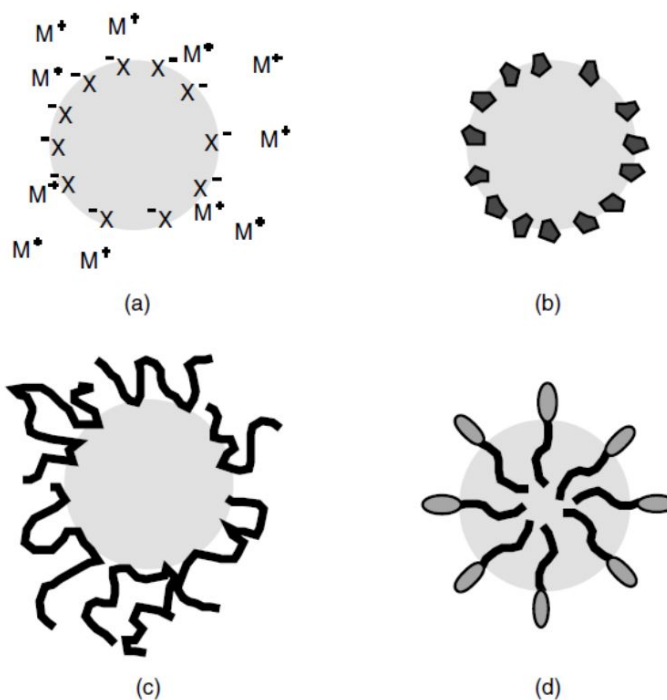


Figura 4: Agentes emulsificantes: a) íons adsorvidos, b) partículas sólidas, c) moléculas de polímeros adsorvidas e d) moléculas de surfactantes adsorvidas (MYERS, 1999).

A teoria da emulsificação é explicada por meio de três teorias distintas: a da tensão interfacial, a do filme interfacial e a da cunha orientada (CONSIGLIERI, 2018).

A teoria da tensão interfacial é baseada no fato de que todos os líquidos tendem a assumir uma forma que abranja a menor área superficial possível. Sendo assim, quando há a mistura de dois líquidos imiscíveis, surge uma força responsável por gerar uma resistência à fragmentação em partículas menores. Esta é denominada tensão interfacial. Com isso em mente, tem-se que os agentes emulsificantes tem o papel de reduzir a tensão interfacial entre os líquidos, permitindo a sua mistura e garantindo estabilidade à formulação.

Já a teoria do filme interfacial sugere que o emulgente, ou emulsificante, posiciona-se na interface entre o óleo e a água de modo a formar um filme adsorvido na superfície das gotículas, evitando assim que haja contato e coalescência entre elas. Desse modo, tem-se que quanto mais flexível e resistente for o emulgente, maior será a estabilidade da emulsão.

Por fim, a teoria da cunha orientada engloba o fato de que o emulgente possui na mesma molécula uma fração hidrofílica e uma lipofílica, o que o leva a ser preferencialmente solúvel em uma das fases, penetrando mais profundamente nesta. Em função disso, ele se orienta na superfície e no interior de cada fase em um arranjo de cunha, circundando as gotículas da fase dispersa. Este fenômeno depende tanto das propriedades químicas do emulsificante quando das propriedades das fases, assim como suas configurações geométricas.

1.3.2 Escoamento com Tampa Cisalhante

O escoamento na cavidade com uma tampa deslizante, a qual resulta em uma força de cisalhamento responsável pela movimentação do fluido, consiste em um problema já amplamente estudado na Mecânica dos Fluidos. Uma esquematização de como seria o comportamento do escoamento nessas condições é apresentada abaixo.

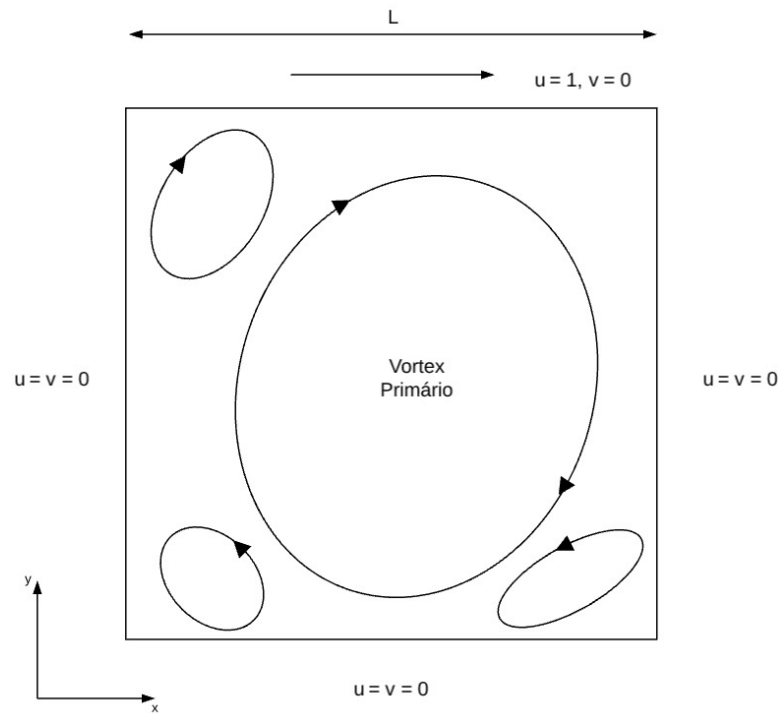


Figura 5: Esquema de escoamento com tampa deslizante.

Na figura 5, pode-se observar o esquema de uma cavidade 2D quadrada em que L é o comprimento dos lados e u consiste na velocidade na direção x e v na velocidade na direção y .

Como citado anteriormente, há um fluido, mono ou multifásico, no interior de uma cavidade quadrada cuja parede superior se movimenta horizontalmente com velocidade constante. Com isso, gera-se por meio da *Condição de Aderência*, que define que a camada de fluido imediatamente em contato com uma superfície sólida apresenta a mesma velocidade desta, um efeito cisalhante no escoamento. A partir desse efeito cisalhante, inicia-se uma movimentação circular do fluido no interior da cavidade, variando de acordo com a geometria desta e consequentemente com o número de Reynolds (que será melhor especificado ao longo do relatório).

As equações que governam este modelo físico consistem nas equações de Navier-Stokes combinadas com a equação da continuidade. Estas são descritas pelas expressões especificadas abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\nabla \mathbf{u}^2}{Re} + \mathbf{F}_c, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

em que \mathbf{u} compreende o vetor de velocidades, p a pressão, Re o número de Reynolds e \mathbf{F}_c é a força de contato.

A partir da formulação apresentada, é possível se investigar diversos aspectos do escoamento, tais como o comportamento das linhas de corrente, a vorticidade do escoamento e a relação entre o número de Reynolds e fenômeno de recirculação.

1.3.3 Convecção Natural em uma Cavidade

Outro foco de estudo deste projeto é a análise da convecção natural em uma cavidade, realizada por meio da implementação da equação da energia e ajustes das condições de contorno do problema da cavidade cisalhante. Este problema consiste na formulação numérica de um escoamento monofásico em uma cavidade submetida à convecção natural, por meio da definição de um gradiente de temperatura. Posteriormente, deseja-se adicionar outras fases ao escoamento, para o estudo de um escoamento multifásico em convecção natural.

Trata-se de um caso de convecção natural em um espaço fechado, o qual segundo OS-TRACH (1988) pode ser considerado de maior complexidade quando comparado com um caso de convecção natural externa (ou convecção livre). De acordo com o autor, isso ocorre porque para altos números de Rayleigh a teoria clássica da camada limite produz simplificações para problemas externos, as quais englobam a ideia de que a região externa à camada limite permanece inafetada por ela. Para escoamentos enclausurados, entretanto, a região externa está cercada pelas camadas limites e forma uma região central, a qual não é plenamente definida pelas condições de contorno, porém depende da camada limite, que acaba dependendo igualmente desta região.

Além disso, a importância deste estudo está principalmente na consideração de que escoamentos de fluidez induzida tendem a ser mais complicados por causa do acoplamento entre escoamento e transporte.

O modelo físico formulado para este problema é dado por uma cavidade quadrada em que as paredes superior e inferior são isoladas termicamente enquanto as paredes laterais possuem temperatura distintas, gerando assim um gradiente de temperatura. Este gradiente de temperatura é responsável pela geração de um gradiente de densidade do fluido, o qual ocasiona a movimentação do escoamento no interior da cavidade. Na Figura 6 é apresentado um esquema deste problema.

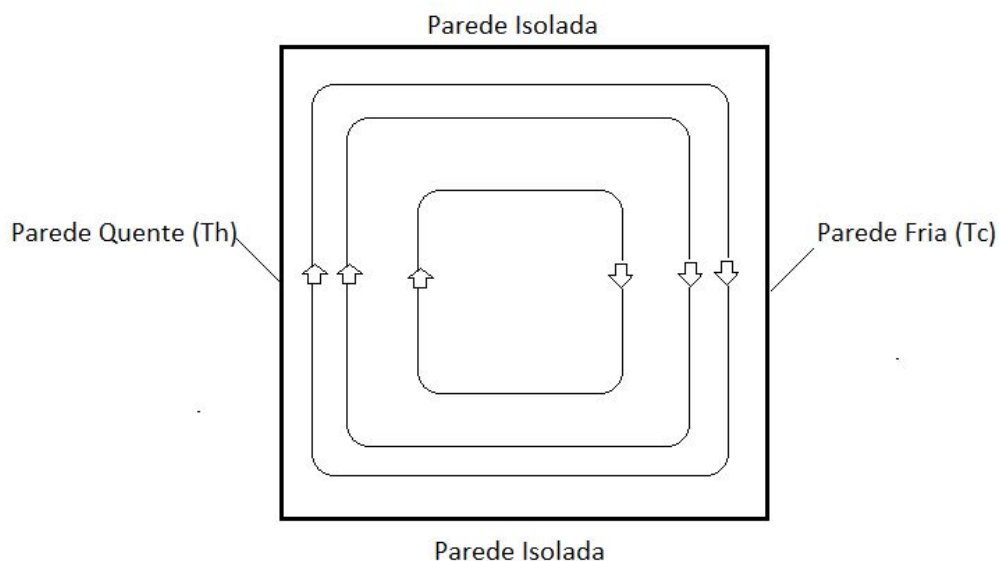


Figura 6: Esquema de escoamento em convecção natural no interior de uma cavidade.

A formulação mencionada é regida por três equações combinadas: a equação da continuidade, a equação da conservação de quantidade de movimento e a equação da energia, definidas abaixo.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \nabla^2 u \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \nabla^2 v + Ra Pr \theta \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta \quad (1.6)$$

As equações acima foram obtidas a partir da adimensionalização, em que Pr consiste no número de Prandtl, Ra no número de Rayleigh e θ consiste na temperatura adimensional.

CAPITULO 2

REVISÃO DE CONCEITOS

2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Há três equações fundamentais que regem os problemas de mecânica dos fluidos: a equação da conservação da massa, a equação da conservação da quantidade de movimento e a equação da conservação da energia.

2.1.1 Equação da Conservação da Massa

Considera-se uma superfície fechada A que engloba um volume V inteiramente preenchida por fluido. Se ρ consiste na densidade do fluido na posição \mathbf{x} em um determinado instante t , a massa m do fluido circundado pela superfície em qualquer instante pode ser dada pela integral (BATCHELOR, 1967)

$$m = \int \rho dV \quad (2.1)$$

e a taxa líquida de fluido escoando para fora através da superfície é dada por

$$\dot{m} = \int \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.2)$$

Na ausência de uma fonte de fluido para variar a vazão na região estudada, a massa do fluido deve se conservar, portanto tem-se que

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (2.3)$$

sendo o volume V é fixado no espaço e se aplicando o *Teorema da Divergência* na integral de superfície, resulta-se em

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é válida para todos os valores de V totalmente imersos no fluido, o que só é possível se a integração for igualmente zero em todos os pontos do fluido. Desse modo, tem-se que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.5)$$

em todos os pontos do fluido. A equação (2.5) é denominada *Equação da Continuidade*.

Fluidos incompressíveis são compreendidos como aqueles cuja densidade não varia no tempo nem no espaço. Portanto, para os fluidos incompressíveis a equação da continuidade pode ser expressa simplesmente por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

2.1.2 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento

A equação da conservação da quantidade de movimento parte do princípio da segunda Lei Newton expressa por

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.7)$$

em que m representa a massa de um corpo, a a sua aceleração e \mathbf{F} um vetor de forças gerado por duas fontes: forças de campo e forças superficiais.

Segundo ANDERSON et al. (2009), considerando-se um elemento infinitesimal de fluido newtoniano em movimento, pode-se definir a força de campo na direção x por $\rho f_x dx dy dz$, enquanto a força superficial é definida como

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy dz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy.$$

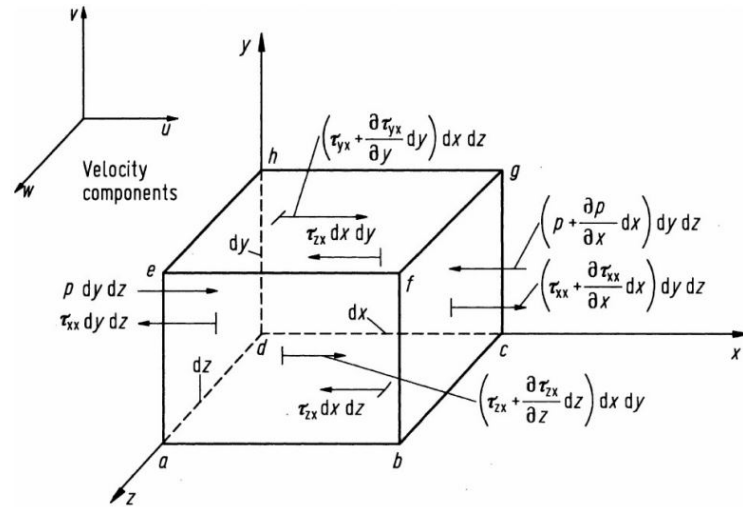


Figura 7: Esquema do elemento infinitesimal de fluido (ANDERSON et al., 2009).

Desse modo, somando-se ambas as fontes, resulta-se em uma força na direção x

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz + \rho f_x dx dy dz. \quad (2.8)$$

Sabe-se que a $\rho dx dy dz$ consiste na massa do elemento de fluido e que a aceleração consiste na variação da velocidade no tempo, ou seja, $a = \frac{Du}{Dt}$, portanto pode-se reorganizar os termos para obter

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x. \quad (2.9)$$

Do mesmo modo, para y e z têm-se

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho f_y, \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z, \quad (2.11)$$

em que

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido e λ o segundo coeficiente de viscosidade. O último é definido pela *Hipótese de Stokes*, a qual sugere que as pressões térmicas e mecânicas podem ser consideradas iguais. Essa suposição é induzida pela própria definição de pressão mecânica: $\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u}$, em que $\nabla \cdot \mathbf{u}$ é diferente de zero para escoamento compressíveis e portanto, a fim de se assegurar a igualdade $\bar{p} = p$, Stokes propôs a relação $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Por fim, substituindo-se os termos apresentados nas equações (2.12) e (2.13) nas equações (2.9), (2.10) e (2.11), têm-se

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu \partial v}{\partial x} + \frac{\mu \partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu \partial u}{\partial z} + \frac{\mu \partial w}{\partial x} \right) + \rho f_x, \quad (2.14)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu \partial v}{\partial x} + \frac{\mu \partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu \partial w}{\partial y} + \frac{\mu \partial v}{\partial z} \right) + \rho f_y, \quad (2.15)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu \partial u}{\partial z} + \frac{\mu \partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu \partial w}{\partial y} + \frac{\mu \partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho f_z. \quad (2.16)$$

Considerando-se um escoamento incompressível, isso é, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, as equações podem ser simplificadas pela equação

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.17)$$

em que \mathbf{F} consiste no vetor de forças expresso pela equação (2.7).

2.1.3 Equação da Energia

Considera-se um elemento infinitesimal de fluido definido em um volume de controle V fixo no espaço e contornado por uma superfície S qualquer, como apresentado na Figura 8.

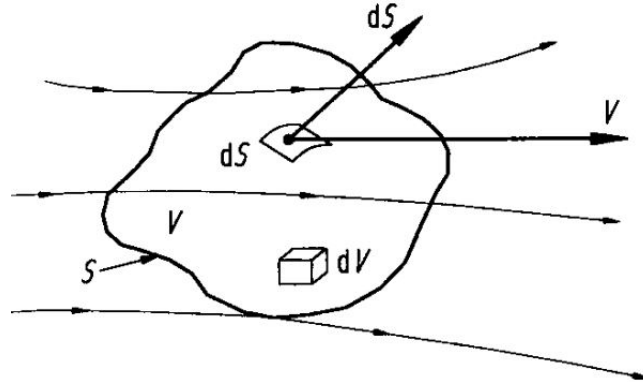


Figura 8: Volume de controle genérico considerado para a dedução da equação da energia (ANDERSON et al., 2009).

Para um volume de controle qualquer tem-se que a equação da difusão da temperatura é governada pela *Primeira Lei da Termodinâmica*, expressa por

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}. \quad (2.18)$$

Esta lei diz basicamente que a variação de energia interna e_i é equivalente à variação líquida de troca de calor somada ao trabalho realizado. Assim, pode-se definir a taxa de transferência de calor para o volume de controle desenvolvendo-se a equação (2.18) para se obter

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) dV = - \int_S \mathbf{q}'' \cdot \hat{n} ds + \int_V (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) dV, \quad (2.19)$$

A equação (2.19) define que a variação do somatório entre a energia cinética e a energia interna do escoamento deve ser igual ao somatório da taxa de calor que atravessa a superfície, expressa por \mathbf{q}'' , o trabalho realizado pelas forças de campo, no caso as força geradas pelo campo gravitacional e as forças de superfície, representadas pelo tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$.

Aplicando-se o *Teorema da Divergência*, pode-se definir a equação (2.19) toda em função do volume de controle:

$$\int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{q}'') dV + \int_V (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV. \quad (2.20)$$

Portanto,

$$\int_V \left(\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) + (\nabla \cdot \mathbf{q}'') - (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right) dV = 0. \quad (2.21)$$

Desse modo, pelo *Teorema da Localização* tem-se que se independentemente do limite de integração o resultado da integral for zero, pode-se dizer que o integrando é sempre zero. Assim, como V representa um volume qualquer, resulta-se em

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) + (\nabla \cdot \mathbf{q}'') - (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (2.22)$$

Por hipótese, assume-se que não há geração interna de calor e que toda troca de calor é dada por condução molecular, de tal modo que \mathbf{q}'' consiste na taxa de transferência de calor por condução definida por $-k\nabla T$ (ANDERSON et al., 2009). Assim, tem-se que

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (2.23)$$

A partir da identidade

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}, \quad (2.24)$$

pode-se escrever a equação (2.23) como

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e_i \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}. \quad (2.25)$$

Partindo-se do princípio da conservação da energia mecânica, tem-se que a energia cinética é equivalente ao somatório das energias provenientes das forças viscosas e de campo, resultando portanto na igualdade

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.26)$$

Pode-se assim subtrair a equação (2.26) da (2.25) para se obter

$$\rho \frac{de_i}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Finalmente, pode-se decompor tensor de tensões em um somatório entre o tensor \mathbf{P} de forças normais provenientes da pressão e o tensor $2\mu\mathbf{D}$ de forças cisalhantes. O gradiente de \mathbf{u} pode ser reescrito como um tensor simétrico \mathbf{D} , relacionado à taxa de deformação do elemento infinitesimal de fluido analisado, e um tensor assimétrico \mathbf{W} , associado à vorticidade do escoamento. Com isso, tem-se que

$$\rho \frac{de_i}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + (\mathbf{P}\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) : (\mathbf{D} + \mathbf{W}), \quad (2.28)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade. Desconsiderando-se o tensor vorticidade \mathbf{W} ,

$$\rho \frac{de_i}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + (\nabla \cdot \mathbf{u} + (2\mu\mathbf{D}:\mathbf{D})), \quad (2.29)$$

sendo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $2\mu\mathbf{D}:\mathbf{D}$ desprezível quando feita a análise de escala relativa aos outros termos da equação, e sabendo-se que a energia interna (e_i) equivale à multiplicação de uma constante pela temperatura, resulta-se na equação final para a energia

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T, \quad (2.30)$$

em que $\alpha = \frac{k}{\rho C_v}$, sendo k a condutividade térmica do fluido, ρ a densidade e C_v a capacidade calorífica a volume constante.

2.2 GRUPOS ADIMENSIONAIS

A adimensionalização de equações muitas vezes resulta no surgimento de grupos adimensionais, isso é, fatores dimensionais que quando multiplicados e/ou divididos um pelo outro resultam em um novo parâmetro adimensional.

Cada um desses parâmetros possui uma função específica na evolução do escoamento, de tal modo que o estudo dos mesmos tornou-se extremamente importante para a compreensão da mecânica dos fluidos. A seguir serão apresentados alguns grupos adimensionais importantes para a análise do problema em questão.

Primeiramente, tem-se o número de Reynolds, desenvolvido por Osborne Reynolds em 1883 em estudo de um escoamento tubular. Este é um critério responsável por definir se o escoamento é laminar, turbulento ou se ele se encontra na faixa de transição, na qual o escoamento ainda não está totalmente desenvolvido. São definidos intervalos dentro dos quais o número de Reynolds define qual é o estado do escoamento, entretanto esse intervalo varia para os escoamentos de acordo com suas respectivas geometrias. Este parâmetro pode ser definido como

$$Re = \frac{uL_c}{\nu}, \quad (2.31)$$

sendo u a velocidade do escoamento, L_c o comprimento característico e ν a viscosidade cinemática do fluido.

Outro parâmetro essencial para o estudo feito neste relatório consiste no número de Prandtl, nomeado em função de seu criador, o engenheiro alemão Ludwig Prandtl, é um parâmetro que representa a razão entre a difusão de momentum e a difusão de calor. Desse modo, por meio desse número é possível se identificar qual fator se destaca mais no escoamento estudado: a difusão viscosa ou a difusão térmica. O número de Prandtl é expresso por

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (2.32)$$

sendo ν a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica.

Para o estudo da convecção, utiliza-se o número de Nusselt, o qual avalia a razão entre a transferência de calor por convecção e a transferência de calor por condução em um fluido. Foi descoberto pelo engenheiro alemão Wilhelm Nusselt e é de extrema importância para o estudo da convecção, sendo definido como

$$Nu = \frac{hL_c}{k}, \quad (2.33)$$

em que h é o coeficiente de transferência de calor, L_c o comprimento característico e k a condutividade térmica.

O número de Rayleigh consiste em um parâmetro primordial para a convecção natural, sendo responsável por indicar a presença da força de convecção. Ele explicita se a transferência de calor se dá predominantemente por condução, valores menores de Ra , ou convecção, valores mais elevados de Ra , levando em consideração, para isso, um valor de Ra crítico. Além disso, esse critério é importante por indicar se a camada limite térmica do escoamento é laminar ou turbulenta. É dado por

$$Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)L_c^3 Pr}{\nu^2}. \quad (2.34)$$

Por fim, tem-se a capilaridade, que consiste em um parâmetro importante para a implementação da segunda fase no escoamento, sendo ela uma propriedade diretamente relacionada

à tensão interfacial entre os fluidos, de modo a indicar a relação entre as forças viscosas e à tensão interfacial. Pode ser definida como

$$Ca = \frac{U_c \mu}{\sigma}, \quad (2.35)$$

sendo U_c a velocidade característica, σ a tensão superficial. Tendo em vista que para a adimensionalização feita neste estudo, a velocidade característica é dada por

$$U_c = \frac{\alpha a}{L_c^2}, \quad (2.36)$$

em que a consiste no raio da gota implementada no escoamento e α consiste na difusividade térmica. Portanto, fazendo as devidas substituições resulta-se em

$$Ca = \frac{\alpha a \mu}{L_c^2 \sigma}. \quad (2.37)$$

2.3 CONVECÇÃO NATURAL

A convecção natural consiste em um processo de transferência de calor em que, ao se expor um fluido a um gradiente de temperatura, é provocada uma variação na sua densidade, ocasionando-se deste modo a movimentação do fluido, e consequentemente, a variação da energia nos pontos afetados por ele.

Distingue-se da convecção forçada por ser um fenômeno que ocorre na ausência de forças externas, como ventos, sendo causada exclusivamente pela variação da densidade no fluido.

Este fenômeno é resultado das forças de impulsão, isso é, forças que surgem a partir da combinação de um gradiente de densidade com forças mássicas (no caso da convecção natural, a gravidade).

2.3.1 Convecção Natural em Espaços Fechados

Ao se analisar a convecção natural, tem-se que o seu estudo em espaços fechados se aplica a diversas situações práticas do cotidiano e , portanto, apresenta grande importância.

A complicação neste estudo se encontra no fato de o fluido no interior do espaço fechado não permanecer estático. O movimento do fluido varia de acordo com a geometria da região em que está aprisionado, assim como a sua inclinação. Além disso, a temperatura das superfícies em contato com o fluido tem o papel primordial na definição do movimento do escoamento.

Para um número de Nusselt conhecido, a taxa de transferência de calor através de um espaço fechado pode ser definida por

$$\dot{Q} = hA_s(T_h - T_c) = kNuA_s \frac{(T_h - T_c)}{L_c}, \quad (2.38)$$

tendo em vista que $h = \frac{kNu}{L_c}$. Define-se a taxa de condução de calor constante através da superfície de espessura L_c , área A_s e condutividade térmica k como

$$\dot{Q} = kA_s \frac{(T_h - T_c)}{L_c}. \quad (2.39)$$

Desse modo, pode-se observar que a condução térmica e a convecção em um espaço fechado se comportam de maneira análoga, de tal modo que com a definição de uma condutividade

térmica efetiva (k_e) elas são regidas pela mesma equação. A condutividade térmica efetiva resulta das correntes de convecção e é expressa por

$$k_e = kNu. \quad (2.40)$$

Pode-se observar a consistência desta equação analisando a situação em que $Nu=1$, sendo a transferência de calor dada puramente por condução, e o $k_e = k$.

Para o problema da cavidade estudada neste relatório, utilizou-se o caso de convecção natural em espaços fechados retangulares verticais, sendo as duas faces superiores isoladas termicamente enquanto as faces laterais apresentam temperaturas distintas (Figura 9).

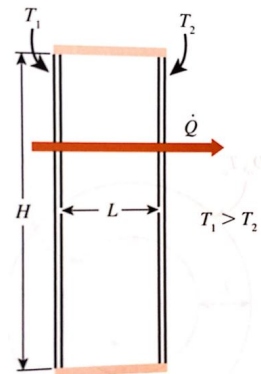


Figura 9: Convecção natural em espaços fechados retangulares verticais (ÇENGEL; GHAJAR, 2009).

Dentro dessa configuração, têm-se as seguintes correlações propostas por Berkovsky e Polevikov (1977),

$$\begin{cases} Nu = 0,18 \left(\frac{Pr}{0,2+Pr} Ra_L \right)^{0,29} & 1 < H/L < 2 \\ Nu = 0,22 \left(\frac{Pr}{0,2+Pr} Ra_L \right)^{0,28} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0,25} & 2 < H/L < 10 \end{cases} \quad (2.41)$$

de tal modo que Ra_L representa o número de Rayleigh local e Pr o número de Prandtl.

2.4 TENSÃO SUPERFICIAL

A tensão superficial compreende a propriedade em que as moléculas dos fluidos tendem a se manter unidas na superfície, formando uma espécie de membrana. Esse fenômeno é explicado pelas forças intermoleculares que fazem com que as moléculas sejam atraídas umas pelas outras.

Essas forças intermoleculares podem ser classificadas como forças de coesão e adesão. Enquanto as forças de adesão consistem nas forças de atração entre as moléculas do fluido e a superfície sólida, as forças de coesão atuam entre as moléculas, de modo que no interior do fluido elas tendem a ser atraídas por outras moléculas em todas as direções (Figura 10).

Entretanto, as moléculas presentes na superfície do fluido são atraídas apenas pelas existentes abaixo delas e pelas suas vizinhas laterais, o que faz com que elas tenham uma união mais efetiva, estando mais "empacotadas", quando comparadas com as demais. A partir deste fenômeno, forma-se uma camada de moléculas fortemente unidas, de tal modo que a pressão necessária para aumentar a área superficial desta camada consiste na tensão superficial.

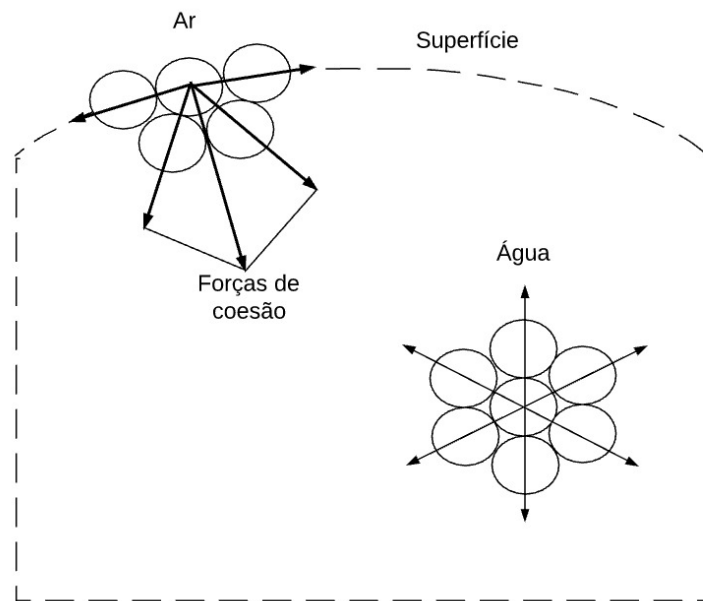


Figura 10: Forças intermoleculares nas moléculas internas e superficiais de um fluido.

CAPITULO 3

METODOLOGIA

3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

3.1.1 Princípio do Método

O princípio do Método das Diferenças Finitas consiste em se fazer uma aproximação do operador diferencial, substituindo-se as derivadas da equação por quocientes diferenciais. Esse procedimento se dá por meio da discretização de uma malha, cujo domínio é particionado no espaço e no tempo, e as aproximações da solução são computadas nos respectivos pontos de tempo ou espaço (Figura 11).

As aproximações do método são provenientes de um truncamento na série de Taylor, de onde obtêm-se também o erro de discretização ou erro de truncamento. Este erro consiste na diferença entre a solução exata e a numérica, a qual é dada pelo somatório dos produtos omitidos pelo truncamento.

Vale ressaltar também que o principal conceito por trás do método das diferenças finitas consiste no próprio conceito de derivada de uma função suave em um ponto x

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad (3.1)$$

de tal modo que quanto menor for h , melhor será a aproximação e, portanto, menor será o erro da discretização.

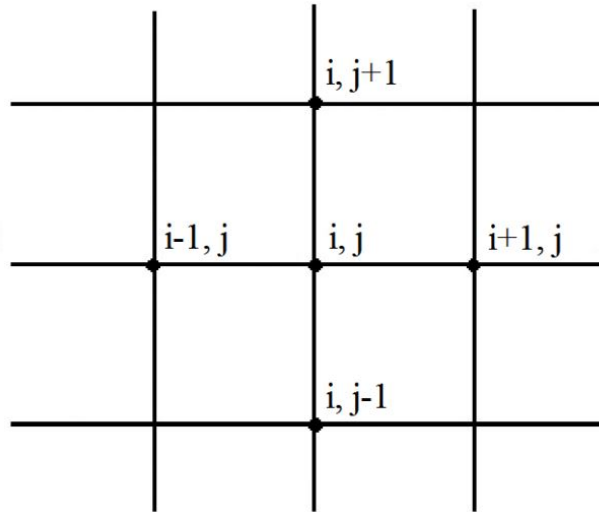


Figura 11: Malha cartesiana para discretização espacial por diferenças finitas (CZARNESKI, 2017).

3.1.2 Série de Taylor e Aproximações

Para um função contínua e diferenciável u , tem-se que a expansão da série de Taylor é expressa pela seguinte expressão:

$$u(x_i) = u(x_i) + \frac{u'(x_i)}{1!}(x-x_i) + \frac{u''(x_i)}{2!}(x-x_i)^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}(x-x_i)^3 + \dots + \frac{u^n(x_i)}{n!}(x-x_i)^n + H \quad (3.2)$$

Sendo H uma representação para os termos de maior ordem.

A partir do manuseio desta série é possível se obter aproximações de ordens conhecidas para as derivadas. Para isso pode-se, por exemplo, substituir x por x_{i+1} nos termos do lado direito da equação (3.2) a fim se obter expressões para os valores variáveis nos pontos específicos em função da variável analisada e suas respectivas derivadas. Reformulando-se portanto a equação (3.2) para a derivada de u em x_i , chega-se na expressão

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i - \dots - \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n-1}}{n!} \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_i + H. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é exata se todos os termos do lado direito da equação forem levados em consideração, mas como se sabe, os termos de ordem mais alta são desconhecidos. Entretanto, vale ressaltar que quando o valor de $x_{i+1} - x_i$ tende a zero, os termos de maior ordem são muito pequenos em comparação com os de maior ordem.

Desse modo, podem-se definir aproximações baseadas no truncamento da equação (3.3) para a obtenção das derivadas desejadas, considerando um erro da ordem do termo desconsiderado de menor ordem. Abaixo são apresentados os resultados destas aproximações

Derivada primeira:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + O(h), \quad (3.4)$$

Derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + O(h^2). \quad (3.5)$$

E assim por diante para as demais derivadas. Tem-se que h representa a distância entre dois pontos da malha.

Como pode-se observar, a ordem das derivadas primeira e segunda são diferentes. Isso ocorre um função da discretização utilizada para cada uma delas: enquanto para a derivada segunda utiliza-se o esquema das derivadas centradas, para a derivada primeira utilizou-se o esquema das derivadas atrasadas.

Entretanto, deve atentar-se ao fato de que a derivada primeira poderia ter sido discretizada por três esquemas distintos: derivadas centradas, derivadas atrasadas e derivadas adiantadas. Estes são apresentados abaixo

- Esquema das Derivadas Adiantadas (*FDS*):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + O(h),$$

- Esquema das Derivadas Atrasadas (*BDS*):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} + O(h),$$

- Esquema das Derivadas Centradas (*CDS*):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} + O(h^2).$$

Como pode-se observar, para as discretizações em diferenças finitas utilizando os esquemas das derivadas atrasadas e adiantadas, resulta-se um método de primeira ordem. Já para a discretização por diferenças centradas, o método obtido apresenta segunda ordem. Portanto, ao discretizar o problemas, deve-se atentar ao tipo de interpolação utilizado para que se mantenha a consistência do método.

3.1.3 Malha Deslocada

A malha deslocada, ou *staggered grid*, consiste em uma malha na qual as variáveis não se localizam nos pontos de malha, mas sim nas faces (velocidades) e/ou no centro da célula (pressão), armazenado-se desse modo cada variável em uma posição. A vantagem de se utilizar essa malha está em se evitar uma dissociação ímpar entre as velocidades e a pressão, fator muitas vezes recorrente em malhas colocadas, isso é, malhas em que as variáveis são armazenadas no mesmo local.

Na solução proposta, foi construída uma malha deslocada uniforme para a resolução da pressão e das velocidades nas direções x e y . Na Figura 12, é apresentada uma ilustração esquemática da malha utilizada.

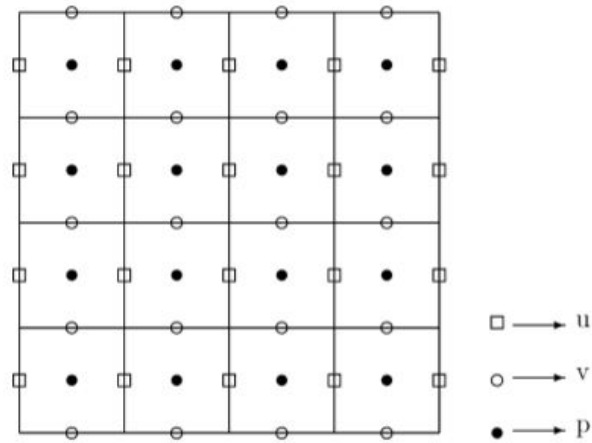


Figura 12: Malha deslocada (ITO; QIAO, 2008).

3.1.4 Malha Coalocada

A malha coalocada compreende uma malha em que duas ou mais variáveis são armazenadas no mesmo local. Apesar de ser mais simples, sua utilização é normalmente recomendada apenas quando as variáveis alocadas no mesmo ponto são independentes entre si.

Neste projeto, essa malha foi utilizada para a implementação da equação da energia e da equação de evolução da função distância, visando a inserção da gota no escoamento, sendo essas acrescentadas ao centro de cada célula. Portanto, posicionaram-se as variáveis θ , ϕ e p no mesmo ponto de malha.

3.2 MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO TEMPORAL

3.2.1 Método de Euler Implícito

No escoamento em uma cavidade com tampa cisalhante, utilizou-se para a discretização temporal das equações de Navier Stokes o método de Euler implícito. Este consiste em um método implícito de primeira ordem. Ele pode ser descrito por:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{u})^{n+1}. \quad (3.6)$$

Desse modo, pode-se reposicionar os termos da equação de modo a separar os termos em n e em $n + 1$:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \Delta t \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{u})^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n. \quad (3.7)$$

Por fim, a expressão acima pode ser resolvida numericamente com a ajuda de um método de resolução de sistemas lineares.

3.2.2 Método de Crank-Nicolson

Para a discretização temporal das equações de Navier Stokes e da equação da energia nos escoamentos envolvendo a presença da convecção natural, utilizou-se o método de Crank-

Nicolson.

Este consiste em um dos possíveis métodos de interpolação temporal aplicáveis em diferenças finitas. Trata-se de um método de discretização de segunda ordem, sendo implícito no tempo e considerado de alta estabilidade. É preferível ao *Método de Euler* por ser um método de maior ordem. Sua implementação se dá a partir do seguinte princípio:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = f(y^{n+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2). \quad (3.8)$$

A partir da expressão acima, pode-se implementar o método para as equações de Navier-Stokes e para a equação da energia:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} + [-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + Pr \nabla^2 \mathbf{u}]^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = [-\mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \nabla^2 \theta]^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Como é de se esperar, deseja-se obter as variáveis em um passo de tempo $n+1$, de tal modo que os valores são calculados variando no tempo de 1 em 1, até se chegar na iteração final. Portanto, não se possuem valores armazenados nos passos temporais definidos por $n + \frac{1}{2}$.

Entretanto, o método de Crank-Nicolson é definido para um passo de tempo $n + \frac{1}{2}$, sendo necessário, portanto, se fazer extrapolações para a obtenção destes valores. As extrapolações utilizadas para as equações em questão são apresentadas abaixo.

A extrapolação dos termos $\nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ e $\nabla^2 \theta^{n+\frac{1}{2}}$ é dada simplesmente pela média temporal dos dois valores possíveis de serem calculados mais próximos

$$\nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^2 \mathbf{u}^n), \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 \theta^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\nabla^2 \theta^{n+1} + \nabla^2 \theta^n). \quad (3.12)$$

Já a extrapolação dos termos $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$ e $(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^{n+\frac{1}{2}}$ é feita a partir do *Método de Adams-Bashforth*, que compreende um método linear de vários passos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias. A extrapolação se dá por

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1}, \quad (3.13)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^{n-1}. \quad (3.14)$$

3.3 MÉTODO DE PROJEÇÃO

Para a solução das equações de Navier-Stokes, é necessário encontrar os valores de pressão e velocidade simultaneamente, fator que complica a solução do problema haja vista a interdependência entre as variáveis, isso é, para o cálculo de uma, é necessário o valor da outra.

Sendo assim, CHORIN (1968) desenvolveu o primeiro método de resolução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, denominado *Método de Projeção*. Este

método consiste em se dividir as equações de Navier-Stokes em equações distintas, dissociando assim a pressão e a velocidade. Para isso, utilizam-se variáveis complementares com a função única de auxiliar os cálculos.

O método formulado por Chorin é governado pelas seguintes expressões:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{u}^*)^{n+1}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad (3.16)$$

em que \mathbf{u}^* consiste na velocidade tentativa (*trial velocity*), a qual é implementada como substituta de \mathbf{u}^{n+1} . Esse método é definido de modo que ao se isolar \mathbf{u}^* na equação da pressão e substituí-lo na equação da velocidade, recupera-se a equação de Navier-Stokes, sendo portanto consistente.

Para o cálculo da pressão, pode-se aplicar o divergente em ambos os lados da equação 3.16, o que resulta em:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla^2 p^{n+1}. \quad (3.17)$$

Pelo princípio da incompressibilidade, sabe-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (3.18)$$

Portanto, a equação para o cálculo da pressão é dada por:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (3.19)$$

A partir da equação 3.17, obtem-se o valor da pressão, podendo-se por fim calcular os valores definitivos para as velocidades:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}. \quad (3.20)$$

O método de Chorin, apesar de ter representado um grande avanço na resolução das equações de Navier-Stokes, apresenta uma falha, que veio a ser corrigida pouco tempo depois de seu surgimento por meio da implementação da chamada *Equação de Compatibilidade para a Pressão* (KIM; MOIN, 1985).

Essa falha consiste no fato de que, após feitos todos os cálculos necessários, unindo-se novamente as equações parciais, resulta-se na expressão

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = -\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{Re} \nabla^2 (\nabla p^{n+1}), \quad (3.21)$$

sendo $\partial t \rightarrow 0$. Portanto, o último termo da equação (3.21) tenderia a zero, causando assim uma alteração nas equações originais de Navier-Stokes. Para corrigir essa alteração, pode-se utilizar uma aproximação para a pressão por meio da equação de compatibilidade supracitada, dada por

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla \chi^{n+1}, \quad (3.22)$$

sendo χ uma aproximação para a pressão. Desse modo têm-se as novas equações para a velocidade definidas por

$$\nabla^2 \chi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \chi^{n+1}. \quad (3.24)$$

Por fim, tem-se que a pressão é dada por

$$p^{n+1} = \chi^{n+1} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^*. \quad (3.25)$$

Como as equações são discretizadas em função de \mathbf{u}^* e χ , evidentemente as condições de contorno também são expressas para estas variáveis. A definição das condições de contorno das velocidades tentativas (\mathbf{u}^*) deve considerar também as devidas correções relativas à equação de compatibilidade, obedecendo à seguinte relação:

$$\nabla^2 \chi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (3.26)$$

resultando portanto na expressão

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \chi^{n+1}. \quad (3.27)$$

Desse modo, sabendo-se que $\nabla \chi^{n+1} \cdot \hat{n} = 0$, é possível se definir as componentes normal e tangencial das condições de contorno pelas equações (3.28) e (3.29), respectivamente.

$$\mathbf{u}^* \cdot \hat{n} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{n}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{u}^* \cdot \hat{t} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{t} + \Delta t \nabla \chi^{n+1} \cdot \hat{t}. \quad (3.29)$$

Além disso, é bom observar que apesar de o método estar descrito para uma discretização temporal pelo método de Euler, pode-se utilizar o procedimento análogo para uma discretização por Crank-Nicolson.

3.4 CÁLCULO DOS TERMOS CONVECTIVOS

Visando uma maior precisão no cálculo dos termos convectivos da equação do movimento, foram implementados dois métodos numéricos adicionais à equação: o *Upwinding* de primeira ordem, interessante por levar em consideração a direção do escoamento no cálculo destes termos, e o método de Hamilton-Jacobi para a interpolação polinomial essencialmente não oscilatória (ENO) de segunda ordem da solução numérica das leis de conservação (OSHER, 2003).

Quando $\mathbf{u} < 0$, o escoamento se desloca da direita para a esquerda, sendo nesse caso mais interessante a utilização da derivada adiantada, uma vez que os valores mais à direita são os principais responsáveis pela movimentação do fluido. Analogamente, quando $\mathbf{u} > 0$, o escoamento se dá da esquerda para a direita, sendo a utilização da derivada atrasada mais desejável. Com base nisso, o *Upwinding* consiste em se gerar uma condição para que as combinações supracitadas sejam devidamente atendidas.

Feito isso, pode-se por fim aprimorar o método ao se utilizar uma aproximação mais acurada para os cálculos de $\nabla \mathbf{u}$, resultando assim em uma formulação de ordem mais alta. Assim, implementou-se o ENO de segunda ordem para o cálculo da derivada.

Considerando que:

$$D^- \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(i-1)}{\Delta x}, \quad (3.30)$$

$$D^+ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}(i+1) - \mathbf{u}(i)}{\Delta x}, \quad (3.31)$$

podem-se definir as primeiras diferenças divididas,

$$D_{i+\frac{1}{2}}^1 \mathbf{u} = (D^+ \mathbf{u}), \quad (3.32)$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^1 \mathbf{u} = (D^- \mathbf{u}). \quad (3.33)$$

Desse modo, as segundas diferenças divididas podem ser facilmente definidas por

$$D_i^2 \mathbf{u} = \frac{D_{i+\frac{1}{2}}^1 \mathbf{u} - D_{i-\frac{1}{2}}^1 \mathbf{u}}{2\Delta x}. \quad (3.34)$$

Feito isso, utilizam-se as diferenças divididas para reconstruir um polinômio de segundo grau na forma:

$$\mathbf{u}(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + Q_2(x), \quad (3.35)$$

em que $Q_0(x)$ representa o termo constante, $Q_1(x)$ o termo de primeiro grau e $Q_2(x)$ o termo de segundo grau.

Diferenciando a equação (3.31) em x , tem-se que

$$\mathbf{u}_x(x_i) = Q_1'(x_i) + Q_2'(x_i). \quad (3.36)$$

A partir da equação (3.32), pode-se calcular $(\mathbf{u}_x^+)_i$ e $(\mathbf{u}_x^-)_i$, sendo

$$Q_1'(x_i) = D_{k+\frac{1}{2}}^1 \mathbf{u}, \quad (3.37)$$

$$Q_2'(x_i) = D_k^2 \mathbf{u}, \quad (3.38)$$

em que $k = i$ para $(\mathbf{u}_x^+)_i$ e $k = i - 1$ para $(\mathbf{u}_x^-)_i$.

3.5 IMPLEMENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Para se estabelecer o fenômeno da convecção natural, a partir do estudo já feito para a cavidade com tampa deslizante, é necessária a implementação da equação da energia e a alteração

das condições de contorno. Desse modo têm-se que as equações governantes já implementadas no problema são definidas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.39)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.40)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta\rho(T_h - T_c), \quad (3.41)$$

em que as equações (3.35), (3.36) e (3.37) representam respectivamente a equação da continuidade, a equação de Navier-Stokes para a velocidade na direção horizontal (u) e a equação de Navier-Stokes para a velocidade na direção vertical (v).

A equação da energia que será implementada nessa etapa pode ser expressa na sua forma dimensional por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (3.42)$$

de tal modo que T consiste na temperatura, ρ na densidade do fluido e k na condutividade térmica. Vale ressaltar que o escoamento estudado é definido como incompressível, equação (3.35), ρ é constante em todo o escoamento e que nesta etapa da simulação a condutividade térmica k foi também considerada constante em todo o escoamento.

Com a inserção da nova equação, é necessária uma nova adimensionalização das equações, a qual é feita a partir dos seguintes parâmetros apresentados por DAS, ROY e BASAK (2017):

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_c}, & y^* &= \frac{y}{L_c}, & u^* &= \frac{uL_c}{\alpha}, & v^* &= \frac{vL_c}{\alpha}, & \theta &= \frac{T-T_c}{T_h-T_c}, \\ p^* &= \frac{pL_c^2}{\rho\alpha^2}, & t^* &= \frac{t\alpha}{L_c^2}, & Pr &= \frac{\nu}{\alpha}, & \text{e} & & Ra &= \frac{g\beta(T_h-T_c)L_c^3 Pr}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Sendo os parâmetros adimensionais representados pelos fatores acompanhados pelo * e L_c o comprimento característico da cavidade, tem-se que ao se fazer as respectivas substituições, resulta-se nas seguintes equações adimensionais:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + RaPr\theta, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \right). \quad (3.46)$$

Por fim, nas equações acima têm-se que x e y consistem nos deslocamentos horizontal e vertical e u e v são as velocidades horizontal e vertical, respectivamente. Além disso, T_h e T_c são as temperaturas das superfícies quente e fria respectivamente, definidas a partir das condições de contorno do problema e p consiste na pressão.

Verfica-se também, por meio da adimensionalização, o surgimento dos números adimensionais de Prandtl (Pr) e de Rayleigh (Ra) e do gradiente de temperatura θ .

3.6 CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT

Após a implementação da equação da energia, validaram-se os resultados por meio do cálculo do número de Nusselt. Para isso, calculou-se o número de Nusselt na parede quente para diferentes regimes de troca de calor, variando o número de Rayleigh. A partir do trabalho SHI e KHODADADI (2003), obteve-se a equação para o cálculo de Nusselt local Nu_l , dada por

$$Nu_l = \frac{\partial \theta}{\partial x^*}, \quad (3.47)$$

por meio da qual pode-se calcular o Nusselt local para qualquer ponto na parede quente ($x^*=0$). Entretanto, o valor usualmente utilizado como referência no escoamento consiste no Nusselt médio ou total, que consiste na integração em toda a parede dos valores de Nu_l , como define a equação a seguir:

$$Nu = - \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial x^*} dy^*. \quad (3.48)$$

Para se realizar numericamente a integração expressa pela equação (3.48), utilizou-se a *Regra do Trapézio*, a qual consiste em um método de integração dado pela aproximação da área contornada pela função em questão por uma sequência de trapézios. Este método pode ser expresso pela seguinte formulação:

$$Nu = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n Nu_l(i) + Nu_l(i+1). \quad (3.49)$$

3.7 FUNÇÃO LEVEL SET

O método de Level Set é utilizado a fim de se atribuir ao escoamento uma gota que possibilitará a análise do fluido bifásico. Esse método consiste basicamente na aplicação de uma função distância que possibilita a percepção da presença da gota pelo escoamento. Ao se manter o Level Set como uma função distância suave, é possível se definir uma espessura fixa no tempo para a interface da gota. De acordo com SUSSMAN et al.(1997), no algoritmo formulado a interface consiste na região em que a função level set é 0:

$$\Gamma = \{x | \phi(x, t) = 0\}. \quad (3.50)$$

Definindo-se que Ω compreende a região do domínio que ocupa o lado externo à interface, utiliza-se para a implementação da função distância a convenção

$$\phi(x, t) \begin{cases} > 0 & x \in \Omega \\ < 0 & x \notin \Omega \\ = 0 & x \in \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (3.51)$$

Além disso, tem-se que a componente normal a partir do interior da gota para fora da interface (\mathbf{n}) e a curvatura da interface (κ) podem ser facilmente expressas em termos de

$\phi(x, t)$:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \Big|_{\phi=0}, \quad (3.52)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right) \Big|_{\phi=0}. \quad (3.53)$$

Como a interface está submetida a um campo de velocidade, ela se movimentará de acordo com \mathbf{u} . Portanto, a equação de evolução de ϕ é dada por

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0. \quad (3.54)$$

Como é de se esperar, com a inserção da interface no escoamento, novas forças de contato serão acrescentadas ao escoamento, as quais representam o efeito físico da gota no escoamento principal. Com isso, tem-se que a nova definição para a equação de Young-Laplace que representa a força de contato (\mathbf{F}_c) nas equações de Navier-Stokes é dada por

$$\mathbf{F}_c = \sigma\kappa\delta(\phi)\hat{\mathbf{n}}, \quad (3.55)$$

em que σ é a tensão superficial e $\delta(\phi)$ consiste na função delta de Dirac. A função delta de Dirac é utilizada nesta formulação para garantir que a força de contato esteja presente apenas na interface e a função normal para assegurar que esta força será normal à interface em todos os pontos.

Para suavizar a função delta de Dirac e evitar que as mudanças entre as regiões aconteçam muito bruscamente, utiliza-se a função Heaviside $H(\phi)$, dada por

$$H(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < -\epsilon; \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \text{sen} \left(\frac{\pi\phi}{\epsilon} \right) \right], & |\phi| \leq \epsilon; \\ 1, & \phi > \epsilon, \end{cases} \quad (3.56)$$

em que ϵ é a metade da espessura definida para a interface da gota.

Desse modo, a função delta de Dirac pode ser escrita em termo de $H(\phi)$

$$\delta(\phi) = \frac{\partial H(\phi)}{\partial\phi}. \quad (3.57)$$

Assim, tem-se por fim que

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0, & |\phi| > \epsilon; \\ \frac{1}{2\epsilon} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi\phi}{\epsilon} \right) \right], & |\phi| \leq \epsilon. \end{cases} \quad (3.58)$$

3.7.1 Implementação da equação evolutiva de ϕ

Visando garantir uma maior suavidade no deslocamento da gota pelo escoamento e, conseqüentemente, uma maior precisão na observação dos fenômenos físicos envolvidos, foram utilizados métodos de alta ordem para o cálculo da equação evolutiva da função distância. Assim, definiu-se primeiramente a utilização do método de Runge-Kutta com diminuição da variação total (TVD) para a discretização temporal da equação, resultando em uma formulação de terceira ordem no tempo.

Segundo OSHER et al. (2003), o método se desenvolve de acordo com cinco etapas, em que a primeira é dada por uma interpolação simples feita pelo *Método de Euler Explícito* para um valor provisório de ϕ^{n+1} , como é apresentado na equação(3.59) a seguir:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi]^n. \quad (3.59)$$

A partir desta aproximação inicial, podem-se definir expressões igualmente explícitas para as interpolações de ϕ^{n+2} , $\phi^{n+\frac{1}{2}}$ e $\phi^{n+\frac{3}{2}}$:

$$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} - \Delta t [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi]^{n+1}, \quad (3.60)$$

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\phi^n + \frac{1}{4}\phi^{n+2}, \quad (3.61)$$

$$\phi^{n+\frac{3}{2}} = \phi^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t [\mathbf{u} \cdot \nabla \phi]^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.62)$$

Realizadas as quatro etapas explicadas anteriormente, chega-se finalmente a um interpolação de terceira ordem no tempo para ϕ , por meio da qual o valor anterior de ϕ^{n+1} será sobreposto. Esta é dada por:

$$\phi^{n+1} = \frac{1}{3}\phi^n + \frac{2}{3}\phi^{n+\frac{3}{2}}. \quad (3.63)$$

Para o cálculo dos termos convectivos, implementou-se a metodologia de Halmilton-Jacobi WENO, que consiste em uma combinação ponderada das derivadas provenientes do método de HJ-ENO de terceira ordem, em que a soma dos pesos resulta em 1. Assim como feito para o cálculo dos termos convectivos da equação do movimento na seção 3.4, utilizou-se a combinação do *Upwinding* com o WENO para a obtenção de uma ordem superior, neste caso obtendo um método de quinta ordem.

Dito isso, apresenta-se a seguir a formulação utilizada para a implementação do método de HJ-WENO:

$$\phi_x^1 = \frac{v_1}{3} - \frac{7v_2}{6} + \frac{11v_3}{6}, \quad (3.64)$$

$$\phi_x^2 = -\frac{v_2}{6} + \frac{5v_3}{6} + \frac{v_4}{3}, \quad (3.65)$$

$$\phi_x^3 = \frac{v_3}{3} + \frac{5v_4}{6} - \frac{v_5}{6}, \quad (3.66)$$

em que $v_1 = D^- \phi_{i-2}$, $v_2 = D^- \phi_{i-1}$, $v_3 = D^- \phi_i$, $v_4 = D^- \phi_{i+1}$ e $v_5 = D^- \phi_{i+2}$. Com isso, resulta-se em

$$\phi_x^- = \omega_1 \phi_x^1 + \omega_2 \phi_x^2 + \omega_3 \phi_x^3. \quad (3.67)$$

Para o cálculo de ϕ_x^+ , pode-se aplicar o procedimento análogo em que $v_1 = D^+ \phi_{i+2}$, $v_2 = D^+ \phi_{i+1}$, $v_3 = D^+ \phi_i$, $v_4 = D^+ \phi_{i-1}$ e $v_5 = D^+ \phi_{i-2}$.

Por fim, é importante ressaltar que para a obtenção da condição ótima do método, deve-se adotar $\omega_1 = 0, 1$, $\omega_2 = 0, 6$ e $\omega_3 = 0, 3$.

3.7.2 Reinicialização de ϕ

A fim de se assegurar que durante a simulação as variáveis responsáveis pela manutenção de ϕ na solução numérica não sofrem alterações drásticas, capazes de promover perda de definição na interface, é interessante a implementação de um método de reinicialização da função distância, aplicado para um certo valor de passos de tempo, entre um determinado número de iterações.

Para isso, acrescentou-se ao código a equação de reinicialização proposta por OSHER et al. (2003):

$$\frac{\delta\phi}{\tau} + S(\phi)[|\nabla\phi| - 1] = 0, \quad (3.68)$$

em que τ é dado por $\frac{\Delta x}{3}$ e $S(\phi)$ é a função sinal, expressa por

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi + |\nabla\phi|^2(\Delta x)^2}}. \quad (3.69)$$

Assim como na equação evolutiva, a interpolação temporal da equação de reinicialização foi feita por meio do RK-TVD de terceira ordem e os termos convectivos da equação foram calculados com o auxílio da combinação entre WENO e *Upwinding*.

Apesar do processo de reinicialização ser extremamente importante para a manutenção da curvatura da gota, ele consiste em uma correção que acarreta em uma considerável perda de área para a partícula. Desse modo, ao se implementar um método de redefinição da distância, deve-se atentar simultaneamente ao valor do gradiente de ϕ e à taxa de perda de massa por iteração.

Nesta pesquisa, optou-se por utilizar a reinicialização em todas as iterações, desenvolvendo 3 passos temporais para cada.

3.8 VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS

Com a implementação da função Level Set, gera-se um escoamento multifásico composto por dois fluidos distintos. Como é de se esperar, em casos reais, estes dois fluidos apresentam propriedades diferentes entre si, sendo portanto interessante o estudo do efeito gerado no escoamento pela variação destas.

Desse modo, redefiniu-se a equação da energia de tal modo que as propriedades térmicas dos fluidos que compõem o escoamento, consideradas inicialmente constantes, sejam variáveis ao longo da função distância (ϕ).

Assim, tem-se que a equação da energia reformulada é dada por

$$C_v(\phi) \frac{D\theta}{Dt} = \nabla \cdot (k(\phi) \nabla \theta), \quad (3.70)$$

em que $C_v(\phi)$ e $k(\phi)$ consistem na capacidade calorífica a volume constante e na condutividade térmica, respectivamente, sendo ambas adimensionais. Esses parâmetros são definidos em função das propriedades pré-determinadas de cada fluido e da posição em ϕ na qual se encontram por meio das expressões

$$C_v(\phi) = \frac{C_{v1}}{C_{v2}} + \left(1 - \frac{C_{v1}}{C_{v2}}\right) H(\phi), \quad (3.71)$$

$$k(\phi) = \frac{k_1}{k_2} + \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)H(\phi), \quad (3.72)$$

sendo as propriedades definidas como 1 relativas ao fluido no interior da gota e as definidas como 2 relativas ao fluido externo (Figura 13).

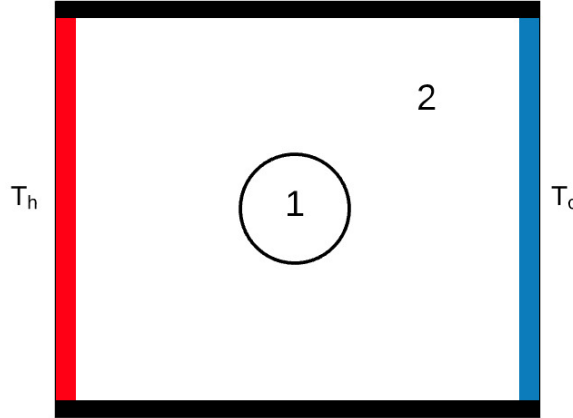


Figura 13: Esquema do escoamento bifásico com propriedades térmicas variáveis.

3.9 EQUAÇÕES FINAIS PARA O ESCOAMENTO MULTIFÁSICO

A partir da formulação de Level Set apresentada e das respectivas modificações no sistema, deve-se fazer as alterações necessárias nas equações do movimento e da energia para a manutenção da coerência do problema, levando em conta que as propriedades térmicas dos dois fluidos foram consideradas diferentes, porém a viscosidade foi mantida igual para ambos.

Assim, tem-se que as equações a serem resolvidas para o problema do escoamento multifásico na cavidade em convecção natural são:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.73)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.74)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta\rho(T_h - T_c), \quad (3.75)$$

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (3.76)$$

Para fins de simplificação numérica, adimensionalizaram-se as equações, resultando nas equações finais para o escoamento. Vale ressaltar que os parâmetros utilizados para a adimensionalização desta etapa são os mesmos apresentados na seção 3.5. Desse modo, obteve-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Pr \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + RaPr\theta, \quad (3.78)$$

$$C_v(\phi) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta \right) = \nabla \cdot (k(\phi) \nabla \theta). \quad (3.79)$$

3.10 VARIAÇÃO DA ÁREA DA GOTA

Como citado na seção 3.7.2, é interessante, para o bom desenvolvimento da simulação, o controle da taxa de perda de área sofrido pela gota. Para isso, calculou-se a área para cada iteração a partir de uma média de nove pontos da função Heaviside, expressa pela seguinte equação:

$$A = \int_{\Gamma} H(\phi) dA = \frac{h^2}{24} \left[15H(\phi(i, j)) + \sum_{m,n=-1}^1 H(\phi(i+m, j+n)) \right]. \quad (3.80)$$

3.11 DESLOCAMENTO DO CENTRO DE GRAVIDADE DA GOTA

Uma boa maneira de se analisar o deslocamento da gota pelo escoamento consiste em se rastrear a trajetória do seu centro de gravidade ao longo de um tempo computacional suficientemente grande. Assim, pode-se calcular as componentes do CG da partícula para cada iteração pela equação:

$$CG_x = \frac{1}{A} \int \tilde{x} \cdot H(\phi) dA, \quad (3.81)$$

em que A consiste na área da partícula e $H(\phi)$ novamente na função Heaviside. O procedimento análogo pode ser feito pra o cálculo da componente vertical (CG_y) do centro de gravidade.

3.12 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como se pode acompanhar ao longo da metodologia, nesta etapa do trabalho dois fenômenos físicos foram estudados por meio de três problemas relacionados porém diferentes. Portanto, a seguir serão apresentadas as condições de contorno de cada um deles, para uma melhor compreensão de como cada situação foi pensada e formulada.

3.12.1 Cavidade Cisalhante

- Parede Superior:

$$\begin{cases} u^* = 1, \\ v^* = 0, \\ \frac{dp^*}{dy^*} = 0. \end{cases} \quad (3.82)$$

- Parede Inferior:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ \frac{dp^*}{dy^*} = 0. \end{cases} \quad (3.83)$$

- Parede Direita:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ \frac{dp^*}{dy^*} = 0. \end{cases} \quad (3.84)$$

Parede Esquerda:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ \frac{dp^*}{dy^*} = 0. \end{cases} \quad (3.85)$$

3.12.2 Convecção Natural

- Parede Superior:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ dp^*/dy^* = 0, \\ d\theta/dy^* = 0. \end{cases} \quad (3.86)$$

- Parede Inferior:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ dp^*/dy^* = 0, \\ d\theta/dy^* = 0. \end{cases} \quad (3.87)$$

- Parede Direita:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ dp^*/dy^* = 0, \\ \theta = 0. \end{cases} \quad (3.88)$$

- Parede Esquerda:

$$\begin{cases} u^* = 0, \\ v^* = 0, \\ dp^*/dy^* = 0, \\ \theta = 1. \end{cases} \quad (3.89)$$

3.13 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para a resolução do sistema linear resultante da discretização das equações é necessária a utilização de um solucionador de sistemas lineares eficiente e, de preferência, com boa convergência, sendo capaz de fornecer bons resultados com o mínimo de iterações possível.

Para se garantir a obtenção destes requisitos, optou-se por realizar um estudo de diferentes *solvers* para garantir a utilização do de melhor convergência. Foram analisados quatro métodos para solucionadores de sistemas lineares: Método do Gradiente, Método do Gradiente

Conjugado, Método do Gradiente Conjugado com Pré-condicionamento Diagonal e Método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado com SOR Simétrico. As deduções e explicações dos métodos apresentadas a seguir foram retiradas do artigo de SHEWCHUK (1994).

Estes métodos são amplamente utilizados para a solução de sistemas lineares na forma

$$Ax = b \quad (3.90)$$

em que x representa o vetor que se deseja calcular, b um vetor já conhecido e A uma matriz quadrada, simétrica e positiva definida. Eles se baseiam em reescrever a equação (3.86) na sua formulação quadrática, a qual compreende uma função escalar de um vetor dado pela forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, \quad (3.91)$$

sendo c uma constante escalar, de tal modo que ao se derivar a função f , chega-se em

$$f'(x) = \frac{1}{2}A^T x + \frac{1}{2}Ax - b. \quad (3.92)$$

Como A é simétrica, recupera-se equação inicial

$$f'(x) = Ax - b. \quad (3.93)$$

Neste caso tem-se que definindo-se $f'(x)$ como zero, obtém-se a forma inicial $Ax=b$, a qual consiste em uma solução crucial do sistema, resultando em uma de suas raízes. Desse modo, sendo A , além de simétrica, positiva definida, tem-se que essa solução consiste em um mínimo de $f(x)$, portanto a equação (3.89) pode ser resolvida encontrando-se um valor de x que minimize $f(x)$. Abaixo é apresentada uma representação dos contornos da função quadrática $f(x)$.

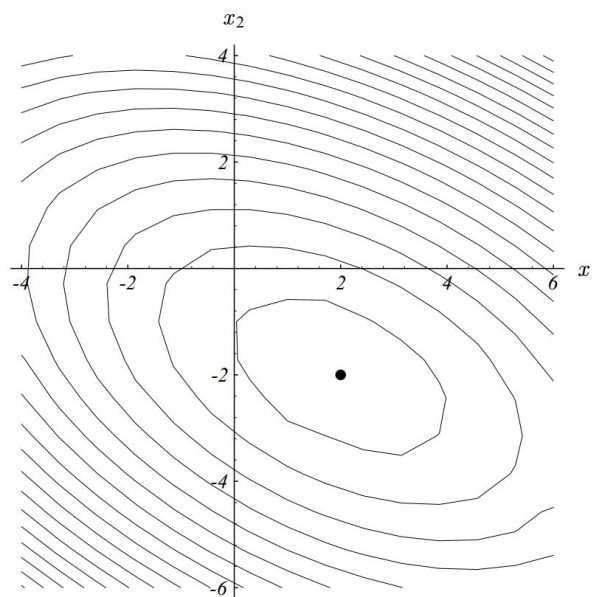


Figura 14: Curvas de $f(x)$ constante (SHEWCHUK, 1994).

3.13.1 Método do Gradiente

No método do gradiente, parte-se de um ponto arbitrário x_0 e delinea-se a parabolóide pegando uma série de pontos x_1, x_2, \dots , até que se atinja uma distância suficientemente pequena da solução procurada x .

A evolução do método é dada pela definição de uma linha de busca que, em cada passo, indica a direção que apresenta um decrescimento mais rápido de $f(x)$. Esta consiste na direção oposta a $f'(x)$ e que, de acordo com a equação (3.89), pode ser expressa por

$$-f'(x_i) = b - Ax_i. \quad (3.94)$$

Além disso, a equação (3.90) compreende a definição de resíduo, isso é, parâmetro que indica o quão longe se está do valor correto de b . Vale ressaltar também que o resíduo não é igual ao erro (e_i), o qual consiste na diferença entre o valor numérico obtido e o valor exato.

Desse modo, tem-se que a evolução da solução em cada passo é dada por

$$x_1 = x_0 + \alpha r_0, \quad (3.95)$$

em que α é selecionado a fim de se minimizar a função f ao longo da linha de busca.

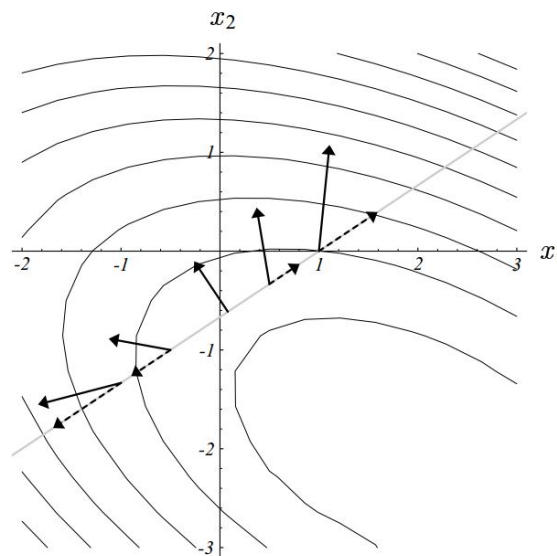


Figura 15: Gradiente $f'(x)$ em diferentes direções ao longo da linha de busca (SHEWCHUK, 1994).

Por fim, tem-se que o método do gradiente por ser dado por:

$$r_i = b - Ax_i, \quad (3.96)$$

$$\alpha_i = \frac{r_i r_i}{r_i A r_i}, \quad (3.97)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i r_i, \quad (3.98)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A r_i. \quad (3.99)$$

3.13.2 Método do Gradiente Conjugado

Para uma melhor compreensão do método do gradiente conjugado, é necessário se conhecer o *Método das Direções Conjugadas*. Este método parte da ideia de se definir uma direção de busca d_i ortogonal, de tal modo que a mesma direção não seja visitada mais de um vez, resultando portanto na resolução do problema em uma iteração. A evolução do método baseia-se na equação

$$x_{i+1} = x_i + \alpha d_i, \quad (3.100)$$

sendo d_i a direção ortogonal de busca e o α um valor que pode ser encontrado partindo-se do fato que o erro e_{i+1} deve ser ortogonal a d_i . Se o erro for ortogonal a d_i prova-se matematicamente que a direção d_i não precisará ser revisitada.

A partir desta condição, tem-se que:

$$d_i e_{i+1} = 0, \quad (3.101)$$

$$d_i(e_i + \alpha d_i) = 0, \quad (3.102)$$

$$\alpha = \frac{d_i e_i}{d_i d_i}. \quad (3.103)$$

Entretanto, este método não pode ser aplicado, uma vez que e_i é desconhecido. A partir disso, desenvolveu-se o *Método do Gradiente Conjugado*.

Para dedução do método utiliza-se um *Subespaço de Krylov*, que consiste em um subespaço criado a partir da aplicação repetida de uma matriz a um vetor. Este apresenta vantagens ao estabelecer que cada resíduo é ortogonal à direção de busca anterior e, conseqüentemente, é ortogonal ao resíduo anterior. Com isso, define-se

$$r_i r_j = 0, \quad i \neq j. \quad (3.104)$$

A partir disso, a *Fatoração de Gram-Schmidt*, responsável por se estabelecer uma direção de busca ortogonal, é simplificada na forma

$$\beta = \frac{r_{i+1} r_{i+1}}{r_i r_i}, \quad (3.105)$$

de tal modo que o Método do Gradiente conjugado pode ser finalmente descrito por

$$d_0 = r_0 = b - Ax_0, \quad (3.106)$$

$$\alpha_i = \frac{r_i r_i}{d_i A d_i}, \quad (3.107)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i, \quad (3.108)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i, \quad (3.109)$$

$$\beta = \frac{r_{i+1}r_{i+1}}{r_i r_i}, \quad (3.110)$$

$$d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1}d_i. \quad (3.111)$$

3.13.3 Pré-condicionamento do Gradiente Conjugado

O pré-condicionamento é uma técnica de aprimorar a condição de uma matriz. Assume-se uma matriz M simétrica e positiva definida para uma aproximação de A , que seja mais fácil de inverter. Pode-se resolver a equação $Ax = b$ indiretamente por meio da equação

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b. \quad (3.112)$$

Se a curvatura da matriz M for maior que a curvatura de A , é possível resolver iterativamente a equação(3.90) mais rapidamente do que o problema original. A questão é que apesar de M e A serem simétricos, a matriz M^{-1} não é.

O Método do Gradiente Conjugado pré-condicionado é expresso por

$$r_0 = b - Ax_0, \quad (3.113)$$

$$d_0 = M^{-1}r_0, \quad (3.114)$$

$$\alpha_i = \frac{r_i M^{-1}r_i}{d_i A d_i}, \quad (3.115)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i, \quad (3.116)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i, \quad (3.117)$$

$$\beta = \frac{r_{i+1} M^{-1}r_{i+1}}{r_i M^{-1}r_i}, \quad (3.118)$$

$$d_{i+1} = M^{-1}r_{i+1} + \beta_{i+1}d_i. \quad (3.119)$$

Desse modo, o fator que vai determinar o quão eficaz é o pré-condicionamento consiste na escolha da matriz M . Neste trabalho analisou-se dois valores distintos de M : a matriz diagonal de A e a matriz resultante do método de relaxação de SOR (*Successive over-relaxation*) simétrico, expresso por SSOR.

3.14 VERIFICAÇÃO DA ORDEM DO MÉTODO

3.14.1 Ordem de Acurácia

Considera-se uma aproximação numérica de um valor exato u em função de um parâmetro h que representa o tamanho da malha ou o passo de tempo, definida por \tilde{u}_h . Se o método numérico é de ordem p , existe um número C independente de h , tal que

$$|\tilde{u}_h - u| \leq Ch^p, \quad (3.120)$$

para valores suficientemente pequenos de h . Sabe-se também que a taxa de convergência do método é dada por h^p . Vale ressaltar ainda que C normalmente depende do valor exato de u e que o erro $\tilde{u}_h - u$ depende suavemente de h . Portanto

$$\tilde{u}_h - u = Ch^p + O(h^{p+1}). \quad (3.121)$$

3.14.2 Determinando a Ordem de Acurácia para u Desconhecido

A abordagem utilizada consiste em se analisar razões de diferenças entre \tilde{u}_h computadas em diferentes valores de h . Desse modo, tem-se que

$$\frac{\tilde{u}_h - \tilde{u}_{h/2}}{\tilde{u}_{h/2} - \tilde{u}_{h/4}} = \frac{Ch^p - C(h/2)^p + O(h^{p+1})}{C(h/2)^p - C(h/4)^p + O(h^{p+1})} = \frac{1 - 2^{-p} + O(h)}{2^{-p} - 2^{-2p} + O(h)} = 2^p + O(h). \quad (3.122)$$

CAPITULO 4

RESULTADOS

4.1 SOLUCIONADORES DE SISTEMAS LINEARES

Antes de se iniciar a análise dos problemas propostos para este trabalho, foi feito um estudo específico para a comparação de possíveis solucionadores de sistemas lineares, visando selecionar o com melhor convergência para se utilizar ao longo de toda a pesquisa.

Para este estudo, resolveu-se um problema simples de difusão térmica 2D em uma cavidade quadrada modelado a partir de condições de contorno de Dirichlet, utilizando-se quatro métodos de solução de sistemas lineares distintos para a comparação de seus respectivos desempenhos: método do gradiente, método do gradiente conjugado, método do gradiente conjugado com pré-condicionamento diagonal e método do gradiente conjugado com pré-condicionamento por SOR simétrico.

A análise do desempenho das subrotinas desenvolvidas para a resolução dos sistemas lineares pode ser facilmente obtida por meio da construção de gráficos que relacionam o decrescimento do resíduo com o número de iterações necessárias. Portanto, a seguir apresenta-se o resultado deste estudo:

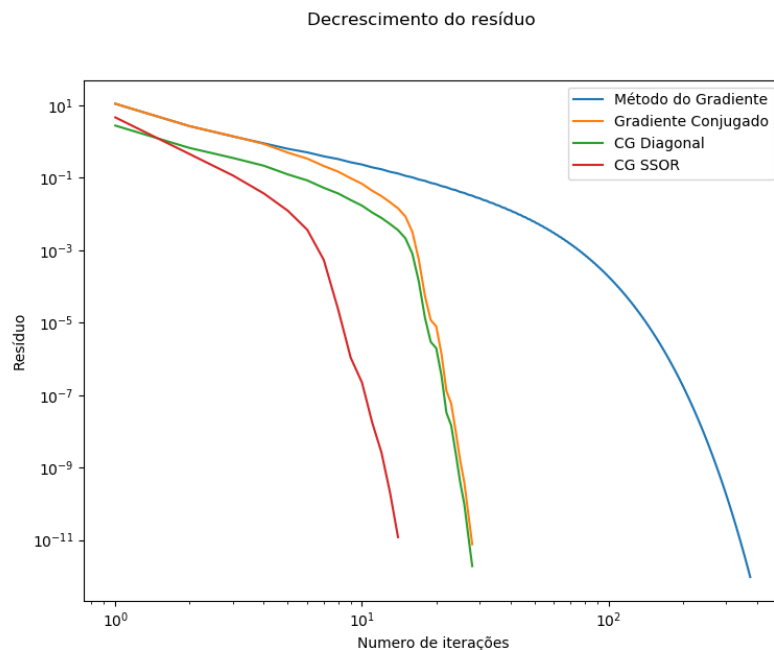


Figura 16: Diagrama de decrescimento do resíduo para cada *solver*.

Como pode-se observar pela Figura 16, o *solver* com melhor convergência dentre os analisados consiste no método do gradiente conjugado pré-condicionado por SOR simétrico. Portanto, utilizou-se este *solver* para a resolução de todos os problemas investigados nesta pesquisa.

4.2 ESCOAMENTO CISALHANTE

O problema inicial resolvido neste projeto consiste em uma simulação numérica 2D para resolução das equações de *Navier-Stokes* em uma cavidade quadrada com tampa deslizante, a qual, como já explicado mais detalhadamente na introdução, gera uma tensão cisalhante no fluido responsável pela sua movimentação.

O objetivo principal dessa análise consiste na observação do efeito da tensão cisalhante nas velocidades do escoamento e na verificação do fenômeno da recirculação, recorrente para problemas com altos números de Reynolds. Para isso, investigaram-se os resultados da variação do número de Reynolds e do refinamento da malha.

Por fim, para garantir que a simulação numérica foi bem sucedida, validaram-se os resultados a partir dos obtidos previamente por Ghia et al. (1982). Além disso, utilizou-se para a interpolação temporal o *Método de Euler Implícito*, o qual consiste em um método de primeira ordem e, para fins de verificação, calculou-se a ordem do método para garantir que não houve uma maior propagação inesperada de erros numéricos.

Na Figura 17 é apresentado um esquema da cavidade simulada e suas condições de contorno:

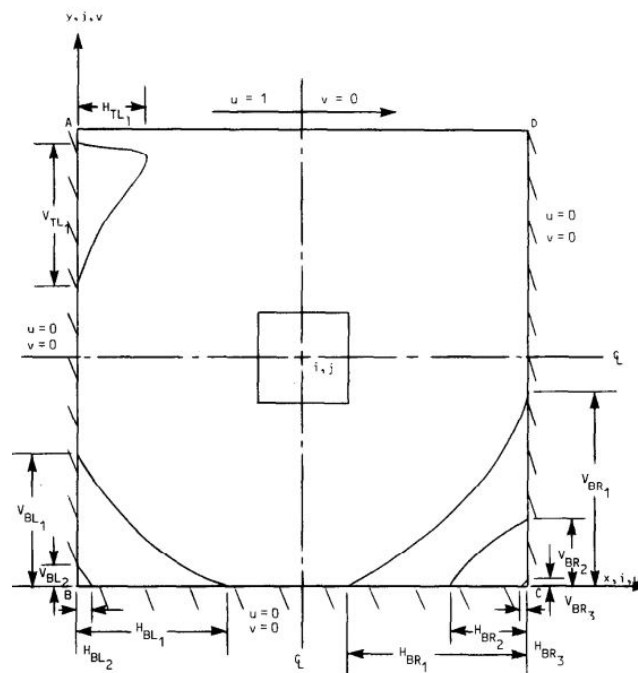


Figura 17: Desenho esquemático da cavidade simulada (GHIA et al., 1982).

4.2.1 Refinamento da Malha

Uma importante análise quando se trata de simulações numéricas para o estudo da dinâmica dos fluidos consiste na comparação de resultados obtidos a partir de malhas de tamanhos distintos. Portanto, abaixo são apresentados resultados para malhas de 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 , 256×256 e 512×512 , para uma variação temporal $\Delta t = 10^{-3}$ e $Re=100$.

Como resultados obtidos para a velocidade em x (u), tem-se:

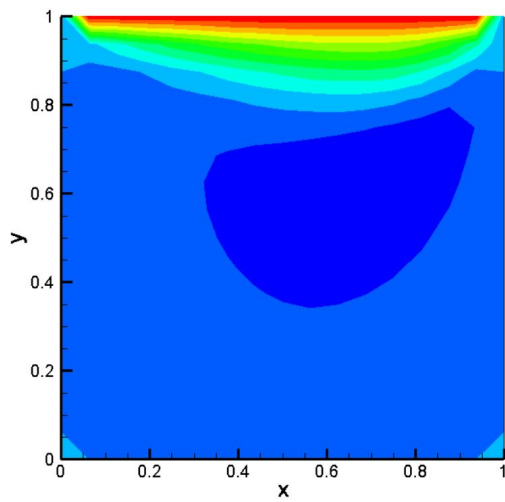
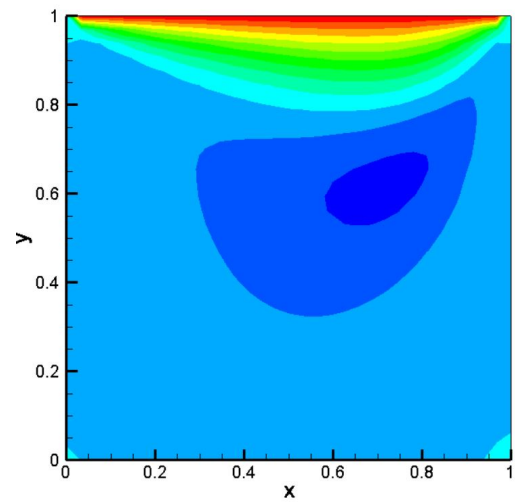
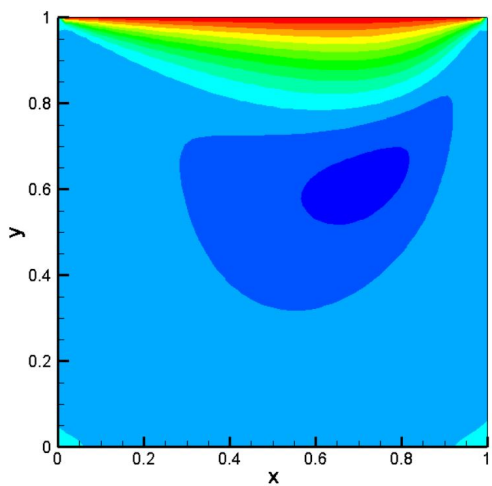
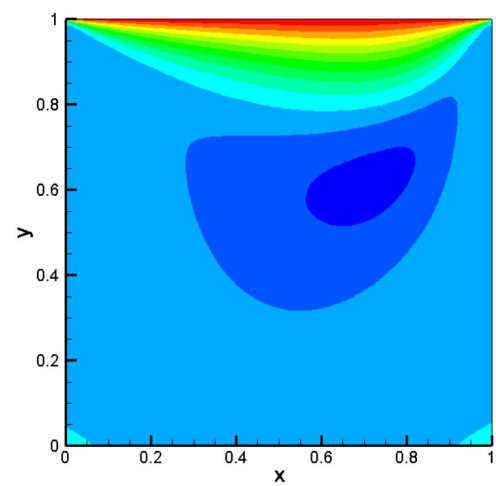
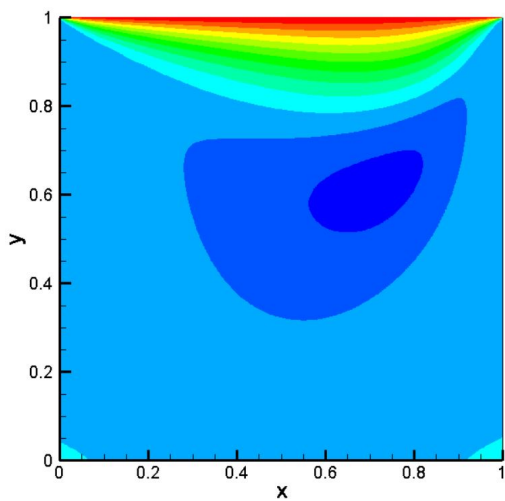
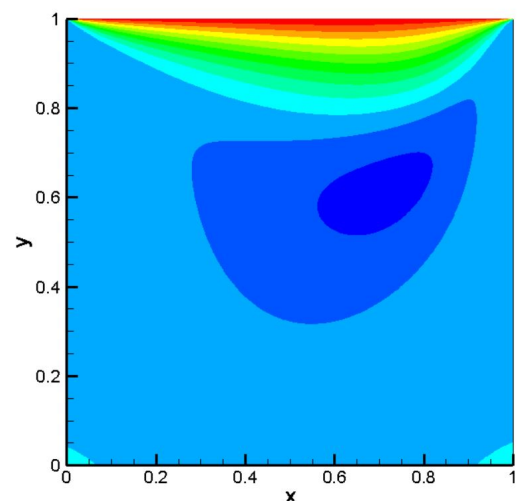
(a) 16×16 (b) 32×32 (c) 64×64 (d) 128×128 (e) 256×256 (f) 512×512

Figura 18: Resultados obtidos para o comportamento da velocidade em x (u).

Como resultados obtidos para a velocidade em y (v), tem-se:

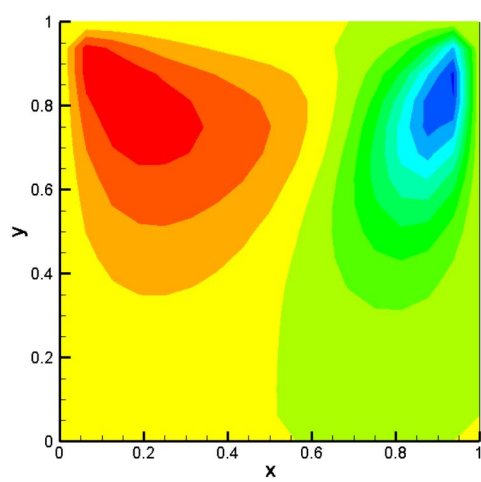
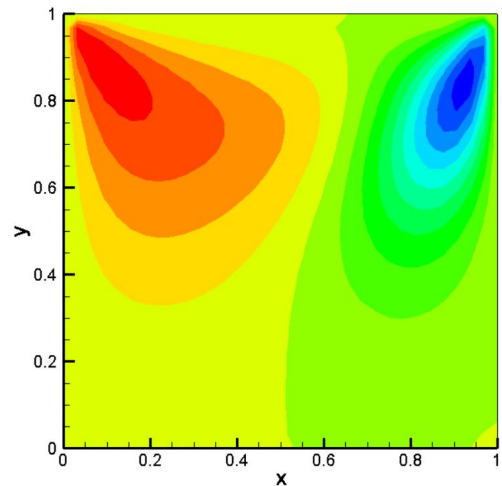
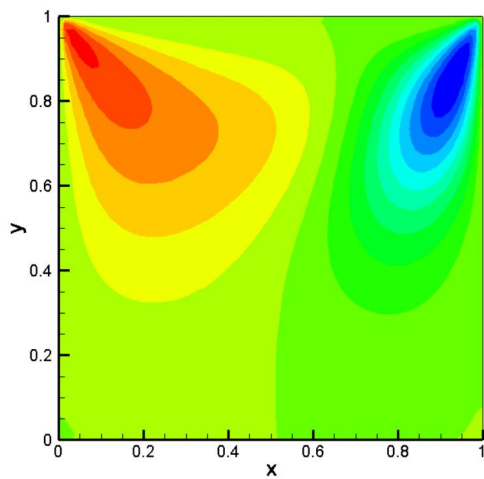
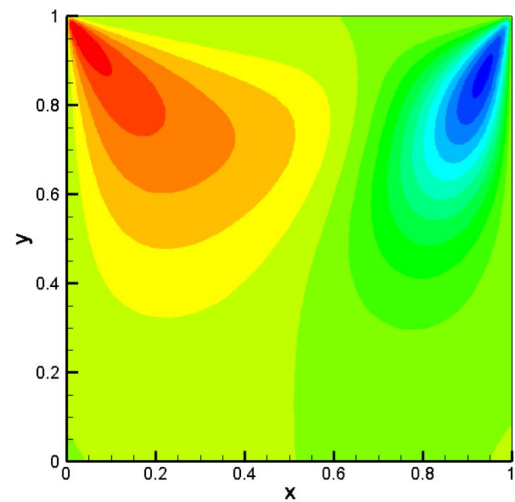
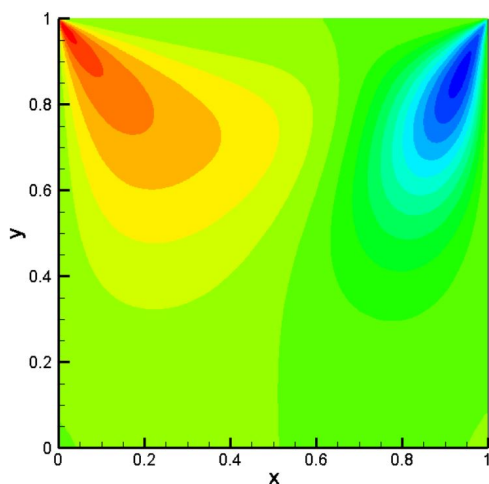
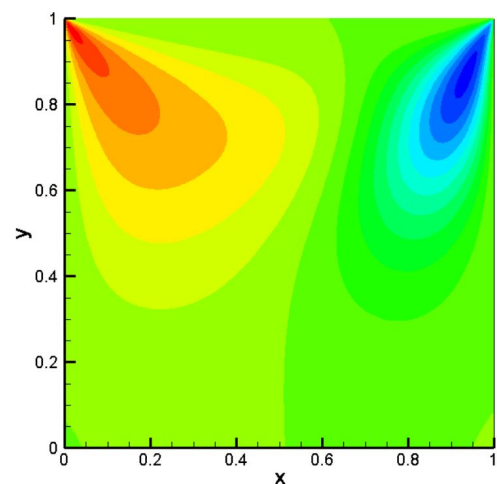
(a) 16×16 (b) 32×32 (c) 64×64 (d) 128×128 (e) 256×256 (f) 512×512

Figura 19: Resultados obtidos para o comportamento da velocidade em y (v).

4.2.2 Validação da Ordem do Método

Para a verificação da ordem do método utilizou-se o procedimento explicado na seção (3.14), aplicando-se na equação (3.122) os valores calculados para a componente horizontal da velocidade (u) a partir de malhas de 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 , 256×256 e 512×512 . Estes valores foram calculados no mesmo ponto físico da malha (no centro geométrico) independente do seu refinamento por meio da *Interpolação de Lagrange*.

Por fim, tem-se que a formulação para o cálculo da ordem do método é dada por:

$$p = \frac{\log\left(\frac{\tilde{u}_h - \tilde{u}_{h/2}}{\tilde{u}_{h/2} - \tilde{u}_{h/4}}\right)}{\log 2}. \quad (4.1)$$

Tabela 1: Verificação da ordem do Método.

n x n	\tilde{u}_h	$\tilde{u}_h - \tilde{u}_{h/2}$	$\frac{\tilde{u}_h - \tilde{u}_{h/2}}{\tilde{u}_{h/2} - \tilde{u}_{h/4}}$	p
16×16	-0,145587	0,013707	3,525206	1,817707
32×32	-0,159293	0,003888	4,075472	2,026967
64×64	-0,163181	0,000954	4,094421	2,033659
128×128	-0,164135	0,000233	4,017241	2,006205
256×256	-0,164368	0,000058	-	-
512×512	-0,164426	-	-	-

Como pode-se observar na tabela 1, obteve-se na simulação numérica uma interpolação de segunda ordem para a velocidade. Este resultado indica que a implementação do *Método de Projeção* alcançou a ordem esperada pela metodologia proposta.

4.2.3 Variação do Número de Reynolds

Outro aspecto investigado neste projeto consistiu na maneira como o escoamento se comporta na cavidade com diferentes valores para o *Número de Reynolds*. Como se sabe, o número de Reynolds representa um indicador da relação entre as forças de inércia e as viscosas, de tal modo que quanto maior for este parâmetro, maior será o efeito da inércia.

Além disso, entende-se o número de Reynolds como um importante indicador de se o escoamento é turbulento ou laminar, de modo que para números mais elevados de Reynolds (baseando-se em um valor limite para a comparação) sabe-se que o escoamento tende a ser tornar cada vez mais turbulento.

A partir disso, tem-se por fim que o quão maior for o número de Reynolds, maior será a incidência do fenômeno da recirculação, fator que pode ser muito bem observado pelos resultados obtidos e apresentados a seguir.

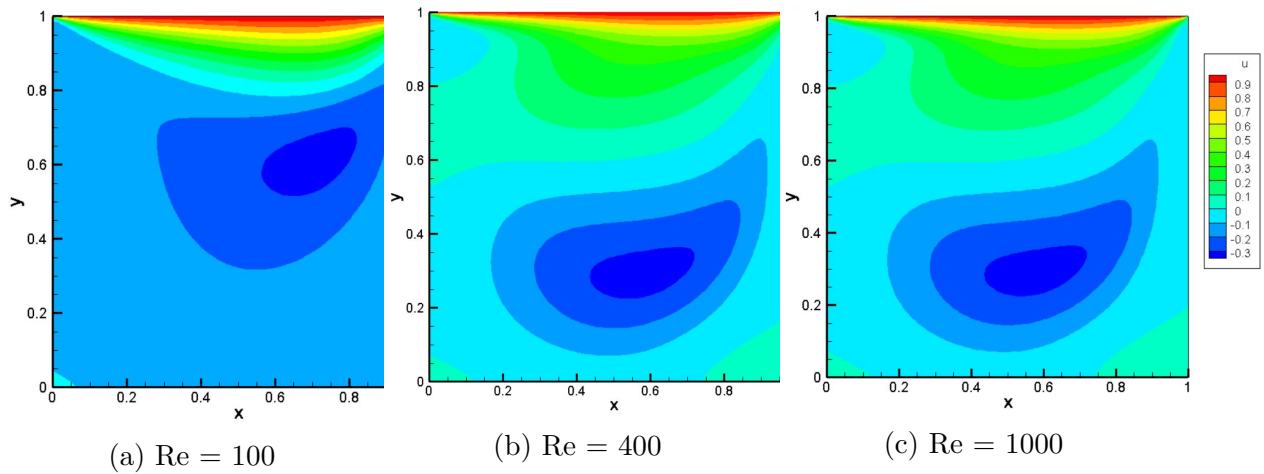


Figura 20: Resultados obtidos para u .

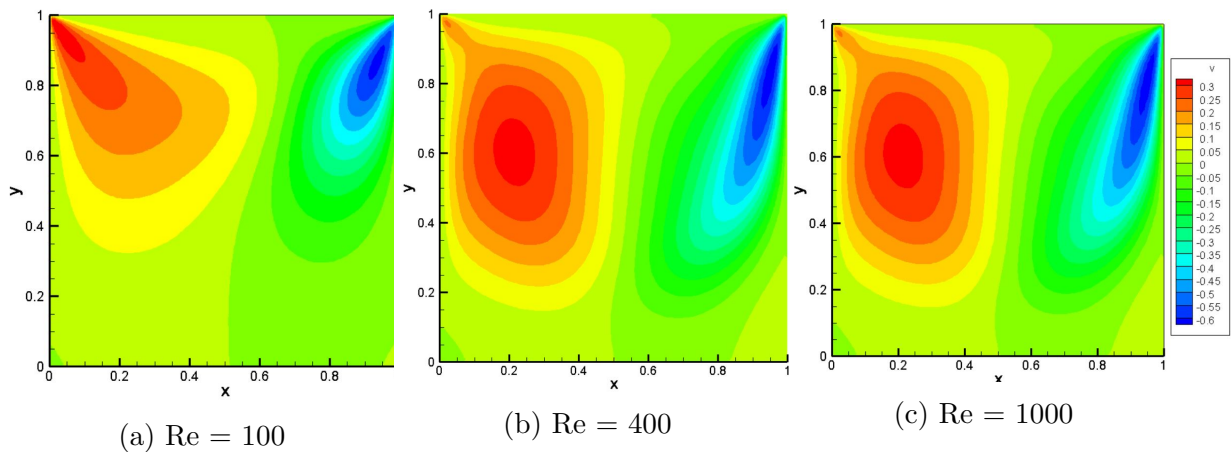


Figura 21: Resultados obtidos para v .

4.2.4 Validação dos Resultados

Apesar de ser possível verificar pelos resultados apresentados anteriormente que o escoamento está se comportando de acordo com o esperado, é interessante fazer a validação com trabalhos feitos anteriormente, a fim de se assegurar que os resultados obtidos foram realmente satisfatórios.

Para isso, utilizaram-se os resultados fornecidos por Ghia et al. (1982), que em seu artigo fornecem tabelas com os valores obtidos para as velocidades u e v analisadas no centro geométrico da cavidade para malhas de 129×129 . Essas velocidades foram analisadas na forma de gráficos, nos quais foram plotadas em função do número de iterações.

Encontra-se também no artigo um gráfico com os resultados de diferentes autores para este mesmo problema (Figuras 23 e 24), incluindo os resultados obtidos pelos autores em questão. Estes gráficos fornecem uma boa noção de como deveria se comportar o campo de velocidade no centro da cavidade, sendo reproduzido neste relatório para os presentes resultados.

Re	100	400	1000	3200	5000	7500	10000
Source	a	b	c	d	e	f	g
Present	—	—	—	—	—	—	—
Rubin and Khosla [1977]	△		▲				
Nallasamy & Prasad [1977]	□		■				□
Agarwal [1981]	○	◐	●	○		○	

Figura 22: Legenda dos gráficos apresentados nas figuras 23 e 24 (GHIA et al., 1982)

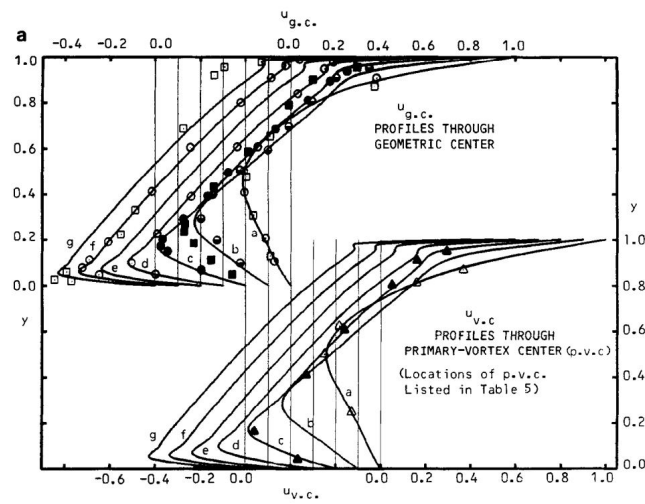


Figura 23: Perfil da velocidade u ao longo do centro geométrico e do vórtice primário (GHIA et al., 1982).

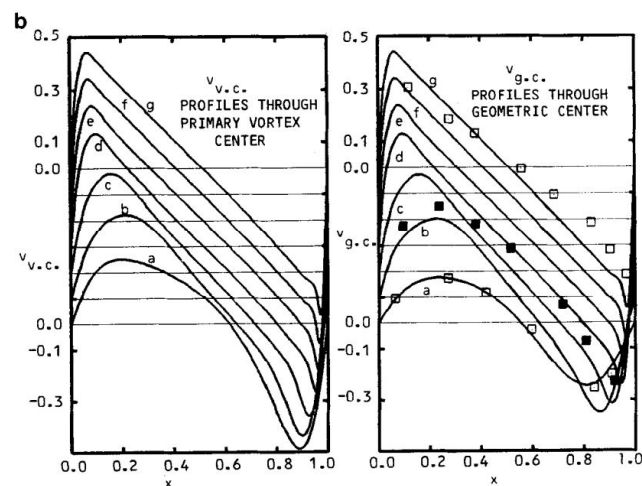
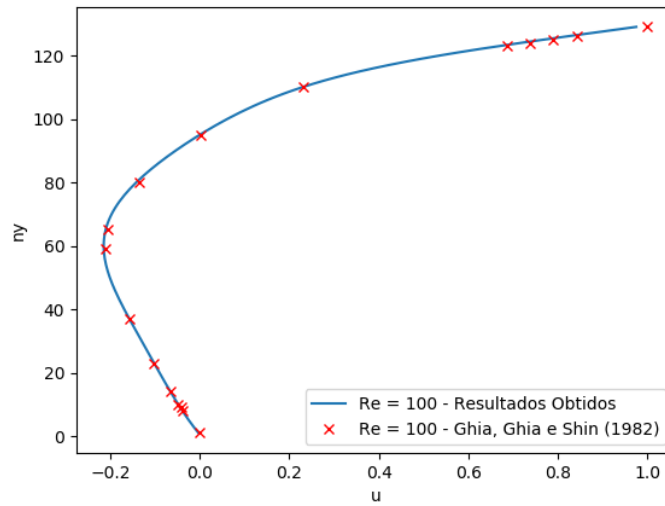
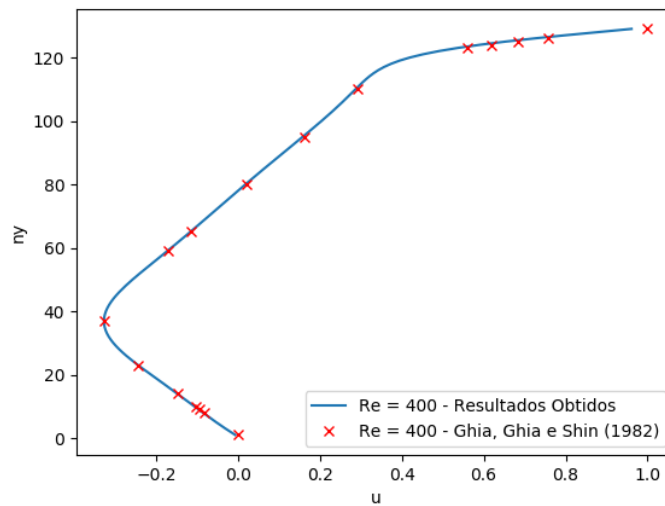
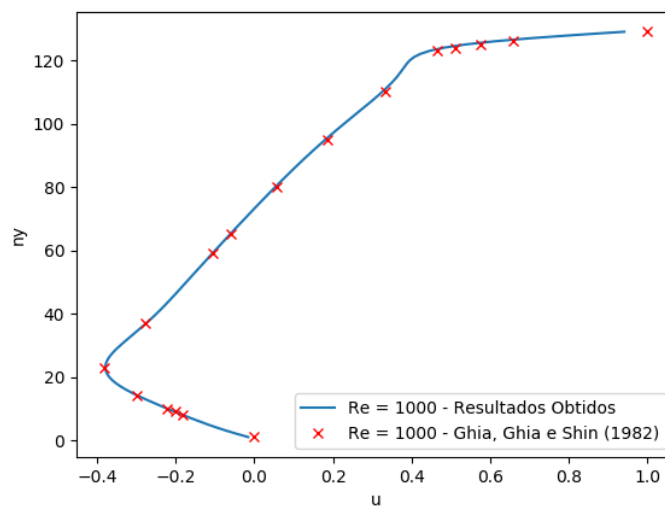
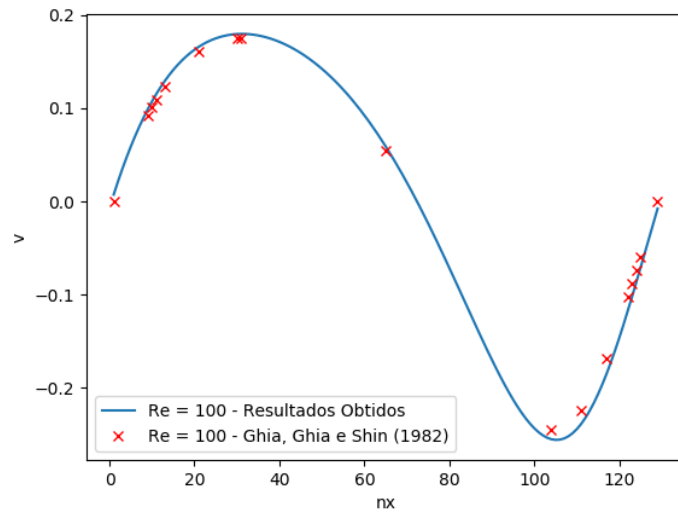
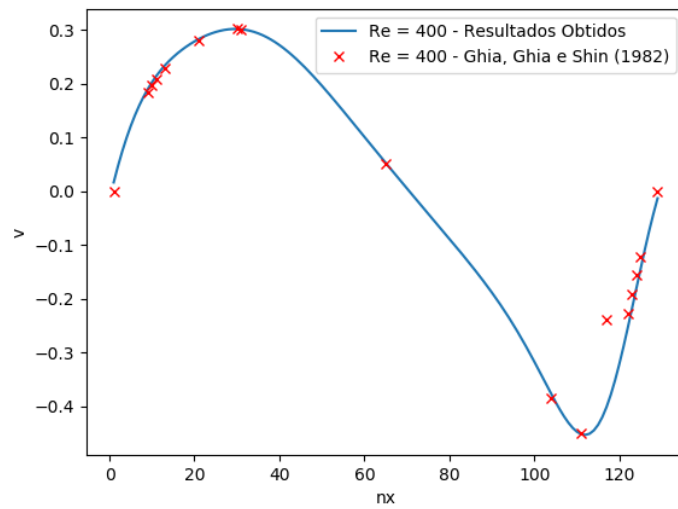
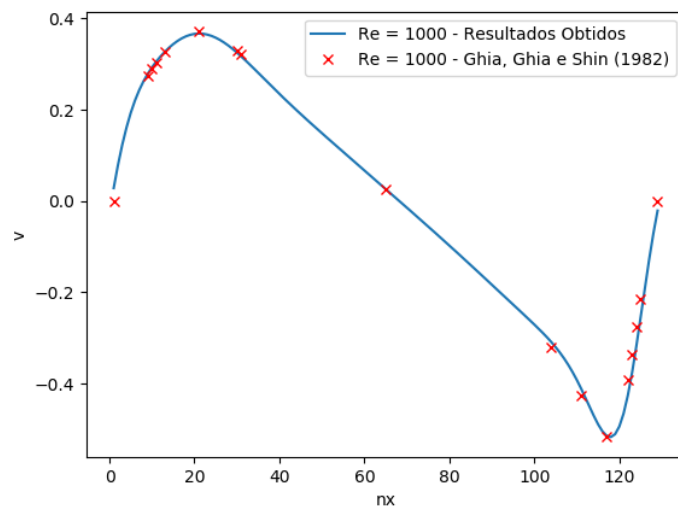


Figura 24: Perfil da velocidade v ao longo do centro geométrico e do vórtice primário (GHIA et al., 1982).

A partir das figuras 23 e 24 apresentadas, pode-se entender qual perfil de velocidade esperar ao longo das linhas verticais que passam pelo centro. Com isso, para a validação dos resultados, utilizaram-se os valores fornecidos nas tabelas do artigo, a fim de se gerarem validações gráficas de fácil comparação. Esses resultados são apresentados nas figuras 25, 26 e 27 a seguir.

(a) $Re=100$.(b) $Re=400$ (c) $Re=1000$.Figura 25: Resultados obtidos para o comportamento da componente de velocidade u .

(a) $Re=100$.(b) $Re=400$ (c) $Re=1000$.Figura 26: Resultados obtidos para o comportamento da componente de velocidade v .

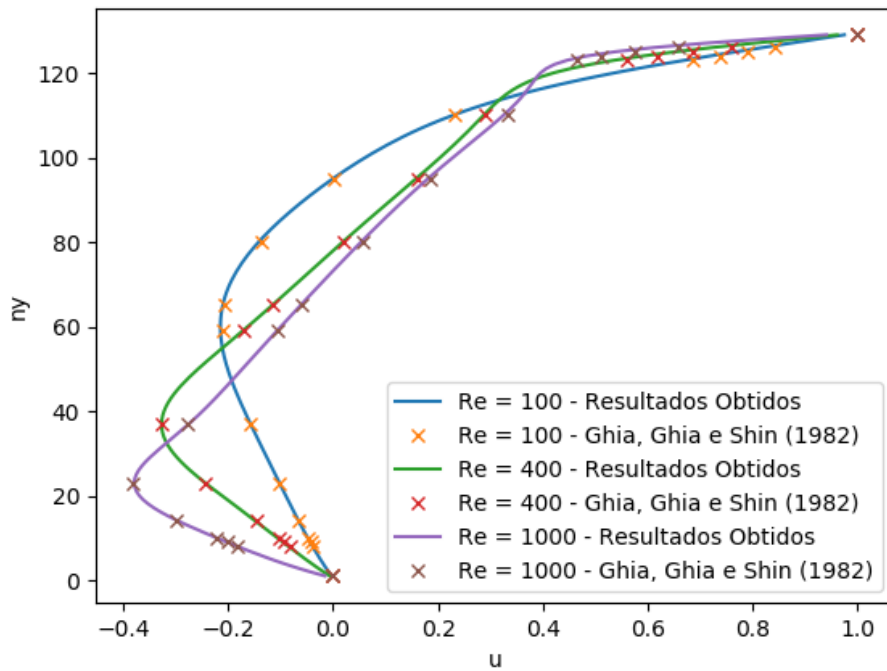
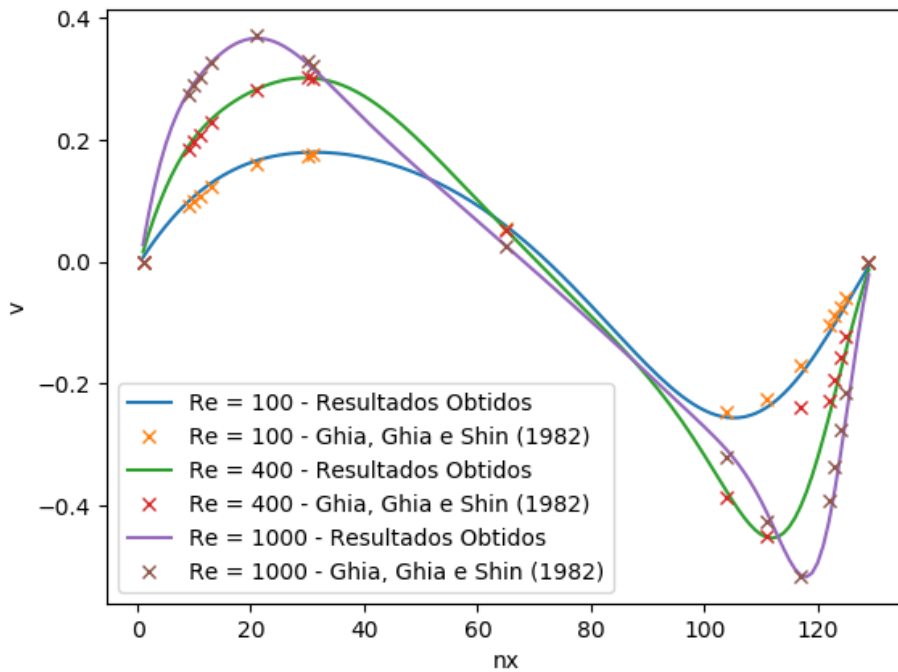
(a) Resultados para a componente u em diferentes números de Reynolds.(b) Resultados para a componente v em diferentes números de Reynolds.

Figura 27: Resultados obtidos para o comportamento das velocidades no centro geométrico da cavidade.

Por fim, foi analisado o comportamento das linhas de corrente para diferentes números de Reynolds, comparando-as com as apresentadas pelo artigo (Figuras 28 e 29).

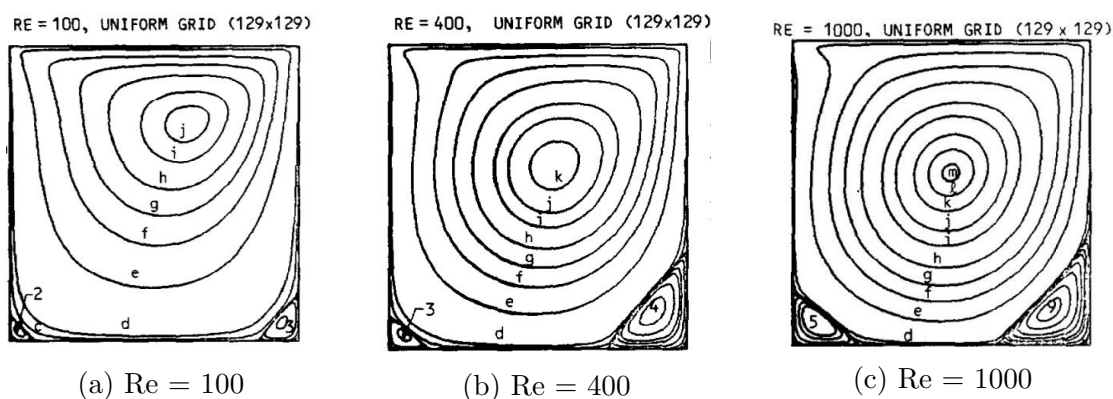


Figura 28: Ghia et al. (1982).

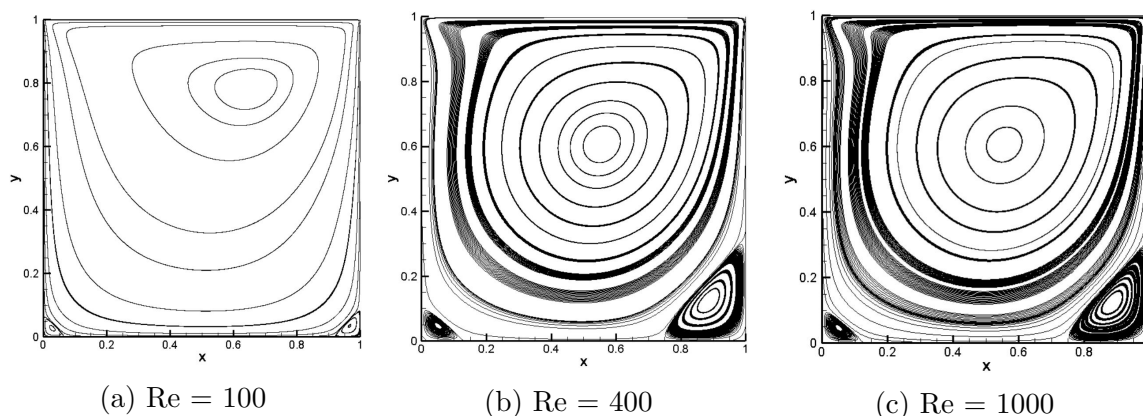


Figura 29: Resultados obtidos.

Como pode-se evidenciar pelas figuras 28 e 29, o escoamento se comporta de forma muito similar em ambos os trabalhos, permitindo-se verificar claramente a influência do aumento do número de Reynolds no fenômeno de recirculação do escoamento.

4.3 CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE

Nesta seção foi feita a análise de um caso usual de convecção natural em espaço fechado ao se estudar o escoamento em uma cavidade quadrada, cujas paredes laterais foram submetidas a gradientes de temperaturas distintos, induzindo dessa forma a movimentação do fluido e a transferência de calor.

Nesta fase do projeto, inseriu-se a equação da energia ao grupo de equações a serem resolvidas. Para isso, foi necessária a utilização de um método de interpolação temporal de ordem maior, para garantir resultados mais precisos, optando-se assim pelo *Método de Crank-Nicolson*.

Além disso, foi feita uma nova adimensionalização, a qual inseriu novos grupos adimensionais ao problema, tais como *Número de Prandtl* e *Número de Rayleigh*.

4.3.1 Variação do Número de Rayleigh

Para a análise e validação dos resultados, foram obtidos gráficos que apresentam o comportamento da transferência de calor na cavidade, analisada por meio do comportamento do

gradiente de temperatura na cavidade ao longo do tempo e das a linhas de corrente definidas no escoamento.

Esse estudo foi feito para diferentes valores do número de Rayleigh que, como foi mencionado na revisão de conceitos, consiste em um indicador de se a transferência de calor no escoamento é dada primordialmente por condução ou por convecção. Para isso, mantiveram-se as mesma condições no escoamento, variando gradualmente o número de Rayleigh de 10^3 a 10^5 . A análise foi feita, por fim, a partir de malhas de 100×100 e número de Prandtl expresso por $Pr=0,71$.

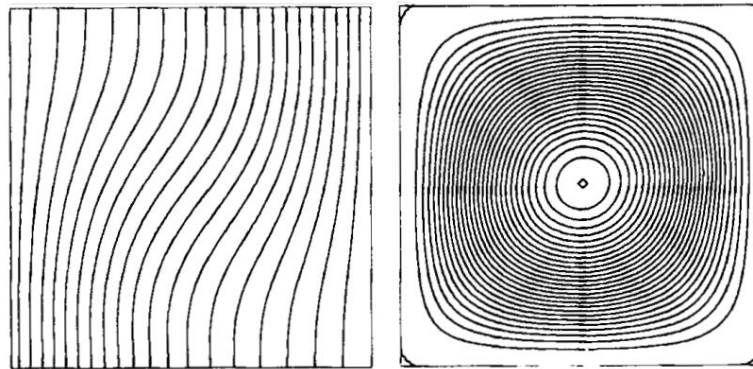


Figura 30: $Ra=10^3$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994)).

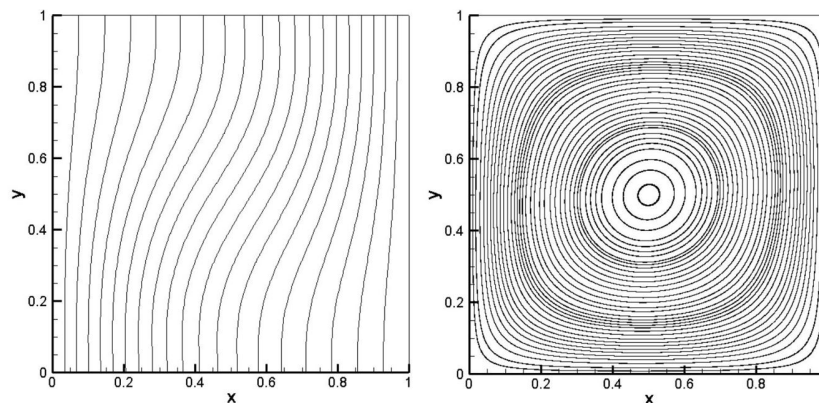


Figura 31: $Ra=10^3$ (Resultados Obtidos).

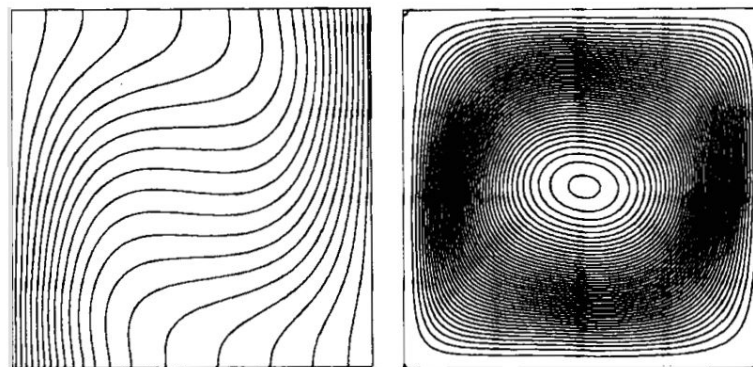


Figura 32: $Ra=10^4$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994)).

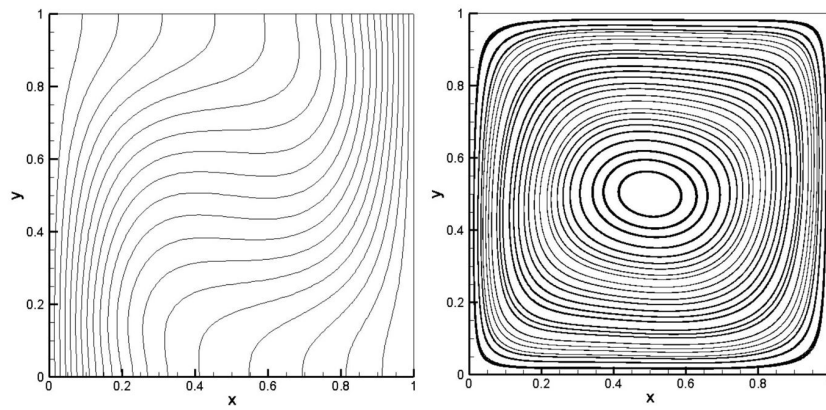


Figura 33: $Ra=10^4$ (Resultados Obtidos).

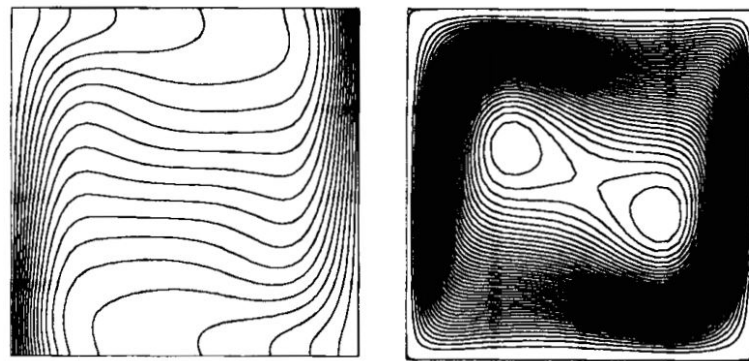


Figura 34: $Ra=10^5$ (Barakos, Mitsoulis e Assimacopoulos (1994))

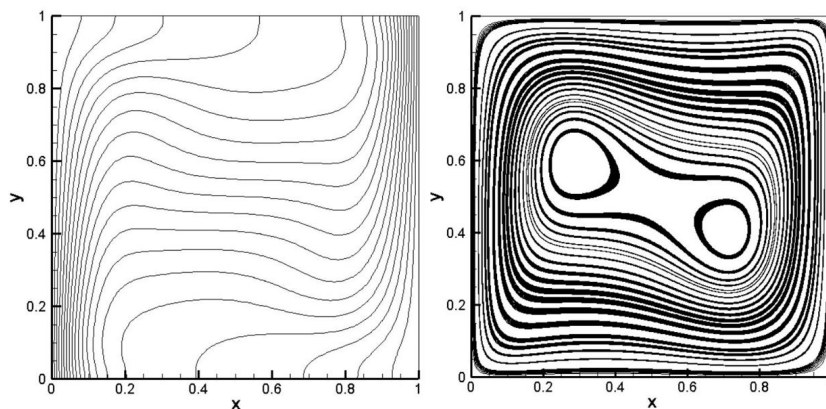


Figura 35: $Ra=10^5$ (Resultados Obtidos).

4.3.2 Cálculo do Número de Nusselt

Como pode ser observado na seção anterior, os resultados gráficos obtidos coincidiram muito bem com os resultados do artigo utilizado para a validação. Entretanto, para se garantir que o escoamento está se comportando da maneira esperada e que, portanto, a equação da energia foi corretamente implementada, é necessário calcular o número de Nusselt.

Nesta segunda parte da validação, será calculado numericamente o número de Nusselt a partir da metodologia explicada no relatório e, com base neste resultado, será feita a comparação com resultados numéricos obtidos anteriormente por diferentes pesquisadores e a comparação com a solução empírica.

Como foi ressaltado na seção (2.3.1) deste relatório, para casos de convecção natural em espaços fechados, retangulares e verticais, Berkovsky e Polevikov (1977) formularam expressões empíricas para o cálculo do número de Nusselt, dependendo dos números de Prandtl, Rayleigh e da geometria do sólido que enclausura o escoamento.

A partir disso, pode-se validar devidamente a metodologia implementada, antes de se passar para os próximos passos da pesquisa, onde serão implementadas novas equações na cavidade em convecção natural.

Com isso em mente, plotou-se os gráficos de decrescimento do número de Nusselt em função do tempo de simulação, a fim de se verificar em que instante de tempo o escoamento entra em regime permanente, ou seja, em que instante de tempo computacional o número de Nusselt deixa de variar. A figura 36 apresentada a seguir mostra os resultados obtidos para diferentes valores de Rayleigh.

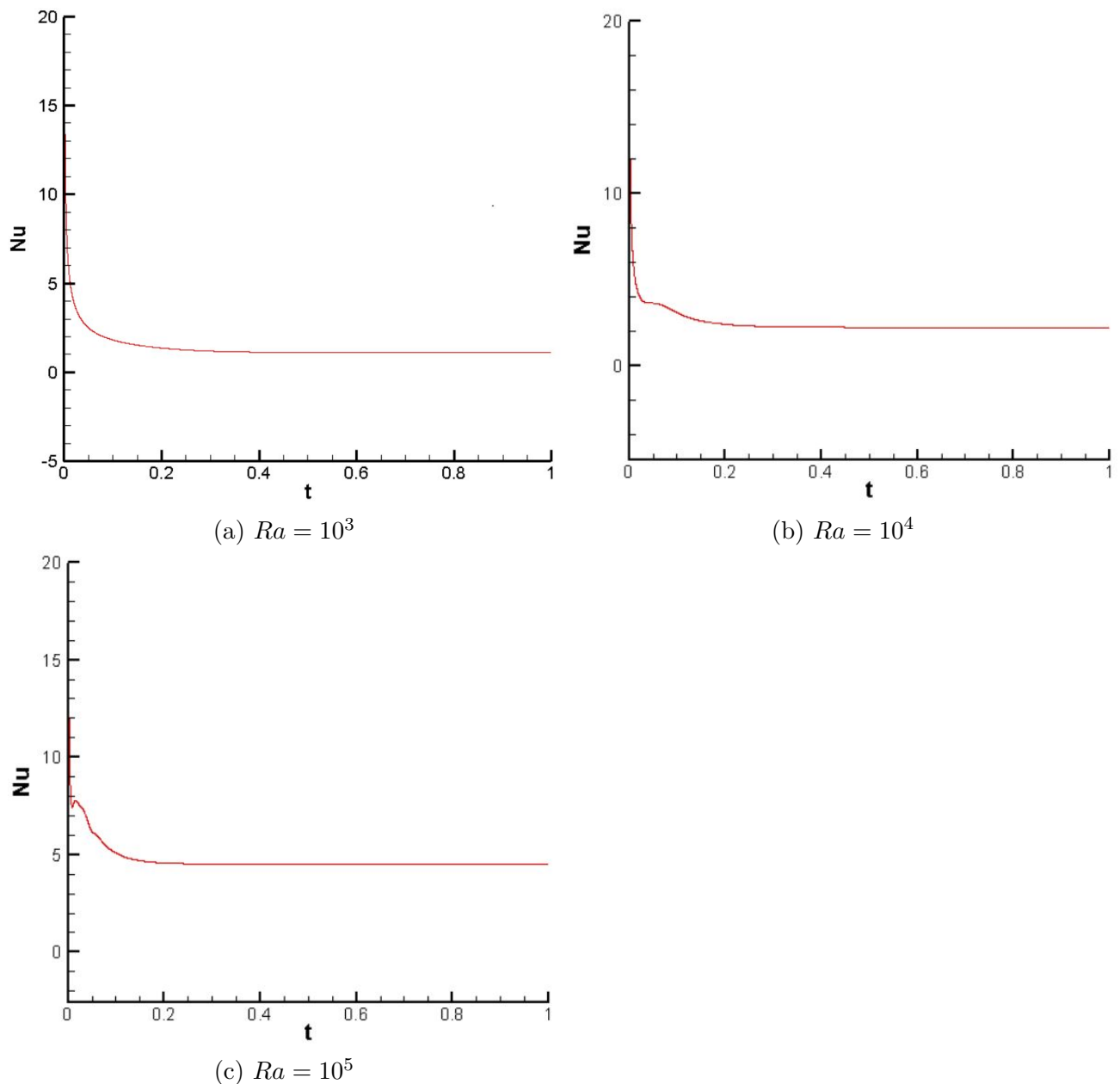


Figura 36: Decrescimento do número de Nusselt em função do tempo.

Feito isso, passou-se para a etapa de validação para confirmar se a solução está coerente com a literatura. Sendo assim, a tabela 2 abaixo apresenta a comparação dos valores obtidos

para Nusselt numérica e empiricamente (equação (2.41) para $H=L$) para diferentes números de Rayleigh.

Tabela 2: Comparação dos resultados numéricos com os obtidos pela equação de Berkovsky e Povikov (1977) para o número de Nusselt.

Número de Rayleigh	Berkovsky e Plevikov (1977)	Resultados Numéricos
$5 \cdot 10^3$	1,98	1,77
$1 \cdot 10^4$	2,42	2,23
$5 \cdot 10^4$	3,86	3,65
$1 \cdot 10^5$	4,72	4,50

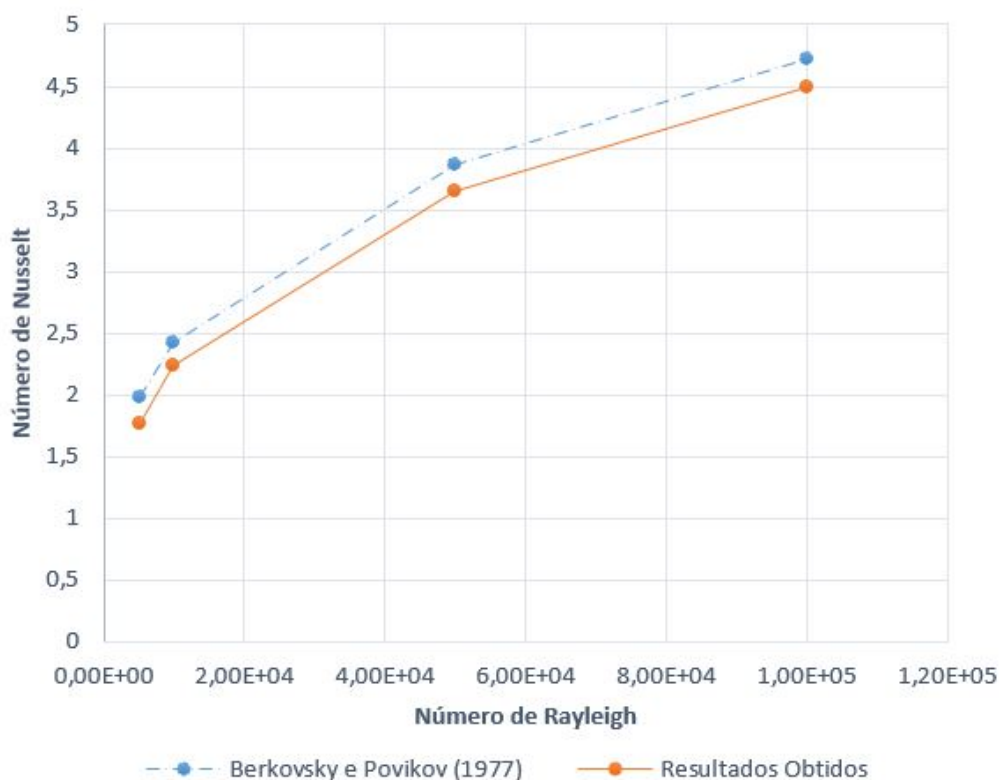


Figura 37: Número de Nusselt obtido pela análise numérica e pela equação de Berkovsky e Povikov (1977).

Além disso, com o objetivo de se analisar se os efeitos dos erros numéricos inevitavelmente inseridos na solução são aceitáveis, compararam-se os valores obtidos pra Nusselt com os valores numéricos obtidos previamente por outros pesquisadores, apresentados na tabela abaixo.

Tabela 3: Comparação de resultados numéricos.

Rayleigh	Barakos et al. (1994)	Fusegi et al. (1991)	De Vahl Davis (1986)	Markatos e Pericleous (1984)	Resultados Obtidos
10^3	1,114	1,105	1,118	1,108	1,107
10^4	2,245	2,302	2,243	2,201	2,227
10^5	4,510	4,646	4,519	4,430	4,502

4.4 ESCOAMENTO BIFÁSICO

Após todos os procedimentos realizados e suas respectivas validações, implementou-se o método de *Level Set* para a inserção de uma gota ao escoamento na cavidade em convecção natural. Como explicado detalhadamente na metodologia, este método consiste basicamente na definição de uma função distância que permite a identificação da interface da gota pelo escoamento.

O Level Set, como é de se esperar, apresenta uma complexidade maior na implementação, uma vez que envolve a criação da função distância, sua inicialização, a definição de sua equação evolutiva e as alterações necessárias nas equações governantes para que a força de contato proveniente da tensão superficial da gota seja devidamente percebida pelo escoamento.

4.4.1 Relevância do Uso de Aproximações de Alta Ordem

Para avaliar a utilidade prática da implementação das metodologias numéricas voltadas a aprimorar a simulação, comparou-se os resultados obtidos por uma solução mais simplificada, em que as aproximações para os cálculos dos termos convectivos e da evolução da função distância foram de ordens menores, e os resultados gerados a partir de uma simulação mais complexa e de aproximações com altas ordens.

A primeira simulação (Figura 38) foi gerada a partir de um código em que os termos convectivos, tanto na equação do movimento quanto na equação evolutiva de ϕ , foram calculados por uma interpolação de derivadas centradas sem o *Upwinding*. Além disso, a interpolação temporal da equação evolutiva foi dada pelo Método de Euler Explícito, que consiste em um método de primeira ordem.

Já a segunda simulação (Figura 39), obtida por meio do código que veio a ser o final utilizado para a geração de dados neste trabalho, segue a metodologia apresentada no capítulo 3. Em resumo, calculam-se os termos convectivos da equação do movimento com a função ENO de segunda ordem e os da equação evolutiva com a função WENO de quinta ordem, ambas combinadas com o *Upwinding*, e a interpolação temporal da equação evolutiva é feita com a aplicação de um TVD Runge-Kutta de terceira ordem. Por fim, acrescentou-se também à rotina a reinicialização.

Em ambos os casos analisados a seguir, utilizou-se uma malha de 200×200 , com uma partícula de raio 0,125 inicializada na posição $0,25 \times 0,50$ e um número de Rayleigh igual a $5 \cdot 10^3$.

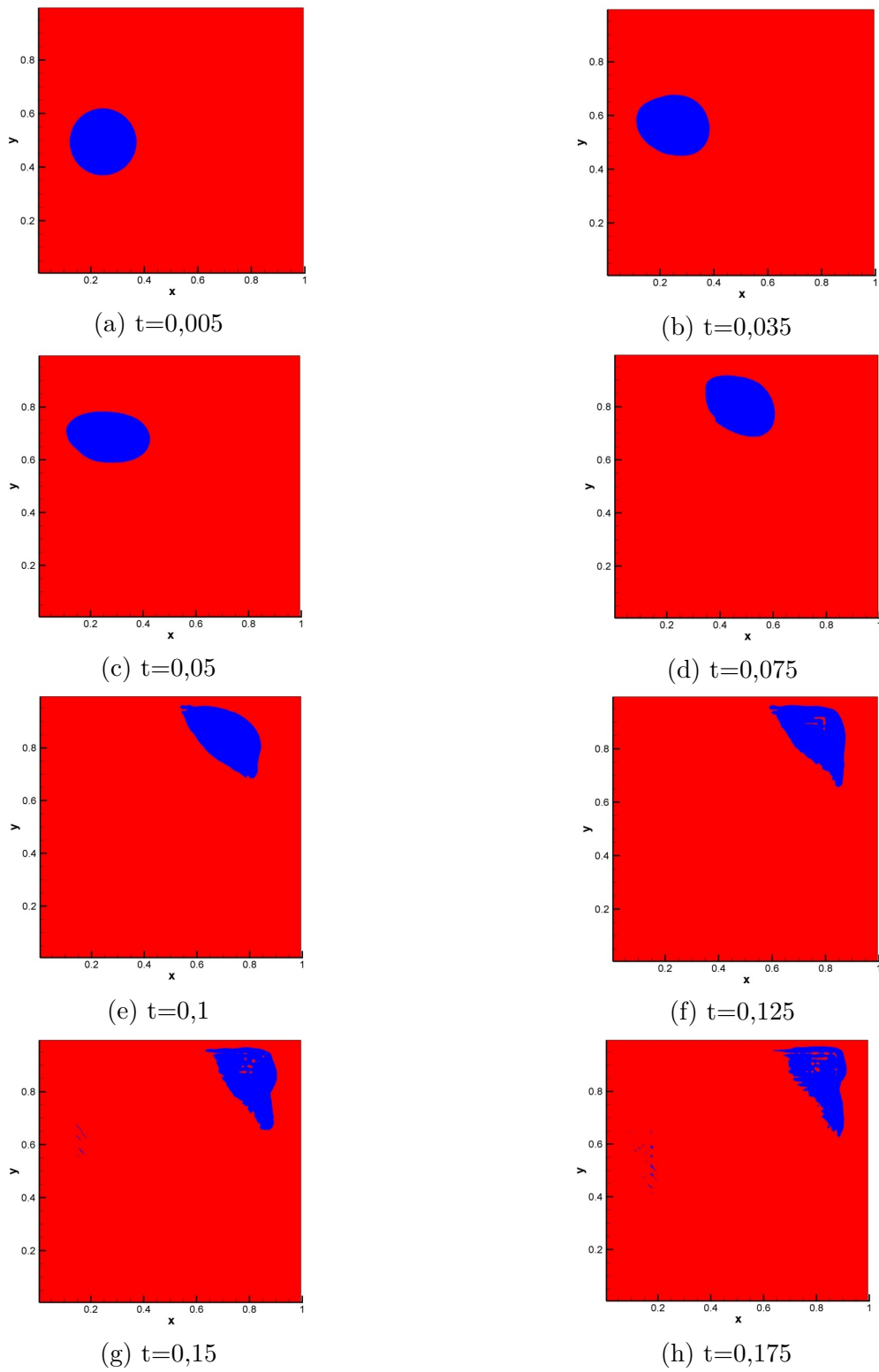


Figura 38: Evolução da gota ao longo do tempo (simulação 1).

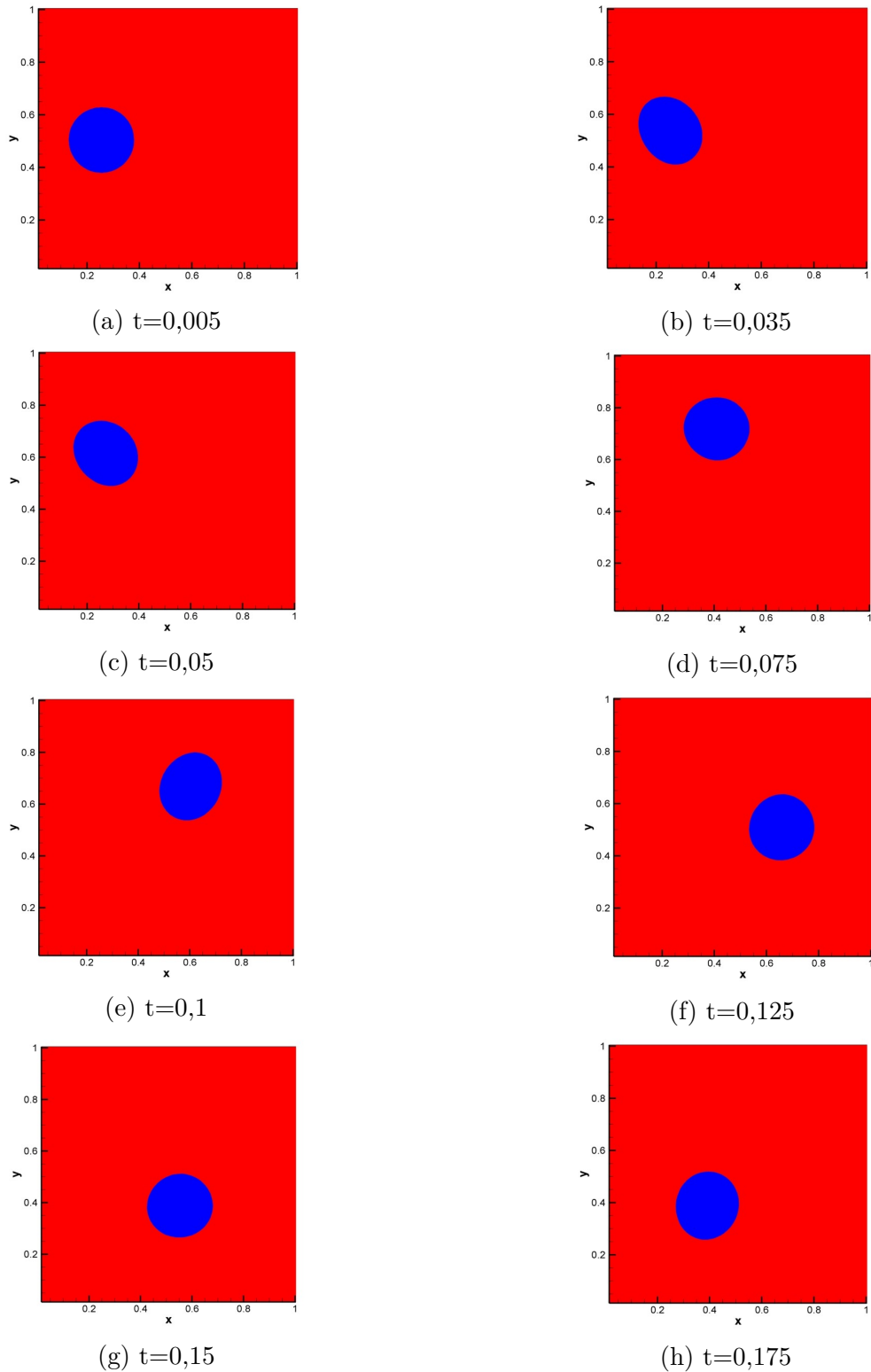


Figura 39: Evolução da gota ao longo do tempo (simulação 2).

4.4.2 Importância da Reinicialização

Há dois fatores principais que indicam se a implementação do Level Set foi bem sucedida: o gradiente de ϕ e a curvatura (κ). Por definição, o gradiente de ϕ deve ser igual a 1, de tal modo que ele deve manter valores bem próximos a 1 ao longo de toda a simulação. Da mesma forma, a curvatura deve se manter bem definida para garantir que a força proveniente da tensão interfacial da partícula seja corretamente representada na equação do movimento.

A reinicialização tem um papel primordial na manutenção destes dois parâmetros. Para melhor ilustrar este fato, apresentam-se a seguir resultados obtidos para κ a partir da mesma rotina sem reinicialização (Figura 40) e com a implementação da reinicialização (Figura 41).

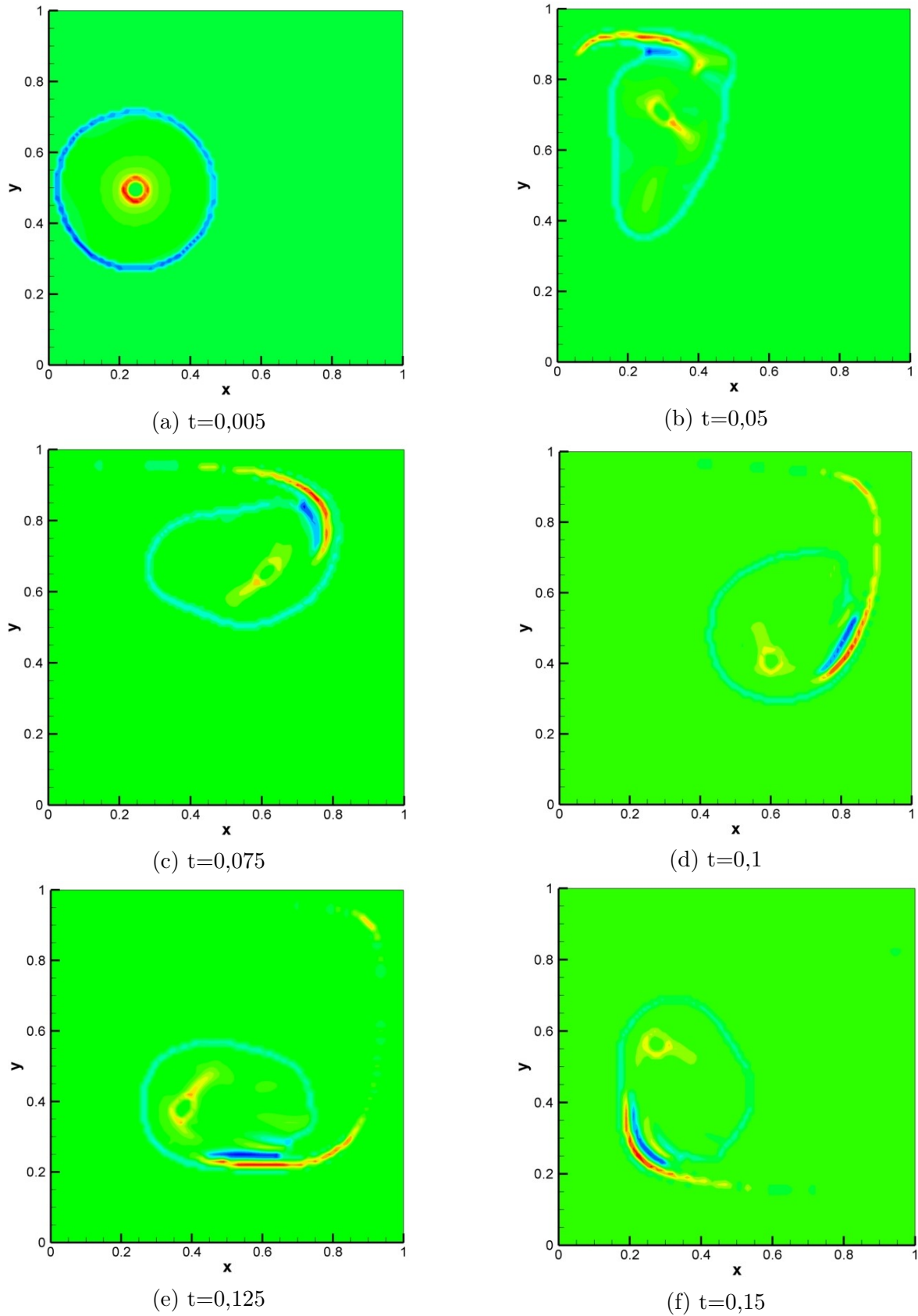


Figura 40: Evolução de κ no tempo sem a reinicialização.

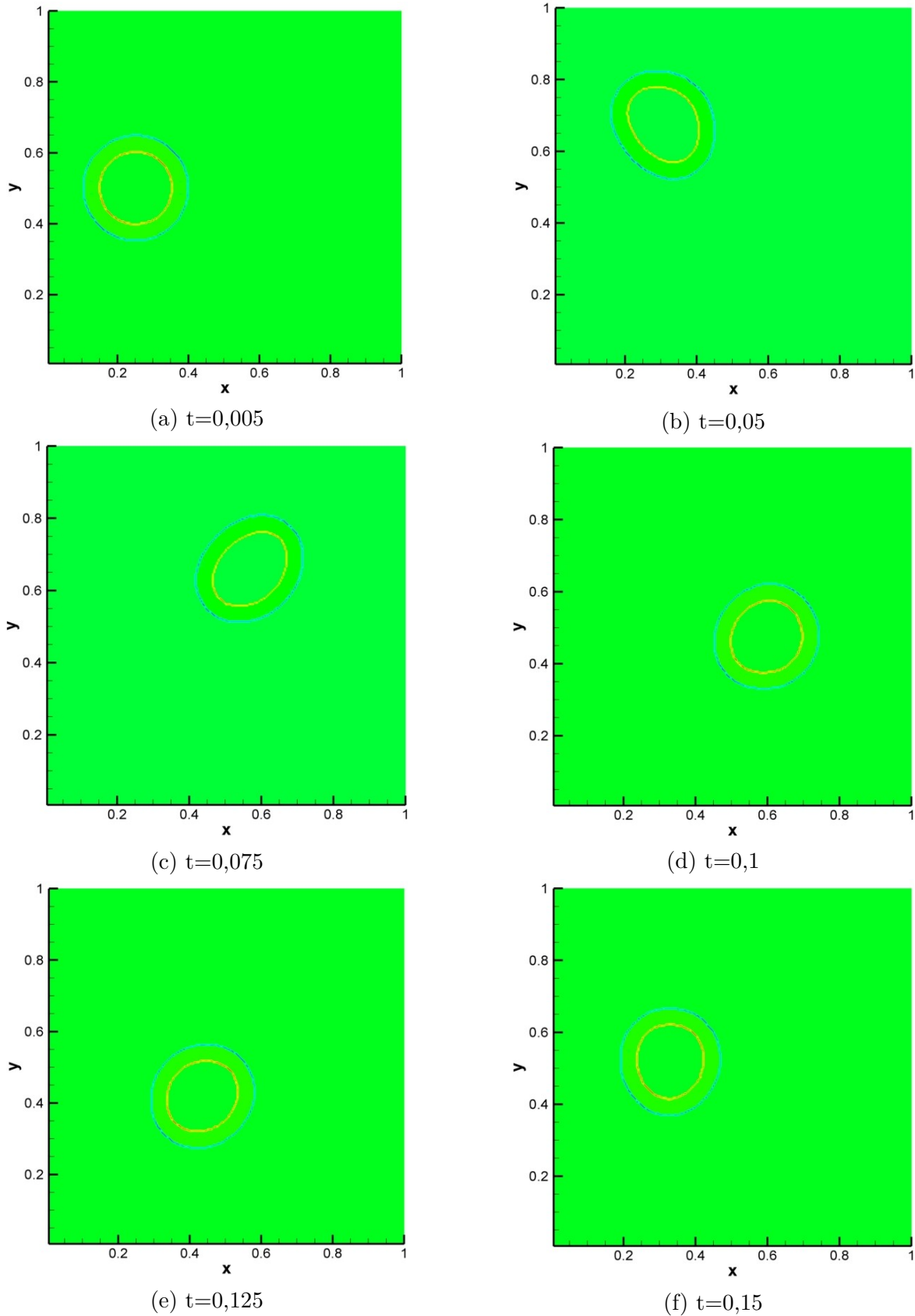


Figura 41: Evolução de κ no tempo com a reinicialização.

4.4.3 Comportamento do escoamento

Visando uma melhor compreensão de como o escoamento estudado evolui no tempo com a presença de uma partícula, analisou-se o seu comportamento durante $t=0,15$ para diferentes

números de Rayleigh. Para isso, utilizou-se uma malha de 200×200 e razões de condutividade térmica ($\frac{k_1}{k_2}$) e de capacidade calorífica a volume constante ($\frac{C_{v1}}{C_{v2}}$) iguais a 1, ou seja, considerando que as propriedades térmicas são constantes.

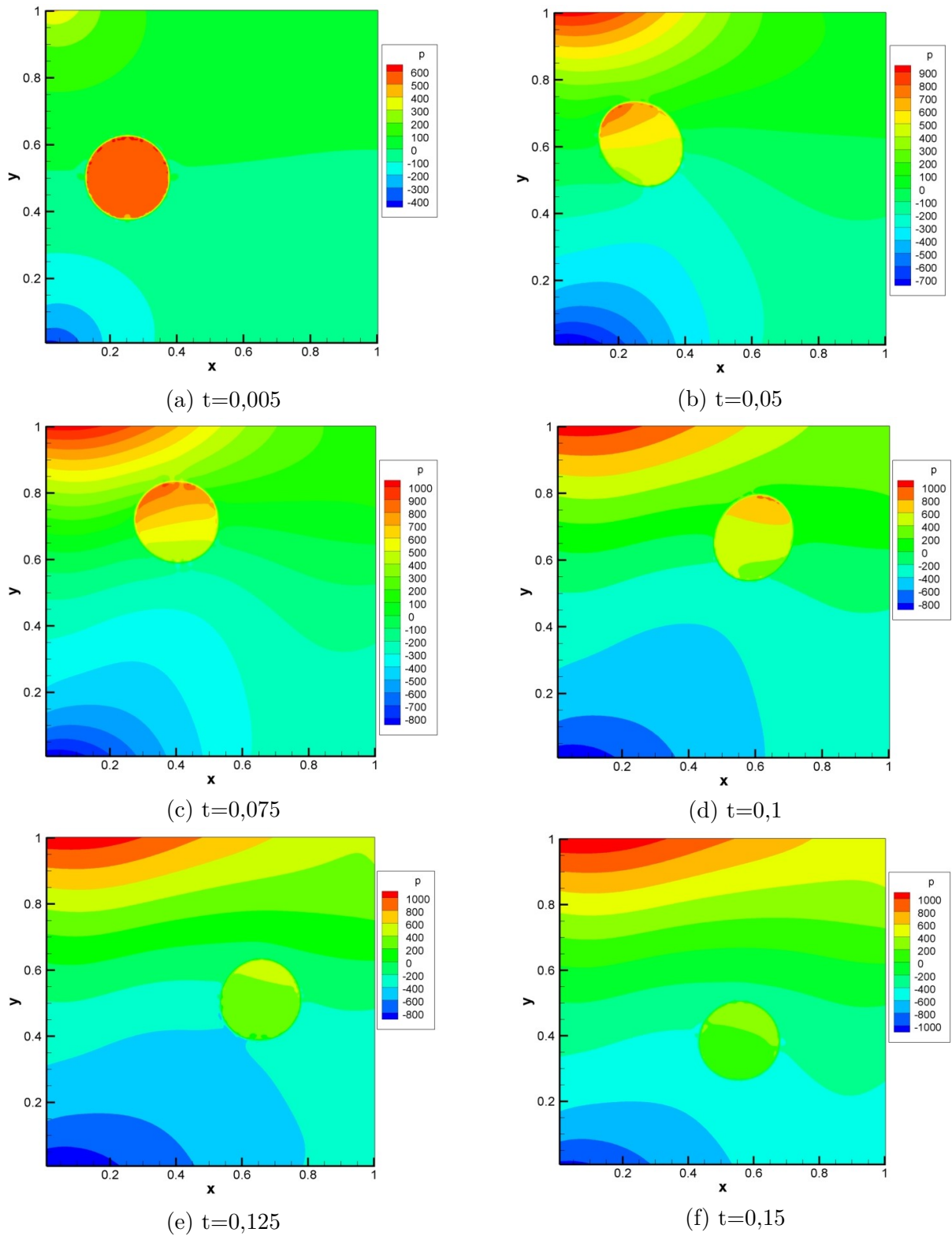


Figura 42: $Ra=1.10^3$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.

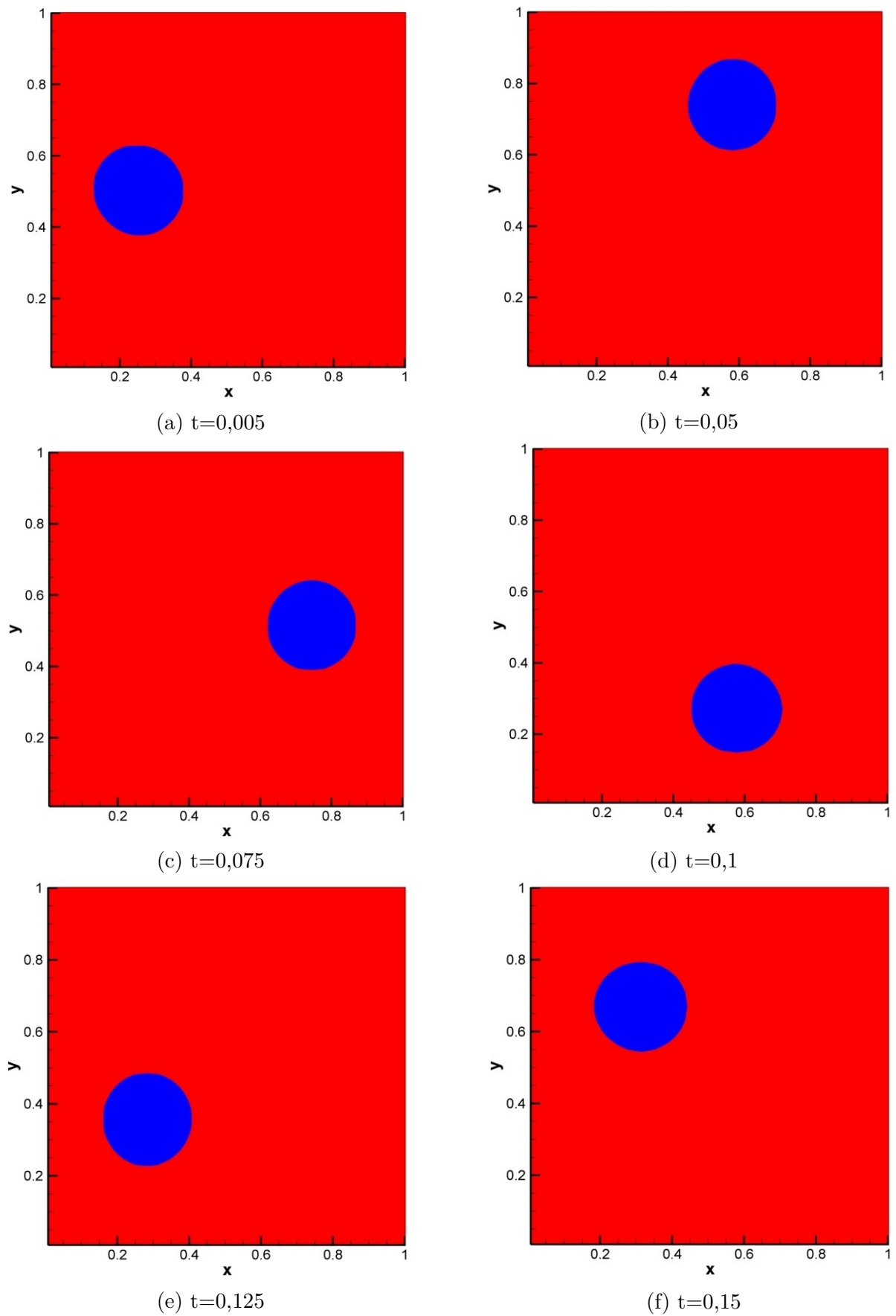


Figura 43: $Ra=1.10^3$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.

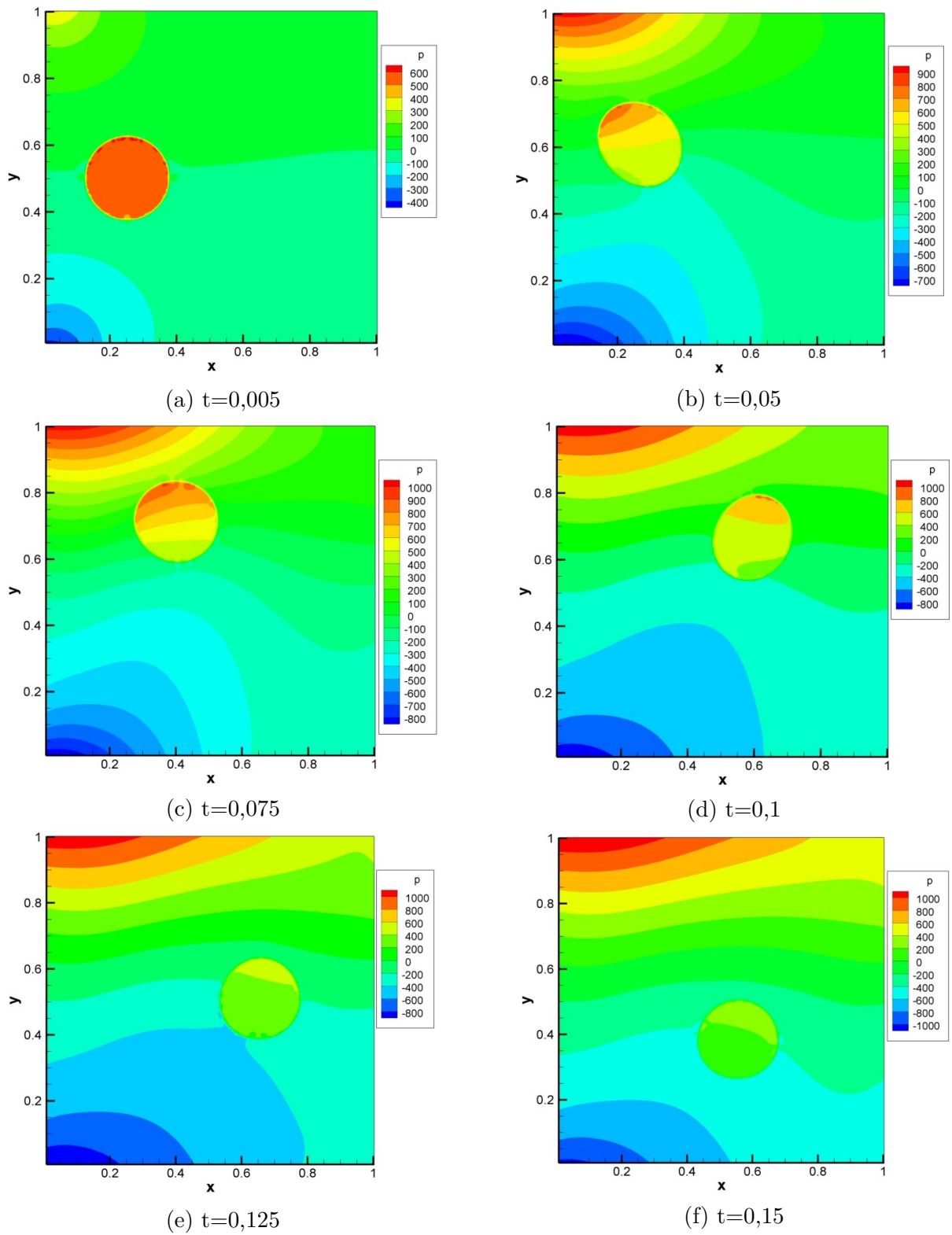


Figura 44: $Ra=5.10^3$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.

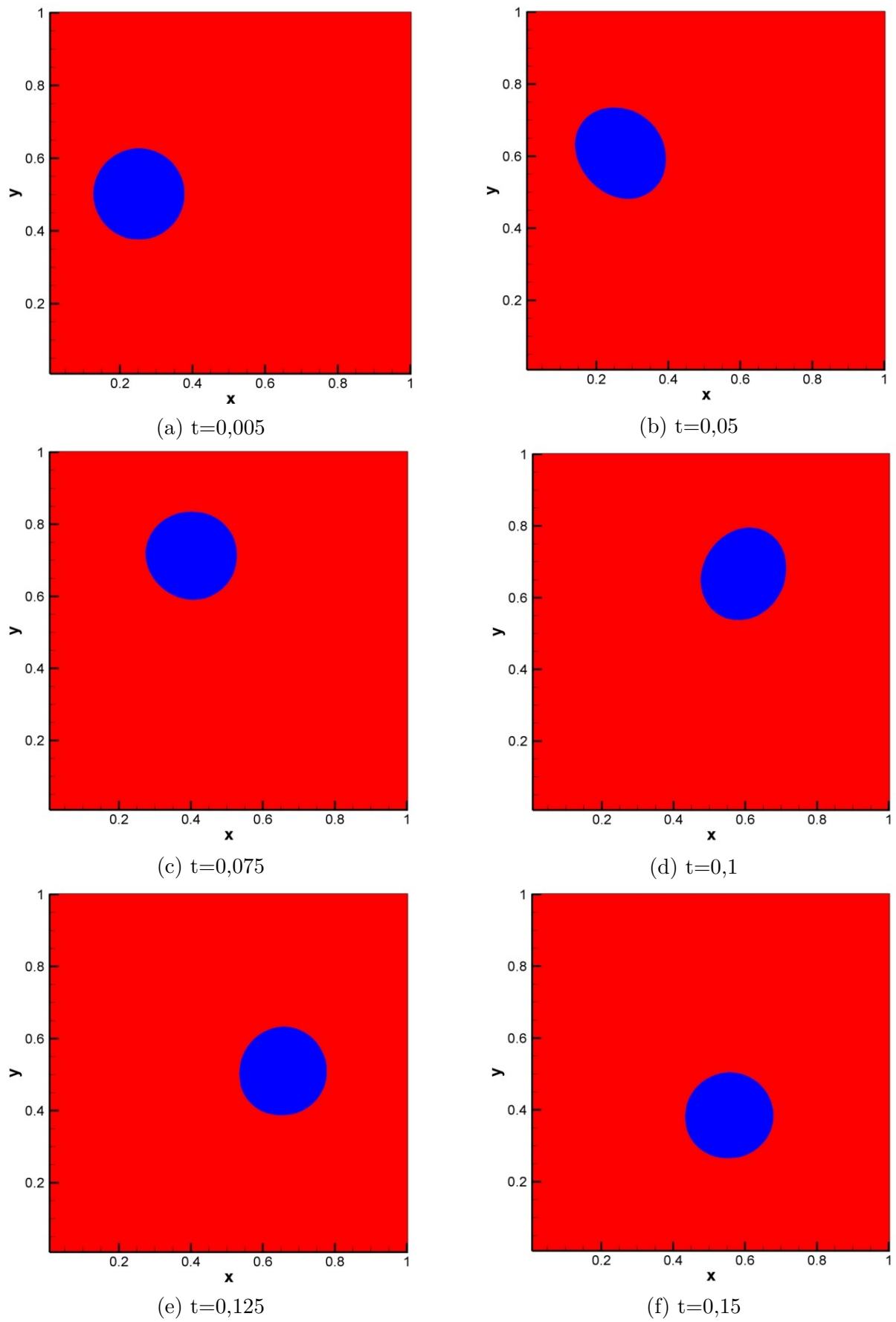


Figura 45: $Ra=5.10^3$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.

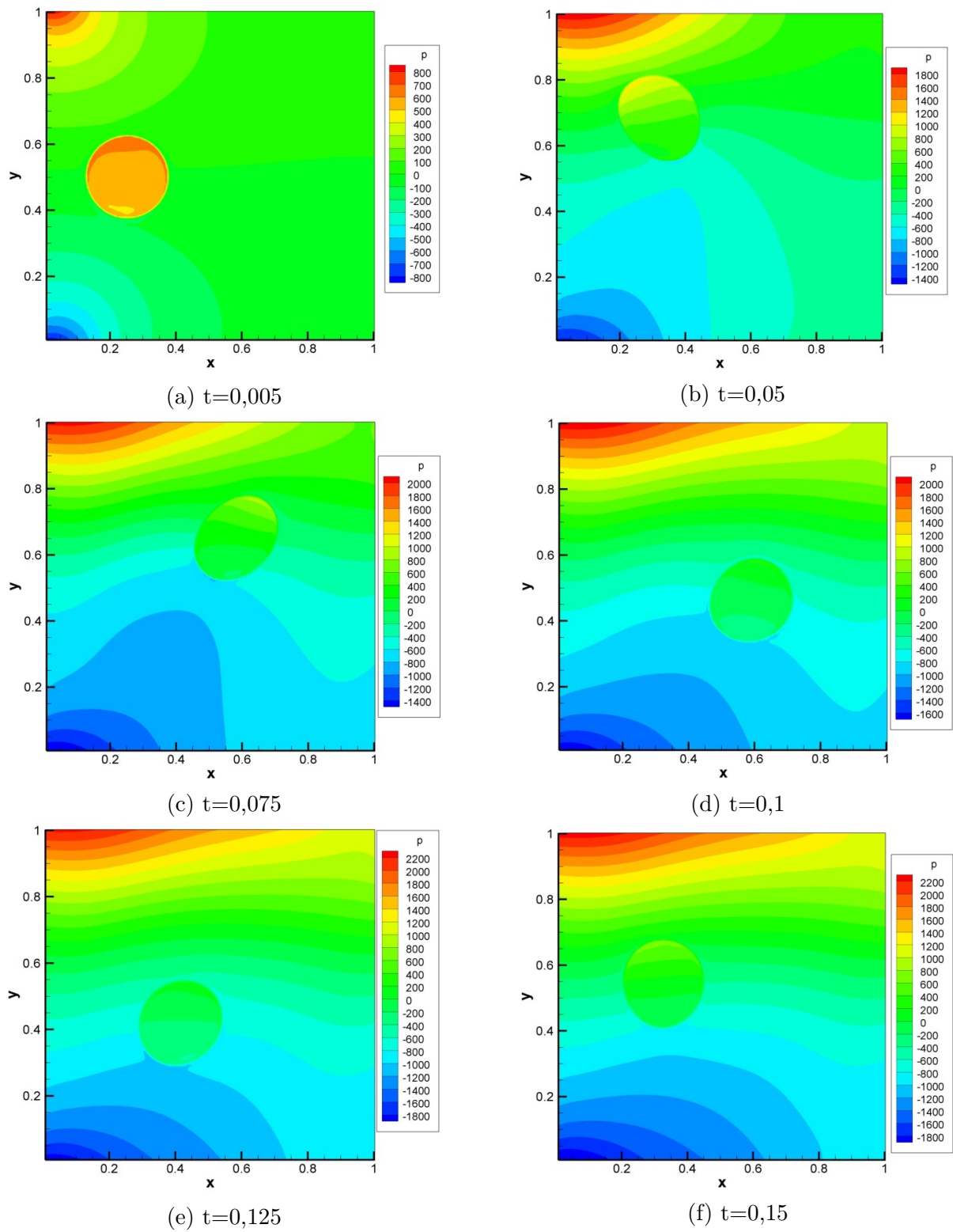


Figura 46: $Ra=1.10^4$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.

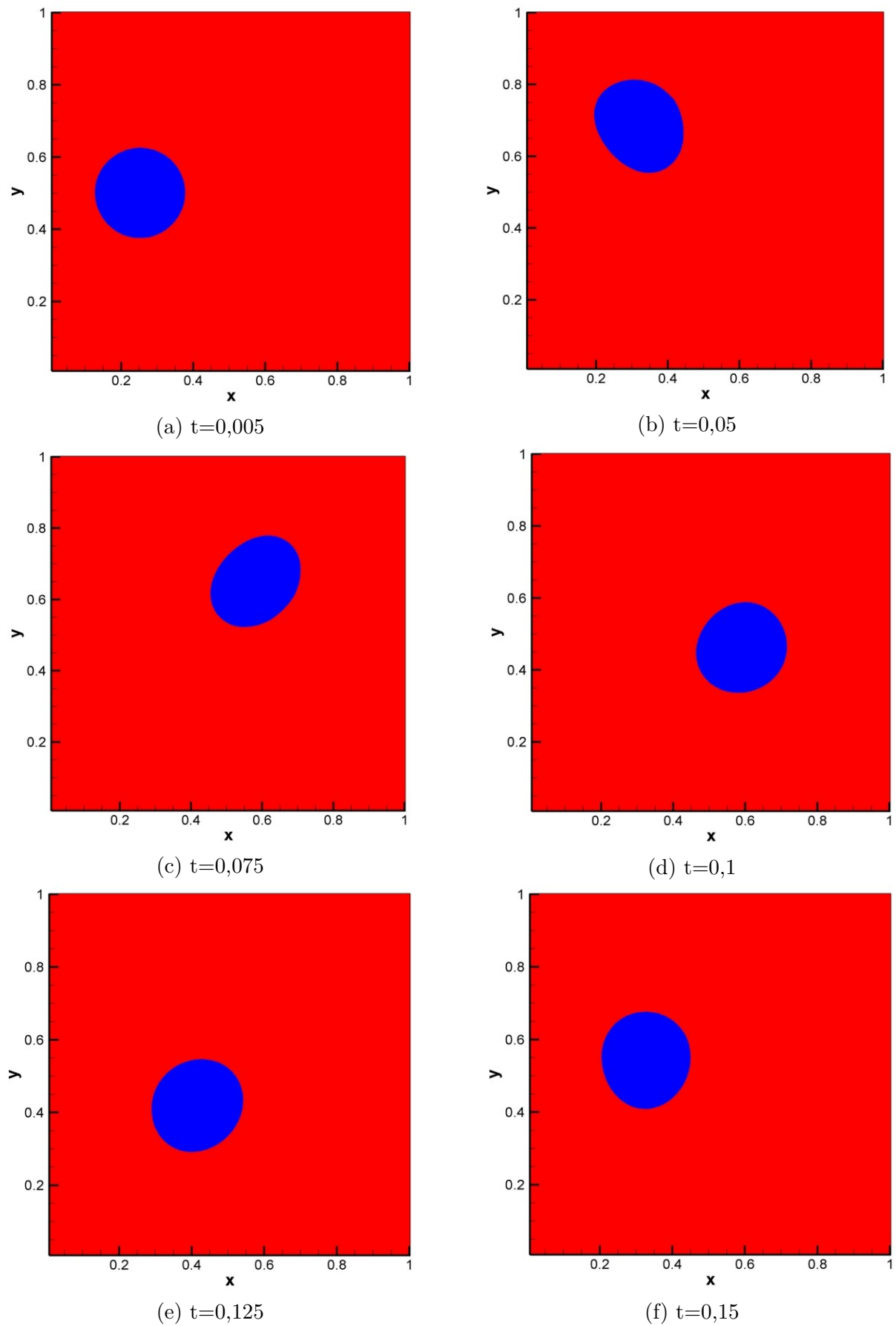


Figura 47: $Ra=1.10^4$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.

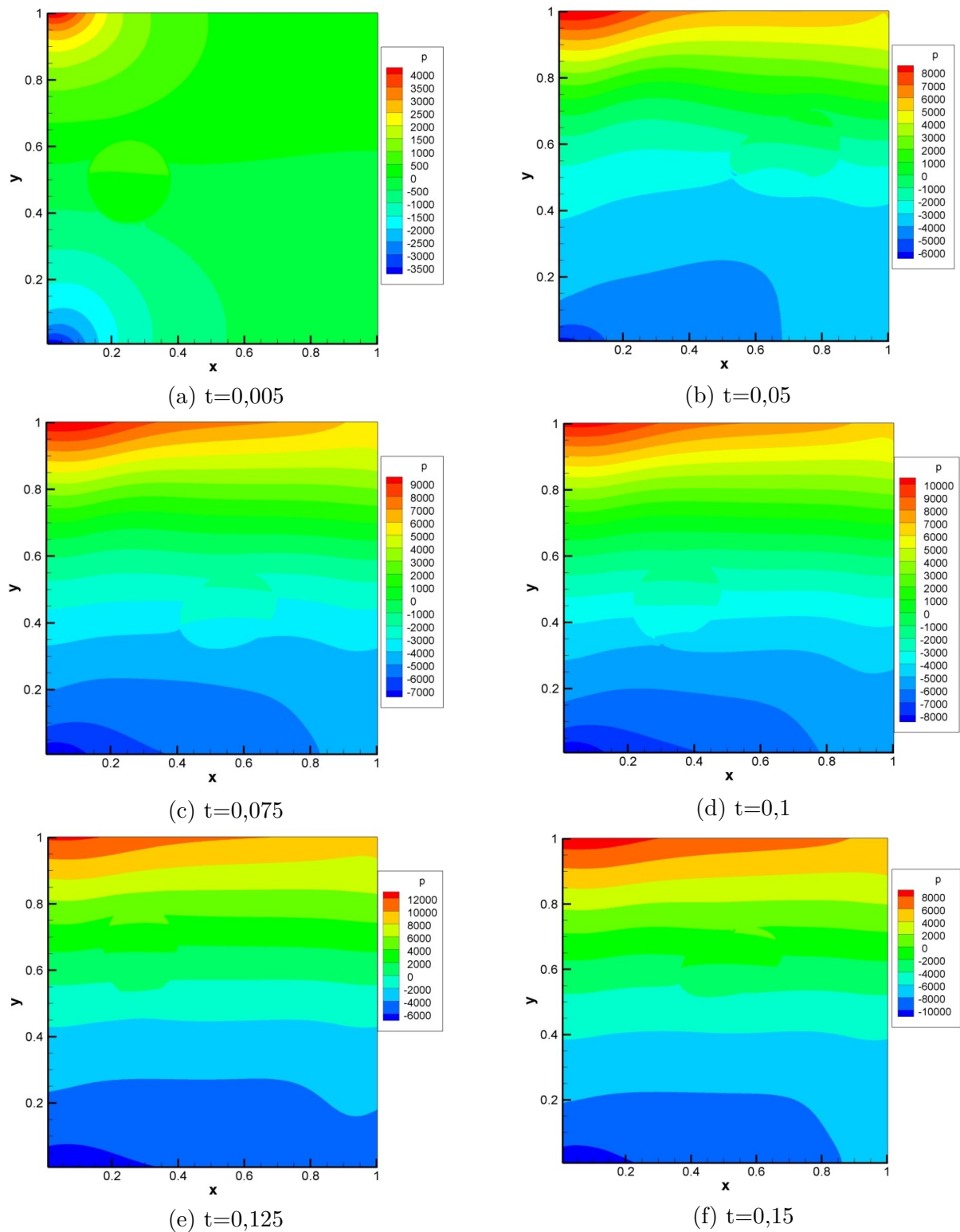


Figura 48: $Ra=5.10^4$ - variação de pressão no escoamento ao longo de um período.

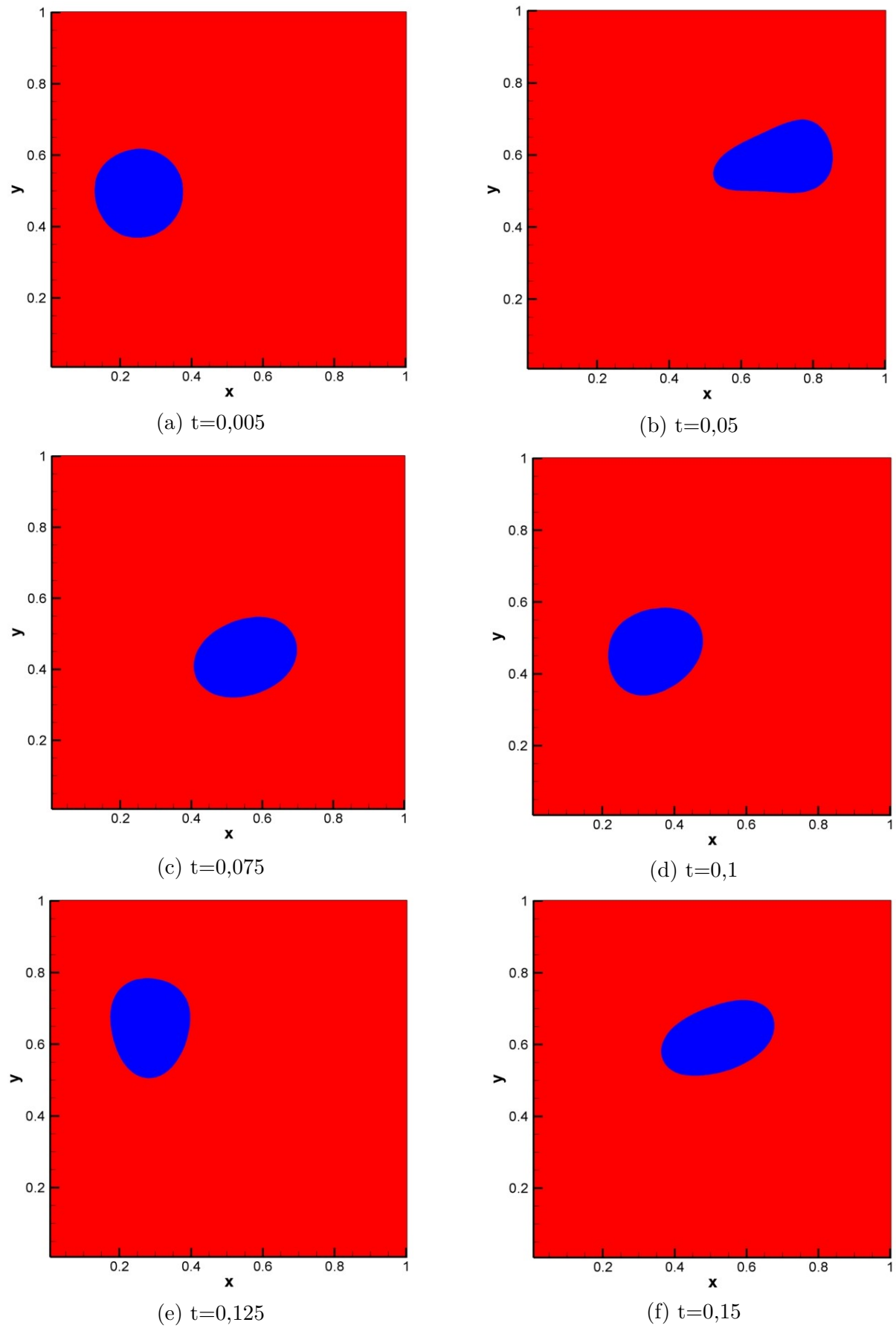


Figura 49: $Ra=5.10^4$ - deslocamento da gota no escoamento ao longo de um período.

4.4.4 Efeito da Capilaridade

A capilaridade está diretamente ligada à dureza da gota, ou seja, ao quão resistente ela se mantém ao cisalhamento do escoamento. Isso acontece uma vez que o quão menor for a capilaridade, maior será a força resultante da tensão interfacial na partícula e portanto maior será a pressão no seu interior.

Por meio de uma análise de escala, pode-se concluir também que para valores menores de capilaridade tem-se uma menor preponderância dos termos viscosos da equação do movimento, reduzindo-se proporcionalmente o cisalhamento da gota.

Com isso em mente, foi feita uma breve investigação do efeito da capilaridade no escoamento estudado. Para isso, mantiveram-se todos os parâmetros constantes ($Ra=10^4$, posição inicial $0,25 \times 0,50$, propriedades térmicas constantes e malha de 200×200 .) e variou-se apenas o valor de Ca .

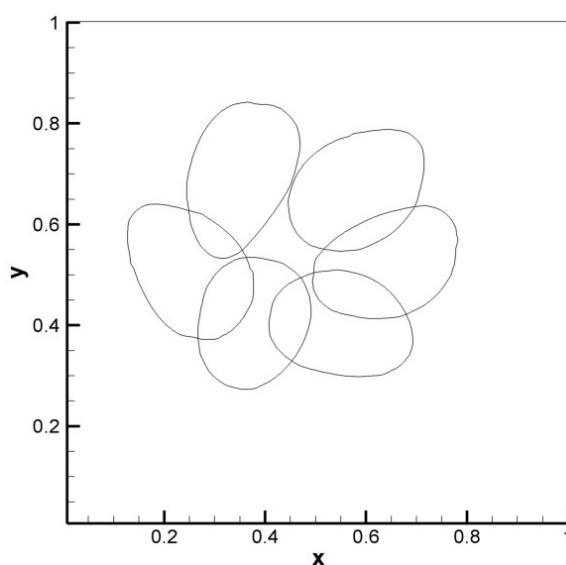


Figura 50: $Ca=0,1$.

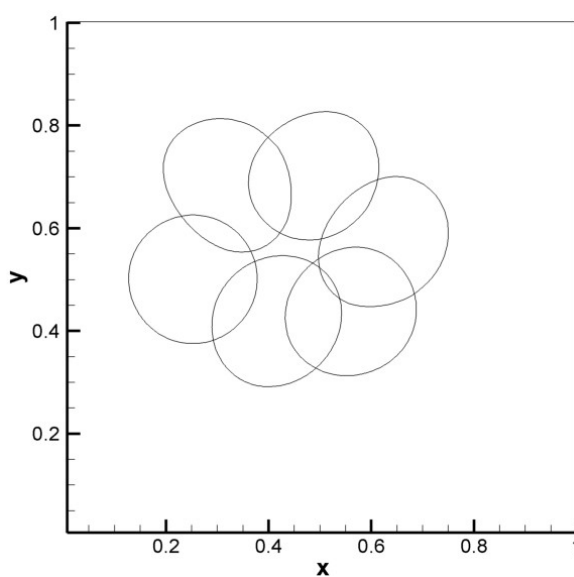


Figura 51: $Ca=0,01$.

4.4.5 Deslocamento do Centro de Gravidade da Gota

É objetivo deste estudo definir se há um padrão no deslocamento da partícula, independentemente dos parâmetros térmicos e geométricos impostos. Para isso, dividiram-se os resultados em diferentes tópicos de interesse, a fim de comparar as respostas para o centro de gravidade da gota no escoamento em diferentes condições iniciais.

4.4.5.1 Influência da posição inicial

Um dos aspectos estudados consiste na influência exercida pela posição inicial onde o centro de gravidade da gota é definido. Assim, rastreou-se o CG a partir de cinco pontos de partida distintos dentro da cavidade, variando apenas a coordenada horizontal.

Para a escolha destes pontos, priorizaram-se localidades onde a gota poderia sofrer diferentes influências do escoamento. Assim, optou-se por um ponto mais próximo à parede ($0,2 \times 0,50$), três pontos mais centralizados entre a parede e o centro geométrico da cavidade ($0,25 \times 0,50$, $0,30 \times 0,50$ e $0,35 \times 0,50$), de modo que a partícula não se encontraria muito próxima ao centro, em função da distância da parede quente, nem muito próxima à parede, para evitar o seu cisalhamento, e por fim, analisou-se a gota no centro ($0,50 \times 0,50$).

Além disso, levou-se em consideração o raio da partícula igual a $0,125 \left(\frac{L}{8}\right)$ e um número de Rayleigh igual a 10^4 .

A seguir, são apresentados os resultados para a movimentação do centro de gravidade da gota dentro da cavidade e da variação no tempo do CG no eixo x . O primeiro tem como objetivo ilustrar o deslocamento da gota e o segundo especificar a amplitude de oscilação do CG para cada período de rotação do escoamento.

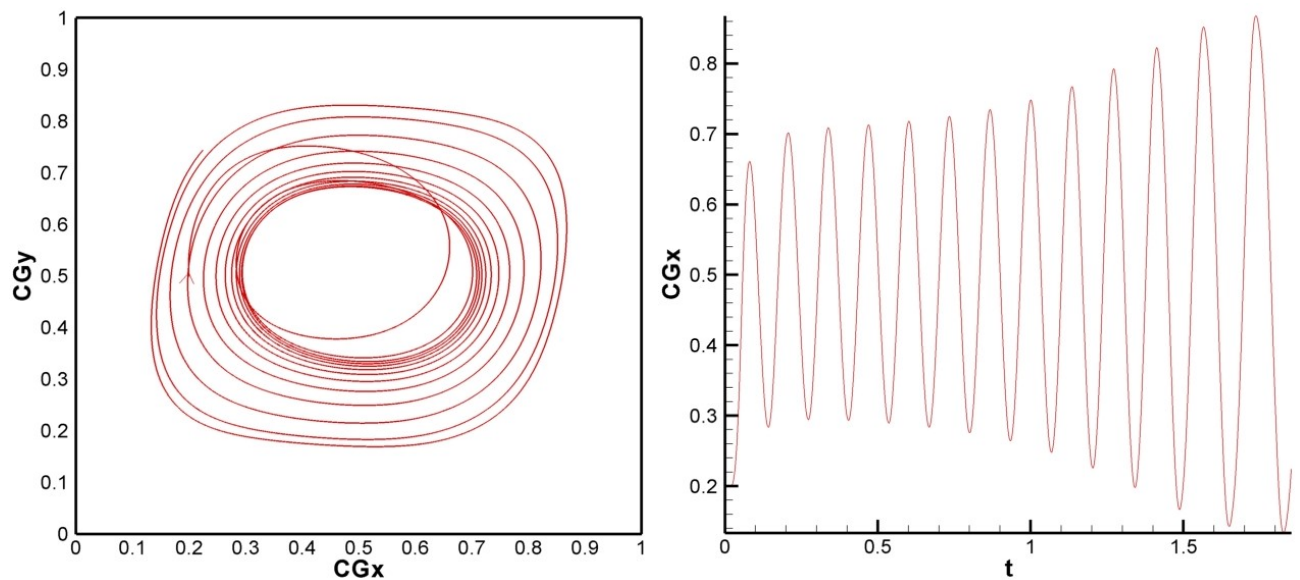


Figura 52: Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,20 \times 0,50$.

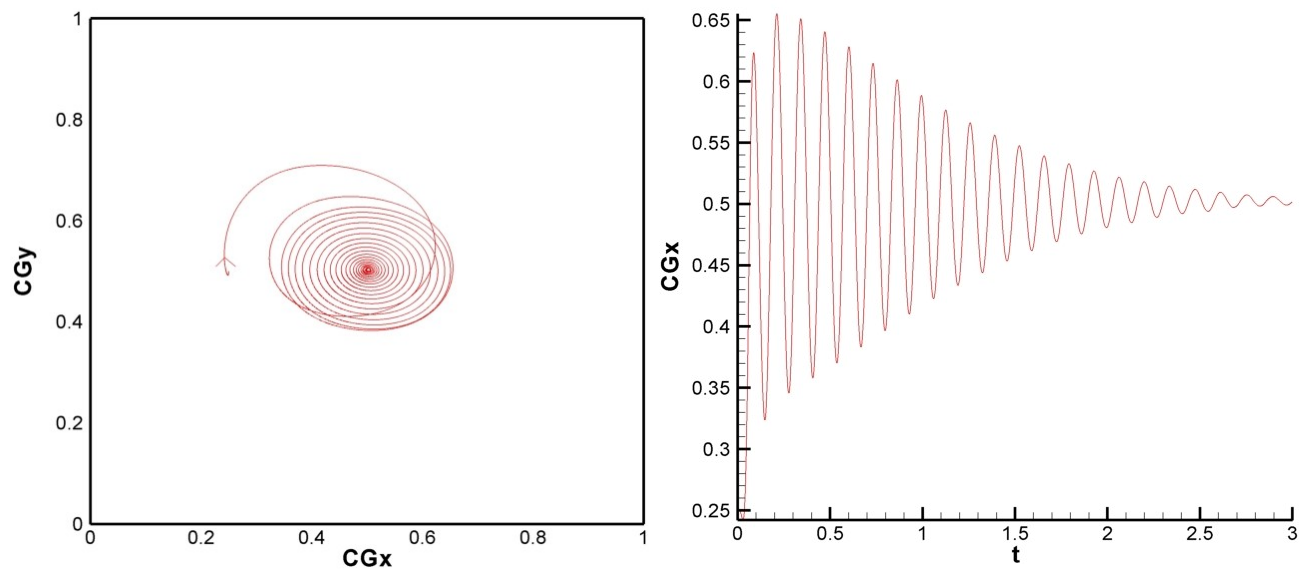


Figura 53: Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,25 \times 0,50$.

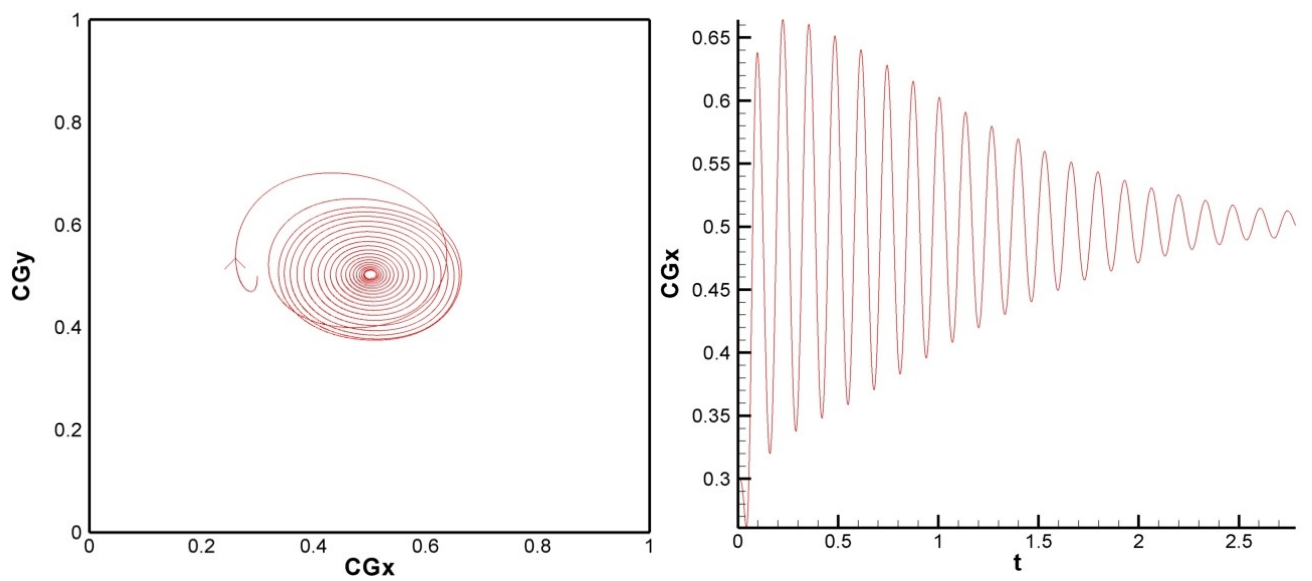


Figura 54: Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,30 \times 0,50$.

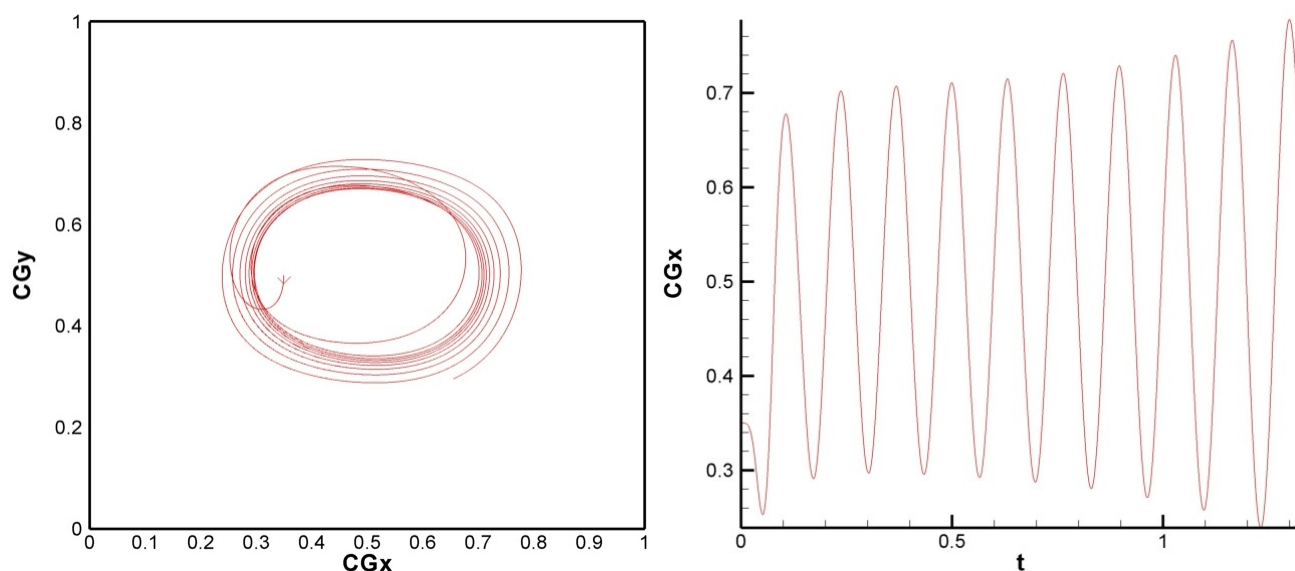


Figura 55: Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,35 \times 0,50$.

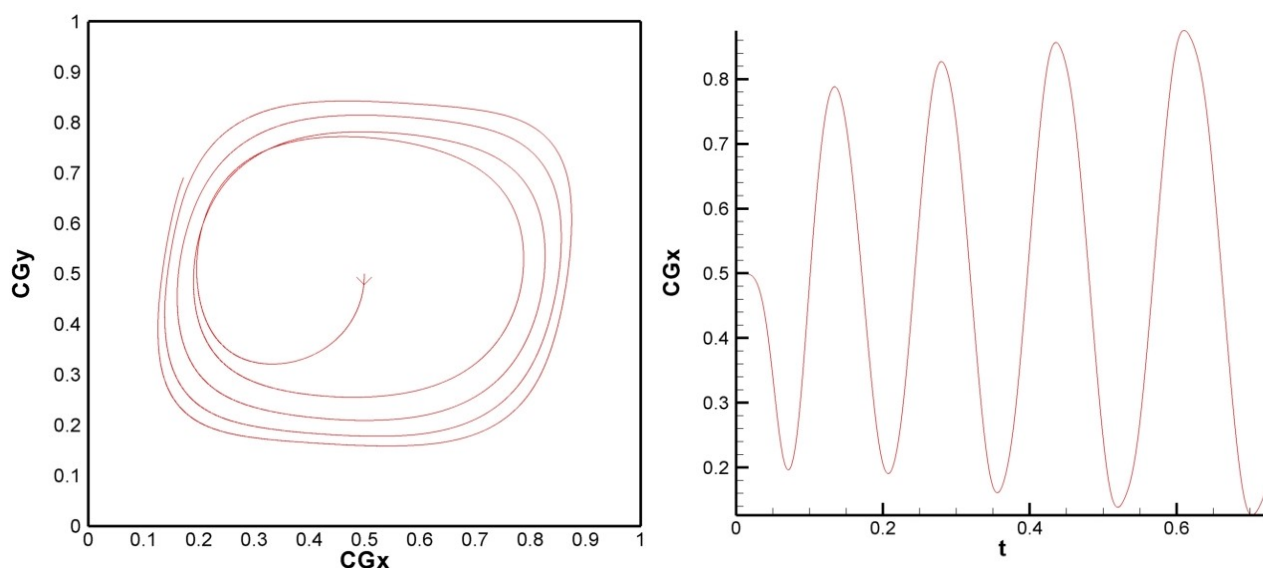


Figura 56: Deslocamento do centro de gravidade no espaço (esquerda) e no tempo (direita) a partir da posição inicial $0,50 \times 0,50$.

Como pode-se observar nas figuras acima, a posição inicial na qual a gota é inicializada é imprescindível para a análise do problema, uma vez que há uma grande variação no seu deslocamento para diferentes pontos de partida.

Em termos de otimização da transferência de calor, é mais vantajosa uma composição que mantenha a gota mais próxima à parede, de modo que ela esteja constantemente capitando o calor fornecido pela parede aquecida e transportando-o para a parede fria. Quando a gota tende a ir rapidamente para o centro, espera-se que, em regime estacionário, o aumento nas trocas de calor ocasionado por partículas com altas propriedades térmicas seja irrisório.

Neste âmbito, tem-se que a inicialização nos pontos que tendem a manter a gota mais próxima à parede ($0,20 \times 0,50$, $0,35 \times 0,50$ e $0,50 \times 0,50$.) são mais desejáveis, principalmente os que se aproximam mais do centro, uma vez que a deslocam para os cantos mais rapidamente.

4.4.5.2 Influência do número de Rayleigh

Como esclarecido na seção 4.3, o número de Rayleigh vai definir como se dará o gradiente de temperatura e as linhas de corrente do escoamento. Em função disso, é importante averiguar no que estes fatores implicam para o deslocamento da gota e qual deve ser o comportamento esperado para diferentes regimes de troca de calor.

Foram gerados resultados de um escoamento com ϕ inicializado em $0,25 \times 0,50$ para quatro valores distintos de Rayleigh, sendo eles: 1.10^3 , 5.10^3 , 1.10^4 e 5.10^4 . Os resultados para $Ra=1.10^4$ foram apresentados na Figura 53.

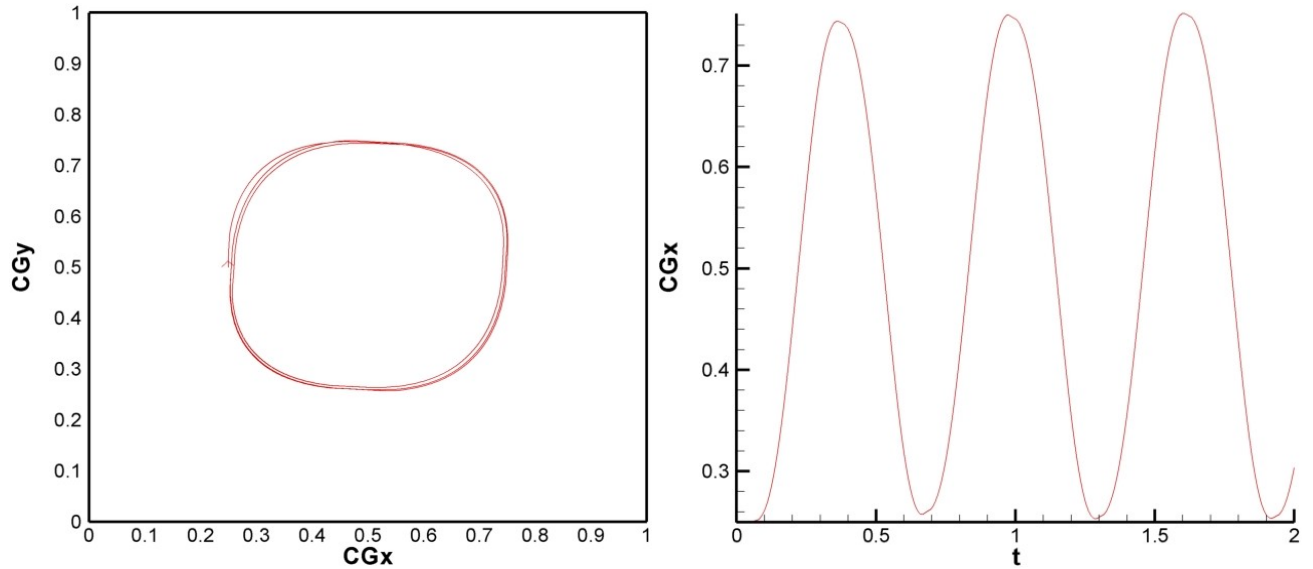


Figura 57: $Ra=1.10^3$.

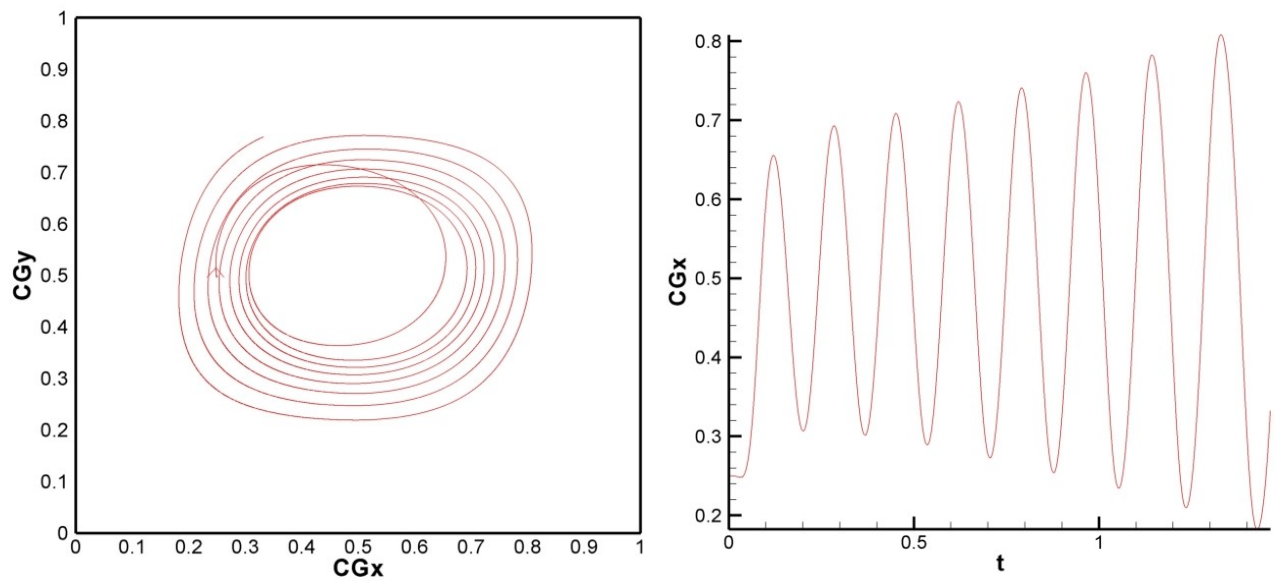


Figura 58: $Ra=5.10^3$.

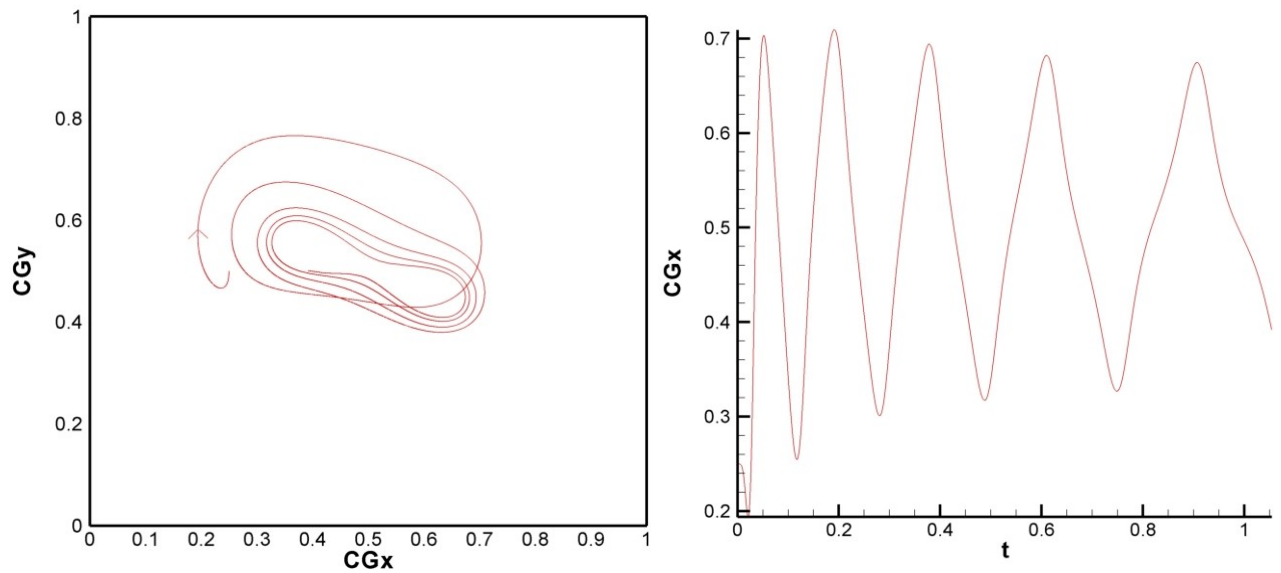


Figura 59: $Ra=5.10^4$.

Para buscar uma validação dos resultados obtidos, comparou-se a trajetória da gota com a trajetória marcada pelas linhas de corrente de cada valor analisado de Rayleigh, assim como se investigou a influências das linhas de temperatura.

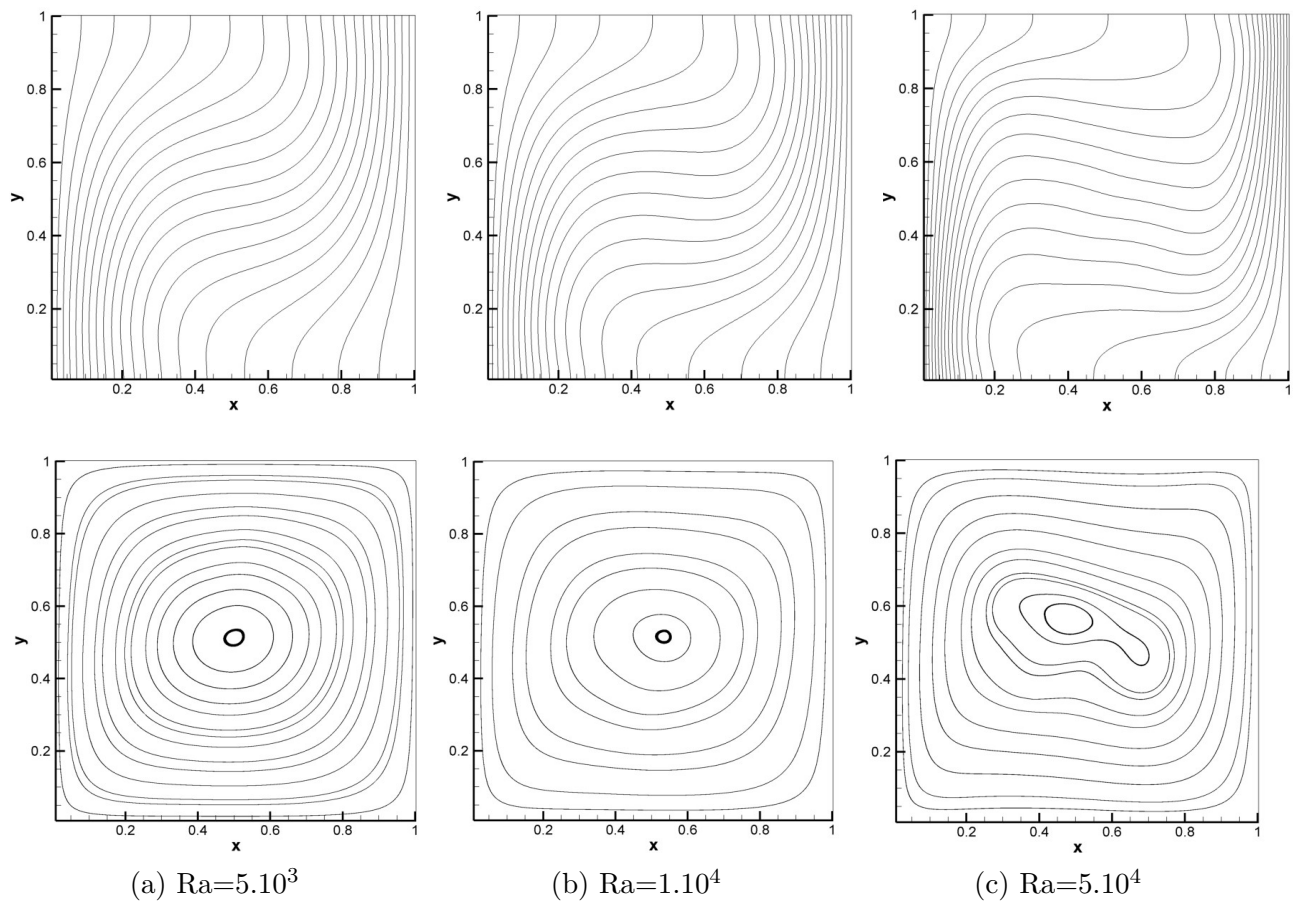


Figura 60: Linhas de corrente e de temperatura para diferentes números de Rayleigh.

Comparando-se a Figura 60 com as Figuras 57, 58, 59 e 53, observa-se que a trajetória da gota é coerente com o comportamento esperado do escoamento.

Além disso, ilustra-se por meio dos resultados um padrão que indica que para valores maiores de números de Rayleigh há a tendência da partícula transladar em direção ao centro, enquanto para valores menores ela orbita sem tender a se estagnar nesta região.

4.4.5.3 Influência das propriedades térmicas

Ao se definir propriedades térmicas variáveis, automaticamente assume-se que haverá uma variação na forma como o calor é transferido de uma parede para a outra. Entretanto, outro aspecto interessante a se analisar neste âmbito consiste em qual influência diferentes valores de condutividade térmica e capacidade calorífica exercem na maneira como a partícula viaja pelo escoamento.

Em função disso, analisou-se separadamente o comportamento do escoamento para 3 valores de k e C_v , visando frisar qual resposta específica cada um destes parâmetros implica à mistura. Ao se variar a razão de uma das propriedades, manteve-se a outra constante e igual a 1. Esta etapa foi feita para um número de Rayleigh igual a 10^4 e uma gota inicializada na posição $0,25 \times 0,50$.

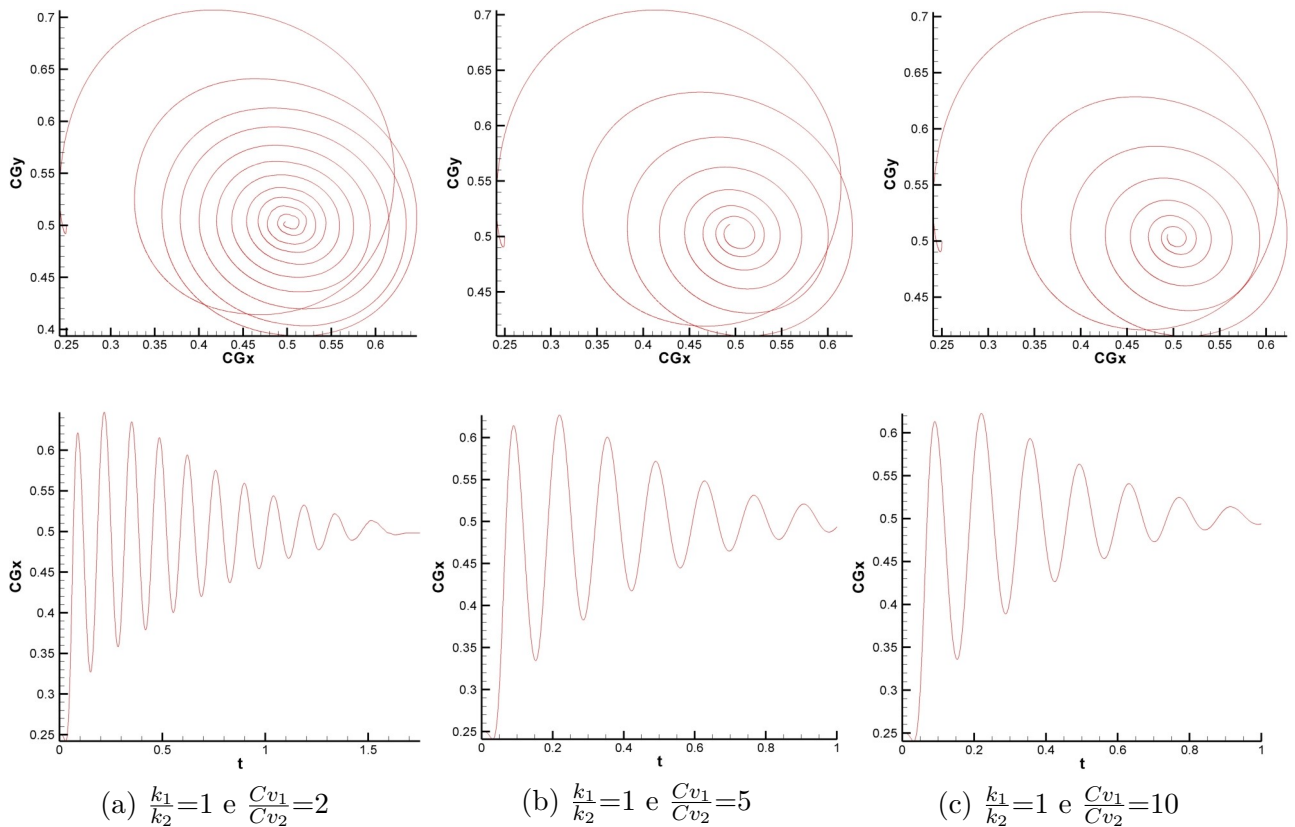


Figura 61: Variação da capacidade calorífica a volume constante (C_v).

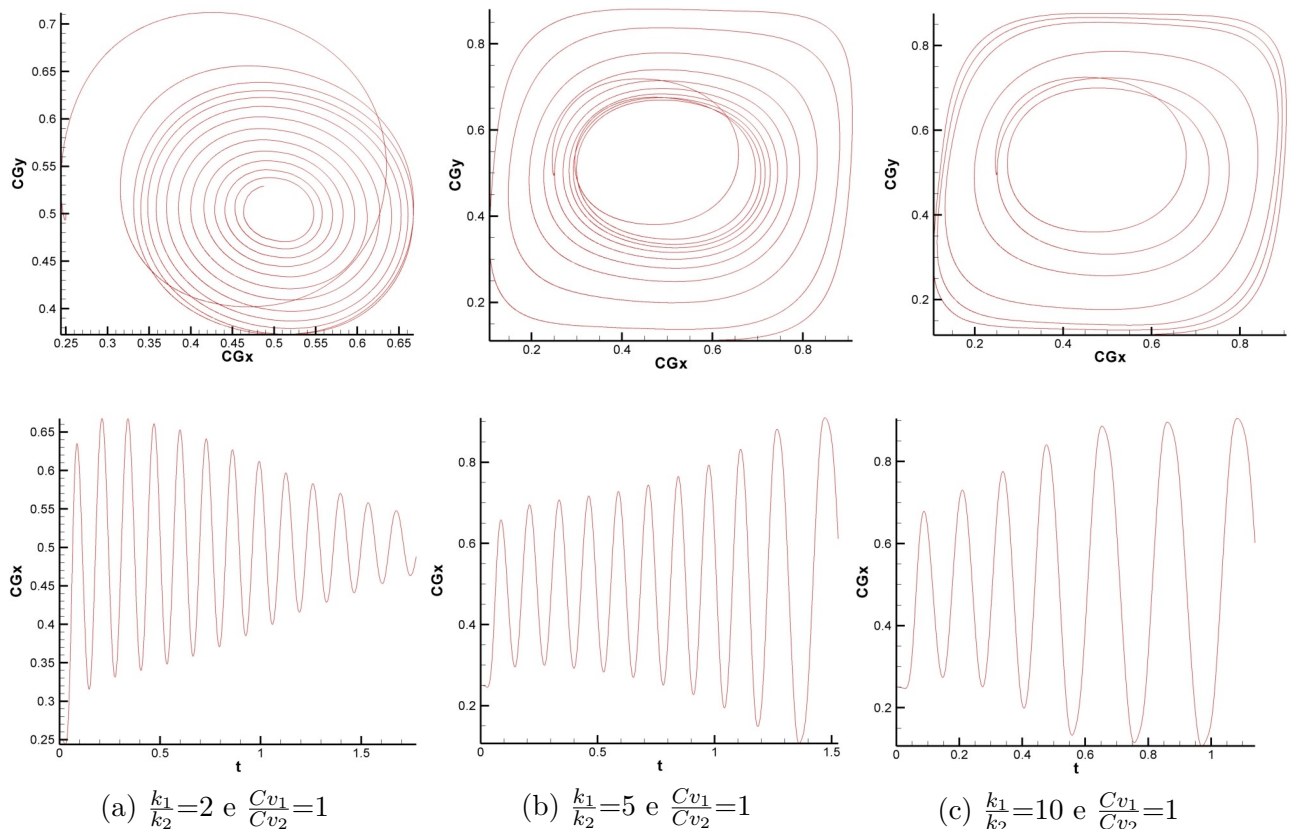


Figura 62: Variação da condutividade térmica (k).

Analisando-se primeiramente a Figura 61, observa-se que com o aumento do valor da capacidade calorífica da partícula, esta tende a se alocar mais rapidamente no centro da cavidade, onde apresenta amplitudes de rotação cada vez menores e conseqüentemente um comportamento estacionário.

De certo modo, este fenômeno qualifica um obstáculo ao aumento da transferência de calor, sendo necessárias outras alternativas paralelas para que se tire vantagem da implementação de um fluido com C_v superior no escoamento, tais como a inserção de uma segunda gota que possivelmente evite a translação da primeira para o centro.

Já na Figura 62, têm-se resultados muito interessantes para o aumento da condutividade térmica. Como mencionado anteriormente, a proximidade da gota com relação às paredes é um fator essencial para a otimização do processo de convecção natural. Da mesma forma, melhorando-se as propriedades térmicas do escoamento também se chega ao mesmo objetivo.

Portanto, ao se estabelecer por meio dos dados obtidos que o aumento da condutividade térmica resulta em um trajetória mais próxima às extremidades da cavidade, conclui-se que esta consiste em uma excelente solução para a intensificação das trocas de calor na cavidade.

4.5 INFLUÊNCIA DA GOTA NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Para concluir a investigação dos efeitos do escoamento, analisou-se por fim os resultados obtidos para o número de Nusselt no escoamento com diferentes razões de capacidade calorífica a volume constante e condutividade térmica apresentados na seção anterior.

Os gráficos gerados para este fim consistem em uma avaliação da variação do número de

Nusselt em função do tempo, cujas escalas foram ampliadas para uma melhor percepção do perfil traçado em decorrência de cada propriedade.

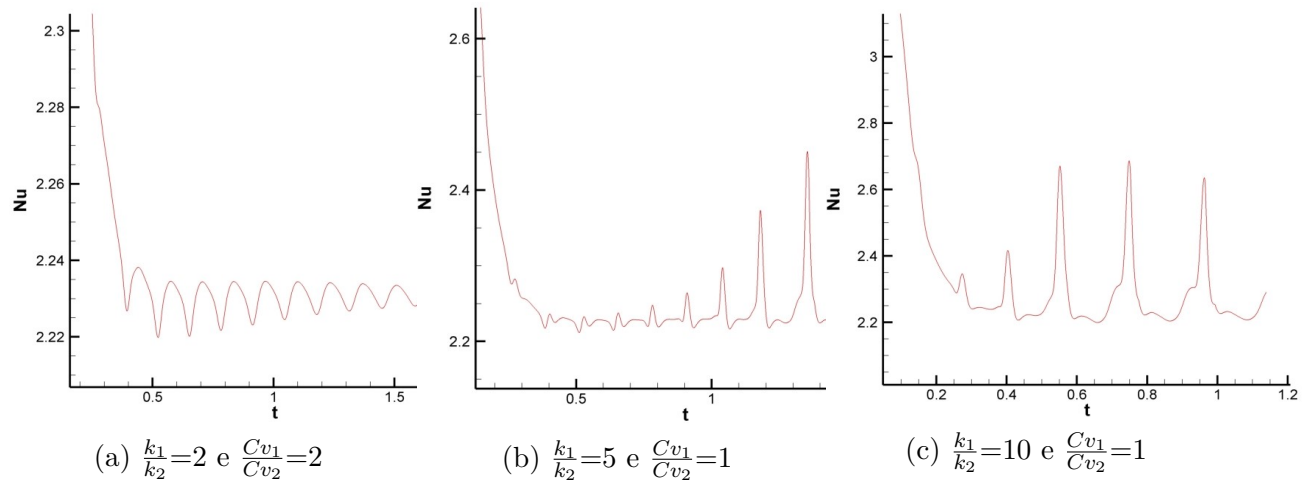


Figura 63: Influência da variação da condutividade térmica no número de Nusselt.

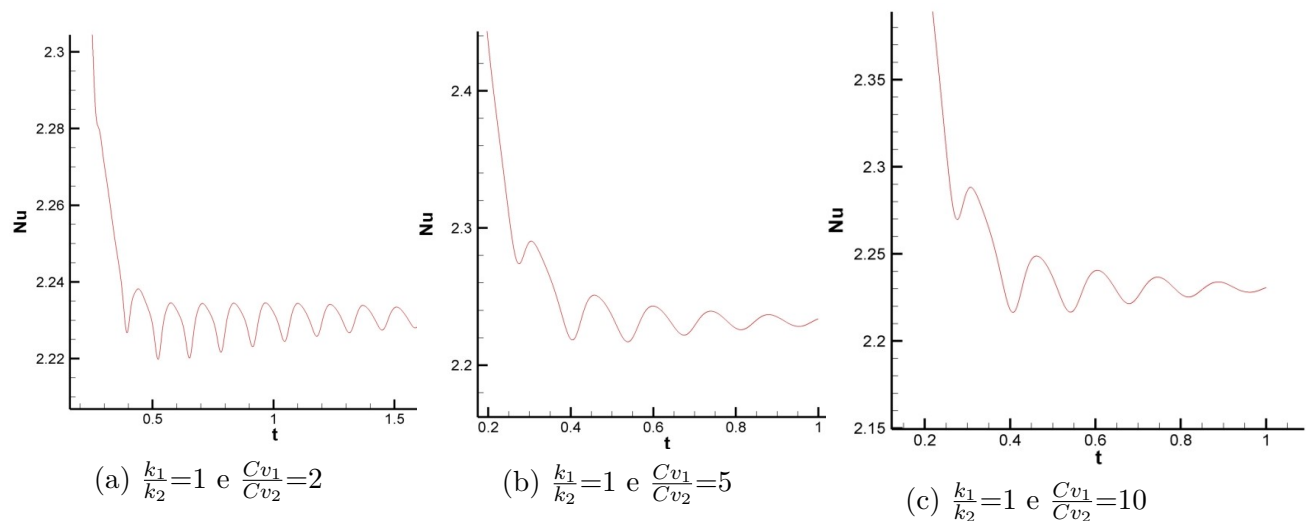


Figura 64: Influência da variação da capacidade calorífica a volume constante no número de Nusselt.

Por meio da comparação entre as Figuras 63 e 64, fica claro que o comportamento de Nu se dá de maneira distinta para a variação das duas propriedades em questão. Este resultado é esperado, uma vez que ambas implicam em efeitos diferentes no escoamento, sendo a condutividade uma propriedade relacionada à capacidade de se transmitir energia térmica e a capacidade calorífica ligada à habilidade de absorção e preservação do calor num corpo.

Visando uma conclusão mais clara sobre qual foi o resultado fornecido em cada caso para a variação das taxas de transferência de calor, analisou-se cada um dos quadros apresentados anteriormente, promovendo simultaneamente a comparação dos dados com os obtidos na seção 4.3, para o escoamento de apenas um fluido, dentro dos mesmos parâmetros.

Nas etapas anteriores deste estudo, investigaram-se cuidadosamente os efeitos de diferentes números de Rayleigh no escoamento monofásico em convecção natural dentro da cavidade. Assim, constatou-se que para um $Ra=10^4$ o Nusselt é aproximadamente igual a 2,23. Este valor foi novamente validado na simulação para o escoamento multifásico em que as propriedades térmicas dos dois fluidos são consideradas iguais ($k_1/k_2=1$ e $Cv_1/Cv_2=1$).

Desse modo, traçou-se nos diagramas a seguir uma linha onde estaria indicado o valor de Nusselt, analisado sem a presença da gota, em regime permanente (o período de tempo levado para se atingir esta condição é também apresentado na seção 4.3 pela Figura 36).

Com isso, averiguando as áreas presentes abaixo e acima da linha, é possível se ter uma boa ideia de qual foi o efeito resultante para os valores medidos.

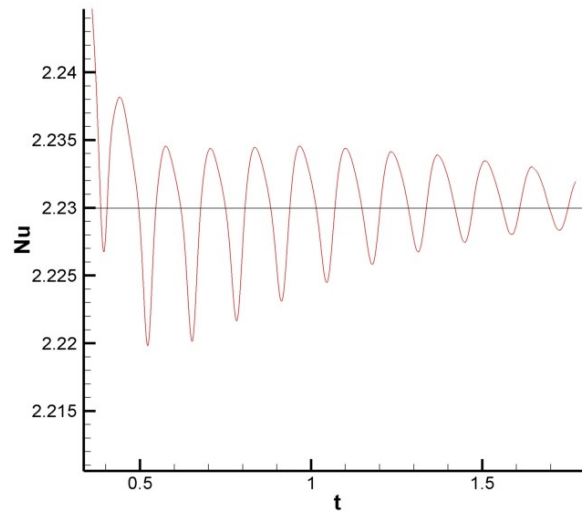


Figura 65: Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 2.

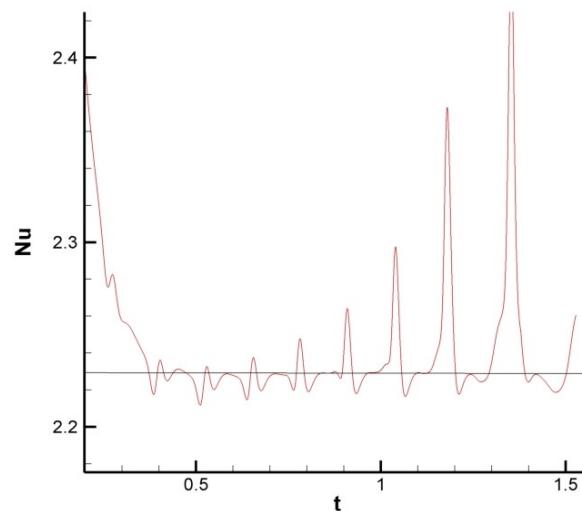


Figura 66: Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 5.

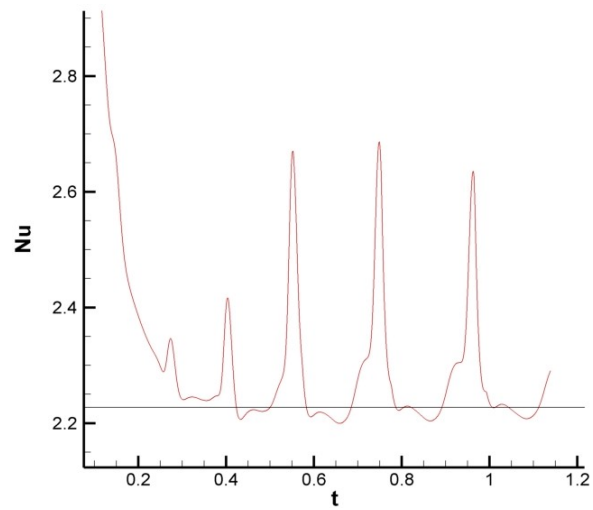


Figura 67: Variação do número de Nusselt para razão de k igual a 10.

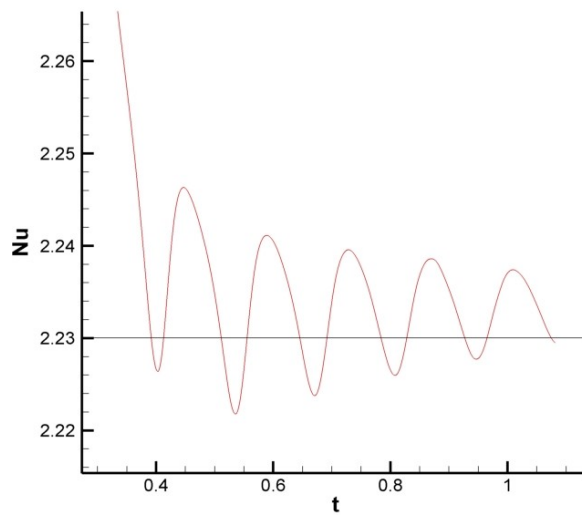


Figura 68: Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 2.

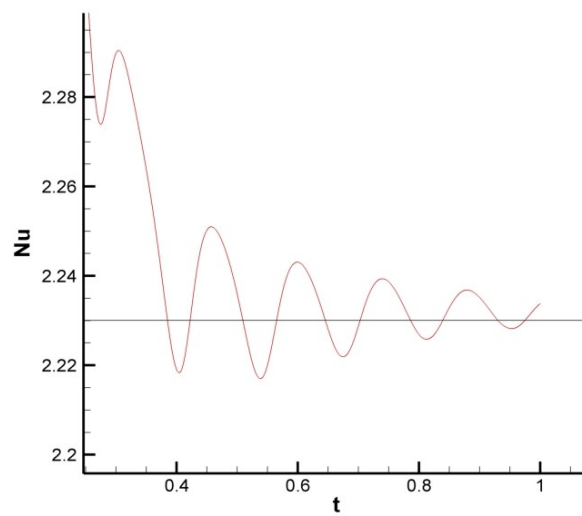


Figura 69: Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 5.

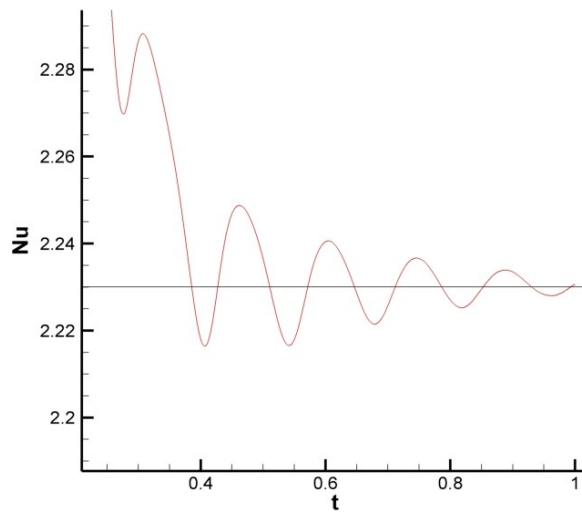


Figura 70: Variação do número de Nusselt para razão de C_v igual a 10.

O comportamento diagnosticado pelas figuras acima ilustra bem os aspectos atestados nas seções anteriores, em especial a importância da trajetória da gota. Com o incremento dos valores de k , tem-se um visível aumento na troca de calor sobretudo à medida em que a gota se aproxima mais das paredes. Já com maiores razões de C_v , tem-se um aumento menos expressivo, em especial quando o escoamento entra em regime estacionário, no qual a gota tende a se manter na região central da cavidade e conseqüentemente o número de Nusselt se aproxima mais do constatado para o escoamento monofásico.

CAPITULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÃO

Primeiramente, tem-se que a metodologia proposta neste relatório foi corretamente implementada para todas as situações analisadas (cavidade cisalhante, cavidade em convecção natural e escoamento bifásico em convecção natural), tendo sido feita por etapas e devidamente testada e validada a cada passo.

Com a rotina base para as simulações construída e testada, pôde-se partir para a geração de resultados. A análise de dados foi meticulosamente feita para cada etapa dos problemas propostos, avaliando condições distintas tanto de malha e parâmetros computacionais quanto para propriedades e conceitos físicos.

Os resultados obtidos para as situações físicas já amplamente estudadas (cavidades cisalhantes e convecção natural de escoamentos em cavidades) foram gerados com sucesso, apresentando uma similaridade bem satisfatória com os dados da literatura utilizados para a validação. Estes consolidaram a base para a evolução da trabalho em direção a temas ainda pouco explorados.

A geração de dados pela simulação do escoamento bifásico, em que os fluidos são implementados com propriedades térmicas distintas por meio da equação da energia, forneceu um amplo leque de resultados a serem mais profundamente analisados.

Alguns destes resultados já eram esperados, em função dos obtidos nas etapas anteriores, entretanto outros apresentaram comportamentos de caráter inovador, abrindo espaço para muitas discussões sobre todas as possibilidades abrangidas pelo tema principal desta pesquisa.

Em resumo, conclui-se que os objetivos principais propostos para este estudo foram devidamente cumpridos e novas portas para diferentes trabalhos futuros, voltados para a sua continuação, foram abertas.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados gerados nesta pesquisa, sugere-se para uma investigação posterior:

- investigar o motivo por trás do comportamento apresentado pela partícula para cada análise realizada neste trabalho;

-
- a análise dos parâmetros termodinâmicos (Número de Rayleigh, condutividade térmica e capacidade calorífica) para diferentes posições iniciais do centro de gravidade da gota, visando averiguar a presença de novas alterações comportamentais;
 - implementar valores de viscosidade distintos para cada fluido presente no escoamento e analisar a influência da variação da razão entre eles;
 - realizar um estudo com mais partículas dispersas no escoamento.

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, M. L. de. *Estabilidade de Emulsões de Água-em-Óleo na Presença de Campo Elétrico Externo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro/RJ, 2014. Citado na página 3.
- ANDERSON, J. D. et al. *Computational Fluid Dynamics: An Introduction*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado 4 vezes nas páginas iv, 9, 11 e 12.
- BARAKOS, G.; MITSOULIS, E.; ASSIMACOPOULOS, D. Natural convection in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions. *Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 18, p. 695–719, 1994. Citado 4 vezes nas páginas v, 49, 50 e 52.
- BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9781139643467. Citado na página 8.
- CHORIN, A. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968. Citado na página 21.
- CONSIGLIERI, O. *Emulsões*. 2018. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3240563/mod_resource/content/1/EMULS%C3%95ES.pdf>. Citado na página 4.
- CZARNESKI, R. *Convecção Natural de emulsão em uma cavidade*. 2017. Universidade de Brasília. Citado 2 vezes nas páginas iv e 18.
- FUSEGI, T.; HYUN, J. M.; KUWAHARA, K. A numerical study of 3d natural convection in a cube: effects of the horizontal thermal boundary conditions. *Fluid Dynamics Research*, v. 8, p. 1175–1190, 1991. Citado na página 52.
- GARCIA, R. P. *Estudo da Convecção Natural no Interior de Cavidades para Aplicação em Isolamento Transparente de Coletor Solar Plano*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru/SP, 2014. Citado na página 1.
- GHIA, U. et al. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–411, 1982. Citado 6 vezes nas páginas iv, v, 39, 43, 44 e 48.
- ITO, K.; QIAO, Z. A high order compact MAC finite difference scheme for the Stokes equations: Augmented variable approach. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 17, p. 8177–8190, set. 2008. ISSN 0021-9991. Citado 2 vezes nas páginas iv e 20.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 59, p. 308–323, 1985. Citado na página 22.
- MARKATOS, N.; PERICLEOUS, K. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 27, p. 755–772, 1984. Citado na página 52.

- MYERS, D. *Surfaces, Interfaces, and Colloids: Principles and Applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc., 1999. Citado 2 vezes nas páginas iv e 4.
- OSHER, R. F. a. S. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2003. (Applied Mathematical Sciences 153). ISBN 9780387227467. Citado 3 vezes nas páginas 23, 28 e 29.
- OSTRACH, S. Natural convection in enclosures. *Journal of Heat Transfer*, v. 110, p. 1175–1190, 1988. Citado na página 6.
- SALAGER, J. Emulsion properties and related know-how to attain them. In: *Pharmaceutical emulsions and suspensions*. [S.l.]: Marcel Dekker Inc., 2000. cap. 2,3. Citado 2 vezes nas páginas iv e 3.
- SHEWCHUK, J. R. *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. 1994. Carnegie Mellon University. Citado 3 vezes nas páginas iv, 33 e 34.
- SHI, X.; KHODADADI, J. M. Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated square cavity due to a thin fin on the hot wall. *Asme Digital Collection*, v. 125, p. 1175–1190, 2003. Citado na página 26.
- SUSSMAN, S. et al. An improved level set method for incompressible two-phase flows. 1997. Citado na página 26.
- VAHL, G. de. *Numerical Methods in Engineering & Science*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1986. Citado na página 52.
- ÇENGEL, Y.; GHAJAR, A. *Transferência de Calor e Massa*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2009. ISBN 978-85-8055-128-0. Citado 2 vezes nas páginas iv e 15.