



**MODELAGEM NUMÉRICA DE PLACAS DE KIRCHHOFF NO ESPAÇO
POR MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO**

JORGE ALZIRO RAMOS DA CONCEIÇÃO SOBRINHO

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**MODELAGEM NUMÉRICA DE PLACAS DE
KIRCHHOFF NO ESPAÇO POR MÉTODO DE
ELEMENTOS DE CONTORNO**

POR,

Jorge Alziro Ramos da Conceição Sobrinho

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Eder Lima de Albuquerque, UnB/ENM _____

Adriano Todorovic Fabro, UnB/ENM _____

Jones Yudi Mori Alves da Silva, UnB/ENM _____

Brasília, 07 de Dezembro de 2017

Dans la vie, rien n'est à craindre, tout est à comprendre.

-Marie Curie

RESUMO

A análise de placas finas - uma vez que estas são estruturas leves, resistentes e de ampla aplicabilidade - tem se tornado cada vez mais atraente para pesquisadores e engenheiros que almejam sempre se manter à frente com seus projetos. Uma das ferramentas de análise de tais estruturas que tem ganhado notoriedade no meio científico é o Método dos Elementos de Contorno, procedimento matemático de análise de problemas potenciais no qual as integrais de domínio são convertidas em integrais de contorno.

Esse método é particularmente interessante no âmbito das ciências mecânicas computacionais, uma vez que apenas o contorno do problema proposto necessita ser discretizado. Há também outras vantagens, como a manipulação de matrizes menos esparsas que métodos análogos, a redução da dimensão do problema e tantos outros elencados ao longo deste trabalho. A partir dessas motivações, propôs-se desenvolver uma rotina de análise de placas finas por Método de Elementos de Contorno direto, expondo alguns estudos de caso para validar sua aplicabilidade.

Introduzem-se, primeiramente, conceitos fundamentais para a compreensão da análise estrutural de placas finas e do Método dos Elementos de Contorno, seguidos de algumas aplicações da Teoria da Elasticidade Plana decorrente do estudo das placas e de uma revisão bibliográfica acerca de aplicações do método para diversos problemas estáticos. Em seguida, apresentam-se os fundamentos teóricos da aplicação do Método de Elementos de Contorno para o problema estático de placas finas. O método utilizado para obtenção da equação diferencial da placa foi o Método dos Trabalhos Virtuais, também presente neste relatório. Uma breve apresentação sobre a implementação numérica do método é desenvolvida e os resultados numéricos obtidos são finalmente expostos e discutidos.

O intuito desse trabalho é, portanto, desenvolver uma rotina computacional em Python de análise de placas finas por MEC direto. Uma vez obtidos resultados condizentes com a literatura, pode-se então aprimorar a interface gráfica do algoritmo e ampliar a gama de aplicações do código, como a implementação de múltiplas placas em associação no espaço.

Palavras-chave: Placas finas, Kirchhoff, Método dos Elementos de Contorno, Python, *MEC*, Trabalhos Virtuais.

ABSTRACT

The analysis of thin plates - as these are lightweight, sturdy and versatile structures - has become increasingly attractive to researchers and engineers who always aim to stay ahead with their projects. One of the analysis tools of such structures that has gained notoriety in the scientific environment is the Boundary Element Method, a mathematical procedure of analysis of potential problems in which domain integrals are converted into contour integrals.

This method is particularly interesting in the context of computational mechanical sciences, since only the boundaries of the proposed problem need to be discretized. There are also other advantages, such as the manipulation of more sparse matrices than analogous methods, the reduction of the dimension of the problem and so many others listed throughout this work. From these motivations, it was proposed to develop a thin-plate analysis routine by Direct oBoundary Element Method, exposing some case studies to validate its applicability.

Firstly, fundamental concepts are introduced for the understanding of thin plates structural analysis and the Boundary Element Method, followed by some applications of the Plane Elasticity Theory derived from the study of the plates and a bibliographical review about the applications of the method for static problems. Next, the theoretical foundations of the application of the Boundary Element Method for the static thin-plate problem are presented. The method used to obtain the differential equation of the plate was the Virtual Works Method, also present in this report. A brief presentation on the numerical implementation of the method is developed and the numerical results obtained are finally exposed and discussed.

The purpose of this work is, therefore, to develop a computational routine of thin plate analysis by direct BEM. Once the results are consistent with the literature, one can then improve the graphical interface of the algorithm and extend the range of applications of the code, such as the implementation of multiple plates in association in space.

Keywords: Thin Plates, Kirchhoff, Boundary Element Method, Python, BEM, Virtual Work.

Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS FINAS	1
1.1.1 Panorama Histórico	1
1.1.2 Considerações sobre Placas	2
1.1.3 Construção Civil	4
1.1.4 Aeronáutica	5
1.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	5
1.2.1 Considerações sobre o Método	6
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
1.4 OBJETIVOS	10
1.5 METODOLOGIA	11
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	11
2 TEORIA DE PLACAS FINAS	13
2.1 CONCEITO DE PLACAS FINAS	13
2.1.1 Hipóteses Simplificadoras	14
2.2 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO	14
2.3 RELAÇÕES TENSÃO-DESLOCAMENTO	17
2.3.1 Resultantes de Tensão para Placas Finas	18
2.4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA	20
2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO	23
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	25
3.1 IDENTIDADE DE RAYLEIGH-GREEN	25
3.2 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL	27
3.3 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DA SOLUÇÃO	29

3.4	EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO	30
3.4.1	Primeira Equação de Contorno	31
3.4.2	Segunda Equação de Contorno	31
3.5	RESULTANTES DE TENSÃO	33
4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	34
4.1	CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO	36
4.2	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	37
5	RESULTADOS OBTIDOS	40
5.1	ESTUDO DE CASO 1: PLACA QUADRADA	40
5.2	ESTUDO DE CASO 2: PLACA TRIANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA . . .	43
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
6.1	TRABALHOS FUTUROS	45
	REFERÊNCIAS	47

Lista de Figuras

1.1	Distribuição dos esforços internos em quatro diferentes elementos de placa (SZILARD, 2004).	3
1.2	Estrutura suportada em ambos os lados por pilares de concreto (SZILARD, 2004). . .	4
1.3	Procedimento e resultados da análise da estrutura em questão (SZILARD, 2004). . . .	4
1.4	Fuselagem com quadro de vigas convencional (a) e fuselagem com estrutura em colmeia (b) simuladas no estudo (BOUAZIZI et al., 2018).	5
1.5	Comparação entre malhas de elementos finitos (acima) e elementos de contorno (abaixo) para uma placa com orifício (ALIABADI, 2002).	6
1.6	Representação esquemática de elementos de contorno constantes (KATSIKADELIS, 2016).	7
1.7	Representação esquemática de elementos de contorno lineares (KATSIKADELIS, 2016).	7
1.8	Representação esquemática de elementos de contorno parabólicos (KATSIKADELIS, 2016).	7
1.9	Exemplos numéricos de aplicação do método BEM multi-regiões proposto, com elementos quadráticos de 8 nós (GAO e DAVIES, 2000).	8
1.10	Sequência de empilhamento para a placa de compósito laminada com N camadas estudada (REIS et al., 2011).	9
1.11	Deslocamento na direção z para a placa engastada modelada em uma sub-região (esquerda) e duas sub-regiões (direita) (SOUSA, 2016).	9
1.12	Caracterização para a placa de orifício modelada em uma região, à esquerda, e duas sub-regiões, à direita (WANG et al., 2017).	10
1.13	Divisão do domínio em subdomínios utilizando-se um contorno mediador (NAJARZADEH; MOVAHEDIAN; AZHARI, 2018).	10
2.1	Placa bidimensional de domínio Ω , contornos Γ_K e k quinas (KATSIKADELIS, 2014 - modificada).	13
2.2	Seção em corte de uma partição da placa em relação ao plano xz , anterior e após a deformação (KATSIKADELIS, 2014).	16
2.3	Resultantes de tensão de uma seção em corte da placa.(KATSIKADELIS, 2014). . . .	18
2.4	Seção em corte inclinada com as resultantes de tensão; $\angle x, \mathbf{n} = \alpha$ (KATSIKADELIS, 2014).	19
2.5	Dispositivo utilizado por Kirchhoff para interpretação dos forçamentos de canto (KATSIKADELIS, 2014).	22
3.1	Geometria da placa e notações utilizadas (KATSIKADELIS, 2014 - modificada). . . .	25
3.2	Domínio circular Ω_0 de raio ρ (KATSIKADELIS, 2014).	28
3.3	Domínios Ω^* e Ω_ρ (KATSIKADELIS, 2014).	30

3.4	Domínios Ω^* e (Ω_ρ) (KATSIKADELIS, 2014).	31
4.1	Fluxograma de funcionamento da rotina proposta.	37
5.1	Representação esquemática da placa analisada.	40
5.2	Malhas geradas para resolução do problema da placa.	41
5.3	Representação gráfica do deslocamento transversal da placa quadrada analisada.	42
5.4	Propriedades geométricas da placa triangular estudada (KATSIKADELIS, 2014).	43
5.5	Malha gerada para resolução do problema da placa.	43
5.6	Representação gráfica do deslocamento transversal da placa triangular analisada.	44

Lista de Tabelas

1	Condições de contorno relativas ao suporte de uma placa.	23
2	Propriedades geométricas e materiais do problema proposto.	41
3	Deslocamento transversal do centro da placa analisada.	42
4	Propriedades geométricas e materiais do problema proposto.	43
5	Deslocamentos transversais a uma altura $a/5$ da base da placa.	44

Lista de Símbolos

- Γ Variável de contorno. iii, 6, 13, 20–23, 25–35
- Ω Variável de domínio. iii, iv, 6, 13, 20–22, 25–33, 35, 36
- Π Energia potencial total. 20–22
- α Função de contorno. 23, 32, 34
- β Função de contorno. 23
- η Coordenada de ponto de campo. 27, 29
- γ Deformação no plano. 15–17, 19, 20
- κ Curvatura ao longo do eixo. 17, 24
- ν Coeficiente de Poisson. 17–21, 23, 24, 29, 41
- ϕ Ângulo. 28, 29
- ρ Raio do domínio. iii, 28
- σ Variável de tensão normal. 14, 17, 18, 20
- τ Variável de tensão cisalhante. 17–20
- θ Ângulo de rotação. 16, 28, 32
- ε Deformação normal ao eixo. 14–17, 20
- ξ Coordenada de ponto de campo. 27
- D Rigidez à flexão. 2, 19–24, 26–29
- E Módulo de elasticidade. 17–19
- f Densidade de carregamento. 13, 20–22, 36
- G Módulo de cisalhamento. 17–19
- h Espessura da placa. 3, 13, 18, 19
- k Rigidez de mola. 20–22
- M Momento concentrado. 14, 18–24, 26
- n Vetor normal. iii, 13, 19–24, 26–28
- P Carregamento concentrado. 13
- Q Esforços cisalhantes. 18–20, 22

R Esforços de canto. 14, 20–22

r Distância entre pontos. 14, 15, 27–29

s Comprimento de arco. 13–15, 20, 21, 23, 24, 26–28

t Vetor tangencial. 13, 19, 20, 23, 24

w Deslocamento transversal. 2, 3, 14–17, 19–27, 30–34, 36, 42

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS FINAS

Desde os primórdios da civilização, estruturas como placas de pedra, barro e concreto vêm sendo utilizadas em construções monumentais como as pirâmides egípcias, templos gregos e anfiteatros romanos. A partir de então, a aplicabilidade e o estudo de placas finas têm-se tornado processos cada vez mais refinados e austeros.

As placas e cascas são, em sua essência, superfícies cuja espessura é substancialmente menor do que suas demais dimensões. Estas constituem uma classe abrangente de superfícies estruturais, uma vez que vários exemplos de estruturas reais podem ser aproximadas a elas para análise devida. Os cascos de navios, as asas dos aviões e as lajes de concreto das casas são apenas alguns exemplos de estruturas de engenharia que podem ser aproximadas para placas finas. Ademais, a ação estrutural em (majoritariamente) duas dimensões resulta em estruturas mais leves, oferecendo vantagens econômicas atraentes em relação às diversas outras opções de geometrias estruturais presentes no mercado e na literatura.

Vale colocar também que a maioria das estruturas do tipo placa são analisadas segundo a Teoria de Elasticidade Plana, o que abre espaço para uma diversa sorte de métodos numéricos que podem ser aplicados para análise. Por exemplo, têm-se o Método de Diferenças Finitas ou o Método dos Elementos de Contorno, que utilizam técnicas de discretização matemática para avaliação de problemas de placas complexos. Tem-se ainda o Método dos Elementos Finitos, em que são utilizados modelos de discretização física baseados em considerações de engenharia.

1.1.1 Panorama Histórico

O estudo analítico e experimental de problemas de placa teve seu início formal com Leonhard Euler (1707-1783), que utilizou as primeiras abordagens matemáticas da teoria de placas finas para avaliar problemas de vibração livre em membranas elásticas circulares, triangulares e retangulares, utilizando como analogia dois conjuntos de linhas esticadas perpendiculares entre si. Seu discípulo, Jacques Bernoulli (1759 - 1789), tentou substituir a rede de linhas proposta por seu tutor por uma malha de vigas dotadas apenas de rigidez de flexão, encontrando relações pouco consolidadas entre sua teoria e os experimentos desenvolvidos dada a ausência de termos de rigidez torsional.

Em seguida, grandes mentes da ciência e engenharia aprimoraram a teoria de placas finas e as equações diferenciais que as descrevem: Chladni (1756 - 1827), estudando-as no campo da acústica; Germain (1776 - 1831) e Lagrange (1736 - 1813) desenvolvendo as equações diferenciais descrevendo as vibrações livres em placas; Cauchy (1789 - 1857) e Poisson (1781 - 1840) implementando os primórdios da formulação do problema flexural de placas baseado nas equações gerais da Teoria de Elasticidade Plana.

A primeira formulação de fato satisfatória do problema supracitado é creditada a Claude-Louis Navier (1785 - 1836), que com base nas hipóteses levantadas por Bernoulli foi capaz de desenvolver

corretamente a equação diferencial governante de placas sujeitas a carregamentos estáticos p_z como sendo

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z \quad (1.1)$$

em que D é a rigidez flexural da placa e w é a deflexão do plano médio. Ele também foi capaz de obter uma solução exata da equação acima transformando-a em expressões algébricas por meio de séries trigonométricas duplas de Fourier.

Em 1850, Gustav Kirchhoff (1824 - 1887) publicou a primeira teoria consolidada de flexão de placas finas. Ao propor uma série de hipóteses simplificadoras, que viriam a ser conhecidas como "Hipóteses de Kirchhoff", o cientista alemão foi capaz de chegar aos mesmos resultados de Navier. No entanto, a formulação de funcionais de energia utilizada por Kirchhoff não só era mais simples que a de Navier, como também permitia definir as condições de contorno em função dos deslocamentos (e subsequentemente suas derivadas) em respeito aos eixos x e y .

Stephen Timoshenko (1878 - 1972) também fez importantes colaborações às teorias e aplicações de problemas de flexão em placas. A ele são creditadas soluções de problemas de placas circulares em grandes deflexões e a formulação de problemas de estabilidade elástica. Seu trabalho foi refinado por cientistas notórios como von Karman, Hencky, Reissner e Huber.

Como mencionado anteriormente, métodos numéricos são aproximações atraentes para a solução de problemas de placa. Classicamente, o Método de Diferenças Finitas tem sido capaz de produzir resultados numéricos satisfatórios para diversos problemas de placas para os quais não se havia metodologia analítica devida, mesmo antes da invenção do computador eletrônico. Arpad Náday (1883 - 1963) publicou em 1925 artigos de análise flexural em placas por Diferenças Finitas em que os cálculos foram todos feitos manualmente.

Com o advento do computador eletrônico, métodos numéricos mais versáteis e facilmente aplicáveis foram sendo utilizados na análise de placas finas. Em 1956 Turner, Clough, Martin e Topp introduziram o método de discretização física do contínuo das placas conhecido por Elementos Finitos, uma das ferramentas de engenharia mais difundidas e utilizadas dos tempos presentes. Tem-se também o procedimento semianalítico de análise chamado de *Finite Strip Method*, proposto por Yau Kai Cheung para avaliar estruturas de tipo placa de geometrias regulares.

Finalmente, Brebbia (1948 - 2018) propôs uma alternativa eficaz ao já consolidado Método dos Elementos Finitos, por meio da discretização de apenas o contorno da placa para sua análise. O método veio a ser conhecido por Método dos Elementos de Contorno e reduz drasticamente a quantidade de incógnitas nos sistemas de equações resultantes, uma vez que se reduz a dimensão do problema em uma ordem para resolvê-lo através de uma série de abstrações matemáticas. Atualmente, cientistas como John Katsikadelis tem feito diversos esforços para aprimorar o MEC, através de técnicas inovadoras de integração e discretização do contorno de placas de superfície arbitrária.

1.1.2 Considerações sobre Placas

Dadas as complexidades inerentes a qualquer estrutura física real, é necessário ao engenheiro que se substituam tais estruturas por modelos que carreguem apenas os parâmetros pertinentes que melhor descrevam suas respostas estáticas ou dinâmicas. Para a análise de placas, essas simplificações se referem principalmente aos seguintes fatores:

- A geometria da placa e de seus suportes;
- O comportamento do material da placa;
- Os tipos e aplicação dos carregamentos submetidos.

Uma análise de rigidez elástica de uma placa de fato rigorosa necessitaria, entre outros, que esta seja considerada um meio tridimensional contínuo, o que acarretaria em diversas complicações

matemáticas e custos computacionais em sua maioria impraticáveis. Apesar de as distinções entre os tipos de placa serem tênues e variarem de acordo com a bibliografia adotada, KRAUTHAMMER (2001) apresenta uma criteriosa caracterização das placas em relação a razão entre seu comprimento característico e sua espessura (L/h) de acordo com os seguintes tipos:

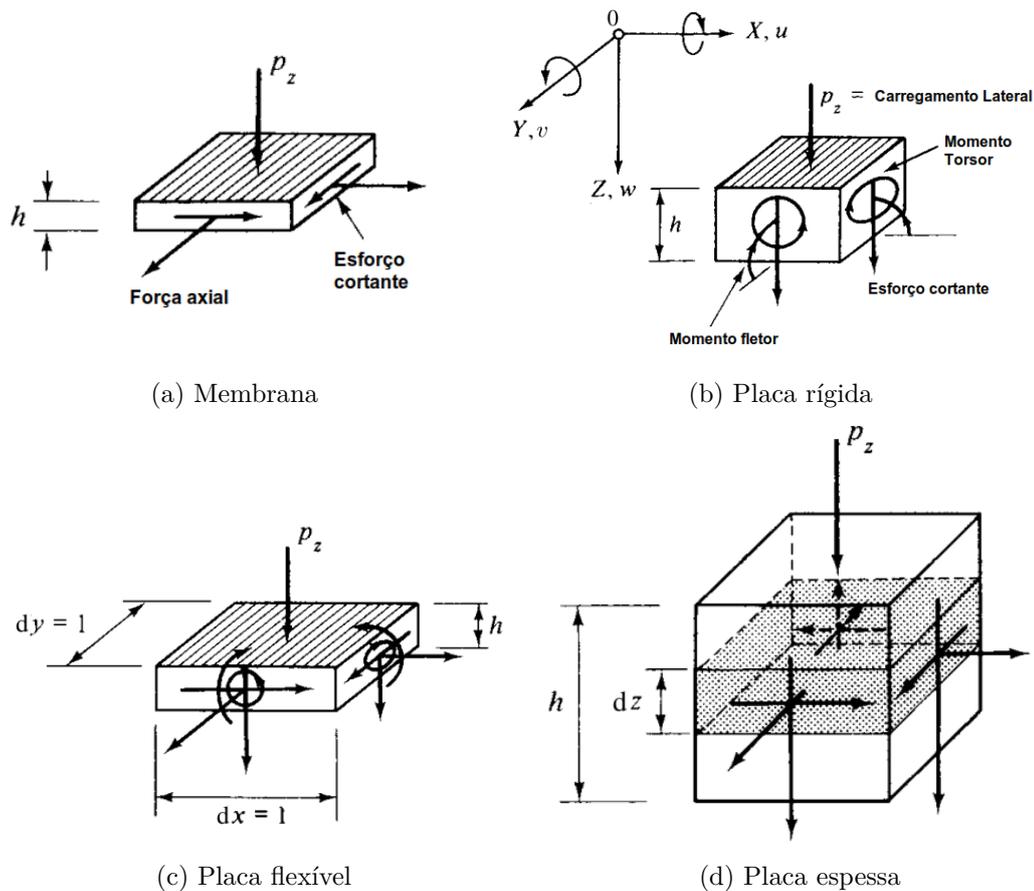


Figura 1.1: Distribuição dos esforços internos em quatro diferentes elementos de placa (SZILARD, 2004).

- Membranas ($L/h \geq 80 \dots 100$) são placas extremamente finas nas quais a rigidez à flexão pode ser considerada desprezível. As membranas transmitem os esforços laterais através de si por meio de esforços cortantes axiais e centrais atuantes no plano médio da membrana (Fig. 1.1a). Sua distribuição de cargas assemelha-se, portanto, a uma malha de cabos interconectados;
- Placas finas ($8 \dots 10 \leq L/h \leq 80 \dots 100$) representam os tipos intermediários das placas em aplicação ou estudo. As placas finas ainda se subdividem em duas categorias em relação à razão entre a deflexão máxima da placa e sua espessura (w/h):
 - Placas rígidas ($w/h \leq 0,2$) são aquelas que transmitem os carregamentos majoritariamente por momentos torsores e esforços cortantes transversais. As deformações do plano médio e as forças de membrana são praticamente desprezíveis (Fig. 1.1b). A maioria das placas em estudo são desta categoria, bem como são as placas estudadas neste trabalho;
 - Placas flexíveis ($w/h > 0,3$) manifestam deflexões tais que estas causam também um alongamento do plano médio. Tais placas apresentam uma combinação entre as placas rígidas e as membranas, de modo que as cargas externas são distribuídas internamente através de momentos internos, esforços cisalhantes e esforços axiais (Fig. 1.1c). Por causa de sua razão peso/carga favorável, são as placas mais utilizadas pela indústria aeroespacial.
- Placas espessas ($L/h > 8 \dots 10$) são aquelas cuja análise envolve todas as condições de tensão internas de um meio tridimensional contínuo (Fig. 1.1d), utilizando-se de equações tridimensionais de Elasticidade Geral.

O estudo e aplicabilidade de elementos de placa é tão vasto quanto antigo. Logo, a gama de aplicações para elementos de placa varre diversos campos da ciência e da indústria, como a construção civil, a industrial naval e a indústria aeroespacial. Maioria dos projetos mecânicos em que se tem a construção de carcaças utiliza modelagem desta por meio de elementos de placa, por exemplo. Tendo isso em vista, apresentam-se a seguir algumas aplicações de placas finas no campo da engenharia civil e mecânica utilizadas atualmente.

1.1.3 Construção Civil

Como mencionado anteriormente, elementos de placa vêm sendo utilizados nas mais diversas obras arquitetônicas há milênios. Obviamente, ao passo que a ciência e as práticas de engenharia foram se aprimorando, as aplicações de elementos de placa para modelagem de, por exemplo, pisos, lajes, esquadrias e janelas na construção civil foi se tornando cada vez mais refinada. SZILARD (2004) demonstra em seu trabalho uma aplicação muito frequente na construção civil, que é a modelagem de uma laje cogumelo suportada por pilares de concreto armado (Fig. 1.2):

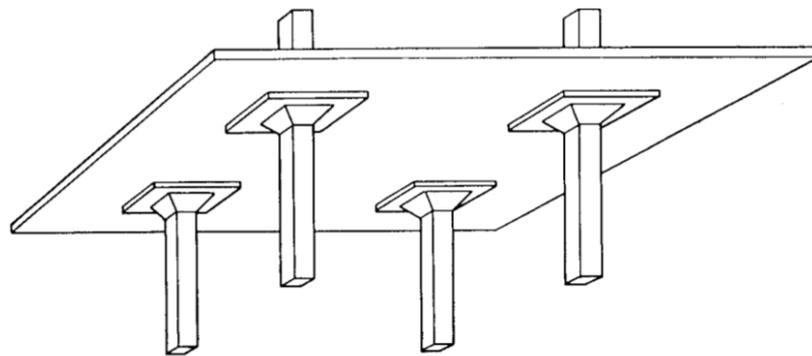


Figura 1.2: Estrutura suportada em ambos os lados por pilares de concreto (SZILARD, 2004).

Para esta, o autor propõe que se avaliem os esforços internos da estrutura por meio do Método de Cross, também conhecido como técnica de distribuição de momentos, acrescido de um refinamento de malha atrelado ao momento de inércia variável do painel:

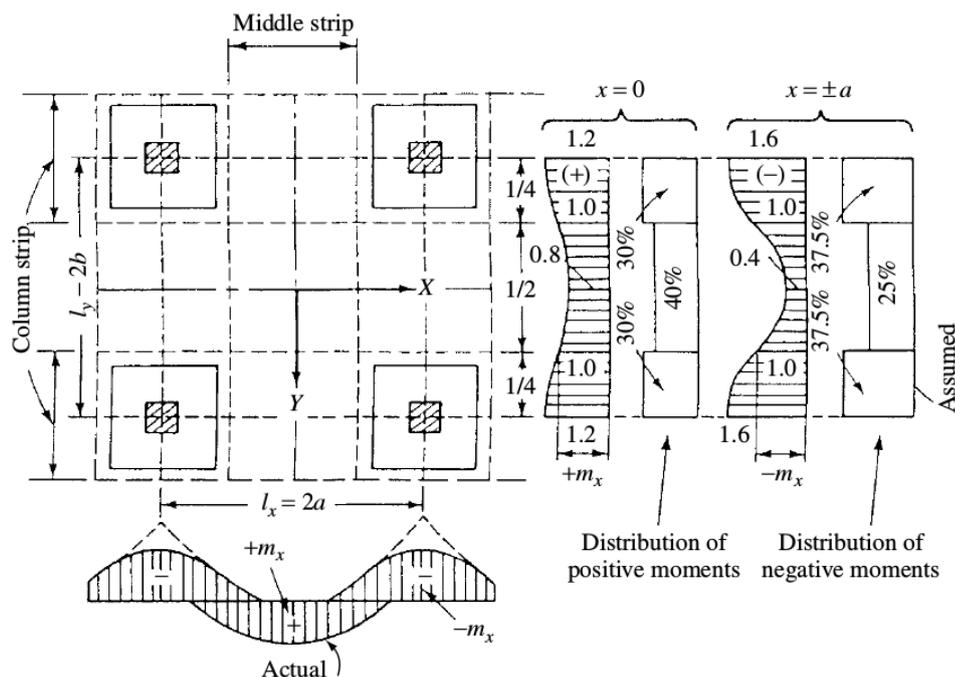


Figura 1.3: Procedimento e resultados da análise da estrutura em questão (SZILARD, 2004).

1.1.4 Aeronáutica

Outra área de aplicação clássica da análise estrutural de placas é a modelagem de carcaças para aeronaves. As asas e a fuselagem destas consistem, por exemplo, em estruturas do tipo placa curvada disposta sobre uma série de vigas de suporte. À medida que a tecnologia de desenvolvimento de aeronaves foi se aprimorando, também se pôde perceber como a aplicação das teorias de placa - bem como das ciências dos materiais e outras áreas correlatas - foi também se tornando cada vez mais refinada.

BOUAZIZI et al. (2018) propuseram uma simulação de fuselagem de aeronaves através de elementos de placa cilíndrica pressurizada, na qual a fuselagem convencional de uma aeronave é modelada através da Teoria de Elasticidade Geral de placas finas e comparada através do Método de Elementos Finitos com uma estrutura de suporte tipo colmeia (Fig. 1.4), a fim de se obterem parâmetros ótimos de modelagem como o menor peso e fatores de segurança otimizados:

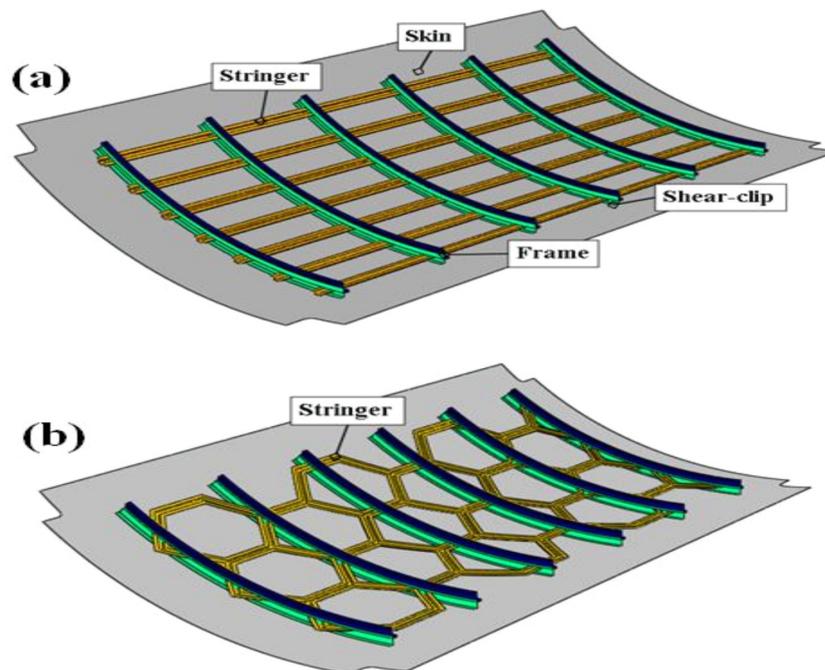


Figura 1.4: Fuselagem com quadro de vigas convencional (a) e fuselagem com estrutura em colmeia (b) simuladas no estudo (BOUAZIZI et al., 2018).

1.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A necessidade de se desenvolverem projetos de engenharia cada vez mais complexos, enquanto se mantém um custo razoável de produção, dita que as simulações computacionais devem substituir, parcial ou integralmente, os testes em laboratório e em escala real de modelo. Dessa forma, métodos computacionais de análise estrutural - tanto estática quanto dinâmica - tornaram-se parte fundamental do processo.

Métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) ou o Método dos Elementos de Contorno (*Boundary Element Method* - BEM) têm sido componentes chave na evolução da capacidade computacional de projetos de engenharia. Ainda que o Método dos Elementos Finitos apresente atualmente uma aplicabilidade mais diversa que o Método dos Elementos de Contorno, o último tem-se mostrado uma alternativa eficiente em diversos campos de aplicação na indústria, tais como a Acústica, a Mecânica da Fratura e a Geomecânica.

Uma das características mais atrativas do Método dos Elementos de Contorno é a redução da dimensionalidade do problema a ser analisado. Uma vez que só o contorno do problema precisa ser discretizado, um problema de domínio tridimensional se reduz a sua superfície e um problema de uma

superfície bidimensional se reduz às suas curvas de contorno (Fig. 1.5).

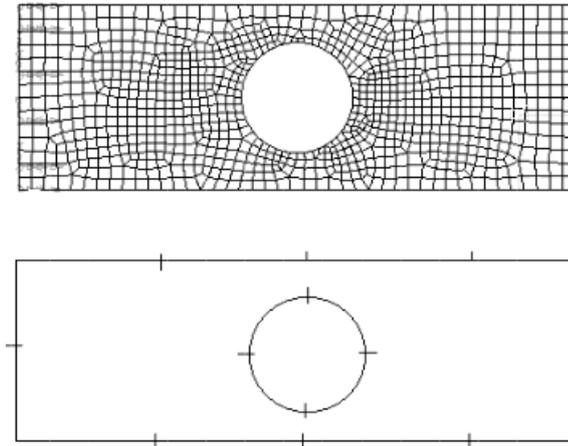


Figura 1.5: Comparação entre malhas de elementos finitos (acima) e elementos de contorno (abaixo) para uma placa com orifício (ALIABADI, 2002).

Essa redução torna a modelagem da simulação um processo razoavelmente menos oneroso, além de possibilitar uma integração facilitada com *softwares* de *CAD*, uma vez que apenas modelagens das superfícies são necessárias. É interessante colocar também que o método permite modelagem contínua do domínio do problema, uma vez que sua discretização não é necessária. As soluções para os pontos internos são calculadas após as variáveis de contorno como pós-processamento, não apresentando nenhuma influência direta na resolução da simulação.

1.2.1 Considerações sobre o Método

Como explicitado anteriormente, o Método dos Elementos de Contorno consiste em uma técnica de análise do comportamento de sistemas mecânicos, elétricos e outros que estejam sujeitos a carregamentos externos. Uma das aplicações mais frequentes do método em questão é a solução de problemas de engenharia descritos por uma equação potencial, de forma que

$$\nabla^2 u = f(x, y) \quad (x, y \in \Omega) \quad (1.2)$$

cuja solução $u = u(x, y)$ representa o potencial produzido em um ponto (x, y) do domínio causado por uma fonte $f(x, y)$ distribuída em Ω . A Eq. (1.2) descreve uma série de problemas físicos, tais como escoamentos em geral e os problemas de flexão de placas avaliados no presente trabalho. Para sua solução, ou a função u ou sua derivada $\partial u / \partial n$ deve ser conhecida no contorno Γ . A representação integral da solução do problema é obtida, por exemplo, pela aplicação da Identidade de Green, na qual uma integral de domínio é convertida em uma integral de contorno.

No entanto, para problemas de engenharia complexos, a resolução analítica das integrais de contorno é virtualmente impraticável, restando portanto a implementação numérica do método. Um domínio arbitrário Ω de contorno Γ deve ter seu contorno discretizado em um número finito de elementos, que são os *elementos de contorno*. Os tipos de elemento de contorno mais implementados são os seguintes:

- **Elementos constantes:** para esse tipo de elemento, o segmento de contorno é aproximado a uma linha reta delimitada por seus pontos de extremidade, com um ponto nodal posicionado em seu centro (Fig. 1.6). O valor do parâmetro de contorno é considerado constante ao longo do segmento e igual ao seu valor no ponto nodal.

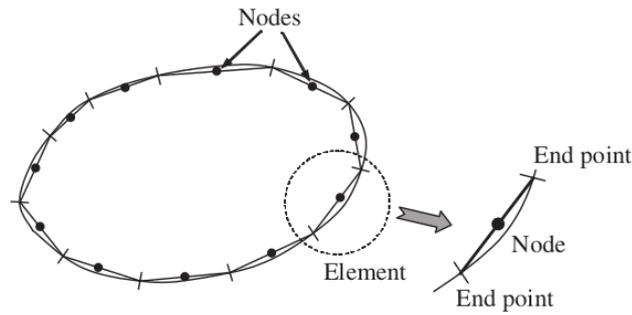


Figura 1.6: Representação esquemática de elementos de contorno constantes (KATSIKADELIS, 2016).

- **Elementos lineares:** para estes, o segmento de contorno também é aproximado a uma linha reta delimitada por suas extremidades nodais (Fig. 1.7). Porém, para estes o parâmetro de contorno varia linearmente entre os nós.

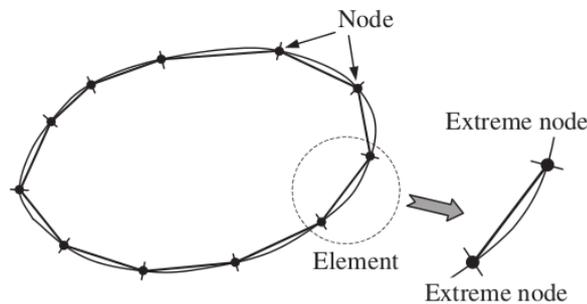


Figura 1.7: Representação esquemática de elementos de contorno lineares (KATSIKADELIS, 2016).

- **Elementos parabólicos/quadráticos:** o segmento de contorno para esse elemento é aproximado a um arco parabólico (Fig. 1.8). O elemento possui três nós, dois de extremidade e um posicionado no meio do arco. O parâmetro de contorno varia no elemento de forma isoparamétrica.

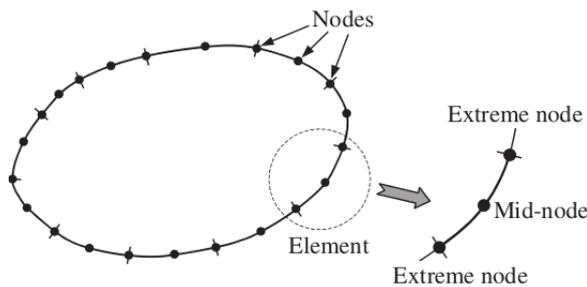


Figura 1.8: Representação esquemática de elementos de contorno parabólicos (KATSIKADELIS, 2016).

As aplicações do Método de Elementos de Contorno são extremamente vastas. Ainda que o método apresentasse até tempos recentes algumas instabilidades em relação a estruturas muito finas ou a propriedades não-lineares, estudos inovadores nesses méritos foram capazes de expandir ainda mais a aplicabilidade do MEC. Segue, portanto, uma revisão bibliográfica do Método de Elementos de Contorno voltada à análise flexural de placas.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

VENTURINI e PAIVA (1993) exploraram aplicações em MEC para problemas práticos de flexão de placas para engenharia. Para o desenvolvimento do trabalho, os autores exploraram tanto formu-

lações diretas quanto indiretas do método, no âmbito das hipóteses de Kirchhoff. Alguns aspectos da formulação que aprimoraram os resultados numéricos também foram discutidos. As esquematizações escolhidas pelos autores foram as seguintes:

- Equações em MEC padrão derivadas das representações integrais de deslocamentos e rotações, assumindo o deslocamento como contínuo em todos os nós do contorno;
- Formulação em elementos de contorno para a flexão de placas segundo as hipóteses de Reissner (para placas espessas);
- Equacionamento em MEC utilizando apenas a equação do deslocamento, com um contorno e um ponto de colocação externa;
- Formulação em MEC com acoplamento das equações de deslocamento e rotação, com reações nos cantos calculadas por diferenças finitas;
- Elaboração em elementos de contorno na qual reações pontuais são utilizadas para modelar esforços cisalhantes em conjunto com as reações nos cantos;
- Formulação em elementos de contorno padrão com redução de singularidades.

A fim de se validarem as colocações propostas, investigações numéricas da placa quadrada em balanço e da placa retangular parcialmente suportada e parcialmente carregada foram conduzidos e comparados com a formulação em elementos finitos.

Em trabalho inovador, GAO e DAVIES (2000) propõem um conjunto de equações auxiliares que suplementam as equações integrais de contorno fundamentais, de modo a possibilitar um tratamento mais adequado para quinas e interfaces em problemas de tração descontínuos. Com base nessas equações, os autores implementam um algoritmo linear multi-regiões de elementos de contorno, apresentando como exemplos de aplicação numérica um cubo subdividido em três zonas, sujeito a uma tração u , e um cilindro sujeito a uma pressão interna p (Fig. 1.9). Os valores da tração e deslocamento nas interfaces são então obtidos e comparados com a solução analítica.

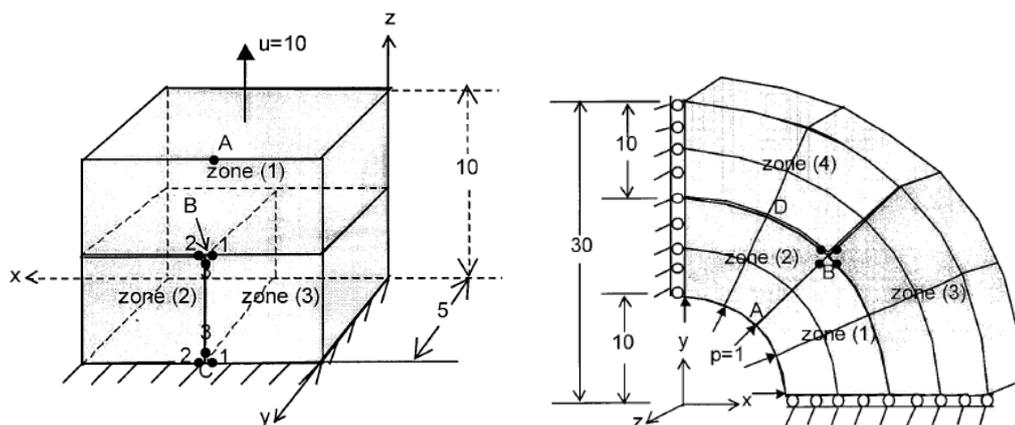


Figura 1.9: Exemplos numéricos de aplicação do método BEM multi-regiões proposto, com elementos quadráticos de 8 nós (GAO e DAVIES, 2000).

No trabalho de REIS et al. (2011) apresenta-se uma formulação em MEC para o cálculo de momentos e tensões de placas de compósito laminadas (Fig. 1.10) que segue as hipóteses fundamentais de Kirchhoff. Tais momentos e tensões são calculados para os pontos internos através do cálculo analítico das equações integrais para a segunda derivada do deslocamento transversal e para derivadas da solução fundamental adotada, enquanto as tensões nos contornos da placa são calculadas por meio da primeira derivada do deslocamento transversal, das derivadas das funções de forma e das relações constitutivas. Os resultados obtidos foram finalmente comparados com resultados em FEM.

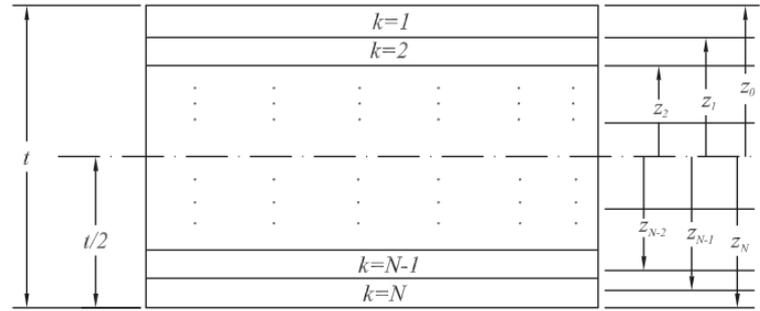


Figura 1.10: Sequência de empilhamento para a placa de compósito laminada com N camadas estudada (REIS et al., 2011).

DAMANPACK et al. (2013) introduzem uma elaboração em BEM para placas cujas propriedades variam gradualmente através de sua espessura. Neste trabalho, as equações de equilíbrio foram derivadas do princípio da energia potencial total mínima (também conhecida como princípio dos trabalhos virtuais). As integrais de domínio provenientes de cargas distribuídas são transformadas em integrais de contorno através de funções potenciais auxiliares. O trabalho ainda conta com três exemplos numéricos de aplicação, cuja deflexão máxima e momentos resultantes foram comparadas com o resultado exato, além de desenvolver testes de convergência e estudos de caso para ratificar a modelagem.

A tese de SOUSA (2016) envolve a formulação do Método de Elementos de Contorno e elasticidade plana para a associação de placas finas no espaço, as quais foram analisadas sob condições estáticas e dinâmicas. A formulação foi então aplicada e verificada para diversos exemplos numéricos, tais como a placa engastada carregada estaticamente (Fig. 1.11), condição que se pretende avaliar no presente trabalho.

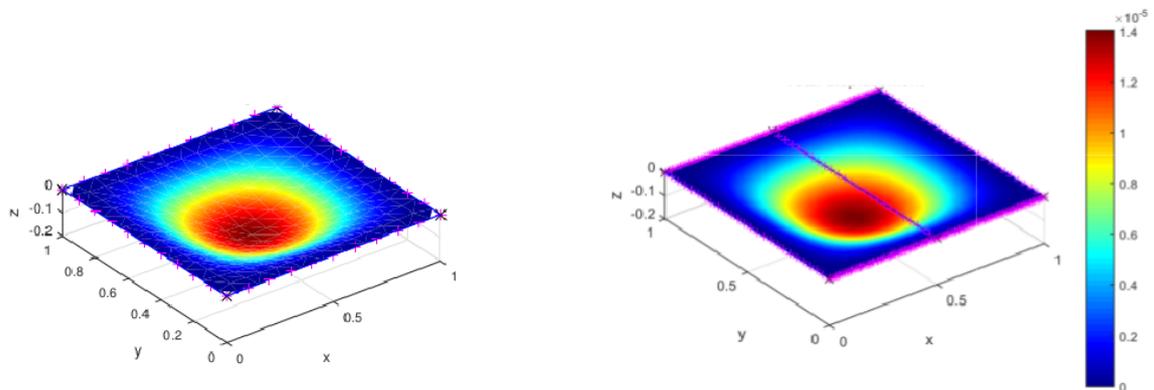


Figura 1.11: Deslocamento na direção z para a placa engastada modelada em uma sub-região (esquerda) e duas sub-regiões (direita) (SOUSA, 2016).

O estudo de SOARES e PALERMO (2017) considera as variações do parâmetro de flambagem (valor adimensional que indica o tipo de contorno da placa) em relação ao grau de esbeltez da placa, considerando o efeito das deformações causadas por esforços cisalhantes em modelos utilizados para estudo de caso. Para tal, uma modelagem em elementos de contorno foi empregada, utilizando duas integrais contendo efeitos de não-linearidade geométrica, uma para caracterização do domínio e outra para o contorno. Tal formulação aprimora a modelagem numérica e as condições de simetria do problema, uma vez que nenhuma relação especial é necessária para as derivadas dos forçamentos coplanares à placa. A formulação é avaliada para a flambagem de placas com e sem orifício e comparada com resultados da literatura.

O trabalho de WANG et al. (2017) utiliza um método de integração linear com discretização apenas do contorno das geometrias estudadas para o cálculo de integrais de domínio de problemas de potencial e elasticidade 3D. No decorrer do estudo, o Método de Elementos de Contorno utilizado é comprovado matematicamente, utilizando por exemplo a modelagem da placa de orifício (Fig. 1.12).

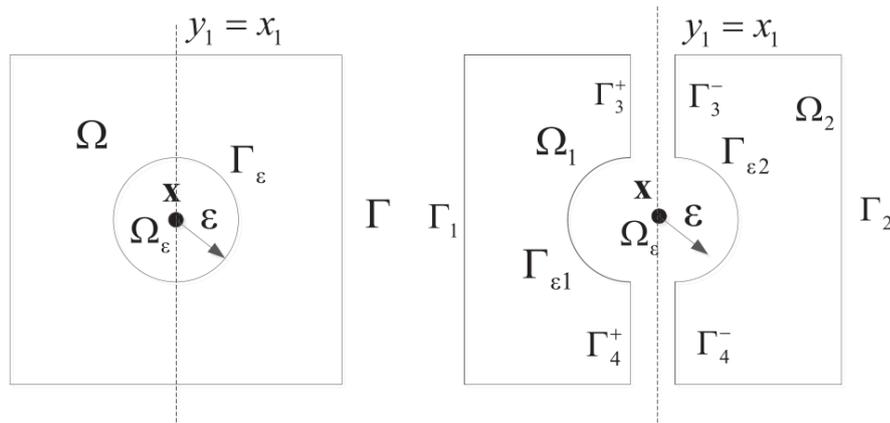


Figura 1.12: Caracterização para a placa de orifício modelada em uma região, à esquerda, e duas sub-regiões, à direita (WANG et al., 2017).

NAJARZADEH, MOVAHEDIAN e AZHARI (2018) aplicaram uma formulação direta em elementos de contorno para a análise de flambagem de placas de formatos arbitrários sob forçamentos não-uniformes. Para tanto, os autores utilizaram o método da integração radial para converter as integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Ademais, geometrias de formas convexas e côncavas foram consideradas, sendo que para geometrias de concavidades muito expressivas uma abordagem multi-regiões com um contorno mediador foi utilizada (Fig. 1.13). A validade e acurácia das formulações implementadas foram verificadas através de análises analíticas e numéricas provenientes da literatura e com o método de elementos finitos.

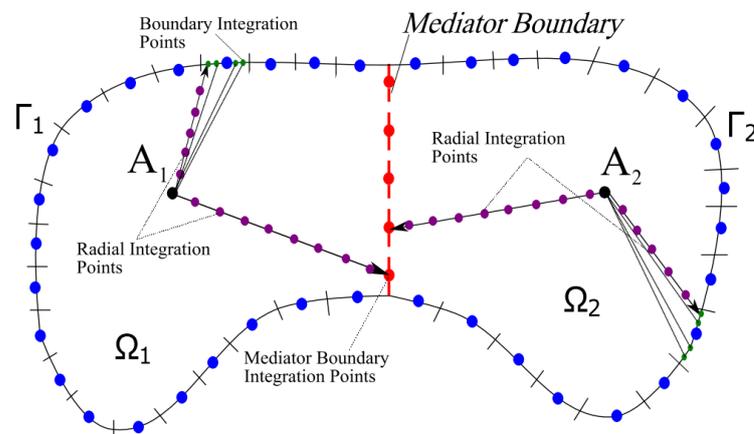


Figura 1.13: Divisão do domínio em subdomínios utilizando-se um contorno mediador (NAJARZADEH; MOVAHEDIAN; AZHARI, 2018).

Tendo em vista o supracitado, o presente trabalho tem como principal contribuição à literatura um aprofundamento da metodologia utilizada por SOUSA (2016), utilizando-se para tanto a linguagem orientada a objetos Python para aprimorar a declaração de condições de contorno, suportes e forçamentos.

1.4 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma rotina computacional em Python para a modelagem de placas de Kirchhoff no espaço, utilizando-se do Método de Elementos de Contorno direto. Para tanto, os seguintes objetivos parciais devem ser cumpridos:

- Facilitar a importação de geometrias de malhas em relação à tese de SOUSA (2016), por meio da

implementação de dados de entrada com propriedades espaciais/geométricas mais condizentes com o problema físico da placa;

- Simplificar a imposição das condições de contorno, suportes e forçamentos em relação ao trabalho de SOUSA (2016), por meio da análise das funções de contorno implementadas e atribuição de configurações que correlacionam tais valores ao tipo de suporte utilizado;
- Obter resultados de deslocamento para placas condizentes com resultados analíticos e formulações em FEM;
- Calcular e demonstrar visualmente os esforços internos das placas, validando-os com a literatura;
- Abrir espaço, finalmente, para o desenvolvimento de um *solver* de ensaio numérico em Método de Elementos de Contorno.

1.5 METODOLOGIA

Pretendem-se alcançar os objetivos descritos acima por meio da implementação da seguinte metodologia:

- Estudar o Método dos Elementos de Contorno sob a ótica da implementação de SOUSA (2016) e KATSIKADELIS, de modo a compreender as particularidades dos MEC utilizados;
- Analisar as rotinas de SOUSA (2016) e KATSIKADELIS (2014), identificando como se dão a geração de geometria e malha e a imposição das condições de contorno e forçamento;
- A partir das análises, definir quais são as maneiras mais eficazes de se aprimorar a geração de parâmetros supracitada;
- Desenvolver em linguagem Python uma rotina consolidada que gere satisfatoriamente os dados de entrada do problema de contorno que se deseja avaliar, chame as rotinas de resolução em MEC de problemas estáticos para placas finas, receba os dados de saída destas e represente graficamente os resultados.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta introdução está, portanto, destinada a apresentação da motivação relacionada a este trabalho, definição dos principais parâmetros e métodos deste projeto e exemplificação de diversas aplicações do Método de Elementos de Contorno. O restante do trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- **Capítulo 2 - Teoria de Placas Finas:** neste capítulo, apresentam-se conceitos fundamentais sobre as placas finas, tais como sua definição, modelagem, suas relações de tensão-deformação e tensão-deslocamento e a equação diferencial que as rege. Definem-se, também, as condições de contorno de placas finas necessárias para se fazer a modelagem do problema pelo Método de Elementos de Contorno;
- **Capítulo 3 - Método de Elementos de Contorno:** demonstram-se as formulações e identidades relevantes para obtenção da formulação integral das equações de contorno da placa, bem como as soluções fundamentais propostas a serem utilizadas para a resolução do sistema de equações que envolvem os N_e elementos de contorno da placa;
- **Capítulo 4 - Abordagem Numérica:** neste expõe-se a metodologia de implementação numérica do Método de Elementos de Contorno direto apresentado neste relatório;
- **Capítulo 5 - Resultados Obtidos:** neste demonstram-se os estudos de caso nos quais se aplicam a metodologia proposta, bem como uma breve discussão acerca da validade de tais resultados;

- **Capítulo 6 - Considerações finais:** neste capítulo recapitulam-se as metodologias e resultados obtidos ao longo da execução deste trabalho, bem como se propõem trabalhos futuros com base neste;
- **Referências:** contém a base teórica consultada durante a execução do projeto e a formulação do relatório.

CAPITULO 2

TEORIA DE PLACAS FINAS

2.1 CONCEITO DE PLACAS FINAS

KATSIKADELIS (2014) define as placas como "corpos cilíndricos ou prismáticos cuja espessura uniforme h é pequena em relação às demais dimensões da sua base". Uma vez que se considera a placa como um corpo tridimensional, convém indicar o plano que secciona a espessura da placa ao meio como **plano médio** da placa. A interseção do plano médio da placa com as suas superfícies laterais determina o **contorno** da placa. Ademais, de acordo com propriedades geométricas da placa, seu contorno pode ser uma curva plana fechada, um polígono ou um conjunto de linhas composta de segmentos retilíneos ou curvilíneos.

Em termos matemáticos, uma placa pode ser determinada como um domínio Ω multiplamente conectado, restrito pelo contorno $\Gamma = \bigcup_{k=0}^K \Gamma_K$, que por sua vez é definido por um comprimento de arco s , de vetores normais e tangenciais \mathbf{n} e \mathbf{t} , respectivamente. Pressupõe-se, também, que o domínio pode ou não ser dotado de orifícios ou quinas (Fig. 2.1).

Uma placa é definida, dessa forma, por seu plano médio, espessura e contorno.

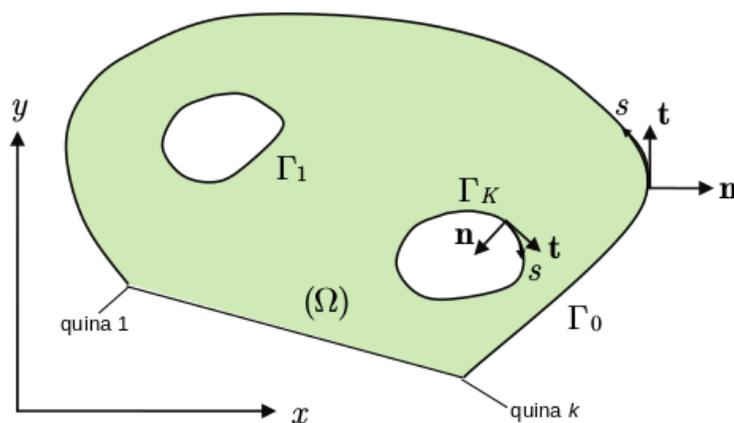


Figura 2.1: Placa bidimensional de domínio Ω , contornos Γ_K e k quinas (KATSIKADELIS, 2014 - modificada).

De um ponto de vista estrutural, uma placa tem suas extremidades suportadas de diversas maneiras (engaste, apoio móvel, apoio fixo e livre) e nela são impostos carregamentos transversais, tais como:

- Carregamentos distribuídos $f(x, y)$ atuando paralelos ao eixo z , distribuídos por uma partição ou por toda a placa;
- Carregamentos concentrados $P^{(i)}$ dispostos em pontos (x_i, y_i) ;

- Momentos concentrados $M^{(i)}$ ou $(M_x^{(i)}, M_y^{(i)})$ em pontos (x_i, y_i) ;
- Forças transversais $V_n(s)$ distribuídas ao longo dos contornos da placa;
- Momentos fletores $M_n^*(s)$ distribuídas ao longo dos contornos da placa;
- Forças concentradas R^* nos k pontos de canto.

2.1.1 Hipóteses Simplificadoras

KIRCHHOFF (1850), ao desenvolver a teoria clássica de placas finas, assumiu uma série de simplificações em relação aos efeitos dos esforços cortantes nas deformações por flexão das placas, os quais ele considerou desprezíveis. Sugere-se, também, que as seções planas e normais ao plano médio permanecem desta forma após a deformação. Desta maneira, tem-se que o deslocamento transversal w depende apenas de x e y e que os deslocamentos u e v são lineares em z . Pode-se considerar também que a placa se encontra no regime elástico linear de materiais homogêneos.

Portanto, as hipóteses simplificadoras assumidas no desenvolvimento da teoria de placas finas são as seguintes:

1. O material da placa é linearmente elástico, homogêneo e isotrópico;
2. A espessura da placa é pequena em comparação com suas outras dimensões;
3. As deformações são tais que partições normais ao plano médio da placa permanecem retas, não se deformam ($\varepsilon_z = 0$) e normais ao plano médio da placa após a deformação.
4. As tensões normais ao plano médio são desprezíveis ($\sigma_z = 0$);
5. As deformações são pequenas, quando comparadas às demais dimensões da placa;
6. O deslocamento transversal $w(x, y)$ é pequeno em relação à espessura da placa.

As hipóteses acima são atribuídas a Kirchhoff e Love e a teoria linear de placas é conhecida como Teoria de Kirchhoff-Love. À medida que a espessura da placa aumenta, as deformações na direção transversal da placa devidas às tensões cisalhantes não podem mais ser desconsideradas, portanto a hipótese 3 não é mais válida.

2.2 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

As relações de deformação-deslocamento para a placa podem ser derivadas considerando-se um elemento de linha pertencente à placa antes e depois da deformação. Dessa forma, considerando-se uma placa plana normal ao eixo z , um elemento de linha $d\mathbf{r}(dx, dy, 0)$ anterior à deformação e $d\mathbf{r}'(dx', dy', dz')$ o mesmo elemento após a deformação, tem-se que

$$dx' = dx + d\bar{u} = \left[1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right] dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy \quad (2.1a)$$

$$dy' = dy + d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx + \left[1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right] dy \quad (2.1b)$$

$$dz' = 0 + d\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} dy \quad (2.1c)$$

em que

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z) \quad (2.2a)$$

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z) \quad (2.2b)$$

$$\bar{w} = \bar{w}(x, y) \quad (2.2c)$$

são os componentes do vetor de deslocamento no ponto (x, y, z) através da espessura da placa. Vale notar que o deslocamento transversal \bar{w} é independente de z por causa da hipótese 3, e os componentes de deslocamento $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dotados de barra se distinguem de u, v, w por se referirem a qualquer ponto através da espessura da placa, enquanto os segundos se referem ao deslocamento de pontos pertencentes ao plano médio ($z = 0$) da placa, de tal forma que:

$$\bar{u}(x, y, 0) = u(x, y, z) \quad (2.3a)$$

$$\bar{v}(x, y, 0) = v(x, y, z) \quad (2.3b)$$

$$\bar{w}(x, y) = w(x, y) \quad (2.3c)$$

Com base no supracitado e na teoria de mecânica clássica, o comprimento do elemento deformado pode ser definido por

$$ds' = |d\mathbf{r}'| = \sqrt{(1 + 2\bar{\varepsilon}_x)dx^2 + (1 + 2\bar{\varepsilon}_y)dy^2 + 2\bar{\gamma}_{xy}dxdy} \quad (2.4)$$

em que $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$ são as componentes normais e cisalhantes das deformações em qualquer ponto da espessura da placa, sendo dadas por:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.5a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.5b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.5c)$$

Uma vez que se assume que as deformações são pequenas, as rotações em torno dos eixos x e y são relativamente grandes e as rotações em torno do eixo z são consideradas desprezíveis, os primeiros dois termos dos colchetes das Eq. (2.5) se tornam expressivamente menores que o último termo dos mesmos colchetes, permitindo-se que a Eq. (2.5) seja reescrita da seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.6a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.6b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.6c)$$

A partir das hipóteses simplificadoras assumidas, pode-se ainda simplificar as Eq. (2.6) omitindo-se os termos ao quadrado e o produto das rotações, respectivamente; obtém-se, portanto, as seguintes expressões:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (2.7a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2.7b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (2.7c)$$

As Eq. (2.6) formam a base da teoria não-linear de placas finas para deflexões moderadamente grandes, conhecida como Teoria de Placas de von Kármán, enquanto as Eq. (2.7) fomentam a teoria linear clássica de placas.

Ainda em relação às hipóteses simplificadoras assumidas na teoria de placas finas, as componentes de deslocamento $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ de todos os pontos da placa podem se relacionar com as quantidades correspondentes u, v, w do plano médio da placa. A Fig. 2.2 demonstra uma seção da placa antes e depois da deformação.

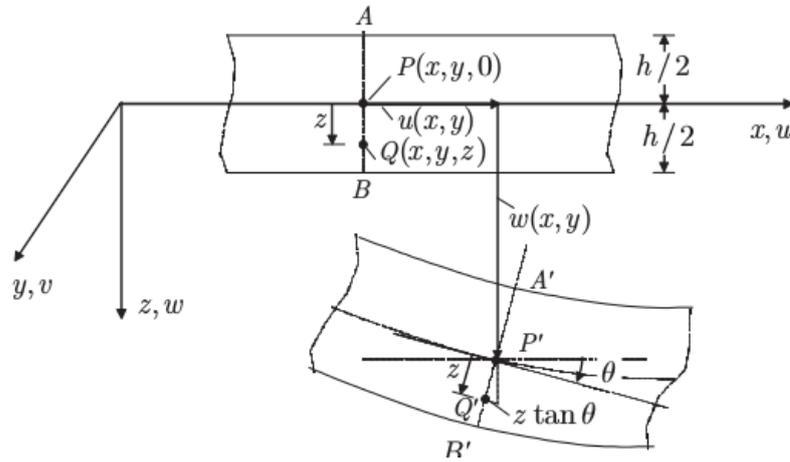


Figura 2.2: Seção em corte de uma partição da placa em relação ao plano xz , anterior e após a deformação (KATSIKADELIS, 2014).

O ponto Q , disposto na reta normal AB e de coordenadas (x, y, z) anteriores à deformação, desloca-se até o ponto Q' de coordenadas $x + \bar{u}, y + \bar{v}, z + \bar{w}$ em seguida à deformação.

A partir da hipótese de pequenos deslocamentos, da Fig. 2.2 tem-se que $\tan(\theta) \approx \theta \approx \frac{\partial w}{\partial x}$. Aplicando-se as mesmas relações para o plano yz , podem-se expressar os deslocamentos \bar{u} e \bar{v} da seguinte forma:

$$\bar{u} = u - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.8a)$$

$$\bar{v} = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.8b)$$

Substituindo-se as Eq. (2.8) nas Eq. (2.7), tem-se que

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.9a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.9b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.9c)$$

em que $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ são as componentes de deformação do plano médio da placa, dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.10b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10c)$$

As equações acima são válidas para a teoria de placas finas. Na ausência de forças coplanares ao plano médio da placa, $u = v = 0$, o que implica que $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$, ou seja, não há distensão do plano médio. Para curvas de pequenas dimensões, as quantidades $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ representam as curvaturas em torno dos eixos x e y e, simultaneamente, as rotações da plano médio sob deflexão.

Dessa forma, utilizando-se da notação

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.11a)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.11b)$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11c)$$

e levando-se em consideração que não há alongamento do plano médio da placa (de acordo com as hipóteses levantadas por Kirchhoff), as Eq. (2.9) podem ser reescritas como

$$\bar{\varepsilon}_x = z\kappa_x \quad (2.12a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = z\kappa_y \quad (2.12b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = -2z\kappa_{xy} \quad (2.12c)$$

2.3 RELAÇÕES TENSÃO-DESLOCAMENTO

As relações de tensão-deformação para placas finas podem ser derivadas da Lei Geral de Hooke para um meio isotrópico tridimensional de $\bar{\sigma}_z = 0$. Dessa forma, tem-se que

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E}(\bar{\sigma}_x - \nu\bar{\sigma}_y) \quad (2.13a)$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{E}(\bar{\sigma}_y - \nu\bar{\sigma}_x) \quad (2.13b)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\bar{\tau}_{xy} \quad (2.13c)$$

em que:

- $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ são componentes de tensão em qualquer ponto através da espessura da placa;
- E é o módulo de elasticidade do material da placa;
- ν é o coeficiente de Poisson do material da placa.

As Eq. (2.13) podem ser reescritas, portanto, da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_x - \nu\bar{\varepsilon}_y) \quad (2.14a)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\varepsilon}_y - \nu\bar{\varepsilon}_x) \quad (2.14b)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = G\bar{\gamma}_{xy} \quad (2.14c)$$

em que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.15)$$

é o módulo de cisalhamento do material da placa.

2.3.1 Resultantes de Tensão para Placas Finas

As resultantes de tensão de uma seção da placa podem ser expressas pelas forças e momentos por unidade de comprimento dispostas ao longo de suas dimensões, cuja convenção para valores positivas pode ser vista na Fig. 2.3:

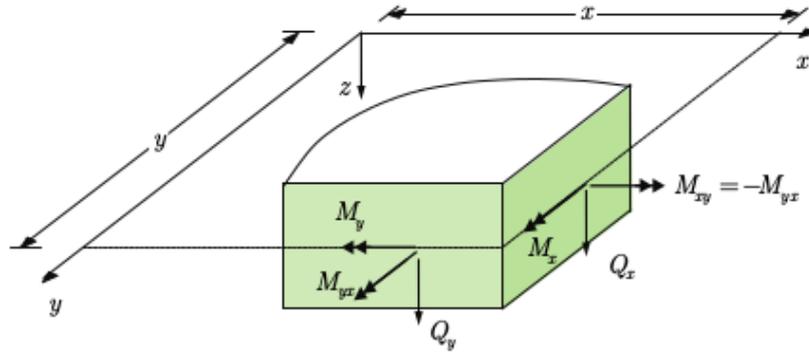


Figura 2.3: Resultantes de tensão de uma seção em corte da placa.(KATSIKADELIS, 2014).

Ainda da figura acima reconhecem-se as resultantes de tensão da placa, que se relacionam com os esforços internos através das seguintes equações:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz \quad (2.16a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y z dz \quad (2.16b)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} z dz \quad (2.16c)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} z dz \quad (2.16d)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xz} z dz \quad (2.16e)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yz} z dz \quad (2.16f)$$

em que:

- M_x, M_y são momentos fletores;
- M_{xy}, M_{yx} são momentos torsores;
- Q_x, Q_y são esforços cisalhantes.

Das Eq. (2.12) e (2.14) infere-se que as tensões $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ variam linearmente em z . As relações de tensão-deformação para $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ são dadas pela aplicação da lei de Hooke:

$$\bar{\gamma}_{xz} = \frac{1}{G} \bar{\tau}_{xz} \quad (2.17a)$$

$$\bar{\gamma}_{yz} = \frac{1}{G} \bar{\tau}_{yz} \quad (2.17b)$$

Substituindo-se a Eq. (2.14) em (2.16), calculando-se a integral e considerando-se o equilíbrio de momentos atuantes em um elemento de placa nos eixos x e y , tem-se que:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.18a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.18b)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.18c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.18d)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.18e)$$

sendo a rigidez à flexão D dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.19)$$

Considere agora um sistema ortogonal de vetores \mathbf{n} , \mathbf{t} rotacionados a um ângulo α em relação ao eixo x (Fig. 2.4):

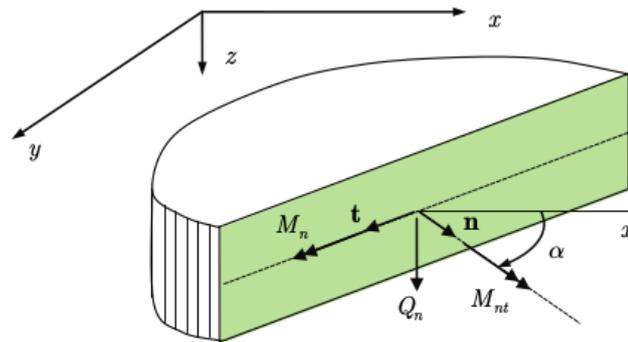


Figura 2.4: Seção em corte inclinada com as resultantes de tensão; $\angle x, \mathbf{n} = \alpha$ (KATSIKADELIS, 2014).

Percebe-se que as resultantes de tensão em relação ao sistema global se relaciona com o sistema ortogonal descrito acima, de modo que

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.20a)$$

$$M_t = M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.20b)$$

$$M_{nt} = -M_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.20c)$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (2.20d)$$

$$Q_t = -Q_x \sin \alpha + Q_y \cos \alpha \quad (2.20e)$$

Considerando-se as relações das Eq. (2.20), as Eq. (2.18) se convertem para

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (2.21a)$$

$$M_t = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right) \quad (2.21b)$$

$$M_{nt} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (2.21c)$$

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w \quad (2.21d)$$

$$Q_t = -D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w \quad (2.21e)$$

2.4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA PLACA

KATSIKADELIS (2014) deriva a equação governante das placas finas através da aplicação conjunta do princípio da energia potencial total mínima e do cálculo variacional, em detrimento da obtenção da equação através do equilíbrio de esforços internos de um elemento de placa na direção z . O método empregado pelo autor não só permite uma obtenção expressa da equação diferencial governante do sistema, mas também se permitem evidenciar as condições de contorno de maneira direta e eficaz.

Considere uma placa como a da Fig. 2.1, sujeita a um carregamento distribuído $f(x, y)$, esforços de contorno V_n, M_n^* e esforços de canto R_k^* . Os contornos dessa placa podem ser considerados apoiados na direção transversal em elementos de mola de rigidez transversal $k_T(s)$, bem como apoiados elasticamente por elementos de mola com rigidez rotacional $k_R(s)$. Os cantos podem ou não estar apoiados elasticamente em elementos de mola isolados de rigidez $k_c^{(k)}$.

A energia potencial total Π de uma placa é a soma da sua energia de deformação u_b devido à flexão, sua energia elástica u_s proveniente de engastamentos e um potencial v de cargas externamente aplicadas, de tal modo que

$$\Pi = u_b + u_s + v \quad (2.22)$$

Tendo em vista as hipóteses assumidas para placas finas, a energia de deformação é dada pela seguinte integral de volume:

$$u_b = \frac{D}{2} \int_V (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) dV \quad (2.23)$$

Utilizando-se das Eq. (2.14) e (2.12), integrando-se ao longo da espessura da placa e aplicando-se as relações de deformação-deslocamento (2.11), a Eq. (2.23) assume a seguinte forma:

$$u_b = \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.24)$$

A energia elástica devido ao engastamento dos suportes é dada por:

$$u_s = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(k_T w^2 + k_R \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right) ds + \frac{1}{2} \sum_k k_c^{(k)} w_k^2 \quad (2.25)$$

E a energia potencial devido a cargas externas é definida por:

$$v = - \int_{\Omega} f w d\Omega - \int_{\Gamma} \left(V_n w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds - \sum_k R_k^* w_k \quad (2.26)$$

Finalmente, pode-se reescrever a Eq. (2.22) de modo que

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} F \left(w, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(k_T w^2 + k_R \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right) ds + \frac{1}{2} \sum_k k_c^{(k)} w_k^2 \\ & - \int_{\Gamma} \left(V_n w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds - \sum_k R_k^* w_k \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que

$$F = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - f w \quad (2.28)$$

Da Eq. (2.28) podem-se deduzir algumas relações pertinentes:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = f \quad (2.29a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} = D(w_{xx} + \nu w_{yy}) = -M_x \quad (2.29b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} = 2D(1 - \nu)w_{xy} = 2M_{xy} \quad (2.29c)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = D(w_{yy} + \nu w_{xx})w_{xy} = -M_y \quad (2.29d)$$

Nos quais os subscritos xx, yy e xy (e futuramente n', t', x' e y') denotam as derivadas do deslocamento em relação às variáveis correlatas. As condições de equilíbrio da placa requerem que o primeiro diferencial da energia potencial total $\delta\Pi$ seja nulo, portanto, do cálculo variacional, das relações (2.29) e da Eq. (2.27), obtém-se que

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-M_x \delta w_{xx} + 2M_{xy} \delta w_{xy} - M_y \delta w_{yy}) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (k_T w \delta w + k_R w_{n'} \delta w_{n'}) ds - \int_{\Omega} f \delta w d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (V_n \delta w - M_n^* \delta w_{n'}) ds - \sum_k \left[k_c^{(k)} w_k - R_k^* \right] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) expressa o princípio dos trabalhos virtuais para uma placa em flexão. As derivadas dos diferenciais $\delta w_{xx}, \delta w_{xy}, \delta w_{yy}$ podem ainda ser eliminadas integrando-se as integrais de domínio da equação acima duas vezes por partes, utilizando-se o *Teorema de Gauss-Green*.

Vale colocar que o momento tursor M_{nt} não é contínuo nos ponto de canto, cuja descontinuidade nas k quinas pode ser representada por $\llbracket M_{nt} \rrbracket_k = M_{nt}^{(+)} - M_{nt}^{(-)}$. Considerando-se o supracitado, as relações (2.21) e que

$$w_{x'} = w_{n'} \cos \alpha - w_{t'} \sin \alpha \quad (2.31a)$$

$$w_{y'} = w_{n'} \sin \alpha - w_{t'} \cos \alpha \quad (2.31b)$$

a Eq. (2.30) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} (-M_{x,xx} - 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - f) \delta w d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} [(-M_n + k_R w_{n'} + M_n^*) \delta w_{n'} + (Q_n - M_{nt,s'} + k_{\Gamma} w - V_n) \delta w] ds \\ & + \sum_k [k_c^{(k)} - \llbracket M_{nt} \rrbracket_k - R_k^*] \delta w_k = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Uma vez que as quantidades δw , $\delta w_{n'}$, δw_k são arbitrárias, a Eq. (2.32) produz a seguinte equação diferencial:

$$M_{x,xx} - 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -f \quad (2.33)$$

com as condições de contorno de

$$Q_n - M_{nt,s} + k_{\Gamma} w = V_n \text{ ou } w = w^* \text{ em } \Gamma \quad (2.34a)$$

$$M_n - k_R w_{n'} = M_n^* \text{ ou } w_{n'} = w_{n'}^* \text{ em } \Gamma \quad (2.34b)$$

$$k_c^{(k)} w_k - \llbracket M_{nt} \rrbracket_k = R_k^* \text{ ou } w_k = w_k^* \text{ nos } k \text{ cantos} \quad (2.34c)$$

Como pode-se perceber da Eq. (2.34c), o termo $\llbracket M_{nt} \rrbracket_k$ representa, fisicamente, um forçamento fictício concentrado nos cantos da placa. A Fig. 2.5 mostra um artifício utilizado por Kirchhoff para representar a força fictícia:

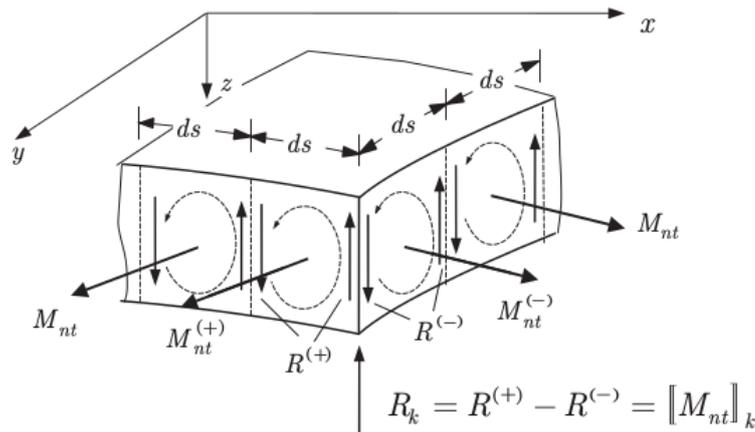


Figura 2.5: Dispositivo utilizado por Kirchhoff para interpretação dos forçamentos de canto (KATSIKADELIS, 2014).

Finalmente, a Eq. (2.33), também conhecida como equação diferencial da placa, pode também ser expressa em função dos deslocamentos, levando-se em conta as relações (2.18):

$$D\nabla^4 w = f \text{ em } \Omega \quad (2.35)$$

em que

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.36)$$

representa o operador biharmônico.

2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno descritas em (2.34) para a teoria de placas finas podem ser expressas por

$$\alpha_1 w + \alpha_2 Vw = \alpha_3 \text{ em } \Gamma \quad (2.37a)$$

$$\beta_1 \frac{\partial w}{\partial n} + \beta_2 Mw = \beta_3 \text{ em } \Gamma \quad (2.37b)$$

e para placas não-suaves, devem-se complementar as condições de contorno com a seguinte condição de canto:

$$c_{1,k} w + c_{2,k} [Tw]_k = c_{3,k} \quad (2.38)$$

em que:

- $\alpha_i = \alpha_i(s), \beta_i = \beta_i(s)$ são funções a serem especificadas dependendo do tipo de suporte do contorno da placa;
- $c_{i,k}$ são constantes específicas dos k cantos;
- M, V, T são operadores diferenciais definidos por

$$M = -D \left[\nabla^2 + (\nu - 1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \quad (2.39a)$$

$$V = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 - (\nu - 1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial n} \right) \right] \quad (2.39b)$$

$$T = D(1 - \alpha) \frac{\partial^2}{\partial n \partial t} \quad (2.39c)$$

Os termos Mw, Vw, Tw representam as densidades de momento fletor M_n , de esforço cisalhante equivalente V_n e de momento torsor M_{nt} , respectivamente. As condições de contorno como descritas em (2.37) são equações generalizadas, sendo que as condições de contorno convencionais podem ser obtidas especificando-se devidamente as funções α_i e β_i . Desta maneira, uma borda qualquer da placa tem as condições de contorno como descritas na Tab. 1.

Tabela 1: Condições de contorno relativas ao suporte de uma placa.

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
Engaste ($w = 0, \partial w / \partial n = 0$)	1	0	0	1	0	0
Apoio simples ($w = 0, M_n = 0$)	1	0	0	0	1	0
Apoio fixo ($\partial w / \partial n = 0, V_n = 0$)	0	1	0	1	0	0
Aresta livre ($M_n = 0, V_n = 0$)	0	1	0	0	1	0

Vale colocar também que, para contornos curvilíneos, é conveniente o uso do par de coordenadas intrínsecas s (comprimento de arco) e n (vetor normal exterior ao contorno). Dessa forma, podem-se reescrever as derivadas de contorno usando as seguintes relações:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial w}{\partial n} \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial n} = \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} - \kappa \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.40c)$$

Uma vez que para o escopo desse projeto apenas se avaliam placas de contornos retilíneos, tem-se que $\kappa = 0$ e que as variáveis t e s são idênticas. Finalmente, das relações (2.40), as resultantes de tensão presentes nos contornos da placa são descritos por

$$M_n = -D \left[\nabla^2 w + (\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] \quad (2.41a)$$

$$V_n = -D \left[\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - (\nu - 1) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial n} \right) \right] \quad (2.41b)$$

$$M_{nt} = -D(\nu - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial n} \right) \quad (2.41c)$$

$$M_t = -D \left[\nu \nabla^2 w - (\nu - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (2.41d)$$

Uma vez obtidos a equação diferencial da placa, suas condições de contorno e os operadores diferenciais de momento fletor, torsor e de carregamentos cisalhantes, pode-se iniciar a aplicação do Método de Elementos de Contorno em (2.35) para a obtenção das equações integrais de contorno que regem o problema da placa.

CAPITULO 3

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 IDENTIDADE DE RAYLEIGH-GREEN

Considere a placa bidimensional apresentada na Fig. 2.1. Considere agora que o contorno do domínio Ω é de fato formado por $K + 1$ curvas não interconexas, denominadas $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ formando o contorno $\Gamma = \bigcup_{k=0}^K \Gamma_k$, e que há uma densidade de carga em um ponto Q causada por uma força unitária concentrada em P (Fig. 3.1).

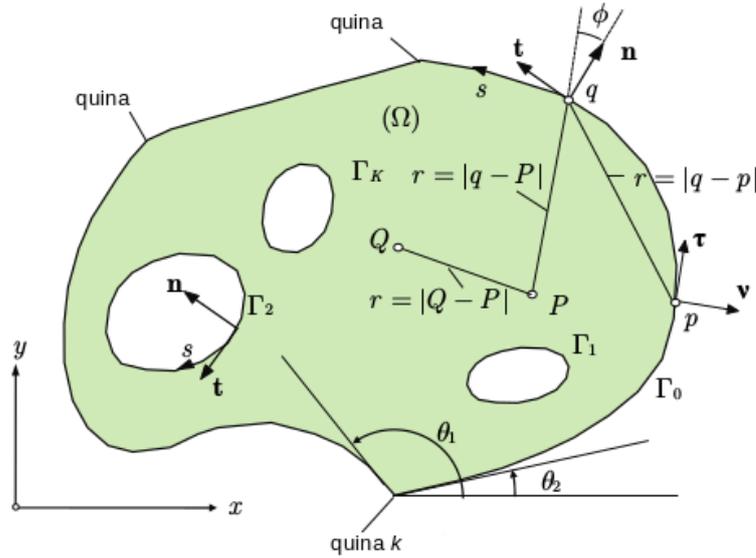


Figura 3.1: Geometria da placa e notações utilizadas (KATSIKADELIS, 2014 - modificada).

Primeiramente, a fim de se obter uma representação integral da solução das equações da placa, deve-se estabelecer uma identidade recíproca para o operador biarmônico (2.36). Parte-se portanto da identidade de Green para o operador laplaciano ∇^2 , que dita que, para duas funções $f = f(x, y)$ e $g = g(x, y)$, tem-se que

$$\int_{\Omega} (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (3.1)$$

que para $f = \nabla^2 w$ e $g = v$, torna-se

$$\int_{\Omega} (v \nabla^4 w - \nabla^2 w \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - \nabla^2 w \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (3.2)$$

de maneira correlata, para $f = w$ e $g = \nabla^2 v$, obtém-se

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w \nabla^2 v - w \nabla^4 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds \quad (3.3)$$

Somar as Eq. (3.2) e (3.3) resulta

$$\int_{\Omega} (v \nabla^4 w - w \nabla^4 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds \quad (3.4)$$

A relação acima se mantém verdadeira para quaisquer funções w, v que sejam quatro vezes diferenciáveis dentro de Ω e três vezes dentro de Γ . Esta envolve, na integração do seu lado direito, as quantidades $w, \partial w / \partial n, \nabla^2 w$ e $\partial \nabla^2 w / \partial n$. Os primeiros dois termos representam a deflexão do plano médio da placa e a inclinação na direção normal ao contorno da placa, enquanto os dois últimos não têm significado físico direto, a não ser em ocasiões específicas.

A identidade recíproca da Eq. (3.4) não é, portanto, suficiente para uma formulação em Método de Elementos de Contorno direto para o problema flexural de placas, a não ser que esta seja convertida para conter quantidades de contorno com significado físico direto. Dessa forma, ao ser manipulada para conter os parâmetros de contorno Mw, Mv, Vw, Vv , a Eq. (3.4) se transforma na seguinte integral de contorno:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right) ds = \\ - \frac{1}{D} \int_{\Gamma} \left(vVw - wVv - \frac{\partial v}{\partial n} Mw + \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) ds + I_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em que

$$I_{\Gamma} = \frac{1}{D} \sum_k (v \llbracket Tw \rrbracket_k - w \llbracket Tv \rrbracket_k) \quad (3.6)$$

Reorganiza-se e reescreve-se a Eq. (3.5), portanto, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} (v \nabla^4 w - w \nabla^4 v) d\Omega = - \int_{\Gamma} \left(vVw - wVv - \frac{\partial v}{\partial n} Mw + \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) ds \\ + \sum_k (v \llbracket Tw \rrbracket_k - w \llbracket Tv \rrbracket_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

A relação imediatamente acima é conhecida como *Identidade Generalizada de Rayleigh-Green* e envolve parâmetros de significados geométricos e físicos diretos, em que:

- w é a deflexão de determinado ponto da placa;
- $\partial w / \partial n$ é a inclinação normal à placa;
- $Mw = M_n$ é o momento fletor de determinado ponto;
- $Vw = V_n$ é o esforço cisalhante da placa.

Rearranjando-se os termos da Eq. (3.7) novamente, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v (D \nabla^4 w) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(vVw - \frac{\partial v}{\partial n} Mw \right) ds - \sum_k v \llbracket Tw \rrbracket_k = \\ \int_{\Omega} w (D \nabla^4 v) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(wVv - \frac{\partial w}{\partial n} Mv \right) ds - \sum_k w \llbracket Tv \rrbracket_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

A Eq. (3.8) expressa o *Teorema Recíproco de Betti* para placas de Kirchhoff. Pode-se perceber a presença dos termos de canto $[[Tw]]_k$, $[[Tv]]_k$, que no caso representam o trabalho de esforços de canto fictícios e são direcionados normalmente ao eixo z , quando produzida por momentos torsões positivos.

3.2 A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A solução fundamental da Eq. (2.35) é a solução particular singular da relação

$$D\nabla^4 v = \delta(Q - P) \quad (3.9)$$

Em que $\delta(Q - P)$ é a função delta de Dirac representando a densidade de carga em um ponto $Q : \{\xi, \eta\}$ devido a uma força transversal unitária em um ponto $P : \{x, y\}$. Fisicamente, a solução da equação acima é uma função de dois pontos $v = v(Q, P)$ que representa o deslocamento em um ponto Q (ponto de campo) causado por uma força concentrada unitária em um ponto P (ponto de fonte) de uma placa de extensão infinita e rigidez flexural D . Vale colocar que a solução v é axissimétrica ao ponto de fonte P .

Reescrever-se a Eq. (3.9) em coordenadas polares com origem no ponto de fonte P resulta na seguinte relação:

$$\nabla^2(\nabla^2 v) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = 0, r \neq 0 \quad (3.10)$$

em que $r = |Q - P| = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{1/2}$ é a distância entre os pontos P e Q .

Integrações sucessivas da Eq. (3.10) resultam em

$$v(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (3.11)$$

em que $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ são constantes de integração que podem ser determinadas das seguintes considerações físicas:

- $v(r)$ deve ser finito em $r = 0$;
- $v(r)$ deve ser delimitado no infinito;
- As forças transversais em qualquer partição infinitesimal da placa devem estar em equilíbrio.

Uma vez que se procura uma solução particular para a Eq. (3.9), pode-se determinar que $C_4 = 0$. Ademais, das primeira e segunda condições, respectivamente, tem-se que $C_2, C_3 = 0$. Dessa forma, a Eq. (3.11) torna-se

$$v(r) = C_1 r^2 \ln r \quad (3.12)$$

A terceira condição imposta define que, para um contorno Γ_0 de um pequeno domínio Ω_0 que contenha o ponto Q , a relação a seguir deve ser respeitada:

$$\int_{\Gamma_0} V v ds - \sum_k [[Tv]]_k + 1 = 0 \quad (3.13)$$

Das relações expressas em (2.39), pode-se escrever que

$$Vv = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial}{\partial s} Tv \quad (3.14)$$

e a Eq. (3.13) pode, portanto, ser reescrita como

$$-D \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v ds - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial s} T v ds - \sum_k [[Tv]]_k + 1 = 0 \quad (3.15)$$

Levando-se em consideração que

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} T v ds = - \sum_k [[Tv]]_k$$

obtém-se que

$$-D \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v ds + 1 = 0 \quad (3.16)$$

Da Eq. (3.11), obtém-se então que

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) = 4C_1(1 + \ln r)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v = 4C_1 \frac{1}{r} r_{n'}$$

A derivada normal $r_{n'}$ é calculada a partir das coordenadas do ponto Q . Sabendo-se que

$$\frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v = C_1 \frac{4}{r} \cos \phi$$

em que ϕ é o ângulo entre os vetores r e \mathbf{n} (Fig. 3.1). Pode-se estabelecer que o domínio Ω_0 é delimitado por um círculo de raio ρ centrado em P ($r = 0$) sem ferir a generalidade do problema (Fig. 3.2).

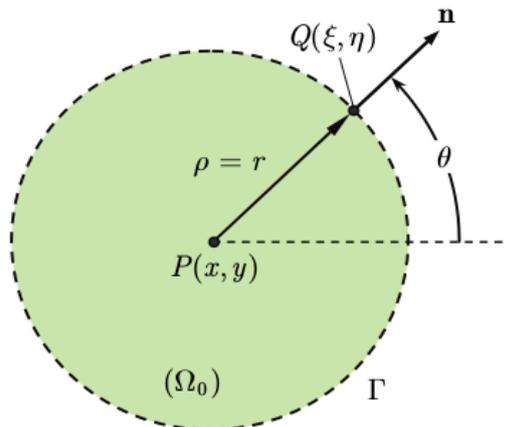


Figura 3.2: Domínio circular Ω_0 de raio ρ (KATSIKADELIS, 2014).

A partir de tal pressuposto, tem-se que o ângulo ϕ é igual a zero para todos os pontos do contorno de Ω_0 e a Eq. (3.16) pode ser reescrita como

$$-DC_1 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{4}{\rho} \rho d\theta + 1 = 0$$

cuja resolução da integral define que

$$C_1 = \frac{1}{8\pi D} \quad (3.17)$$

Finalmente, com o valor da constante acima conhecido, tem-se que a solução fundamental para o problema flexural das placas (3.12) assume a seguinte forma:

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (3.18)$$

Que é simétrica em relação aos pontos P e Q , ou seja, $v(P, Q) = v(Q, P)$. Os pontos de fonte e de campo são, portanto, intercambiáveis entre si.

3.3 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DA SOLUÇÃO

A representação integral da equação da placa (2.35) advém da identidade de Rayleigh-Green, representada na Eq. (3.7). Com base nas Eq. (2.39), as funções presentes em (3.7) se definem como

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} r r_n (1 + 2 \ln r) \quad (3.19b)$$

$$Mv = -\frac{1}{8\pi} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)r_n^2 + (1 + 3\nu)r_t^2] \quad (3.19c)$$

$$Vv = -\frac{1}{4\pi r} [2r_n + (1 - \nu)(r_n^3 - r_t^2)] \quad (3.19d)$$

$$Tv = \frac{1}{4\pi} (1 - \nu) r_n r_t \quad (3.19e)$$

em que

$$r_n = \frac{\partial r}{\partial n_q} = \cos \phi \quad (3.20a)$$

$$r_t = \frac{\partial r}{\partial t_q} = -\sin \phi \quad (3.20b)$$

$$r = |q - P|; \quad q : \{\xi, \eta\} \in \Gamma; \quad P : \{x, y\} \in \Omega \quad (3.20c)$$

Considera-se agora um ponto P pertencente ao domínio Ω . As funções descritas em (2.39) são contínuas em todos os pontos, exceto em P , já que $r(P) = 0$. Formando-se um domínio arbitrário $\Omega^* = \Omega - \Omega_\rho$, que resulta da subtração de um domínio circular Ω_ρ de raio ρ centrado em P do domínio Ω (Fig. 3.3).

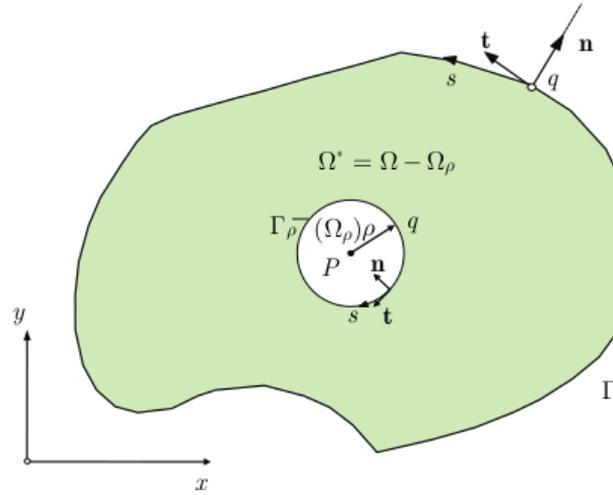


Figura 3.3: Domínios Ω^* e Ω_ρ (KATSIKADELIS, 2014).

Aplicando-se (3.7) para o domínio Ω^* e sabendo-se que $\delta(q - P) = 0$ quando $P \notin \Omega^*$, tem-se que

$$0 = \int_{\Omega^*} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds - \sum_k (v [[T w]]_k - w [[T v]]_k) + I_{\Gamma_\rho} \quad (3.21)$$

em que

$$I_{\Gamma_\rho} = \int_{\Gamma_\rho} \left(v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right) ds \quad (3.22)$$

Para pontos $q \in \Gamma_\rho$ sabe-se que $r = \rho$, $\phi = \pi$, $r_n = -1$, $r_t = 0$. Pode-se provar que, para tais pontos,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_{\Gamma_\rho} = -w(P) \quad (3.23)$$

e aplicando-se o limite acima em (3.21) obtém-se a representação integral da solução da função deslocamento transversal w em um domínio Ω :

$$w(P) = \iint_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left[v V w - w V v - \frac{\partial v}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v \right] ds - \sum_k (v [[T w]]_k - w [[T v]]_k) \quad (3.24)$$

Pode-se ainda aplicar um procedimento semelhante ao da Eq. (3.4) em (3.24) para representá-la da seguinte forma:

$$w(P) = \int_{\Omega} v f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left[v \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w - w \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 v - \frac{\partial v}{\partial n} \nabla^2 w + \frac{\partial w}{\partial n} \nabla^2 v \right] ds \quad (3.25)$$

3.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

As Eq. (3.24) e (3.25) permitem o cálculo da deflexão transversal $w(P)$ em determinado ponto P do domínio Ω da placa, caso sejam conhecidos os valores da deflexão transversal w , da sua derivada

em que:

$$v_1 = \frac{1}{8\pi D} r r_\nu (1 + 2 \ln r) \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} [2(r_n r_\nu + r_t r_\tau) \ln r + 3r_n r_\nu + r_t r_\tau] \quad (3.28b)$$

$$M v_1 = -\frac{1}{4\pi r} [(1 + \nu) r_\nu + 2(1 - \nu) r_n r_t r_\tau] \quad (3.28c)$$

$$V v_1 = -\frac{1}{4\pi r^2} \{[(\nu - 3) + 2(1 - \nu) r_t^2] (r_n r_\nu - r_t r_\tau) + 4(1 - \nu) r_n^2 r_t r_\tau\} \quad (3.28d)$$

$$T v_1 = \frac{1 - \nu}{4\pi r} (r_t^2 - r_n^2) r_\tau \quad (3.28e)$$

Nas equações acima, os subscritos n, t, ν, τ indicam em que direção está se derivando a função r ; pode-se dizer ainda que, se

$$\nu_x = \cos \omega; \quad \nu_y = \sin \omega; \quad (3.29)$$

são os cossenos diretores de ν em um ponto pdo contorno, então:

$$r_\nu = +r_y \nu_y = -(\nu_x \cos \theta + \nu_y \sin \theta) \quad (3.30a)$$

$$r_\tau = r_x (-\sin \omega) + r_y \cos \omega = \nu_y \cos \theta - \nu_x \sin \theta \quad (3.30b)$$

Desenvolvendo o limite $\rho \rightarrow 0$ para as funções descritas em (3.28), obtém-se que

$$I_{\Gamma_\rho} - \llbracket \rrbracket_p = -[\alpha_x w_x(p) + \alpha_y w_y(p)] \quad (3.31)$$

em que

$$\alpha_x = \frac{\alpha}{2} \nu_x - \frac{\nu}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^2 2\theta \nu_x + \sin^2 \theta \nu_y \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3.32a)$$

$$\alpha_y = \frac{\alpha}{2} \nu_y - \frac{\nu}{2\pi} \left[\sin^2 2\theta \nu_x - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \nu_y \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3.32b)$$

Finalmente, utilizando-se de (3.31), a Eq. (3.27) torna-se

$$\begin{aligned} \alpha_x w_x(p) + \alpha_y w_y(p) &= \int_{\Omega} v_1 f d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \left(v_1 V w - w V v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} M w + \frac{\partial w}{\partial n} M v_1 \right) ds \\ &\quad - \sum_k (v_1 \llbracket T w \rrbracket_k - w \llbracket T v_1 \rrbracket_k) \end{aligned} \quad (3.33)$$

As Eq. (3.26) e (3.33) constituem o par de equações que, quando discretizadas e aplicadas aos elementos de contorno da placa, formam as relações de compatibilidade necessárias para se obter as variáveis de contorno $w, \partial w / \partial n M w, V w$. Vale mencionar também que as condições de carregamento e suportes da placa analisada determinam apenas duas das quatro variáveis de contorno.

3.5 RESULTANTES DE TENSÃO

A partir da obtenção das variáveis de contorno através da resolução simultânea de (3.26) e (3.33), a deflexão $w(P)$ pode ser calculada para qualquer ponto do domínio por meio da Eq. (3.25). A partir deste, pode-se iniciar o processo de cálculo dos momentos fletores M_x, M_y, M_{xy} e dos esforços de cisalhamento Q_x, Q_y através das Eq. (2.18).

Percebe-se destas que seus valores podem ser calculados conhecendo-se as segundas e terceiras variáveis de w , ou mais especificamente $\partial^2 w / \partial x^2, \partial^2 w / \partial y^2, \partial^2 w / \partial xy, \partial \nabla^2 w / \partial x, \partial \nabla^2 w / \partial y$ (ou em na notação utilizada anteriormente $w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}, \nabla^2 w_x, \nabla^2 w_y$). Conseqüentemente, aplicando-se o laplaciano e diferenciação direta em (3.25), podem-se obter as seguintes derivadas necessárias para o cálculo dos esforços internos da placa:

$$w_{xx}(P) = \int_{\Omega} v_{xx} f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(v_{xx} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{n,xx} - v_{n,xx} \nabla^2 w + w_n \nabla^2 v_{xx} \right) ds \quad (3.34)$$

$$w_{yy}(P) = \int_{\Omega} v_{yy} f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(v_{yy} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{n,yy} - v_{n,yy} \nabla^2 w + w_n \nabla^2 v_{yy} \right) ds \quad (3.35)$$

$$w_{xy}(P) = \int_{\Omega} v_{xy} f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(v_{xy} \nabla^2 w_n - w \nabla^2 v_{n,xy} - v_{n,xy} \nabla^2 w + w_n \nabla^2 v_{xy} \right) ds \quad (3.36)$$

$$\nabla^2 w_x(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v_x f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 v_x \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_{n,x} \nabla^2 w \right) ds \quad (3.37)$$

$$\nabla^2 w_y(P) = \int_{\Omega} \nabla^2 v_y f d\Omega - D \int_{\Gamma} \left(\nabla^2 v_y \nabla^2 w_n - \nabla^2 v_{n,y} \nabla^2 w \right) ds \quad (3.38)$$

As segundas, terceiras e quartas derivadas de v presentes em (3.34) a (3.38) são obtidas através da diferenciação direta da solução fundamental presente em (3.12).

CAPITULO 4

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Uma vez obtidas as Eq. (3.26) e (3.33) através do Método de Elementos de Contorno - e considerando-se que suas resoluções analíticas estão fora de cogitação por sua complexidade - pode-se discretizar o contorno Γ da placa em N elementos de contorno. Os elementos utilizados nesse trabalho são do tipo **constante**.

A distribuição das variáveis de contorno w, w_n, Mw, Vw são consideradas constantes e iguais ao seu valor no ponto nodal do elemento de contorno em questão. Designando-se as variáveis de contorno no i -ésimo elemento como w^i, w_n^i, M_n^i, V_n^i ($i = 1, \dots, N$) e os deslocamentos e forças concentradas no k -ésimo canto w_c^k, R^k ($k = 1, \dots, N_c$) para os N_c elementos de canto, adquirem-se as seguintes equações discretizadas de contorno:

1. N equações provenientes de (3.26) aplicadas aos N pontos nodais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w^i + \sum_{j=1}^N [Vv]^{ij}w^j - \sum_{j=1}^N [Mv]^{ij}w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[Tv]]^{ij}w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v]^{ij}Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{ij}Mw^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v]^{ik}R^k + F_1^i \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. N_c equações provenientes de (3.26) aplicadas aos N_c pontos de canto:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\pi}w_c^l + \sum_{j=1}^N [Vv]^{lj}w^j - \sum_{j=1}^N [Mv]^{lj}w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[Tv]]^{lj}w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v]^{lj}Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{lj}Mw^j - \sum_{k=1, k \neq l}^{N_c} [v]^{lk}R^k + F_2^l \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. N equações provenientes de (3.33) aplicadas aos N pontos nodais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_n^i + \sum_{j=1}^N [Vv_1]^{ij}w^j - \sum_{j=1}^N [Mv_1]^{ij}w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[Tv_1]]^{ij}w_c^k = \\ \sum_{j=1}^N [v_1]^{ij}Vw^j - \sum_{j=1}^N [v_{1n}]^{ij}Mw^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v_1]^{ik}R^k + F_3^i \end{aligned} \quad (4.3)$$

As matrizes nas equações acima representam as seguintes integrais de contorno:

$$[v]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds_q, \quad [v_n]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q, \quad [Mv]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Mv(p_i, q) ds_q, \quad (4.4a-c)$$

$$[Vv]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Vv(p_i, q) ds_q, \quad [v_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v_1(p_i, q) ds_q, \quad [v_{1n}]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v_{1n}(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q, \quad (4.4d-f)$$

$$[Mv_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Mv_1(p_i, q) ds_q, \quad [Vv_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} Vv_1(p_i, q) ds_q, \quad \llbracket Tv \rrbracket^{ik} = \llbracket Tv(p_i, q_k) \rrbracket^{ik}, \quad (4.4g-i)$$

$$\llbracket Tv_1 \rrbracket^{ik} = \llbracket Tv_1(p_i, q_k) \rrbracket^{ik}, \quad F_1^i = \int_{\Omega} fv(p_i, Q) d\Omega_Q, \quad F_2^l = \int_{\Omega} fv(p_l, Q) d\Omega_Q, \quad (4.4j-l)$$

$$F_3^i = \int_{\Omega} fv_1(p_i, Q) d\Omega_Q \quad (4.4m)$$

Nas quais:

- Γ_j é o j -ésimo elemento (segmento de linha) no qual a integração está sendo efetuada;
- p_i, q são respectivamente o i -ésimo ponto fonte nodal e o j -ésimo ponto campo do contorno;
- p_l, q_k são respectivamente o l -ésimo ponto fonte de canto e o k -ésimo ponto campo de canto.

As Eq. (4.1), (4.2) e (4.3) podem ser representadas combinadamente em forma matricial, de modo que:

$$\mathbf{H} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \mathbf{F} \quad (4.5)$$

Em que:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} [Vv]^{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij} & -\llbracket Tv \rrbracket^{ik} & -\llbracket Mv \rrbracket^{ij} \\ [Vv]^{lj} + \frac{\alpha}{2\pi}\delta_{lj} & -\llbracket Tv \rrbracket^{lk} & -\llbracket Mv \rrbracket^{lj} \\ [Vv_1]^{ij} & -\llbracket Tv_1 \rrbracket^{ik} & -\llbracket Mv \rrbracket^{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} [v]^{ij} & -[v]^{ik} & -[v_n]^{ij} \\ [v]^{lj} & -[v]^{lk} & -[v_n]^{lj} \\ [v_1]^{ij} & -[v_1]^{ik} & -[v_{1,n}]^{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F}_1 = \{F_1^i\}_{N \times 1} \quad \mathbf{F}_2 = \{F_2^l\}_{N_c \times 1} \quad \mathbf{F}_3 = \{F_3^i\}_{N \times 1} \quad (4.9a-c)$$

$$\mathbf{w} = \{w^i\}_{N \times 1} \quad \mathbf{w}_c = \{w_c^l\}_{N_c \times 1} \quad \mathbf{w}_n = \{w_n^i\}_{N \times 1} \quad (4.9d-f)$$

$$\mathbf{V} = \{Vw^i\}_{N \times 1} \quad \mathbf{R} = \{R^k\}_{N_c \times 1} \quad \mathbf{M} = \{Mw^i\}_{N \times 1} \quad (4.9g-i)$$

A Eq. (4.5) constitui um sistema linear de apenas $2N + N_c$ equações para $4N + 2N_c$ variáveis de contorno desconhecidas. De modo a se resolver o sistema e se obter as variáveis de contorno, outras $2N + N_c$ equações são necessárias. As equações restantes advêm das condições de contorno

aplicando-se a Eq. (2.37) para os N pontos nodais e a Eq. (2.38) para os N_c pontos de canto, de modo que:

$$\bar{\mathbf{H}} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_c \\ \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{F}} \quad (4.10)$$

Em que

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \mathbf{c}_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

e

- $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ são matrizes diagonais de $N \times N$ elementos;
- $\mathbf{c}_{1,2}$ são matrizes diagonais de $N_c \times N_c$ elementos;
- $\alpha_3, \beta_3, \mathbf{c}_3$ são vetores com as respectivas dimensões.

Os sistemas (4.5) e (4.10) são combinados e resolvidos simultaneamente, retornando as variáveis de contorno descritas em (4.9d-i). A deflexão $w(P)$ de um ponto P qualquer interno ao domínio Ω pode, finalmente, ser calculada através da versão discretizada de (3.24):

$$w(P) = F_i + \sum_{j=1}^N \left([v]_P^j V w^j - [Vv]_P^j w^j - [v_n]_P^j M w^j + [Mv]_P^j w_n^j \right) - \sum_k \left(v_P R^k - [[Tv]_P^k w^k \right) \quad (4.12)$$

4.1 CÁLCULO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO

Os forçamentos da placa em análise são expressos na Eq. (3.25) através da integral de domínio da densidade de carga f multiplicada à solução fundamental v , ou através da matriz \mathbf{F} na sua versão discretizada em (4.5). Sabe-se também que, de acordo com o tipo de carregamento sob o qual a placa está sujeita, o comportamento da integral de domínio - consequentemente da sua versão discretizada - varia. KATSIKADELIS (2014) distingue, portanto, as seguintes condições de carregamento:

- Carregamento concentrado F em um ponto Q_0 interno ao domínio Ω :

$$F_1^i = Fv(p_i - Q_0), \quad F_2^l = Fv(p_l - Q_0), \quad F_3^i = Fv_1(p_i - Q_0) \quad (4.13a-c)$$

- Momento concentrado M_m em um ponto Q_0 interno ao domínio Ω agindo ao redor de um vetor normal a uma direção fixa $\mathbf{m}(m_x, m_y)$:

$$F_1^i = -M_m \frac{\partial v(p_i - Q_0)}{\partial m}, \quad F_2^l = -M_m \frac{\partial v(p_l - Q_0)}{\partial m}, \quad F_3^i = -M_m \frac{\partial v_1(p_i - Q_0)}{\partial m} \quad (4.14a-c)$$

- Carregamento linear f^* agindo ao longo de ua linha L^* :

$$F_1^i = \sum_{k=1}^L f_k^* \int_{L_k} v(p_i, s) ds, \quad F_2^l = \sum_{k=1}^L f_k^* \int_{L_k} v(p_l, s) ds, \quad F_3^i = \sum_{k=1}^L f_k^* \int_{L_k} v_1(p_i, s) ds \quad (4.15a-c)$$

4.2 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Com base na fundamentação teórica e na metodologia apresentadas anteriormente, propõe-se uma rotina computacional que segue o seguinte fluxograma (Fig. 4.1):

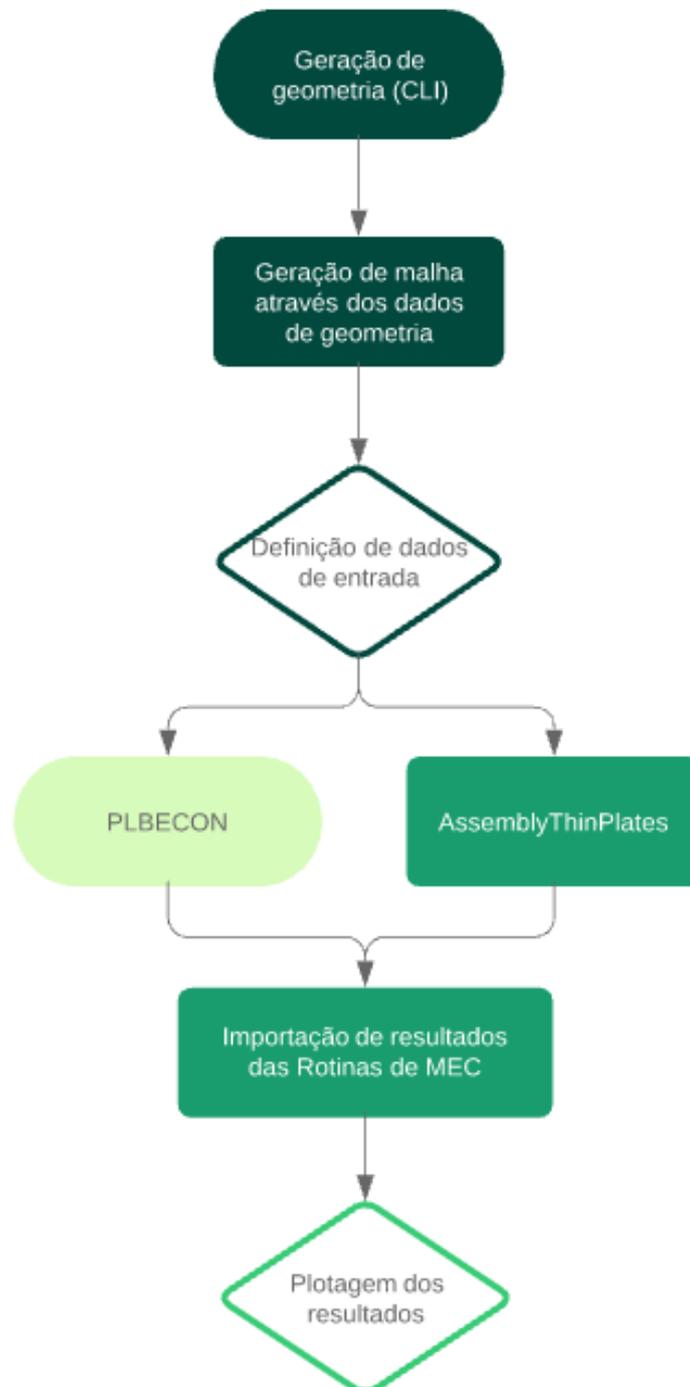


Figura 4.1: Fluxograma de funcionamento da rotina proposta.

A rotina utilizada para obtenção do deslocamento e dos esforços internos de uma placa sob condições de carregamento e suporte específicas consiste em modificações e aprimoramentos das rotinas de análise em MEC de elementos constantes para placas estáticas PLBECON (KATSIKADELIS, 2014) e AssemblyThinPlates (SOUSA, 2016).

A geometria da placa é definida, sua malha é gerada e exportada para uma rotina desenvolvida em Python na qual se definem as condições de suporte e carregamento. A rotina então chama as subrotinas de integração numérica e álgebra vetorial de PLBECON e entrega como dados de saída o

gráfico de deslocamento após atuação dos forçamentos na placa.

Os programas desenvolvidos e utilizados para análise de placas seguem, finalmente, o seguinte sequenciamento lógico:

1. Definição da geometria da placa e formulação da malha:

Foram avaliadas diversas opções para se simplificar a construção da geometria da placa para as rotinas supracitadas, como a utilização da plataforma GMSH, a criação de uma GUI através do submódulo PyQt5 e a definição dos parâmetros através da linha de comando (CLI).

Ainda que a definição da geometria ainda dependa da definição das coordenadas dos vértices da placa no espaço (e subsequentemente da relação entre estas para formação das arestas), a utilização do CLI se mostrou uma excelente alternativa para se gerar os dados de entrada para a rotina, como se pode ver no Apêndice A.

No que tange a geração da malha, o contorno é definido como a subdivisão das arestas em pontos nodais e extremidades, como visto na Fig. 1.6. Foi analisada também a criação de pontos internos retangulares e de formato arbitrário.

A primeira pode ser de implementação expressivamente simplificada, mas para geometrias de placa mais complexas uma malha retangular não representa suficientemente bem o seu domínio. Portanto, desenvolveu-se uma rotina que gera uma malha retangular e a compara com a geometria da placa, eliminando os pontos que não pertencem à geometria, através da avaliação da seguinte integral:

$$e = \int \frac{r_n}{2\pi r} dr \quad (4.16)$$

em que

$$r_n = \frac{(x_e - x_{in}) + (y_e - y_{in})}{\|(x_e - x_{in})^2 + (y_e - y_{in})^2\|} \quad (4.17)$$

Em que x_e, y_e, x_{in}, y_{in} , são respectivamente as coordenadas dos pontos do contorno e as coordenadas dos pontos internos. Caso o resultado da integral acima seja 1, o ponto pertence ao domínio e é mantido na malha. Caso não, ele é eliminado. Dessa forma, podem-se gerar pontos internos para geometrias de placa arbitrária satisfatoriamente.

2. Determinação das condições de contorno de suporte e imposição dos forçamentos submetidos à placa:

Através ainda das linhas de comando e através da análise austera das funções de contorno utilizadas por ambos os autores citados imediatamente acima, foram definidas *strings* relativas a cada condição descrita na Tab. 1, de forma que, para a rotina de SOUSA (2016) por exemplo:

- 'engaste', correspondente às funções de contorno [0 0 0 0 0 0 0];
- 'apoio livre' correspondente às funções de contorno [1 0 1 0 1 0 1 0];
- 'apoio fixo' correspondente às funções de contorno [1 1 1 0 1 1 1 0];
- 'aresta livre' correspondente às funções de contorno [1 1 1 1 1 1 1 1].

Os forçamentos, por sua vez, foram definidos também por CLI. Para tipos mais complexos de forçamento, como o presente no estudo de caso 2 deste trabalho, a imposição do forçamento é feita manualmente no arquivo de entrada gerado.

3. Importação as rotinas de MEC:

Uma vez gerada a malha e definidas as condições de operação da placa, arquivos de entrada para as rotinas supracitadas são geradas e estas podem ser executadas. Para a rotina de SOUSA (2016) utilizou-se o submódulo de integração Python-Matlab **matlab.engine**, que permite que um código em formato .m seja incorporado a uma rotina em formato .py, de forma que

```
import matlab.engine
eng = matlab.engine.start_matlab()
eng.AssemblyThinPlates(nargout=0)
```

De maneira correlata, para a rotina de KATSIKADELIS (2014), desenvolvida em FORTRAN, utiliza-se o submódulo **f2py** do módulo **numpy** para realizar a integração entre as rotinas:

```
from numpy import f2py
import subprocess
with open("PLBECON.FOR") as sourcefile:
    sourcecode = sourcefile.read()
f2py.compile(sourcecode)
subprocess.call(["a.out"])
```

4. Plotagem dos resultados:

Uma vez solucionado o problema de contorno, a rotina desenvolvida recebe os dados de saída das rotinas explicitadas acima (por meio de modificações nestas para salvar o deslocamento transversal dos pontos da placa em arquivos de texto) e a plotagem dos resultados é dada pela função de gráficos de contorno **contourf** do submódulo **matplotlib.pyplot** (Apêndice A).

CAPITULO 5

RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo apresentam-se alguns dos resultados numéricos obtidos através da implementação da metodologia descrita neste trabalho. Estudos de caso foram propostos de modo a se fazerem possíveis comparações entre os resultados obtidos por trabalhos de outros autores já publicados. Desse modo, os estudos de caso propostos para validar a metodologia e o ferramental numérico utilizados são os seguintes:

- Estudo de caso 1: Placa quadrada engastada nas quatro arestas submetida a carregamento uniformemente distribuído por sua superfície (SOUSA, 2016);
- Estudo de caso 2: Placa triangular simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído por sua superfície (KATSIKADELIS, 2014).

Primeiramente, para cada um dos estudos de caso descritos acima, expõe-se a esquematização do problema a ser analisado. Em seguida, os parâmetros físicos e numéricos de cada são elencados, em conjunto com a malha gerada para se resolver o problema. Finalmente, alguns resultados gráficos são apresentados, bem como resultados tabelados nos quais se compara o deslocamento obtido pela metodologia aplicada neste trabalho com o de outros autores. Segue ainda uma breve discussão acerca dos resultados e de suas eventuais discrepâncias.

5.1 ESTUDO DE CASO 1: PLACA QUADRADA

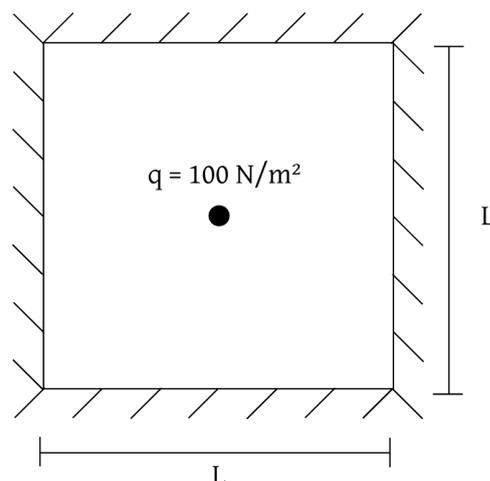


Figura 5.1: Representação esquemática da placa analisada.

O primeiro caso analisado para se confirmar a aplicabilidade da rotina desenvolvida foi um dos exemplos numéricos de SOUSA (2016). Neste, uma placa engastada nas suas quatro arestas sofre um

carregamento distribuído de 100 N/m^2 por toda sua superfície (Fig. 5.1). As propriedades geométricas e materiais da placa podem ser vistas na Tab. 2.

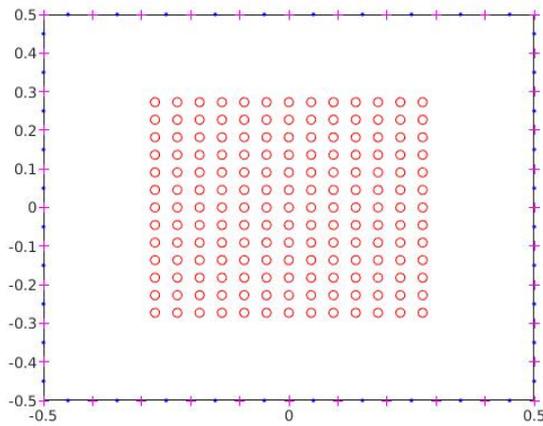
Tabela 2: Propriedades geométricas e materiais do problema proposto.

L [m]	t [m]	E [GPa]	ν	q [N/m^2]
1	0,008	210	0,3	100

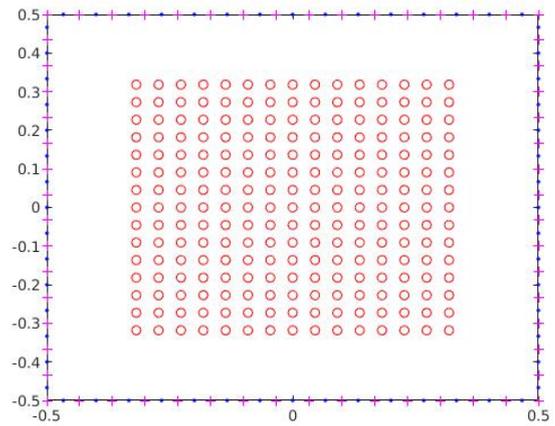
Em que:

- L é o comprimento das arestas da placa;
- t é a espessura da placa;
- E é o módulo de elasticidade do material;
- ν é a razão de Poisson do material;
- q é a carga distribuída na placa.

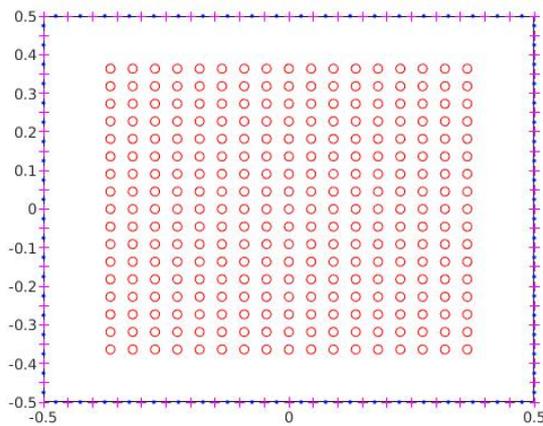
As malhas geradas para a resolução do problema (Fig. 5.2) tem as seguintes propriedades:



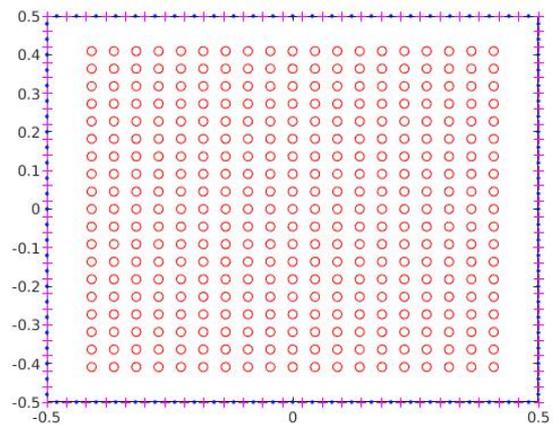
(a) $N_e = 40$; $N_{in} = 169$.



(b) $N_e = 60$; $N_{in} = 225$.



(c) $N_e = 80$; $N_{in} = 289$.



(d) $N_e = 100$; $N_{in} = 361$.

Figura 5.2: Malhas geradas para resolução do problema da placa.

Nas quais os pontos azuis representam os pontos nodais dos elementos de contorno, as cruzes em vermelho as extremidades dos elementos e os círculos em vermelho são os pontos internos. Uma vez

geradas as malhas do problema e impostas as condições de contorno e de carregamento da placa, a rotina aplica a metodologia exposta nos Capítulos 3 e 4 para calcular os deslocamentos transversais da placa na qual foi submetido o forçamento. Como visto no trabalho de SOUSA (2016), a solução analítica para o deslocamento transversal no centro da placa é dado por:

$$w_{analítico} = \frac{0,00126qL^4}{D} = 1,403 \cdot 10^{-5}m \quad (5.1)$$

As Fig. 5.3a e 5.3b mostram os deslocamentos transversais provenientes da resolução do problema da placa quadrada engastada. O gráfico gerado na Fig. 5.3a se refere à malha de 80 elementos (Fig. 5.2d).

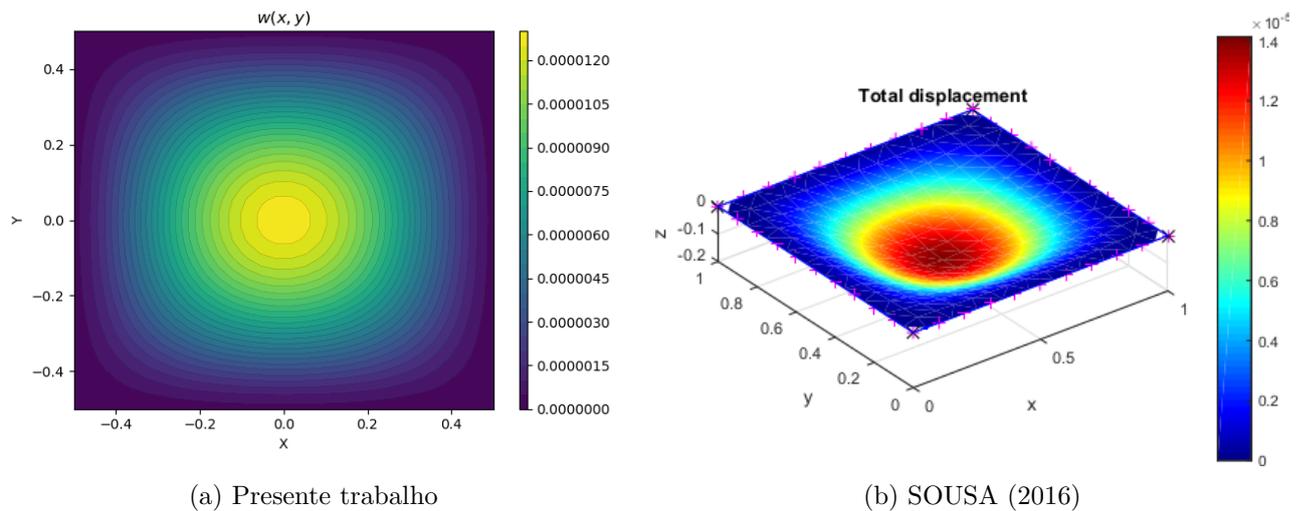


Figura 5.3: Representação gráfica do deslocamento transversal da placa quadrada analisada.

Uma breve aferição visual já demonstra que o resultado obtido pelo autor está condizente com o resultado já validado de SOUSA (2016). Em esforço análogo ao do autor citado imediatamente acima, aferiu-se o deslocamento transversal no centro $P(0,0)$ da placa e comparou-se com a solução analítica do deslocamento do centro da placa (5.1).

O cálculo do erro de truncamento do método é dado por:

$$\epsilon = \left| \frac{w_{numérico} - w_{analítico}}{w_{analítico}} \right| \times 100 \quad (5.2)$$

Finalmente, expõem-se os deslocamentos transversais do centro da placa e os erros de truncamento correlatos das quatro malhas geradas para o problema:

Tabela 3: Deslocamento transversal do centro da placa analisada.

N_e	w [$\times 10^{-5}m$]	ϵ [%]
40	1,3619	3,16
60	1,3741	2,36
80	1,3836	1,54
100	1,3957	0,75

De fato, os resultados obtidos no presente trabalho condizem com a literatura. Como era de se esperar, à medida que se refina a malha o resultado se aproxima do deslocamento analítico obtido em (5.1).

Espera-se que, uma vez que a rotina de cálculo dos esforços internos da placa esteja consolidado, ensaios numéricos na plataforma ANSYS sejam capazes de validar a sua implementação.

5.2 ESTUDO DE CASO 2: PLACA TRIANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

De maneira análoga ao caso anterior, a implementação da geração de geometria, malha, suportes e carregamento é posta à prova através de outro problema já consolidado, bem como das rotinas de cálculo das matrizes de influência e resolução de sistemas lineares. Desta vez, procura-se obter resultados similares aos obtidos ao exemplo 2.2 do livro de KATSIKADELIS (2014). Neste, um carregamento hidrostático de $f = 10(a - y)$ kN/m é imposto na placa, cujas 3 arestas se encontram em apoio simples (Fig. 5.4).

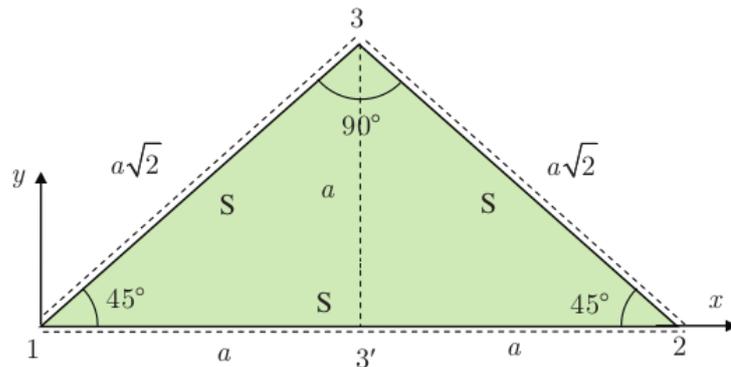


Figura 5.4: Propriedades geométricas da placa triangular estudada (KATSIKADELIS, 2014).

As propriedades geométricas e materiais da placa são as seguintes:

Tabela 4: Propriedades geométricas e materiais do problema proposto.

a [m]	t [m]	E [GPa]	ν	q [kN/m]
2,5	0,005	210	0,3	$10(a - y)$

Novamente, gera-se a malha da placa em questão a partir da rotina de geração de geometria e malha desenvolvida pelo autor. Para se analisar o problema, implementou-se uma malha de $N_e = 120$ elementos de contorno e $N_{in} = 221$ pontos internos (Fig. 5.5).

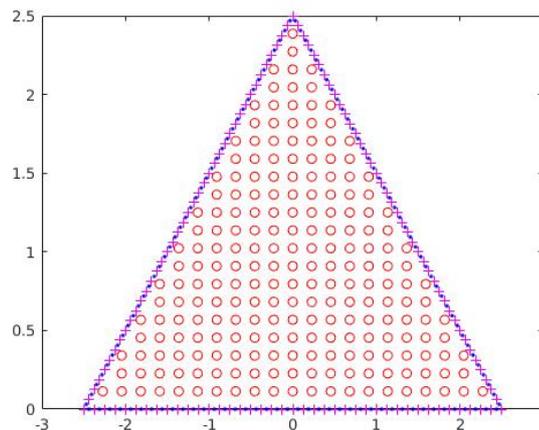
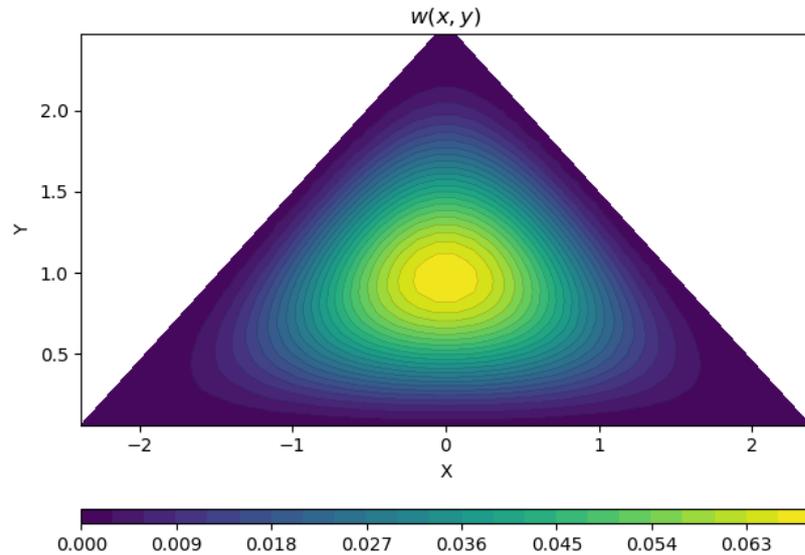
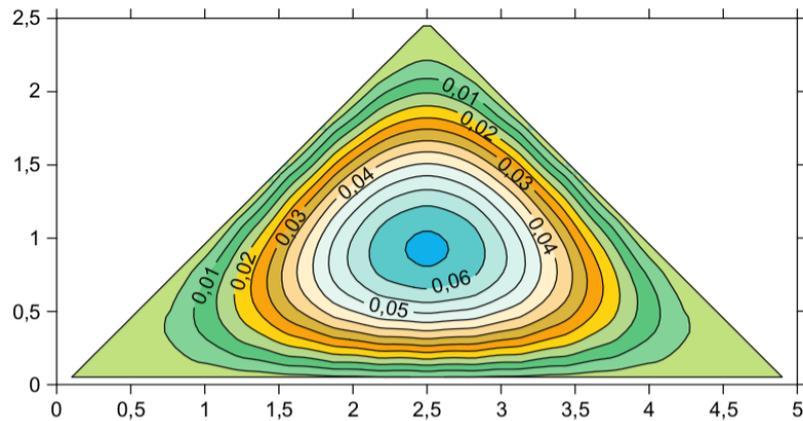


Figura 5.5: Malha gerada para resolução do problema da placa.

Ao compilar o algoritmo de Elementos de Contorno integrado à rotina desenvolvida podem-se obter os dados de deslocamento transversal da placa em análise (Fig. 5.6). Ambos gráficos apontam à soluções similares, apresentando mais evidências da consolidação do método aplicado, tanto no quesito de geração de malha quanto no de cálculo de deslocamentos transversais e plotagem de resultados.



(a) Presente trabalho



(b) KATSIKADELIS (2014)

Figura 5.6: Representação gráfica do deslocamento transversal da placa triangular analisada.

De maneira similar ao estudo de caso anterior, compara-se o deslocamento transversal da placa a uma altura $a/5 = 0,5\text{m}$ da base da placa:

Tabela 5: Deslocamentos transversais a uma altura $a/5$ da base da placa.

	N_e	$w[m]$	$\epsilon^*[\%]$
Presente trabalho	120	0,04967	4,2
BEM - KATSIKADELIS (2014)	150	0,05296	2,0
FEM - KATSIKADELIS (2014)	10693	0,05190	-

Segundo KATSIKADELIS (2014), o ensaio em elementos finitos foi desenvolvido em plataforma NASTRAN com 10693 elementos quadriláteros. Novamente, percebe-se que o erro de truncamento do método implementado no presente trabalho apresenta fidelidade com métodos já consolidados.

CAPITULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve seu início com uma extensa revisão bibliográfica acerca da análise de placas finas e da aplicabilidade do Método de Elementos de Contorno para a análise e aplicação destas. Uma vez definida a necessidade de se ter uma rotina de análise de placas por meio do MEC cuja entrada de dados seja familiar ao estudante de engenharia, propôs-se desenvolver um algoritmo no qual a geometria, as condições de suporte e os forçamentos da placa sejam facilmente fornecidos à rotinas que aplicam o método direto explicitado neste relatório. A rotina então devolve os parâmetros de contorno da resolução do problema da placa, bem como o deslocamento transversal interior da placa.

Ainda que a pretensão inicial do projeto fosse a modelagem integral de um algoritmo de análise da associação de placas finas no espaço com cálculo dos esforços internos das placas, a presença de singularidades do tipo Cauchy, $1/r$ e $1/r^2$ nas submatrizes das matrizes de influência tornou o processo de integração numérico deveras específico e oneroso, não tornando capaz em tempo hábil a confecção correta das matrizes de influência \mathbf{G} e \mathbf{H} . Tais dificuldades impediram o processo de adição de múltiplas placas no código, como visto em SOUSA (2016), mas através de subrotinas já consolidadas na literatura (KATSIKADELIS, 2014) o autor foi capaz de desenvolver um algoritmo de análise de placas de formato arbitrário.

A partir dos dados coletados pode-se concluir que o algoritmo de análise linear estática foi devidamente implementado. A rotina foi baseada no código implementado por SOUSA (2016) nas partições de geração de geometria e malha do problema, enquanto o cálculo dos deslocamentos transversais das placas submetidas a forçamentos foi conquistado através de modificações na rotina de KATSIKADELIS (2014).

É de desejo do autor continuar a migração da rotina de associação de placas no espaço com adição do cálculo de esforços internos para uma rotina integralmente em linguagem Python de autoria própria.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Como continuação deste trabalho, o autor sugere as seguintes tarefas:

1. Implementação da representação gráfica de esforços internos da placa;
2. Simulação de placas com furos;
3. Adicionar compatibilidade com suportes internos à placa;
4. Implementação de uma interface gráfica de usuário para a rotina.

Referências Bibliográficas

- ALIABADI, M. *The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. (The Boundary Element Method). ISBN 9780470842980. Citado 2 vezes nas páginas iii e 6.
- BOUAZIZI, M.; LAZGHAB, T.; SOULA, M. Mechanical response of a hexagonal grid stiffened design of a pressurized cylindrical shell-application to aircraft fuselage. *Thin-Walled Structures*, v. 127, p. 40–50, jun. 2018. ISSN 0263-8231. Citado 2 vezes nas páginas iii e 5.
- DAMANPACK, A. R. et al. Boundary element method applied to the bending analysis of thin functionally graded plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 10, n. 3, p. 549–570, maio 2013. ISSN 1679-7825. Citado na página 9.
- GAO, X. W.; DAVIES, T. G. 3d multi-region BEM with corners and edges. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, n. 11, p. 1549–1560, mar. 2000. ISSN 0020-7683. Citado 2 vezes nas páginas iii e 8.
- KATSIKADELIS, J. T. *The Boundary Element Method for Plate Analysis*. [S.l.]: Academic Press, 2014. Citado 17 vezes nas páginas iii, iv, 13, 16, 18, 19, 20, 22, 25, 28, 30, 31, 36, 37, 40, 43 e 45.
- KATSIKADELIS, J. T. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2016. ISBN 0128044934,9780128044933. Citado 2 vezes nas páginas iii e 7.
- KIRCHHOFF, G. R. *On the equilibrium and motion of an elastic plate*. [S.l.]: J. Math, 1850. Citado na página 14.
- KRAUTHAMMER, E. V. T. *Thin plates and shells: theory, analysis, and applications*. 1st. ed. [S.l.]: CRC Press, 2001. ISBN 0824705750. Citado na página 3.
- NAJARZADEH, L.; MOVAHEDIAN, B.; AZHARI, M. Stability analysis of the thin plates with arbitrary shapes subjected to non-uniform stress fields using boundary element and radial integration methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 87, p. 111–121, fev. 2018. ISSN 0955-7997. Citado 2 vezes nas páginas iii e 10.
- REIS, A. dos et al. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, n. 1, p. 105–113, jan. 2011. ISSN 0955-7997. Citado 3 vezes nas páginas iii, 8 e 9.
- SOARES, R. A.; PALERMO, L. Effect of shear deformation on the buckling parameter of perforated and non-perforated plates studied using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 85, n. Supplement C, p. 57–69, dez. 2017. ISSN 0955-7997. Citado na página 9.
- SOUSA, K. R. P. *Implementação de Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Associação de Placas no Espaço*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília/DF, 2016. Citado 8 vezes nas páginas iii, 9, 10, 11, 37, 40, 42 e 45.
- SZILARD, R. *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780471429890,0471429899. Citado 3 vezes nas páginas iii, 3 e 4.

- VENTURINI, W. S.; PAIVA, J. B. Boundary element for plate bending analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 11, n. 1, p. 1–8, jan. 1993. ISSN 0955-7997. Citado na página 7.
- WANG, Q. et al. Line integration method for treatment of domain integrals in 3d boundary element method for potential and elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 75, n. Supplement C, p. 1–11, fev. 2017. ISSN 0955-7997. Citado 3 vezes nas páginas iii, 9 e 10.

APÊNDICE A

```
import subprocess
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Line3D
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import pandas as pd
from matplotlib.lines import Line2D
import os
import sys
import vtk
from PyQt5 import QtCore, QtGui
from PyQt5 import Qt
from vtk.qt.QVTKRenderWindowInteractor import QVTKRenderWindowInteractor
from numpy import f2py
import subprocess

# Interface Gráfica da rotina:

class MainWindow(Qt.QMainWindow):

    def __init__(self, parent=None):
        Qt.QMainWindow.__init__(self, parent)

        self.frame = Qt.QFrame()
        self.vl = Qt.QVBoxLayout()
        self.vtkWidget = QVTKRenderWindowInteractor(self.frame)
        self.vl.addWidget(self.vtkWidget)

        self.ren = vtk.vtkRenderer()
        self.vtkWidget.GetRenderWindow().AddRenderer(self.ren)
        self.iren = self.vtkWidget.GetRenderWindow().GetInteractor()

        mapper = vtk.vtkPolyDataMapper()
        mapper.SetInputConnection(source.GetOutputPort())

        actor = vtk.vtkActor()
        actor.SetMapper(mapper)

        self.ren.AddActor(actor)

        self.ren.ResetCamera()

        self.frame.setLayout(self.vl)
        self.setCentralWidget(self.frame)

        self.show()
        self.iren.Initialize()
        self.iren.Start()

# Dados Relevantes:
```

```
E = 210e9
nu = .3
t = .008
D = E * t ** 3 / (12 * (1 - nu ** 2))
fdens = -100
cc = 0
ax = plt.gca(projection='3d')

# Funções definidas:

def gradcon(a, b, x, tol):
    # start = time.time()
    r = b - np.matmul(a, x)
    p = r
    rs0 = np.matmul(np.transpose(r), r)
    rs1 = 1
    count = 0
    while np.sqrt(rs1) > tol:
        Ap = np.matmul(a, p)
        alpha = rs0/np.matmul(np.transpose(p), Ap)
        x += alpha*p
        r -= alpha*Ap
        rs1 = np.matmul(np.transpose(r), r)
        p = r + rs1/rs0*p
        rs0 = rs1
        count += 1
    # end = time.time()

    # print('{} iteracoes'.format(count))
    # print('{}s'.format(end - start))
    return x

def angle_vecs(v_1, v_2):
    v1_u = v_1 # / np.linalg.norm(v_1)
    v2_u = v_2 # / np.linalg.norm(v_2)
    return np.arccos(np.clip(np.dot(v1_u, v2_u), -1.0, 1.0))

# Gera o de malha e geometria:

print('Gerando geometria e malha do problema:')
nb = 1
ns = 4
nc = 4
alpha = 30

ms = np.array([[1, 35, -.5, -.5, .5, -.5, 0, ],
               [1, 35, .5, -.5, .5, .5, 0],
               [1, 35, .5, .5, -.5, .5, 0],
               [1, 35, -.5, .5, -.5, -.5, 0]])

mc = np.array([[0, -.5, -.5, 0, 0],
               [0, .5, -.5, 0, 0],
               [0, .5, .5, 0, 0],
               [0, -.5, .5, 0, 0]])

side_prop = ['engaste',
             'engaste',
             'engaste',
             'engaste']

x1 = []
xb = []
y1 = []
yb = []
for i in range(nc):
    x1 = ms[i, 2]
```

```

x2 = ms[i, 3]
y1 = ms[i, 4]
y2 = ms[i, 5]
ne = ms[i, 1]
dx = x2 - x1
dy = y2 - y1
xli = np.array([x1 + j * dx / ne for j in range(int(ne))])
xbi = np.array([(xli[j] + xli[j + 1]) / 2 for j in range(int(ne - 1))])
yli = np.array([y1 + j * dy / ne for j in range(int(ne))])
ybi = np.array([(yli[j] + yli[j + 1]) / 2 for j in range(int(ne - 1))])
xl.append(xli)
yl.append(yli)
xb.append(xbi)
yb.append(ybi)
xl = np.ravel(xl)
yl = np.ravel(yl)
xb = np.ravel(xb)
yb = np.ravel(yb)

nix = 10
niy = 10
ax = np.amax(xl) - np.amin(xl)
by = np.amax(yl) - np.amin(yl)
dxin = ax/(nix+1)
dyin = by/(niy+1)
xint = np.zeros(nix*niy)
yint = np.zeros(nix*niy)
for i in range(niy):
    for j in range(nix):
        k = i*nix+j
        xint[k] = np.amin(xl) + (j+1)*dxin
        yint[k] = np.amin(yl) + (j+1)*dyin

xint, yint = np.meshgrid(xint, yint)

plt.plot(xl, yl, 'm+', mew=.50)
plt.plot(xb, yb, 'b.', mew=.10)
plt.plot(xint, yint, 'ro', mew=.10, fillstyle = 'none')
plt.show()

# Gera o de dados de entrada (PLBECON):
# print('Gerando dados de entrada do problema:')

f = open('dad.daf', 'w+')
f.write('{} {} {} \n'.format(E,nu,t))
for value in xl:
    f.write('{}\n'.format(value))

for value in yl:
    f.write('{}\n'.format(value))

for value in xint:
    f.write('{}\n'.format(value))

for value in yint:
    f.write('{}\n'.format(value))

# Gera o de dados de entrada (Assemblythinplates):
print('Gerando dados de entrada do problema:')

f = open('dad.m', 'w+')

# print(PONTO)
for i in range(nc):
    if i == 0:

```

```

        f.write("PONTO = [ {} {} {} 0\n ".format(i+1, ms[i, 2], ms[i, 3]))
    elif i == 3:
        f.write('{} {} {} 0];\n'.format(i + 1, ms[i, 2], ms[i, 3]))
    else:
        f.write('{} {} {} 0\n'.format(i+1, ms[i, 2], ms[i, 3]))

for i in range(nc):
    if i == 0:
        f.write("LINHA = [ {} {} {} \n ".format(i+1, 1, 2))
    elif i == 3:
        f.write('{} {} {}]; \n'.format(4, 4, 1))
    else:
        f.write('{} {} {} \n'.format(i+1, i+1, i+2))

for i in range(nc):
    if i == 0:
        f.write("ne = {}]; \n ".format(int(ms[i, 1])))
        f.write("DISCRE = [ {} {} \n ".format(i+1, int(ms[i,1])))
    elif i == 3:
        f.write('{} {} ]]; \n'.format(i+1, int(ms[i,1])))
    else:
        f.write('{} {} \n'.format(i+1,int(ms[i,1])))

f.write('npint = {}];\n'.format(alpha))
f.write('NPI = [{} {}];\n'.format(alpha, alpha))

i = 1
f.write('CONDCONT = [\n')
for value in side_prop:
    if value == 'engaste':
        f.write('{} 0 0 0 0 0 0 0 0 \n'.format(i))
    if value == 'apoio livre':
        f.write('{} 1 0 1 0 1 0 1 0\n'.format(i))
    if value == 'apoio fixo':
        f.write('{} 1 1 1 0 1 1 1 0\n'.format(i))
    if value == 'aresta livre':
        f.write('{} 1 1 1 1 1 1 1 1\n'.format(i))
    i+=1
f.write('];\n')
f.write('C = [1 {}];\n'.format(fdens))
f.write('E = {}];\n'.format(E))
f.write('ni = {}];\n'.format(nu))
f.write('condcanto = {}];\n'.format(cc))
f.write('h = {}];\n'.format(t))

f.write('op = \'dt\';')

print('Compilando rotina:')
# Compila o da rotina PLBECON:

with open("PLBECON.FOR") as sourcefile:
    sourcecode = sourcefile.read()
f2py.compile(sourcecode)
subprocess.call(["a.out"])

# Compila o da rotina Assemblythinplates:

import matlab.engine
eng = matlab.engine.start_matlab()
eng.AssemblyThinPlates(nargout=0)

# Plotagem dos resultados:

```

```
w2 = pd.read_csv('cc2.dat', sep=',', header=None)
w2 = np.array(w2)
w2 = w2.T[3]
w2 = w2.reshape(alpha, alpha)

plt.contourf(-w2, 25)
plt.colorbar(aspect=50)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.title(r'$w(x,y)$')
plt.contour(-w2, 25, colors='k', linewidths=.1)

plt.show()

# Execução da GUI:

if __name__ == "__main__":
    app = Qt.QApplication(sys.argv)
    window = MainWindow()
    sys.exit(app.exec_())
```