



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**MODELAGEM CONTÍNUA DO
ESCOAMENTO DE UM FERROFLUIDO
ASSIMÉTRICO NA PRESENÇA DE CAMPO
MAGNÉTICO HOMOGÊNEO**

Por

Guilherme de Mendonça Luz

Brasília, 22 de junho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**MODELAGEM CONTÍNUA DO
ESCOAMENTO DE UM FERROFLUIDO
ASSIMÉTRICO NA PRESENÇA DE CAMPO
MAGNÉTICO HOMOGÊNEO**

Por

Guilherme de Mendonça Luz

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Dr. Francisco Ricardo Cunha _____

Prof. Dr. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues _____

Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral _____

Brasília 22 de junho de 2018

Guilherme de Mendonça Luz
MODELAGEM CONTÍNUA DO ESCOAMENTO DE UM FERROFLUIDO
ASSIMÉTRICO NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÊNEO/
Guilherme de Mendonça Luz. – Brasília, 22 de junho de 2018-
87 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Ricardo Cunha

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade Tecnologia , 22 de junho de 2018.

1. Acoplamento hidrodinâmica-magnetismo. 2. Assimetria de tensões. I.
Prof. Dr. Francisco Ricardo Cunha. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade
de Tecnologia. IV. MODELAGEM CONTÍNUA DO ESCOAMENTO DE UM
FERROFLUIDO ASSIMÉTRICO NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO
HOMOGÊNEO

CDU 02:141:005.6

Agradecimentos

O projeto de graduação, muito além do resultado de um ano de aprendizado e esforço dedicado, representa o fim de um ciclo de 5 anos das experiências mais intensas da vida de um jovem com acesso ao ensino superior. Foram 5 anos de muitas alegrias, tristezas, algumas loucuras e muita, mas muita transformação, intelectual e de caráter.

Na Universidade de Brasília aprendi que as melhores amizades são forjadas na dificuldade, que o esforço e a ética trazem, por vezes num prazo maior do que o que se gostaria, inúmeros e duradouros frutos e que, citando um poema, de Veronica Shoffstall, de que gosto muito, "se pode fazer coisas num instante que nos impactarão pelo resto da vida". Por tudo isso, sou muito grato a todos os(as) colegas, professores, técnicos(as), porteiros(as) e faxineiros(as) que em algum momento compartilharam essa experiência comigo. Mesmo palavras breves, como um bom dia caloroso, proferidas no momento certo, foram cruciais para chegar no ponto em que cheguei. Obrigado.

À minha família e amigos próximos, não precisaria nem mencionar o quanto sou grato. Meus pais e irmãos, Beth, Bira, Flávia e Fernando, me forneceram a base e o suporte, até quando não precisei, para superar cada um dos desafios com a cabeça erguida e me proveram e provêm a oportunidade de desenvolver todo meu potencial. Meu amor por vocês não cabe em palavras.

Matheus, Bernardo, Gabriel, Taynara, Thiago, Casado, André, Naya, Alyson, Lulu, Jonas, Nathalya, Siri e alguns outros com quem compartilhei e compartilho vivências preciosas, todos vocês têm um espaço especial no meu coração e em minha vida. Se hoje rio contando histórias de loucuras e aventuras, vocês são protagonistas nelas.

Por fim, dedico algumas palavras ao meu orientador nesses últimos dois anos, Professor Francisco Ricardo Cunha, por todo o aprendizado, pela paciência, discussões acaloradas e principalmente por ter me mostrado o valor do perdão, da crítica e do incentivo, nos momentos corretos. O senhor, sem dúvidas, é para mim muito mais que um mero tutor, mas um amigo e um conselheiro. Estarei sempre por perto!

A todos e todas aqui mencionados, minha mais sincera gratidão. Dedico a vocês esse trabalho e minha trajetória. Encerro com uma citação de Amyr Klink: "Quem tem um amigo, mesmo que um só, não importa onde se encontre, jamais sofrerá de solidão". Muito obrigado!

Resumo

O presente trabalho tem como foco principal a modelagem e solução de um escoamento de um ferrofluido assimétrico entre placas paralelas sob ação de campo magnético homogêneo e orientado na direção das velocidades. Exploram-se os efeitos da assimetria de tensões e do acoplamento entre a vorticidade do escoamento e o regime de magnetização, a partir de equação de evolução proposta por [Shliomis \(2002\)](#). São desenvolvidas duas soluções assintóticas por perturbação regular para pequenos efeitos magnéticos para o regime de saturação magnética, de maneira a se obter alguma compreensão acerca da solução geral. A partir das noções adquiridas, é desenvolvida uma solução numérica pelo método das diferenças finitas para abranger toda a faixa de variação dos parâmetros. As soluções assintóticas também constituem validação parcial da solução numérica. Os resultados de perfis de velocidade e magnetização, e de viscosidade relativa obtidos são discutidos e comparados com o trabalho experimental de [Cunha, Rosa e Dias \(2016\)](#), em que um ferrofluido escoando em cisalhamento simples num reômetro de discos paralelos é experimentalmente analisado.

Palavras-chaves: Acoplamento magnetismo-hidrodinâmica; Assimetria de tensões; Solução assintótica; Solução por diferenças finitas.

Abstract

This work primarily focuses on the modeling and solution of a ferrofluid flow between parallel plates and under the influence of a uniform magnetic field. The effects of stress asymmetries and the coupling between flow vorticity and magnetization are explored. To relate both phenomena, The magnetization evolution equation proposed by [Shliomis \(2002\)](#) is employed. Two asymptotic solutions, one restricted to small magnetic perturbations and another applicable for large magnetic fields, are firstly developed to give insight on the behavior of the solution. From the perspectives obtained, a finite-differences-numerical solution is developed, in order to cover the whole range of the physical parameters. The former are also source of partial validation to the latter. The results, in terms of velocity and magnetization profiles, and relative viscosity curves, are then discussed and qualitatively compared to the experimental work developed by [Cunha, Rosa e Dias \(2016\)](#). There, a simple-shear-flow of a ferrofluid is set and analyzed.

Keywords: Hydrodynamics-magnetism coupling; Stress asymmetries; Asymptotic solution; Finite-differences solution.

Lista de Figuras

Figura 1 – Representação esquemática de um dipolo magnético	5
Figura 2 – Representação esquemática de um pequeno volume de ferrofluido	8
Figura 3 – Magnetização de equilíbrio em função da indução aplicada	11
Figura 4 – Tempos de relaxação magnética	14
Figura 5 – Representação esquemática da transição entre 2 meios contínuos	17
Figura 6 – Representação esquemática dos mecanismos de precessão e vorticidade sobre a partícula	28
Figura 7 – Representação esquemática do escoamento	38
Figura 8 – Representação esquemática da malha de solução	57
Figura 9 – Representação esquemática do refinamento de malha proposto	58
Figura 10 – Teste de convergência de u' na parede	62
Figura 11 – Erros e diferenças percentuais para u'_w como funções da qualidade do refinamento na parede	63
Figura 12 – Obtenção da referência para teste do esquema de diferenças finitas	64
Figura 13 – Erros e diferenças percentuais como funções do tamanho de malha	65
Figura 14 – Obtenção da referência para teste da obtenção da viscosidade relativa	66
Figura 15 – Erros e diferenças percentuais como funções do tamanho de malha para a viscosidade relativa	67
Figura 16 – Comparação entre as soluções para $\epsilon = \alpha_0 \ll 1$	69
Figura 17 – Comparação entre as soluções para $\epsilon = 1/\alpha_0 \ll 1$	69
Figura 18 – Viscosidade relativa em função de α_0 - soluções numérica e assintóticas	70
Figura 19 – Viscosidade de saturação em função de ϕ - comparação entre as soluções	71
Figura 20 – Perfis de velocidade para alguns valores de α_0	72
Figura 21 – Perfis de magnetização para alguns valores de α_0	73
Figura 22 – Ângulo entre campo e magnetização para alguns valores de α_0	73
Figura 23 – Perfis de velocidade para alguns valores de Pe	74
Figura 24 – Perfis de magnetização para alguns valores de α_0	75
Figura 25 – Ângulo entre campo e magnetização para alguns valores de α_0	75
Figura 26 – Magnetização na parede em função de α_0	77
Figura 27 – Viscosidades relativas como funções de α_0	78

Figura 28 – Viscosidades relativas como funções de Pe	79
Figura 29 – Viscosidades relativas como funções de ϕ	80

Lista de abreviaturas e siglas

TTR	Teorema do Transporte de Reynolds
MFI	<i>Material Frame Indifference</i> (Indiferença Material ao Referencial)
PVC	Problema de Valor de Contorno
MDF	Método das Diferenças Finitas
CC	Condição de Contorno
EDO	Equação Diferencial Ordinária

Lista de símbolos

α	Parâmetro adimensional de intensidade de campo
a	Raio da partícula
\mathbf{B}	Vetor indução magnética
\mathbf{b}	Vetor de forças de campo
δ	Operador Delta de <i>Kronecker</i>
$\hat{\mathbf{d}}$	Orientação do dipolo magnético da partícula; Comprimento da região de desenvolvimento (sem negrito)
\mathbf{D}	Vetor deslocamento elétrico; Tensor taxa de deformação; Aproximação de diferenças (sem negrito)
dV	Volume da partícula fluida
ϵ	Tensor isotrópico de Levi-Civita
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
ϵ	Parâmetro pequeno de não-linearidade
η	Viscosidade do fluido-base
η_ϕ	Viscosidade aparente
$\hat{\mathbf{e}}_i$	Vetor unitário na direção i
\mathbf{E}	Vetor campo elétrico
f	Contribuição de <i>Einstein</i> na viscosidade de uma suspensão
f_0	frequência de <i>Lamour</i> do momento magnético da partícula
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
G	Gradiente adimensional de pressão
g	Aceleração da gravidade

$\hat{\mathbf{h}}$	Vetor orientação do campo magnético
\mathbf{H}	Vetor campo magnético
H_0	Magnitude do campo aplicado
h	Passo de malha; Distância entre as placas
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{J}	Vetor densidade de corrente; Matriz Jacobiana
K	Constante de anisotropia da partícula
k_B	Constante de Boltzmann
\mathcal{L}	Função <i>Langevin</i>
\mathbf{L}	Vetor momento angular; Caminho de integração (sem negrito)
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
\mathbf{M}	Vetor magnetização
M_0	Magnetização de equilíbrio
M_s	Magnetização de saturação
m	Massa; Momento de dipolo magnético
∇	Operador diferencial <i>nabla</i>
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário de área
N	Quantidade de partículas magnéticas em um volume
n	Número de densidade de partículas
$\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{\omega}$	Velocidade angular
ϕ	Fração volumétrica de partículas
\mathbf{P}	Vetor polarização
Pe	Número de <i>Péclet</i>
P_c	Ponto central da malha
\mathbf{p}	Vetor momento linear; Campo de pressão (sem negrito)
\mathbf{Q}	Tensor de transformação ortogonal de coordenadas; Vazão (sem negrito)

ρ	Massa específica
ρ_e	Densidade de carga elétrica
$\rho_p; \rho_s$	Densidade de polos magnéticos
$\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}$	Vetor posição; Vetor posição unitário
Re	Número de Reynolds
Re_m	Número de Reynolds magnético
σ	Tensor de tensões
τ	Tempo característico/de relaxação
\mathbf{T}	Vetor torque, geral
T	Temperatura absoluta do fluido
\mathbf{t}	Vetor <i>traction</i>
tol	Tolerância do método
\mathbf{u}	Vetor velocidade
\sqsubseteq_p	Volume da partícula magnética
V	volume, geral
ξ	vetor vorticidade
\mathbf{x}	Vetor posição

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivações	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Estrutura do relatório	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	Campo, magnetização e indução magnética	4
2.2	Magnetismo intrínseco	6
2.3	Magnetização em um ferrofluido	7
2.4	Magnetização de equilíbrio	9
2.4.1	Suspensões concentradas - Correção no modelo	12
2.5	Tempo de relaxação magnética	13
2.6	Equações de Maxwell - Limite magnetostático	15
2.7	Condições de contorno magnéticas	16
2.8	Mecânica de um meio contínuo - Princípios gerais	18
2.8.1	Equação da Continuidade	18
2.8.2	Equação de <i>Cauchy</i>	19
2.8.3	Balanço de torques e momento angular	20
2.9	O tensor de tensões magnético	22
2.9.1	A equação do movimento	25
2.9.2	Torque magnético sobre o ferrofluido	26
2.10	Equação de evolução da magnetização	27
2.11	Escoamento não-inercial - Hipótese de unidirecionalidade	28
2.11.1	Consequência da unidirecionalidade sobre o campo magnético e magnetização	30
2.12	Métodos de solução de equações diferenciais	30
2.12.1	Métodos de perturbação - Perturbação regular	31
2.12.2	Problema de valor de contorno - Método das diferenças finitas	35
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	38
3.1	Aspectos gerais	38

3.1.1	Escoamento de lubrificação totalmente desenvolvido	39
3.2	Solução do campo magnetostático unidirecional	39
3.3	Equação hidrodinâmica	40
3.4	Equação de evolução da magnetização	42
3.5	Magnetização de equilíbrio	42
3.6	Adimensionalização proposta para as equações	43
3.6.1	Escalas típicas	43
3.6.2	Parâmetros adimensionais	45
3.6.3	Adimensionalização das equações	46
3.7	Definição de viscosidade relativa	47
	4 SOLUÇÕES PROPOSTAS	49
4.1	Soluções assintóticas	49
4.1.1	Limite de $\alpha_0 \ll 1$ e $Pe \sim 1$	49
4.1.2	Limite de $\alpha_0 \gg 1$ com $Pe \sim 1$	52
4.2	Solução numérica	55
4.2.1	Condições de contorno	55
4.2.2	Discretização do domínio de solução	56
4.2.3	Refinamento local da malha - extrapolação linear para u'_w	57
4.2.4	Equações de diferenças	58
4.2.5	Solução do sistema de equações resultante	60
4.2.6	Determinação numérica da viscosidade relativa	61
4.2.7	Testes do código	62
	5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	68
5.1	Soluções assintóticas	68
5.2	Perfis de velocidade e magnetização - Simetria	71
5.2.1	Magnetização na parede	76
5.3	Viscosidades relativas	77
5.4	Dinâmica de vorticidade no ferrofluido	80
5.4.1	Formulação vorticidade-função de corrente bidimensional	82
5.5	Conclusões	83
5.6	Trabalhos futuros	84
	REFERÊNCIAS	85

1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as motivações para o desenvolvimento deste trabalho, são estabelecidos os objetivos e é comentada a estrutura do relatório.

1.1 Motivações

Ferrofluidos são definidos como suspensões coloidais ou não-coloidais de pequenas partículas magnéticas em um fluido-base newtoniano. Por possuírem propriedades únicas (fluidéz e resposta magnética intensa), atraem a atenção de pesquisadores e engenheiros de diversas áreas. Desde sua concepção e manufatura, nos anos 1960, ferrofluidos têm sido empregados em diversas aplicações, desde amortecedores veiculares a rotas medicamentosas (BERKOVSKII; BASHTOVOI, 1996). Os primeiros estudos conduzidos se concentravam primariamente na síntese e estabilidade de tais suspensões (TARI et al., 1979).

A primeira tentativa de descrever o movimento de um ferrofluido em escoamento foi consolidada por Rosensweig (1997) na primeira edição de seu livro *Ferrohydrodynamics*, em 1985. Embora já conhecesse o mecanismo de torque associado ao desalinhamento entre campo e magnetização das partículas fluidas, ele se ateu ao trabalho em regime superparamagnético, no qual a magnetização relaxa quase instantaneamente ao regime de equilíbrio. Nesse regime, os efeitos magnéticos são primordialmente criados por um tipo particular de força magnética, associada à interação entre magnetização e gradiente de campo.

Mais recentemente, outros trabalhos como o de Rosa (2013) e de Gontijo (2013) exploraram a dinâmica de ferrofluidos do ponto de vista da interação das partículas com o fluido, o campo e entre si, numa abordagem microscópica. Outros trabalhos como os de Cunha e Sobral (2004) e Rosa, Gontijo e Cunha (2016) abordaram a dinâmica de uma gota e de um escoamento simples de ferrofluido do ponto de vista da mecânica dos meio contínuos, contudo ainda sem abordar o mecanismo de torque magnético. Esse mecanismo é experimentalmente observado no trabalho de Cunha, Rosa e Dias (2016).

Embora uma equação de evolução de magnetização que contém tanto o meca-

nismo de precessão magnética associado ao torque quanto o mecanismo de interação vorticidade-magnetização tenha sido proposta por [Shliomis \(2002\)](#), nota-se, em revisão à literatura sobre o assunto, que existe uma lacuna na modelagem contínua de escoamentos de ferrofluidos sujeitos ao mecanismo assimétrico do torque. Esse trabalho propõe-se a estabelecer um primeiro passo numa linha de pesquisa dedicada a compreender de maneira mais abrangente os efeitos da assimetria do tensor de tensões de um ferrofluido associados à presença do torque magnético, numa abordagem contínua. Busca-se trabalhar nos regimes de escoamento mais intenso possível, para que os efeitos de interação vorticidade-magnetização sejam propriamente evidenciados.

1.2 Objetivos

Esse trabalho tem por objetivo a solução e avaliação do comportamento do escoamento de um ferrofluido assimétrico entre placas sujeito a um campo magnético homogêneo. Os objetivos específicos são:

- Revisão bibliográfica sobre a teoria do escoamento de fluidos magnéticos (ferrohidrodinâmica) com foco em efeito magnetoviscoso e interação entre torque magnético e vorticidade;
- Revisão bibliográfica sobre a teoria da lubrificação e escoamentos unidirecionais;
- Revisão bibliográfica sobre métodos de perturbação e soluções por expansão assintótica;
- Revisão bibliográfica sobre métodos de diferenças finitas e métodos numéricos de solução de equações e sistemas de equações não lineares;
- Formulação do modelo para o escoamento de filme de ferrofluido entre placas paralelas com regime acoplado de magnetização-hidrodinâmica;
- Adimensionalização das equações a partir de escalas típicas do problema e identificação dos parâmetros adimensionais relevantes;
- Identificação de parâmetros assintóticos e formulação de soluções assintóticas para os regimes fracamente não-lineares;
- Formulação das equações de diferenças a partir da discretização do perfil de velocidades magnetizações e solução do sistema não-linear resultante;
- Obtenção de resultados de viscosidade relativa do ferrofluido a partir da definição clássica de viscosidade de um fluido Newtoniano em escoamento entre placas (escoamento de *Poiseuille*);
- Discussão dos resultados e das limitações do modelo empregado na descrição.

- Breve análise da equação de dinâmica de vorticidade para um fluido magnético assimétrico incompressível, com esboço da formulação vorticidade-função de corrente para solução do escoamento no caso bidimensional geral.

1.3 Estrutura do relatório

O presente trabalho é dividido em introdução, fundamentação teórica, formulação do problema, soluções propostas, resultados e discussões e referências. No primeiro capítulo, o presente, são apresentadas a motivação, os objetivos e a estrutura do relatório. A fundamentação teórica sumariza brevemente todos os conceitos necessários à apropriada formulação do escoamento de ferrofluido entre placas paralelas. A formulação do problema apresenta a equação constitutiva empregada, a equação evolutiva de magnetização e todas as hipóteses, como a de escoamento unidirecional, adotadas na modelagem. As soluções propostas para o modelo são então obtidas, duas assintóticas para pequenos efeitos magnéticos e regime próximo à saturação, e uma numérica cobrindo toda a faixa de variação dos parâmetros. Os resultados obtidos pelas soluções são então apresentados e discutidos. É apresentada uma breve discussão acerca da equação de dinâmica de vorticidade, com esboço de solução pela formulação vorticidade-função de corrente, tendo em vista a solução de casos bidimensionais gerais. Por fim, as referências que serviram de base teórica para esse trabalho são citadas.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica dos conceitos necessários à modelagem e solução do escoamento entre placas de um ferrofluido.

2.1 Campo, magnetização e indução magnética

Em 1785, Charles Coulomb demonstrou experimentalmente não só a existência de polos magnéticos, como também o fato de que polos iguais se atraem e polos diferentes se repelem (ROSENSWEIG, 1997). Além disso, mostrou que se 2 polos p_1 e p_2 são colocados no espaço a uma distância r , a intensidade da força de atração entre eles é dada por $p_1 p_2 / 4\pi\mu_0 r^2$, de maneira análoga à interação entre 2 cargas elétricas. Portanto, o campo magnético gerado nos arredores de um polo de magnitude p é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{p\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2}. \quad (2.1.1)$$

Aqui, $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário orientado sobre a reta que liga p ao ponto em análise, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{N/A}^2$ é a permeabilidade magnética do vácuo e r , a distância entre o polo e o ponto em análise.

Quando um corpo contínuo é polarizado, pode-se definir a magnetização \mathbf{M} dele como sendo a densidade volumétrica de polarização. Para um volume V sujeito a uma polarização uniforme p , a intensidade da magnetização nesse volume é dada por $M = p/V\mu_0 = \rho_p/\mu_0$.

Como proposto na Lei de Faraday, a interação entre campos elétricos e magnéticos se dá por uma grandeza denominada indução magnética e denotada por \mathbf{B} . Em um meio contínuo qualquer, pode-se substituir sem prejuízos os efeitos de magnetização pelos de um fluxo imaginário de corrente atuante sobre os elementos de área de cada volume dV do meio (FRANK; SLATER, 1947), de maneira que $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}'$. O termo \mathbf{J}' denota esse fluxo imaginário. Da Lei de Ampère, para um fluxo estacionário de correntes ($\partial\mathbf{E}/\partial t = \mathbf{0}$) em um meio contínuo,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t, \quad (2.1.2)$$

em que $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}'$ é o fluxo total de corrente sobre o elemento. Portanto,

$$\nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2.1.3)$$

Aqui, \mathbf{J} denota o fluxo estacionário de corrente ao longo do elemento de volume do meio. Observando agora a mesma Lei de Ampère aplicada para o vácuo, nota-se que $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$. Com isso, mostra-se que

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}). \quad (2.1.4)$$

Essa relação é geral e de fundamental importância na formulação de modelos envolvendo magnetização de meios, seja por indução ou por magnetismo intrínseco.

Diferentemente do que se observa na natureza com cargas elétricas isoladas, não foram encontrados monopólos magnéticos. Curiosamente, polos norte e sul sempre são observados aos pares. Por isso, aplicar diretamente a Lei de Coulomb para determinar o campo gerado por um ímã requer observar a interação entre os dois polos. Seja determinar o campo gerado por um pequeno dipolo magnético, como o mostrado na figura 1.

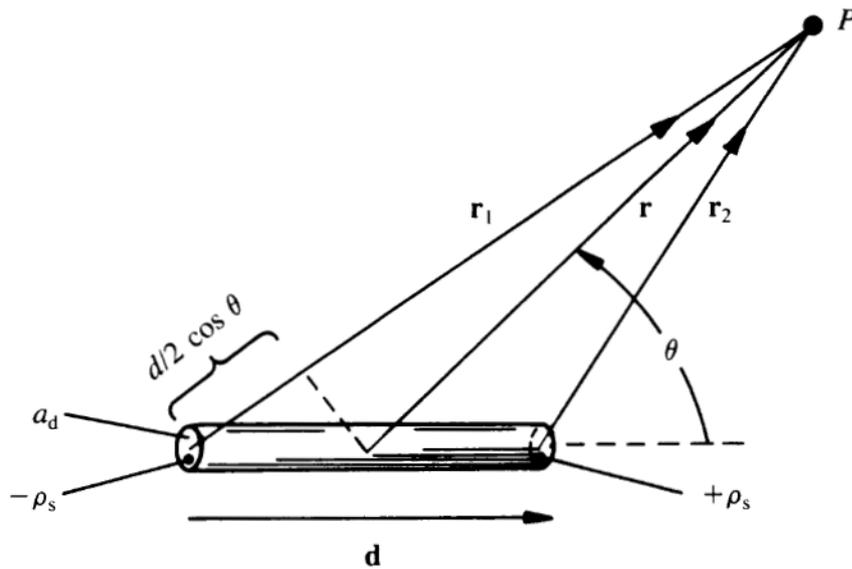


Figura 1 – Representação esquemática de um dipolo magnético. Considera-se que toda a polarização ocorre nas extremidades. Fonte: [Rosensweig \(1997\)](#).

Se a área superficial das duas extremidades é a_d e a densidade de polarização é uniforme e igual a ρ_s , em magnitude, pode-se escrever que o campo gerado no ponto P é composto pela superposição do campo gerado por ambos os monopolos. Isto é

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s a_d}{4\pi\mu_0} \left(-\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right). \quad (2.1.5)$$

Aqui, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{d}/2 + \mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{d}/2 + \mathbf{r}$. Se a relação $d \ll r$ é observada,

$$r_1 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta \text{ e } r_2 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta. \quad (2.1.6)$$

Com isso e o teorema binomial aplicado a r_i^{-3} , obtém-se, após algumas operações algébricas,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s a_d d}{4\pi\mu_0 r^3} \left[-\hat{\mathbf{d}} + 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \right] \quad (2.1.7)$$

em que $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}/d$ e $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Pode-se reescrever o campo em termos da definição do momento de dipolo associado à barra ($\mathbf{m} = \mu_0 \mathbf{M}V = \rho_s a_d d \mathbf{d}$) para se obter

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^3} \left[-\hat{\mathbf{d}} + 3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \right]. \quad (2.1.8)$$

É interessante notar como o campo decai com r^3 e não com r^2 , como no caso de cargas elétricas isoladas. Isso mostra o menor alcance das interações magnéticas.

2.2 Magnetismo intrínseco

Magnetização, campo e indução magnética são grandezas associadas a fenômenos com duas origens principais, movimento de cargas elétricas (correntes) ou o que se denomina magnetismo intrínseco da matéria, com origens no *spin* dos elétrons. A teoria que explica a origem do magnetismo na matéria foge ao escopo desse trabalho, pois é fundamentada em conceitos de mecânica quântica e interações entre partículas subatômicas (FRANK; SLATER, 1947). No entanto, é interessante observar as características de duas classes de materiais com resposta magnética: os materiais ferromagnéticos e paramagnéticos.

Ferromagnetismo é a propriedade apresentada por alguns materiais, como ferro, níquel, cobalto e alguns outros metais, além de várias de suas ligas. Nesses metais, existem domínios (grãos) nos quais as orientações dos dipolos magnéticos são unidirecionais. Para um volume suficientemente grande, essas orientações se distribuem aleatoriamente e resultam em magnetização média nula no material. Contudo, ao ser exposto a um campo externo, pode ocorrer reorientação desses momentos de dipolo e o material passa a exibir magnetização intrínseca, se torna um ímã permanente. Por razões energéticas, os domínios não podem ser indefinidamente pequenos, chegando à escala de átomos, pois a energia requerida para formar e manter os cada um deles escala com a área de interface entre domínios. Por isso, se um material ferromagnético é fragmentado até um certo tamanho de partícula, essas passam a exibir comportamento magnético dipolar, pois toda a partícula é composta por apenas um domínio, denominado então subdomínio, com uma orientação de dipolo magnético.

Por outro lado, paramagnetismo é a propriedade de materiais nos quais não existe orientação preferencial nos momentos de dipolo. Os momentos moleculares, contudo, respondem à aplicação de um campo externo e, na presença deste, o material apresenta

magnetização correspondente ao campo aplicado sobre ele. Tal comportamento é observado em substâncias como oxigênio líquido e soluções de sais de terras-raras. Vale ressaltar que os efeitos paramagnéticos são tipicamente fracos (a magnetização de saturação dos materiais é muito pequena, mesmo para altos campos). O chamado comportamento superparamagnético, exibido por ferrofluidos, advém do fato do regime de magnetização ser em tudo análogo ao apresentado por um material paramagnético, com a diferença na intensidade da magnetização gerada. Para um material superparamagnético, essa é muito mais intensa.

É importante ressaltar que o regime de magnetização proposto para o escoamento de ferrofluido em análise não é o superparamagnético, uma vez que se considera interação vorticidade-magnetização e o mecanismo de torque magnético, assimétrico. Um pouco mais de aprofundamento em relação ao magnetismo na matéria e diferentes classes de comportamentos magnéticos pode ser encontrada em [Rosensweig \(1997\)](#) e referências.

2.3 Magnetização em um ferrofluido

Um ferrofluido é composto por partículas magnéticas com momento de dipolo \mathbf{m} bem definidos e por um fluido-base Newtoniano. Considera-se que toda a resposta magnética do fluido advém das partículas, que o fluido é inerte nesse sentido. Cada partícula apresenta um momento de dipolo dado por $\mathbf{m} = \rho_p \Xi_p \hat{\mathbf{d}}$, em que ρ_p é a densidade de polarização do material que constitui a partícula, Ξ_p é o volume da partícula e $\hat{\mathbf{d}}$ é um vetor unitário adimensional que define a direção da orientação do dipolo magnético. A [figura 2](#) apresenta uma representação esquemática de um volume dV de ferrofluido com as partículas magnéticas dispersas.

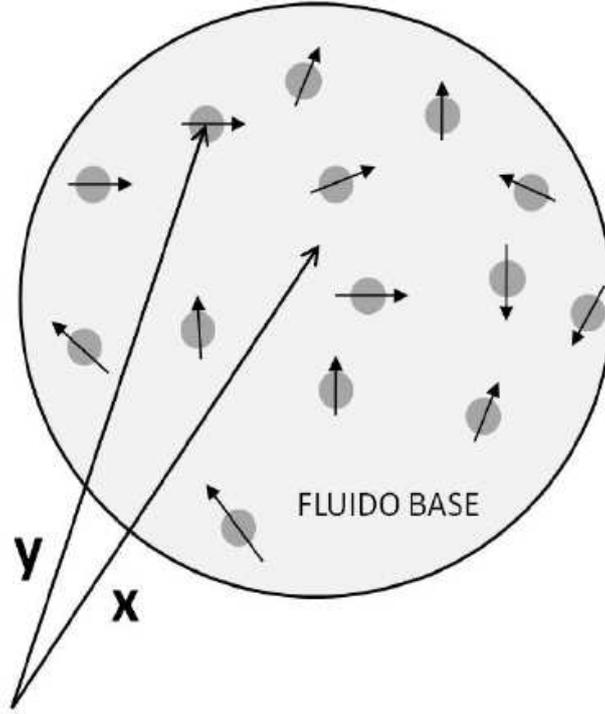


Figura 2 – Representação esquemática de um pequeno volume de ferrofluido. Os círculos representam as partículas dispersas, com seus momentos de dipolo nas mais diversas orientações. Fonte: Cunha (2012).

A coordenada \mathbf{x} identifica a posição da partícula em uma escala do contínuo enquanto a coordenada \mathbf{y} percorre o volume dV e identifica a presença ou ausência de partícula magnética. Com estes sistemas de localização, pode-se definir o momento magnético médio dessa partícula como sendo

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{dV} \int_{\sum_N^k \sqsubseteq_p^k} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV, \quad (2.3.1)$$

em que N é o número total de partículas em dV e \sqsubseteq_p é o volume da partícula magnética, tomado como constante para todas elas. O termo $\mathbf{m}(\mathbf{y})$ identifica o momento de dipolo na posição \mathbf{y} , interna à partícula fluida. Se um determinado \mathbf{y} identifica uma partícula magnética, então $\mathbf{m}(\mathbf{y}) = \mathbf{m}$, o momento magnético da própria partícula. Em caso contrário, $\mathbf{m}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Como o número de partículas é finito, torna-se conveniente escrever o momento magnético médio da partícula fluida em termos de uma somatória.

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \frac{\sqsubseteq_p N}{dV} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k \right). \quad (2.3.2)$$

Notar que $N/dV = n$ é o número de densidade de partículas e que $n \sqsubseteq_p = \phi$, a fração volumétrica de partículas, permite reescrever

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \phi \bar{\mathbf{m}} = \phi \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k \right). \quad (2.3.3)$$

A partir da definição de média dos momentos de dipolo $\bar{\mathbf{m}}$ é possível definir a magnetização de uma partícula fluida em um ferrofluido, a saber,

$$\mu_0 \mathbf{M} = n \bar{\mathbf{m}}. \quad (2.3.4)$$

A presença da constante de permeabilidade magnética no vácuo varia na literatura. Seguindo o proposto por [Rosensweig \(1997\)](#), adotou-se a definição com a constante. Fica bastante nítido que a magnetização em um ferrofluido é uma propriedade média local. Ou seja, toma-se um volume suficientemente grande de material de maneira que se obtenha uma função monotônica com o volume e faz-se a média volumétrica dos momentos de dipolo das partículas presentes nesse volume.

De maneira imediata surge a definição da magnetização de saturação do ferrofluido composto por partículas com intensidade de momento de dipolo constante. Se todas as partículas magnéticas estiverem alinhadas em uma mesma direção, o fluido exibe a magnetização máxima e aumentar a intensidade do campo aplicado sobre ele não provoca efeito algum. Em termos das grandezas já apresentadas,

$$\mu_0 \mathbf{M}_s = n \mathbf{m}, \quad (2.3.5)$$

em que \mathbf{m} é o momento magnético das partículas, tomado como homogêneo em magnitude (monodispersão). Também é interessante definir a magnetização de saturação em função da magnetização do sólido do qual se originam as partículas. Seja tomar \mathbf{M}_d como a magnetização *bulk* do sólido. Se ela se mantém constante à medida que o volume de sólido se reduz, é possível escrever que $\mathbf{M}_d = \mu_0 \mathbf{m} / \psi$. Multiplicar e dividir a relação anterior por $N dV$, em que dV é o volume da partícula fluida, fornece

$$\mathbf{M}_d = \frac{N dV}{N dV \psi} \mathbf{m} = \frac{1}{\phi} \mathbf{M}_s, \quad (2.3.6)$$

em que $\phi = V_p / dV$ é a fração volumétrica de partículas. Com isso, resta apenas um parâmetro de magnetização a ser desenvolvido: o termo de equilíbrio.

2.4 Magnetização de equilíbrio

É natural supor que, deixado em repouso e sob ação de um campo por tempo suficiente, um volume de ferrofluido irá relaxar a um valor permanente de magnetização e lá permanecer, até que alguma perturbação ocorra. Esse patamar é conhecido como magnetização de equilíbrio e está sempre presente nos modelos propostos para evolução de magnetização, com ou sem interações entre partículas como exposto por [Shliomis \(2002\)](#) e [Cunha \(2012\)](#).

O modelo mais empregado e conhecido de magnetização de equilíbrio, denominado modelo de magnetização de *Langevin*, foi primeiramente utilizado por [Jacobs e Bean \(1964\)](#) para descrever a magnetização de suspensões magnéticas finas e diluídas. Considera-se que a solução é diluída ao ponto de serem desprezíveis as interações entre partículas, tanto magnética quanto hidrodinamicamente.

Uma partícula em suspensão está sujeita, devido ao seu tamanho, a interações de natureza browniana com as moléculas do fluido-base. Essas interações são responsáveis por orientar aleatoriamente os momento de dipolo dessa partícula magnética. Quando tomada a média no volume dV (partícula fluida), o resultado é magnetização nula. Por outro lado, se um campo é aplicado, surge uma direção preferencial de alinhamento, pois cada partícula magnética está sujeita a um torque magnético $\mathbf{t}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$. A intensidade das interações brownianas é diretamente relacionada à energia térmica do fluido. A magnetização de equilíbrio de *Langevin* advém de uma média ponderada pela relação entre as energias associadas aos 2 fenômenos que governam a orientação das partículas magnéticas. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em [Rosensweig \(1997\)](#). Nessas condições, a magnetização de equilíbrio é dada por

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_s \mathcal{L}(\alpha). \quad (2.4.1)$$

O parâmetro $\alpha = mH/k_B T$ representa uma razão entre a energia do campo para rotacionar as partículas em sua direção e a energia térmica do fluido, associada à intensidade do mecanismo de flutuações brownianas (k_B é a constante de Boltzmann e T , a temperatura absoluta do fluido). A função $\mathcal{L}(\alpha) = \coth \alpha - 1/\alpha$ varia entre 0 quando $\alpha = 0$ a 1 quando $\alpha \rightarrow \infty$. Portanto, o máximo valor para a magnetização de equilíbrio é dado pela magnetização de saturação M_s . Nessa condição, todas as partículas estão alinhadas com o campo aplicado sobre o ferrofluido. O comportamento superparamagnético fica bastante evidente quando se observa a figura 3. A magnetização de equilíbrio do fluido cresce até um patamar de saturação, em que o aumento do campo não produz mais efeitos. Se o campo é retirado, não se observa histerese. A magnetização do fluido relaxa a zero.

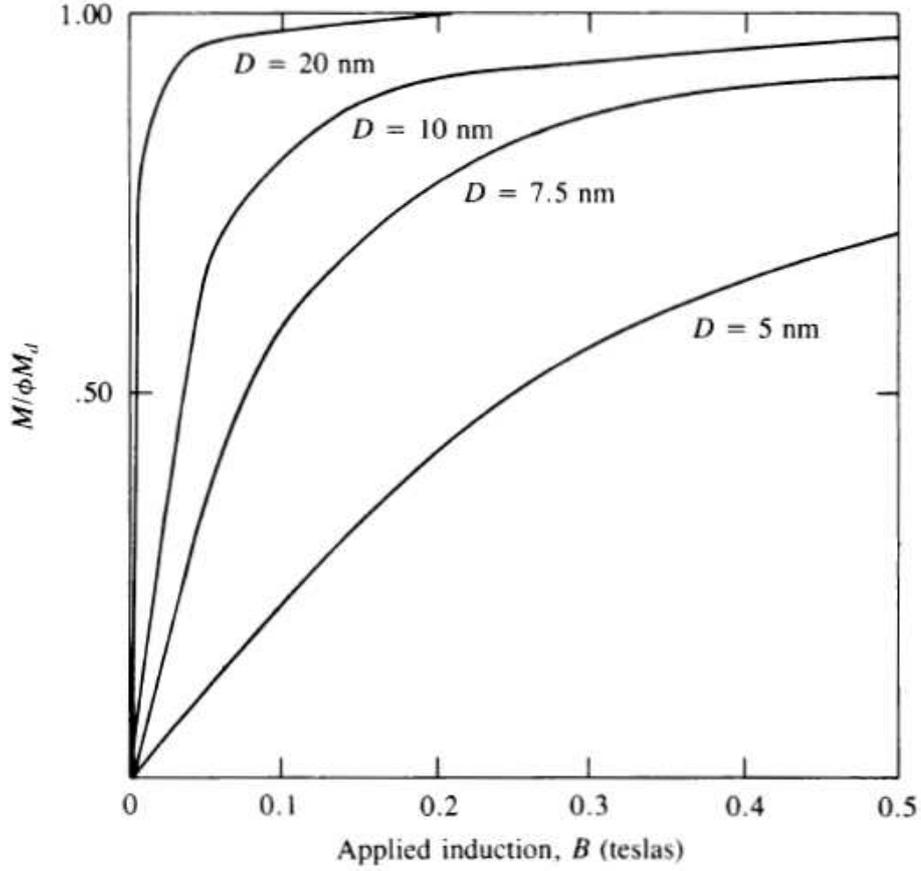


Figura 3 – Magnetização de equilíbrio em função da indução aplicada. É interessante notar que, quanto maior o tamanho das partículas, mais suscetíveis ao campo elas são. Fonte: [Rosensweig \(1997\)](#).

É válido ressaltar a influência do diâmetro médio das partículas sobre a magnetização de equilíbrio. Quanto maiores elas são, menor a influência dos choques moleculares, pois a inércia das partículas é naturalmente maior. Por esse motivo, é mais fácil alinhá-las com o campo e o patamar de saturação é atingido para menores valores de campo externo.

Uma outra noção interessante em relação à magnetização de equilíbrio e que evidencia claramente o regime superparamagnético associado a ela pode ser obtida a partir das equações 2.3.3, 2.3.4 e 2.4.1. Pode-se reescrever a primeira como sendo

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \phi \bar{\mathbf{m}} = \phi \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k \right) = \phi \bar{\mathbf{m}} = \phi m \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{d}}_k \right) \quad (2.4.2)$$

O vetor $\hat{\mathbf{d}}_k$ define a orientação do momento da k -ésima partícula. Se o seguinte produto escalar é tomado, obtém-se

$$\bar{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{h}} = m \bar{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{h}}. \quad (2.4.3)$$

Em termos da definição de magnetização a partir do momento médio de dipolo da partícula,

$$\mu_0 \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{h}} = n \bar{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{h}}. \quad (2.4.4)$$

Se o fluido está em equilíbrio,

$$\mathbf{M}_0 \cdot \hat{\mathbf{h}} = M_s \hat{\mathbf{h}} \cdot \hat{\mathbf{h}} \mathcal{L}(\alpha). \quad (2.4.5)$$

Aqui, $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor unitário na direção do campo externo \mathbf{H} aplicado e $\bar{\mathbf{d}}$ é o vetor média de orientação dos dipolos. É importante ter em mente que a magnetização de saturação é sempre orientada na direção do campo, pois é esta a direção preferencial para os dipolos (i.e. $\mathbf{M}_s \cdot \hat{\mathbf{h}} = M_s = nm/\mu_0$). Substituir 2.4.3 em 2.4.4 e comparar o resultado com 2.4.5 permite mostrar que

$$\begin{aligned} M_h &= M_s \bar{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{h}} \\ M_0 &= M_s \mathcal{L}(\alpha) \end{aligned} \implies \frac{M_h}{M_0} = \frac{\bar{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{h}}}{\mathcal{L}(\alpha)} \quad (2.4.6)$$

M_h representa a projeção da magnetização na direção do campo aplicado. É desnecessário frisar que a magnetização de equilíbrio, assim como a de saturação, são definidas em termos do campo externo aplicado e conseqüentemente alinhadas com ele. Se o regime superparamagnético é assumido, ou seja, a magnetização relaxa instantaneamente ao equilíbrio ($M_h = M_0$), pode-se concluir que

$$\mathcal{L}(\alpha) = \bar{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{h}}. \quad (2.4.7)$$

Segundo essa interpretação, a função *Langevin* representa uma projeção da orientação média dos dipolos magnéticos em relação ao campo. Isso está de acordo com a sua definição, a partir de uma média ponderada pela energia relativa dos mecanismos atuantes sobre a orientação dos dipolos.

2.4.1 Suspensões concentradas - Correção no modelo

Apesar de amplamente empregado, esse modelo apresenta restrições relativamente fortes quanto à utilização. Suspensões magnéticas com $\phi \sim 5\%$ já mostram valores de magnetização de equilíbrio consideravelmente destoantes dos previstos por *Langevin*. Para estender a modelagem a sistemas com mais partículas, [Ivanov e Kuznetsova \(2002\)](#) propuseram uma correção considerando interação dipolar entre duas e três partículas. Essa expressão descreve bem sistemas com até $\phi \sim 15\%$. A expressão obtida pode ser escrita como

$$\mathbf{M}_0 = M_s [\mathcal{L}(\alpha) + (\phi\lambda)E(\alpha) + (\phi\lambda)^2(F(\alpha) + G(\alpha))\hat{\mathbf{h}}], \quad (2.4.8)$$

em que

$$\begin{aligned}
E(\alpha) &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{24}{\alpha}\right) \mathcal{L}(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{csch}^2(\alpha)\right); \\
F(\alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{24}{\alpha}\right)^2 \mathcal{L}(\alpha) \left(2\alpha^2 \operatorname{csch}^2(\alpha) \coth(\alpha) - \frac{2}{\alpha}\right); \\
G(\alpha) &= \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \left(\frac{24}{\alpha}\right)^2 \mathcal{L}(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{csch}^2(\alpha)\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Nessas expressões, o parâmetro $\lambda = \mu_0 m^2 / (\pi k_B T d^3)$ relaciona as energias de interação dipolar e browniana sobre a partícula, em que d representa seu diâmetro. Para ferrofluidos e suspensões magnéticas usuais, $0.6 \leq \lambda \leq 1$. É importante ressaltar que a forma apresentada para as expressões foi obtida por [Cunha, Gontijo e Urel \(2018\)](#) num interessante trabalho sobre dinâmica de magnetização em escoamentos com cisalhamentos simples e oscilatórios.

2.5 Tempo de relaxação magnética

Um ferrofluido sujeito a um campo externo e em repouso eventualmente relaxa até a magnetização de equilíbrio. Para regimes monodispersos e diluídos, o modelo de *Langevin*, exposto na seção 2.4 representa muito bem a magnetização de equilíbrio do ferrofluido. Na ausência de interações tanto hidrodinâmicas quanto magnéticas entre partículas, as únicas influências externa são o campo e interações de natureza browniana entre as partículas e as moléculas do fluido. Segundo [Behrens et al. \(2009\)](#), nesse regime, dois mecanismos principais atuam no sentido de favorecer ou dificultar a orientação das partículas. O primeiro deles, já citado, é o de colisões moleculares com as nanopartículas. Essas colisões tendem a orientar de maneira aleatória os momentos de dipolo. Consequentemente, tendem a produzir um efeito médio nulo de magnetização no ferrofluido. O segundo mecanismo foi proposto por [Néel \(1949\)](#), orientado pelas recentes descobertas da mecânica quântica. Para até um certo tamanho de sub-domínio, a energia necessária para reorientar os momentos de dipolo atômicos é muito menor do que a necessária para rotacionar a partícula. Dessa maneira, ao se observar uma partícula sob ação de um campo aplicado, nota-se um alinhamento entre seu dipolo magnético e o campo sem que a partícula se reposicione espacialmente. Isso pode ser interpretado como um realinhamento interno da partícula, como se ela efetivamente reorientasse seu momento de dipolo de maneira independente a sua posição no espaço.

Quantitativamente, os mecanismos de relaxação são expressos em termos de tempos característicos. Esses podem ser interpretados como o intervalo entre aplicação do campo e alinhamento do momento de dipolo. O mecanismo browniano, que envolve rotação da partícula com momento de dipolo fixo, tem tempo de relaxação dado por [Brown](#)

(1963)

$$\tau_B = \frac{3\tilde{V}\eta}{k_B T}, \quad (2.5.1)$$

em que \tilde{V} é o volume total da partícula, incluída a camada de surfactante que impede a formação de agregados permanentes, η é a viscosidade do fluido-base, k_B é a constante de Boltzmann e T , a temperatura absoluta do fluido. As principais influências ficam evidentes na equação. A energia interna do fluido e sua viscosidade molecular, diretamente relacionadas, influenciam fortemente o tempo de relaxação. Também, um maior volume da partícula torna a rotação mais difícil.

O tempo de relaxação de Néel é dado por

$$\tau_N = f_0^{-1} e^{\frac{KV}{k_B T}}. \quad (2.5.2)$$

O termo $f_0 \sim 10^9 s^{-1}$ representa uma frequência associada a fenômenos caracteristicamente quânticos, com escala de tempo incompatível com a mecânica dos meios contínuos. K denota a constante de anisotropia da partícula e V , seu volume. Fica nítido que o tempo de Néel é muito menor que o tempo browniano para regimes de pequenos diâmetros de partículas. Contudo, com acréscimos no volume, o tempo browniano rapidamente passa a ser menor que o tempo de Néel. A figura 4 exibe ambos os tempos de relaxação como funções do diâmetro das partículas magnéticas.

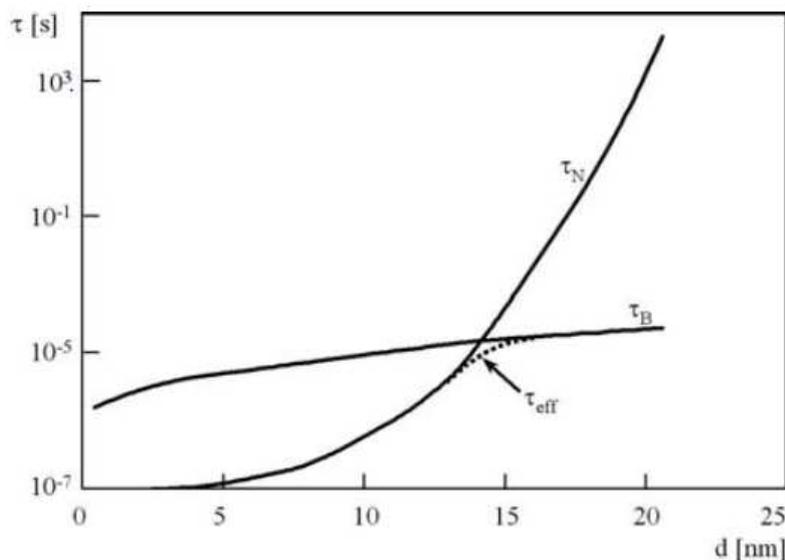


Figura 4 – Tempos de relaxação magnética como funções do diâmetro das partículas em uma base de óleo mineral com viscosidade $\eta = 0,05 \text{Pas}$. Fonte: Behrens et al. (2009).

Para pequenos diâmetros, é evidente que o tempo de Néel domina completamente o regime de relaxação. De fato, nesse limiar, é seguro considerar que a magnetização relaxa instantaneamente para o equilíbrio, pois é impossível obter uma escala de tempo de

escoamento compatível com $\tau \sim 10^{-5}s$. Contudo, o tempo de *Néel* cresce exponencialmente com o diâmetro. A partir de uma certa faixa, ele já é compatível com o tempo browniano e ambos os mecanismos são relevantes. Para grandes diâmetros de partícula, a barreira energética para reorientar os momentos de dipolo atômicos é tão alta que o efeito aparente é o de momento de dipolo fixo na partícula. Nesse regime, a relaxação magnética ocorre pela efetiva rotação da partícula em meio ao fluido, competindo com as interações brownianas. O tempo efetivo em qualquer regime é dado por

$$\tau_{eff} = \frac{\tau_N \tau_B}{\tau_N + \tau_B}. \quad (2.5.3)$$

Um último ponto relevante a ser ressaltado é o fato de que supor relaxação por *Néel* implica necessariamente em adotar a hipótese de superparamagnetismo. Como mencionado, as escalas de tempo do escoamento são muito maiores do que qualquer escala em que τ_N domina a relaxação. Nesse sentido, o escoamento não consegue produzir qualquer tipo de alteração na magnetização, pois esta se corrige quase instantaneamente.

2.6 Equações de Maxwell - Limite magnetostático

Na formulação mais usual, são 4 as chamadas equações de Maxwell. Em conjunto com a Lei de Lorentz, elas formam a base de toda a teoria do eletromagnetismo clássico. Seja enunciar as 4 equações para o vácuo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0}; \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e / \epsilon_0; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

As duas primeiras são a Lei de Gauss para a indução magnética \mathbf{B} e para o campo elétrico \mathbf{E} . O símbolo ρ_e representa a densidade de carga elétrica no volume contínuo em análise e ϵ_0 , a permissividade elétrica do vácuo. A primeira equação reflete o fato de não existirem monopolos magnéticos. Densidade positiva de polos é sempre acompanhada de densidade de polos negativos em mesma intensidade. A terceira equação é denominada Lei de Faraday e explicita a dependência entre campo elétrico e indução magnética. Essa equação estabelece o princípio básico da conversão de energia mecânica em elétrica. Basta girar uma espira em um campo magnético para criar um campo elétrico por ela. Ao se conectar essa espira num circuito qualquer, se observa o fluxo de corrente e consequente transmissão de energia. Por fim, a última equação denomina-se Lei de Ampère. Ela estabelece princípio análogo ao da Lei de Faraday. Um fluxo de corrente ou a variação temporal do vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} provoca variação espacial do campo aplicado. Aqui, \mathbf{J}

é o vetor fluxo de corrente que percorre o elemento contínuo. O vetor \mathbf{D} é definido como vetor deslocamento elétrico. Ele é definido como $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Ele foi introduzido por Maxwell como uma correção na Lei de Ampère para que esta pudesse descrever os fenômenos em que não há de fato corrente elétrica circulante, como na propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo. Nesse caso, é necessário que exista uma fonte polarizada variante no tempo, como uma oscilação de tensão em uma antena. De fato, é relativamente simples, porém fora do escopo deste trabalho, mostrar que essas 4 equações permitem escrever que campos elétricos e magnéticos se propagam como ondas típicas. Maxwell utilizou esse recurso para mostrar que a luz possui comportamento ondulatório.

Quando o meio contínuo em análise é um ferrofluido, constituído por um fluido-base isolante e partículas com magnetismo intrínseco, correntes e campos elétricos estão ausentes. Com efeito, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e, como não há polarização elétrica, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ em toda a extensão do meio. Com isso, as equações se simplificam para

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

Isso significa dizer que o vetor indução magnética \mathbf{B} é solenoidal e irrotacional. Além disso, mesmo que o campo aplicado \mathbf{H} varie com o tempo, como em [Shliomis et al. \(1995\)](#), o campo \mathbf{B} é permanente. Desse fato decorre a nomenclatura "regime magnetostático", frequente na literatura sobre o assunto.

Essas equações são a base para o desenvolvimento de condições de contorno no salto para o interior do ferrofluido, como será visto a seguir. Elas são de fundamental importância para a correta modelagem do regime magnético associado ao ferrofluido.

2.7 Condições de contorno magnéticas

Em um escoamento de ferrofluido, o campo magnético é usualmente aplicado externamente ao ambiente em que escoo o fluido. Isso é feito com uso de ímãs permanentes ou de solenoides percorridos por correntes. Portanto, ocorre uma transição entre meios. O campo sai do ar, considerado como vácuo, e adentra o fluido, em que gera magnetização. A figura 5 mostra uma interface entre 2 meios permeados por um campo de indução magnética.

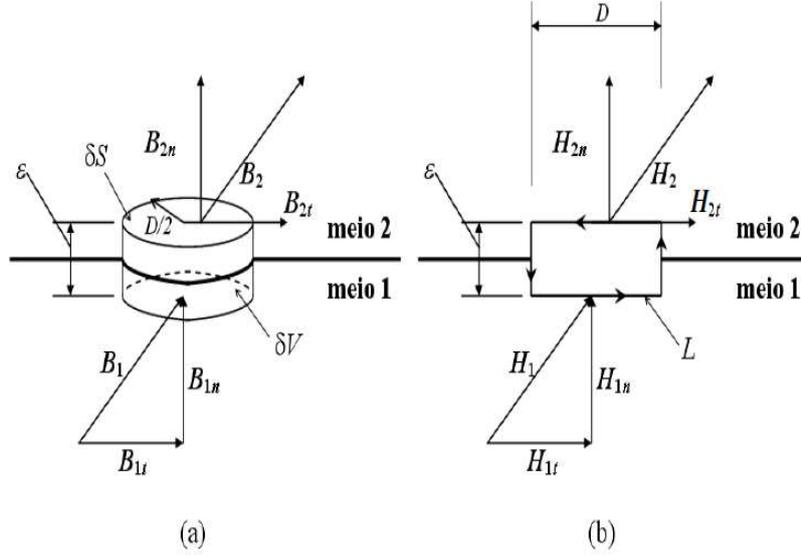


Figura 5 – Representação esquemática da transição entre 2 meios contínuos permeados por campo de indução magnética. Fonte: Cunha (2012).

Aplicando-se o teorema de Stokes para a integral de $\nabla \times \mathbf{H}$ ao longo da área S definida pelo circuito L , obtém-se

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0. \quad (2.7.1)$$

As integrais ao longo dos trechos verticais (cota ϵ) são iguais e se cancelam. Assim, conclui-se que

$$\int_{L_1, L_2} (\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t}) \cdot d\mathbf{L} = 0. \quad (2.7.2)$$

Sendo os comprimentos L_1 e L_2 idênticos, é possível concluir que

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (2.7.3)$$

ao longo da transição entre os meios. Para o campo \mathbf{B} , a abordagem é análoga. Se o volume cilíndrico definido por D e ϵ é percorrido por um campo de indução magnética, é possível escrever, em conjunto com o teorema de Gauss,

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \oint_S (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS, \quad (2.7.4)$$

em que S é a área que compreende o volume V . Se o cilindro é colapsado na altura ($\epsilon \rightarrow 0$), a contribuição de fluxo de indução magnética pela área lateral também vai a zero. Com isso, a integral sobre a superfície S se torna

$$-\int_{A_1} \mathbf{B}_{1n} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{A_2} \mathbf{B}_{2n} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (2.7.5)$$

Sendo $A_1 = A_2$ as áreas inferior e superior do disco, é possível escrever

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.7.6)$$

As equações 2.7.3 e 2.7.6 são de fundamental importância na modelagem de qualquer escoamento de ferrofluido, uma vez que garantem a observância das equações de Maxwell em todo o domínio do problema.

2.8 Mecânica de um meio contínuo - Princípios gerais

De maneira geral, a mecânica de um meio contínuo, assim como a de uma partícula, é regida por alguns princípios básicos: a conservação de massa; o balanço de momento linear; o balanço de momento angular; a conservação da energia; a geração de entropia e etc. A rigor, todos os princípios fundamentais do que se denomina Física Clássica são aplicáveis a um meio contínuo. Nesta seção, contudo, serão explicitadas a Equação da Continuidade, que representa a conservação da massa em um meio material, a Equação de *Cauchy*, para o balanço de momento linear e a equação de balanço do momento angular de um meio contínuo.

2.8.1 Equação da Continuidade

Seja considerar um corpo \mathcal{B} que ocupa um volume V em um dado instante de tempo t . A massa desse corpo pode ser escrita como

$$m = \int_V \rho dV \quad (2.8.1)$$

em que $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica no ponto \mathbf{x} , interior ao corpo, no instante t . O princípio da conservação da massa estabelece que a derivada material da massa é sempre nula. Isto é,

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)m = 0, \quad (2.8.2)$$

em que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é a velocidade do ponto \mathbf{x} no instante t . Aplicar esse princípio à equação 2.8.1 resulta em

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.8.3)$$

A partir do Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) (BATCHELOR, 2000), pode-se escrever

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = 0. \quad (2.8.4)$$

Se o volume V de integração é arbitrário (a integral é válida para qualquer escala dentro da hipótese do contínuo), o Teorema da Localização estabelece que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.8.5)$$

A equação 2.8.5 é uma das versões usuais da Equação da Continuidade. Ela estabelece que a variação na massa específica de um elemento material somente pode ocorrer mediante deformação normal desse elemento, expressada pelo segundo termo da equação. Em outras palavras, se um meio é considerado incompressível (mantém seu volume constante), a Equação da Continuidade estabelece que ρ é necessariamente constante nesse meio.

2.8.2 Equação de Cauchy

Seja considerar o mesmo corpo \mathcal{B} que ocupa o volume V no instante t . O momento linear desse corpo pode ser definido como sendo

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{u} dV. \quad (2.8.6)$$

Em um meio qualquer, quaisquer forças internas não podem contribuir para a variação do momento linear daquele. Portanto, o corpo \mathcal{B} só pode estar sujeito a duas espécies de forças: as forças de campo que atuam sobre o corpo por interação à distância e as forças de superfície que atuam nas fronteiras do corpo por contato direto. Em termos da força resultante sobre \mathcal{B} , tem-se

$$\mathbf{f}_r = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \oint_S \mathbf{t} dS. \quad (2.8.7)$$

Aqui, S é a superfície que envolve o volume V do corpo e

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8.8)$$

é a densidade superficial de forças atuante sobre cada elemento dS de S . O vetor $\hat{\mathbf{n}}$ define a direção normal a dS . Como postulado por Newton no séc. XVII, a variação do momento linear de um corpo só se dá pela ação de forças resultantes sobre ele. Assim,

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \mathbf{f}_r. \quad (2.8.9)$$

Em termos da definição de momento linear,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \oint_S \mathbf{t} dS. \quad (2.8.10)$$

Aplicar o TTR para o termo do lado esquerdo e o teorema da divergência para tensores de 2ª ordem no último termo do lado direito permite escrever

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.8.11)$$

Pode-se mostrar que Como o integrando é exatamente o mesmo nos 3 casos e o volume V é arbitrário, o Teorema da Localização novamente permite obter a equação para um elemento contínuo qualquer:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.8.12)$$

A equação 2.8.12 estabelece o balanço de momento linear em um elemento contínuo qualquer. Um ponto muito relevante surge quando se observa o termo originado das forças de superfície sobre \mathcal{B} . O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é denominado *tensor de tensões* do meio material em análise. Mais detalhes acerca dos sistemas de coordenadas e restrições na aplicação desta equação são discutidos por Chandrasekharaiah e Debnath (1994).

O segundo ponto importante em relação a essa equação é o fato da formulação do balanço de forças ainda estar incompleta. Se observada em suas componentes e na ausência de forças de campo, a equação de pode ser escrita como

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (2.8.13)$$

Existem apenas 3 equações e, a princípio, 12 incógnitas. Contudo, isso faz pleno sentido pois essa equação é aplicável a qualquer meio contínuo. A especificação do meio contínuo em análise é feita justamente ao se definir o tensor $\boldsymbol{\sigma}$. De fato, esse tensor é usualmente denominado *equação constitutiva* do meio, por fornecer a descrição das forças atuantes sobre cada partícula do meio.

2.8.3 Balanço de torques e momento angular

Seja ainda considerar o corpo \mathcal{B} que ocupa um volume V no instante t . Define-se o momento angular total desse corpo como sendo

$$\mathbf{L} = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{p} dV = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV. \quad (2.8.14)$$

em que o vetor \mathbf{x} representa o braço de atuação do torque em relação à origem do sistema de coordenadas. De maneira geral, o torque atuante sobre \mathcal{B} possui origens nas forças

que atuam sobre o corpo, de campo ou superfície. Podem existir outros mecanismos de torque instrínseco. Como exemplo, o torque magnético exercido pelo campo aplicado sobre um ferrofluido é um mecanismo à parte e deve ser considerado. Na ausência de tais mecanismos, os torques atuantes podem ser representados como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_b &= \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{b})dV \\ &\text{e} \\ \mathbf{T}_s &= \oint_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t})dS = - \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x})dS. \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

Pelo princípio do balanço de momento angular, o torque total atuante sobre o corpo deve ser igual à variação temporal total de seu momento. Assim,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u})dV = \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{b})dV - \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x})dS. \quad (2.8.16)$$

Novamente, empregar o TTR no lado esquerdo e o Teorema da divergência no termo de torques de superfície fornece

$$\int_V \left[\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x}) \right] dV = \mathbf{0}. \quad (2.8.17)$$

O primeiro termo da equação pode ser reescrito como

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) = \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \times \mathbf{u} = \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad (2.8.18)$$

pois $D\mathbf{x}/Dt = \mathbf{u}$. Já o último se torna

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.8.19)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é um tensor de terceira ordem isotrópico conhecido como operador de Levi-Civita. Reescrever a equação do balanço de momento angular com essas modificações resulta em

$$\int_V \left[\mathbf{x} \times \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{b} \right) - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \right] dV = \mathbf{0}. \quad (2.8.20)$$

Da equação 2.8.12, o termo entre parênteses é exatamente nulo. Portanto, pode-se afirmar que, novamente pelo teorema da localização,

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \implies \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.8.21)$$

Esse resultado é extremamente interessante. Note que, na demonstração da equação, só foram assumidos torques gerados pelas forças de campo e de superfície. Nesse

caso particular, a conclusão imediata da equação do balanço de torques é que o tensor de tensões é necessariamente simétrico. Além disso, se algum mecanismo de torque interno \mathbf{T}_i é considerado, a equação fornece

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{T}_i. \quad (2.8.22)$$

Esse resultado é especialmente relevante a este trabalho pois o torque magnético gerado pela interação entre magnetização e campo é um mecanismo intrínseco de torque que gera assimetria no tensor de tensões.

2.9 O tensor de tensões magnético

Como discutido na seção 2.8, as equações gerais que descrevem os princípios físicos são aplicáveis a qualquer caso que respeite as escalas do contínuo. Contudo, é necessário especificar como se dá a distribuição de forças de contato e de campo atuantes sobre cada partícula do meio. Essa representação é feita por meio dos termos $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ e $\rho \mathbf{b}$. Seja considerar um escoamento de ferrofluido horizontal. A única força de campo atuante homogeneamente sobre toda a partícula fluida é a gravidade. Por ser um campo conservativo (constante, aqui assumido), ela pode ser escrita em termos de um potencial,

$$\rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{g} = \rho \nabla(-gy) = -\rho g \nabla y. \quad (2.9.1)$$

O termo $\nabla y = \hat{\mathbf{e}}_y$ representa de fato o vetor unitário na direção vertical, em sentido oposto ao da gravidade. Essa noção será útil mais a frente. Apesar de também atuarem à distância, forças de natureza magnética são consideradas no tensor de tensões, pois estão relacionadas à estrutura reológica do fluido.

Algumas tentativas foram feitas no sentido de descrever o ferrofluido como um contínuo equivalente em termos de uma equação constitutiva. A primeira delas, feita por [Rosensweig \(1997\)](#), na primeira edição de seu livro, em 1967, envolvia partir do tensor de Maxwell para o vácuo, $\boldsymbol{\sigma}_m = \mu_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0$ e generalizar para um ferrofluido como $\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{B} \mathbf{H}$, considerando a relação $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Esse tensor, quando aplicado na equação de Cauchy, fornece uma densidade de forças de Kelvin-Maxwell, dada por $\mathbf{f}_m = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}$, que descreve apropriadamente o ferrofluido em regime superparamagnético. Contudo, ela falha quando se trata de um fluido magnético assimétrico, em que a ação do torque magnético é fundamental nos fenômenos observados.

Partindo de uma análise microhidrodinâmica em baixo número de Reynolds (hipótese aceitável dada a escala dos fenômenos), como estabelecido em [Batchelor \(1970\)](#),

Cunha (2018) propõe um tensor de tensões para o caso geral com a seguinte forma

$$\sigma_m = \mathcal{P}_m \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}), \quad (2.9.2)$$

em que \mathbf{I} é o tensor isotrópico de 2ª ordem (identidade) e

$$\mathcal{P}_m = \mu_0 n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{H}) \quad (2.9.3)$$

representa uma pressão magnética modificada associada à densidade de forças que atua sobre cada dipolo magnético. Nesse contexto, $n = N/V$ é o número de densidade de partículas magnéticas, m é o momento de dipolo de cada uma delas, suposto constante, N é o número absoluto de partículas e $\hat{\mathbf{d}}_k$ é um vetor unitário orientado na direção do momento de dipolo de cada uma das partículas. Esse tensor é também rapidamente discutido por Malvar, Gontijo e Cunha (2017), embora não tenha sido efetivamente empregado na obtenção dos resultados, pois foi considerado regime superparamagnético no trabalho.

A presença do fluido-base newtoniano contribui com as tensões clássicas associadas à pressão e às tensões cisalhantes viscosas, modificadas pela presença das partículas, que introduzem resistência adicional ao escoamento (*stresslet*). A contribuição do fluido-base para o tensor é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}_h = -p \mathbf{I} + 2\eta^* \mathbf{D}, \quad (2.9.4)$$

em que p é o campo de pressão e $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ é o tensor taxa de deformação, a parte simétrica do gradiente de velocidades. O coeficiente

$$\eta^* = \eta(1 + 5\phi/2) \quad (2.9.5)$$

é a viscosidade equivalente de uma suspensão diluída, conforme mostrado por Einstein (1905). O tensor de tensões que descreve o ferrofluido assimétrico é dado pela composição de ambas as contribuições:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_m = -(p - \mathcal{P}_m) \mathbf{I} + 2\eta^* \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}). \quad (2.9.6)$$

O traço desse tensor é dado por

$$tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = -(p - \mathcal{P}_m) \delta_{ii} + 2\eta^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mu_0 (H_i M_i - M_i H_i) = -3p. \quad (2.9.7)$$

Sendo o fluido um líquido incompressível, o termo $\partial u_i / \partial x_i = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. $\delta_{ii} = 3$ é o operador delta de Kröneckner com ambos os índices iguais. Dessa maneira, mostra-se que

a contribuição magnética altera a pressão mecânica (p_m) do fluido. A saber,

$$p_m = -\frac{\sigma_{ii}}{3} = p - \mathcal{P}_m. \quad (2.9.8)$$

Todo tensor pode ser escrito em termos de uma contribuição isotrópica e uma deviatórica, de traço nulo. De maneira geral,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^i + \boldsymbol{\sigma}^d = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}\right). \quad (2.9.9)$$

Aplicar essa noção ao tensor em análise fornece

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^i &= -(p - \mathcal{P}_m)\mathbf{I}; \\ \boldsymbol{\sigma}^d &= 2\eta^* \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Por fim, resta mostrar que o tensor de tensões proposto respeita o formalismo constitutivo no sentido de ser invariante a mudanças no sistema de coordenadas (*Material Frame indifference* - MFI). Seja \mathbf{Q} um tensor ortogonal (i.e. $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) que representa uma rotação de corpo rígido do sistema de coordenadas. Mais detalhes acerca de transformação de coordenadas podem ser encontradas em [Chandrasekharaiah e Debnath \(1994\)](#). Para um tensor de segunda ordem, a transformação do sistema original para um sistema ' é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (2.9.11)$$

Com foco no tensor de tensões magnético, é possível mostrar que tanto o vetor campo \mathbf{H} quanto o vetor magnetização \mathbf{M} são objetivos (respeitam o formalismo constitutivo). Isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H} \implies H'_i = Q_{ip}H_p; \\ \mathbf{M}' &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \implies M'_j = Q_{jq}M_q. \end{aligned} \quad (2.9.12)$$

Aplicando isso ao tensor de tensões magnético, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}'_m = \frac{\mu_0}{2}(\mathbf{H}'\mathbf{M}' - \mathbf{M}'\mathbf{H}') = \frac{\mu_0}{2}[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{H})(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{M})(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{H})]. \quad (2.9.13)$$

O produto escalar entre um tensor e um vetor pode ser comutado desde que se considere o transposto do primeiro ($\mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}^T$). Aplicar essa noção à transformação

ortogonal proposta para o tensor de tensões fornece

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}'_m &= \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{M}\mathbf{H}) \cdot \mathbf{Q}^T] \\
&= \frac{\mu_0}{2} \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{H}) \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{Q}^T.
\end{aligned} \tag{2.9.14}$$

Portanto, o tensor de tensões magnético obedece à lei de transformação ortogonal. Sendo invariante a mudanças no sistema de coordenadas, ele é MFI e é adequado como equação constitutiva. Com isso, a descrição material do ferrofluido fica quase concluída.

2.9.1 A equação do movimento

Com a equação constitutiva em mãos, basta aplicá-lo na equação de *Cauchy* (eq. 2.8.12) para obter a equação do movimento de um ferrofluido sob campo homogêneo. O divergente do tensor de tensões é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m &= \nabla \left(\mu_0 n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{H}) \right) + \frac{\mu_0}{2} \left[\frac{\partial(H_j M_k)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_k - \frac{\partial(M_j H_k)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_k \right] \\
&= \mu_0 n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [(\hat{\mathbf{d}}_k \cdot \nabla) \mathbf{H}] + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \\
&= \mu_0 \left(n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{d}}_k \right) \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}).
\end{aligned} \tag{2.9.15}$$

Comparando o resultado obtido com as equações 2.3.3 e 2.3.4, nota-se que

$$\left(n m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{d}}_k \right) = \mathbf{M}, \tag{2.9.16}$$

o que leva a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m = \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \tag{2.9.17}$$

Compondo com a parcela hidrodinâmica, cuja dedução é detalhada em [Batchelor \(2000\)](#), o divergente do tensor de tensões é dado por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \eta^* \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \tag{2.9.18}$$

Substituir esse resultado na equação de *Cauchy* (2.8.12) resulta em

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta^* \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \tag{2.9.19}$$

É importante ressaltar que $p = P - \rho gy$ aqui é dada tal que seu gradiente é a soma do próprio ∇P e da contribuição hidrostática da gravidade, dada pela equação 2.9.1. Essa é a equação do balanço de forças em um ferrofluido escoando sob campo homogêneo. Os termos usuais da equação de *Navier-Stokes* aparecem pela contribuição do fluido-base. São modificados pela presença das partículas em termos da viscosidade aparente para uma suspensão diluída de esferas e do termo de torque magnético, que contribui com uma força líquida sobre a partícula.

2.9.2 Torque magnético sobre o ferrofluido

A equação constitutiva para um fluido newtoniano, assim como em muitos outros casos, se apresenta como um tensor simétrico. Nesse caso, torques internos estão ausentes e a equação 2.8.22 resulta no vetor nulo. De fato,

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.9.20)$$

Ao se observar o tensor de tensões magnético, percebe-se que este é a parte anti-simétrica do tensor \mathbf{HM} . Como a equação constitutiva para o ferrofluido é a composição das descrições hidrodinâmica e magnética, ele perde a característica de tensor simétrico, o que implica na existência de algum mecanismo de torque interno. Após alguma álgebra, mostra-se que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} : (\boldsymbol{\sigma}_h + \boldsymbol{\sigma}_m) &= -\mathbf{T}_i = \mathbf{0} + \frac{\mu_0}{2} (H_j M_k - H_k M_j) \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= -\mu_0 M_j H_k \epsilon_{jki} \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= -\mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.9.21)$$

O primeiro termo é nulo pois, como já discutido, o tensor hidrodinâmico é a composição de um tensor isotrópico ($-p\mathbf{I}$) com um simétrico ($2\eta\mathbf{D}$). Do tensor magnético resulta a expressão para o torque magnético $\mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ sobre a partícula fluida, tal como obteve [Rosensweig \(1997\)](#) em suas primeiras formulações para a ferrohidrodinâmica. Esse é mais um indicativo de que o tensor empregado representa corretamente o meio material em análise.

Ultimamente, o torque magnético atua em cada uma das nanopartículas magnéticas em suspensão no fluido. As Leis de *Faxén*, originalmente obtidas por *Hilding Faxén* e minuciosamente abordadas em [Kim e Karrila \(2005\)](#) estabelecem uma relação para força e torque atuantes sobre uma partícula em um escoamento partindo apenas da geometria, movimento da partícula e velocidade angular do escoamento. Para o torque, a equação é dada por

$$\mathbf{T} = 8\pi\eta a^3 (\boldsymbol{\Omega}^\infty - \boldsymbol{\omega})|_{x=0}. \quad (2.9.22)$$

Aqui, a é o raio da partícula, $\boldsymbol{\Omega}^\infty$ é a velocidade angular do escoamento não perturbado pela partícula e $\boldsymbol{\omega}$, a velocidade angular da própria partícula. O sub-índice $x = 0$ indica que as grandezas são avaliadas no centro da partícula. É imediato notar que se a partícula está livre de torques, ela gira exatamente com a velocidade angular do escoamento avaliada em seu centro. A partir dessa perspectiva, fica clara a influência do torque magnético sobre as nanopartículas. Ele produz uma diferença na velocidade angular delas que se traduz em uma barreira extra a ser vencida pelas tensões de cisalhamento do escoamento. Essa noção explica em parte os resultados obtidos por [Cunha, Rosa e Dias \(2016\)](#) de aumento de viscosidade aparente do ferrofluido mesmo sob efeito de campo homogêneo. Outros efeitos, como a formação e quebra de agregados de partículas, também afetam diretamente medições de viscosidade em ferrofluidos.

2.10 Equação de evolução da magnetização

Na equação constitutiva para o ferrofluido em escoamento surge naturalmente a magnetização do material como variável do problema. Isso significa que a formulação ainda permanece incompleta, com mais variáveis do que incógnitas a determinar. É necessário fornecer uma equação adicional para descrever o comportamento da magnetização do ferrofluido. É razoável supor que tanto o campo magnético quanto o escoamento se apresentem como fatores de influência, uma vez que o torque magnético atua em contra-ponto ao torque mecânico produzido por cisalhamento do escoamento.

Partindo de hipóteses de quase-equilíbrio, com pequenas influências do escoamento, [Shliomis \(2002\)](#) propôs uma equação evolutiva para a magnetização em que quatro mecanismos são responsáveis por alterar o regime magnético do ferrofluido. Ela é dada por

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \frac{\mu_0}{6\eta\phi}\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (2.10.1)$$

O termo da esquerda representa a derivada material da magnetização \mathbf{M} . Inclui o transporte convectivo de magnetização, associado ao próprio movimento das partículas fluidas. O primeiro termo do lado direito foi incluído de maneira *ad hoc* e representa adequadamente o efeito da vorticidade $\boldsymbol{\xi}$ sobre a magnetização. É compatível com a noção fornecida por *Faxén*, no sentido de que o escoamento procura orientar o giro das partículas de acordo com a vorticidade. O próximo termo é diretamente associado à condição superparamagnética de equilíbrio. Quanto maior a diferença entre a magnetização instantânea e a de equilíbrio \mathbf{M}_0 , mais forte é esse termo no sentido de trazê-la para o equilíbrio. O parâmetro τ_B representa o tempo de relaxação browniano, como discutido na seção 2.5. A rigor, ele pode ser tanto o tempo de *Néel* quanto o browniano ou mesmo um efetivo entre ambos. Contudo, dada a escala diminuta de tempo associada ao mecanismo de *Néel*, $1/\tau_N \gg 1$, o que levaria a equação simplesmente a $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Em termos físicos, a magnetização relaxaria ao equilíbrio muito antes de ser influenciada por qualquer outro

mecanismo. Portanto, assume-se o tempo característico de relaxação como sendo τ_B , o que leva a uma escala compatível tanto com a formulação contínua quanto com o próprio escoamento. Por fim, o último termo representa o mecanismo de precessão magnética. É interessante ressaltar que ele é diretamente relacionado ao torque e possui à princípio um caráter restaurador, no sentido de alinhar campo e magnetização. O coeficiente ϕ representa a fração volumétrica de partículas.

A figura 6 mostra esquematicamente a competição entre os 2 mecanismos principais, a precessão magnética, associada ao torque e a interação com a vorticidade. Enquanto a precessão tenta restaurar a magnetização ao seu valor de equilíbrio juntamente com o termo de equilíbrio em si, a vorticidade acaba por diminuir a magnetização ao tentar alinhá-la consigo.

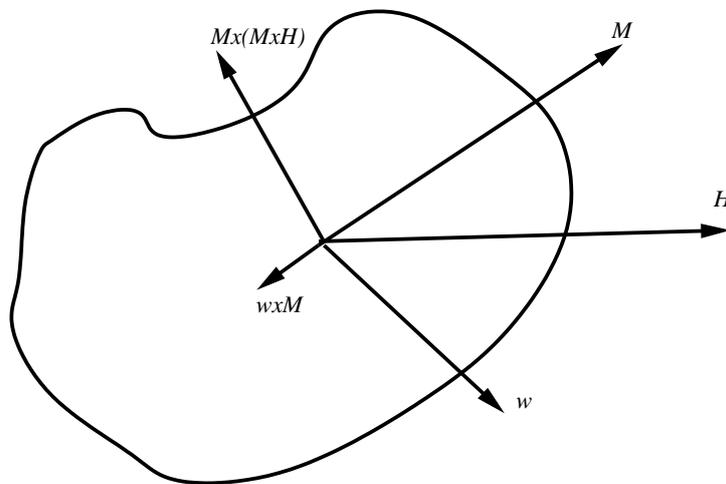


Figura 6 – Representação esquemática dos mecanismos de precessão e vorticidade sobre a partícula. O primeiro está no mesmo plano da magnetização M e do campo H , enquanto o segundo encontra-se perpendicular tanto à vorticidade w quanto à própria magnetização.

2.11 Escoamento não-inercial - Hipótese de unidirecionalidade

Seja considerar o escoamento de uma fina camada de fluido entre 2 superfícies. No exemplo em análise, o fluido escoar por um gradiente de pressão uniforme aplicado em uma das extremidades do *gap* entre as superfícies. Seja considerar como direção x a do escoamento e y a direção transversal a x , ainda no plano do escoamento. É bastante razoável supor que $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = w = 0$ se efeitos de borda lateral estão ausentes. Se a razão entre o comprimento L na direção do escoamento e o *gap* h entre as placas é pequena (i.e. $h/L \ll 1$), a equação da continuidade permite escrever que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{U}{L} \sim \frac{V}{h} \implies U \gg V. \quad (2.11.1)$$

Aqui, U e V são as escalas típicas de u e v , respectivamente. Se ambas as placas são paralelas e $v = 0$ sobre elas (impenetrabilidade), não há razão para existir velocidade

transversal à direção principal x . Com isso, ainda da equação da continuidade, observa-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.11.2)$$

Portanto, a velocidade é constante na direção do escoamento. Ela pode, à princípio, variar tanto em relação à z quanto em relação à y . O fato de u ser constante em relação a x implica na ausência de transporte convectivo de momento linear. Matematicamente, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Com isso, a equação do movimento para o fluido é dada simplesmente por

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.11.3)$$

em que ρ é a massa específica do fluido, aqui tomada como constante, $p = P + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{y}$ é a pressão modificada pela contribuição estática da gravidade e η é a viscosidade dinâmica do fluido, também tomada como constante.

Se o arranjo é simétrico em relação a z e efeitos de borda são desprezados, não há porque haver variação de u em relação a z . Nesse limite, a equação se resume simplesmente a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.11.4)$$

Em regime permanente, o perfil é parabólico e dado pela Lei de *Pouseuille* por

$$u(y) = \frac{G}{8\eta} (h^2 - 4y^2). \quad (2.11.5)$$

Contudo, mesmo em regime permanente, a região de entrada das placas ainda está sujeita à formação das camadas limites no desenvolvimento do perfil de velocidades. Uma análise de escala de forças inerciais e viscosas nessa região mostra que

$$\frac{|\text{forças inerciais}|}{|\text{forças viscosas}|} \sim \frac{\rho U^2 / L}{\dot{\gamma} \eta / h} = \frac{\rho U h}{\eta} \frac{h}{L} = Re \frac{h}{L}. \quad (2.11.6)$$

Isso significa que se essa relação $Re(h/L) \ll 1$, as forças viscosas dominam a região de desenvolvimento e o escoamento rapidamente assume o perfil parabólico. Como a razão de aspecto já é pequena, Re não necessita ser necessariamente pequeno. Mesmo em $Re \sim 1$, ainda se observa o desenvolvimento rápido do perfil.

2.11.1 Consequência da unidirecionalidade sobre o campo magnético e magnetização

O mesmo argumento, associado à hipótese de lubrificação, se aplica aqui. Observando as Leis de Maxwell para a magnetostática (seção 2.6), nota-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(M_x + H_x) + \frac{\partial}{\partial y}(M_y + H_y) &= 0 \\ \implies \left| \frac{\partial(M_x + H_x)/\partial x}{\partial(M_y + H_y)/\partial y} \right| &\sim \frac{h}{L} \ll 1 \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0 \\ \implies \left| \frac{\partial H_y/\partial x}{\partial H_x/\partial y} \right| &\sim \frac{h}{L} \ll 1, \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

se o fato de que $M_x \sim M_y \sim M_s$ e $H_x \sim H_y \sim H_0$ é considerado. Assim, as versões unidirecionais das equações de Maxwell são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_y + H_y) = 0 \quad (2.11.9)$$

e

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0. \quad (2.11.10)$$

Isso é equivalente a afirmar que

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = M_x(y) \\ M_y = M_y(y) \\ H_x = H_x(y) \\ H_y = H_y(y). \end{array} \right. \quad (2.11.11)$$

Ou seja, assim como a velocidade, tanto campo magnético quanto magnetização são apenas funções da coordenada espacial transversal (são perfis uniformes ao longo da direção do escoamento).

2.12 Métodos de solução de equações diferenciais

Após a própria modelagem e formulação do problema, surge a necessidade de se propor soluções para as equações obtidas. Casos mais simples possuem solução analítica explícita. Alguns outros métodos de solução exata, como por séries de potência, são empregáveis a uma classe de problemas, como a solução de Blasius para as equações da camada limite laminar (BACHELOR, 2000). Em outros casos, quando efeitos não-lineares são fracos, é possível propor aproximações na forma de expansões assintóticas em torno da

solução linear. Nesse caso, são empregados os chamados métodos de perturbação, discutidos a seguir. Por fim, quando se deseja obter uma solução mais geral para um problema não-linear, podem ser empregados métodos numéricos, que fornecem de maneira geral soluções convergentes para a solução exata em um número finito de pontos do domínio de cálculo.

2.12.1 Métodos de perturbação - Perturbação regular

Muitos dos problemas físicos apresentam modelos que dão origem à equações cuja solução não é trivial ou mesmo inexistente. Usualmente, essas dificuldades matemáticas têm origem em termos não-lineares associados a mecanismos particulares. Como exemplo, pode-se citar o movimento de um projétil sob ação da gravidade e da resistência do ar. Contudo, se a influência de tais mecanismos sobre o comportamento do sistema é pequena (a resistência do ar é pequena ante a gravidade, no exemplo) e algumas outras condições são satisfeitas, aproximações assintoticamente precisas podem ser obtidas (HINCH, 1991). Seja considerar uma equação diferencial ordinária (EDO) do tipo

$$F(y, y', y'', t, \epsilon) = 0, \quad (2.12.1)$$

tal que

$$\epsilon \ll 1 \quad (2.12.2)$$

é um parâmetro pequeno associado a eventuais não-linearidades na equação. Uma série de perturbação é definida como uma série de potências em ϵ do tipo

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + O(\epsilon^3). \quad (2.12.3)$$

Se a expressão acima é solução da EDO em análise, é razoável supor à priori que os primeiros termos dela constituem uma boa aproximação ou formalmente, uma solução ou aproximação por perturbação. Pode-se mostrar que, se a aproximação converge para a solução exata do problema não-perturbado ($F(y, y', y'', t, \epsilon = 0) = 0$) de maneira uniforme à medida que $\epsilon \rightarrow 0$, a solução obtida representa adequadamente o sistema físico no domínio restrito a que se propõe ($\epsilon \ll 1$).

É importante ressaltar que nem sempre se observa tal convergência da aproximação. Usualmente, soluções em que o primeiro termo não é adequadamente posto, soluções que não se aplicam a todo o domínio do problema (ex. problemas de *boundary layer*) e etc. De fato, a teoria dos métodos de perturbação se estende muito além de perturbações regulares e propõe aproximações para as soluções de uma série de problemas em diversas áreas.

O método de perturbação regular é um método proposto para contornar a não-linearidade de equações quando essas são pequenas. Para ilustrar tanto a aplicação quanto o método em si, considere a equação algébrica (LOGAN, 1997)

$$x^2 - 2\epsilon x - 3 = 0. \quad (2.12.4)$$

Em que $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno. Nesse caso, a solução da equação é trivial e dada por

$$x = \epsilon \pm \sqrt{3 + \epsilon}. \quad (2.12.5)$$

Se $\epsilon = 0$, a equação se reduz a $x^2 - 3 = 0$, cujas soluções são dadas por $x = \pm\sqrt{3}$. Para $\epsilon \neq 0$ porém pequeno, é intuitivo supor que a solução será a solução não perturbada acrescida de alguma contribuição do termo fraco. Supõe-se então uma solução do tipo

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.12.6)$$

Substituir a expressão na equação original resulta em

$$(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 - 2\epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) - 3 = 0. \quad (2.12.7)$$

Agrupar os termos em potências de ϵ fornece

$$x_0^2 - 3 - (2x_0x_1 - 2x_0)\epsilon + (x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_1)\epsilon^2 + \dots = 0. \quad (2.12.8)$$

Essa equação pode ser vista como um polinômio em ϵ idêntico a zero. Portanto, é seguro dizer que cada um de seus coeficientes é nulo. Isso dá origem a um sistema com 3 equações, cujas soluções são dadas por

$$\begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{3} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (2.12.9)$$

Compondo a solução, obtém-se

$$x = \pm\sqrt{3} + \epsilon \pm \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{3}} + \dots \quad (2.12.10)$$

Comparativamente, o polinômio de Taylor da solução em torno de $\epsilon = 0$ é dado por

$$x = \pm\sqrt{3} + \epsilon \pm \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{3}} + \dots \quad (2.12.11)$$

Ou seja, as soluções convergem à medida que $\epsilon \rightarrow 0$. É importante ressaltar que nesse exemplo, o problema não é fundamentalmente alterado se o termo contendo ϵ é desprezado. Em termos matemáticos, a característica quadrática da solução é mantida. Isso significa que $\epsilon \ll 1$ realmente representa uma perturbação regular do problema “original”, $x^2 - 3 = 0$.

Estender o método à solução de uma EDO é relativamente simples. Seja propor uma aproximação para a equação, já na forma adimensional

$$\frac{dy}{dt} - \epsilon y^2 + y = 0. \quad (2.12.12)$$

Equações como essa podem ser utilizadas para modelar a velocidade de um corpo em um meio resistivo. Como condição inicial, se supõe $y(0) = y_i$. Se $\epsilon = 0$, a equação se reduz a

$$\frac{dy}{dt} - y = 0, \quad (2.12.13)$$

cuja solução é imediata e dada por

$$y(t) = y_i e^{-t}. \quad (2.12.14)$$

Como feito anteriormente, supõe-se uma solução por expansão em Taylor em torno de $\epsilon = 0$ do tipo

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + O(\epsilon^3). \quad (2.12.15)$$

Substituir essa expressão na equação original leva a um polinômio em ϵ dado por

$$\begin{aligned} & \frac{dy_0}{dt} + y_0 \\ & + \left(\frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_0^2 \right) \epsilon \\ & + \left(\frac{dy_2}{dt} + y_2 - 2y_0 y_1 \right) \epsilon^2 \\ & + O(\epsilon^3) = 0. \end{aligned} \quad (2.12.16)$$

A solução proposta deve se aplicar em todos os pontos do domínio de cálculo, inclusive no ponto inicial. No instante $t = 0$,

$$y(0) = y_i = y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + O(\epsilon^3). \quad (2.12.17)$$

Por igualdade polinomial, observa-se que

$$\begin{aligned}y_0(0) &= y_i; \\y_1(0) &= 0. \\y_2(0) &= 0.\end{aligned}\tag{2.12.18}$$

Novamente, por igualdade polinomial, cada um dos coeficientes da equação obtida deve ser identicamente nulo. Fica nítido que a solução para y_0 é a própria solução do problema não perturbado,

$$y_0(t) = y_i e^{-t}.\tag{2.12.19}$$

O termo de ordem $O(\epsilon)$ fornece a EDO linear não-homogênea para y_1 , dada por

$$\frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_i^2 e^{-2t} = 0.\tag{2.12.20}$$

A solução desta equação é imediata e pode ser escrita como

$$y_1(t) = y_i^2 e^{-2t} (e^t - 1).\tag{2.12.21}$$

Similarmente, o termo de ordem ϵ^2 fornece

$$\frac{dy_2}{dt} + y_2 - 2y_i^3 e^{-3t} (e^t - 1) = 0,\tag{2.12.22}$$

cuja solução é igualmente simples,

$$y_2(t) = y_i^3 e^{-3t} (e^t - 1)^2.\tag{2.12.23}$$

Compor os primeiros três termos da solução na forma proposta resulta em

$$y(t) = y_i e^{-t} + [y_i^2 e^{-2t} (e^t - 1)]\epsilon + [y_i^3 e^{-3t} (e^t - 1)^2]\epsilon^2 + O(\epsilon^3).\tag{2.12.24}$$

Esse é um exemplo incomum em que uma solução analítica direta para a EDO não-linear está disponível e é relativamente simples. Se $y_i = 1$ para simplificar a notação,

$$y_{ex}(t) = \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon(e^{-t} - 1)},\tag{2.12.25}$$

cuja expansão em Taylor ao redor de $\epsilon = 0$ é dada por

$$y_{ex}(t) = e^{-t} - [e^{-t}(e^{-t} - 1)]\epsilon + [e^{-t}(e^{-t} - 1)^2]\epsilon^2 + O(\epsilon^3).\tag{2.12.26}$$

Para a mesma condição inicial, a aproximação por perturbação se torna

$$y(t) = e^{-t} + [e^{-2t}(e^t - 1)]\epsilon + [e^{-3t}(e^t - 1)^2]\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (2.12.27)$$

As expressões são idênticas e convergem no intervalo $t = [0, \infty]$, o que mostra que a solução assintótica obtida pelo método de perturbações regulares é adequada.

Em ambos os exemplos mostrados aqui, o método de perturbações regulares foi capaz de derivar expressões que representam as soluções reais do problema para $\epsilon \ll 1$. Logan (1997), de maneira mais geral e Hinch (1991), aplicado a problemas em Mecânica dos Fluidos, trazem uma série de outras abordagens capazes de produzir aproximações assintoticamente precisas para várias classes de problemas. Outras limitações do método de perturbações regulares são também discutidas em detalhes pelos autores.

2.12.2 Problema de valor de contorno - Método das diferenças finitas

Uma maneira alternativa de solucionar equações diferenciais possibilitada pelo rápido aumento do poder computacional das últimas décadas é composta pelos denominados métodos numéricos. De maneira geral, consistem em aproximações discretas para as equações dentro do domínio de cálculo proposto. O método aqui abordado, das diferenças finitas, é especialmente útil quando se lida com problemas de valor de contorno (PVC), em que a função procurada assume valores específicos em regiões determinadas do domínio. Um exemplo clássico desse tipo de problema é o escoamento entre placas utilizado por Newton para definir primordialmente a viscosidade de um fluido. Nesse problema, uma lâmina de fluido é inserida entre duas placas e uma delas é puxada com velocidade U . A outra permanece estática. Por interações moleculares, as camadas de fluido imediatamente próximas às placas estão nelas aderidas e conseqüentemente possuem a mesma velocidade delas. Matematicamente, isso representa um PVC, pois para determinar o perfil de velocidades na lâmina de fluido é necessário resolver uma equação diferencial cuja solução assume valores definidos em duas regiões distintas do domínio.

O método das diferenças finitas (MDF) se baseia no princípio de obter aproximações algébricas para as derivadas da função-solução um número N finito de pontos do domínio, de maneira que a aproximação convirja para a solução exata à medida que $N \rightarrow \infty$ (LEVEQUE, 2007).

A maneira mais conhecida e usual de aproximar pontos e derivadas de uma função $u = u(x)$ qualquer em torno de um ponto \bar{x} é escrever o polinômio de Taylor em torno desse ponto,

$$\begin{aligned} u(\bar{x} + h) &= u(\bar{x}) + u'(\bar{x})h + O(h^2); \\ u(\bar{x} - h) &= u(\bar{x}) - u'(\bar{x})h + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.12.28)$$

em que h é um passo constante de malha. Isolar $u'(\bar{x})$ nos dois casos resulta em

$$u'(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} + O(h) \\ \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} + O(h). \end{cases} \quad (2.12.29)$$

Essas expressões constituem as aproximações de primeira ordem adiantada e atrasada para $u'(\bar{x})$. As denominações “adiantada” e “atrasada” se referem ao fato de a derivada ser aproximada pelos valores da função em pontos posteriores ou anteriores ao ponto desejado, respectivamente.

Uma outra maneira de definir uma aproximação para a derivada de 1^a ordem é compondo as aproximações em série de Taylor até a segunda ordem.

$$\begin{aligned} u(\bar{x} + h) &= u(\bar{x}) + u'(\bar{x})h + \frac{u''(\bar{x})h^2}{2} + O(h^3); \\ u(\bar{x} - h) &= u(\bar{x}) - u'(\bar{x})h + \frac{u''(\bar{x})h^2}{2} + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.12.30)$$

Isolar $u''(\bar{x})$ em uma das expressões, substituir na outra e isolar $u'(\bar{x})$ fornece

$$u'(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h} + O(h^2). \quad (2.12.31)$$

A ordem de convergência quadrática surge a custo da avaliação de 2 pontos vizinhos a \bar{x} , em vez de apenas um. [LeVeque \(2007\)](#) apresenta testes numéricos e demonstra propriamente as ordens de convergência para as aproximações apresentadas.

Para se obter a derivada de 2^a ordem, o procedimento é análogo. Partindo das expansões em 2.12.30, basta isolar $u'(\bar{x})$ em uma delas e substituir na outra para encontrar

$$u''(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} - h)}{h^2} + O(h) \quad (2.12.32)$$

São necessários 2 pontos vizinhos a $u(\bar{x})$ para obter uma aproximação de apenas primeira ordem em h . É importante notar que todas as aproximações aqui apresentadas supõem passo de malha constante (i.e. $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$).

No caso de passo de malha variável, o procedimento é análogo, com apenas algumas complicações algébricas a mais. Seja considerar a mesma função $u = u(x)$ em torno de algum ponto \bar{x} . Contudo, agora serão considerados dois passos distintos h_1 e h_2 de tal sorte que $x_{i+1} - \bar{x} = h_1$ e $\bar{x} - x_{i-1} = h_2$. Isto é, h_1 é o passo acima de \bar{x} e h_2 é o passo abaixo. Expandir u em Taylor nas duas direções em torno de \bar{x} fornece

$$\begin{aligned} u(\bar{x} + h_1) &= u(\bar{x}) + u'(\bar{x})h_1 + \frac{u''(\bar{x})h_1^2}{2} + O(h_1^3); \\ u(\bar{x} - h_2) &= u(\bar{x}) - u'(\bar{x})h_2 + \frac{u''(\bar{x})h_2^2}{2} + O(h_2^3). \end{aligned} \quad (2.12.33)$$

As mesmas manipulações algébricas empregadas para definir a aproximação central para a derivada primeira (equação 2.12.31) são realizadas para se obter

$$\begin{aligned}
 u'(\bar{x}) &= \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)}u(\bar{x} + h_1) + \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}u(\bar{x}) - \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}u(\bar{x} - h_2) \\
 &+ O\left(\frac{h_1 h_2^2}{h_1 + h_2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.12.34}$$

A ordem de convergência quadrática se mantém, mesmo com passo variável. Repetir o procedimento adotado para obtenção da aproximação para a segunda derivada (equação 2.12.32) fornece

$$\begin{aligned}
 u''(\bar{x}) &= \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)}u(\bar{x} + h_1) - \frac{2}{h_1 h_2}u(\bar{x}) + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)}u(\bar{x} - h_2) \\
 &+ O\left(\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.12.35}$$

Essa aproximação ainda mantém a ordem linear de convergência. É bastante interessante notar que, se $h_1 = h_2$, as aproximações se reduzem exatamente às aproximações para passo constante. Isso é mais um indicativo de que elas foram corretamente obtidas.

Com essas aproximações e suas ordens de convergência definidas, qualquer PVC de 2^a ordem em regime permanente pode ter sua solução aproximada. É claro que também é necessário o emprego de algum método para a solução do sistema de equações algébricas resultante das aproximações. Alguns métodos e algoritmos de implementação são discutidos em detalhes em [Burden e Faires \(2004\)](#).

3 Formulação do Problema

Neste capítulo é apresentada a formulação do escoamento do ferrofluido entre placas paralelas sujeito a um campo externo homogêneo. Os parâmetros adimensionais são definidos e determinados nas equações.

3.1 Aspectos gerais

O problema em análise consiste no escoamento de um ferrofluido por entre duas placas paralelas. Esse é gerado por um gradiente de pressão uniforme aplicado entre as extremidades da placa. Além disso, uma fonte gera um campo homogêneo orientado na direção do escoamento, no sentido das velocidades. A figura 7 mostra uma representação esquemática do fenômeno e o sistema de coordenadas adotado na descrição.

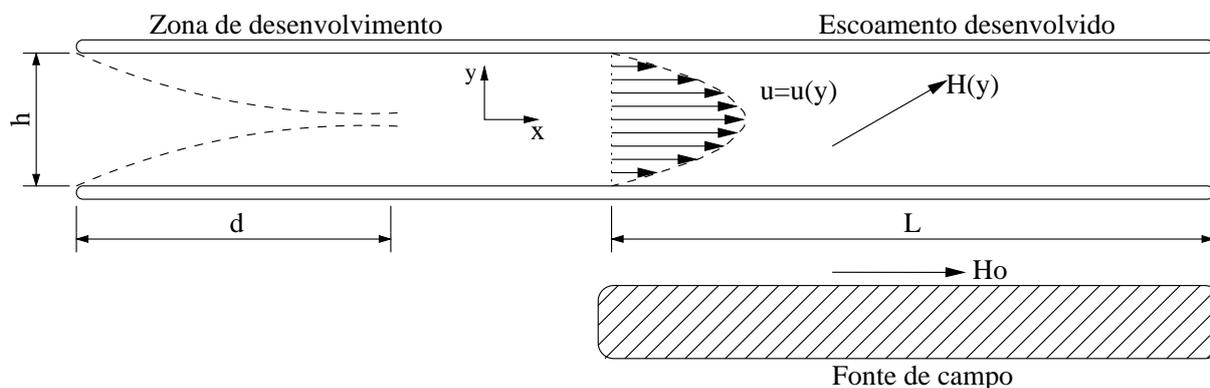


Figura 7 – Representação esquemática do escoamento, da bobina e do sistema de referência adotado. A fonte de campo representa uma bobina, tipicamente utilizada para obtenção de campos homogêneos sobre escoamentos em capilares. H_0 indica o campo produzido diretamente pela fonte de campo, externa ao fluido.

O campo externo aplicado sobre o ferrofluido é originalmente homogêneo. De maneira geral, ele pode assumir qualquer direção no plano e sua intensidade é H_0 . Isto é,

$$\mathbf{H}_0 = H_0(\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y), \tag{3.1.1}$$

em que θ é o ângulo entre H_0 e a horizontal, medido no sentido anti-horário.

3.1.1 Escoamento de lubrificação totalmente desenvolvido

A região de entrada das placas é delimitada por d . Ela se caracteriza por ser uma região em que efeitos inerciais ainda estão presentes e as camadas limites produzidas por cada uma das placas ainda não se encontraram para formar o perfil de velocidades. Uma análise de escala entre as forças inerciais e viscosas nessa região como a feita na equação 2.11.6 fornece

$$\frac{|\text{forças inerciais}|}{|\text{forças viscosas}|} = Re \frac{h}{L} \ll 1. \quad (3.1.2)$$

Essa condição é respeitada mesmo para $Re \sim 1$, visto que se supõe a razão de aspecto $h/L \ll 1$. Com isso, as forças viscosas dominam mesmo na região de desenvolvimento e o perfil é rapidamente formado. Isso permite afirmar que $d/L \ll 1$.

A pequena razão de aspecto, associada ao paralelismo entre as placas é também suficiente para se supor unidirecionalidade do escoamento. Pelo exposto na seção 2.11, é seguro assumir que

$$\mathbf{u} = u(y)\hat{e}_x. \quad (3.1.3)$$

Essa hipótese, como será visto adiante, significa que efeitos inerciais estão ausentes. Embora existam variações nas velocidades entre as lâminas de fluido, cada partícula fluida mantém sua velocidade constante ao longo do escoamento.

3.2 Solução do campo magnetostático unidirecional

As equações de Maxwell, associadas às condições de contorno magnéticas, permitem obter o campo \mathbf{H} atuante sobre o ferrofluido. Da análise de escalas proposta na seção 2.11,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = M_x(y) \\ M_y = M_y(y) \\ H_x = H_x(y) \\ H_y = H_y(y). \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Com isso, as equações de Maxwell no limite magnetostático (seção 2.6) se tornam

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \frac{\partial(H_y + M_y)}{\partial y} = 0 \quad (3.2.2)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \implies \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0. \quad (3.2.3)$$

As condições de contorno para as equações 3.2.2 e 3.2.3 (seção 2.7) são dadas por

$$\begin{cases} H_{xw} = H_{0x} \\ H_{yw} = H_{0y} - M_{yw}, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

em que o sub-índice w indica a placa inferior. Integrar a equação 3.2.2 do contorno até um ponto arbitrário no domínio fornece

$$\int_{H_{yw}}^{H_y} \frac{dH_y}{dy} dy + \int_{M_{yw}}^{M_y} \frac{dM_y}{dy} dy = 0 \implies \quad (3.2.5)$$

$$H_y(y) = H_{yw} - M_y(y) + M_{yw}.$$

Mas, das condições de contorno, $H_{yw} = H_{0y} - M_{yw}$. Assim,

$$H_y(y) = H_{0y} - M_y(y). \quad (3.2.6)$$

Para a equação 3.2.3, o procedimento é análogo.

$$\int_{H_{xw}}^{H_x} \frac{dH_x}{dy} dy = 0 \implies \quad (3.2.7)$$

$$H_x = H_{xw} = H_{0x} \forall \mathbf{x}.$$

Ou seja, o campo longitudinal é constante e igual ao campo externo aplicado. Já o campo transversal é influenciado pela magnetização e varia ao longo do perfil. Assim, o campo percebido pelo ferro fluido é dado por

$$\mathbf{H} = H_{0x} \hat{\mathbf{e}}_x + (H_{0y} - M_y(y)) \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (3.2.8)$$

Esse campo será empregado na formulação das equações hidrodinâmica e de evolução da magnetização.

3.3 Equação hidrodinâmica

Da unidirecionalidade de \mathbf{u} , é imediato concluir que o termo convectivo é nulo, i.e.

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.3.1)$$

Com isso, em regime permanente, a equação de Navier-Stokes para o ferrofluido se reduz a

$$\mathbf{0} = \eta^* \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mu_0 [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]. \quad (3.3.2)$$

Novamente, a unidirecionalidade da velocidade reduz o termo viscoso a

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{d^2 u}{dy^2} \hat{e}_x. \quad (3.3.3)$$

O termo magnético, considerando os fatos de que $\mathbf{M} = \mathbf{M}(y)$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(y)$ possui a forma da equação 3.2.8, é dado por

$$\begin{aligned} \mu_0 [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = \\ \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dy} (M_x H_y - M_y H_x) \hat{e}_x + \mu_0 M_y \frac{dH_y}{dy} \hat{e}_y. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Com isso, as componentes da equação hidrodinâmica no plano se tornam

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta^* \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dy} (M_x H_y - M_y H_x) = 0 \quad (3.3.5)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu_0 M_y \frac{dH_y}{dy}. \quad (3.3.6)$$

Considerando a forma do campo, expressa pela equação 3.2.8, é possível escrever

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{dM_y^2}{dy}. \quad (3.3.7)$$

Essa contribuição extra à pressão é de natureza hidrostática, pois atua transversalmente ao escoamento. Pode-se redefinir a pressão como sendo

$$p^* = p - \frac{\mu_0}{2} M_y^2. \quad (3.3.8)$$

De maneira que

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x - \mu_0 M_y \frac{dM_y}{dy} \hat{e}_y \quad (3.3.9)$$

e $p^* = p^*(x) = p_0 - Gx$, em que

$$G = -p^{*'}(x) = \frac{p_0 - p(x=L)}{L} / L \quad (3.3.10)$$

é o gradiente de pressão longitudinal constante responsável pelo escoamento. De todo o exposto, a forma final da equação hidrodinâmica que descreve o escoamento é dada por

$$\eta^* \frac{d^2 u}{dy^2} + G + \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dy} (M_x(H_{0y} - M_y) - M_y H_{0x}) = 0. \quad (3.3.11)$$

3.4 Equação de evolução da magnetização

Os fatos de que $\mathbf{M} = \mathbf{M}(y)$ e $\mathbf{u} = u(y)\hat{\mathbf{e}}_x$ levam à nulidade do termo convectivo na equação 2.10.1. Ou seja,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} &= \left(u \frac{\partial M_x}{\partial x} + v \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_x \\ &+ \left(u \frac{\partial M_y}{\partial x} + v \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_y = 0. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Com isso, a equação se torna

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \frac{\mu_0}{6\eta\phi} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (3.4.2)$$

Em termos das componentes no plano,

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dy} M_y - \frac{1}{\tau_B} (M_x - M_{0x}) - \frac{\mu_0}{6\eta\phi} [M_x M_y (H_{0y} - M_y) - H_{0x} M_y^2] = 0 \quad (3.4.3)$$

na direção x e

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dy} M_x + \frac{1}{\tau_B} (M_y - M_{0y}) + \frac{\mu_0}{6\eta\phi} [M_x M_y H_{0x} - (H_{0y} - M_y) M_x^2] = 0 \quad (3.4.4)$$

na direção y .

3.5 Magnetização de equilíbrio

Para soluções com fração volumétrica de até $\phi = 10\%$, a correção $O(\phi)$ proposta por IVANOV; KUZNETSOVA (2002) representa bem resultados experimentais. Portanto, a magnetização de equilíbrio empregada no modelo é dada por

$$\mathbf{M}_0 = M_s [\mathcal{L}(\alpha) + (\phi\lambda)E(\alpha)] \hat{\mathbf{h}} \quad (3.5.1)$$

em que

$$E(\alpha) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{24}{\alpha} \right) \mathcal{L}(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{csch}^2(\alpha) \right). \quad (3.5.2)$$

O parâmetro $\alpha = mH/k_B T$, que pode ser interpretado como um campo aplicado adimensional, é naturalmente proporcional ao módulo do campo \mathbf{H} no ponto em análise. Da equação 3.2.8, nota-se que

$$\alpha = \alpha_0 \frac{|\mathbf{H}|}{H_0} = \frac{m}{k_B T} [H_{0x}^2 + (H_{0y} - M_y)^2]^{1/2}. \quad (3.5.3)$$

Além disso, no caso geral, a magnetização de equilíbrio tem orientação igual à do campo aplicado. Tal fato leva à,

$$M_{0x} = M_0 \frac{H_{0x}}{[H_{0x}^2 + (H_{0y} - M_y)^2]^{1/2}} \quad (3.5.4)$$

e

$$M_{0y} = M_0 \frac{H_{0y} - M_y}{[H_{0x}^2 + (H_{0y} - M_y)^2]^{1/2}}. \quad (3.5.5)$$

Do exposto, nota-se que, nesse modelo, a magnetização de equilíbrio é função da própria magnetização do fluido, pois esta influencia localmente o campo. A solução simultânea deve considerar essas equações.

3.6 Adimensionalização proposta para as equações

De maneira a tornar a solução do problema mais abrangente, são definidos grupos adimensionais que relacionam os parâmetros físicos e geométricos do modelo. Eles também facilitam a interpretação dos resultados obtidos.

3.6.1 Escalas típicas

Com as equações governantes em suas versões finais, torna-se possível definir as escalas típicas para as variáveis do problema e os parâmetros adimensionais associados a

cada conjunto de fenômenos. As escalas tomadas se seguem:

$$\mathbf{u} \sim \bar{u};$$

$$\mathbf{M}, \mathbf{M}_0 \sim M_s;$$

$$\mathbf{H} \sim H_0;$$

$$\nabla \sim \frac{1}{h}; \tag{3.6.1}$$

$$p \sim \eta \dot{\gamma} = \eta \frac{\bar{u}}{h};$$

$$\boldsymbol{\xi} \sim \dot{\gamma} = \frac{\bar{u}}{h};$$

em que M_s é a magnetização de saturação do fluido, h é o *gap* entre as placas e $\dot{\gamma} = \bar{u}/h$ é a taxa média de cisalhamento do escoamento. Note que \bar{u} é a velocidade média do escoamento não perturbado (*Poiseuille*). O campo aplicado é adimensionalizado pelo valor aplicado externamente H_0 . As magnetizações por sua vez são adimensionalizadas pelo valor máximo, de maneira que seus módulos variem entre 0 e 1. Por fim, é importante ressaltar que a adimensionalização da pressão foi tomada por uma escala de forças viscosas e não de pressão dinâmica (*Bernoulli*), como é feito usualmente. Essa decisão se baseia no fato das forças hidrodinâmicas relevantes no modelo serem essencialmente viscosas. A consequência prática disso é o fato do número de *Re* ser suprimido das equações, como será visto a seguir.

3.6.2 Parâmetros adimensionais

As escalas típicas, quando aplicadas às equações governantes, fazem surgir os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{\rho \bar{u} h}{\eta}; \\
 Re_m &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 M_d H_0}{\eta \bar{u} / h} = \frac{9\alpha_0}{4Pe}; \\
 Pe &= \frac{\tau_B}{\tau_c} = \frac{a^2 / D}{h / \bar{u}} = \frac{6\pi\eta a^3 \bar{u}}{hk_B T}; \\
 \alpha_0 &= \mu_0 \frac{m H_0}{k_B T}; \\
 \chi_M &= \frac{M_s}{H_0} = \frac{6\lambda\phi}{\alpha_0}; \\
 G_\eta &= \frac{h^2}{\eta \bar{u}} G; \\
 G_\rho &= \frac{h}{\rho \bar{u}^2} G \implies G_\eta = Re G_\rho.
 \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

O parâmetro Re é o clássico número de Reynolds, que indica importância relativa entre forças convectivas ($\rho \bar{u}^2$) e viscosas ($\eta \bar{u} / h$). Já Re_m é definido como número de Reynolds magnético, pois compara forças magnéticas ($\mu_0 M_d H_0$) com viscosas (forças hidrodinâmicas dominantes no problema). É importante ressaltar que $M_d = M_s / \phi$ representa a magnetização *bulk* do sólido constituinte das partículas. O número de Péclet Pe compara, no contexto físico presente, o tempo de relaxação magnética ($\tau_B = a^2 / D = 6\pi\eta a / (kT)$) com uma escala de tempo característica do escoamento ($\tau_c = h / \bar{u}$). Ele indica o quão rápido age o mecanismo do escoamento em relação ao mecanismo de difusão Browniana. O parâmetro α_0 , como definido na seção 2.4, relaciona forças magnéticas (m é o momento de dipolo associado a uma partícula magnética e H_0 é o módulo do campo aplicado sobre o ferrofluido) e interações brownianas entre partícula e fluido (k_B representa a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do fluido, fatores que compõem a energia de atuação browniana) atuantes diretamente sobre a partícula magnética. A suscetibilidade magnética χ_M , apesar do nome, é apenas uma relação entre a magnetização de saturação do ferrofluido e o campo externo aplicado. Ela surge das escalas definidas para \mathbf{M} e \mathbf{H} serem distintas e é de fato uma função dos parâmetros independentes do problema (α_0 ,

Pe , ϕ e λ). Por fim, o parâmetro G_η é o gradiente adimensional de pressão. O sub-índice η indica que a adimensionalização utilizada emprega a escala viscosa de pressão ($p \sim \eta\dot{\gamma}$), e não a clássica escala convectiva ($p \sim \rho\bar{u}^2$).

3.6.3 Adimensionalização das equações

As escalas típicas, quando aplicadas nas equações 3.3.2 e 3.4.2 resultam em

$$\mathbf{0} = -\frac{\eta\bar{u}}{h^2}\nabla p + \frac{\eta^*\bar{u}}{h^2}\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0\phi M_d H_0}{h}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (3.6.3)$$

e

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2}\frac{M_s\bar{u}}{h}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M} - \frac{M_s}{\tau_B}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \frac{1}{6}\frac{\mu_0\phi M_d^2 H_0}{\eta\phi}\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (3.6.4)$$

Algumas manipulações algébricas permitem reescrever

$$\mathbf{0} = -\nabla p + f(\phi)\nabla^2\mathbf{u} + \frac{9\phi}{4}\frac{\alpha_0}{Pe}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (3.6.5)$$

e

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M})Pe - (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \frac{3\alpha_0}{4}\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (3.6.6)$$

em que $f(\phi) = 1 + 5\phi/2$ foi empregada para simplificar notação. Essas são as equações vetoriais adimensionais que regem o problema. Ficam claras as influências de cada parâmetro sobre a resposta do modelo. Quando aumentado α_0 , tanto o termo de precessão quanto o termo de equilíbrio são fortalecidos na equação. Além disso, o escoamento percebe efeitos magnéticos mais intensos. Por outro lado, aumentar Pe significa aumentar a influência do escoamento sobre o regime de magnetização. Altos Pe representam um regime muito fora do equilíbrio, em que o cisalhamento perturba de maneira influente a magnetização. A equação hidrodinâmica adimensional na componente longitudinal é dada por

$$f(\phi)\frac{d^2u}{dy^2} + G + \frac{9\phi}{4}\frac{\alpha_0}{Pe}\frac{d}{dy}(M_x(\lambda_y - \chi_M M_y) - M_y\lambda_x) = 0, \quad (3.6.7)$$

em que G foi empregado no lugar de G_η e $\lambda_x = \cos\theta$ e $\lambda_y = \sin\theta$, que indicam a direção do campo externo aplicado, foram empregados para simplificar a notação. As componentes escalares da equação de evolução, na versão adimensional, podem ser escritas como

$$\frac{Pe}{2}\frac{du}{dy}M_y - (M_x - M_{0x}) - \frac{3\alpha_0}{4}[M_x M_y(\lambda_y - \chi_M M_y) - \lambda_x M_y^2] = 0 \quad (3.6.8)$$

e

$$\frac{Pe}{2}\frac{du}{dy}M_x + (M_y - M_{0y}) + \frac{3\alpha_0}{4}[M_x M_y\lambda_x - (\lambda_y - \chi_M M_y)M_x^2] = 0. \quad (3.6.9)$$

Por fim, as magnetizações de equilíbrio adimensionais são dadas por

$$M_{0x} = \left[\mathcal{L}(\alpha) + (\phi\lambda) \frac{\pi}{3} \left(\frac{24}{\alpha} \right) \mathcal{L}(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{csch}^2(\alpha) \right) \right] \frac{\lambda_x}{[\lambda_x^2 + (\lambda_y - \chi_M M_y)^2]^{1/2}} \quad (3.6.10)$$

e

$$M_{0y} = \left[\mathcal{L}(\alpha) + (\phi\lambda) \frac{\pi}{3} \left(\frac{24}{\alpha} \right) \mathcal{L}(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{csch}^2(\alpha) \right) \right] \frac{\lambda_y - \chi_M M_y}{[\lambda_x^2 + (\lambda_y - \chi_M M_y)^2]^{1/2}}, \quad (3.6.11)$$

em que

$$\alpha = \alpha_0 [\lambda_x^2 + (\lambda_y - \chi_M M_y)^2]^{1/2}. \quad (3.6.12)$$

As equações , 3.6.7, 3.6.8, 3.6.9, 3.6.10 e 3.6.11 constituem as equações que descrevem o movimento e a magnetização do escoamento de ferrofluido em questão.

3.7 Definição de viscosidade relativa

Um parâmetro de fundamental relevância na descrição do problema é a viscosidade relativa adimensional (η_ϕ/η), definida a partir do escoamento original de Pouseuille. Para um fluido newtoniano em escoamento unidirecional entre placas paralelas, a equação de Navier-Stokes na direção x fornece

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -G, \quad (3.7.1)$$

em que $G = G_\eta$ foi empregado por simplicidade de notação. A solução dessa equação com as condições de contorno de não-escorregamento ($u(1/2) = u(-1/2) = 0$) fornece o clássico perfil parabólico de Pouseuille adimensional.

$$u(y) = \frac{-G}{8}(4y^2 - 1). \quad (3.7.2)$$

A vazão adimensional é dada por

$$Q = \frac{G}{12} = 1. \quad (3.7.3)$$

Em termos dimensionais,

$$\frac{Q^*}{\bar{u}ht} \bar{u}ht = \bar{u}ht \frac{1}{12} \frac{G^* h^2}{\eta \bar{u}} \implies \eta = \frac{G^* h^3 t}{12 Q^*}, \quad (3.7.4)$$

em que Q^* representa a vazão dimensional, G^* , o gradiente de pressão dimensional e t , largura das placas. Se efeitos associados à presença de partículas dispersas no fluido estão presentes (viscosidade de Einstein e efeitos magnéticos), é possível escrever

$$\eta_\phi = \frac{G_{ef}^* h^3 t}{12 Q^*}. \quad (3.7.5)$$

G_{ef}^* é o gradiente de pressão efetivo dimensional. Dividir a eq. 3.7.5 por η fornece

$$\frac{\eta_\phi}{\eta} = \frac{G_{ef}^* h^3 t}{12 Q^* \eta}. \quad (3.7.6)$$

Finalmente, multiplicando e dividindo-se o lado direito da eq. 3.7.6 por \bar{u} obtém-se

$$\frac{\eta_\phi}{\eta} = \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{u} h t}{Q^*} \right) \left(\frac{G_{ef}^* h^2}{\bar{u} \eta} \right) = \frac{G_{ef}}{12}. \quad (3.7.7)$$

A eq. 3.7.7 é a definição de viscosidade relativa utilizada para obtenção dos resultados. Ela representa propriamente uma viscosidade na parede, associada a perda de carga, pois se relaciona com o gradiente efetivo de pressão e conseqüentemente com o fator de atrito.

Para exibição dos resultados, definiu-se

$$\frac{\Delta \eta_\phi}{\eta} = \frac{\eta_\phi}{\eta} - \left(1 + \frac{5\phi}{2} \right), \quad (3.7.8)$$

de maneira a isolar os efeitos produzidos pelas interações magnéticas. Essa grandeza é a versão adimensional do que SHLIOMIS (2002) definiu como viscosidade rotacional (η_r). Como exposto na seção 4.1.2, a máxima ordem de grandeza dos resultados de viscosidade relativa é dada por

$$\frac{\eta_{\phi,sat}}{\eta} = \left(1 + \frac{5\phi}{2} \right) + \frac{3\phi}{2}. \quad (3.7.9)$$

A equação 3.7.8 define o parâmetro explicitado nas curvas de viscosidade relativa mostradas no capítulo 5.

4 Soluções Propostas

Neste capítulo são apresentadas as soluções propostas para o modelo do escoamento entre placas do ferrofluido. Foram desenvolvidas soluções assintóticas para regime de pequenas perturbações magnéticas e de saturação, e outra numérica de maneira a cobrir toda a faixa de variação dos parâmetros.

4.1 Soluções assintóticas

No escoamento de um ferrofluido como modelado neste trabalho, existem 2 mecanismos principais em competição: o mecanismo do escoamento, que se manifesta por meio de um torque mecânico associado à vorticidade, e o mecanismo magnético, que, por meio do torque magnético, busca orientar magnetização da partícula fluida e campo magnético aplicado. Observando-se as equações 3.6.7, 3.6.8 e 3.6.9, nota-se que, se $Pe \ll 1$, num regime de escoamento fraco, os termos associados à vorticidade são apenas perturbações na equação, enquanto precessão e equilíbrio agem conjuntamente no sentido de tornar $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$. Por outro lado, se $\alpha_0 \gg 1$, o termo de precessão domina completamente tanto o de vorticidade quanto o de equilíbrio e tende a alinhar magnetização e campo, numa configuração saturada, em termos de efeitos magnéticos. Nesta seção, serão exploradas soluções assintoticamente aproximadas para ambos os regimes.

4.1.1 Limite de $\alpha_0 \ll 1$ e $Pe \sim 1$

Seja considerar o limite em que $\alpha_0 \ll 1$ com $Pe \sim 1$ e $\phi \ll 1$, num regime diluído com campo externo horizontal ($\lambda_x = 1$ e $\lambda_y = 0$). Fisicamente, isso corresponde a um regime de pequenos efeitos magnéticos, em que tanto o termo de equilíbrio quanto o de precessão se apresentam como perturbações nas equações de magnetização, assim como o termo de força advinda do torque magnético na equação hidrodinâmica. Supondo regime

diluído, é possível escrever

$$\alpha_0 \chi_M = \frac{6\lambda\phi}{\alpha_0} \ll 1, \quad (4.1.1)$$

de maneira que

$$\alpha = \alpha_0(1 + \chi_M^2 M_y^2)^{1/2} \approx \alpha_0. \quad (4.1.2)$$

Além disso, como $\alpha_0 \ll 1$, as magnetizações de equilíbrio se tornam

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \frac{\alpha_0}{3}; \\ M_{0y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Se tomamos

$$\epsilon = \alpha_0, \quad (4.1.4)$$

as equações governantes se tornam

$$\begin{aligned} \left(\frac{3M_y^2}{4} + \frac{1}{3}\right)\epsilon + Pe\frac{u' M_y}{2} - M_x &= 0; \\ \frac{3M_x M_y}{4}\epsilon + M_y + Pe\frac{M_x u'}{2} &= 0; \\ G + u'' f - \frac{9M_y' \phi}{4Pe}\epsilon &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Se $\epsilon = 0$, a solução do sistema é direta e dada por

$$\begin{cases} M_{x0} = 0 \\ M_{y0} = 0 \\ u_0(y) = -\frac{G_0(4y^2 - 1)}{8f}. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Essa solução é fisicamente consistente e corresponde ao ferrofluido escoando livre de campo magnético. A ausência de histerese produz magnetização nula nesse caso. Supõem-se aproximações para a solução geral das equações do tipo

$$\begin{cases} M_x = M_{x0} + \epsilon M_{x1} + \epsilon^2 M_{x2} + O(\epsilon^3) \\ M_y = M_{y0} + \epsilon M_{y1} + \epsilon^2 M_{y2} + O(\epsilon^3) \\ u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + O(\epsilon^3) \\ G = G_0 + \epsilon G_1 + \epsilon^2 G_2 + O(\epsilon^3), \end{cases} \quad (4.1.7)$$

em que $M_{x0} = 0$, $M_{y0} = 0$ e $u_0 = u_0(y)$ tem a forma exposta em 4.1.6. Substituir essas expressões no sistema de equações 4.1.5 fornece para $O(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{G_0 M_{y1} P e y}{2f} - M_{x1} &= 0; \\ M_{y1} - \frac{G_0 M_{x1} P e y}{2f} &= 0; \\ G_1 + u_1'' f &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

cuja solução é dada por

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x1}(y) &= \frac{4f^2}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)} \\ M_{y1}(y) &= \frac{2G_0 P e f y}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)} \\ u_1(y) &= -\frac{G_1(4y^2 - 1)}{8f}. \end{aligned} \right. \quad (4.1.9)$$

Surgem as primeiras contribuições da não-linearidade e do acoplamento entre magnetização e vorticidade. Repetir o processo fornece, para os termos de $O(\epsilon^2)$,

$$\begin{aligned} -M_{x2} - \frac{G_0 M_{y2} P e y}{2f} - \frac{G_0 G_1 P e^2 y^2}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)} &= 0; \\ M_{y2} - \frac{2G_1 P e f y}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)} - \frac{G_0 M_{x2} P e y}{2f} &= 0; \\ G_2 + u_2'' f - \frac{3G_0 f \phi (4f^2 - G_0^2 P e^2 y^2)}{2(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

cuja solução é dada por

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x2}(y) &= -\frac{8G_0 G_1 P e^2 f^2 y^2}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)^2} \\ M_{y2}(y) &= \frac{2G_1 P e f y (4f^2 - G_0^2 P e^2 y^2)}{3(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2)^2} \\ u_2(y) &= \frac{G_0 G_2 P e^2 (1 - 4y^2)}{8G_0 P e^2 f} \\ &+ \frac{6f \phi \left[\ln(G_0^2 P e^2 y^2 + 4f^2) - \ln\left(\frac{G_0^2 P e^2}{4} + 4f^2\right) \right]}{8G_0 P e^2 f}. \end{aligned} \right. \quad (4.1.11)$$

Para obtenção dos perfis, basta considerar o gradiente adimensional de pressão original, ou seja,

$$G_0 = G; G_1 = G_2 = 0 \quad (4.1.12)$$

Com isso, a composição dos resultados expressos pelas equações 4.1.6, 4.1.9 e 4.1.11 na forma $u(y) = u_0(y) + u_1(y)\epsilon + u_2(y)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$ fornece o resultado para o perfil de velocidades assintótico. A vazão adimensional do escoamento é simplesmente a integral entre $y = -1/2$ e $y = 1/2$ do perfil de velocidades, a saber

$$Q = \int_{-1/2}^{1/2} u_0(y)dy + \epsilon \int_{-1/2}^{1/2} u_1(y)dy + \epsilon^2 \int_{-1/2}^{1/2} u_2(y)dy + O(\epsilon^3) \quad (4.1.13)$$

$$= Q_0(G_0) + \epsilon Q_1(G_1) + \epsilon^2 Q_2(G_2) + O(\epsilon^3).$$

Para obter o gradiente efetivo de pressão e a viscosidade relativa do escoamento, basta fazer $Q = 1$ e resolver para G_{ef} , ou seja, $Q_0 = 1$ e resolver para G_0 , $Q_1 = 0$ e resolver para G_1 e $Q_2 = 0$ e resolver para G_2 . Isso leva a

$$\frac{\eta_\phi}{\eta} = f + \left(\frac{\phi}{8Pe^2} - \frac{f^6 \phi \arctan\left(\frac{3Pe^2 f^2}{\sqrt{Pe^2 f^4}}\right)}{24(Pe^2 f^4)^{\frac{3}{2}}} \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (4.1.14)$$

É possível notar que, no limite em que $\epsilon = 0$, a viscosidade relativa é a própria viscosidade do fluido equivalente com a presença de partículas em suspensão (viscosidade de *Einstein*).

4.1.2 Limite de $\alpha_0 \gg 1$ com $Pe \sim 1$

Um outro limite que se mostra interessante é quando $\alpha_0 \gg 1$. Fisicamente, isso representa a saturação do ferrofluido. Espera-se que exista um limite de viscosidade associado ao fato de que a magnetização de do fluido eventualmente esbarra num limite de saturação. Se tomarmos um regime diluído ($\phi \ll 1$), é razoável supor que $\chi_M \sim 0$. Novamente considerando campo horizontal ($\lambda_x = 1$ e $\lambda_y = 0$), tem-se, para as magnetizações de equilíbrio,

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \mathcal{L}(\alpha_0); \\ M_{0y} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

em que $\mathcal{L}(\alpha_0)$ representa a equação de *Langevin* avaliada em α_0 . Tomando

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (4.1.16)$$

as equações governantes se tornam

$$\begin{aligned}
\epsilon \left(M_y^2 + \frac{Pe u' M_y}{2} + \mathcal{L}(\alpha_0) - M_x \right) + \frac{3M_y^2}{4} &= 0; \\
\epsilon \left(M_y + \frac{M_x Pe u'}{2} \right) + \frac{3M_x M_y}{4} &= 0; \\
\epsilon \left(G + u'' f \right) - \frac{9M_y' \phi}{4Pe} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Se $\epsilon = 0$, a solução do sistema é direta e dada por

$$\begin{cases} M_{x0} = \mathcal{L}(\alpha_0) \\ M_{y0} = 0. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

Essa solução é fisicamente consistente e corresponde ao limite em que o torque magnético conseguiu alinhar a magnetização completamente na direção do campo. Vale ressaltar que, nesse caso, $\mathcal{L}(\alpha_0 \rightarrow \infty) = 1$, o que corresponde à saturação completa do fluido. Supõem-se então soluções para as variáveis de interesse do problema do tipo

$$\begin{cases} M_x = M_{x0} + \epsilon M_{x1} + \epsilon^2 M_{x2} + O(\epsilon^3) \\ M_y = M_{y0} + \epsilon M_{y1} + \epsilon^2 M_{y2} + O(\epsilon^3) \\ u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + O(\epsilon^3) \\ G = G_0 + \epsilon G_1 + \epsilon^2 G_2 + O(\epsilon^3), \end{cases} \tag{4.1.19}$$

em que $M_{x0} = \mathcal{L}(\alpha_0)$ e $M_{y0} = 0$. Substituir essas expressões no sistema de equações 4.1.17 fornece para $O(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= 0; \\
\frac{3\mathcal{L}(\alpha_0)M_{y1}}{4} + \frac{\mathcal{L}(\alpha_0)Pe u_0'}{2} &= 0; \\
G_0 + u_0'' f - \frac{9M_{y1}' \phi}{4Pe} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{cases} M_{x1} = 0 \\ M_{y1}(y) = \frac{4G_0 Pe y}{3(2f + 3\phi)} \\ u_0(y) = -\frac{G_0(4y^2 - 1)}{4(2f + 3\phi)}. \end{cases} \tag{4.1.21}$$

Surgem as primeiras contribuições do acoplamento entre magnetização e vorticidade sobre a solução, embora a equação hidrodinâmica permaneça linear. Repetir o

processo fornece, para os termos de $O(\epsilon^2)$,

$$\begin{aligned} M_{x2} &= 0; \\ \frac{3\mathcal{L}(\alpha_0)M_{y2}}{4} + \frac{\mathcal{L}(\alpha_0)Pe u_1'}{2} + \frac{4G_0Pey}{3(2f+3\phi)} &= 0; \\ G_1 + u_1''f - \frac{9M_{y2}'\phi}{4Pe} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

cuja solução é dada por

$$\left\{ \begin{aligned} M_{x2} &= 0 \\ M_{y2} &= \frac{4Pey(6G_1\mathcal{L}(\alpha_0)f - 8G_0f + 9G_1\mathcal{L}(\alpha_0)\phi)}{9\mathcal{L}(\alpha_0)(2f+3\phi)^2} \\ u_1(y) &= -\frac{(4y^2-1)(4G_0\phi + 2G_1\mathcal{L}(\alpha_0)f + 3G_1\mathcal{L}(\alpha_0)\phi)}{4\mathcal{L}(\alpha_0)(2f+3\phi)^2}. \end{aligned} \right. \quad (4.1.23)$$

É interessante ressaltar que a ordem do perfil de velocidades obtido é menor que a dos perfis de magnetização. Isso ocorreu pois, nas equações, os termos associados ao escoamento são influenciados por termos de magnetização de ordem superior. Assim, para obtenção de u_2 , seria necessário determinar M_{x3} e M_{y3} . Para obtenção dos perfis, basta considerar o gradiente adimensional de pressão original, ou seja,

$$G_0 = G; G_1 = 0. \quad (4.1.24)$$

Com isso, a composição dos resultados expressos pelas equações 4.1.18, 4.1.21 e 4.1.23 na forma $u(y) = u_0(y) + u_1(y)\epsilon + O(\epsilon^2)$ fornece o resultado para o perfil de velocidades assintótico. A vazão adimensional do escoamento é simplesmente a integral entre $y = -1/2$ e $y = 1/2$ do perfil de velocidades, a saber

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-1/2}^{1/2} u_0(y)dy + \epsilon \int_{-1/2}^{1/2} u_1(y)dy + O(\epsilon^2) \\ &= Q_0(G_0) + \epsilon Q_1(G_1) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Para obter o gradiente efetivo de pressão e a viscosidade relativa do escoamento, basta fazer $Q = 1$ e resolver para G_{ef} , ou seja, $Q_0 = 1$ e resolver para G_0 , $Q_1 = 0$ e resolver para G_1 . Isso leva a

$$\frac{\eta_\phi}{\eta} = f + \frac{3\phi}{2} - \frac{2\phi}{\mathcal{L}(\alpha_0)}\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (4.1.26)$$

Um limite interessante surge quando $\epsilon \rightarrow 0$. Como mencionado anteriormente, $\mathcal{L}(\alpha_0) \rightarrow 1$ nesse caso e a expressão para a viscosidade relativa se reduz a

$$\frac{\eta_{\phi,sat}}{\eta} = f + \frac{3}{2}\phi. \quad (4.1.27)$$

É razoável supor que esse é o limite de saturação do ferrofluido. Em outras palavras, aumentar o campo aplicado é ineficiente quando a viscosidade atinge esse patamar. Como será visto adiante, a solução numérica recupera esse limite para $\alpha_0 \gg 1$, o que é mais um indício de que este é realmente o limite de saturação do ferrofluido. De fato, esse é o limite da viscosidade rotacional adimensional (η_r/η) quando $\alpha_0 \rightarrow \infty$ como definido por [Shliomis \(2002\)](#).

4.2 Solução numérica

As soluções assintóticas, apesar de representarem muito bem a solução do problema, são válidas em domínios muito restritos, em que efeitos magnéticos são pequenos ou grandes, face os hidrodinâmicos. Para abranger totalmente os limites do modelo, uma solução geral é necessária. Infelizmente, o problema não possui solução explícita que possa se propor a esse papel. Para contornar essa dificuldade, foi desenvolvida uma solução numérica por diferenças finitas. O método é brevemente abordado na seção [2.12](#) e minuciosamente explorado em [LeVeque \(2007\)](#).

4.2.1 Condições de contorno

Dois aspectos são centrais na formulação de equações de diferenças para um problema. O primeiro e mais evidente deles é composto pelas próprias equações diferenciais a serem resolvidas e o segundo, mais sutil porém igualmente importante, diz respeito às condições de contorno. Novamente, a condição de não escorregamento nas paredes será tomada como válida. Além disso, ao se observar as equações governantes ([3.6.7](#), [3.6.8](#) e [3.6.9](#)), nota-se que a existência de derivadas de magnetização traz uma dificuldade ao método, uma vez que seriam necessárias, a rigor, condições de contorno para a magnetização. Seja representar novamente as equações a serem resolvidas.

$$f(\phi) \frac{d^2 u}{dy^2} + G + \frac{9\phi}{4} \frac{\alpha_0}{Pe} \frac{d}{dy} (M_x(\lambda_y - \chi_M M_y) - M_y \lambda_x) = 0; \quad (4.2.1)$$

$$\frac{1}{2} Pe \frac{du}{dy} M_y - (M_x - M_{0x}) - \frac{3\alpha_0}{4} [M_x M_y (\lambda_y - \chi_M M_y) - \lambda_x M_y^2] = 0; \quad (4.2.2)$$

$$\frac{1}{2} Pe \frac{du}{dy} M_x + (M_y - M_{0y}) + \frac{3\alpha_0}{4} [M_x M_y \lambda_x - (\lambda_y - \chi_M M_y) M_x^2] = 0. \quad (4.2.3)$$

As equações de magnetização são algébricas senão pelo termo associado ao acoplamento com a vorticidade. Como as únicas condições de contorno tomadas como válidas a princípio são as de não escorregamento nas paredes, o problema fica em aberto. A solução proposta para contornar esse problema é extrapolar linearmente na parede a derivada da velocidade du/dy que surge nas equações de magnetização. Assim, as condições de contorno tomadas como válidas são

$$\begin{cases} u(y = -1/2) = 0 \\ u(y = 1/2) = 0. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

4.2.2 Discretização do domínio de solução

Com as equações e condições de contorno definidas, o próximo passo é definir uma malha na qual as derivadas das funções serão aproximadas. A princípio, supõe-se que uma malha linear simples será bastante adequada à solução.

Faz-se necessário definir qual parâmetro de refinamento da malha será empregado: o número N de pontos ou o passo de malha h . Por conveniência, adotou-se o número de pontos na malha N , pois é um parâmetro mais intuitivo. Isso facilitará os testes numéricos a serem realizados para verificar a ordem de convergência da solução.

O segundo aspecto a ser considerado é o fato das condições de contorno existentes serem aplicáveis nas extremidades do domínio e de ser necessário tomar alguma providência em relação ao fato de aparecerem derivadas de velocidade nas equações de magnetização. Uma maneira de contornar esse problema é extrapolar linearmente a derivada (supor evolução linear nas imediações da parede). Isso torna possível aproximar a solução do problema sem vínculos desnecessários. Além disso, espera-se que, quanto mais refinada a malha, mais a extrapolação se aproxime do valor real da derivada na parede u'_w .

Portanto, a malha é definida pela simples divisão do segmento unitário ($y = -1/2$ a $y = 1/2$) em N pontos com passo de malha h . A figura 8 mostra um desenho esquemático que ilustra a malha adotada na solução. O índice $P_c = (N + 1)/2$ denota o ponto central da malha. O passo de malha $h = 1/(N - 1)$ é determinado a partir do número de pontos definido.

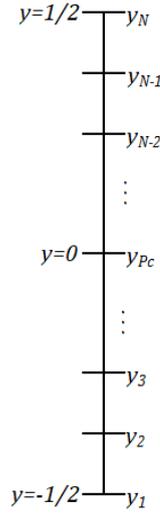


Figura 8 – Representação esquemática da malha empregada na solução numérica do escoamento. $h = y_{i+1} - y_i$ é o passo. $N = 1/h + 1$ é o número total de pontos da malha e $Pc = (N + 1)/2$ é o ponto central da malha.

4.2.3 Refinamento local da malha - extrapolação linear para u'_w

A presença da derivada da velocidade du/dy nas equações de evolução da magnetização causa, como comentado anteriormente, um problema de natureza numérica. Não é possível definir um sistema de equações algébricas de diferenças com solução única sem que uma condição de contorno seja imposta para a derivada de velocidade ou magnetizações no domínio. Para contornar esse problema, foi proposta uma extrapolação linear para u'_w na forma

$$u'_w = u'(y_1) = 2u'(y_2) - u'(y_3). \quad (4.2.5)$$

Ou seja, supôs-se que u' varia linearmente e com taxa dada pela média entre os 2 pontos imediatamente acima da parede. Em termos da velocidade, tem-se

$$u'_w = \frac{1}{h_w}(3u_2 - u_3), \quad (4.2.6)$$

em que h_w representa o passo de malha na região da parede. Os índices 2 e 3 representam a velocidade calculada nos novos pontos criados no refinamento, logo acima do nó da parede y_1 . A figura 9 mostra uma representação esquemática do refinamento proposto.

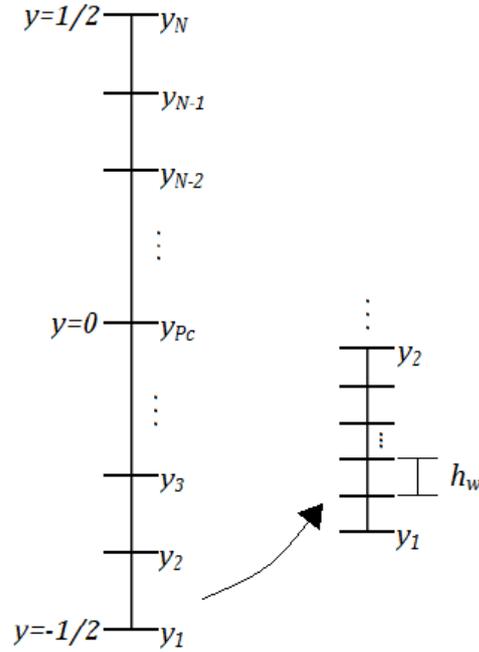


Figura 9 – Representação esquemática do refinamento de malha proposto. h_w é o passo de refinamento na região da parede e N_w , o número de pontos adicionados nessa região.

Embora o refinamento proposto seja uniforme, existe um ponto de transição entre os 2 passos de malha em que as aproximações de diferenças precisam ser adaptadas por meio das expressões 2.12.33 e 2.12.34. Foi realizado um teste numérico de convergência nos moldes dos já apresentados para confirmar se a solução converge corretamente para um valor u' na parede e também para obtenção de um valor de referência para comparação com a solução com malha uniforme. Os dados coletados e o ajuste feito são exibidos na figura 10.

4.2.4 Equações de diferenças

Com as condições de contorno e malha definidas, é possível construir o sistema de equações de diferenças que aproxima a solução do problema. Partindo primeiramente das condições de contorno, define-se

$$\begin{aligned} u_1 &= 0; \\ u_N &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Partindo dessas equações, é imediato notar que, na equação do movimento, as aproximações podem empregar pontos vizinhos tanto acima quanto abaixo. Definem-se

então as aproximações de diferenças a serem empregadas nesse caso como

$$D_2(u) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2);$$

$$D_c(M) = \frac{M_{x(i+1)}(\lambda_y - \chi_M M_{y(i+1)}) - \lambda_x M_{y(i+1)}}{2h} - \frac{M_{x(i-1)}(\lambda_y - \chi_M M_{y(i-1)}) - \lambda_x M_{y(i-1)}}{2h} + O(h^2). \quad (4.2.8)$$

As equações de diferenças para a equação do movimento são então dadas por

$$u_i = 0, \quad i = 1;$$

$$f D_2(u) + G - \frac{9\phi}{4} \frac{\alpha_0}{Pe} D_c(M) = 0, \quad 1 < i < N; \quad (4.2.9)$$

$$u_i = 0, \quad i = N.$$

Para as equações de magnetização, o procedimento é análogo. Como se tem apenas um contorno para a derivada de velocidade (a extrapolação na parede inferior), é possível definir aproximações para a derivada de u com base em apenas um ponto vizinho. A aproximação de diferenças empregada é, portanto,

$$D_-(u) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h). \quad (4.2.10)$$

Com isso, torna-se possível montar o sistema de equações de diferenças a ser resolvido no sentido de aproximar a solução do problema, que compreende também

$$\frac{1}{2} Pe M_{y(i)} u'_w - (M_{x(i)} - M_{0x(i)}) - \frac{3\alpha_0}{4} [M_{x(i)} M_{y(i)} (\lambda_y - \chi_M M_{y(i)}) - \lambda_x M_{y(i)}^2] = 0, \quad i = 1; \quad (4.2.11)$$

$$\frac{1}{2} Pe M_{y(i)} D_-(u) - (M_{x(i)} - M_{0x(i)}) - \frac{3\alpha_0}{4} [M_{x(i)} M_{y(i)} (\lambda_y - \chi_M M_{y(i)}) - \lambda_x M_{y(i)}^2] = 0, \quad 1 < i \leq N;$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}PeM_{x(i)}u'_w + (M_{y(i)} - M_{0y(i)}) \\ & + \frac{3\alpha_0}{4}[M_{x(i)}M_{y(i)}\lambda_x - (\lambda_y - \chi_M M_{y(i)})M_{x(i)}^2] = 0, \quad i = 1; \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}PeM_{x(i)}D_-(u) + (M_{y(i)} - M_{0y(i)}) \\ & + \frac{3\alpha_0}{4}[M_{x(i)}M_{y(i)}\lambda_x - (\lambda_y - \chi_M M_{y(i)})M_{x(i)}^2] = 0, \quad 1 < i \leq N. \end{aligned}$$

A solução do sistema de equações algébricas definido por 4.2.9, 4.2.11 e 4.2.12 produz um vetor de dados que aproxima a solução exata do sistema de EDO's em análise.

4.2.5 Solução do sistema de equações resultante

Uma vez determinadas as equações de diferenças, é necessário resolvê-las ou aproximar sua solução por um método numérico. O método empregado foi o método de Newton para sistemas de equações, detalhado em BURDEN; FAIRES (2004). A solução do sistema algébrico foi obtida pela definição do vetor de funções como sendo

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{M}_x) \\ \mathbf{f}(\mathbf{M}_y) \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

em que $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, $\mathbf{f}(\mathbf{M}_x)$, $\mathbf{f}(\mathbf{M}_y)$ são as equações de diferenças formuladas para as equações do movimento e magnetização em x e y , respectivamente. O vetor de incógnitas é definido similarmente como sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \end{bmatrix}. \quad (4.2.14)$$

Pelo método de Newton, a sequência

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{r}, \quad (4.2.15)$$

em que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \quad (4.2.16)$$

e \mathbf{J} é a matriz jacobiana de \mathbf{F} , converge para a solução do sistema algébrico em análise. Esse método é convergente desde que uma aproximação inicial adequada seja fornecida. O cálculo de \mathbf{J} foi feito numericamente a partir do emprego de aproximações de diferenças para as derivadas de \mathbf{F} em cada uma das incógnitas.

4.2.6 Determinação numérica da viscosidade relativa

Após a solução das equações de diferenças, obtém-se conjuntos de dados referentes aos perfis de velocidade e magnetização. A ausência de expressões analíticas demanda a integração numérica e solução da equação $Q(G_{ef}) - 1 = 0$ para obtenção do gradiente efetivo de pressão. Com isso, é necessário empregar mais procedimentos numéricos para aproximação dos resultados de viscosidade relativa. Para a vazão, empregou-se simplesmente um esquema de integração por trapézios, a partir da equação que se segue (RUGGIERO; LOPES, 1996),

$$Q = \int_{-1/2}^{1/2} u(y)dy \approx \frac{h}{2} \{u^1 + 2[u^2 + u^3 + \dots + u^{N-1}] + u^N\} + O(h^3). \quad (4.2.17)$$

Com a possibilidade de obtenção da vazão, empregou-se o método da secante para obtenção do gradiente efetivo de pressão. Um resumo do método é apresentado abaixo

1. Input dos parâmetros físicos (α , Pe , ϕ e Re_m) e dos parâmetros numéricos (h e tol);
2. Obtenção de \mathbf{u} para $G_{ef}^{(k-1)} = 12$;
3. Obtenção de $Q^{(k-1)} = \int \mathbf{u}dy$;
4. Se $Q^{(k-1)} - 1 \leq tol \rightarrow G_{ef} = G_{ef}^{(k-1)}$ e Fim;
5. Segunda aproximação $G_{ef}^{(k)} = G_{ef}^{(k-1)} / Q^{(k-1)}$;
6. Obtenção de \mathbf{u} para $G_{ef}^{(k)}$;
7. Obtenção de $Q^{(k)} = \int \mathbf{u}dy$;
8. Se $Q^{(k)} - 1 \leq tol \rightarrow G_{ef} = G_{ef}^{(k)}$ e Fim;
9. $G_{ef}^{(k+1)} = \frac{G_{ef}^{(k)}(Q^{(k-1)} - 1) - G_{ef}^{(k-1)}(Q^{(k)} - 1)}{Q^{(k)} - Q^{(k-1)}}$
10. Obtenção de \mathbf{u} para $G_{ef}^{(k+1)}$;
11. Obtenção de $Q^{(k+1)} = \int \mathbf{u}dy$;
12. Se $Q^{(k+1)} - 1 \leq tol \rightarrow G_{ef} = G_{ef}^{(k+1)}$ e Fim;
13. $G_{ef}^{(k-1)} = G_{ef}^{(k)}$, $Q^{(k-1)} = Q^{(k)}$, $G_{ef}^{(k)} = G_{ef}^{(k+1)}$ e $Q^{(k)} = Q^{(k+1)}$;
14. Volta ao passo 9.

Esse método é de fato uma aproximação do método de Newton-Raphson quando a derivada da função é de difícil obtenção. Ruggiero e Lopes (1996) mostram que a convergência nesse caso é superlinear. Com o valor de G_{ef} em mãos, a obtenção da viscosidade relativa é imediata pela equação 3.7.7.

4.2.7 Testes do código

Como discutido na seção 2.12, as equações de diferenças produzem aproximações convergentes para os valores exatos à medida que o passo de malha diminui. A ordem de convergência é proporcional à ordem da derivada e à quantidade de pontos vizinhos necessários à sua obtenção (LEVEQUE, 2007). Observando as equações de diferenças obtidas para o problema em análise (4.2.9, 4.2.11 e 4.2.12), nota-se que foram empregadas tanto aproximações de primeira ordem (2.12.29 e 2.12.32) quanto de segunda ordem (2.12.31). Isso cria a expectativa da convergência total do método estar entre a primeira e a segunda ordem em relação ao passo h .

Para testar o código, foi proposto um método de auto-avaliação utilizando os próprios resultados gerados. Primeiramente, testou-se a convergência do valor de u'_w de maneira a se aferir o comportamento estável do código. A figura 10 mostra os valores calculados para u'_w com vários tamanhos de refinamento local de malha. É possível notar a convergência aproximadamente linear para um valor de referência.

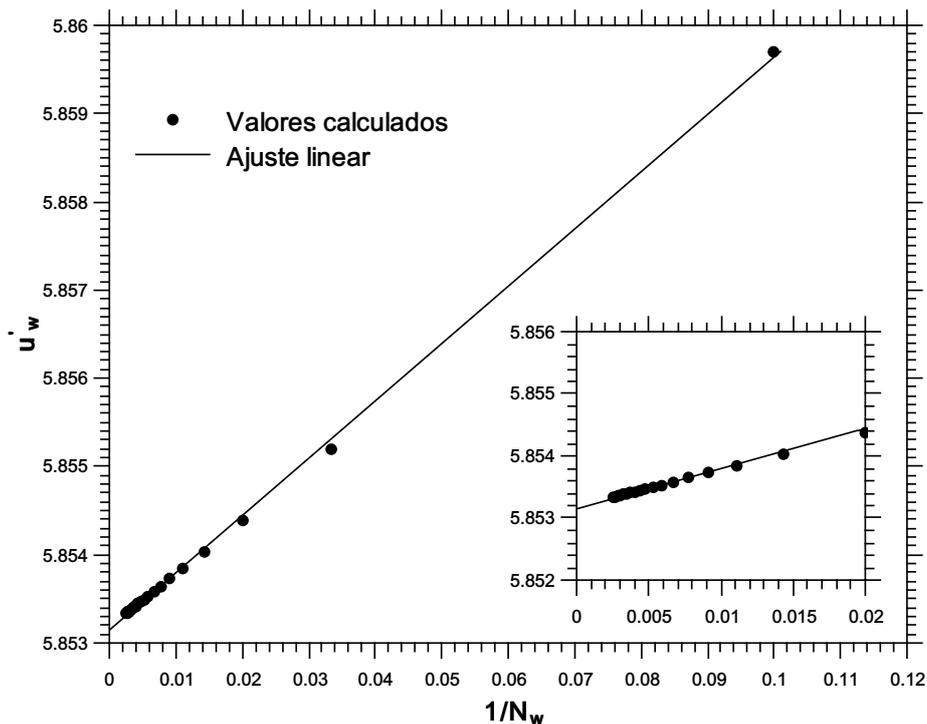


Figura 10 – Derivadas de velocidade na parede u'_w calculadas para uma série de refinamentos. Foi empregada malha principal com $N = 101$ pontos. N_w é o número de pontos na região da parede. O ajuste empregado na extrapolação foi linear com equação dada por $y = 0.06494x + 5.8531$. O coeficiente de determinação $R^2 = 0.999379$ indica um excelente ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $\alpha_0 = 1$, $Pe = 1$, $\phi = 0.05$ e $\lambda = 1$.

Com a referência em mãos, torna-se possível fazer uma estimativa dos erros associados ao tamanho da malha empregada. Foram calculados como $e = u'_w(N_w) - u'_{w(ref)}$ e $e_{perc.} = e/u'_{w(ref)}$ e são exibidos na figura 11. Os erros convergem para zero de maneira aproximadamente linear, como esperado. Nota-se que a diferença percentual é menor

que 0.05% para $N_w = 25$ pontos. Com isso, conclui-se que uma malha linear com passo $h < 0.004$ fornecerá resultados adequados, do ponto de vista de erros de aproximação numérica.

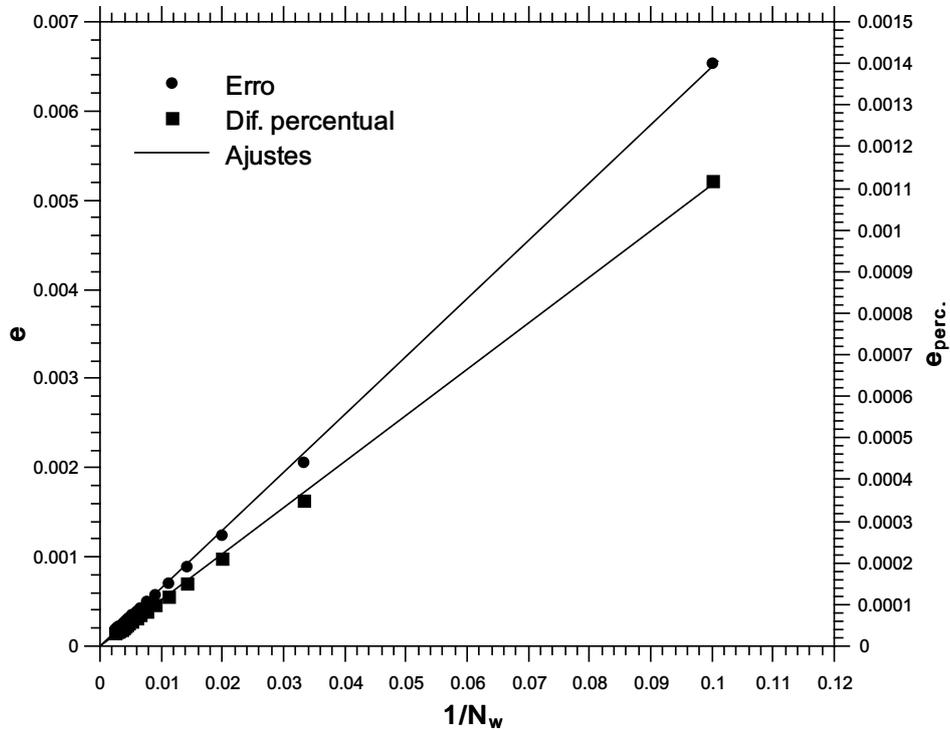


Figura 11 – Erros absolutos e diferenças percentuais entre os valores calculados e o valor de referência para u'_w . N_w é o número de pontos utilizados em cada determinação. As equações de ajuste, em *power law*, são dadas por $y = 0.06494x^{1.00240} + 2.84822x10^{-7}$ para os erros absolutos e por $y = 0.01108x^{1.00213} + 1.25589x10^{-7}$, para as diferenças percentuais. Os coeficientes de determinação $R^2 = 0.999379$ e $R^2 = 0.999392$ indicam excelentes ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $Pe = 1$, $\phi = 0.05$ e $\alpha_0 = 1$.

Em seguida, foram obtidos perfis de velocidades utilizando uma série de tamanhos de malha uniforme. Os resultados de velocidade máxima do perfil foram coletados e então os resultados foram extrapolados considerando a ordem de convergência esperada para o método. A figura 12 mostra o resultado da extrapolação, de $u_{m\acute{a}x} = 1,3988$, a partir dos pontos calculados.

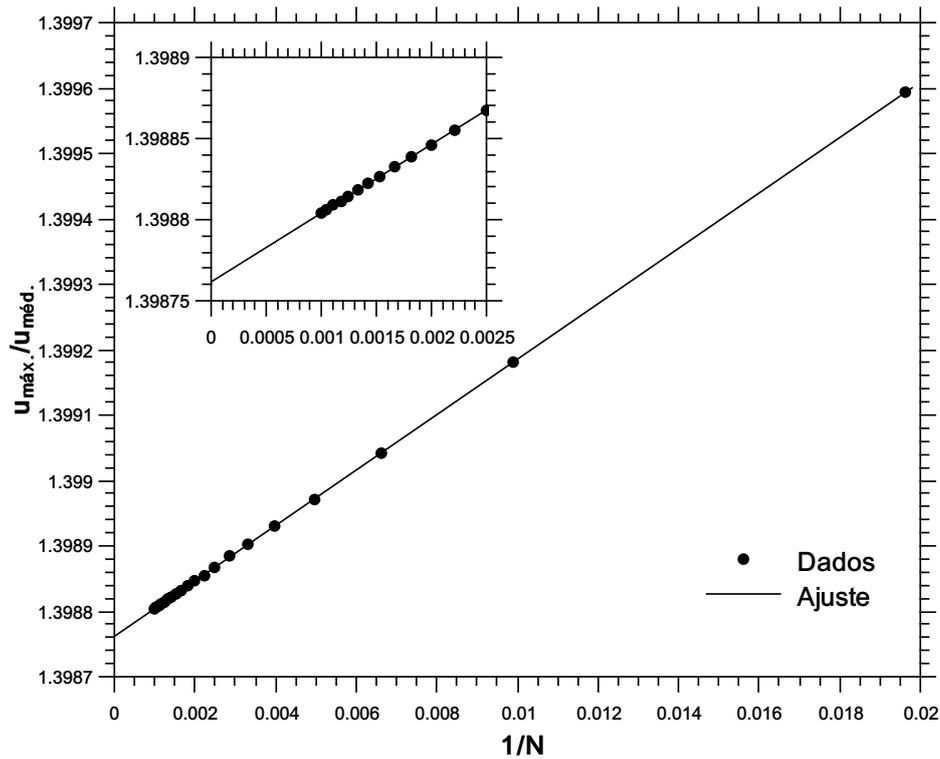


Figura 12 – *Plot* das velocidades máximas calculadas para uma série de tamanhos de malha. N é o número de pontos utilizados em cada determinação. O ajuste empregado na extrapolação foi linear com equação dada por $y = 0,00424x + 1,39876$. O coeficiente de determinação $R^2 = 0,999982$ indica um excelente ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $Pe = 1$, $\phi = 0.05$ e $\alpha_0 = 1$.

Com a referência em mãos, é possível determinar erros e diferenças percentuais, e assim determinar a ordem de convergência real do código. A figura 13 mostra os erros ($u_{máx}^j - u_{máx}^{ref}$) e diferenças percentuais ($(u_{máx}^j - u_{máx}^{ref})/u_{máx}^j$) e os ajustes em *power law* propostos para os conjuntos de dados. Os expoentes pouco acima de 1 evidenciam o caráter primordialmente de primeira ordem das aproximações, com alguma influência de aproximações de segunda ordem.

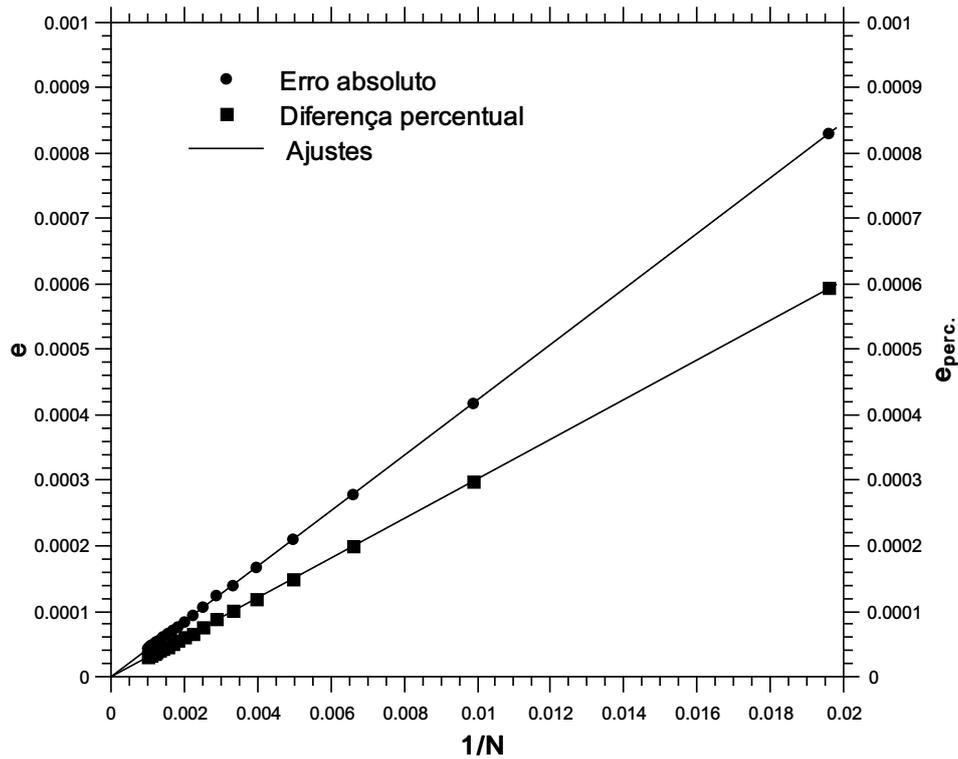


Figura 13 – Erros absolutos e diferenças percentuais entre os valores calculados e o valor de referência para as velocidades máximas. N é o número de pontos utilizados em cada determinação. As equações de ajuste, em lei de potência, são dadas por $y = 0,04278x^{1,00240}$ para os erros absolutos e por $y = 0,03053x^{1,00213}$, para as diferenças percentuais. Os coeficientes de determinação $R^2 = 0,999985$ e $R^2 = 0,999986$ indicam excelentes ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $\alpha_0 = 1$, $Pe = 1$ e $\phi = 0,05$.

De maneira a capturar os efeitos do acoplamento entre os 3 métodos numéricos empregados na obtenção da viscosidade relativa, o mesmo foi feito para este caso. Seguiu-se o mesmo procedimento de teste para a viscosidade relativa: determinou-se um valor de referência por extrapolação e a partir dele, os erros absolutos e diferenças percentuais. A figura 14 exibe os valores calculados e o ajuste proposto para extrapolação no limite em que $N \rightarrow \infty$. Curiosamente, o ajuste linear não forneceu bons resultados. Aplicou-se então um ajuste do tipo lei de potência com um coeficiente independente e obteve-se um excelente ajuste. O valor de referência obtido para a viscosidade relativa foi de $(\eta_\phi/\eta)_{ref} = 1,0589$.

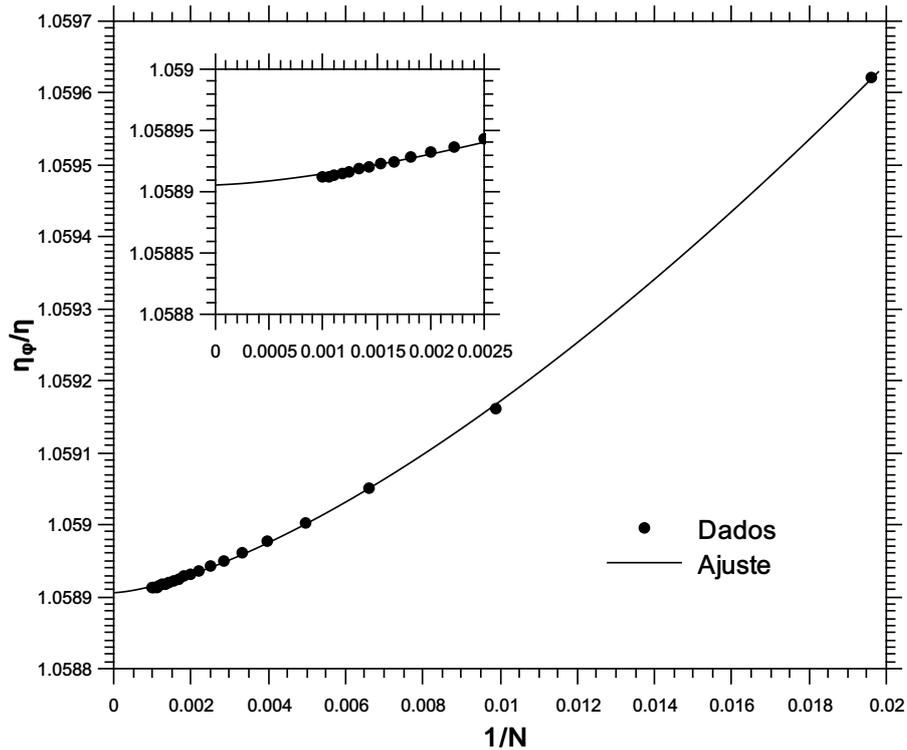


Figura 14 – Viscosidades relativas calculadas para uma série de tamanhos de malha. N é o número de pontos utilizados em cada determinação. O ajuste empregado na extrapolação foi do tipo lei de potência com equação dada por $y = 0,22698x^{1,46537} + 1,05891$. O coeficiente de determinação $R^2 = 0.99977$ indica um excelente ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $\alpha_0 = 1$, $Pe = 1$, $\phi = 0.05$.

Seguindo-se a mesma sequência, os erros absolutos e diferenças percentuais para as viscosidades relativas foram calculados. A figura 15 exibe os resultados. Por alguma razão, o acoplamento entre os métodos produziu uma aceleração na convergência dos resultados, como indicado pelos expoentes de ajuste $\sim 1,5$. Isso indica que a viscosidade relativa é ainda mais sensível ao tamanho da malha do que os pontos do perfil em si.

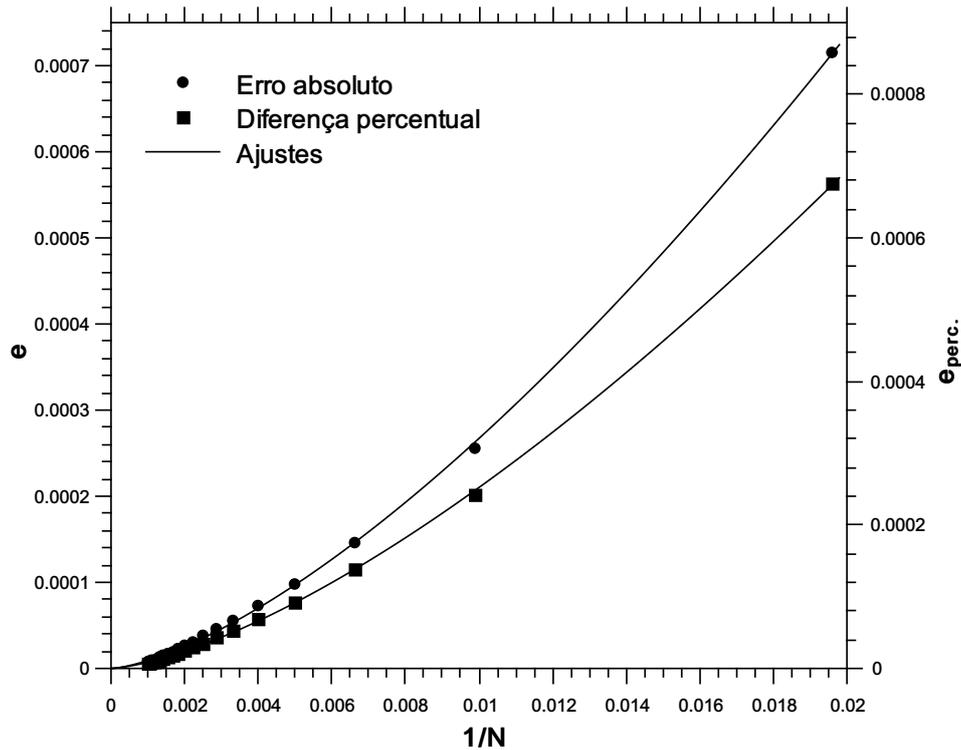


Figura 15 – Erros absolutos e diferenças percentuais entre os valores calculados e o valor de referência para as viscosidades relativas. N é o número de pontos utilizados em cada determinação. As equações de ajuste, em lei de potência, são dadas por $y = 0,22314x^{1,46092}$ para os erros absolutos e por $y = 0,21022x^{1,46048}$, para as diferenças percentuais. Os coeficientes de determinação $R^2 = 0,999767$ e $R^2 = 0,999768$ indicam excelentes ajuste aos dados. Os parâmetros físicos foram fixados em $\alpha_0 = 1$, $Pe = 1$, $\phi = 0,01$.

Conclui-se que qualquer valor de passo $h < 0,005$ produz excelentes resultados. As diferenças percentuais ficam abaixo de $0,2\%$ em ambos os casos, com essa escolha. Como o passo recomendado para a região da parede foi de $h < 0,004$, qualquer passo menor que esse é suficiente para obtenção de resultados considerados convergentes. Dada a simplicidade do código, se adotou $h = 0,0005$ ($N = 2001$ pontos) como malha de referência na geração dos resultados numéricos. Um computador comum resolve o problema com esse tamanho de malha em poucos segundos. Para situar o leitor, uma curva como as exibidas na figura 27 é gerada em poucos minutos.

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados gerados pela solução numérica para todo o intervalo de variação dos parâmetros. O capítulo está dividido em resultados das soluções assintóticas, de perfis de velocidade, velocidades máximas e magnetização e resultados de viscosidade relativa, além das conclusões finais.

5.1 Soluções assintóticas

As soluções assintóticas foram desenvolvidas tomando dois regimes extremos do ferrofluido. O primeiro deles considera a precessão e o termo de equilíbrio como perturbações na equação. Fisicamente, o regime corresponde a pequenos efeitos magnéticos. O ferrofluido escoar quase como uma suspensão equivalente com partículas livres. O segundo é o regime próximo à saturação, em que o termo de vorticidade é uma perturbação na equação. O fluido apresenta magnetização muito próxima à saturação, pouco influenciada pelos efeitos de torque mecânico. As figuras 16 e 17 exibem comparações diretas entre as soluções numérica e assintóticas nos regimes em que as últimas foram propostas. Nota-se o padrão de convergência assintótica à medida que $\epsilon \rightarrow 0$. Os resultados assintóticos foram plotados a partir das equações 4.1.14 e 4.1.14.

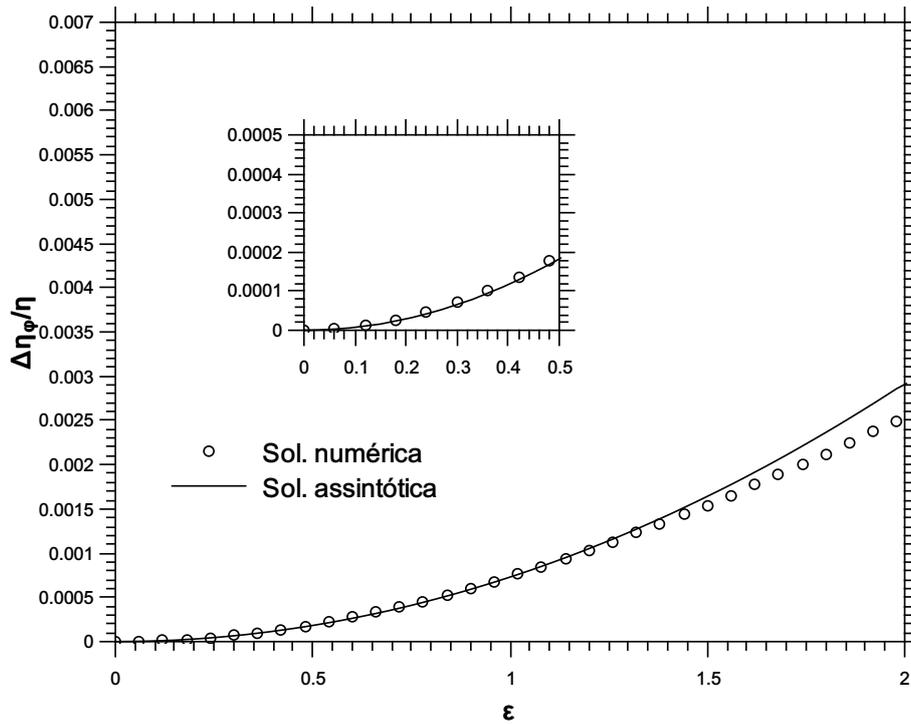


Figura 16 – Comparação entre as soluções para $\epsilon = \alpha_0 \ll 1$. Os parâmetros foram definidos como $\phi = 0,01$, $\lambda = 0,8$ e $Pe = 1$. A solução numérica foi gerada com malha de $N = 2001$ pontos. Nota-se que a concordância entre as soluções permanece excelente até $\alpha_0 \sim 0.25$.

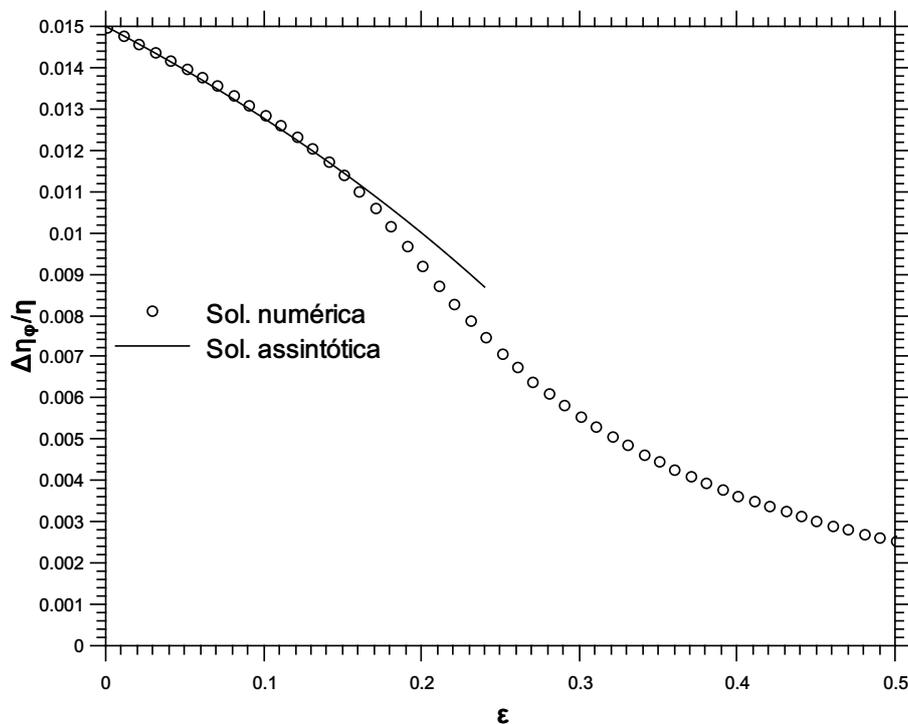


Figura 17 – Comparação entre as soluções para $\epsilon = 1/\alpha_0 \ll 1$. Os parâmetros foram definidos como $\phi = 0,01$, $\lambda = 0,8$ e $Pe = 1$. A solução numérica foi gerada com malha de $N = 2001$ pontos. Nota-se que a concordância entre as soluções permanece excelente até $\epsilon \sim 0.05$.

A figura 18 exibe um gráfico de viscosidade relativa como função de α_0 para $Pe \sim 1$ com as soluções assintóticas plotadas em ambos os extremos. Foi possível capturar os

comportamentos nesses regimes com a solução numérica. Na região central, o balanço entre os termos torna impossível a proposição de uma solução analítica ou aproximação assintótica. Lá, a solução numérica permite o estudo do comportamento do parâmetro.

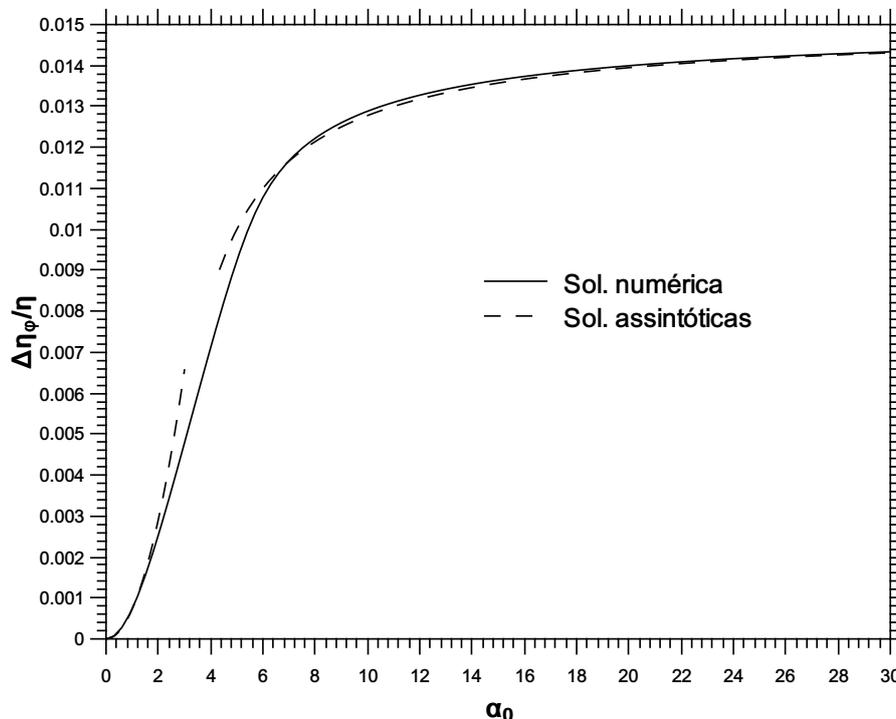


Figura 18 – Viscosidade relativa em função de α_0 para $\phi = 0,01$, $\lambda = 0,8$ e $Pe = 1$. A solução numérica foi gerada com malha de $N = 2001$ pontos. Nota-se que os regimes extremos são capturados de maneira precisa pelas soluções assintóticas. Na região central, o balanço entre os termos torna as não-linearidades muito intensas e os regimes assintóticos são perdidos.

Por fim, a figura 19 exibe um gráfico da viscosidade de saturação obtida pela solução numérica em comparação com o resultado previsto para quando $\alpha_0 \rightarrow \infty$. Foi possível plotar para diferentes valores de fração volumétrica pois, se α_0 é suficientemente grande, $\chi_M = 6\lambda\phi/\alpha_0 \rightarrow 0$ mesmo com $\phi \sim 0.1$. Os resultados corroboram essa argumentação, como exposto a seguir. Além disso, nota-se que, para $\alpha_0 \gg 1$, é possível considerar um modelo sem acoplamento de maneira que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\chi_M \nabla \cdot \mathbf{M} \cong 0, \quad (5.1.1)$$

e o campo \mathbf{H} é aproximadamente solenoidal mesmo na presença de magnetização e interações desta com a vorticidade.

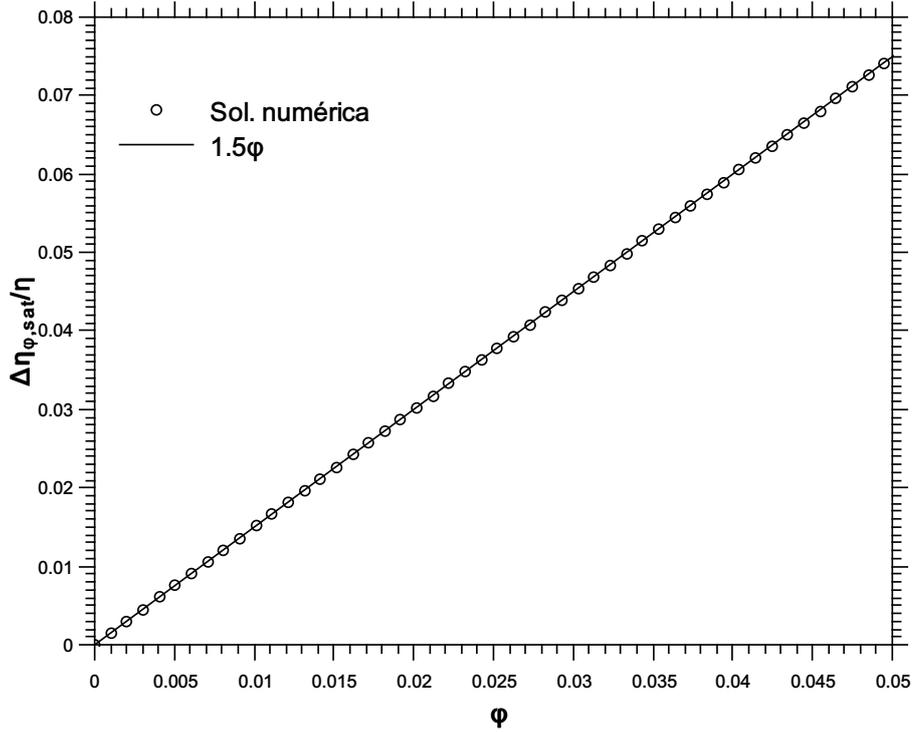


Figura 19 – Viscosidade de saturação em função de ϕ para $Pe = 1$ e $\lambda = 1$ e A solução numérica foi gerada com malha de $N = 2001$ pontos e obtida para $\alpha_0 = 1500$. Nota-se concordância entre os resultados numéricos e assintóticos para toda a faixa de fração volumétrica, o que corrobora o argumento de que, em altos campos, a interação entre esse e a magnetização pode ser seguramente desprezada.

Do exposto, é de fato razoável considerar um regime fracamente magnetizável na condição em que as interações dipolares partícula-partícula são fracas (regime muito diluído) quando comparadas com as interações campo-partícula. Essa hipótese se apresenta como interessante pois pode simplificar muito um modelo tridimensional, por exemplo. No problema em análise, ela permitiu explorar dois regimes assintóticos, o que seria impossível com as não-linearidades advindas da contribuição da magnetização sobre a magnetização de equilíbrio (equações 3.6.10 e 3.6.11).

5.2 Perfis de velocidade e magnetização - Simetria

Nesta seção são apresentados os perfis de velocidade para diferentes valores de α_0 e de Pe . Efeitos de achatamento do perfil de velocidades na região central e de desalinhamento e diminuição da magnetização nas bordas são observados. Contudo, o principal aspecto, observado em todos os perfis, é a presença de simetria, tanto para as velocidades quanto para as magnetizações. Ao que parece, a simetria é condição associada à hipótese de unidirecionalidade e, mesmo que o sentido da magnetização varie entre 2 pontos equidistantes do centro, o ângulo entre ela e o campo aplicado compensa essa variação e o efeito de torque observado é o mesmo em ambos os lados. É importante ressaltar que todos os resultados foram obtidos para campo externo longitudinal ($\lambda_x = 1$ e $\lambda_y = 0$).

A figura 20 apresenta perfis de velocidade para alguns valores de α_0 com Pe constante. Além da diminuição das velocidades por efeito magnetoviscoso, nota-se uma tendência à saturação do perfil, o que corrobora a discussão na seção 5.1

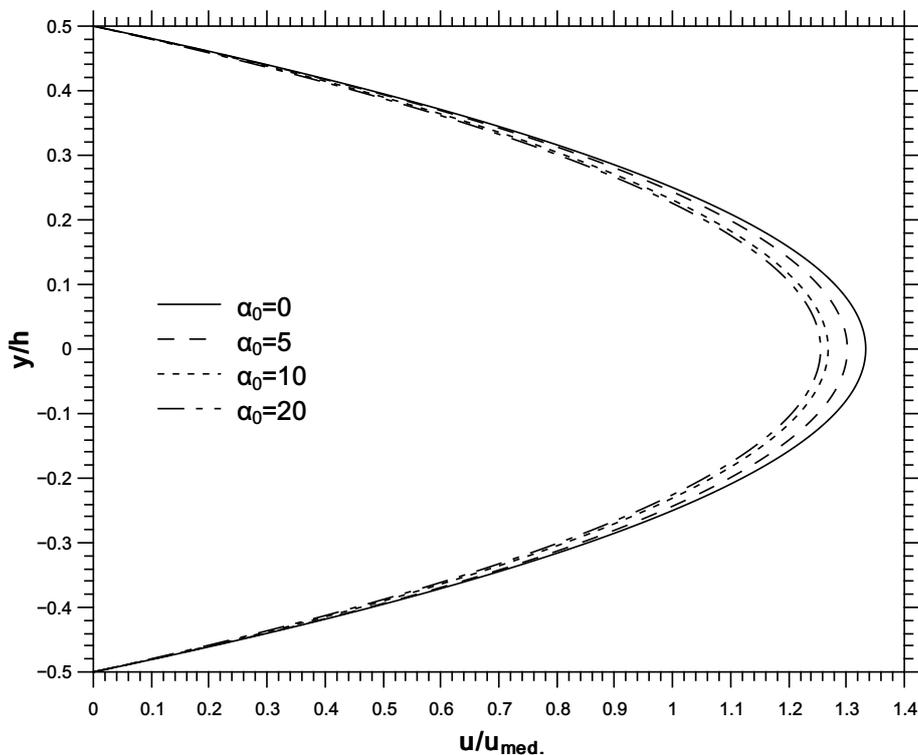


Figura 20 – Perfis de velocidade para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se a diminuição da velocidade do escoamento, como produto do efeito magnetoviscoso. Também, nota-se a tendência à saturação do perfil.

As figuras 21 e 22 exibem os perfis de magnetização ($M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$) e o ângulo entre campo aplicado e magnetização, medido no sentido antihorário. A determinação do ângulo foi feita pela equação

$$\theta^* = \arcsin\left(\frac{|\mathbf{M} \times \mathbf{H}|}{MH}\right) \quad (5.2.1)$$

Nota-se um aumento da magnetização, aproximando-a da saturação, com tendência à uniformização do perfil com o aumento de α_0 . Os perfis mantêm a simetria. Além disso, observa-se um alinhamento progressivamente maior entre campo e magnetização. Esses dois efeitos combinados produzem a saturação na viscosidade. Isto é, por mais que a intensidade dos vetores aumente, o alinhamento diminui a intensidade do torque de uma maneira que, na saturação, o aumento no campo produz um alinhamento que diminui o torque proporcionalmente. Esse mesmo raciocínio permite concluir que, por mais forte que seja o campo, sempre haverá um desalinhamento entre campo e magnetização, pois o torque seria nulo em caso contrário.

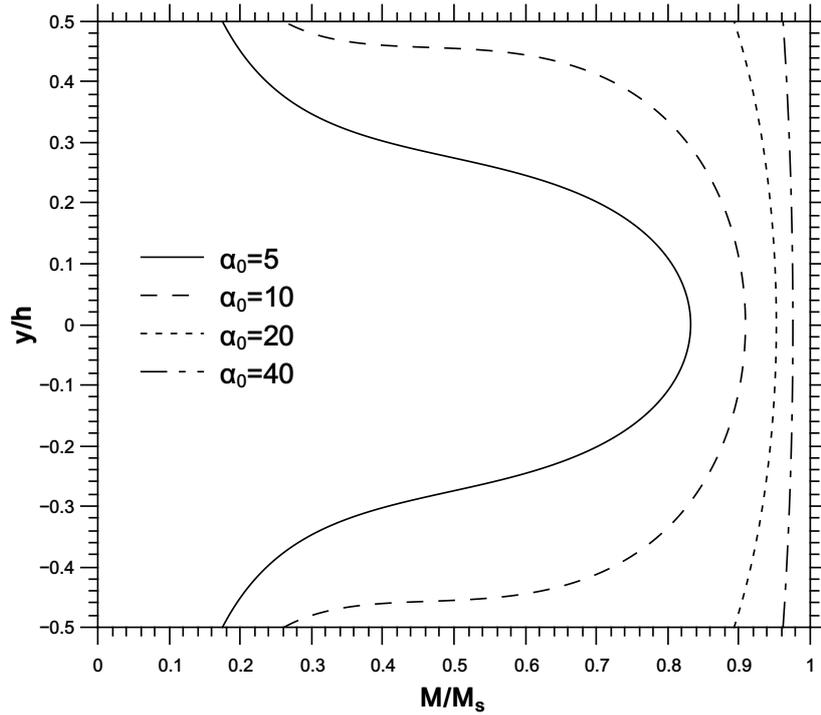


Figura 21 – Perfis de magnetização para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se o progressivo aumento do perfil em direção à saturação e a tendência à uniformização da magnetização.

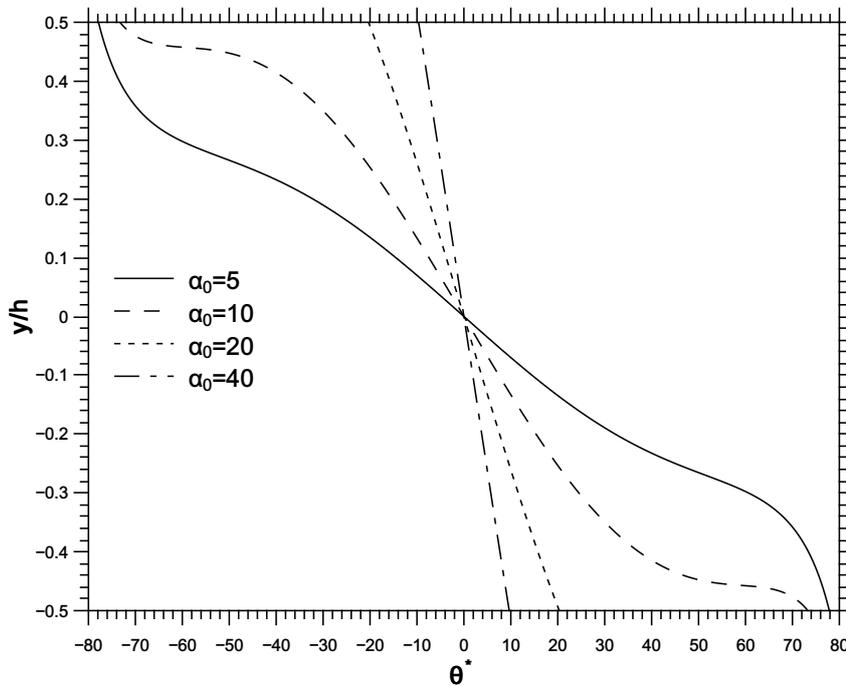


Figura 22 – Perfis de ângulo entre campo e magnetização para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se a tendência ao alinhamento à medida que α_0 cresce.

O aumento de Pe produz efeito contrário, no sentido de tornar o perfil novamente parabólico e com as velocidades do fluido newtoniano equivalente. A figura 23 exhibe os

perfis de velocidade para alguns valores de Pe . Um escoamento mais forte é mais capaz de forçar as partículas a girar com a vorticidade dele e consegue diminuir a magnetização pelo mecanismo de interação com a vorticidade de maneira mais eficaz.

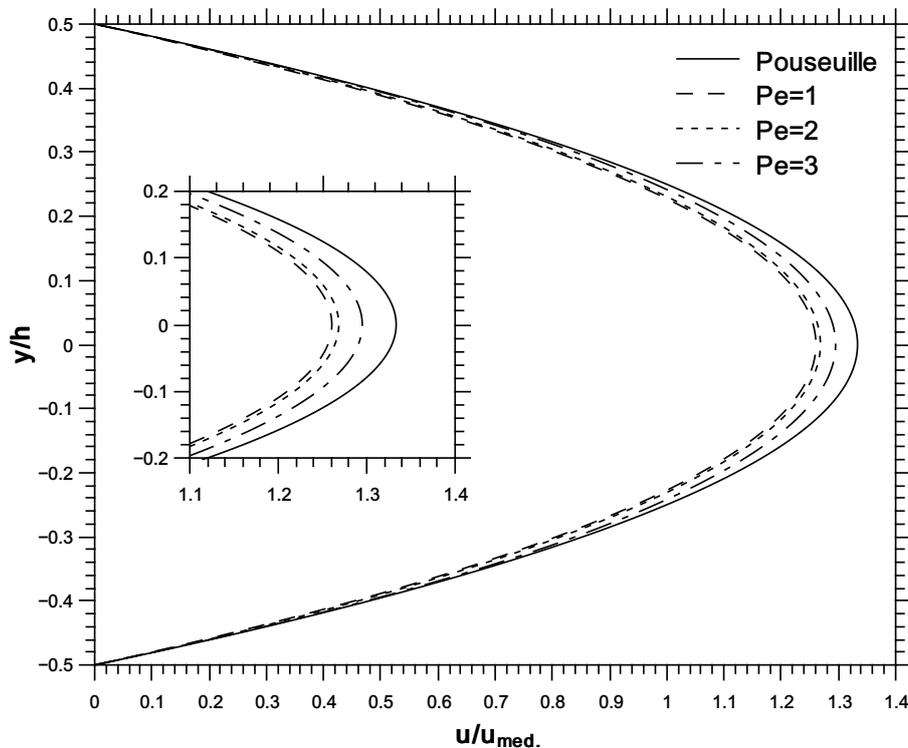


Figura 23 – Perfis de velocidade para alguns valores de Pe com $\phi = 0,05$, $\alpha_0 = 10$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se o aumento da velocidade do escoamento, com achatamento do perfil na região central.

Os perfis de magnetização e de ângulos de desalinhamento, exibidos nas figuras 24 e 25, justificam o achatamento na região central do perfil. Essa é, de fato, a região em que a taxa de cisalhamento é menor, chegando a se tornar nula no centro. Com isso, o torque magnético é mais efetivo no sentido de impedir o giro das partículas com a vorticidade. A manifestação global desse fenômeno é a diminuição das velocidades na região. A alta influência do cisalhamento é muito evidente na figura 25 para $Pe = 4$. O desalinhamento permanece maior que 80 deg até $y \sim 0,25$, um quarto do perfil. Isso evidencia a dificuldade do torque magnético em produzir seu efeito frente ao torque mecânico e justifica o fato do perfil de velocidades quase coincidir com *Pouseuille* nessa região. Por fim, nota-se o efeito da ausência de cisalhamento no centro pelo fato de todos os perfis de magnetização coincidirem nessa região e apresentarem seus valores máximos.

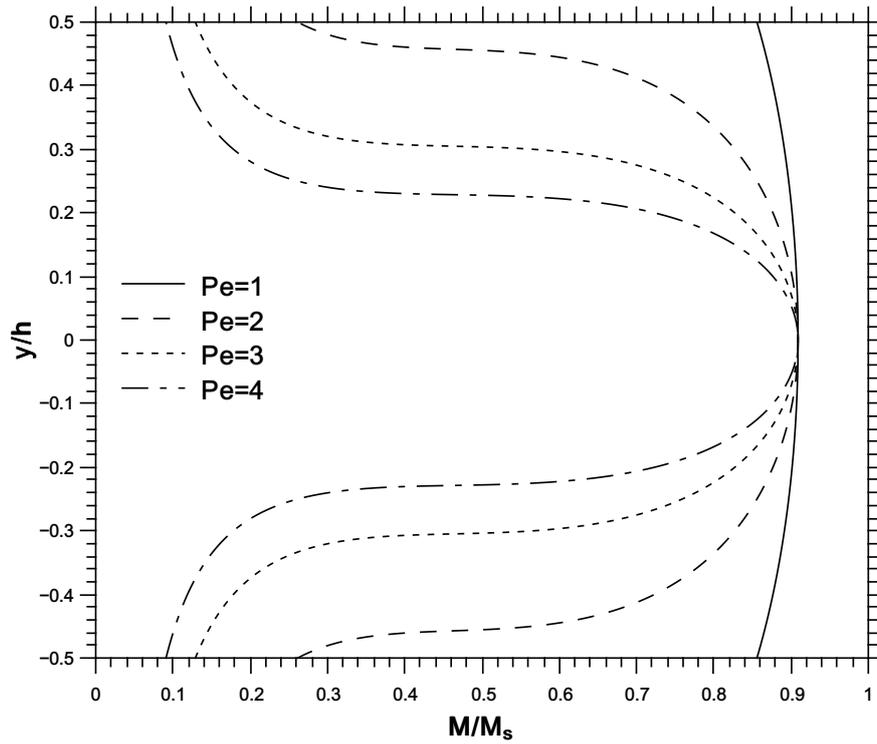


Figura 24 – Perfis de magnetização para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se o progressivo aumento do perfil em direção à saturação e a tendência à uniformização da magnetização.

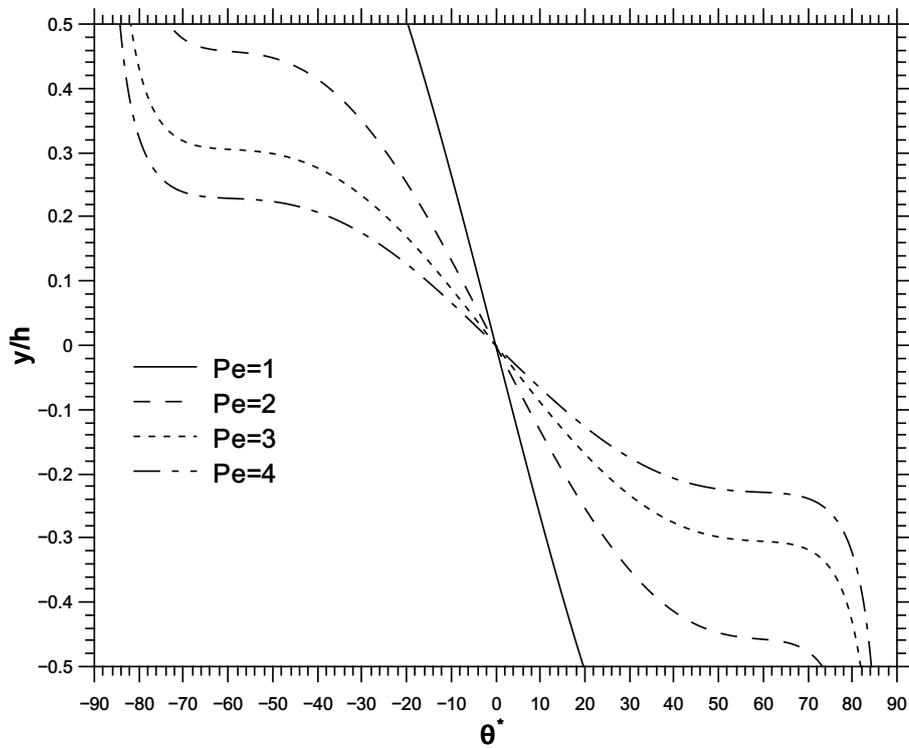


Figura 25 – Perfis de ângulo entre campo e magnetização para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se a tendência ao alinhamento à medida que α_0 cresce.

5.2.1 Magnetização na parede

Para obtenção dos resultados de magnetização na parede em função de α_0 , é necessário ter em mente que o número de Peclét local varia ao longo do perfil, pois é definido em função da taxa de cisalhamento. O parâmetro empregado na obtenção de resultados como perfis e viscosidades relativas é definido em termos da taxa média de cisalhamento do escoamento não perturbado, dada por

$$\bar{\dot{\gamma}} = \frac{\bar{u}}{h} = \frac{G}{12} \quad (5.2.2)$$

Na parede, é conveniente definir um número de Peclét de parede Pe_w , dado por

$$Pe_w = \tau_B \dot{\gamma}_w \quad (5.2.3)$$

em que

$$\dot{\gamma}_w = \frac{G}{2} \quad (5.2.4)$$

Assim, a relação entre Pe e Pe_w no caso de escoamento de *Poiseuille* é dada por

$$Pe_w = 6Pe \quad (5.2.5)$$

Quando efeitos magnéticos estão presentes, a taxa de cisalhamento naturalmente se desvia do valor de equilíbrio. Contudo, considerando que esse desvio é pequeno, como observado nos perfis de velocidade, é razoável supor que a relação seja bem próxima do calculado acima. Assim,

$$Pe_w \approx 6Pe \quad (5.2.6)$$

Com o parâmetro de parede definido, é possível exibir as curvas de magnetização em função de α_0 , como feito na figura 26. Nota-se a tendência da saturação até mesmo na região da parede, em que a influência do escoamento é maior. Além disso, quanto maior a presença do escoamento (maior Pe_w), maior o campo necessário para saturar a magnetização, como esperado, dado o maior favorecimento ao torque mecânico no sentido de desalinhar campo e magnetização e diminuir a valor de magnetização.

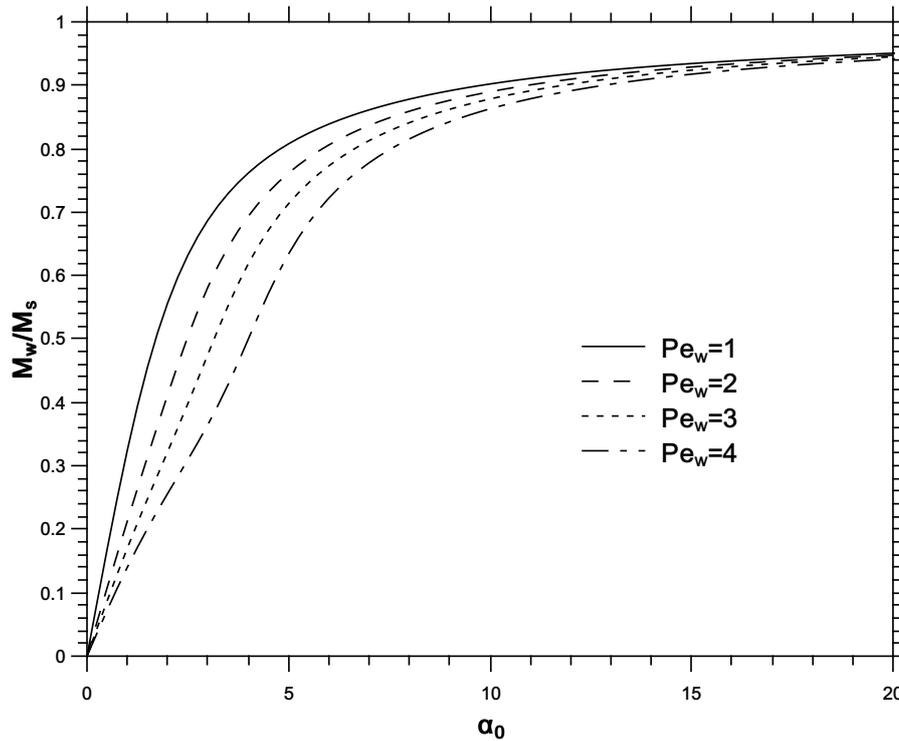


Figura 26 – Magnetização na parede em função de α_0 para alguns valores de Pe_w magnetização para alguns valores de α_0 com $\phi = 0,02$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. A tendência da magnetização à saturação é evidente com o crescimento de α_0 .

5.3 Viscosidades relativas

Nesta seção são apresentados os resultados de viscosidade relativa obtidos pela equação 3.7.8. A discussão apresentada para os perfis já permite ter uma ideia do que se esperar para as curvas de viscosidade. O aumento do campo α_0 deve produzir um rápido aumento na viscosidade relativa do escoamento que depois se suaviza até o patamar de saturação. A figura 27 apresenta a curva para α_0 crescente. A variação no número de *Peclét* retarda o aumento, mas não influencia o patamar de saturação, como esperado. Além disso, os resultados são coerentes com os obtidos por CUNHA; ROSA; DIAS (2016). A grande diferença nos valores pode ser explicada, como abordado no próprio trabalho, pela formação de agregados de partículas. Isso aumenta a magnetização média local da partícula fluida e gera dissipação adicional, pois o escoamento precisa contornar estruturas maiores. A sensibilidade a *Pe* se justifica pelo fato do torque mecânico ser mais eficiente e diminuir a magnetização por girar as partículas com a vorticidade do escoamento.

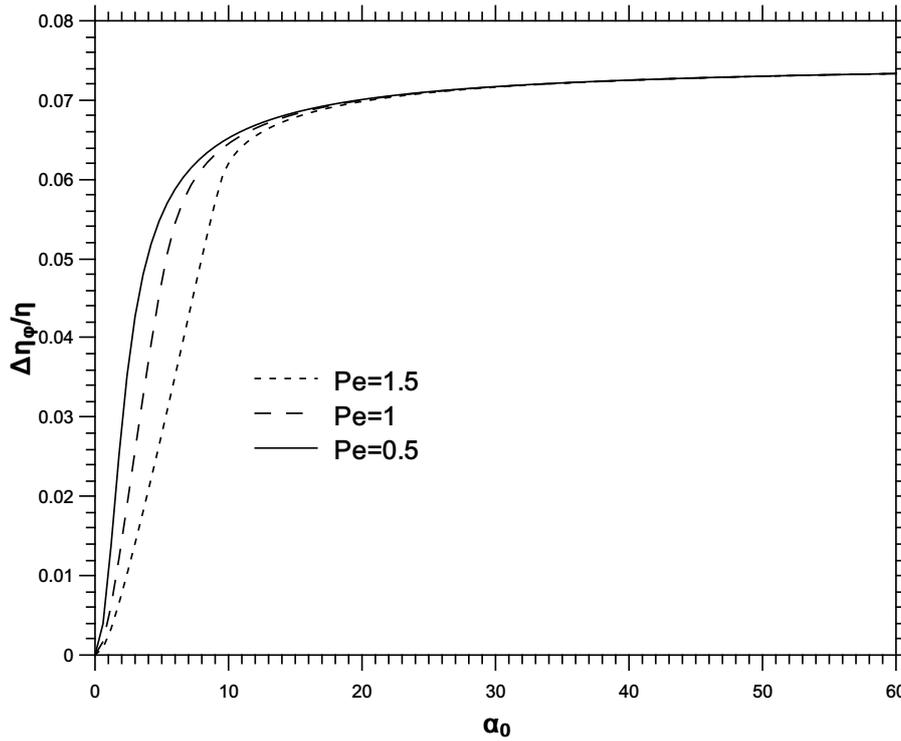


Figura 27 – Viscosidades relativas como funções de α_0 com $\phi = 0,05$, $Pe = 1$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se o comportamento esperado, de rápido aumento, com saturação.

A figura 28 apresenta os resultados para a viscosidade relativa como função de Pe . Assim como o exposto no trabalho citado acima. Embora o efeito seja semelhante ao observado em fluidos pseudoplásticos (MORRISON, 2001), os mecanismos físicos envolvidos são distintos. Aqui, a vorticidade atua no sentido de diminuir a magnetização do fluido por girar as partículas fluidas. Esse efeito causa desalinhamento entre campo e magnetização e desorientação dos dipolos magnéticos das micropartículas em suspensão no fluido da direção do campo. Como era de supor, maiores valores de α_0 levam a curvas de viscosidade mais altas.

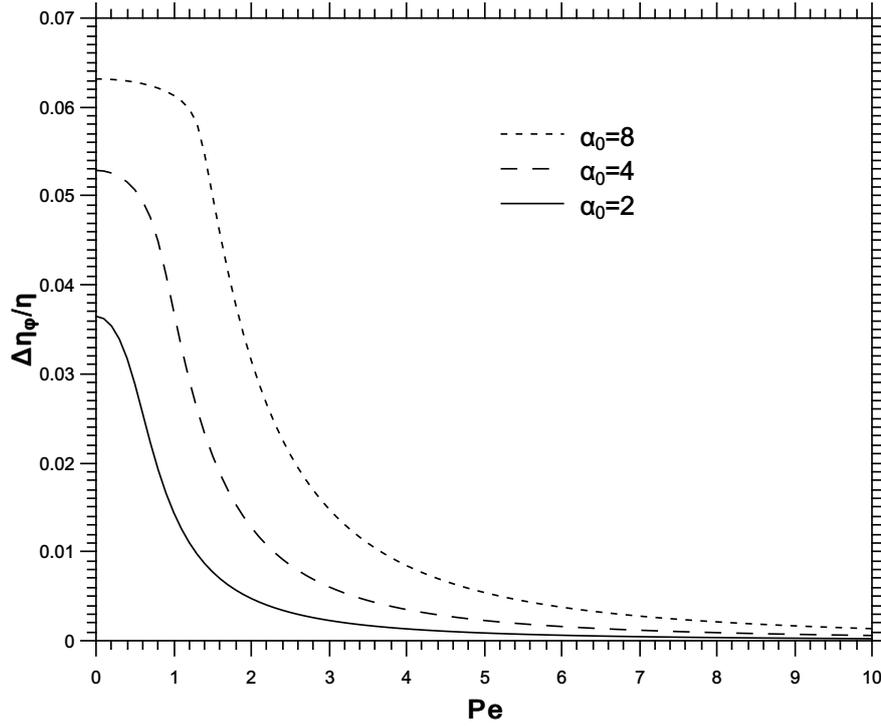


Figura 28 – Viscosidades relativas como funções de Pe com $\phi = 0,05$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. Nota-se a diminuição na viscosidade semelhantemente ao que ocorre em fluidos pseudoplásticos.

Por fim, a figura 29 apresenta os resultados de viscosidade relativa em função de ϕ . Observa-se uma dependência quase linear entre os parâmetros, resultado corroborado pelos experimentos de [Cunha, Rosa e Dias \(2016\)](#). Essa dependência não é estritamente linear pois, além do efeito sobre o termo magnético da equação hidrodinâmica (3.6.7), a fração volumétrica influencia levemente a magnetização de equilíbrio (3.6.10 e 3.6.11).

É interessante frisar que o limite de $\phi = 0,1$ foi explorado devido ao fato de [Ivanov e Kuznetsova \(2002\)](#) ponderarem que os resultados para a magnetização de equilíbrio modificada pela correção de ordem $O(\phi^2)$ reproduz o comportamento observado em laboratório até esse patamar. Contudo, como a viscosidade de *Einstein* é empregável para até $\phi \sim 0,05$, deve-se proceder com cautela na modelagem de ferrofluidos mais concentrados.

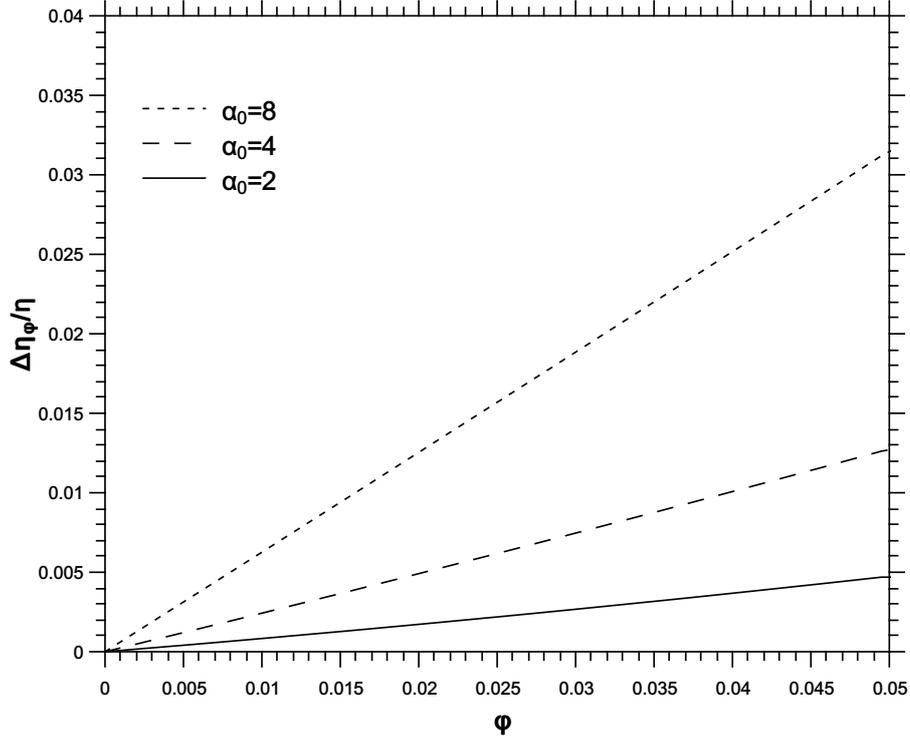


Figura 29 – Viscosidades relativas como funções de ϕ com $Pe = 2$ e $\lambda = 0,8$. A malha empregada possui $N = 2001$ pontos. A evolução da viscosidade é quase linear com a fração volumétrica.

5.4 Dinâmica de vorticidade no ferrofluido

Nesta seção, é feita uma breve discussão da dinâmica de vorticidade no ferrofluido a partir da equação de evolução da vorticidade modificada pelas contribuições magnéticas. Além da discussão acerca dos termos magnéticos, é rapidamente exposta uma proposta de formulação do problema bidimensional em termos da vorticidade e da função de corrente, tema de passos futuros do presente trabalho.

A equação de dinâmica de vorticidade para um fluido newtoniano incompressível é dada por (BACHELOR, 2000)

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \mathbf{D} + \nu \nabla^2 \xi. \quad (5.4.1)$$

Tomar o rotacional dos termos de magnetização na equação 2.9.19 fornece

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left[\mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] = \\ & \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) \\ & + \frac{\mu_0}{2} \left[\nabla \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \nabla (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Substituir esse resultado na equação 5.4.1 fornece a equação de dinâmica de vor-

tidade para o ferrofluido, a saber

$$\begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} = & \xi \cdot \mathbf{D} + \nu \nabla^2 \xi \\ & + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) \\ & + \frac{\mu_0}{2\rho} \left[\nabla \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) + \nabla(\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{H} - \nabla^2(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Além da convecção de vorticidade, contida no termo de derivada material, ficam evidentes o mecanismo de *stretching* de vorticidade e a criação/difusão pelo mecanismo viscoso. Na contribuição magnética, surge um termo particularmente interessante, $\nabla^2(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ que pode ser à priori interpretado como uma difusão de torque magnético. Poderia-se dizer, num palpite ousado, que esse termo pode ser responsável pelo espalhamento ou contenção de vorticidade, a depender da orientação do torque magnético na região.

Como muitos casos de interesse de estudo de escoamento de ferrofluidos são bidimensionais, é interessante analisar a equação 5.4.3 nessas condições. O único termo não nulo é o termo na componente perpendicular ao plano do escoamento, aqui tomada como a direção z . Note que $\nabla \times \mathbf{M}$ é perpendicular ao plano do escoamento, enquanto \mathbf{H} e $\nabla \mathbf{H}$ estão neste plano. Assim, a equação se torna

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})]_z - \frac{\mu_0}{2\rho} [\nabla^2(\mathbf{M} \times \mathbf{H})]_z, \quad (5.4.4)$$

em que

$$\frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})]_z = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right] \quad (5.4.5)$$

e

$$\frac{\mu_0}{2\rho} [\nabla^2(\mathbf{M} \times \mathbf{H})]_z = \frac{\mu_0}{2\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_x H_y - M_y H_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (M_x H_y - M_y H_x) \right]. \quad (5.4.6)$$

Um último caso em que é bastante interessante avaliar a equação da vorticidade é o caso bidimensional unidirecional. Uma consequência direta da unidirecionalidade, como exposto na seção 2.11 é o fato de que

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = M_x(y) \\ M_y = M_y(y) \\ H_x = H_x(y) \\ H_y = H_y(y). \end{array} \right. \quad (5.4.7)$$

Com isso, os termos magnéticos restantes na equação da vorticidade bidimensional se reduzem a

$$\frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})]_z = 0 \quad (5.4.8)$$

e

$$\frac{\mu_0}{2\rho} [\nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]_z = \frac{\mu_0}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (M_x H_y - M_y H_x). \quad (5.4.9)$$

Além disso, a ortogonalidade entre a velocidade e os gradientes leva à ausência de convecção de vorticidade, ou seja,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \xi = 0. \quad (5.4.10)$$

Com isso, a equação se torna

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \xi - \frac{\mu_0}{2\rho} [\nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]_z. \quad (5.4.11)$$

Surge uma situação muito interessante. O campo de vorticidade é diretamente influenciado por um termo associado à difusão de torque magnético. Fica muito evidente o balanço entre torque mecânico e torque magnético, como apresentam os resultados obtidos neste capítulo. Assim, seria possível, à priori, controlar a difusão de vorticidade com aplicação de um campo magnético, por meio do mecanismo de difusão do torque.

5.4.1 Formulação vorticidade-função de corrente bidimensional

Como o fluido é líquido, e portanto, incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e torna-se possível escrever

$$\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (5.4.12)$$

em que $\boldsymbol{\psi}$ é denominada função de corrente do escoamento. Como o escoamento é bidimensional, tem-se que $\boldsymbol{\psi} = \psi \hat{\mathbf{k}}$, o que leva a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{k}} + \psi (\nabla \cdot \hat{\mathbf{h}}) = 0, \quad (5.4.13)$$

pois o gradiente da função de corrente está sempre contido no plano do escoamento. Da equação 5.4.12, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (5.4.14)$$

A vorticidade, definida como $\nabla \times \mathbf{u}$, ela é reescrita como

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}. \quad (5.4.15)$$

Assim, pelo resultado expresso na equação 5.4.13 e considerando a bidimensionalidade do escoamento,

$$\xi = -\nabla^2 \psi. \quad (5.4.16)$$

Naturalmente, para a solução de um escoamento bidimensional de um ferrofluido, é necessário ter em mente as equações de Maxwell da magnetostática. Da lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \implies \mathbf{H} = -\nabla \phi_m, \quad (5.4.17)$$

em que ϕ_m é definido como o potencial magnético, dado o fato do campo aplicado ser conservativo no limite magnetostático. Da segunda Lei de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (5.4.18)$$

o que leva a

$$\nabla^2 \phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (5.4.19)$$

como equação que relaciona diretamente os campos \mathbf{M} e \mathbf{H} . As condições de contorno para essa equação são definidas na seção 2.7.

A solução simultânea das equações 5.4.4, 5.4.14, 5.4.16 e 5.4.19 juntamente com a equação de evolução da magnetização (equação 2.10.1) e de um modelo para a magnetização de equilíbrio (seção 2.4) fornece as linhas de corrente e os campos de velocidade e de magnetização do escoamento. O interesse nessa formulação é a eliminação do termo de pressão, e a solução se dá somente em termos das variáveis cinemáticas do escoamento, os campos de velocidade e vorticidade e a função de corrente.

5.5 Conclusões

O escoamento de um ferrofluido entre placas em regime unidirecional apresenta um rico ambiente para o entendimento dos efeitos do acoplamento hidrodinâmico-magnético. Na análise dos perfis, fica evidente o balanço entre os torques mecânico e magnético. O campo de vorticidade atua no sentido de desalinhar magnetização e campo e diminuir a intensidade da primeira, por girar as partículas em suspensão, enquanto o torque magnético busca o alinhamento entre campo e magnetização. As curvas de magnetização na parede mostram bem o comportamento da magnetização sob influência do campo e do

escoamento, no sentido de se saturar sob ação do primeiro, mas sempre com oposição do segundo.

As soluções assintóticas capturaram bem os regimes a que se propuseram e permitem uma análise acurada, inclusive com a recuperação da viscosidade rotacional de *Shliomis* no limite em que $\alpha_0 \rightarrow \infty$. Também permitiram um *benchmark* no sentido de validar parcialmente a solução numérica, visto a coincidência nas regiões de fracos efeitos magnéticos e de saturação.

Os resultados de viscosidade relativa se mostraram condizentes com os experimentos conduzidos em reômetro de discos rotativos com campo magnético uniforme. As ordens de grandeza são diferentes devido à formação de agregados de partículas, fenômeno não previsto no modelo.

É interessante ressaltar, por fim, as limitações do modelo relacionadas tanto ao regime diluído quanto à velocidade do escoamento. O desenvolvimento das equações, tanto hidrodinâmica quanto de evolução da magnetização, pressupõem regime diluído. Mesmo que o modelo de magnetização de equilíbrio seja empregável para até $\phi = 0,1$, os resultados para concentrações maiores que $\phi = 0,05$ são duvidosos, visto que nesses regimes, já se observa forte interação, tanto magnética quanto hidrodinâmica, entre as partículas. Além disso, a formação de agregados, observável até mesmo em ferrofluidos diluídos, é intensa e leva a divergências significativas entre resultados teóricos e experimentais.

5.6 Trabalhos futuros

Na linha de investigação de ferrofluidos em escoamento, o próximo passo é a solução em regime permanente de um escoamento bidimensional sujeito a um campo magnético. Espera-se explorar um regime unidirecional com campo magnético não-homogêneo e presença de torques, numa abordagem mais completa do que a apresentada nesse trabalho e posteriormente um caso bidimensional geral, com e sem campo homogêneo.

Escoamentos bidimensionais de fluidos magnéticos suscitam interesse tanto teórico quanto prático. Como mostrado na subseção 5.4, o mecanismo magnético interage diretamente com o campo de vorticidade do escoamento. Espera-se observar um controle do espalhamento de vorticidade em escoamentos com concentração de vórtices, como escoamentos sobre degraus ou em cavidades. No campo mais aplicado, esse controle de vorticidade pode permitir o favorecimento da troca de calor num escoamento sobre um componente eletrônico, por exemplo. O fenômeno de convecção termomagnética já é razoavelmente bem conhecido, como explorado por [Gontijo e Cunha \(2012\)](#) e outros. Contudo, o principal mecanismo explorado é o de estratificação de suscetibilidade, e não o de controle de vorticidade pelo torque magnético, daí o interesse de investigar esse mecanismo de maneira mais detalhada.

Referências

- BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521663960. Citado 4 vezes nas páginas 19, 25, 30 e 80.
- BATCHELOR, G. K. The stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 41, n. 3, p. 545–570, 1970. Citado na página 22.
- BEHRENS, S. et al. Synthesis and characterization. In: _____. [S.l.: s.n.], 2009. v. 10.1007/978-3-540-85387-9, p. 1–82. ISBN 978-3-540-85386-2,978-3-540-85387-9. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- BERKOVSKII, B. M.; BASHTOVOI, V. G. *Magnetic Fluids and Applications Handbook*. [S.l.]: Begell House, Incorporated, 1996. (UNESCO series of learning materials). ISBN 9781567000627. Citado na página 1.
- BROWN, W. F. Thermal fluctuations of a single-domain particle. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 130, p. 1677–1686, Jun 1963. Citado na página 14.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. *Numerical Analysis*. [S.l.]: Cengage Learning, 2004. (Available Titles CengageNOW Series). ISBN 9780534392000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 60.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum Mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1994. ISBN 9780121678807. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 24.
- CUNHA, F. R. Fundamentos da hidrodinâmica de fluidos magnéticos. In: *Turbulência, v.8*. São Paulo: ABCM USP, 2012. cap. 1, p. 1–83. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 17.
- CUNHA, F. R. A note on the stress tensor and magnetization evolution for magnetic dilute suspensions of rigid spherical particles. To be submitted. 2018. Citado na página 23.
- CUNHA, F. R.; GONTIJO, R. G.; UREL, G. H. Magnetization dynamics in ferrofluids: A dynamical system approach. In: *17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Águas de Lindóia, São Paulo, Brazil: ABCM, 2018. Citado na página 13.
- CUNHA, F. R.; ROSA, A. P.; DIAS, N. J. Rheology of a very dilute magnetic suspension with micro-structures of nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 397, p. 266 – 274, 2016. Citado 6 vezes nas páginas iv, v, 1, 27, 77 e 79.
- CUNHA, F. R.; SOBRAL, Y. D. Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 343, p. 34 – 64, 2004. Citado na página 1.

- EINSTEIN, A. *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen (A New Determination of Molecular Dimensions)*. [S.l.]: Albert Einstein-Gesellschaft, 1905. Citado na página 23.
- FRANK, N. H.; SLATER, J. C. *Electromagnetism*. [S.l.]: Dover Constable, 1947. (International Series In Pure). ISBN 9780486622637. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 6.
- GONTIJO, R. G. *Micromecânica e Microhidrodinâmica de Suspensões Magnéticas*. 262 p. Tese (Thesis) — Universidade de Brasília, Brasil, 2013. Citado na página 1.
- GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Experimental investigation on thermo-magnetic convection inside cavities. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, American Scientific Publishers, v. 12, 2012. Citado na página 84.
- HINCH, E. *Perturbation Methods*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780521378970. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.
- IVANOV, A. O.; KUZNETSOVA, O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier Science, v. 252, p. 135 – 137, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 12, 42 e 79.
- JACOBS, I. S.; BEAN, C. P. Fine particles, thin films and exchange anisotropy (effect of finite dimensions and interfaces on the basic properties of ferromagnets). *Magnetism*, Academic Press, New York, v. 3, p. 271–334, 1964. Citado na página 10.
- KIM, S.; KARRILA, S. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. [S.l.]: Dover Publications, 2005. (Butterworth - Heinemann series in chemical engineering). ISBN 9780486442198. Citado na página 26.
- LEVEQUE, R. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. ISBN 0898716292, 9780898716290. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 55 e 62.
- LOGAN, J. *Applied Mathematics*. [S.l.]: Wiley, 1997. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471165132. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- MALVAR, S.; GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Nonlinear motion of an oscillating bubble immersed in a magnetic fluid. *Journal of Engineering Mathematics*, Springer, 2017. Citado na página 23.
- MORRISON, F. *Understanding Rheology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2001. (Topics chemical engineering : A series of textbooks and monographs). ISBN 9780195141665. Citado na página 78.
- NÉEL, L. M. Theorie du trainage magnetique des ferromagnetiques en grains fins avec application aux terres cuites. *Ann. Geophys.*, v. 5, 1949. Citado na página 13.
- ROSA, A. P. *Análise Numérica e Experimental da Reologia e Microestrutura de Suspensões Magnéticas*. 148 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasil, 2013. Citado na página 1.
- ROSA, A. P.; GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient. *Applied Mathematical Modelling*, v. 40, p. 3907 – 3918, 2016. Citado na página 1.

ROSENSWEIG, R. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Dover Publications, 1997. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486678344. Citado 9 vezes nas páginas 1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 22 e 26.

RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1996. ISBN 9788534602044. Citado na página 61.

SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Retrospective and issues: Magnetically controllable fluids and their applications. In: _____. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. v. 594, cap. 5. ISBN 978-3-540-45646-9. Citado 7 vezes nas páginas iv, v, 2, 9, 27, 48 e 55.

SHLIOMIS, M. I. et al. "negative-viscosity"effect in a magnetic fluid. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 75, p. 2128–2131, Sep 1995. Citado na página 16.

TARI, A. et al. The magnetic properties and stability of a ferrofluid containing fe_3o_4 particles. *Physica B+C*, v. 97, n. 1, p. 57 – 64, 1979. ISSN 0378-4363. Citado na página 1.