

Universidade de Brasília – UnB  
Faculdade UnB Gama – FGA  
Engenharia Aeroespacial

# Solução Numérica do Escoamento Compressível 2D e 3D

Autor: Lucas de Castro Bezerra  
Orientador: Doutor Luciano Gonçalves Noleto

Brasília, DF  
2018



Lucas de Castro Bezerra

## **Solução Numérica do Escoamento Compressível 2D e 3D**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Doutor Luciano Gonçalves Noletto

Brasília, DF

2018

---

Lucas de Castro Bezerra

Solução Numérica do escoamento Compressível 2D e 3D/ Lucas de Castro  
Bezerra. – Brasília, DF, 2018-

59 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Doutor Luciano Gonçalves Noletto

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB  
Faculdade UnB Gama – FGA , 2018.

1. Escoamento Compressível. 2. Simulação Numérica. I. Doutor Luciano  
Gonçalves Noletto. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV.  
Solução Numérica do Escoamento Compressível 2D e 3D

CDU 02:141:005.6

---

Lucas de Castro Bezerra

## **Solução Numérica do escoamento Compressível 2D e 3D**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

---

**Doutor Luciano Gonçalves Noletto**  
Orientador

---

**Manuel Nascimento Dias Barcelos  
Júnior**  
Convidado 1

---

**Fábio Alfaia da Cunha**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2018

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de completar mais esta etapa da vida e por me fornecer todas as chances e caminhos de chegada até aqui. Desde pequeno sempre quis estudar na UnB pela sua qualidade de ensino e, principalmente, por ver meu pai se formando, me incentivando, e falando tão bem de um lugar que passou boa parte de sua vida. Então, com certeza, meus pais, Fábio Couto Bezerra e Suely Correia de Castro, são as pessoas que mais me apoiaram para chegar onde cheguei, que sempre me deram forças em todas as situações da minha vida e que, acima de tudo, sempre me ajudaram a levantar depois das inúmeras quedas que tive, principalmente quando achava que não teria forças para me reerguer. Agradeço a toda a minha família e em especial a minha avó Maria do Socorro Couto que me acolheu em sua casa todos esses anos de faculdade para que fosse possível completar os meus estudos.

Agradeço também aos professores que me ajudaram bastante a concluir esse projeto e que, sem eles, não teria conseguido finalizar este trabalho: professores Luciano Noleto e Domenico Simone que idealizaram esta ideia junto comigo. Por fim agradeço a todos os meus amigos, pois também me apoiaram muito nesta batalha, uma vez que os amigos são a família que construímos ao longo da vida de acordo com as experiências que adquirimos.

*"Quando o mundo estiver unido na busca do conhecimento, e não mais lutando por dinheiro e poder, então nossa sociedade poderá enfim evoluir a um novo nível."*  
*(Thomas Jefferson)*

# Resumo

O objetivo deste projeto é realizar simulações numéricas 2D e 3D do escoamento supersônico a fim de analisar as ondas de choque formadas comparando seus resultados. Após essa comparação, será feita uma análise sobre uma modelagem de um míssil *ramjet* que possui um cone em sua parte dianteira, uma vez que este tipo de escoamento está relacionado ao projeto destes sistemas de veículos aéreos. Para este trabalho, o código ANSYS FLUENT será utilizado. Após a formação da onda de choque, resultados diferentes para o ângulo da onda podem ser achados nas soluções 2D e 3D. Essas diferenças são analisadas e comparadas com o que existe na literatura. A partir de um experimento realizado em um *Gun Tunnel*, foi feita a modelagem do cone do experimento, e a simulação numérica do escoamento do fluido foi realizada. Os resultados da simulação em 2D (cunha) mostram-se em boa concordância com a formulação analítica disponível na literatura. Já o caso 3D (cone e míssil), foi comparado com uma solução numérica feita em MATLAB e também mostram uma boa concordância com o mesmo.

**Palavras-chaves:** Escoamento Compressível, Simulação Numérica, 2D, 3D, Número de Mach.

# Abstract

The objective of this project is to perform numerical 2D and 3D simulations of the supersonic flow in order to analyze the shock waves formed comparing their results. After this comparison, will be made an analysis on a model of a ramjet missile that has a cone in its front part, since this type of flow is related to the design of these systems of aerial vehicles. For this project, the ANSYS FLUENT code will be used. After the formation of the shock wave, different results for the wave angle can be found in 2D and 3D solutions. These differences are analyzed and compared with what exists in the literature. From an experiment realized in a Gun Tunnel, the modeling of the cone of the experiment was made, and the numerical simulation of the flow of the fluid was realized. The results of the 2D (wedge) simulation show good agreement with the analytical formulation available in the literature. The 3D (cone and missile) case was compared with a numerical solution made in MATLAB code and also showed a good agreement with the experiment.

**Key-words:** Compressible Flow, Numerical Solutions, 2D, 3D, Mach Number.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Posições em um Ramjet . . . . .	18
Figura 2 – Geometria da Onda de Choque Oblíqua (ANDERSON, 2010) . . . . .	29
Figura 3 – Relação entre fluxo supersônico sobre a cunha e o cone (ANDERSON, 2010). . . . .	30
Figura 4 – Comparação entre os ângulos da onda de choque para cunhas e cone a Mach 2 (ANDERSON, 2010). . . . .	31
Figura 5 – Representação de uma malha estruturada para os dois principais métodos de discretização (JEONG; SEONG, 2014) . . . . .	33
Figura 6 – Geometria da cunha . . . . .	35
Figura 7 – Malha da cunha . . . . .	35
Figura 8 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha . . . . .	36
Figura 9 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha . . . . .	37
Figura 10 – Velocidade sobre a cunha medida em número de Mach . . . . .	37
Figura 11 – Pressão total sobre a cunha medida em Pascal . . . . .	38
Figura 12 – Pressão estática sobre a cunha medida em Pascal . . . . .	39
Figura 13 – Sistema de coordenada cilíndrica para um corpo axissimétrico (ANDERSON, 2010). . . . .	40
Figura 14 – Geometria para a solução numérica do escoamento sobre um cone (ANDERSON, 2010) . . . . .	43
Figura 15 – Geometria do cone . . . . .	44
Figura 16 – Malha do cone . . . . .	45
Figura 17 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone . . . . .	46
Figura 18 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone . . . . .	47
Figura 19 – Malha de resultado para velocidade medida em número de Mach . . . . .	48
Figura 20 – Velocidade sobre o cone medida em número de Mach . . . . .	49
Figura 21 – Pressão total sobre o cone medida em Pascal . . . . .	50
Figura 22 – Pressão estática sobre o cone medida em Pascal . . . . .	51
Figura 23 – Missíl P-800 Oniks . . . . .	51
Figura 24 – Modelagem 3D do míssil P-800 Oniks . . . . .	52
Figura 25 – Volume de controle 3D para o míssil . . . . .	52
Figura 26 – Malha construída para o míssil . . . . .	53

Figura 27 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil . . . . .	53
Figura 28 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil . . . . .	54
Figura 29 – Velocidade sobre o míssil medida em número de Mach . . . . .	54
Figura 30 – Pressão total sobre o míssil medida em Pascal . . . . .	55
Figura 31 – Pressão estática sobre o míssil medida em Pascal . . . . .	55

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha . . . . .	36
Tabela 2 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha . . . . .	36
Tabela 3 – Comparação dos resultados analíticos com numéricos para a cunha . . .	38
Tabela 4 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone . . . . .	45
Tabela 5 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone . . . . .	46
Tabela 6 – Comparação dos resultados em MATLAB com os resultados gerados pelo Ansys Fluent para o cone . . . . .	47
Tabela 7 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil . . . . .	49
Tabela 8 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil . . . . .	50
Tabela 9 – Comparação dos resultados em MATLAB com os resultados gerados pelo Ansys Fluent para o míssil . . . . .	51

# Lista de abreviaturas e siglas

CFD	Computational Fluid Dynamics
EDP	Equação Diferencial Parcial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EF	Elementos Finitos
FCBI	Flow Condition Based Interpolation
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MER	Mass Entrainment Ratio
MVF	Método dos Volumes Finitos
VF	Volumes Finitos
UDF	User Defined Functions

# Lista de símbolos

$a$	Velocidade do som local $m/s$
$b$	Limite de compressibilidade das moléculas
$e$	Energia interna
$E$	Energia total
$h$	Entalpia
$M$	Número de Mach
$M_c$	Número de Mach na superfície do cone
$M_n$	Número de Mach normal à onda de choque
$p$	Pressão estática $Pa$
$p_c$	Pressão na superfície do cone $Pa$
$p_0$	Pressão total $Pa$
$R$	Constante do gás ideal para o ar $J/Kg.K$
$Re$	Número de Reynolds
$t$	Tempo
$T$	Temperatura estática $K$
$T_0$	Temperatura total $K$
$u$	Velocidade na direção $x$ $m/s$
$v$	Velocidade na direção $y$ $m/s$
$V'$	Velocidade adimensional
$V'_r$	Componente radial da velocidade adimensional
$\beta$	Ângulo da onda de choque formada pela cunha
$\gamma$	Coefficiente politrópico
$\delta$	Deflexão do ângulo do fluxo para o cone

$\theta$	Ângulo da cunha
$\theta_c$	Ângulo do cone
$\theta_s$	Ângulo da onda de choque formada pelo cone
$\rho$	Masa específica estática $kg/m^3$
$\rho_0$	Massa específica total $kg/m^3$

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b>	<b>15</b>
1.1.1	Difusores	16
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>18</b>
<b>1.4</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL</b>	<b>28</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelagem matemática sobre a cunha</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Onda de choque sobre a cunha e o cone</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Metodologia Numérica</b>	<b>32</b>
2.3.1	Classes de aproximação numérica	32
2.3.2	Definição do Código comercial utilizado	33
<b>2.4</b>	<b>Solução numérica para a cunha</b>	<b>34</b>
<b>2.5</b>	<b>Resultados sobre a cunha</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>ESCOAMENTO TRIDIMENSIONAL</b>	<b>40</b>
<b>3.1</b>	<b>Fluxo sobre o cone</b>	<b>40</b>
3.1.1	Equações de Taylor-Maccoll	41
3.1.2	Procedimentos para a solução numérica	42
3.1.3	Formulação numérica em MATLAB	43
<b>3.2</b>	<b>Solução numérica comercial para o cone</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Resultados sobre o cone</b>	<b>46</b>
<b>3.4</b>	<b>Solução numérica comercial para o míssil</b>	<b>48</b>
<b>3.5</b>	<b>Resultados sobre o míssil</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>

# 1 Introdução

Este capítulo tem o intuito de apresentar o trabalho como um todo, mostrando o tema a ser desenvolvido e os principais aspectos que serão tratados ao longo do texto.

Na primeira parte do capítulo será apresentada a motivação e uma breve explicação sobre o que são ondas de choque e quais as aplicações de seu estudo, expondo o conteúdo a ser abordado no trabalho ao leitor. Depois serão demonstrados os objetivos do trabalho de acordo com o que está sendo desenvolvido nesta área de estudo.

Ao final do capítulo será apresentada uma revisão da pesquisa que foi feita na área de escoamento compressível e simulações numéricas. Será discutido, dessa forma, o princípio de funcionamento desse tipo de sistema e seu desempenho típico. Serão apresentadas revisões teóricas de diferentes conteúdos que utilizam este tipo de escoamento em diversos estudos e mesclam esse conteúdo com as simulações.

## 1.1 Motivação

Escoamentos compressíveis são comumente denominados como escoamentos em que a massa específica do fluido é variável. A sua ocorrência em torno de cunhas e cones representa um problema clássico tanto na aerodinâmica de aeronaves e de veículos espaciais. A literatura mostra uma ampla gama de soluções numéricas e analíticas para este tipo de escoamento (ANDERSON, 2010). A sua pesquisa básica tem um valor muito significativo para o conhecimento genérico de reação de fluidos compressíveis em alta velocidade. Para situações em regime permanente, a onda de choque oblíqua característica deste escoamento representa um processo termodinâmico de compressão natural. Dependendo do tipo de angulação da cunha, soluções “forte” e “fraca” surgem e que atendem a segunda lei da termodinâmica. No entanto, apenas a solução fraca ocorre na natureza.

As ondas de choque aparecem em um fluxo supersônico. Elas são regiões muito finas onde as propriedades do fluxo mudam drasticamente. O estudo e o cálculo das mudanças dessas propriedades e a importância dos aspectos físicos e da mudança sobre a onda de choque são um ramo muito importante no estudo sobre o fluxo supersônico. Quando há presença de uma cunha provocando uma mudança mais suave de direção no escoamento, aparecem as ondas de choque oblíquas, muito semelhantes às normais, porém com uma perda de energia menor. Essas ondas são coladas ao corpo e as partículas mudam de direção ao passar por elas. Após esse tipo de onda, o número de Mach diminui, mas na maioria das vezes continua supersônico, existindo também casos em que pode ficar subsônico (ANDERSON, 2010). A pressão estática aumenta após a onda.



Nos escoamentos supersônicos percebe-se a existência de diferentes tipos de onda de choque. Em bocais de exaustão de motores, por exemplo, temos as ondas de choque normais, que aparecem normais a superfície e desaceleram o escoamento de uma velocidade supersônica para uma velocidade subsônica, ocorrendo um aumento da pressão estática e da entropia. Outro fato a salientar é a importância da onda de choque normal. Elas, por serem destacadas do corpo aquecem o ar ao invés de aquecer o corpo. Uma onda de choque oblíqua, por ser colada, aquece muito mais a fuselagem.

Quando essa discussão sobre ondas de choque abrange apenas fluxos unidimensionais ou bidimensionais, o seu estudo pode ser feito com soluções analíticas permitidas pela matemática tratável, lidando com muitas aplicações práticas. Para aplicações em ondas de choque oblíquas tridimensionais e dentre outras que abrangem a grande maioria das aplicações do mundo real, os fluxos são governados pelas equações não-lineares mais completas do movimento, para as quais não existem soluções analíticas de forma fechada (ANDERSON, 2010). Para lidar com esta situação, é necessário deixar o mundo das soluções analíticas e entrar no mundo relativamente novo das soluções numéricas. Em vez de encontrar boas equações para resolver nossos fluxos, vamos processar números para nossos fluxos de forma inteligente, refletindo aspectos modernos do fluxo compressível e dando uma ideia de como as soluções para problemas complexos são realizadas hoje.

O uso de simulação numérica (SPALART, 2000) para observar este escoamento vem no sentido de se observar o comportamento da onda de choque em relação ao ângulo da cunha para com isto, melhorar o projeto de veículos aeronáuticos e aeroespaciais. Este escoamento está relacionado ao projeto de sistemas, tais como *ramjets*, ogivas, mísseis e veículos aéreos não tripulados. Esta estratégia complementa o uso de soluções analíticas, experimentais ou mesmo aferidas em veículos reais. Além da simulação numérica do escoamento, metodologias de otimização podem ser empregadas de forma simultânea para acelerar a gestão do projeto aerodinâmico destas formas.

### 1.1.1 Difusores

Uma das grandes aplicações do estudo das ondas de choque oblíquas são os difusores supersônicos. Os difusores tem duas principais funções na turbina do avião. A primeira é desacelerar a entrada de massa de ar suficientemente para permitir a combustão estável, e a segunda, ele deve comprimir a massa de ar antes da adição de calor para atingir uma boa eficiência térmica (DAILEY, 1954).

Se trata de um problema simples para reduzir a velocidade próxima da combustão para um valor baixo arbitrário utilizando difusão subsônica. A única penalização é uma redução correspondente no impulso relativo a área frontal da câmara de combustão. Isso é compensado por um aumento na eficiência do ciclo, mas o ganho é tão pequeno que

não tem importância prática. Acontece que todo esforço é feito para atingir a velocidade máxima de queima compatível com uma boa eficiência de combustão e performance de queima estável. Seja qual for esse máximo, ele simplesmente se torna um requisito de design para o difusor.

O problema mais complicado é que afim de comprimir o fluxo supersônico é necessário reduzir a área em que ele passa. Afim de atingir uma boa eficiência total é essencial obter a compressão supersônica máxima possível. Isso é obtido com a menor razão de contração da entrada em que irá começar. Para geometrias fixas de difusores, isso requer o uso de corpo central para comprimir o fluido antes que entre na turbina (cone). Difusores sem o corpo central, ou outros meios de compressão externa, são restringidos seriamente pelo problema inicial a ponto de não serem viáveis para uso prático em número de Mach muito alto. Infelizmente, a compressão produzida pelo corpo central é acompanhada por uma força de arrasto. Como tanto o arrasto e a eficiência aumentam diretamente com a deflexão do fluido, é necessário otimizar o desenho do difusor em termos de impulso de rede. Apesar disso ser mais trabalhoso que desenhar para uma dada velocidade de queima, pode ser feito de uma maneira direta com métodos existentes.

Uma característica importante de todos os difusores supersônicos é a existência do regime supercrítico que ocorre quando o fluxo de volume interno é máximo para um dado número de Mach. O ponto "crítico" é simplesmente o ponto de eficiência de compressão máxima no regime supercrítico, e é a condição para o impulso de rede máximo de um ramjet. A operação de um ramjet no ponto crítico é conseguida aumentando a adição de calor na câmara de combustão até que o sistema de ondas de choque dentro da turbina seja movido para cima até a beira de sua entrada. As perdas de eficiência das onda de choque dentro do difusor são minimizadas e a pressão da câmara de pressão é máxima para operação supercrítica (DAILEY, 1954).

As características importantes de um motor ramjet supersônico com difusor de corpo central são mostrados na Fig. 1.

As estações de fluxo livre e de saída são indicados por 0 e 6, respectivamente. O final da difusão subsônica situa-se no ponto 2 e a combustão está completa no ponto 4. A parte 5 é o ponto crítico sônico após a combustão. O ponto 1 é introduzido para que as regiões de compressão subsônicas e supersônicas sejam distinguidas. É vagamente definido como o início do fluxo subsônico uniforme. O ponto 3 é usado para casos em que se deseja isolar a força de arrasto da câmara de combustão. Embora nem todas essas estações sejam importantes em uma discussão de difusores, eles são usados aqui por causa da coerência com a prática estabelecida.

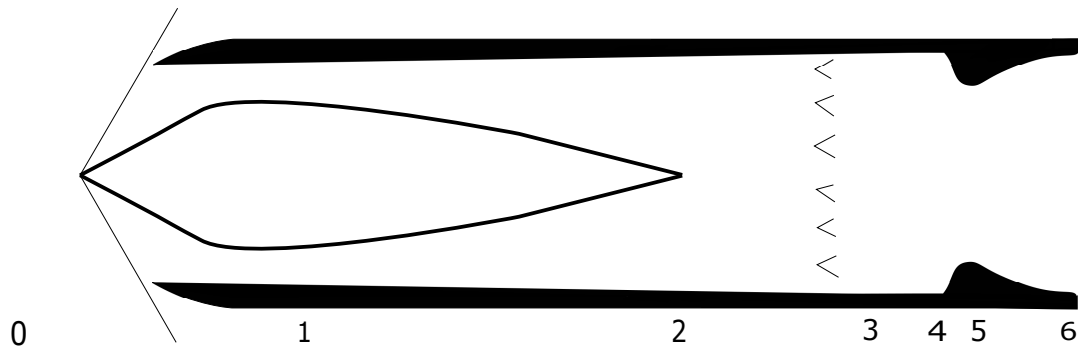


Figura 1 – Posições em um Ramjet

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é fazer estudos sobre a onda de choque oblíqua em escoamento supersônico invíscido para comparação e validação entre as simulações em 2D (cunha) e 3D (cone). Após isso, será feita uma modelagem aproximada de um míssil *ramjet* real para consolidar o conhecimento da natureza do escoamento sobre o dispositivo.

## 1.3 Objetivos Específicos

- Realizar a simulação numérica do escoamento em torno de uma cunha (2D) e um cone (3D) utilizando-se do código ANSYS FLUENT.
- Validar os resultados obtidos na simulação da cunha com a solução analítica disponível na literatura e os resultados obtidos na simulação numérica comercial do cone com o código numérico customizado em MATLAB desenvolvido por Sercombe ([SERCOMBE, 2004](#)).
- Comparar os resultados das simulações da cunha (2D) e do cone (3D) mostrando suas diferenças.
- Realizar a simulação numérica comercial (ANSYS FLUENT) sobre a modelagem de um míssil *ramjet* aproximado para estudo do escoamento supersônico ao redor do mesmo.

## 1.4 Revisão Bibliográfica

As questões a serem estudadas neste TCC estão intimamente associadas ao quadro geral das equações diferenciais de dinâmica dos fluidos, que regem o movimento do meio,

exceto nas descontinuidades (COURANT; FRIEDRICHS, 1999). Este sistema de equações expressa:

- (a) O princípio da conservação de massa,
- (b) Lei de Newton de conservação de momento,
- (c) A condição de que as mudanças de estado sejam adiabáticas,
- (d) A forma particular da equação de estado.

As equações diferenciais, junto com as condições iniciais e de contorno apropriadas, determinam um fenômeno individual.

As equações de dinâmica dos fluidos podem ser expressas em duas formas diferentes, *forma Lagrangeana* e *forma Euleriana*. As equações na forma Lagrangeana descrevem o movimento em termos dos caminhos das partículas individuais do gás, por exemplo, as coordenadas  $x, y, z$  das partículas em função do tempo  $t$  e três parâmetros  $a, b, c$  que caracterizam a partícula individual;  $a, b, c$  são constantemente escolhidas como as coordenadas da partícula no tempo  $t = 0$ .

Contudo, na maioria dos casos a representação Euleriana é preferível tanto pelo ponto de vista da sua forma matemática, quanto da sua forma física. A atenção é direcionada para definição dos pontos  $(x, y, z)$  e com o que ocorre nesses pontos com o passar do tempo  $t$ . O movimento é então descrito dando como funções de  $x, y, z$  e  $t$  os componentes de velocidade  $u, v, w$  da partícula que acontece de estar no ponto  $(x, y, z)$  no tempo  $t$ .

Para ondas de choque normais, as condições de descontinuidade do fluido podem ser derivadas dos princípios de conservação de massa, momento e energia para fluidos unidimensionais. No caso de ondas de choque oblíquas, que são representadas por fluxo bidimensional, nós também podemos utilizar as mesmas derivadas dos princípios do fluido unidimensional. Isso ocorre porque, no caso das ondas de choque oblíquas, as derivadas envolvem apenas as componentes de velocidade que são normais a onda de choque  $(u_1, u_2)$ , a componente tangencial  $w$  não aparece nessas equações. Então, nós podemos deduzir que as mudanças através de uma onda de choque oblíqua são regidas apenas pela componente de velocidade normal a onda.

- A detonação oblíqua, um processo de combustão iniciado por um choque oblíquo, surge na maioria das aplicações de combustão supersônica, incluindo, mais notavelmente, o acelerador de ram e o motor de onda de detonação oblíqua. Além disso, é o fluxo de reação chocado compressível bidimensional genérico; conseqüentemente, seu valor de pesquisa básica é inerente (POWERS, 1994) com aplicações em sistemas de propulsão aeroespaciais hipersônicos.

No estudo do artigo (YANG et al., 2017), as estruturas de detonação oblíquas formadas por cones semi-infinitos são investigadas numericamente por resolução do fluxo instável, equações de Euler axissimétricas bidimensionais com um modelo de reação Arrhenius irreversível de um passo.

O artigo mostra resultados de simulações em que uma nova estrutura de onda, caracterizada por dois pontos distintos onde há acoplamento próximo entre o choque e a frente de combustão, é retratada quando o ângulo do cone ou o número de Mach do incidente são reduzidos. Esta estrutura é analisada examinando a variação da escala do comprimento da reação e comparando o campo de fluxo com o de detonações oblíquas planas, induzidas em cunhas.

Outras simulações são realizadas para estudar os efeitos da escala de comprimento químico e da energia de ativação, que são ambos encontrados para influenciar a formação desta nova estrutura. O mecanismo de iniciação por trás do choque cônico é discutido para investigar a interação entre o efeito do fluxo Taylor-Maccoll, curvatura frontal e liberação de energia da reação química em detonações oblíquas cônicas. Os campos de fluxo observados são interpretados por meio do limite energético como no regime crítico para o início da detonação.

O estudo numérico apresentado no artigo mostra que em um largo ângulo de cone e número de Mach incidente, a estrutura tradicional de ondas de detonação oblíqua é recuperada com características semelhantes à de detonações oblíquas induzidas em cunha. Para o caso de baixo número de Mach incidente ou ângulo de cone, os resultados numéricos apresentados no artigo retratam uma nova estrutura de formação de detonação oblíqua. Nesta estrutura, o forte acoplamento entre o choque e a frente de combustão pode ser observado em dois pontos distintos.

O campo de fluxo debaixo é caracterizado pelo choque desacoplado e frente de reação, livre de qualquer estrutura celular na superfície do choque. O mecanismo de formação desta nova estrutura é examinado examinando a variação dos comprimentos da zona de reação de indução e de ângulos de superfície e comparando as características de fluxo com as de deformações oblíquas planas e induzidas em cunha.

O efeito de curvatura e a não uniformidade do gás após o choque com maior temperatura e a densidade derivada do fluxo de Taylor-Maccoll tem duas características adicionais para a onda de detonação oblíqua cônica. O primeiro é mais dominado pelo fluxo das detonações oblíquas cônicas e resulta na formação da nova estrutura observada no estudo do artigo. Ao variar os dois parâmetros químicos do modelo cinético de Arrhenius de uma etapa, ou seja, o fator pré-exponencial que controla a escala de comprimento químico e a energia de ativação, verifica-se que uma curva de liberação de calor mais acentuada favorece a formação da nova estrutura. Em outras

palavras, a nova estrutura é influenciada predominantemente pela sensibilidade de temperatura da reação química governada pela ativação da energia interna.

- O artigo (LI, 2002) se preocupa com a existência de soluções globais contínuas de expansão de uma cunha de gás em um vácuo para equações de Euler compressíveis. Por transformação hodógrafa, primeiro é provado que o fluxo é governado por uma equação diferencial parcial de segunda ordem, que é ainda reduzida a um sistema de duas equações não homogêneas linearmente degeneradas no espaço de fase sob uma condição de irrotação. A conclusão do trabalho é aplicada para resolver o problema de uma cunha de gás que se expande no vácuo, o que é realmente um problema do tipo Goursat para essas duas equações de domínio supersônico.

Para encontrar seu resultado, ele procura soluções no domínio angular limitado. A partir de dois lemas principais, a solução final pode ser aferida:

- Supondo que exista uma solução positiva para as variáveis referidas como variantes de Riemann sob um domínio considerado. Então a sua norma tem uma fronteira uniforme e independente de  $u$  para todos os valores de  $u$  menor que zero.
- No domínio angular, a solução positiva menos a norma das variáveis referidas como variantes de Riemann é uniformemente delimitada.

A existência local é clássica porque os valores que delimitam são contínuos na origem. Então, ele usa estimativas a priori nesses dois lemas para concluir que a solução existe no domínio angular por extensão, passo a passo.

Com isso pode-se concluir que existe uma solução global única e regular das variáveis referidas como variantes de Riemann no domínio angular para  $u$  maior que zero.

- O artigo (PANDEY; SHARMA, 2007) estuda o grupo de transformações pontuais de simetria de Lie, que deixam as equações para fluxos planos e radialmente simétricos de um gás não ideal e invariante, são usados para obter uma solução exata que exiba dependência no espaço-tempo. Eles consideram a propagação de uma vaga descontinuidade através de um estado, caracterizada por esta solução. Além disso, a evolução de um choque característico e sua interação com a fraca descontinuidade são estudados. As propriedades das ondas refletidas e transmitidas e do salto na aceleração de choque, influenciado pela amplitude da onda incidente e pelo volume excluído de van der Waals, são completamente caracterizados e certas observações são notadas em relação ao seu comportamento contrastante.

No artigo, são consideradas as equações instáveis que governam fluxos planos, cilíndrico e esfericamente simétricos em um gás de van der Waals, e usam o método invariante do grupo de Lie para determinar a solução exata e particular que exibe a

dependência do espaço-tempo. Isso permite o estudo do fenômeno de interação das ondas não lineares influenciadas pelo efeito do gás real, como o volume excluído de van der Waals e descrevem a história completa da evolução comportamental de um choque característico junto com as ondas incididas, refletidas e transmitidas.

A análise do grupo de Lie é usada para obter uma solução exata das equações que descrevem os fluxos planos instáveis e radialmente simétricos de um gás não ideal. É mostrado que o choque característico eventualmente decai. Contudo, os efeitos de gás real ( $b > 0$ ) resultam numa diminuição na velocidade da taxa de decaimento relativo ao que seria correspondente ao gás ideal ( $b = 0$ ).

É mostrado que uma onda de compressão culmina em um choque depois de um tempo finito, apenas se a descontinuidade inicial associada a ele exceder um valor crítico (ex.  $\pi_0 < -\pi_C < 0$ ). E um aumento no volume excluído de van der Waals  $b$  serve para apressar o início de uma onda de choque. No entanto, quando  $-\pi_C \leq \pi_0 < 0$  ou  $\pi_0 > 0$ , em ambos os casos a onda eventualmente decai e um aumento em  $b$  melhora a decadência da descontinuidade fraca. Contudo, a curvatura de frente de onda tem um efeito oposto no sentido de que o tempo de formação do choque em um fluxo esféricamente simétrico é maior do que um cilindricamente simétrico ou um fluxo plano.

É mostrado que quando essa descontinuidade fraca encontra o choque característico, dá origem a uma onda refletida e uma onda transmitida com amplitudes  $\epsilon$  e  $\varepsilon$ , respectivamente. Estas amplitudes são determinadas juntamente com o salto na aceleração de choque no tempo da colisão. É mostrado que um aumento, tanto em  $b$  quanto em  $\pi_0$  (a magnitude da descontinuidade inicial associada à onda incidente) ambos causam  $\epsilon$ ,  $\varepsilon$  e  $|\dot{V}|$  para aumentar a magnitude. É observado que se a onda incidente é compressível (respectivamente, expansiva), então a onda refletida é expansiva (respectivamente, compressiva), enquanto a onda transmitida é compressiva (respectivamente, expansiva). Além disso, é notado que depois do impacto, o choque acelerará ou desacelerará dependendo se a onda incidente é compressiva ou expansiva.

- O artigo (ZAFAR; SHARMA, 2016) estuda o problema de expansão de uma cunha de um gás não ideal no vácuo em um domínio delimitado bidimensionalmente. O problema é modelado pelas equações de Euler padrão de fluxo compressível, que são simplificadas por uma transformação para variáveis de similaridade e depois para a transformação hodógrafa para chegar a uma equação diferencial parcial quasilinear de segunda ordem no espaço de fase. Isto, usando variantes de Riemann, pode ser expressa como um sistema linearmente degenerado não homogêneo desde que o fluxo seja supersônico. Para a solução do sistema, foi estudada a interação de ondas de refração planar bidimensionais, que é um problema de Riemann bidimensional com

dados constantes por partes no plano auto-similar. O efeito de gás real, que influencia significativamente as regiões de fluxo e suas delimitações e que não aparecem no modelo de gás ideal, são elucidados.

As conclusões podem ser tiradas a partir de três teoremas:

- Deixe uma solução para o problema de valor limite para um gás não ideal na região  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus l$ . Então, a técnica de região invariante, a delimitação da norma das variantes de Riemann é uniforme e depende apenas dos valores limites.
  - Deixe a solução para o problema de valor limite para um gás não ideal na região  $\tilde{\Omega}$ . Então, a delimitação da norma das variantes de Riemann é uniforme e depende apenas das normas das soluções e dos valores limites dados.
  - Deixe um problema de valor limite com os valores limites dados para um gás não ideal sob consideração. Então existirá apenas uma única solução das variantes de Riemann pertencentes a região do domínio delimitado desde que o limite de compressibilidade  $b$  das moléculas de gás satisfaça a desigualdade da sua multiplicação pela massa específica tendo que ser menor que o inverso da massa inicial ao quadrado mais um. Além disso, a interferência do vácuo  $l$  é Lipschitz contínua e seu raio de curvatura aumenta com um aumento em  $b$  relativo ao que teria sido para um caso de gás ideal ( $b = 0$ ).
- Hoje em dia, muitos estudos sobre características de fluxo utilizam o software comercial de dinâmica de fluidos computacionais (CFD) para simular seus fenômenos em diversos campos. O objetivo do artigo (JEONG; SEONG, 2014) é contribuir para a discussão sobre a eficiência do método de elemento finito (EF) e de volume finito (VF), que foram utilizados principalmente como solucionadores CFD para situações com o mesmo número de elementos e geometrias de malha. Foi comparada a precisão dos resultados e os padrões de fluxo entre três códigos comerciais diferentes - Ansys CFX, Fluent e ADINA, que são usados em muitos campos. Foram comparados problemas de fluxo laminar incompressíveis tridimensionais com modelos simples de tubulação e bifurcação.

ADINA é um algoritmo comercial que pode analisar problemas relacionados ao fluxo de fluido usando códigos de elementos finitos / volumes finitos em um único programa. Ao calcular o fluxo de fluido, o ADINA é suportado por três esquemas - um método de elementos finitos baseado em nódulos (MEF) e interpolação baseada em condição de fluxo (FCBI - *Flow condition based interpolation*), e um FCBI-C baseado em células. O FCBI foi criado para completar os problemas de MEF normal. Portanto, ADINA é chamado de software MEF que usa principalmente um FCBI baseado em nódulos.



O esquema FCBI é considerado um método de elementos finitos, quando o domínio do problema é considerado como uma assembleia de elementos finitos discretos conectados em pontos nodais nos limites dos elementos, e a velocidade e a pressão são interpoladas dentro de cada elemento (BATHE; LEDEZMA, 2007). Este esquema também é considerado um método de volume finito, uma vez que a forma das equações de Navier-Stokes está satisfeita sobre o volume de controle. Assim, a solução de elementos finitos da FCBI satisfaz a conservação em massa e a conservação de momento para os volumes de controle (em contraste, os métodos tradicionais de elementos finitos não satisfazem as conservações de massa e momento) (BANIJA-MALI; BATHE, 2007). O principal motivo pelo qual o esquema FCBI foi proposto como um híbrido entre elemento finito e de volume finito, ao invés de apenas um método de volume finito, é que as funções de interpolação não estão definidas nos métodos de volume finito. A especificidade do esquema FCBI-C é que todas as variáveis da solução são definidas no centro do elemento e o acoplamento entre a velocidade e à pressão é tratado iterativamente. A característica mais proeminente deste programa é que os modelos sólidos criados em ADINA podem ser acoplados a qualquer modelo de fluido para analisar a interação da estrutura de fluidos. Quanto ao código comercial Ansys, este será utilizado no desenvolvimento deste tcc e será melhor explicado no decorrer do trabalho.

As equações governantes utilizadas para o estudo numérico da mecânica dos fluidos foram baseadas nas equações de continuidade e de momento. Para comparar as taxas de fluxo e os padrões de fluxo nas simulações dos três pacotes comerciais de CFD, foram modelados dois modelos - modelos simples de tubulação e bifurcação (em forma de Y). O comprimento do tubo simples usado foi 150 mm de acordo com a equação do fluxo totalmente desenvolvido ( $Le/D = 0,06Re$ ,  $Le$ : comprimento,  $D$ : diâmetro,  $Re$ : número de Reynolds) em fluxo laminar e incompressível (WHITE, 2003) e as condições de fronteira utilizadas em todos os casos foram as mesmas.

Foram comparados dois tipos de malha, a malha tetraédrica e a malha hexaédrica. A malha tetraédrica pode facilmente representar geometrias complexas, mas tem pouca precisão se comparada à malha hexaédrica. Recentemente, a precisão da malha de tetraédrica melhorou bastante, e muitos pesquisadores passaram a usá-la para representar geometrias complexas.

Embora as equações governantes e as condições de fronteira fossem as mesmas em todos os códigos CFD, os resultados dos esquemas de interpolação de cada código CFD variaram ligeiramente. O software MVF (CFX e Fluent) mostrou resultados semelhantes a respeito do tipo de malha (malhas de hexaedro ou tetraedro). No entanto, o FCBI mais utilizado com base em MEF e um dos módulos de fluidos ADINA foi influenciado pelo tipo de malha utilizado, enquanto a FCBI-C com base na MVF mostrou resultados semelhantes para diferentes tipos de malha. O tempo

de cálculo para o mesmo número de malhas foi aproximadamente 5 vezes maior para o módulo baseado em MEF, em comparação com o módulo baseado em MVF. Conseqüentemente, os códigos comerciais MEF CFD precisarão considerar o tipo de malha, a qualidade e o número de elementos de malha ao contrário dos códigos CFD MVF.

- As simulações de CFD permitem que os pesquisadores entendam o comportamento do fluxo e quantifiquem importantes parâmetros de fluxo, como taxas de fluxo de massa ou quedas de pressão, desde que as ferramentas de CFD tenham sido devidamente validadas contra resultados experimentais.

É importante ressaltar que a precisão de uma simulação de CFD se baseia fortemente nas suposições feitas. Geralmente, quanto menos restritivas forem as hipóteses feitas, mais precisos serão os resultados. No entanto, as suposições podem implicar uma redução significativa no consumo de tempo sem uma perda na precisão, desde que o problema físico que está sendo modelado atenda aos requisitos exigidos.

Simular um sistema de entrada ou de exaustão de motores de combustão interna, por exemplo, é apenas um grande expoente desse tipo de problema. Esses sistemas são compostos principalmente de dutos, que podem ser simulados com precisão por meio de códigos unidimensionais e não viscosos. No entanto, há vários componentes que manifestam um comportamento de fluido tridimensional complexo, como turbomáquinas ou coletores, não podendo ser simulados adequadamente por códigos 1D e, portanto, exigindo códigos 3D viscosos.

O trabalho realizado por (GALINDO et al., 2011), visa economizar tempo computacional simulando os componentes complexos do sistema de combustão interna por meio de um código 3D e modelando com um código 1D o resto do sistema, ou seja, os dutos. Desta forma, é necessária uma metodologia de acoplamento entre o código 1D e o 3D nas respectivas interfaces. No trabalho, eles utilizam uma metodologia de acoplamento entre o código 1D desenvolvido pela OpenWAM e o código comercial 3D FLUENT, através do Método de Características, foi desenvolvido e validado.

O OpenWAM é um modelo de dinâmica dos gases unidimensional de fonte aberta capaz de calcular os fluxos de ar e gás dentro dos sistemas de admissão e escape dos motores de combustão interna. O OpenWAM calcula o fluxo interno em tubulações sob a suposição de fluxo unidimensional invíscido não linear (OPENWAM, 2016).

FLUENT é um código proprietário CFD, baseado na discretização do volume finito, capaz de simular fluxos viscosos, tridimensionais, etc (GUIDE, 2011). ANSYS FLUENT é usado extensivamente em indústrias como automotiva, aeroespacial, química, etc. No entanto, como dito anteriormente, é um código comercial, que impossibilita a modificação do código para executar certas tarefas que não são implementadas por

padrão. No entanto, o programa oferece as chamadas UDFs (*User Defined Functions* - Funções Definidas pelo Usuário) para esse propósito, permitindo ao usuário escrever uma função na linguagem de programação C que pode ser carregada dinamicamente com o solucionador FLUENT, para executar as tarefas desejadas. No artigo, é desenvolvida uma metodologia para realizar um acoplamento de código proprietário 1D-3D.

A principal vantagem deste tipo de modelagem é que ele permite alcançar uma boa resolução geométrica (3D) quando necessário, mas com um custo computacional reduzido se comparado a uma simulação 3D de todo o domínio. Pode-se afirmar que o acoplamento economiza de 1 a 2 ordens de magnitude no tempo, embora a redução do tempo dependa do problema.

- Os ejetores supersônicos têm sido usados há muito tempo como dispositivos de bombeamento passivos para uma variedade de aplicações, como resfriamento de reatores nucleares, bombeamento de fluidos voláteis e compressão de refrigerantes em sistemas de energia. O desempenho superior do ejetor é normalmente alcançado ao maximizar o arrastamento de um fluxo de baixa pressão (fluxo de sucção) em relação a uma certa vazão de alta pressão (fluxo motriz) ou, em outras palavras, maximizando o Índice de Arrastamento de Massa (*MER - Mass Entrainment Ratio*) definido como  $MER = \dot{m}_{sucção} / m_{motriz}$ . Este efeito de arrastamento é o resultado da transferência de momento entre dois fluidos através de uma camada de mistura de cisalhamento dentro do ejetor.

No trabalho de (MAZZELLI et al., 2015), análises numéricas e experimentais são realizadas em um ejetor de ar supersônico para avaliar a eficácia de técnicas computacionais comumente usadas na previsão das características do fluxo do ejetor. O comportamento global deste ejetor de ar supersônico é o resultado de uma combinação de características complexas de fluxo dentro do ejetor, incluindo camadas limites sujeitas a gradientes de pressão adversos, camadas de mistura turbulentas delimitadas por regiões próximas à parede, efeitos de compressibilidade como separações induzidas por choque, desprendimento de vórtices e recirculando regiões. É por causa dessa complexidade que projetos e desempenhos de ejetores têm sido difíceis de caracterizar e otimizar. Com o advento das técnicas computacionais modernas, novas ferramentas para analisar tais fluxos se tornaram disponíveis para superar as dificuldades em prever o fluxo do ejetor. No entanto, eles ainda estão longe de serem completamente confiáveis, tornando necessária a validação experimental. Estudos anteriores destacaram a sensibilidade dos resultados de CFD ao modelo de turbulência usado, e não foi encontrada concordância geral sobre quais modelos de turbulência são melhores para modelagem fluxos ejetor.

Vários autores mostraram que as discrepâncias entre CFD e experimentos estão for-

temente relacionadas às condições de operação (BARTOSIEWICZ; AIDOUN; MERCADIER, 2006; SRIVEERAKUL; APHORNATANA; CHUNNANOND, 2007). Em particular, verificou-se que a previsão do MER em condições fora do projeto é mais desafiadora do que nas condições de projeto. Uma maneira de capturar condições fora do projeto seria executar simulações 3D mais precisas, mas muito poucos exemplos disso podem ser encontrados na literatura. (PIANTHONG et al., 2007) realizaram simulações 3D em uma geometria axissimétrica e encontraram resultados semelhantes aos das simulações em 2D. No entanto, eles avaliaram apenas um perfil de pressão em condições de projeto, sem considerar condições de projeto. (BOUHANGUEL; DESEVAUX; GAVIGNET, 2009) também realizaram simulações 3D simétricas com diferentes modelos de turbulência. Eles compararam os resultados com simulações 2D no caso do fluxo de sucção zero e descobriram que os cálculos 3D estavam em melhor acordo com os dados experimentais.

A falta de estudos de validação fora do projeto na literatura, juntamente com a comparação limitada de diferentes modelos de turbulência, fornece a motivação para o estudo do artigo (MAZZELLI et al., 2015). O trabalho compara várias simulações 3D com simulações 2D equivalentes para a geometria do ejetor transversal retangular de interesse. Além disso, quatro diferentes modelos de turbulência são comparados para encontrar o esquema que melhor reproduz os resultados experimentais. Esta comparação leva em conta os parâmetros globais (taxas de fluxo de massa e MER) e também inclui uma investigação das fontes da discrepância entre os resultados numéricos e experimentais.

Uma comparação de parâmetros globais conclui que a concordância entre dados numéricos e experimentais é muito boa em condições de projeto. Ao passar para condições fora do projeto, as simulações em 2D tendiam a perder o ponto crítico e os pontos subsequentes do projeto, enquanto os cálculos 3D se aproximavam mais dos resultados experimentais. Conclui-se que as perdas por fricção causadas pelas paredes frontal e traseira da seção de teste do ejetor evitam que o jato motriz transfira algum momento para o fluxo de sucção, reduzindo assim o MER do ejetor e diminuindo a pressão crítica. Esse efeito, que pode ser acentuado pela pequena razão de aspecto da geometria em estudo, só pode ser capturado por cálculos 3D, cujos resultados correspondem às curvas experimentais mais de perto.

Embora as diferenças entre os modelos de turbulência não sejam tão grandes, parece óbvio que o uso de simulações em 3D é quase obrigatório para obter resultados razoáveis em condições fora do projeto. Além disso, para avaliar melhor as capacidades preditivas dos vários modelos, são planejados estudos experimentais adicionais que podem sondar o interior do ejetor para obter mais informações sobre a localização e os efeitos de choques de condensação e formação de gotículas no arrastamento do fluxo de sucção.

## 2 Escoamento bidimensional

O presente capítulo apresenta, primeiramente, a metodologia utilizada para o cálculo analítico invíscido da onda de choque sobre uma cunha. Após isto, é apresentada uma comparação entre o escoamento 2D e 3D no caso de formação de onda de choque oblíqua. Depois é apresentada uma explanação sobre a metodologia numérica do código comercial utilizado (ANSYS FLUENT) e, logo em seguida, a modelagem numérica feita para a cunha. Por fim, são apresentados os resultados da simulação realizada. Os resultados encontrados são comparados com a solução analítica.

### 2.1 Modelagem matemática sobre a cunha

Dado o valor do ângulo da cunha ( $\theta$ ) e do número de Mach em fluxo livre ( $M$ ), podemos calcular o ângulo da onda de choque ( $\beta$ ) utilizando-se da Eq. 2.1 (ANDERSON, 2010):

$$\tan \beta = \frac{M^2 - 1 + 2\lambda \cos \left[ \frac{4\pi\delta + \cos^{-1} X}{3} \right]}{3 \left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right] \tan \theta} \quad (2.1)$$

Onde:

$$\lambda = \left[ (M^2 - 1)^2 - 3 \left( 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right) \tan^2 \theta \right]^{0,5} \quad (2.2)$$

$$X = \frac{(M^2 - 1)^3 - 9 \left( 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 + \left( \frac{\gamma+1}{4} \right) M^4 \right) \tan^2 \theta}{\lambda^3} \quad (2.3)$$

A onda de choque pode ser representada pela Fig. 2:

Da imagem, achado o valor de  $\beta$ , pode-se encontrar o valor de  $M_{n1}$  de acordo com as relações trigonométricas necessárias. Ele então fica igual a:

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta \quad (2.4)$$

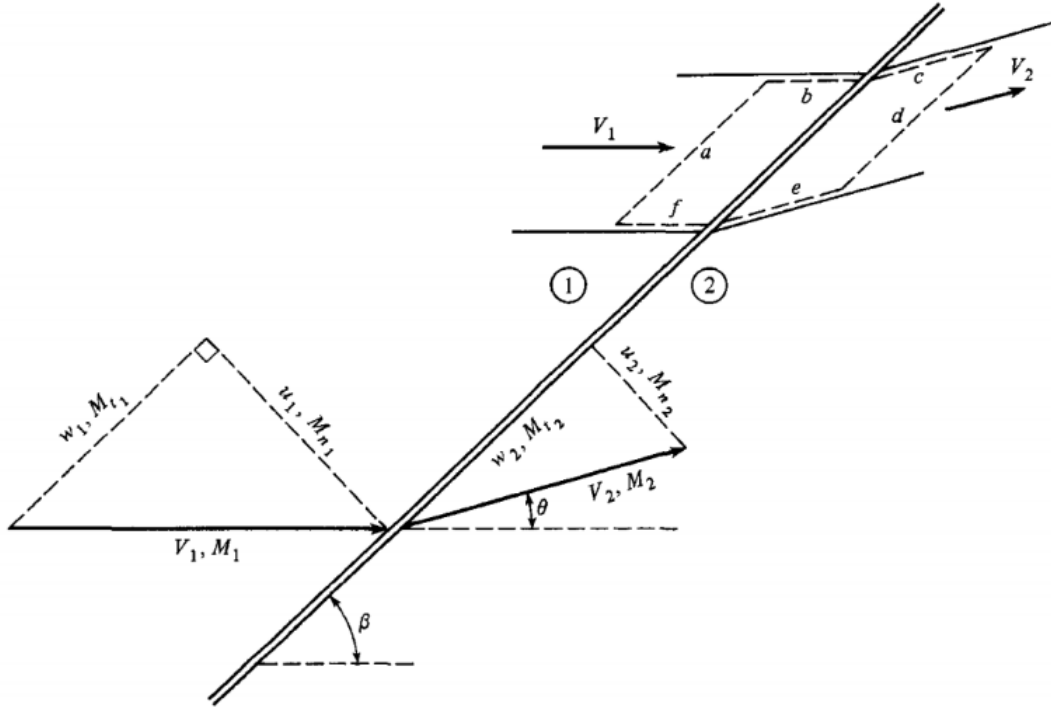


Figura 2 – Geometria da Onda de Choque Oblíqua (ANDERSON, 2010)

Com o valor de  $M_{n1}$  em mãos, é possível calcular o valor de  $M_{n2}$  de acordo com a Eq. 2.5.

$$M_{n2}^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_{n1}^2}{\gamma M_{n1}^2 - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)} \quad (2.5)$$

E assim, usando novamente relações trigonométricas de acordo com a Fig. 2, acha-se o valor do número de Mach após a onda de choque ( $M_2$ ) com o seguinte cálculo:

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} \quad (2.6)$$

Para achar os valores de temperatura e pressão após a onda de choque ( $T_2$  e  $p_2$ ) utilizam-se, respectivamente, as Eqs. 2.7 e 2.8:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)\right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \quad (2.8)$$

Onde  $\gamma$  é o coeficiente politrópico. Para o ar ele tem valor constante de 1,4. Estas equações são verdadeiras para uma onda de choque normal. No caso da onda de choque

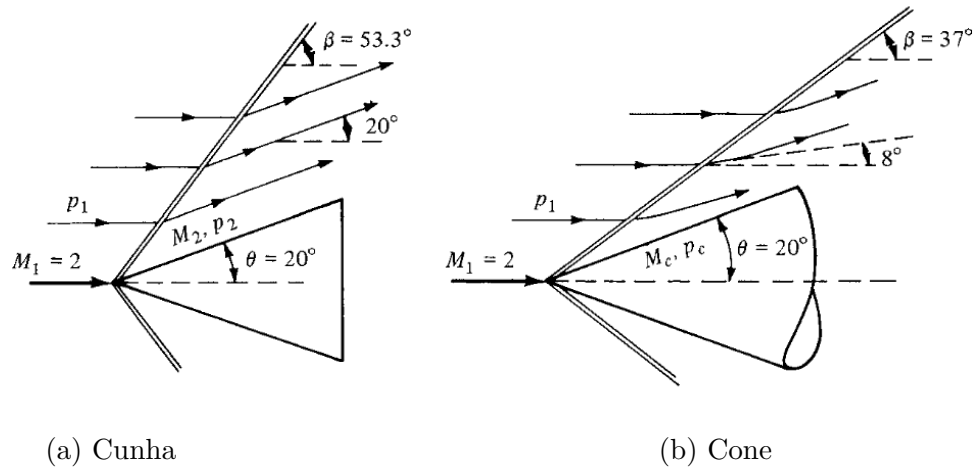


Figura 3 – Relação entre fluxo supersônico sobre a cunha e o cone (ANDERSON, 2010).

oblíqua, basta substituir  $M_1$  das equações por  $M_{n1}$ , como explanado na revisão bibliográfica deste trabalho.

Tendo o valor de  $T_2$  e  $p_2$  em mãos, pode-se facilmente achar o valor de  $\rho_2$  pela seguinte equação de estado (Eq. 2.9):

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} \quad (2.9)$$

Onde  $R$  é a constante do gás ideal, sendo seu valor igual a  $287,053 \text{ J/Kg.K}$ .

## 2.2 Onda de choque sobre a cunha e o cone

Para o fluido supersônico sobre a cunha, a teoria de ondas de choque oblíquas desenvolvida no capítulo anterior é uma solução exata da sua estrutura de fluxo de campo (ANDERSON, 2010). Suas características são uma onda de choque colada a ponta, um fluxo uniforme depois da onda de choque com linhas de fluxo paralelas a superfície da cunha, e uma pressão de superfície igual a pressão estática atrás da onda de choque oblíqua ( $p_2$ ) como podemos ver na Fig. 3a. Trata-se este de um fluxo bidimensional que encaixa perfeitamente com a teoria de ondas de choque oblíqua bidimensionais.

Considerando o fluxo supersônico sobre o cone, como mostrado na Fig. 3b há também a onda de choque colada na ponta, porém a similaridade para por aí. O fluido sobre um corpo tridimensional experiencia um "efeito de alívio tridimensional". Isto é, comparando a cunha com o cone na Fig. 3, ambos tem o mesmo ângulo de  $20^\circ$ , porém, o fluxo sobre o cone tem uma dimensão extra para se mover. Com isso, fica mais fácil de se ajustar na presença do corpo cônico em comparação com a cunha bidimensional.

Uma consequência deste efeito de alívio tridimensional é que a onda de choque sobre o cone é mais fraca que a da cunha, ou seja, tem um ângulo de onda de choque menor como pode ser notado na Fig. 3. Contudo, entre a onda de choque e a superfície do cone, as linhas de fluxo devem gradualmente se curvar para cima, acomodando o cone de  $20^\circ$ . Também, em consequência do efeito de alívio tridimensional, a pressão na superfície do cone,  $p_c$ , é menor que a pressão de superfície da cunha  $p_2$ , e a velocidade de Mach na superfície do cone  $M_c$  é maior que a da superfície da cunha  $M_2$ . Portanto, o cone experiencia uma pressão superficial, temperatura, densidade e entropia menores do que a cunha. Segue-se também que, para um dado  $M_\infty$ , o ângulo de cone máximo permitido para uma solução de choque colada ao corpo é maior que o ângulo de cunha máximo. Isto é claramente demonstrado na Fig. 4. Este fluxo sobre o cone é um caso degenerado de fluxo tridimensional, e é governado por equações diferenciais não-lineares que devem ser resolvidas numericamente.

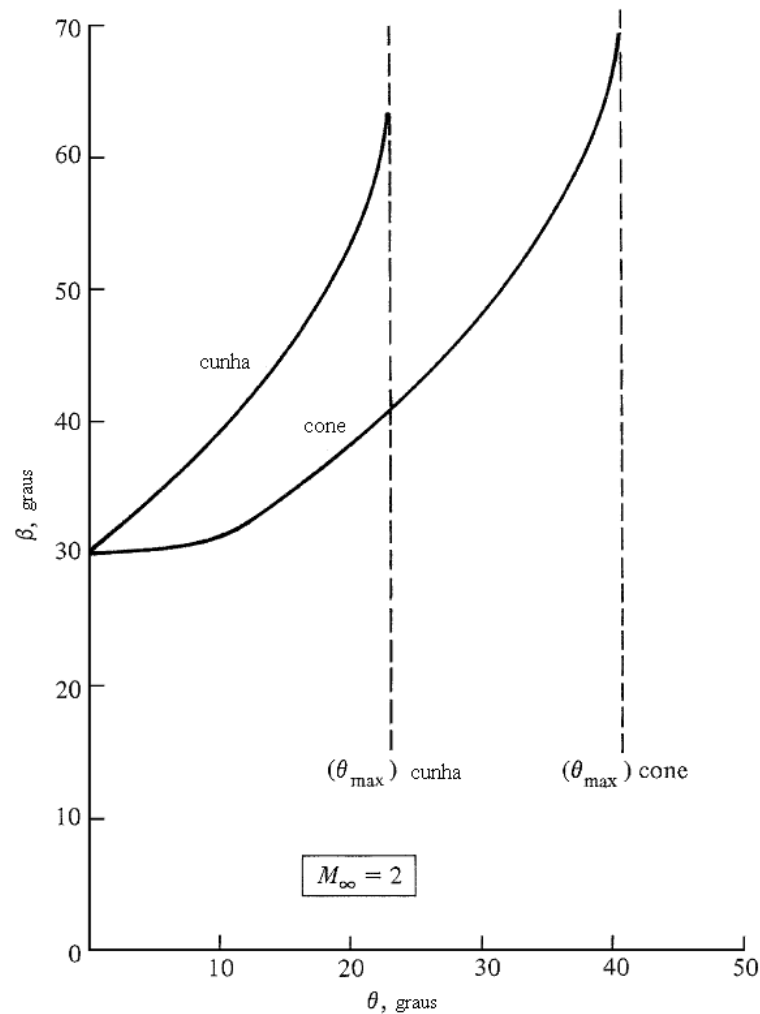


Figura 4 – Comparação entre os ângulos da onda de choque para cunhas e cone a Mach 2 (ANDERSON, 2010).



## 2.3 Metodologia Numérica

### 2.3.1 Classes de aproximação numérica

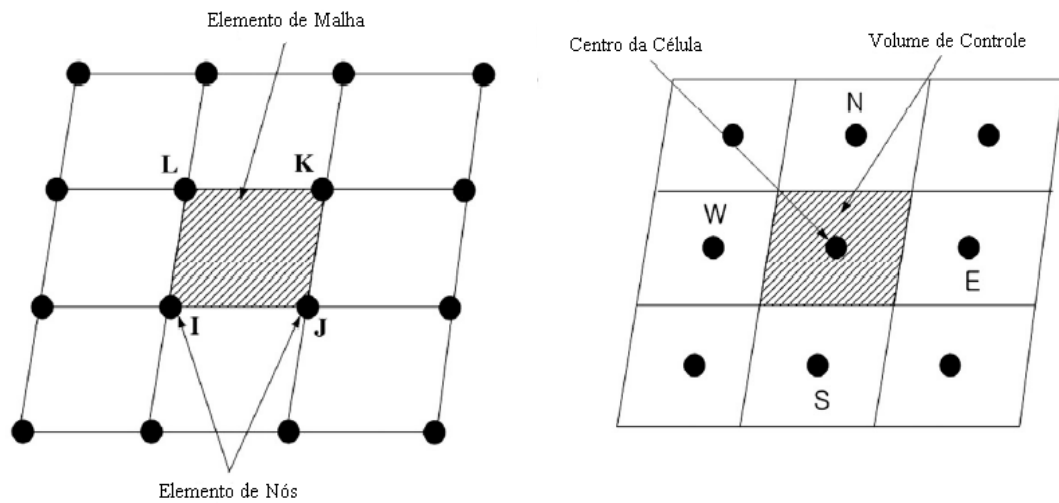
A fluidodinâmica computacional (*Computational Fluid Dynamics* – CFD) é definida como o conjunto de metodologias que, implementadas em um computador, permitem simular o escoamento de fluidos (HIRSCH, 2007).

Da análise da literatura foi possível observar a existência de várias técnicas de aproximação numérica, as mais comumente empregadas na CFD são: o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF).

O método das diferenças finitas é o método mais antigo de solução numérica de EDPs. Historicamente, o MDF sempre foi empregado na área de mecânica dos fluidos, uma vez que os problemas de escoamento são altamente não lineares por envolverem as equações de Navier-Stokes. Credita-se sua primeira aplicação ao matemático Euler no século XVIII (FERZIGER; PERIC, 2012). Basicamente a aplicação do MDF consiste em substituir os operadores diferenciais presentes na equação por operadores de diferenças. Tais aproximações são obtidas através da expansão em serie de Taylor, truncadas no nível da ordem do erro desejada (HOFFMAN; FRANKEL, 2001). É um método de fácil aplicação, entretanto observa-se que a sua utilização é mais comum em malhas estruturadas, em geometrias simples e os princípios de conservação não são assegurados. O MDF então passa a se desenvolver mais na busca do domínio das não linearidades dos termos advectivos e no problema do difícil acoplamento entre as equações.

O método de elementos finitos foi originalmente desenvolvido para solucionar problemas complexos de elasticidade e análise estrutural. Credita-se o desenvolvimento desta metodologia ao trabalho desenvolvido por Hrennikoff (1941) e McHenry (1943). Entretanto apenas anos mais tarde, em 1960, o nome método de elementos finitos foi utilizado pela primeira vez por Clough (CLOUGH; WILSON, 1999). Os problemas da elasticidade não possuem os termos advectivos e assemelham-se a problemas puramente difusivos de transferência de calor, de caráter linear. Por este motivo o MEF ficou mais focado na resolução de problemas elásticos com geometria complexas podendo ser aplicado a qualquer tipo de malha, até mesmo não estruturada. A principal desvantagem da aplicação desta metodologia é encontrada na estrutura apresentada pelas matrizes que contêm o sistema linearizado a ser resolvido, estas matrizes não são bem estruturadas, desta forma, a solução eficiente deste sistema requer rotinas numéricas específicas (FLETCHER, 2012).

O método de volumes finitos é atualmente o método mais aplicado na resolução de escoamentos de fluidos. Credita-se sua primeira aplicação a McDonald, em 1971, para



(a) Método de elementos finitos

(b) Método dos volumes finitos

Figura 5 – Representação de uma malha estruturada para os dois principais métodos de discretização (JEONG; SEONG, 2014)

simulação de um escoamento bidimensional de gás em turbinas (BLAZEK, 2015). O MVF consiste basicamente em subdividir o domínio do problema em volumes de controle e realiza um balanço de conservação da propriedade para cada volume elementar para obter a correspondente equação aproximada. A possibilidade de associar a interpretação física à matemática influenciou de modo considerável para que quase todos os analistas envolvidos com o MDF passassem a usar o MVF. As condições de contorno podem ser incorporadas à solução do problema de diferentes formas, tais como: adequação da malha à condição de contorno, utilização de volumes fictícios e utilização de balanços para volumes inteiros no contorno (PINTO, 2001).

### 2.3.2 Definição do Código comercial utilizado

O código comercial ANSYS FLUENT, um dos pacotes de software CFD mais famosos, é baseado em uma abordagem de método de volume finito. Seu solucionador usa volumes finitos centrados em células. Nesse esquema, as variáveis de fluxo são armazenadas nos centros dos elementos de malha (GUIDE, 2011). O Ansys Fluent oferece várias abordagens de solução (métodos baseados em densidade, bem como segregados e acoplados à métodos baseados em pressão). Esse programa faz parte de um dos pacotes comerciais mais populares disponíveis para a maioria dos campos de engenharia e será utilizado no desenvolvimento deste estudo.

O método de solução das equações de transporte utilizado pelo ANSYS FLUENT

consiste em discretizar esta equação por meio de integração sobre cada volume de controle, resultando na equação que expressa a lei da conservação em um volume de controle base. Esta técnica de discretização aproxima o sistema original de equações diferenciais por um sistema de equações algébricas. Tais aproximações transformam o domínio do problema de contínuo para um domínio discreto, desta forma a solução não existe em todos os pontos do domínio, como no caso de soluções analíticas, e sim apenas em pontos específicos do problema, os denominados pontos de discretização (LE MOS, 2011).

Por definição, o Fluent guarda os valores discretizados no centro de cada célula do volume de controle. No entanto, as vezes os valores da face inteira são necessários e, para achá-los, é necessário interpolar dos valores dos centros das células. Isso é feito usando um esquema de "contra vento" (*upwind*). Este esquema significa que o valor de face será derivado das quantidades nas células que estejam "contra o vento" relativo a direção da velocidade normal  $v_n$ . Quando a precisão de segunda ordem é desejada, as quantidades nas faces das células são calculadas usando uma abordagem de reconstrução linear multidimensional (BARTH; JESPERSEN, 1989). Nesta abordagem, a precisão de ordem superior é alcançada nas faces das células através de uma expansão da série de Taylor da solução centrada na célula sobre o centroide da célula.

## 2.4 Solução numérica para a cunha

De acordo com o experimento utilizado como base para este trabalho (SERCOMBE, 2004), o cone empregado no teste em um *Gun Tunnel* tem um ângulo de  $10^\circ$  e um comprimento de 226 mm. Foi feita uma representação geométrica para as simulações tanto da cunha (2D), quanto do cone (3D) para análise e comparação dos dados. As condições de contorno para se alcançar uma velocidade de Mach 7 dentro do *Gun Tunnel* foram de pressão de estagnação de fluxo livre de 2,65 MPa e pressão estática de fluxo livre de 640,09 Pa. Para a criação do volume de controle, foi utilizado um espaço de três comprimentos de cone à frente da cunha e três comprimentos de cone acima da cunha.

Para a construção da malha, foi feito um estudo de convergência com cinco malhas de tamanhos diferentes afim de obter um resultado satisfatório com menor tempo de processamento possível. A solução numérica de problemas complexos em muitos campos de engenharia normalmente requer o uso de um grande número de pontos de malha para capturar com precisão fenômenos que apresentam gradientes altos de uma ou mais variáveis, como as que aparecem em camadas limite, regiões com concentrações de estresse, ondas de choque, etc (BONO; AWRUCH, 2008). Com isso, a malha foi mais refinada conforme a sua aproximação da cunha. A estabilidade da maioria dos esquemas numéricos pode depender da qualidade da malha, por esta razão, uma distorção de malha excessiva, sem qualquer controle, deve ser evitada usando um processo de suavização e preservando

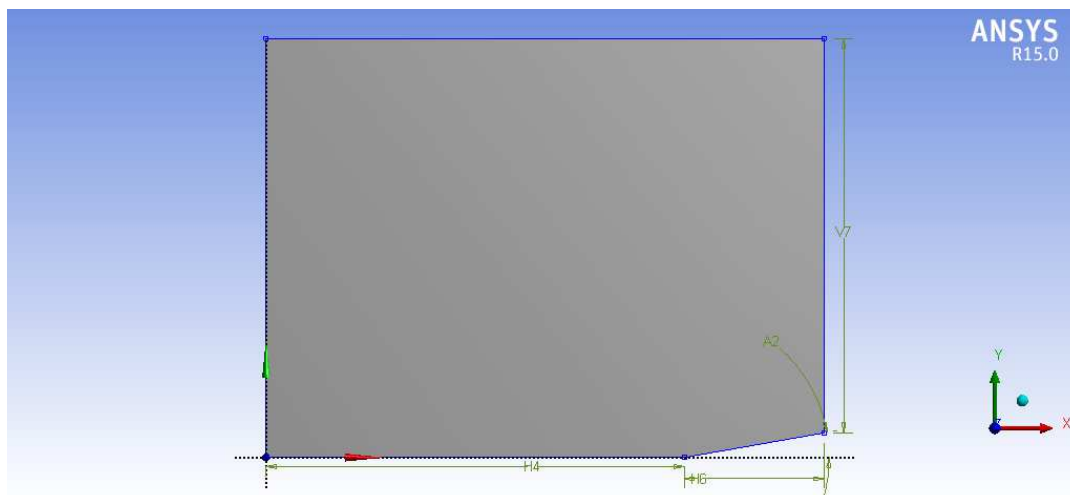


Figura 6 – Geometria da cunha

a regularidade da malha que no caso desse estudo foi utilizada a opção *Mapped Face Meshing* disponível no Ansys.

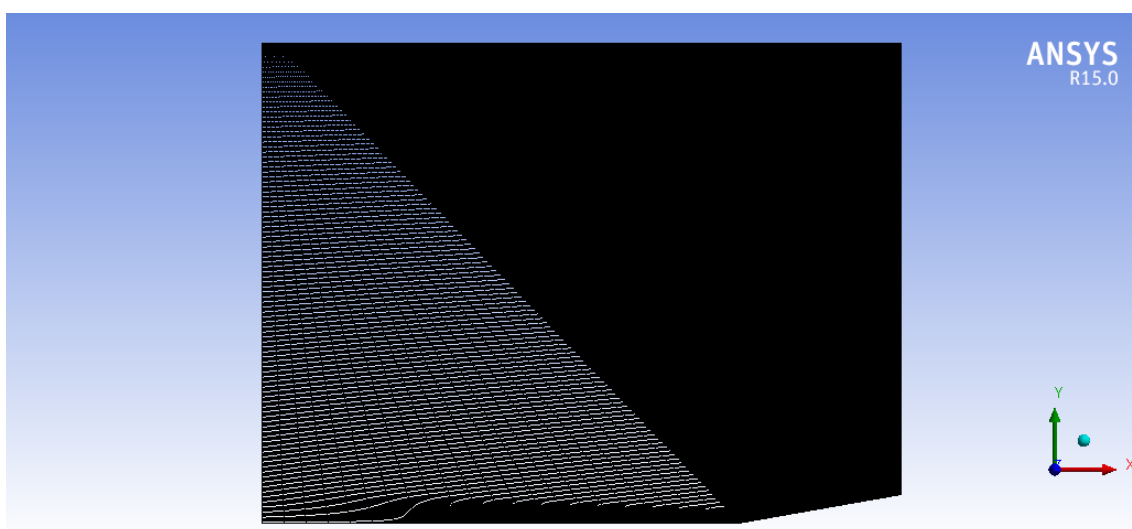


Figura 7 – Malha da cunha

Para o estudo de convergência, foi atribuído um ponto logo após a onda de choque e os valores de pressão e velocidade foram comparados. O teste iniciou-se com 43524 elementos de malha e dobrava-se, aproximadamente, este número a cada novo teste feito. Podemos comparar os valores encontrados de acordo com o número de elementos de malha para pressão e velocidade de acordo com as Tabs. 1 e 2 e os gráficos nas Figs. 8 e 9, respectivamente.

Foi então escolhida a malha com 325779 elementos para o estudo da cunha, por ser uma malha que apresentou bons resultados de convergência e que requer um tempo razoável de processamento do computador, uma vez que a malha com 639350 elementos

Tabela 1 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha

Elementos de malha	Pressão (Pa)
43524	1749299,875
84943	1821663,875
166254	1862832,375
325779	1887630,625
639350	1908431,875

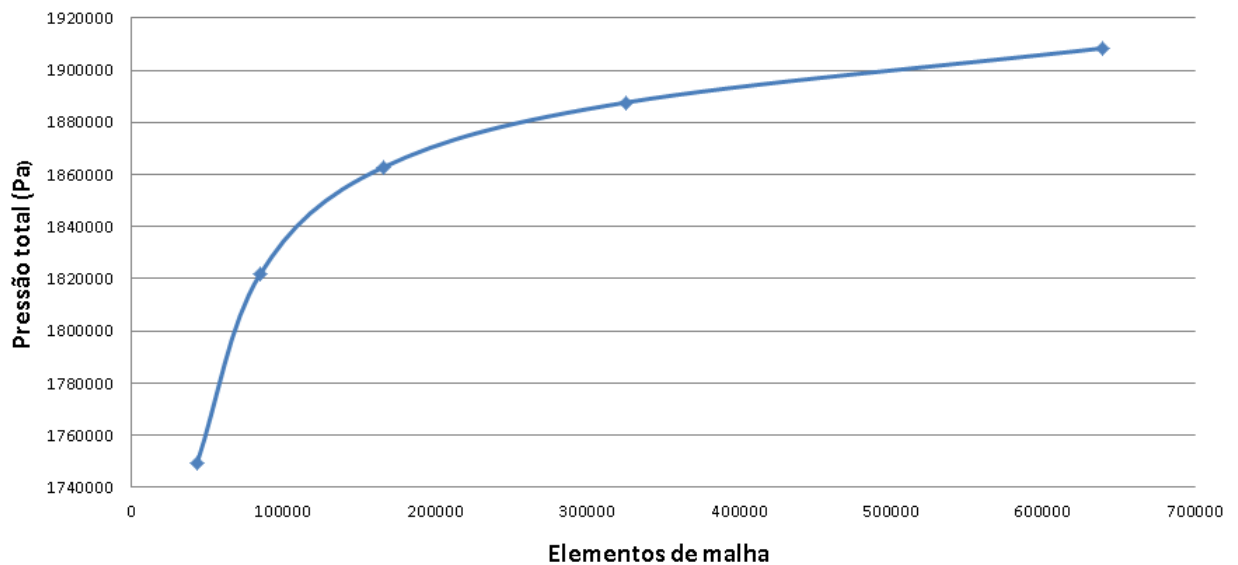


Figura 8 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha

Tabela 2 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha

Elementos de malha	Velocidade (M)
43524	5,1792426
84943	5,2117967
166254	5,2156949
325779	5,2137422
639350	5,2202391

apresentou pouca diferença de resultado e demora praticamente o dobro do tempo para ser construída.

## 2.5 Resultados sobre a cunha

Setando os valores de pressão total e pressão de estagnação no Fluent, foi obtido um número de Mach de fluxo livre igual a 7 assim como no experimento ([SERCOMBE](#),

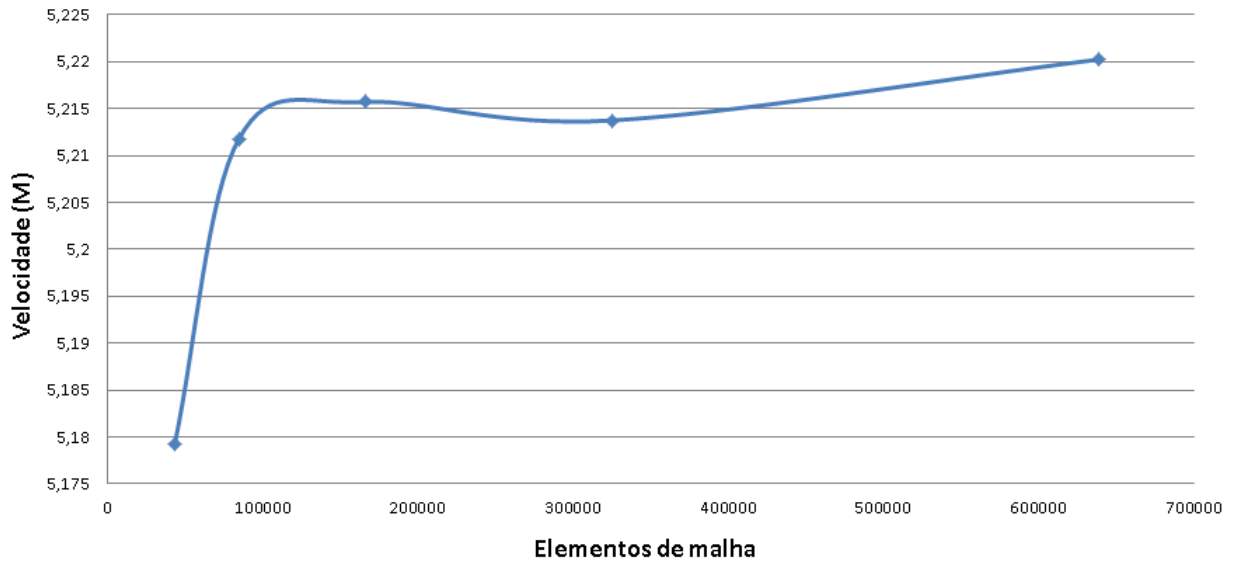


Figura 9 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação da cunha

2004). O resultado obtido para a velocidade e para a pressão total podem ser visualizados a partir das imagens apresentadas a seguir (Figs. 10 e 11). Podemos perceber pela imagem que, ao passar pela onda de choque, a velocidade e a pressão total diminuem. Com isso, pode-se afirmar que a física do escoamento está de acordo com a literatura.

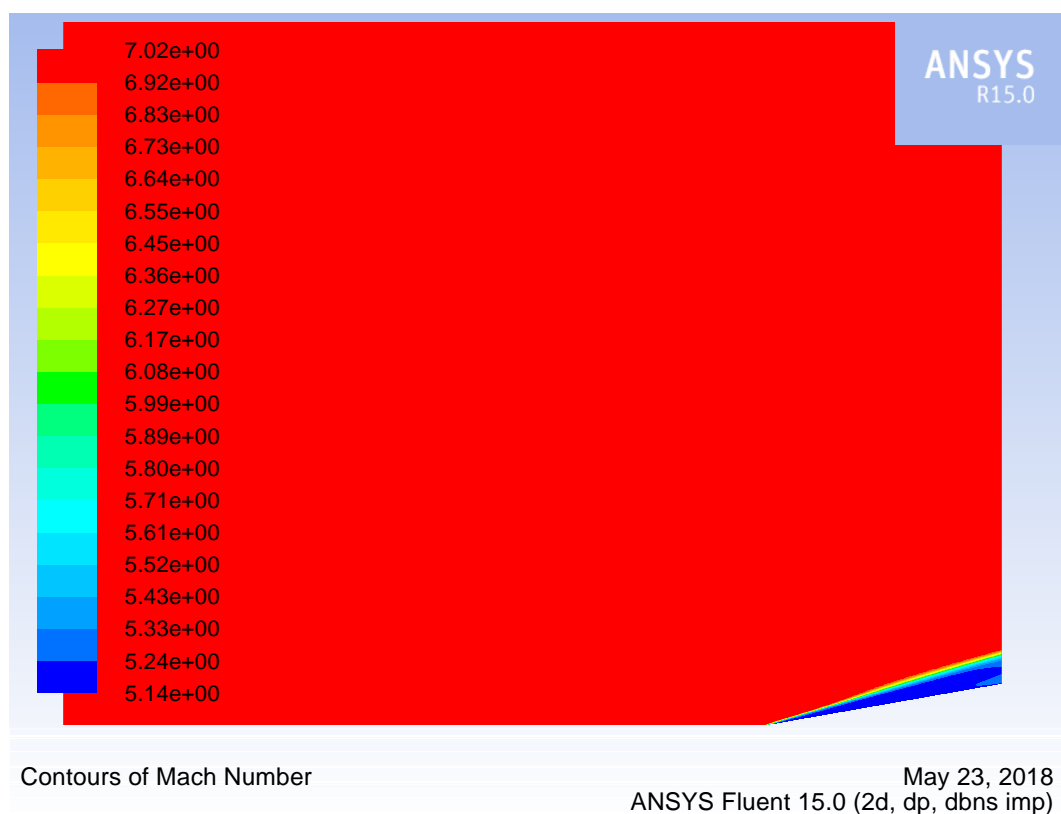


Figura 10 – Velocidade sobre a cunha medida em número de Mach

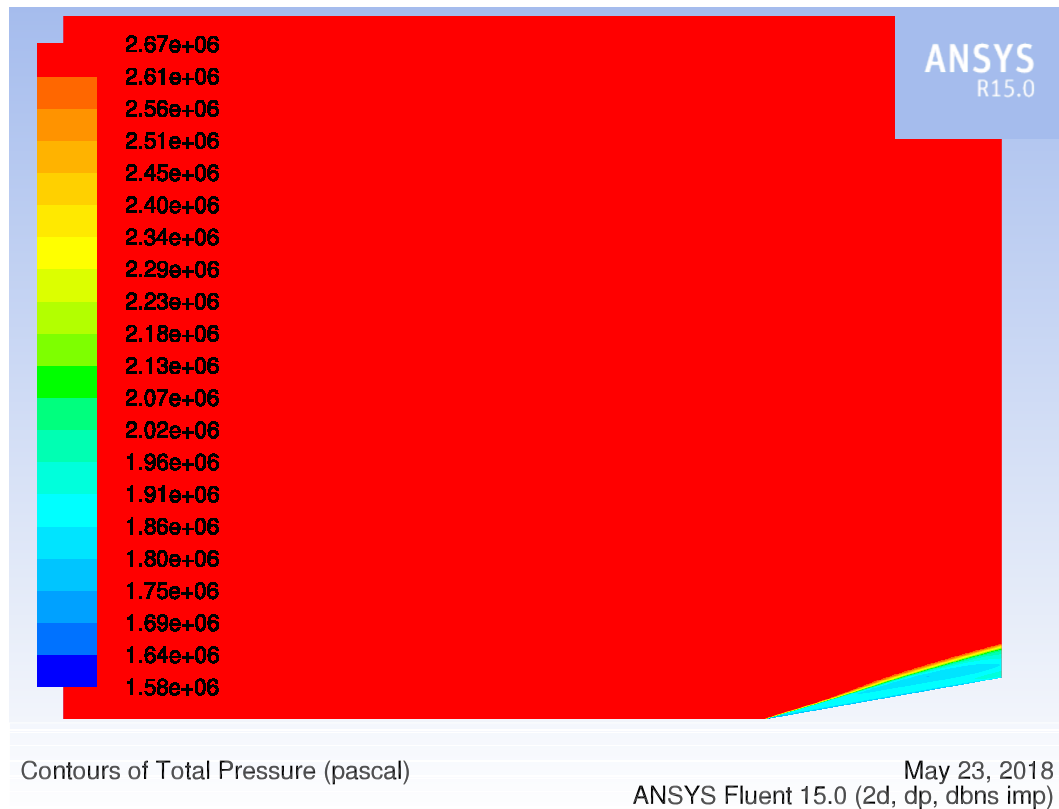


Figura 11 – Pressão total sobre a cunha medida em Pascal

Tabela 3 – Comparação dos resultados analíticos com numéricos para a cunha

	<b>Analítico</b>	<b>Numérico</b>	<b>Diferença(%)</b>
$M_2$	5,2344	5,1447	1,71
$p_{02}(Pa)$	1942100	1909660	1,67
$p_2(Pa)$	2804	2792	0,43
$\beta$	16,3818°	16,519°	0,83

No caso da pressão estática o que ocorre é o contrário. Nessa, ela aumenta após passar pela onda de choque como podemos ver na figura 12. Mostrando novamente que a física do escoamento simulado continua de acordo com a literatura.

Essa diferença sobre o que ocorre após a onda de choque entre a pressão total e estática acontece porque para o cálculo da pressão total após a onda de choque ( $p_{02}$ ) utiliza-se o valor da velocidade em número de Mach após a onda ( $M_2$ ). Já para o cálculo da pressão estática após a onda de choque ( $p_2$ ) utiliza-se o valor da velocidade normal a onda de choque ( $M_{n1}$ ) que, como pode ser visto comparando as Eqs. 2.4 e 2.6, acaba por ficar menor que o valor de  $M_2$ .

A partir da análise da Tab. 3, podemos ver que os valores simulados ficaram muito parecidos com os calculados analiticamente. A maior diferença, foi no número de Mach após a onda de choque ( $M_2$ ), onde a diferença ficou em 1,71%. Como as diferenças foram muito baixas, foi possível validar a simulação numérica feita.

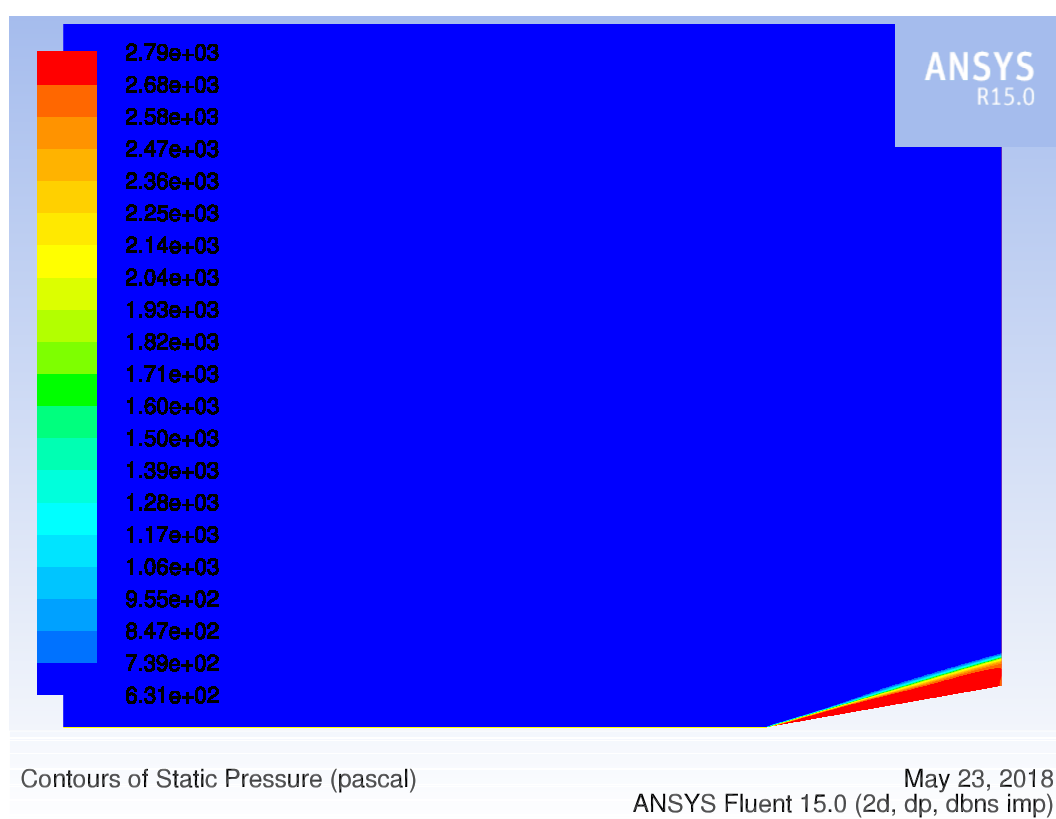


Figura 12 – Pressão estática sobre a cunha medida em Pascal



### 3 Escoamento tridimensional

Este capítulo traz, primeiramente, a metodologia utilizada para o cálculo numérico da onda de choque sobre o cone invíscido. Depois é apresentada a modelagem numérica para o cone feita também no código comercial ANSYS FLUENT e, em seguida, os resultados encontrados da simulação são apresentados. Para essa simulação 3D, os resultados são validados comparando-se com o código numérico em MATLAB realizado (SERCOMBE, 2004). Por fim, mostra-se a modelagem numérica realizada para o míssil *ramjet*, também invíscido, e seus resultados que também são validados com o mesmo código numérico.

#### 3.1 Fluxo sobre o cone

Considere um corpo de revolução a zero ângulo de ataque como mostrado na Fig. 13. Um sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \phi, z)$  é desenhado com o eixo  $z$  sendo o eixo de simetria alinhado na direção de  $V_\infty$ . Olhando para a Fig. 13, o fluxo deve ser simétrico sobre o eixo  $z$ , ou seja, todas as propriedades são independentes de  $\phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0 \quad (3.1)$$

O fluxo de campo depende apenas de  $r$  e  $z$ . Tal escoamento é definido como axissimétrico. Trata-se de um fluxo tridimensional, porém, como há apenas duas variáveis independentes,  $r$  e  $z$ , fluxo axissimétrico é chamado as vezes de escoamento "quase-bidimensional" (ANDERSON, 2010).

Existe um modelo de fluxo supersônico sobre um cone conhecido como Solução de Taylor-Maccoll (MACCOLL, 1933). Essa solução descreve quantitativamente o comportamento do fluxo atrás da estrutura do choque cônico que ocorre devido a presença do impedimento cônico no fluxo livre.

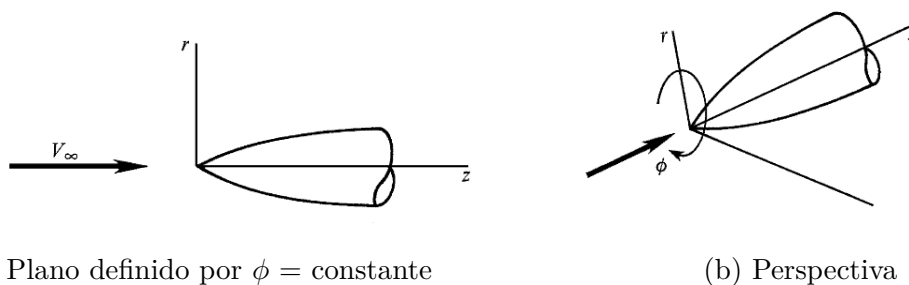


Figura 13 – Sistema de coordenada cilíndrica para um corpo axissimétrico (ANDERSON, 2010).

### 3.1.1 Equações de Taylor-Maccoll

A principal solução proposta é apresentada na forma de uma equação diferencial ordinária não linear em coordenadas esféricas planas. Uma suposição fundamental da solução é que as propriedades do fluxo, como a velocidade, são constantes ao longo dos raios que se estendem da ponta do cone em um ângulo plano  $\theta$ . Esta suposição foi experimentalmente validada (ANDERSON, 2010).

A equação de Taylor-Maccoll para a solução de escoamentos cônicos é dada por:

$$\frac{\gamma - 1}{2} \left[ V_{max}^2 - V_r^2 - \left( \frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \right] \left[ 2V_r + \frac{dV_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right] - \frac{dV_r}{d\theta} \left[ V_r \frac{dV_r}{d\theta} + \frac{dV_r}{d\theta} \left( \frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right) \right] = 0 \quad (3.2)$$

A equação tem apenas uma variável dependente  $V_r$ . Não há solução fechada para a Eq. 3.2; ela deve ser resolvida numericamente. Para apressar a solução numérica, define-se a velocidade adimensional  $V'$  como

$$V' \equiv \frac{V}{V_{max}} \quad (3.3)$$

O componente angular da velocidade é dado como (SERCOMBE, 2004):

$$V'_\theta = \frac{dV'_r}{d\theta} \quad (3.4)$$

Então, a Eq. 3.2 se torna

$$\frac{\gamma - 1}{2} \left[ 1 - V_r'^2 - \left( \frac{dV'_r}{d\theta} \right)^2 \right] \left[ 2V'_r + \frac{dV'_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V'_r}{d\theta^2} \right] - \frac{dV'_r}{d\theta} \left[ V'_r \frac{dV'_r}{d\theta} + \frac{dV'_r}{d\theta} \left( \frac{d^2V'_r}{d\theta^2} \right) \right] = 0 \quad (3.5)$$

A relação entre a velocidade adimensional  $V'$  e o número de Mach  $M$  é dada pela equação:

$$V' = \left[ \frac{2}{(\gamma - 1)M^2} + 1 \right]^{-1/2} \quad (3.6)$$

Usando a relação acima, o número de Mach pode ser achado para qualquer velocidade dada ao longo de um raio de propriedade. As propriedades do fluido como densidade, temperatura e pressão podem ser encontradas ao longo de um dado raio usando o número de Mach e as relações de propriedades de fluidos isentrópicos padrão. Desta forma, uma

imagem completa do campo de fluxo pode ser desenvolvida a partir dos valores de velocidade adimensional (SERCOMBE, 2004). Uma derivação mais rigorosa dessas equações é apresentada em Anderson (ANDERSON, 2010).

### 3.1.2 Procedimentos para a solução numérica

A Eq. 3.6 não é linear e, como tal, não existe uma solução analítica ou fechada, por isso foi necessário criar uma solução numérica. Para isso, é aplicada uma abordagem inversa, ou seja, a onda de choque é assumida e o cone particular que suporta a dada onda de choque é calculado. Isso contrasta com a abordagem direta da cunha, por exemplo, onde a cunha é dada e o fluxo de campo e a onda de choque é calculada. O procedimento numérico acontece de acordo com os passos abaixo:

1. Assuma um ângulo de onda de choque  $\theta_s$  e um número de Mach de fluxo livre  $M_\infty$  como mostrado na Fig. 14. A partir disso, o número de Mach e a deflexão do ângulo do fluxo,  $M_2$  e  $\delta$ , respectivamente, imediatamente atrás da onda de choque podem ser achados através das relações de onda de choque oblíqua.
2. A partir de  $M_2$  e  $\delta$ , os componentes radiais e normais da velocidade do fluido,  $V'_r$  e  $V'_\theta$ , respectivamente, diretamente atrás da onda de choque podem ser achados pela geometria da Fig. 14.
3. Usando os valores acima de  $V'_r$  diretamente atrás do choque como um valor limite, resolva a Eq. 3.6 para  $V'_r$  numericamente em passos de  $\theta$ , indo para longe do choque. Aqui, o campo de fluxo é dividido em ângulos incrementais  $\Delta\theta$ , como mostra a Fig. 14. A equação diferencial ordinária 3.5 pode ser resolvida em cada  $\Delta\theta$  usando qualquer técnica de solução numérica padrão, como o método de Runge-Kutta.
4. A cada incremento em  $\theta$ , o valor de  $V'_\theta$  é calculado pela Eq. 3.4. Em algum valor de  $\theta$ , a saber  $\theta = \theta_c$ , acharemos  $V'_\theta = 0$ . A componente normal da velocidade em uma superfície impermeável é zero. Portanto, quando  $V'_\theta = 0$  em  $\theta = \theta_c$  então  $\theta_c$  deve representar a superfície do cone em particular que suporta a onda de choque do ângulo de onda dado  $\theta_s$  a um dado número de Mach  $M_\infty$  como assumido no passo 1. Isto é, o ângulo compatível com  $M_\infty$  e  $\theta_s$  é  $\theta_c$ . O valor de  $V'_r$  em  $\theta_c$  fornece o número de Mach ao longo da superfície do cone via Eq. 3.6.
5. No processo dos passos 1 ao 4, a velocidade completa do fluxo entre o choque e o corpo é obtida. Em cada ponto (ou raio),  $V' = \sqrt{(V'_r)^2 + (V'_\theta)^2}$  e  $M$  seguem a partir da Eq. 3.6. A temperatura, pressão e densidade ao longo de cada raio podem ser obtidos pelas relações isentrópicas para o caso de um gás caloricamente perfeito, que são, respectivamente:



O MATLAB contém vários solucionadores de EDO, sendo o mais utilizado o *ode23* que é um solucionador adaptativo do estilo Runge-Kutta. A ideia é usar o solucionador para percorrer pequenos ângulos  $\Delta\theta$  e encontrar os respectivos componentes de velocidade adimensional  $V_r'$  e  $V_\theta'$  naquele ângulo  $\theta$ . Para isso, a função *ode23* é geralmente configurada para resolver sobre um certo intervalo da variável dependente  $\theta$  e, como tal, o parâmetro *opções* da função foi configurado para sinalizar quando  $V_\theta'$  se aproximasse de zero. A medida que  $V_\theta'$  chega perto de zero a função é parada e uma estimativa é feita para o ângulo  $\theta$  onde o ponto zero ocorreu. Na prática, o valor final de  $V_\theta'$  nunca é exatamente zero, mas consistentemente na ordem de  $10^{-18}$ . Marcando os valores e fazendo com que o solucionador cesse, é possível obter uma estimativa muito mais próxima do ângulo final do cone  $\theta_c$ , bem como evitar o desperdício de tempo computacional caso fosse resolvido para valores redundantes de  $\theta$ .

## 3.2 Solução numérica comercial para o cone

A modelagem do cone (3D) e do seu volume de controle, foi feita no software de desenhos gráficos da SolidWorks CATIA V5R19 e foi exportado para o Ansys. Optou-se por um volume de controle circular para acompanhar a simetria do cone em sua simulação e seu tamanho é de três comprimentos de cone à frente da ponta do cone e três comprimentos de cone de raio como pode ser observado na Fig 15.

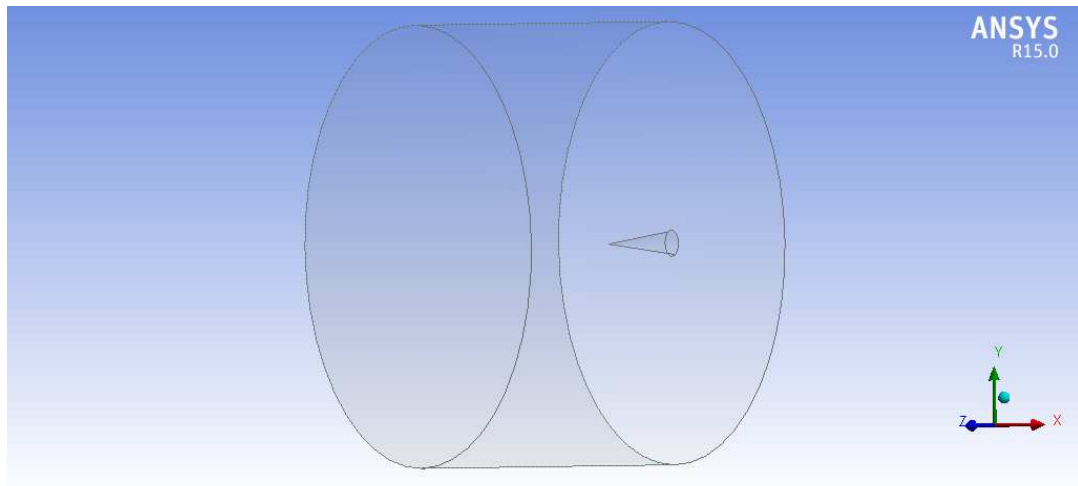


Figura 15 – Geometria do cone

O estudo de convergência da malha para o cone foi feito com quatro malhas de tamanhos diferentes. Para construção de malhas de volumes (3D) na ferramenta *Meshing* do Ansys existe a opção *Use Advanced Size Function* que oferece maior controle sobre as funções de dimensionamento. Essa função é calculada quando a malha começa. O gerador de malha examina as fontes de tamanho setado e, com base no menor tamanho obtido

Tabela 4 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone

Elementos de malha	Pressão (Pa)
276017	2002058,625
560356	1978499,375
1094089	2015439,625
1980147	2064970,250

no local das fontes, a distância de cada fonte e a taxa de crescimento, o menor tamanho em cada ponto é selecionado e armazenado em uma grade de segundo plano. O gerador de malha usa os tamanhos dessa grade de segundo plano para gerar uma malha. A grade de segundo plano é refinada automaticamente para fornecer distribuição de tamanho ao mesher. As funções de tamanho padrão são calculadas de forma diferente, dependendo se um modelo contém apenas folhas ou contém um ou mais sólidos (GUIDE, 2011).

A função escolhida foi a *On: Curvature* que examina a curvatura nas arestas e nas faces e calcula os tamanhos dos elementos nessas entidades de forma que o tamanho não violará o tamanho máximo ou o ângulo normal da curvatura, que são automaticamente calculados pelo *Meshing* ou definidos pelo usuário.

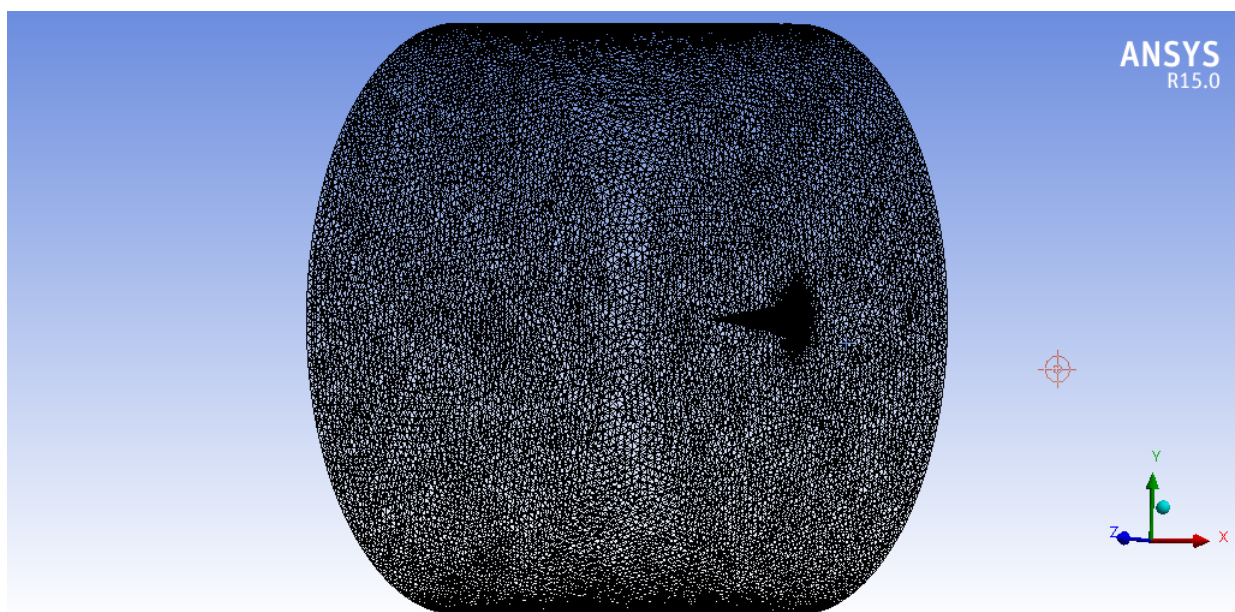


Figura 16 – Malha do cone

O estudo de convergência de malha foi similar ao realizado para a cunha, mas dessa vez iniciou-se com 276017 elementos de malha dobrando-se, aproximadamente, este número a cada teste feito. Podemos comparar os valores encontrados de acordo com o número de elementos de malha para pressão e velocidade de acordo com as Tabs. 4 e 5 e os gráficos nas Figs. 17 e 18, respectivamente.

Foi então escolhida a malha com 1094089 elementos para o estudo do cone, por

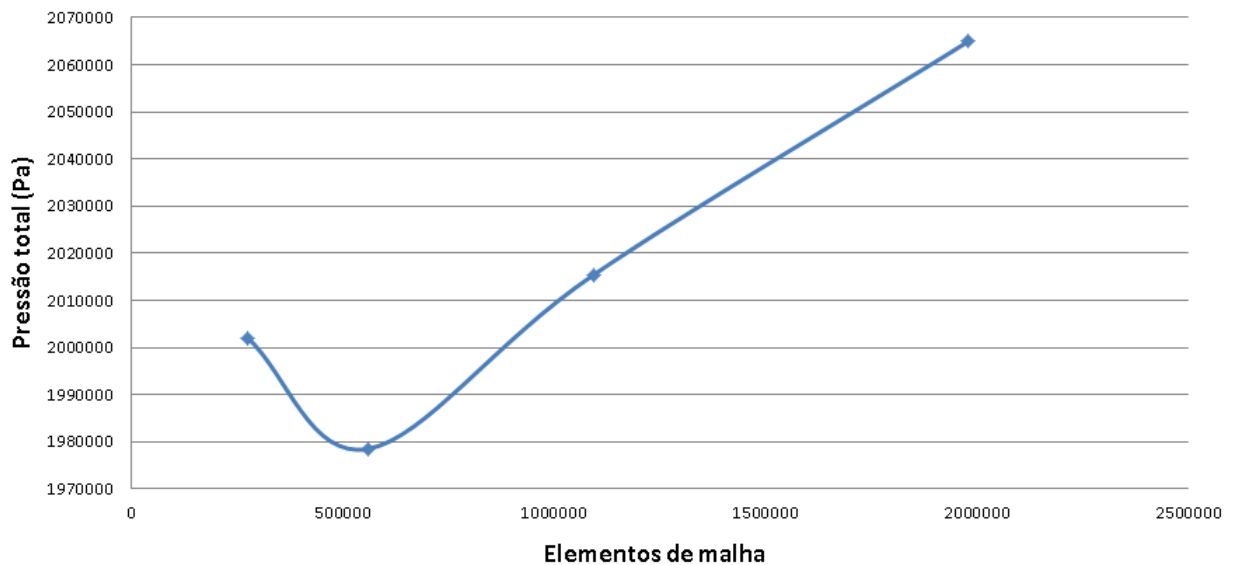


Figura 17 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone

Tabela 5 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone

Elementos de malha	Velocidade (M)
276017	6,0554289
560356	5,8359098
1094089	5,7479619
1980147	5,7539935

ser uma malha que apresentou bons resultados de convergência, visto principalmente no gráfico de velocidade (Fig. 18), uma vez que a malha com 1980147 elementos tem quase o dobro de células e apresentou pouca diferença de resultado.

### 3.3 Resultados sobre o cone

Os resultados obtidos para a simulação 3D são desenhados diretamente na malha do volume de controle. Se a opção *Filed* está marcada, todo o volume de controle fica preenchido, sendo impossível ver o que está acontecendo no meio do volume de controle. Caso a opção *Filed* seja desmarcada, apenas onde há mudança de propriedade é desenhado na malha, como podemos ver na Fig. 19, que mostra os resultados para velocidade.

Para podermos ver melhor o que acontece entre o início da onda de choque e o cone, foi setado um plano posicionado exatamente no meio do volume de controle ( $Z = 0$ ). A partir dele podemos observar melhor as mudanças de propriedade do escoamento. Nas Figs. 20, 21 e 22 pode ser observado os resultados de velocidade, pressão total e pressão estática respectivamente.

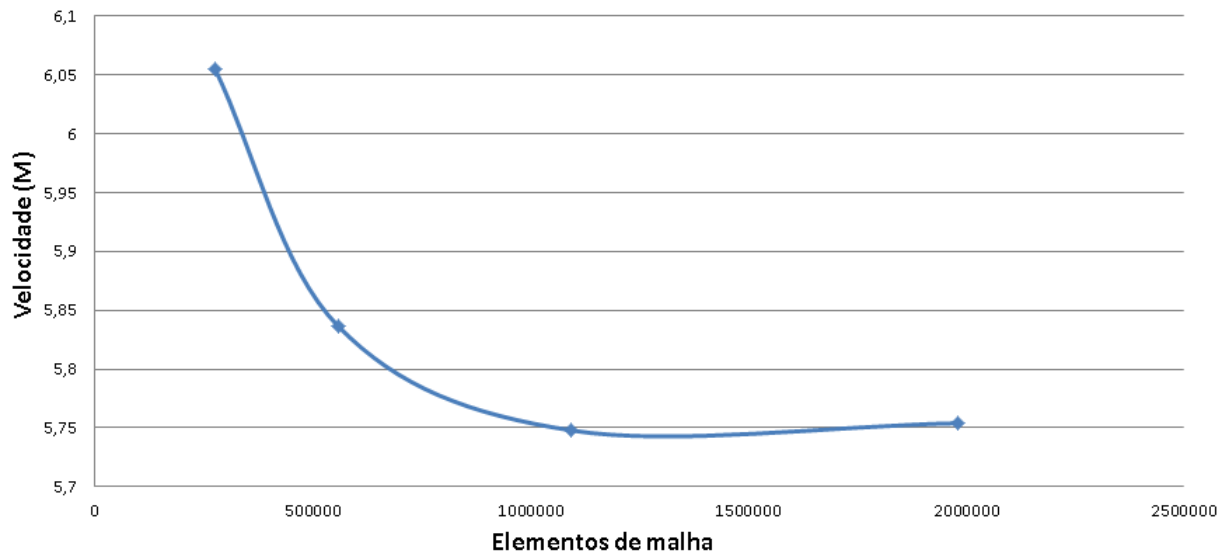


Figura 18 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do cone

Tabela 6 – Comparação dos resultados em MATLAB com os resultados gerados pelo Ansys Fluent para o cone

	Matlab	Ansys Fluent	Diferença(%)
$M_2$	5,49	5,47	0,36
$\frac{p_{02}}{p_2}$	918,37	894,83	2,56
$\theta_s$	12,9°	13,62°	5,28

O código numérico desenvolvido por Sercombe ([SERCOMBE, 2004](#)) em MATLAB foi utilizado para validar os valores encontrados no Fluent. Foi atribuído um ponto muito próximo ao cone para saber o valor encontrado e poder compará-los com os valores calculados pelo MATLAB. Para o caso da relação de pressão após a onda de choque  $\left(\frac{p_{02}}{p_2}\right)$ , no Fluent foram encontrados os seguintes valores:  $p_{02} = 1928360 Pa$  e  $p_2 = 2155 Pa$  resultando em  $\frac{p_{02}}{p_2} = 894,83$ . As resoluções podem ser comparadas a partir da Tab. 6. Percebe-se que os valores encontrados no Fluent estão bem próximos aos calculados pelo MATLAB.

A partir dos dados obtidos nas simulações podemos confirmar o que diz a literatura comparando a simulação 2D com a 3D. Em consequência do efeito de alívio tridimensional, a pressão na superfície do cone e o ângulo da onda de choque formada são menores do que em comparação com a cunha. Já a velocidade na superfície do cone é maior do que a da superfície da cunha.



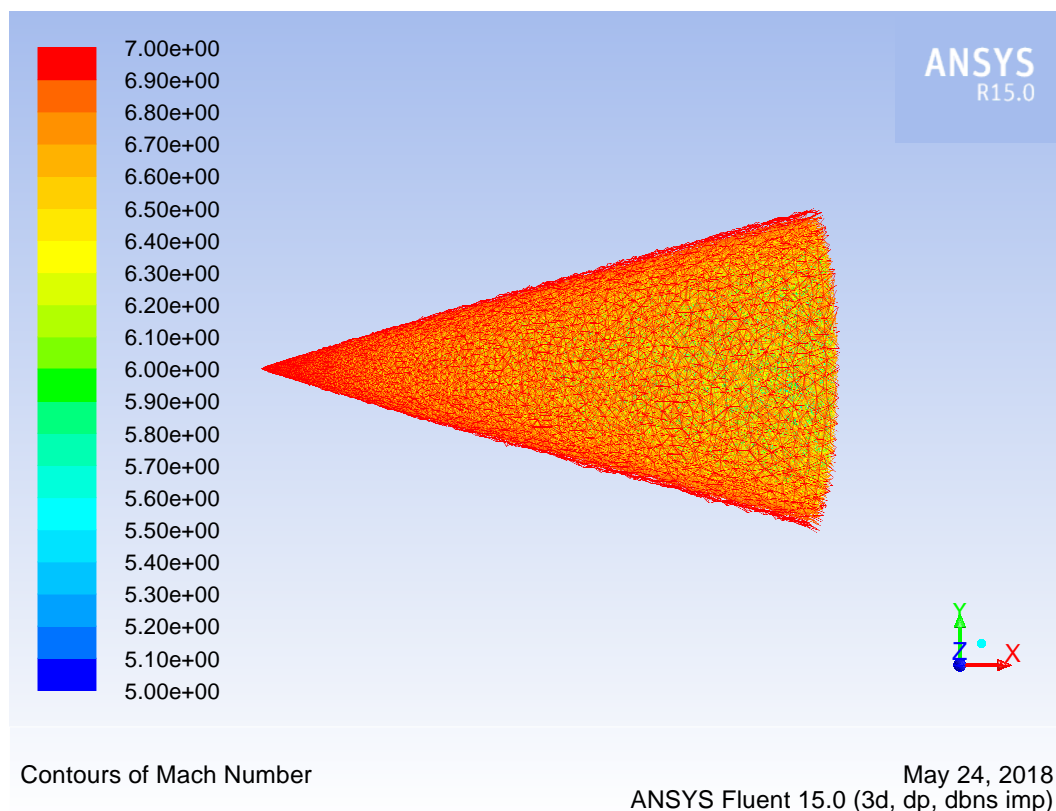


Figura 19 – Malha de resultado para velocidade medida em número de Mach

### 3.4 Solução numérica comercial para o míssil

Para o molde do míssil, foi escolhido um modelo já existente que possui o ramjet na ponta frontal do míssil. O modelo escolhido foi o P-800 Oniks que se trata de um míssil russo que está em serviço desde 2002 e é usado até hoje. Sua velocidade de voo varia de Mach 2 a 2,5. Seu diâmetro é de 670 mm e o comprimento é de 8300 mm (MISSILETHREAT, 2016). Seu esquemático pode ser visto na Fig. 23.

A modelagem do míssil (3D) e do seu volume de controle, assim como a modelagem do cone, foi feita no software de desenhos gráficos da SolidWorks CATIA V5R19 e foi exportado para o Ansys. Para a modelagem do míssil, algumas simplificações na geometria foram assumidas: a entrada de ar do ramjet foi suprimida formando apenas um cone na ponta do míssil, e seu corpo foi desenhado como um cilindro liso, sem superfícies de controle como pode ser visto na Fig. 24.

Também optou-se por um volume de controle circular para acompanhar a simetria do míssil em sua simulação. Seu tamanho é de três comprimentos de míssil à frente da ponta do míssil e três comprimentos de míssil de raio como pode ser observado na Fig 25.

A construção da malha também foi feita de maneira bem semelhante a do cone, utilizando-se da ferramenta *Meshing* e a opção *On: Curvature* também. O modelo gerado

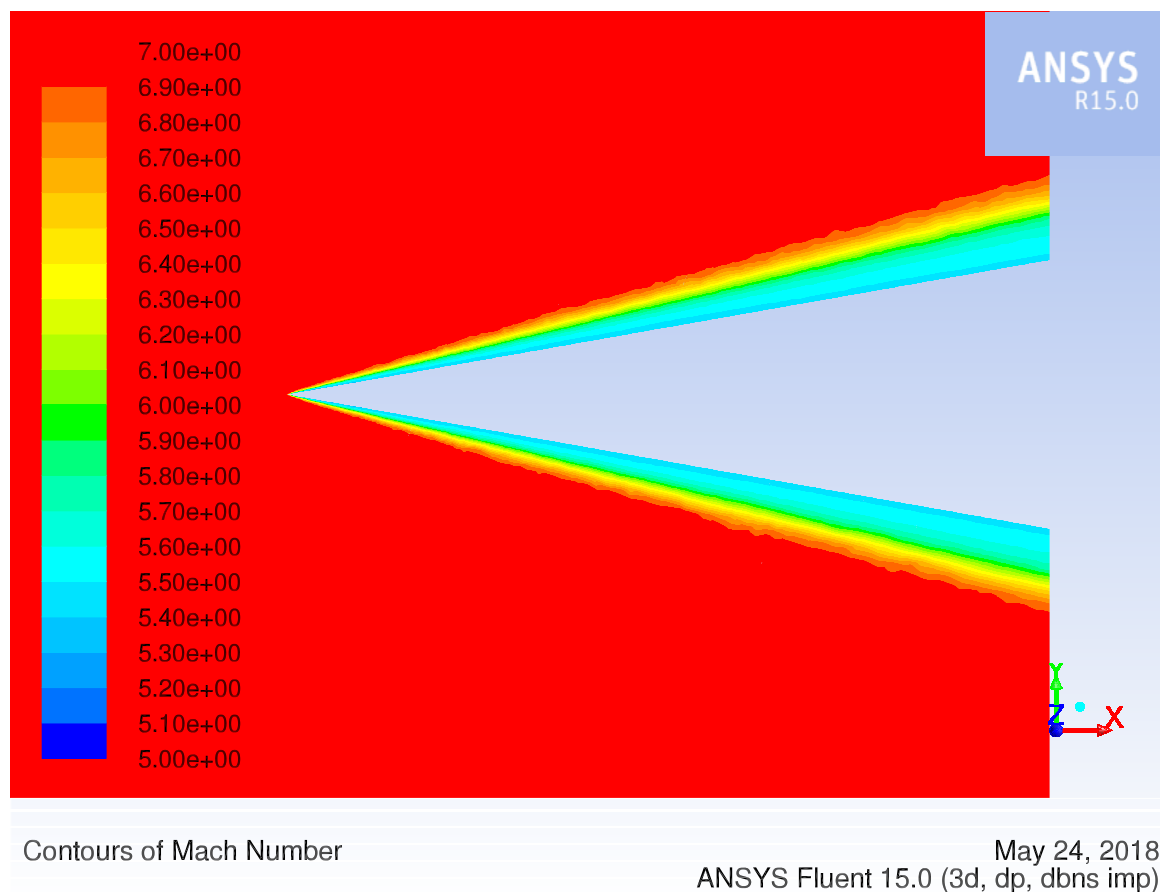


Figura 20 – Velocidade sobre o cone medida em número de Mach

Tabela 7 – Comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil

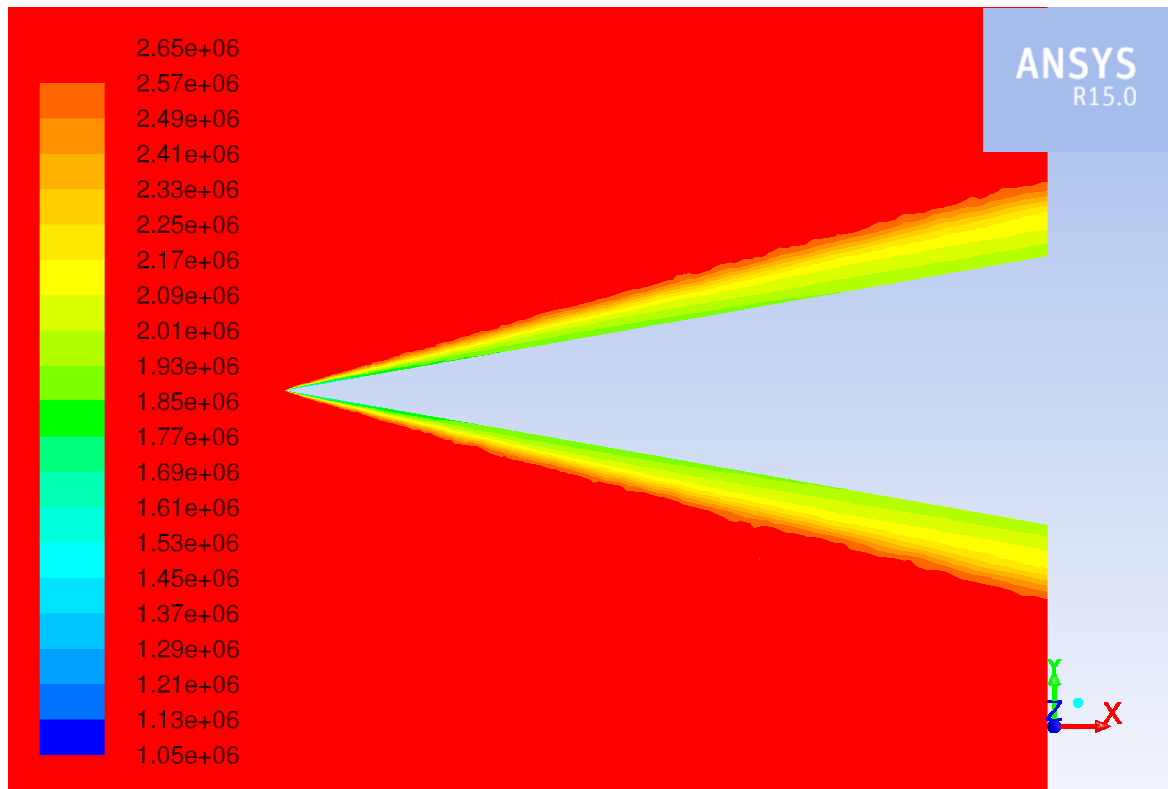
Elementos de malha	Pressão (Pa)
305941	1220991,5
604503	1332986,5
1261903	1323126,75

pode ser visualizado na Fig. 26.

O estudo de convergência de malha também foi similar ao realizado tanto para a cunha quanto para o cone, mas, dessa vez, foram feitas três malhas de tamanhos diferentes devido a limitação do computador utilizado. Iniciou-se a malha com 305941 elementos também dobrando-se, aproximadamente, este número a cada teste feito.

Foi então escolhida a malha com 1262903 elementos para o estudo do míssil. Percebe-se pelo gráfico de comparação das pressões encontradas (Fig. 27) que se trata de uma boa malha mudando pouca coisa do valor em comparação a metade do número de células.

Os valores encontrados podem ser comparados a partir das Tabs. 7 e 8 e dos gráficos nas Figs. 27 e 28.



Contours of Total Pressure (pascal)

May 24, 2018  
ANSYS Fluent 15.0 (3d, dp, dbns imp)

Figura 21 – Pressão total sobre o cone medida em Pascal

Tabela 8 – Comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil

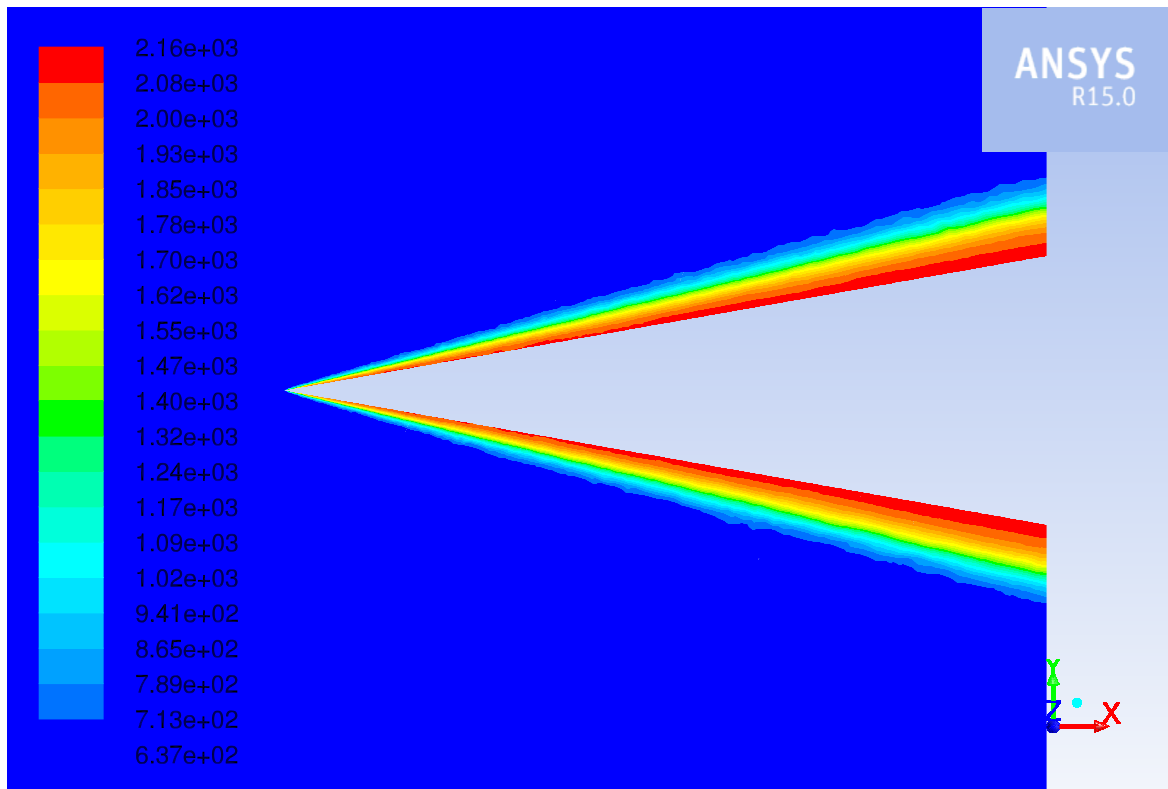
Elementos de malha	Velocidade (M)
305941	1,716985
604503	1,749532
1261903	1,732554

### 3.5 Resultados sobre o míssil

Para tentar obter um resultado aproximado ao real de um voo na atmosfera, foi atribuído no Fluent uma pressão estática de 101325 Pa e uma pressão de estagnação de 1481373 Pa, resultando em uma velocidade de fluxo livre aproximada de Mach 2,5.

Assim como nos resultados para o cone, também foi atribuído um plano posicionado exatamente no meio do volume de controle ( $Z = 0$ ) para que facilitasse a observação da onda de choque e sua influência na mudança das propriedades do escoamento. Os resultados obtidos para velocidade, pressão total e pressão de estática podem ser observados nas Figs. 29, 30 e 31 respectivamente.

O mesmo código numérico desenvolvido por (SERCOMBE, 2004) em MATLAB foi



Contours of Static Pressure (pascal)

May 24, 2018  
ANSYS Fluent 15.0 (3d, dp, dbns imp)

Figura 22 – Pressão estática sobre o cone medida em Pascal

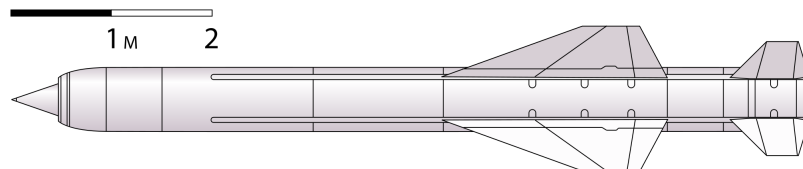


Figura 23 – Missíl P-800 Oniks

Tabela 9 – Comparação dos resultados em MATLAB com os resultados gerados pelo Ansys Fluent para o míssil

	Matlab	Ansysis Fluent	Diferença(%)
$M_2$	1,72	1,74	1,15
$\frac{p_{02}}{p_2}$	5,09	5,25	3,05
$\theta_s$	33, 47°	37, 72°	11,26

utilizado para validar os valores encontrados para o míssil no Fluent. No caso da relação de pressão após a onda de choque  $\left(\frac{p_{02}}{p_2}\right)$ , no Fluent foram encontrados os seguintes valores:  $p_{02} = 1357650Pa$  e  $p_2 = 258404Pa$  resultando em  $\frac{p_{02}}{p_2} = 5,25$ . As resoluções podem ser comparadas a partir da Tab. 9. Percebe-se que os valores encontrados no Fluent também estão bem próximos aos calculados pelo MATLAB.



Figura 24 – Modelagem 3D do míssil P-800 Oniks

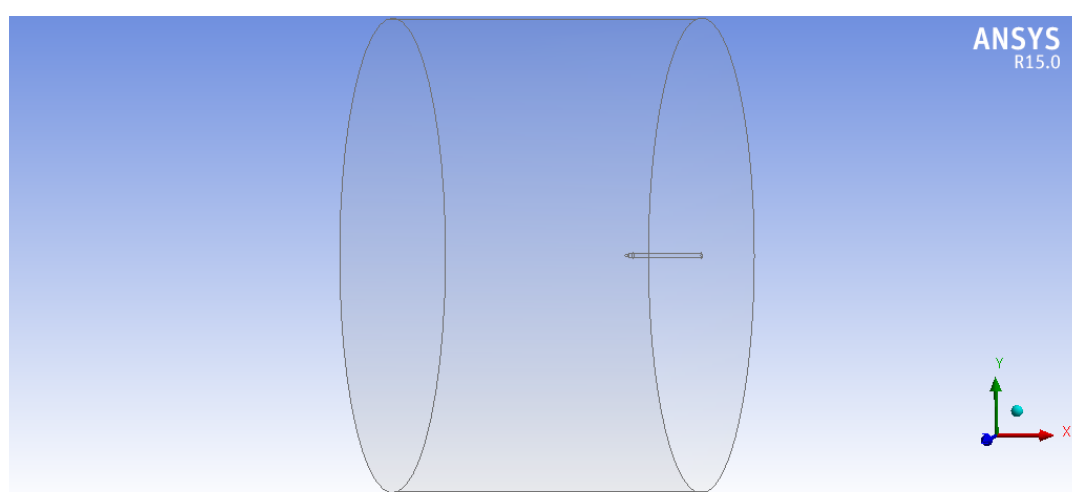


Figura 25 – Volume de controle 3D para o míssil

Ainda que os valores encontrados possuem pouca diferença entre si, a diferença entre eles ficou maior do que o caso para o cone. Isso se deve ao fato de que para o míssil a simulação não convergiu, então ela foi parada após 3000 iterações. Já para o cone a simulação conseguiu convergir tendo um resultado final certo.

A devida apresentação dos resultados obtidos para a simulação do míssil poderão servir para utilização em trabalhos futuros que queiram utilizá-la, uma vez que foi possível simular e validar bem os seus resultados.

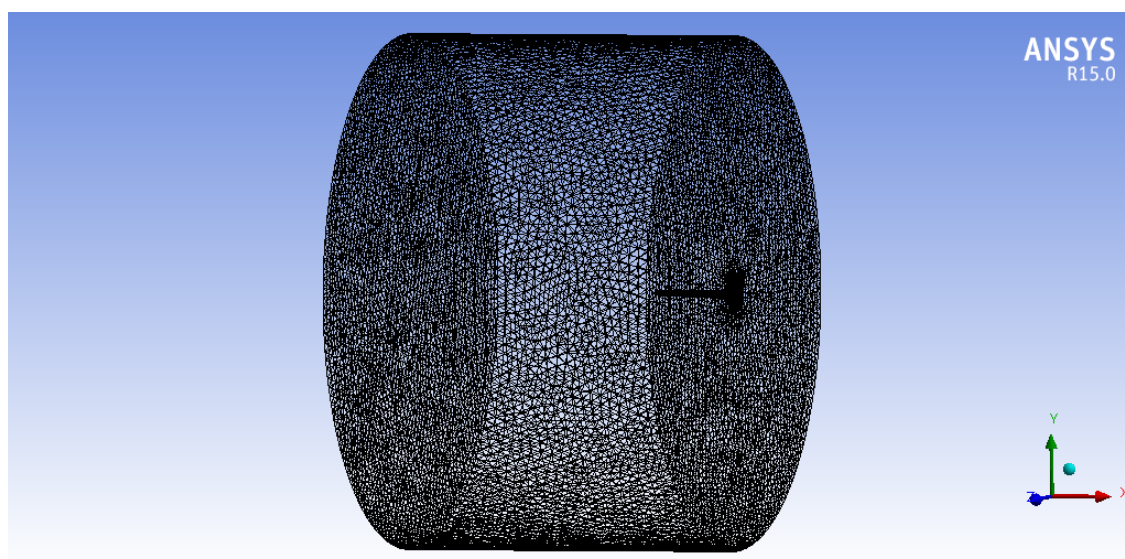


Figura 26 – Malha construída para o míssil

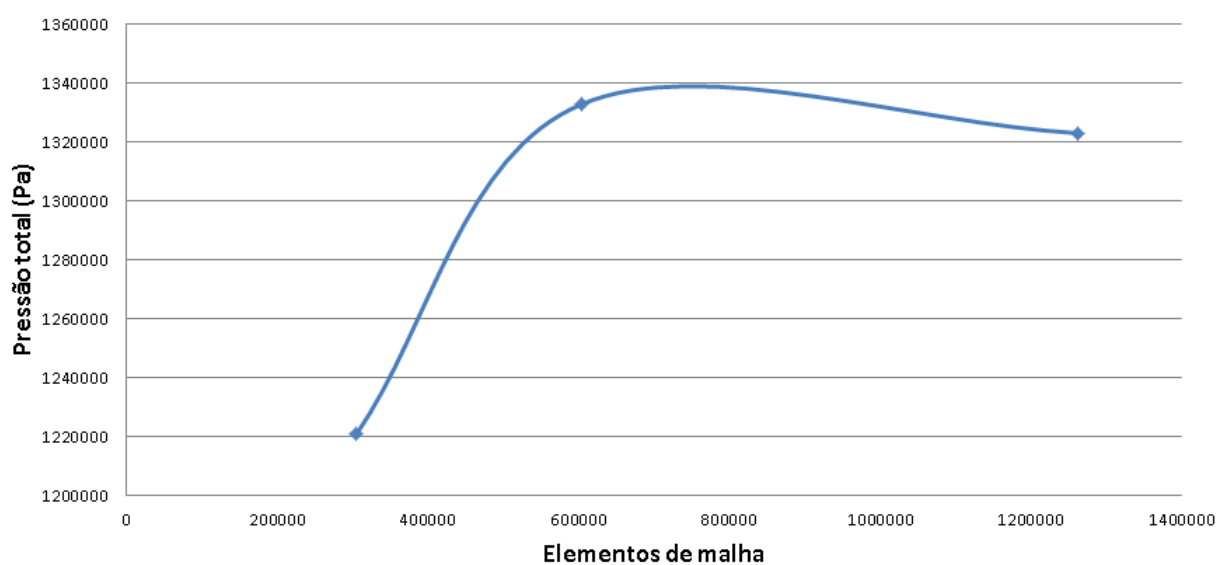


Figura 27 – Gráfico de comparação dos resultados de pressão com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil

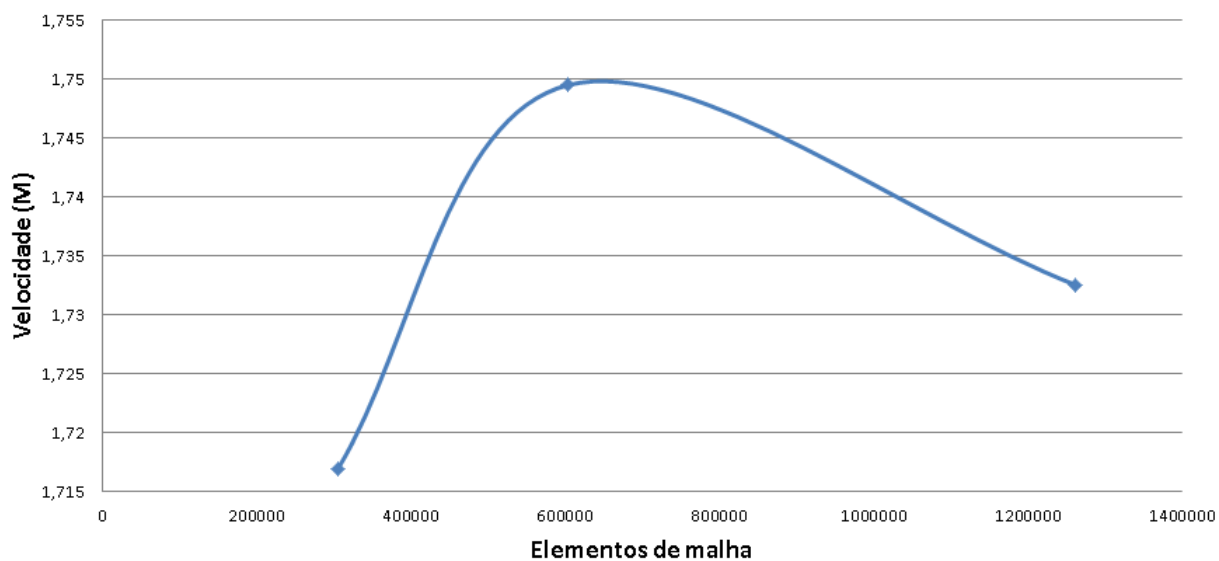


Figura 28 – Gráfico de comparação dos resultados de velocidade com diferentes tamanhos de malha para a simulação do míssil

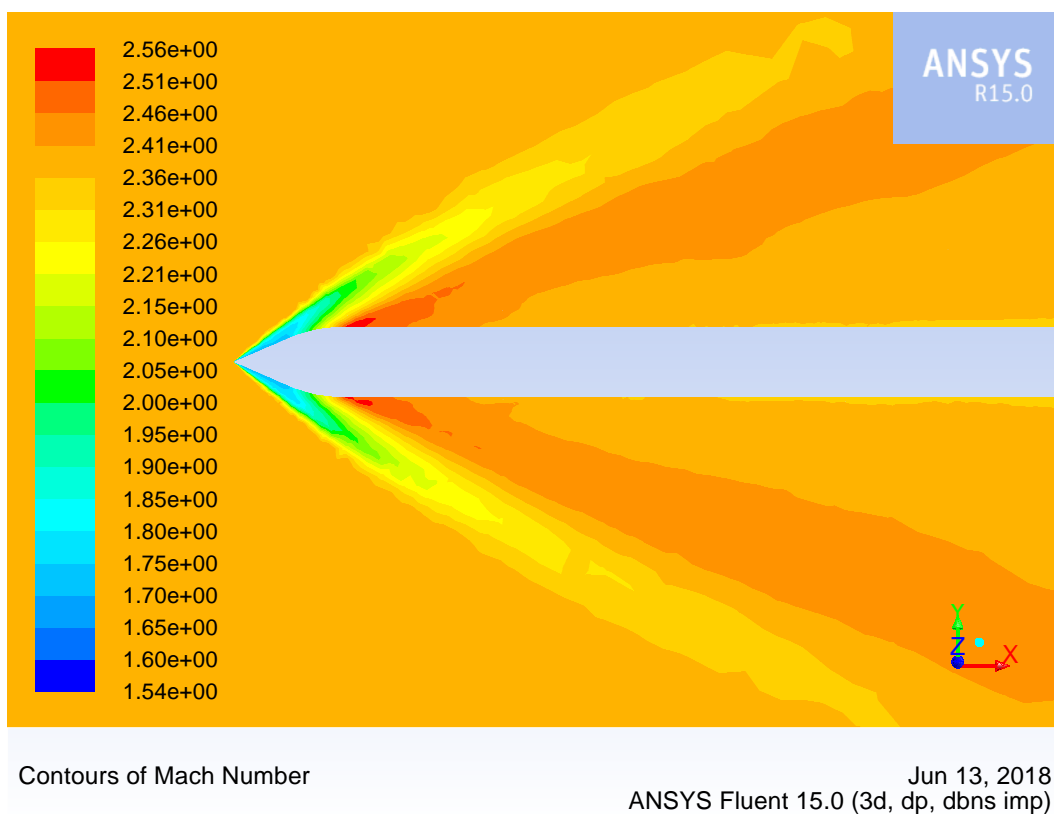
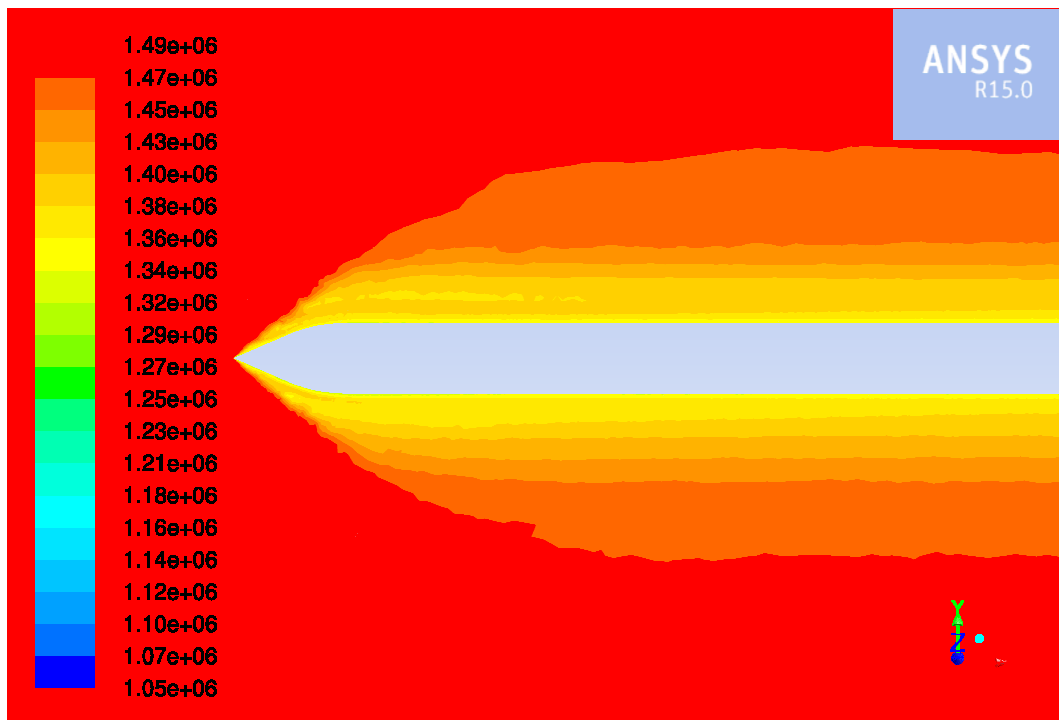


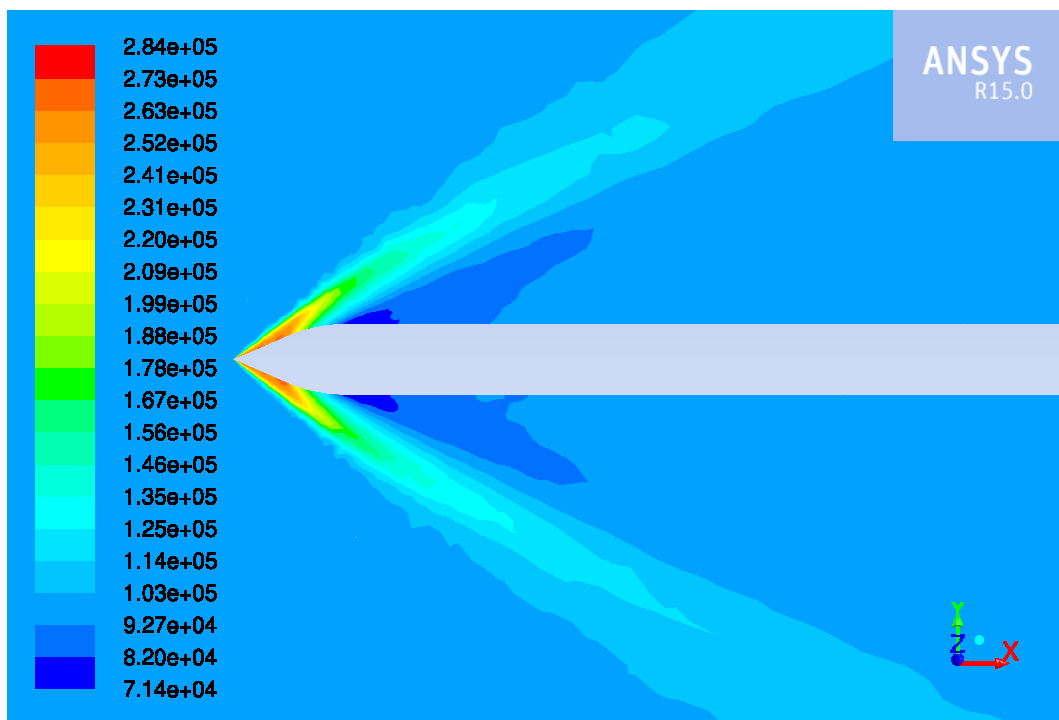
Figura 29 – Velocidade sobre o míssil medida em número de Mach



Contours of Total Pressure (pascal)

Jun 13, 2018  
ANSYS Fluent 15.0 (3d, dp, dbns imp)

Figura 30 – Pressão total sobre o míssil medida em Pascal



Contours of Static Pressure (pascal)

Jun 13, 2018  
ANSYS Fluent 15.0 (3d, dp, dbns imp)

Figura 31 – Pressão estática sobre o míssil medida em Pascal



## 4 Conclusões

Com o intuito de demonstrar as diferenças entre a onda de choque oblíqua 2D e 3D, foi realizado simulações numéricas para ambos os casos com o código comercial Ansys Fluent. Para a simulação 2D foi explanado como se realizam os cálculos analíticos que depois serviram para validar a simulação numérica feita sobre a cunha. No caso das simulações 3D foram realizadas tanto para o cone quanto para o míssil e ambas foram comparadas com os resultados do código de MATLAB desenvolvido por (SERCOMBE, 2004).

Em todos os casos de simulações realizadas neste trabalho foi feito um teste de convergência de malha antes. Estes testes mostraram que nem sempre é necessário utilizar a malha com maior número de elementos, pois os resultados finais mudam muito pouco e quanto mais refinada a malha, maior o tempo de processamento necessário requerido pelo computador. Em trabalhos realizados dentro de empresas deve-se tentar reduzir o tempo de trabalho com a maior eficiência possível. O teste de convergência de malha pode nos fornecer, para este caso, uma malha mais eficiente. Locais onde há uma mudança mais brusca nas propriedades do fluido (como as ondas de choque, por exemplo) devem ter uma malha mais refinada com relação a parte do volume de controle que há poucas mudanças. Isso ajuda bastante a se obter uma malha mais eficaz.

O trabalho também mostrou a importância que as simulações CFD possuem no trabalho dos engenheiros de hoje em dia. Os códigos numéricos comerciais possuem inúmeras abordagens de solução, uma para cada necessidade do engenheiro. Neste trabalho o foco foi sobre o código ANSYS FLUENT que é baseado em uma abordagem de método de volume finito e faz parte de um dos pacotes comerciais mais populares disponíveis para a maioria dos campos de engenharia.

Percebe-se que os objetivos do trabalho foram todos alcançados. Foi mostrado que para a solução bidimensional é possível ter uma solução analítica que valide a simulação numérica e, para a solução tridimensional, só é possível obter soluções numéricas ou experimentais. Com a modelagem do míssil ramjet foi possível ter uma ideia mais aplicada a realidade do que acontece com o escoamento durante o voo de um objeto como este.

Para trabalhos futuros pode-se acrescentar a viscosidade e turbulência em todas as simulações realizadas tanto 2D quanto 3D e também fazer simulações com uma modelagem do míssil um pouco mais parecida com a real da Fig. 23. Além de também ser possível fazer simulações com diferentes ângulos de ataque mostrando a diferença de onda de choque formada e das propriedades do fluido entre eles.

# Referências

- ANDERSON, J. D. *Modern compressible flow: with historical perspective*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2010. v. 12. Citado 11 vezes nas páginas 8, 15, 16, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42 e 43.
- BANIJAMALI, B.; BATHE, K.-J. The cip method embedded in finite element discretizations of incompressible fluid flows. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 71, n. 1, p. 66–80, 2007. Citado na página 24.
- BARTH, T.; JESPERSEN, D. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In: *27th Aerospace sciences meeting*. [S.l.: s.n.], 1989. p. 366. Citado na página 34.
- BARTOSIEWICZ, Y.; AIDOUN, Z.; MERCADIER, Y. Numerical assessment of ejector operation for refrigeration applications based on cfd. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 26, n. 5-6, p. 604–612, 2006. Citado na página 27.
- BATHE, K.-J.; LEDEZMA, G. A. Benchmark problems for incompressible fluid flows with structural interactions. *Computers & structures*, Elsevier, v. 85, n. 11-14, p. 628–644, 2007. Citado na página 24.
- BLAZEK, J. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2015. Citado na página 33.
- BONO, G.; AWRUCH, A. M. An adaptive mesh strategy for high compressible flows based on nodal re-allocation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 30, n. 3, p. 189–196, 2008. Citado na página 34.
- BOUHANGUEL, A.; DESEVAUX, P.; GAVIGNET, E. 3d cfd simulation of a supersonic air ejector. In: *International Seminar on Ejector/Jetpump Technology and Application*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 07–09. Citado na página 27.
- CLOUGH, R. W.; WILSON, E. L. Early finite element research at berkeley. In: *Fifth US National Conference on Computational Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 1–35. Citado na página 32.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K. O. *Supersonic flow and shock waves*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 21. Citado na página 19.
- DAILEY, C. L. *Supersonic diffuser instability*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 32.
- FLETCHER, C. A. *Computational techniques for fluid dynamics 2: Specific techniques for different flow categories*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 32.

- GALINDO, J. et al. Coupling methodology of 1d finite difference and 3d finite volume cfd codes based on the method of characteristics. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 54, n. 7-8, p. 1738–1746, 2011. Citado na página 25.
- GUIDE, A. F. U. Ansys. *Inc. Release*, v. 14, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 25, 33 e 45.
- HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2007. Citado na página 32.
- HOFFMAN, J. D.; FRANKEL, S. *Numerical methods for engineers and scientists*. [S.l.]: CRC press, 2001. Citado na página 32.
- JEONG, W.; SEONG, J. Comparison of effects on technical variances of computational fluid dynamics (cfd) software based on finite element and finite volume methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 78, p. 19–26, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 8, 23 e 33.
- LEMONS, E. M. de. *Implementação de um método de volumes finitos de ordem superior com tratamento multibloco aplicado à simulação de escoamento de fluidos viscoelásticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. Citado na página 34.
- LI, J. Global solution of an initial-value problem for two-dimensional compressible euler equations. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 178–194, 2002. Citado na página 21.
- MACCOLL, J. The air pressure on a cone moving at high speeds.—ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 139, n. 838, p. 298–311, 1933. Citado na página 40.
- MAZZELLI, F. et al. Computational and experimental analysis of supersonic air ejector: turbulence modeling and assessment of 3d effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Elsevier, v. 56, p. 305–316, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- MISSILETHREAT. *P-800 Oniks*. 2016. Disponível em: <<https://missilethreat.csis.org/missile/ss-n-26/>>. Acesso em 07/06/2018. Citado na página 48.
- OPENWAM. *Web Page*. 2016. Disponível em: <<http://www.openwam.org/>>. Acesso em 07/06/2018. Citado na página 25.
- PANDEY, M.; SHARMA, V. Interaction of a characteristic shock with a weak discontinuity in a non-ideal gas. *Wave Motion*, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 346–354, 2007. Citado na página 21.
- PIANTHONG, K. et al. Investigation and improvement of ejector refrigeration system using computational fluid dynamics technique. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 48, n. 9, p. 2556–2564, 2007. Citado na página 27.
- PINTO, J. C. *Métodos numéricos em problemas de engenharia química*. [S.l.]: Editora E-papers, 2001. Citado na página 33.

- POWERS, J. M. Oblique detonations: Theory and propulsion applications. In: *Combustion in High-Speed Flows*. [S.l.]: Springer, 1994. p. 345–371. Citado na página 19.
- SERCOMBE, D. B. Transverse injection from a hypersonic cone. 2004. Citado 10 vezes nas páginas 18, 34, 37, 40, 41, 42, 43, 47, 50 e 56.
- SPALART, P. R. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Elsevier, v. 21, n. 3, p. 252–263, 2000. Citado na página 16.
- SRIVEERAKUL, T.; APHORNRATANA, S.; CHUNNANOND, K. Performance prediction of steam ejector using computational fluid dynamics: Part 1. validation of the cfd results. *International Journal of Thermal Sciences*, Elsevier, v. 46, n. 8, p. 812–822, 2007. Citado na página 27.
- WHITE, F. M. Fluid mechanics. 5th. *Boston: McGraw-Hill Book Company*, 2003. Citado na página 24.
- YANG, P. et al. Initiation structure of oblique detonation waves behind conical shocks. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 29, n. 8, p. 086104, 2017. Citado na página 20.
- ZAFAR, M.; SHARMA, V. Expansion of a wedge of non-ideal gas into vacuum. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 31, p. 580–592, 2016. Citado na página 22.