

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM DA INCERTEZA E DA CORRELAÇÃO DOS
PARÂMETROS DE FRATURA DO CONCRETO NO MODELO
DE EFEITO DE ESCALA DE BAZANT UTILIZANDO
MODELOS DE CÓPULA**

MARCOS PAULO DA ROCHA EIRADO

ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR, PhD

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ENGENHARIA
CIVIL**

BRASÍLIA, DF: JULHO/2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**MODELAGEM DA INCERTEZA E DA CORRELAÇÃO DOS PARÂMETROS
DE FRATURA DO CONCRETO NO MODELO DE EFEITO DE ESCALA DE
BAZANT UTILIZANDO MODELOS DE CÓPULA**

MARCOS PAULO DA ROCHA EIRADO

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

Francisco Evangelista Junior, PhD (ENC-UnB)
(Orientador)

Luciano Mendes Bezerra, PhD. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

Adriano Todorovic Fabro, DSc. (ENM-UnB)
(Examinador Externo)

FICHA CATALOGRÁFICA

EIRADO, MARCOS PAULO DA ROCHA

Modelagem da incerteza e da correlação dos parâmetros de fratura do concreto no modelo de Efeito de Escala de Bazant utilizando modelos de cópula. [Distrito Federal] 2018.

xii, 103 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2018)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Mecânica da fratura

2. Efeito de escala

3. Incerteza

4. Modelos de cópulas

I. ENC/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

EIRADO, M.P.R. (2018). Modelagem da incerteza e da correlação dos parâmetros de fratura do concreto no modelo de Efeito de Escala de Bazant utilizando modelos de cópula. Monografia de Projeto Final, Publicação G.PF-0050/2018, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 103 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Marcos Paulo da Rocha Eirado

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Modelagem da incerteza e da correlação dos parâmetros de fratura do concreto no modelo de Efeito de Escala de Bazant utilizando modelos de cópula.

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2018

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Marcos Paulo da Rocha Eirado

DF-425 Condomínio Jardim Ipanema Quadra 2, Rua 4, Lote 6

73092-903 - Sobradinho/DF – Brasil

RESUMO

A resistência das estruturas de concreto diminui à medida que suas dimensões aumentam, fenômeno que é denominado efeito de escala. Uma modelagem desse comportamento é feito pela mecânica da fratura por intermédio do Modelo do Efeito de Escala de Bazant, que postula que a tensão nominal de resistência à fratura (σ_N) depende diretamente de dois atributos do concreto: a energia crítica de fratura, G_f , e o comprimento equivalente de zona de fratura, c_f . Esses dois parâmetros, que são propriedades do material, apresentam grande variabilidade em sua determinação experimental e também devido à grande heterogeneidade constitutiva do concreto, de modo que podem ser considerados como aleatórios. Foi simulada a incerteza e a dependência estocástica de G_f e c_f por meio de modelos de cópulas, avaliando-se a influência da aleatoriedade desses parâmetros sobre a resistência à fratura do concreto. Os resultados demonstram que a estimativa do valor característico de σ_N e sua distribuição probabilística, para vigas, é menos sensível à estrutura de dependência entre G_f e c_f quanto maior é sua altura.

Palavras chaves: mecânica da fratura, efeito de escala, incerteza, modelos de cópulas.

ABSTRACT

Concrete structures strength decreases when they became bigger, a phenomenon that is called size effect. A fracture mechanics model for this behavior is provided by Bazant's Size Effect Method, which states that the critical stress value (σ_N) depends on two concrete attributes: the fracture energy, G_f , and the critical effective crack extension, c_f . These two parameters, which are material properties, exhibit high variability on experimental determination and also due to high constitutive heterogeneity of concrete, in such a way that they could be considered random. The uncertain of G_f e c_f and their statistical dependence were simulated with copula models, to evaluate how their randomness affect concrete fracture strength. The results show that the estimate of the characteristic value of σ_N and its probabilistic distribution, for beams, are as less sensitive to the structure of dependence of G_f e c_f as their height increases.

Keywords: fracture mechanics, size effect, uncertainty, copula models.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	OBJETIVOS	4
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
3.1	MECÂNICA DA FRATURA	5
3.1.1	MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	8
3.1.2	MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR ELÁSTICA	11
3.2	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	19
3.2.1	MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTÍNUOS PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	22
3.2.2	MODELAGEM DA DEPENDÊNCIA DE VETORES ALEATÓRIOS BIDIMENSIONAIS COM MODELOS DE CÓPULAS	27
3.2.3	ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	45
4	METODOLOGIA	46
4.1	PROBLEMA FÍSICO	46
4.2	PROGRAMA EXPERIMENTAL.....	48
5	RESULTADOS	50
5.1	SIMULAÇÃO DOS PARES (G_f, c_f)	50
5.2	DENSIDADES EMPÍRICAS ESTIMADAS PARA σ_N	53
5.3	EFEITOS DE D E DA CÓPULA SOBRE O VALOR CARACTERÍSTICO DE σ_N 58	
5.4	SIMULAÇÃO PARA OS ESTIMADORES DOS VALORES CARACTERÍSTICOS DE G_f E c_f	63
6	CONCLUSÕES.....	70
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72
	ANEXO.....	74

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Modos de fratura.....	6
Figura 3.2 – Diagramas tensão-deformação, no ensaio de tração, para os materiais: (a) frágil; (b) quase-frágil; e (c) dúctil.	8
Figura 3.3 - Tipos de zonas não lineares em diferentes tipos de materiais.	12
Figura 3.4 - Representação esquemática da ZPF no concreto.....	12
Figura 3.5 - Sistema de ensaio para SEN(B) definido por RILEM (1990).	17
Figura 3.6 – Funções de distribuição: (a) discreta; (b) contínua.	20
Figura 3.7 – Funções densidade de probabilidade da distribuição normal.....	23
Figura 3.8 - Funções densidade de probabilidade da distribuição gama generalizada.....	24
Figura 3.9 - Funções densidade de probabilidade para a distribuição GEV.	25
Figura 3.10 - Funções densidade de probabilidade t-Student.	26
Figura 3.11 - Funções densidade de probabilidade Log-normal.	27
Figura 3.12 – Densidades da família Clayton de cópulas.	33
Figura 3.13 – Densidades da família Frank de cópulas.....	34
Figura 3.14 – Densidades da família Ali-Mikhail-Haq de cópulas.....	36
Figura 3.15 – Densidades da família Joe de cópulas.....	37
Figura 3.16 – Densidades da família Gumbel-Hougaard de cópulas.	39
Figura 3.17 – Densidades da família Galambos de cópulas.....	40
Figura 3.18 – Densidades da família Husler e Reiss de cópulas.....	41
Figura 3.19 – Densidades da família Farlie-Gumbel-Morgenstern de cópulas.....	43
Figura 3.20 – Densidades da família Normal de cópulas.....	44
Figura 4.1 – Dispersão entre G_f e cf pelo Método do EEB	49
Figura 5.1 – Pares (G_f , cf) simulados para situação de independência estatística.....	50
Figura 5.2 – Pares (G_f , cf) simulados para a família Joe de cópulas	51
Figura 5.3 – Pares (G_f , cf) simulados para a família Gumbel-Hougaard de cópulas	51
Figura 5.4 – Pares (G_f , cf) simulados para a família Galambos de cópulas	52
Figura 5.5 – Pares (G_f , cf) simulados para a família Husler e Reiss de cópulas	52
Figura 5.6 – Pares (G_f , cf) simulados para a família Normal de cópulas	52
Figura 5.7 – Densidade empírica de σ_N para a família Clayton	53
Figura 5.8 – Densidade empírica de σ_N para a família Frank	54
Figura 5.9 – Densidade empírica de σ_N para a família Ali-Mikhail-Haq.....	54
Figura 5.10 – Densidade empírica de σ_N para a família Joe	55
Figura 5.11 – Densidade empírica de σ_N para a família Gumbel-Hougaard.....	55
Figura 5.12 – Densidade empírica de σ_N para a família Galambos.....	56
Figura 5.13 – Densidade empírica de σ_N para a família Husler e Reiss.....	56
Figura 5.14 – Densidade empírica de σ_N para a família Farlie-Gumbel-Morgenstern.....	57
Figura 5.15 – Densidade empírica de σ_N para a família Normal.....	57
Figura 5.16 – Curva $\log(D) \times \sigma_N$	59
Figura 5.17 – Dispersão dos valores médios σ_N em relação a $\sigma_N 60$	
Figura 5.18 – Proximidade entre $\hat{\sigma}_N$ e σ_N	62
Figura 5.19 – Pares simulados para G_f e cf	64
Figura 5.20 – Densidades marginais estimadas para: (a) G_f ; e (b) cf	65
Figura 5.21 – Dispersão entre $U = Fd(G_f)$ e $V = Fd(cf)$	66
Figura 5.22 – Densidade empírica estimada para $U = Fd(G_f)$ e $V = Fd(cf)$	66
Figura 5.23 – Densidade estimada para $U = Fd(G_f)$ e $V = Fd(cf)$, para cada família de cópulas	68

Figura 5.24 – Densidade estimada para $U = Fd(Gf)$ e $V = Fd(cf)$, com a família Normal de cópulas e parâmetro $\rho = 0,479$.	69
Figura 7.1 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Clayton.	75
Figura 7.2 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Frank.	76
Figura 7.3 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Ali-Mikhail-Haq.	77
Figura 7.4 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Joe.	78
Figura 7.5 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Gumbel-Hougaard.	79
Figura 7.6 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Galambos.	80
Figura 7.7 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Husler e Reiss.	81
Figura 7.8 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Farlie-Gumbel-Morgenstern.	82
Figura 7.9 – Pares (G_f, cf) simulados para a família Normal.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Dados experimentais.	48
Tabela 5.1 - Famílias de cópulas e parâmetros utilizados para a simulação	50
Tabela 5.2 – Valor característico de σ_N para a variável D	59
Tabela 5.3 – Estimativas dos parâmetros das famílias de cópulas.	67
Tabela 7.1 - Estatísticas de locação e dispersão, para todos os modelos de cópulas e seus respectivos parâmetros, para os valores simulados de σ_N	84

LISTA DE SÍMBOLOS

G_f	energia crítica de fratura
C_f	comprimento equivalente da zona de fratura
σ_N	resistência nominal à fratura do concreto
σ_f	tensão de fratura
E	módulo de elasticidade
γ_S	energia de superfície específica
a	comprimento de uma trinca interna
K	fator de intensidade de tensões
K_I	fator de intensidade de tensões para o modo I
σ_F	tensão induzida para a geometria sem trinca
D	altura da viga
h	função de fator geométrico
S	comprimento do vão entre os apoios da viga
L	comprimento total da viga
c_n	fator de relação de aplicação de carga pela área
a_e	comprimento da trinca equivalente
t	espessura da viga
W	peso próprio da viga
A	parâmetro de proporcionalidade da regressão
C_0	parâmetro intercepto da regressão
X	variável aleatória
Y	variável aleatória
F	função de distribuição de X
G	função de distribuição de Y
H	função de distribuição bivariada do vetor aleatório (X, Y)
C	função cópula
β	parâmetro empregado na função cópula
ρ	parâmetro empregado na função cópula da família Normal

1 INTRODUÇÃO

O concreto é o segundo material mais utilizado pelo homem, ficando apenas atrás da água – que é um componente do concreto –, posição essa de destaque que foi alcançada por causa de suas boas propriedades e desempenho, que foram estudados e aprimorados tecnologicamente ao longo do tempo.

Mesmo que seja usado massivamente na construção de empreendimentos de todas as naturezas, desde os pequenos àqueles de grande porte, e grandes avanços tenham sido feitos no último século em relação à descoberta e ao domínio das propriedades do concreto, ainda restam dúvidas e imprecisões a respeito de seu comportamento mecânico.

Muitos códigos internacionais foram editados para padronizar e diminuir a ocorrência de ruínas ou desastres relacionados ao uso do concreto como material de construção, mas poucos deles se aprofundam nos mecanismos de fratura inerentes a esse material. De fato, o concreto apresenta uma característica fundamental, que não deveria ser ignorada pelos projetistas: a resistência dos elementos estruturais fabricados com esse material diminui à medida que suas dimensões aumentam. Essa propriedade é chamada de efeito de escala.

Antes, pensava-se que esse efeito se dava por razões meramente estocásticas, relativas às características constitutivas e microscópicas do concreto, de tal modo que o controle e a mensuração de incertezas relacionadas a esse fenômeno se restringiam ao tratamento estatístico dos riscos. No entanto, a evolução das pesquisas demonstrou que há mecanismos físicos diretamente observáveis que influenciam no efeito de escala do concreto, notadamente devido ao processo de liberação de energia ocasionado pelo surgimento de fissuras. Esse conhecimento permitiu o emprego de modelos determinísticos para descrever tal fenômeno, tornando a abordagem estatística subsidiária.

Assim, o concreto passou a ser objeto de intenso estudo da Mecânica da Fratura, que propõe modelos para explicar o comportamento desse material. Entre essas abordagens, destaca-se a da Mecânica da Fratura Não Linear Elástica e, especificamente dentro desse

paradigma, o emprego do Modelo do Efeito de Escala de Bazant (EEB), proposto por Bazant (1984), no qual fica explícito que a tensão nominal de resistência à fratura do concreto depende de dois atributos do concreto: a energia crítica de fratura, G_f , e o comprimento equivalente de zona de fratura, c_f .

Embora G_f e c_f sejam descritos como parâmetros fixos (determinísticos) do concreto – tal qual a resistência à compressão, por exemplo – na formulação do EEB, a grande variabilidade presente em sua determinação experimental e também na característica de sua heterogeneidade constitutiva nos permitem considerar a modelagem desses atributos como variáveis aleatórias.

Esse tipo de enfoque é feito por Borges (2016), que realiza modelagem da incerteza de G_f e c_f , discutindo sua influência na confiabilidade do concreto. Nesse trabalho, quantificam-se as incertezas dos parâmetros da mecânica da fratura G_f e c_f quando estimados sob o modelo de Efeito de Escala de Bazant (EEB) e com o Modelo de Dois Parâmetros (MDP) a partir de ensaios em materiais cimentícios realizados por de Brand et al. (2013) e Muñoz (2015). A tensão nominal de fratura, σ_N , é prevista para vigas entalhadas sob flexão em três pontos considerando as incertezas baseadas no programa experimental e correlações entre G_f e c_f . Estima-se também a probabilidade de falha de vigas de concreto através do cálculo do índice de confiabilidade, I , para vigas de diferentes alturas e diferentes taxas de entalhe. Os resultados mostraram que a predição de I comprova o efeito de escala e que vigas mais espessas tem menores índices de confiabilidade, especialmente quando se considera a correlação entre as propriedades da mecânica da fratura.

Os ensaios realizados por Brand et al. (2013) na *University of Illinois at Urbana Champaign* foram conduzidos em vigas submetidas à flexão em três pontos com entalhe, em inglês Single Edge Notched Beam Specimen (SEN(B)), cujos dados são modelados e analisados por Borges (2016).

Por sua vez, Muñoz (2015) implementa um algoritmo para realizar a análise de funções de estado limite não lineares que descrevem o estado limite de ruptura de vigas

(fabricadas em concreto convencional e também em concreto reciclado) por propagação instável de trincas. Parâmetros de fratura de materiais cimentícios são extraídos de ensaios de laboratório conforme especificados nos métodos clássicos de EEB e MDP. Os resultados quantificam a predição da falha estrutural e probabilidade de fraturamento instável incorporando a influência da variabilidade estatística dos parâmetros dos materiais obtidos em ensaios de laboratório (G_f e C_f).

A abordagem realizada no presente esforço também visa a tomar o caminho tomado por Borges (2016) e Muñoz (2015), com o propósito de modelar a aleatoriedade e a dependência estatística existente entre G_f e C_f por meio de modelos de cópulas, avaliando seu impacto no valor da resistência nominal à fratura do concreto, σ_N .

Este documento está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 apresenta os objetivos; o Capítulo 3 expõe a fundamentação teórica, com conceitos relativos à mecânica da fratura aplicável a vigas de concreto, e também com uma breve revisão da literatura relacionada à modelagem de variáveis aleatórias. No Capítulo 4, descreve-se de maneira mais precisa a metodologia empregada na abordagem, enquanto o Capítulo 5 se destina à apresentação dos resultados relacionados às simulações realizadas e também do ajuste matemático de modelos de cópulas, pelo método de máxima verossimilhança, para a distribuição de G_f e C_f . Finalmente, as conclusões são listadas no Capítulo 6.

2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é investigar a influência da incerteza dos parâmetros de fatura do concreto – energia crítica de fratura, G_f , e comprimento equivalente de zona de fratura, c_f – sobre a resistência nominal de fratura (σ_N) em vigas, sob a formulação do modelo de efeito de escala de Bazant (EEB) e com modelagem da correlação entre tais atributos realizada por meio de modelos probabilísticos de cópulas.

Temos, ainda, como objetivos específicos: analisar dados dos ensaios de Brand et al. (2013) para determinação de G_f e c_f pelo método do EEB; estudar o efeito de estruturas de correlação que não são dadas pela distribuição normal bivariada e sua modelagem, processo que usualmente considera o emprego de modelos de cópulas; estimar pelo método de máxima verossimilhança a distribuição simulada de G_f e c_f e sua respectiva estrutura de correlação, por meio dos modelos de cópulas; realizar análise de sensibilidade dos modelos de cópulas e seus parâmetros sobre σ_N ; e estudar o software R *Project for Statistical Computing*, que é livre e amplamente utilizado pela comunidade acadêmica em todo o mundo, em pesquisas de várias áreas do conhecimento.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a fundamentação teórica necessária para a compreensão e modelagem do problema estudado, com os conceitos, definições, notação e resultados essenciais para a abordagem. Assim, revisamos a literatura em tópicos relacionados à Mecânica da Fratura e às Variáveis Aleatórias.

3.1 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura é o campo da ciência dos materiais que se ocupa do estudo de seu comportamento em relação à propagação de trincas ou outros defeitos de fabricação ou constituição (tais como fissurações), para que tais situações, enfrentadas pelas estruturas na prática, possam ser previstas e modeladas.

Os conceitos tradicionais de resistência dos materiais, baseados em propriedades como resistência ao escoamento ou resistência à ruptura, podem negligenciar outros mecanismos de ruptura ou degradação, pois, por exemplo, não consideram parâmetros como a tenacidade à fratura do material, a propriedade que quantifica a resistência à propagação de uma trinca.

De fato, sob certas condições de serviço, um defeito surgido no material ou peça estrutural, mesmo que seja pequeno, pode levar a falhas catastróficas, por causa da falta da previsão de sua ocorrência. Tais defeitos são inevitáveis nas estruturas, por maior que seja o controle da fabricação dos componentes, e aparecem de formas variadas, adicionalmente àqueles inerentes ao próprio material.

Dessa forma, é importante observar e caracterizar propriedades críticas das imperfeições que possam surgir e, dessa forma, influenciar no desempenho de uma estrutura, já que podem ter o potencial de provocar rupturas catastróficas sob determinadas condições de tensões. A intensidade e as consequências do aparecimento de uma imperfeição (trincas,

fissuras, rachaduras) em uma estrutura vão depender de vários fatores, como o modo de aplicação da carga, do material, da geometria do elemento estrutural.

Experimentalmente, a mecânica da fratura considera a realização de ensaios que visem a observar a propagação de uma trinca, que é idealizada pela confecção de um entalhe proposital no elemento estrutural (corpo de prova), com comprimento pré-determinado. Existem três classificações da maneira como os deslocamentos das duas superfícies das trincas podem ocorrer, chamados modos de fratura (ver figura 3.1), que dependem essencialmente da direção do carregamento aplicado (Bautista [2007]).

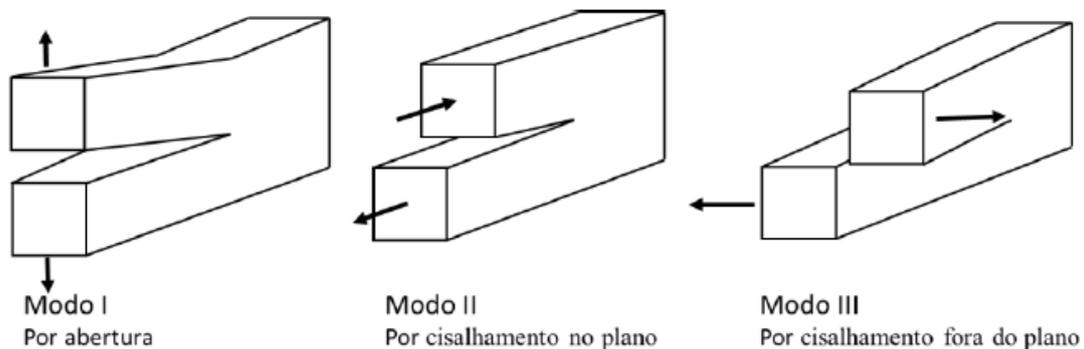


Figura 3.1 - Modos de fratura. Obtido de Munhoz (2015).

O Modo I de fratura, correspondente à abertura da trinca, ocorre quando a direção do carregamento é aplicada perpendicularmente ao plano de fratura (tensão de tração normal ao plano da fratura); quando os esforços são aplicados paralelamente ao plano fraturado, ocorre o Modo II, chamado de cisalhamento na direção do plano de corte; o Modo III, por sua vez, é aquele em que ocorre o cisalhamento fora do plano de fratura, chamado também de rasgamento.

Como se nota, cada um desses modos está associado a um tipo básico de campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca, pois eles representam a aplicação em apenas uma das direções nos eixos cartesianos ortogonais ao plano da trinca. É raro encontrar separadamente estes modos de fratura, ocorrendo normalmente alguma junção entre eles. Todavia, qualquer problema de deformação da ponta da trinca pode ser tratado como uma combinação desses modos de deslocamento (Miranda (2003)). O modo I é o mais usual

e importante, pois corresponde ao modo de fraturamento da maioria das peças trincadas em concreto.

Em relação ao material, a modelagem da mecânica da fratura apresenta propostas diferentes em relação à sua fragilidade, atributo classicamente quantificado pela ductilidade, propriedade que representa uma medida do grau de deformação plástica que o material suporta antes de ocorrer sua ruptura.

Um material que experimenta uma deformação plástica muito pequena (pouco significativa) ou mesmo nenhuma deformação plástica antes de sofrer a ruptura é chamado de frágil. Por outro lado, o material que apresenta uma considerável deformação plástica antes da ruptura é chamado de dúctil. Materiais de engenharia podem fraturar de forma dúctil ou frágil, dependendo de sua capacidade de tolerar deformação plástica. Existem alguns materiais, como o concreto, que apresentam características comuns dos dois grupos já citados no instante da falha. Costuma-se referenciar materiais como o concreto e outros materiais cimentícios e cerâmicos, então, como quase-frágeis.

Segundo Silva Neto (2015), em relação ao ensaio de tração, “os materiais frágeis possuem comportamento elástico linear até o carregamento máximo, e o aparecimento de fissuras catastróficas se dá logo este pico” (Figura 3.2a). Já o comportamento dúctil (Figura 3.2c) é “caracterizado por uma grande parcela de escoamento, havendo antes da ruptura o comportamento não linear”.

Por sua vez, os materiais quase-frágeis (Figura 3.2b) se caracterizam pelo comportamento linear ocorrer até quase antes do carregamento máximo, no qual a propagação das fissuras tem início e a capacidade de transferência de tensões do material a partir desse ponto começa a reduzir. Nesses materiais, a queda pós-pico não é abrupta devido a fenômenos que dissipam a energia na ponta da fissura.

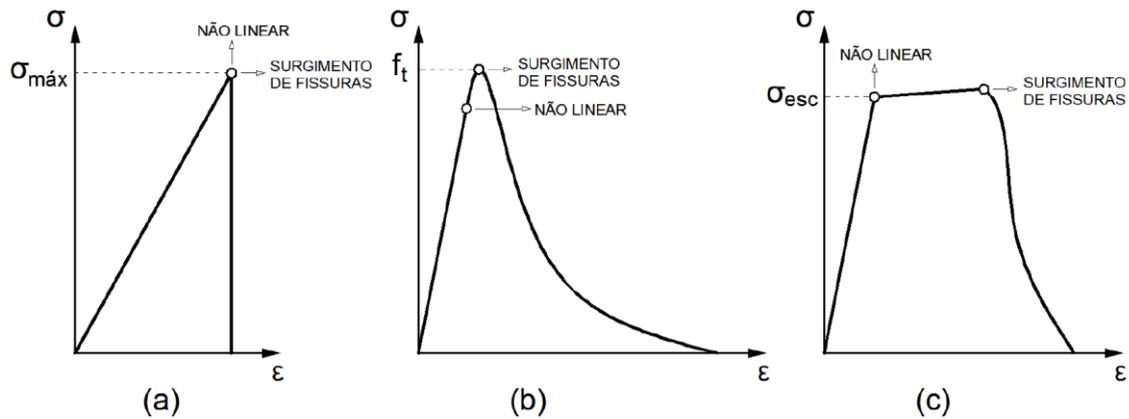


Figura 3.2 – Diagramas tensão-deformação, no ensaio de tração, para os materiais: (a) frágil; (b) quase-frágil; e (c) dúctil. Obtido de Silva Neto (2011).

Os materiais frágeis, tais como o vidro, têm seu desempenho modelado pela Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), modelo inicialmente desenvolvido por Griffith (1921). Os materiais dúcteis, por seu turno, têm seu tratamento matemático provido pela Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP).

Apesar de ter comportamento frágil à tração, a análise do concreto sob a modelagem da MFLE não se mostrou satisfatória, de modo que foi necessário enquadrá-lo sob o desenvolvimento de outra teoria, a da Mecânica da Fratura Não Linear Elástica (MFNLE).

É apresentada, a seguir, uma breve introdução sobre a concepção da MFLE e da MFNLE, importantes para nossa abordagem.

3.1.1 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) constitui o modelo matemático que avalia os mecanismos de fratura dos materiais frágeis, através dos conceitos da teoria da elasticidade linear. Representa de maneira satisfatória os casos em que ocorre falha praticamente instantânea do material quando ele atinge a tensão de ruptura, perdendo sua capacidade portante.

Embora todo corpo trincado sob carga apresente uma região sujeita à deformação plástica na ponta da trinca, sob certas condições, pode-se negligenciar a existência desta zona plástica, realizando seu estudo apenas com a consideração da elasticidade. As condições que viabilizam a aplicação da MFLE referem-se aos casos em que o volume de deformação plástica é relativamente pequeno quando comparado às dimensões da peça ou elemento estrutural (Bazant e Planas [1997]).

A MFLE foi introduzida por Griffith (1921), que realizou experimentos em corpos de prova de vidro com um entalhe propositalmente fabricado com comprimento a e observou que o produto de \sqrt{a} pelo valor da tensão no momento da fratura era aproximadamente constante.

Segundo Griffith, em materiais idealmente frágeis a trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal fosse maior que a energia requerida para formar uma nova superfície de trinca, isto é, a energia necessária para romper a coesão entre os átomos à frente da trinca. Grosso modo, isso corresponde a dizer que a propagação de uma trinca ocorre quando a energia disponível para o aumento de uma trinca é suficiente para superar a resistência do material. Chegou, então, à seguinte expressão:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{\pi a}}. \quad (3.1)$$

Onde σ_f é tensão de fratura, E é módulo de elasticidade, γ_s é a energia de superfície específica e a é o comprimento de uma trinca interna.

Irwin (1958) modificou a expressão de Griffith para levar em conta materiais elasto-plásticos, introduzindo o trabalho plástico. Assim, definiu também o *fator de intensidade de tensões*, K , que determina a magnitude das tensões na ponta da trinca. Para o modo I de fratura, essa grandeza é dada por

$$K_I = \sigma_F \sqrt{\pi a} h\left(\frac{a}{D}\right), \quad (3.2)$$

em que σ_F é a tensão induzida para a mesma geometria sem trinca, D é a altura da viga e $h()$ é a função de fator geométrico, que varia de acordo com as combinações de carregamento e forma geométrica. Quando a tensão crítica de fratura é alcançada, temos $K_I = K_{Ic}$, que é o *fator de intensidade de tensões crítico*.

Para o caso de viga sob flexão em três pontos com entalhe simples e relação entre vão (S) altura (D) igual a 4, $h()$, com $\alpha = a/D$, é dada por

$$h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(3.15 - 3.93\alpha + 3.7\alpha^2)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}}. \quad (3.3)$$

Alternativamente à função h , costuma-se definir a função $g()$ abaixo, para simplificar as expressões subsequentes (a serem apresentadas):

$$g(\alpha) = \pi\alpha[c_n h(\alpha)], \quad (3.4)$$

onde c_n é o fator de relação de aplicação de carga pela área. Para o caso de vigas em flexão em três pontos, $c_n = \frac{1.5S}{D}$, sendo S o comprimento do vão entre os apoios da viga.

Retomando a abordagem energética de Griffith com as considerações de Irwin, uma quantidade importante é a energia de propagação de fissuras, G_f , que se relaciona com K_{Ic} , na MFLE, por meio da relação:

$$G_f = \frac{K_{Ic}^2}{\bar{E}}, \quad (3.5)$$

em que $\bar{E} = E$, no estado plano de tensões, e $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$, no estado plano de deformação; ν é o coeficiente de Poisson.

Os atributos G_f e K_{Ic} são inerentes ao material, e seus valores críticos são extraídos a partir da aplicação da carga última da estrutura. Mesmo que sejam próprios do material, nota-se uma variação aleatória dos valores desses parâmetros quando são alteradas a forma e o tamanho do elemento estrutural. Determinados G_f ou K_{Ic} (que seriam tabelados pelo material empregado na estrutura), pode-se calcular a *tensão nominal de resistência à propagação de fratura* (σ_N) com a seguinte equação:

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{Dg(\alpha)}} \quad (3.6)$$

Conforme já colocado, a MFLE – e, conseqüentemente, a equação (3.6) – é aplicável aos materiais frágeis. Para o concreto, material quase-frágil, é necessário promover mudanças nessa abordagem, o que origina a MFNLE.

3.1.2 MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR ELÁSTICA

A Mecânica da Fratura Não Linear Elástica (MFNLE) se vale dos conceitos desenvolvidos no âmbito da MFLE, promovendo modificações necessárias à formulação para que seja aplicável a materiais quase-frágeis como o concreto.

Conforme já mencionado, a MFLE modela bem o fenômeno da fratura dos materiais frágeis, pois para eles o volume de deformação plástica que se forma na ponta da trinca é relativamente pequeno quando comparado às dimensões da peça ou elemento estrutural.

Segundo Bazant e Planas (1997), os experimentos com concreto, no entanto, demonstram que a região existente entre a porção trincada e da porção sem trinca do material (chamada de ligamento), que é denominada de Zona de Processo de Fratura (ZPF), possui tamanho significativo em relação às dimensões do elemento estrutural (Figura 3.3).

A ZPF é, em materiais quase-frágeis como o concreto, uma zona de dano com microfissuras à frente da macrofissura¹ e é caracterizada por um comportamento não linear provocado por deformações inelásticas (Figura 3.3). É onde se dá o processo de fratura e há a nova formação de novas superfícies (Silva [2017]).

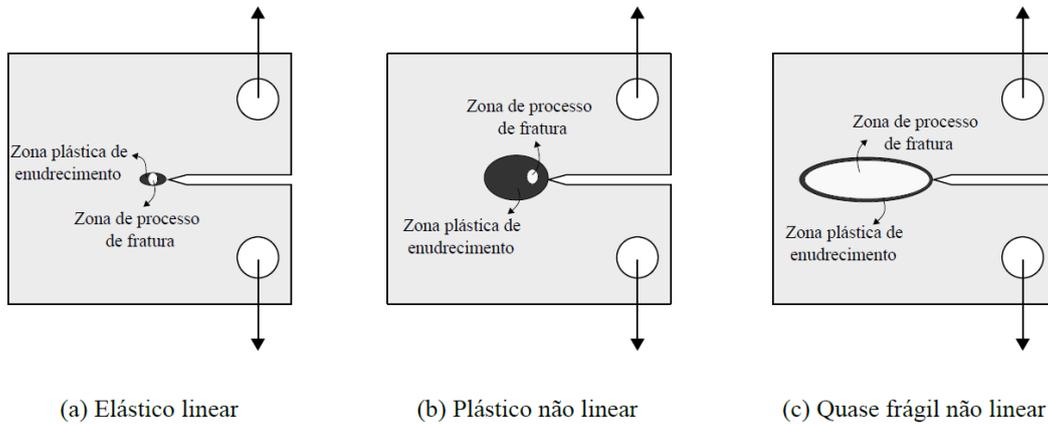


Figura 3.3 - Tipos de zonas não lineares em diferentes tipos de materiais. Obtido de Silva (2017).

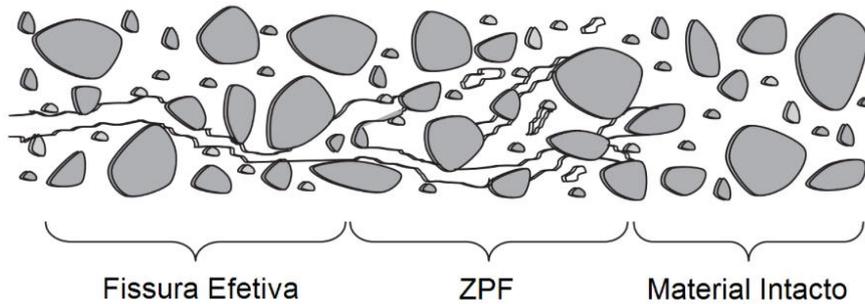


Figura 3.4 - Representação esquemática da ZPF no concreto. Obtido de Silva Neto (2015).

Uma das abordagens utilizadas para adaptar a MFLE para os materiais quase-frágeis – chegando-se, assim, à MFNLE – é aplicar aquela teoria a tais materiais considerando uma trinca com um comprimento equivalente a_e , que abarque em sua extensão a ZPF.

¹ Em condições naturais da formação das fissuras, localizar precisamente a ponta de uma trinca no concreto é praticamente impossível.

Segundo Bazant e Planas (1997), se “apenas uma pequena parte do ligamento está fraturado, então podem ser usados modelos simplificados e parcialmente linearizados que simulam a resposta do elemento longe da ponta da trinca por meio de uma trinca equivalente que tenha a ponta em algum ponto da ZPF”². Essa proposta se configura sob o conceito de trinca elástica equivalente.

O problema de utilizar essa equivalência reside em definir onde a ponta da trinca equivalente estaria localizada para um particular nível de carga. Ou seja, surge o problema de definir o valor de

$$\Delta a = a - a_e, \quad (3.7)$$

onde a ainda denota o comprimento original (inicial) da trinca e a_e é o comprimento da trinca equivalente. Assim, pela equação (3.6), para a trinca equivalente, a tensão nominal de resistência à fratura é dada por:

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{D g\left(\frac{a_e}{D}\right)}} = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{D g\left(\alpha + \frac{\Delta a}{D}\right)}}. \quad (3.8)$$

Definindo o comprimento equivalente da zona de fratura, c_f , por

$$c_f = \lim_{D \rightarrow \infty} \Delta a \quad (3.9)$$

e considerando que temos $\Delta a \approx c_f \ll D$ para um elemento estrutural muito maior que a ZPF, podemos usar uma expansão de Taylor de dois termos para a função g , obtendo

$$g\left(\alpha + \frac{\Delta a}{D}\right) \approx g(\alpha) + g'(\alpha) \frac{c_f}{D}. \quad (3.10)$$

² Tradução livre do trecho do livro citado.

Assim, substituindo a expressão acima (3.10) na equação (3.8), obtemos a tensão nominal de fratura para a MFNLE, dada por

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{Dg(\alpha) + c_f g'(\alpha)}}. \quad (3.11)$$

Essa equação tem boa aplicação para pequenos valores de α , de acordo com formulação apresentada (Bazant e Planas [2017]). O parâmetro c_f é inerente ao material e deve ser obtido experimentalmente, tal qual ocorre com outras características do concreto, como a resistência à compressão, por exemplo.

A equação (3.11) revela ainda que a tensão nominal de fratura depende diretamente do estabelecimento dos valores tanto de G_f como de c_f , que são atributos do material. Por isso, sua determinação ocupa um papel central na MFNLE, de tal maneira que tem sido objeto de vários estudos, mesmo em anos recentes.

Existem três modelos bem consolidados, com seus métodos experimentais, que foram propostos dentro da concepção da MFNLE, a saber: o Modelo de Dois Parâmetros (MDP), de Jenq e Shah (1985); o *Effective Crack Model* (ECM), de Karihaloo & Nallathambi (1986); e o Efeito de Escala de Bazant (EEB).

Vale destacar que existem outros métodos experimentais para estimar parâmetros de fratura do concreto, mas eles utilizam outras abordagens e formulações – inclusive com a definição de outros atributos do material – diversas da adoção do conceito da trinca elástica equivalente. Entre tais métodos, destacamos o *Work-of-Fracture Method* (WFM), proposto por Hillerborg (1976).

O Modelo de Dois Parâmetros realiza a medida da abertura da boca da fissura (em inglês, *crack mouth opening displacement* - CMOD), com o traçado das curvas CMOD x carga de carregamento e descarregamento, para se obter o valor do deslocamento crítico da ponta da trinca (*critical crack tip opening displacement* - CTOD_c) e de K_{Ic} , que são os dois parâmetros formulados para o modelo. Os valores de G_f e c_f são obtidos por meio de

relações matemáticas existentes com $CTOD_c$ e de K_{Ic} . O *Effective Crack Model* é bastante similar ao MPD, tendo como diferença o uso da secante na carga máxima (para o cálculo do módulo de elasticidade - E) em lugar do emprego da curva de descarregamento para o cálculo de E .

O modelo do Efeito de Escala de Bazant (EEB) será alvo de estudo neste esforço, por causa das implicações estatísticas inerentes ao seu método de ensaio, que segue as normas (ver RILEM [1990]) do *International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems and Structures* (RILEM, do nome em francês). Trata-se desse método na próxima seção. Além disso, Bazant e Becq-Giraudon (2002), ao verificarem o desempenho de métodos de determinação de parâmetros do concreto, concluíram que o EEB mostrou melhor performance (menor coeficiente de variação) que as outras alternativas estudadas (MDP, ECM e WFM).

3.1.2.1 Método do Efeito de Escala de Bazant

Os experimentos conduzidos em laboratório demonstram que a resistência de elementos estruturais fabricados em concreto diminui à medida que seu tamanho aumenta (Bazant e Planas [1997]). Esse é o chamado efeito de escala (*size effect*) do concreto, que é provavelmente a característica mais importante da fratura da mecânica desse material.

Embora anteriormente se acreditasse que o efeito de escala se devesse puramente a fatores estatísticos inerentes ao material – com a ideia de que quanto maior o elemento, maior a chance de ele conter falhas constitutivas que reduzem sua resistência, em concordância com a teoria de confiabilidade de Weibull –, estudos posteriores sugeriram que tal efeito pudesse ter origem na mecânica da fratura, vez que experimentos em corpos de prova (CP) similares de várias dimensões (pequenas a grandes) com grandes entalhes exibiam uma fase de transição, em que havia nenhum efeito de escala (nos CPs pequenos), enquanto havia grande efeito nos maiores (Bazant e Planas [1997]).

Assim, ponderou-se se a existência do entalhe induzia tensões de maneira diferente a depender do tamanho do CP. Essa abordagem reconhecia que não só a presença de falha

causava perda de resistência (segundo a perspectiva estatística), mas também que esse fator muda a mecânica dos elementos estruturais, variando sua intensidade e comportamento de acordo com a dimensão da peça sob carga. As pesquisas acabaram confirmando que o efeito de escala se deve a um processo de degradação ou dano numa considerável zona de processo de fratura, que causa perda de resistência ao material: a falha (entalhe, fissura) induz a propagação da fratura do material, modificando sua mecânica devido à energia liberada.

A importância das dimensões do elemento estrutural para a caracterização de sua resistência está explicitada na equação (3.11), que fornece o valor de σ_N para a MFNLE. De fato, essa expressão, reexibida abaixo, demonstra que σ_N decai com o aumento de D , que está presente no denominador:

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{D g(\alpha) + c_f g'(\alpha)}} \quad (3.11)$$

Para utilizar a técnica estatística de regressão linear para estimar G_f e c_f por intermédio de dados experimentais, o método experimental de determinação do Efeito de Escala de Bazant realiza um rearranjo da equação (3.11), colocando-a na forma

$$Y = AD + C_0. \quad (3.12)$$

Para tanto, basta definir

$$Y = \left(\frac{c_n}{\sigma_N}\right)^2, \quad (3.13)$$

$$A = \frac{g(\alpha)}{G_f E} \quad (3.14)$$

e

$$C_0 = \frac{c_f g'(\alpha)}{G_f E g(\alpha)}. \quad (3.15)$$

Assim, realizando-se ensaios conforme as normas recomendadas por RILEM (1990) (Figura 3.5) em vigas sob flexão em três pontos com único entalhe – corpo de prova que recebe o nome de *Single Edge Notched Beam Specimen* (SEN(B)) –, pode-se registrar o valor da carga última P_{ult} para vários valores de D , o que permite o cálculo de σ_N por meio da expressão

$$\sigma_N = c_n \frac{P_{ult} + 0,5\frac{L}{S}}{tD}, \quad (3.16)$$

onde t é a espessura da viga, W é o peso próprio da viga, S é o vão da viga e L é o comprimento total da viga.

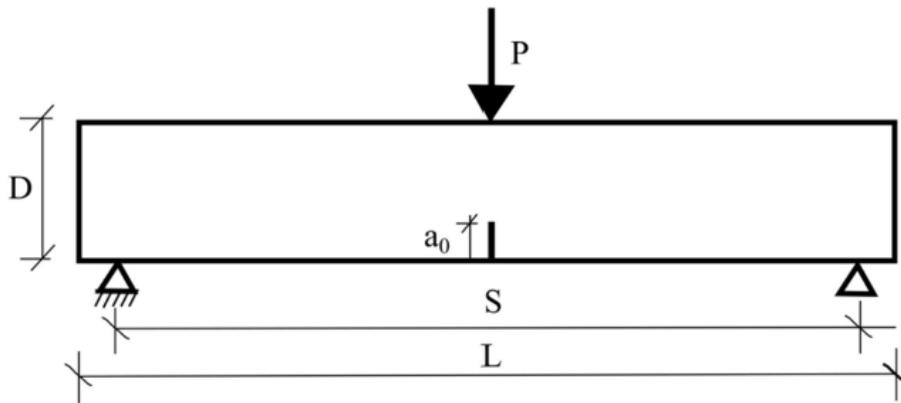


Figura 3.5 - Sistema de ensaio para SEN(B) definido por RILEM (1990).

A partir dos dados registrados em ensaio (relativos a σ_N e D), procede-se ao cálculo de Y para todas as n repetições do ensaio, conforme a equação (3.13), de forma que são obtidos os pareamentos de amostra (Y_i, D_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Recomenda-se o uso de pelo menos três ensaios para cada valor de D estipulado. Assim, procede-se à estimação dos parâmetros A e C da regressão linear $Y = AD + C$, em que Y é a variável dependente e D é a variável explicativa.

Da teoria da regressão linear, sabe-se que A e C podem ser obtidos por meio dos estimadores do Método de Mínimos Quadrados, a saber:

$$\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2} \quad (3.17)$$

e

$$\hat{C}_0 = \bar{Y} - \hat{A}\bar{D}, \quad (3.18)$$

em que \bar{Y} e \bar{D} são as médias amostrais de Y e D , respectivamente.

Finalmente, chega-se aos valores estimados de G_f e c_f , dados por

$$\hat{G}_f = \frac{g(\alpha)}{\hat{A}E} \quad (3.19)$$

e

$$\hat{c}_f = \frac{g(\alpha)\hat{G}_fE}{g'(\alpha)}\hat{C}_0. \quad (3.20)$$

Como se pode notar, os valores obtidos para G_f e c_f são calculados a partir de estimadores estatísticos (dos parâmetros A e C_0), que são variáveis aleatórias, vez que são funções da amostra de tamanho n registrada nos ensaios. De fato, as observações (Y_i, D_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ são realizações independentes e identicamente distribuídas de variáveis aleatórias. Dessa maneira, \hat{G}_f e \hat{c}_f são estimativas sujeitas a variação estocástica e estão estatisticamente correlacionadas (como nos mostram as equações (3.19) e (3.20)).

Cabe pontuar também que, apesar da formulação da MFNLE considerar G_f e c_f como atributos fixos (não aleatórios) inerentes ao material, a heterogeneidade de um material como o concreto, conduz a variações estocásticas desses parâmetros em um mesmo corpo de prova. Ademais, há estudos, por exemplo, como o de Bazant e Becq-Giraudon (2002), que demonstram que há outras características do concreto que influenciam na dispersão de G_f e c_f , como a resistência à compressão do concreto, a forma e o tipo do agregado e a relação água/cimento.

Levando-se em conta todos esses aspectos, podemos dizer que a determinação dos parâmetros G_f e c_f possui muitas fontes de variabilidade, de tal modo que podemos considerá-las, para efeito de modelagem, como variáveis aleatórias que influenciam diretamente o estabelecimento da tensão nominal de fratura do concreto. Para procedermos a essa abordagem, é prudente introduzirmos, então, alguns conceitos relativos a variáveis aleatórias, sua caracterização, quantificação e estrutura de dependência.

3.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Para a caracterização e definição de variáveis aleatórias, foram utilizados como referências James (1981) e Magalhães (2004). De maneira informal, podemos dizer que uma variável aleatória (v.a.) X é uma variável numérica cujo valor está associado ao resultado de um experimento aleatório, ou seja, de um fenômeno que possui resultados definidos ao acaso. Dessa feita, a ocorrência dos resultados possíveis de uma v.a. está diretamente relacionada a algum tipo de regra ou lei que quantifique a chance de eles acontecerem, ou seja, a uma lei que meça suas probabilidades.

A quantificação dessas chances é feita por uma *função de distribuição* (fd) $F()$ associada à variável aleatória, definida por

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (3.21)$$

em que $P()$ designa uma medida de probabilidade.

Quando a função de distribuição é discreta (Figura 3.6a), diz-se que a v.a. é discreta; quando é contínua, a v.a. é dita contínua (Figura 3.6b). Nesta abordagem, a atenção é voltada às variáveis aleatórias contínuas.

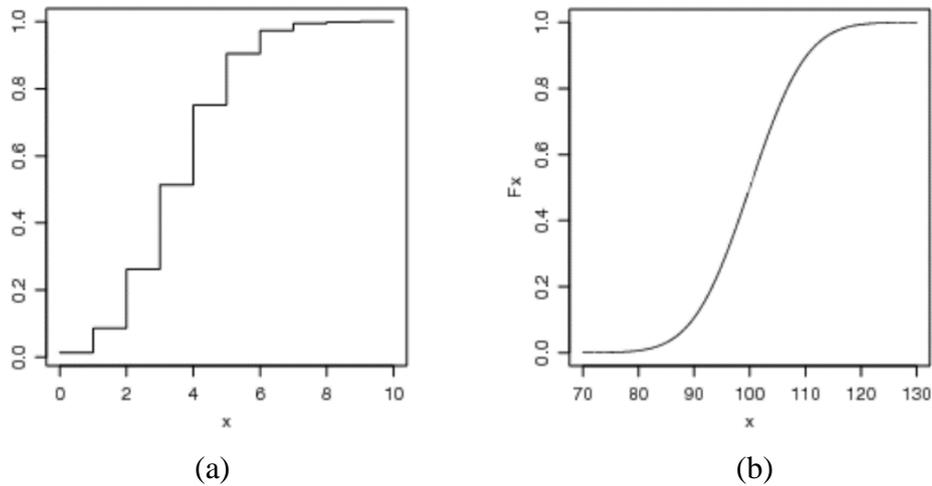


Figura 3.6 – Funções de distribuição: (a) discreta; (b) contínua.

Uma função de distribuição $F()$ contínua está relacionada diretamente e unicamente a uma *função densidade de probabilidade* (fdp) $f(x)$, da seguinte maneira:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (3.22)$$

A determinação da fd $F(x)$ ou da fdp $f(x)$ caracterizam completamente a distribuição de probabilidades de ocorrências de X , o que significa que o conhecimento de qualquer de uma dessas duas funções permite quantificar como se dão os resultados de X .

Consideremos agora duas variáveis aleatórias contínuas X e Y , com funções de distribuição *marginais* F e G e funções densidade de probabilidade *marginais* f e g , respectivamente. Se as colocarmos como entradas de um vetor bidimensional $\mathbf{W} = (X, Y)$ definiremos um *vetor aleatório* bidimensional³, com função de distribuição *conjunta* H definida por

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad (3.23)$$

³ A definição análoga vale para vetores aleatórios k -dimensionais. Observe-se um vetor aleatório unidimensional se constitui em uma variável aleatória.

que está associada à uma função densidade de probabilidade conjunta h , ou seja,

$$H(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x h(u, v) du dv, \quad (3.24)$$

no caso de variáveis vetores aleatórios contínuos. Se vale

$$H(x, y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)G(y) \quad (3.25)$$

ou, equivalentemente, $h(x, y) = f(x)g(y)$, dizemos que as v.a.'s X e Y são *independentes*. Caso contrário, elas são dependentes, com estrutura de dependência dada ou descrita por H (ou h , equivalentemente).

Duas quantidades que podem ter relevância para definir as características de uma v.a. são sua média $E(X)$ e variância $Var(X)$, definidas, quando finitas, respectivamente, por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx < \infty \quad (3.26)$$

e

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx < \infty. \quad (3.27)$$

Uma das mais importantes aplicações da teoria estatística se refere à determinação de F ou f , funções que não são diretamente observáveis. Para essa tarefa, cuja solução se tornou bem mais fácil com o advento dos computadores, foram propostas funções com formas típicas, denominadas modelos probabilísticos, que variam de acordo com *parâmetros* (constantes) presentes em suas expressões. Por outro lado, a determinação de H (ou h) ainda é um problema complexo, visto que a visualização ou prospecção da estrutura de dependência entre duas variáveis aleatórias é um problema de dimensão maior e, portanto, mais difícil.

3.2.1 MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTÍNUOS PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Conforme mencionado, existem funções probabilísticas que são parametrizadas e possuem formato típico, que varia de acordo com os parâmetros que as integram. Geralmente, trabalha-se com a função densidade de probabilidade, pois muitas vezes é difícil visualizar as diferenças entre as formas das diversas funções de distribuição.

Apresenta-se a seguir alguns desses modelos para variáveis aleatórias contínuas, exibindo a expressão da função densidade de probabilidade, seu formato típico (com gráficos que exemplificam as variações nos parâmetros), notação, média e variância. Ressalva-se que o valor da fdp é sempre nulo quando x não pertence ao suporte indicado.

3.2.1.1 Distribuição Normal – $N(\mu, \sigma^2)$

A distribuição normal é a mais conhecida, por causa de suas inúmeras aplicações e importância teórica em vários campos do conhecimento. Usa-se a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para indicar que a v.a. X tem fdp dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \quad (3.28)$$

Chama-se de distribuição normal padrão aquela em que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Além disso, temos $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. A densidade da distribuição normal é revelada um gráfico de uma função simétrica, que é mais achatado quanto maior for o valor de σ^2 (Figura 3.7).

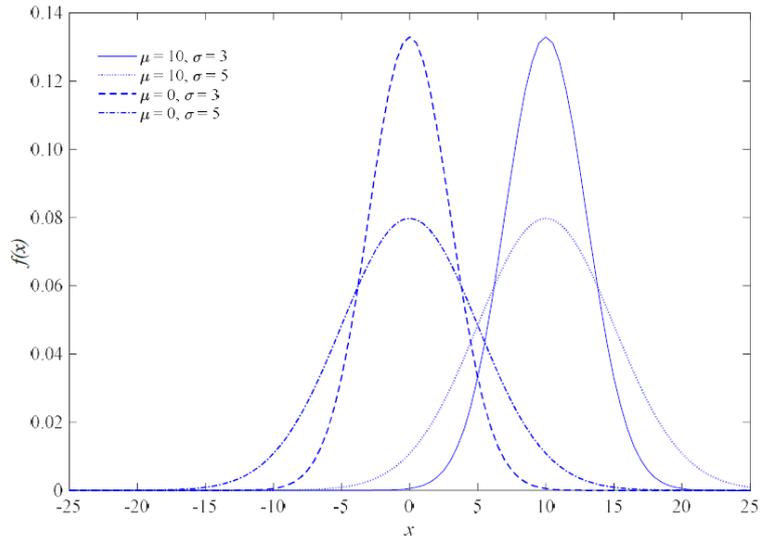


Figura 3.7 – Funções densidade de probabilidade da distribuição normal. Obtido de Borges (2016).

3.2.1.2 Distribuição Gama Generalizada– GG(α, λ, γ)

Diz-se que a v.a. X tem distribuição Gamma Generalizada – denotando- se $X \sim GG(d, a, p)$ – se possui fdp na forma

$$f(x) = \frac{p}{a^d \Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} x^{d-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^p}, x > 0, a > 0, d > 0, p > 0, \quad (3.29)$$

onde $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ é a função Gama. Além disso, temos $E(X) = a \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)}$ e

$$Var(X) = a^2 \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} - \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{p}\right)} \right]^2 \right\}.$$

A distribuição Gama generalizada é muito útil e versátil, porque engloba muitas outras distribuições como casos particulares dos valores de seus parâmetros. A distribuição de Weibull, por exemplo, corresponde ao caso em que $d = p$; A distribuição Gama(d, a) corresponde ao caso em que $p = 1$; A distribuição exponencial é aquela em que $p = d = 1$; A distribuição Qui-quadrado com k graus de liberdade é aquela em que $d = k/2, a = 2$ e $p = 1$. Algumas de suas conformações estão apresentadas na Figura 3.8 abaixo.

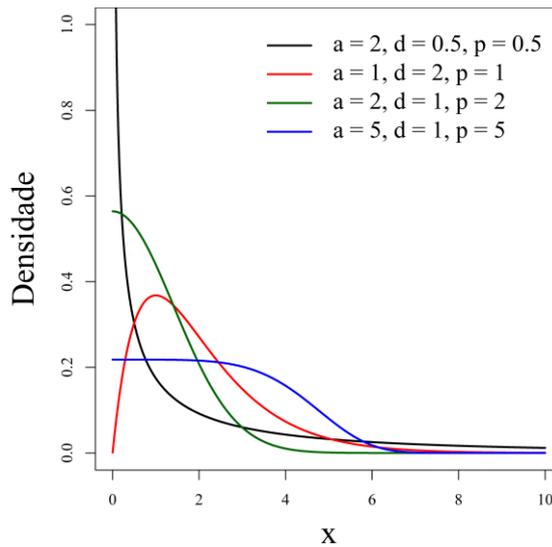


Figura 3.8 - Funções densidade de probabilidade da distribuição gama generalizada.

3.2.1.3 Distribuição de Valores Extremos Generalizada – $GEV(\mu, \sigma, k)$

A Distribuição de Valores Extremos é a distribuição para a qual convergem assintoticamente estatísticas de ordem, como o mínimo e o máximo de uma amostra. Possui fdp com a seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{x - \mu}{\sigma} k\right)^{-1/k-1} \exp\left\{-\left(1 + \frac{x - \mu}{\sigma} k\right)^{-1/k}\right\}, & k \neq 0; \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - e^{-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}\right\}, & k = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Para o caso em que $k > 0, x \geq \frac{\mu - \sigma}{k}$; para $k < 0, x \geq \frac{\mu - \sigma}{k}$.

Deve-se notar que o caso $k = 0$ corresponde à distribuição Gumbel univariada e que o valor de k irá determinar se a assimetria da distribuição será positiva ($k > 0$) ou negativa ($k < 0$). A distribuição GEV tem caudas “pesadas”, ou seja, atribui bastante probabilidade concentrada nos valores extremos (daí vem a origem de seu nome). Sua parametrização revela que μ é um parâmetro de locação, σ é um parâmetro de escala e k é um parâmetro de forma. Temos também que

$$E(X) = \begin{cases} \mu + \sigma[\Gamma(1 - k) - 1], & \text{se } k \neq 0 \text{ e } k < 1; \\ \mu + \sigma\gamma, & \text{se } k = 0; \\ \text{n\~{a}o existe,} & \text{para } k \geq 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Onde γ é a constante de Euler e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama. Além disso,

$$Var(X) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{k^2}[\Gamma(1 - 2k) - \Gamma^2(1 - k)], & \text{se } k \neq 0 \text{ e } k < 1/2; \\ \sigma^2\pi^2/6, & \text{se } k = 0; \\ \text{n\~{a}o existe,} & \text{para } k \geq 1/3. \end{cases} \quad (3.32)$$

A Figura 3.9, por sua vez, exibe formatos típicos para a fdp da distribuição GEV.

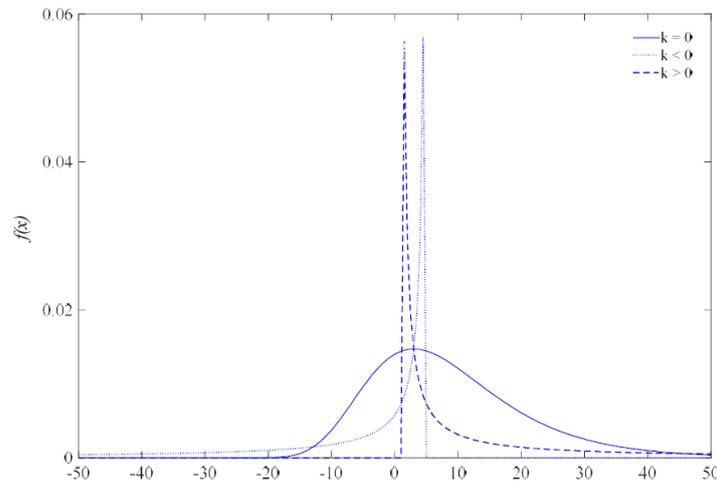


Figura 3.9 - Funções densidade de probabilidade para a distribuição GEV. Obtido de Borges (2016).

3.2.1.4 Distribuição t de Student - t_λ

A distribuição t de Student tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\sqrt{\lambda\pi}\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\lambda}\right)^{-\frac{(\lambda+1)}{2}}, \quad x > 0, \lambda > 0. \quad (3.33)$$

Possui $E(X) = 0$, se $\lambda > 1$, e $Var(X) = \frac{\lambda}{\lambda-2}$, para $\lambda > 3$. O formato típico para essa classe de densidades, simétrico e em formato de sino, está exibida na Figura 3.10. Interessante notar que $t_\lambda \rightarrow N(0, 1)$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

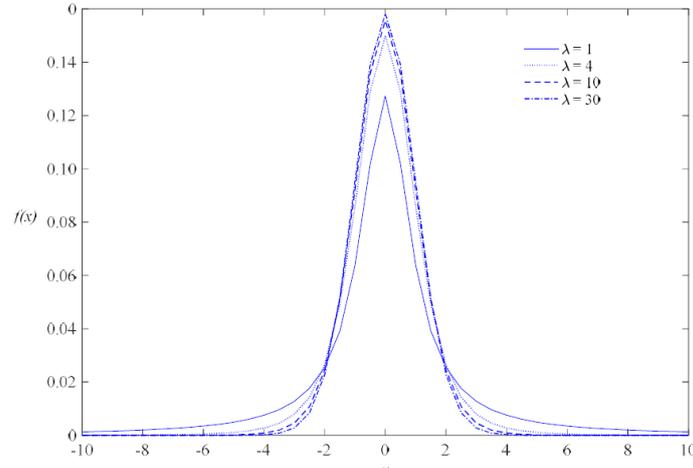


Figura 3.10 - Funções densidade de probabilidade t-Student. Obtido de Borges (2016).

3.2.1.5 Distribuição Log-normal(μ, σ^2)

A distribuição Log-normal, que se mostrou importante para este estudo, surge da transformação $X = e^Y$, em que $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Assim, sua fpd é dada por

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}, x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \quad (3.34)$$

Dessa forma, $E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ e $Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Gráficos para a densidade Log-normal estão contidos na Figura 3.11.

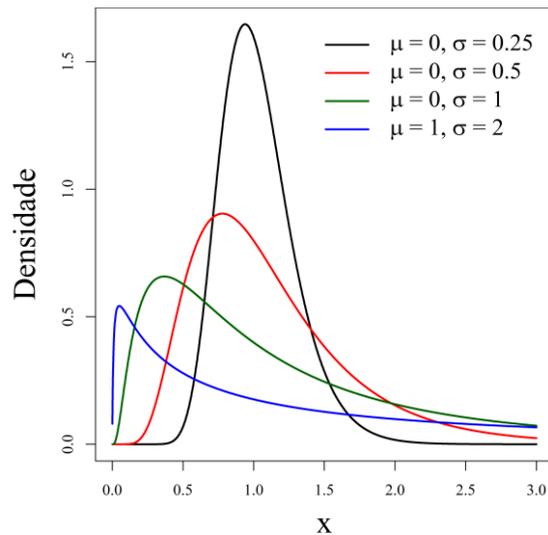


Figura 3.11 - Funções densidade de probabilidade Log-normal.

3.2.1.6 Distribuição uniforme no intervalo (0,1) - U(0,1)

Possui função densidade dada por $f(x) = 1$, para $x \in (0,1)$. Sua função de distribuição é $F(x) = x$, para $x \in (0,1)$, tendo $E(X) = 1/2$ e $Var(X) = 1/12$.

3.2.2 MODELAGEM DA DEPENDÊNCIA DE VETORES ALEATÓRIOS BIDIMENSIONAIS COM MODELOS DE CÓPULAS

Entender a relação entre duas variáveis é tema de estudo de muitas pesquisas, pois é comum haver o interesse em se determinar como um atributo X influencia outra variável Y . Ou seja, é importante saber como ocorre a dependência entre duas v.a.'s.

Bem sabemos que analisar variáveis conjuntamente pode nos levar a conclusões muito mais ricas que aquelas a que chegamos em análises em que consideramos as variáveis em estudo isoladamente. No entanto, essa é uma tarefa complexa, pois caracterizar o conceito de dependência estatística é difícil, a não ser no caso da dependência linear.

Conforme já colocado, há dependência sempre que a função de distribuição conjunta H do vetor aleatório $W = (X, Y)$ não se forma como o produto das funções de distribuição marginais de X e Y , que são F e G . Assim, a única forma que caracterizar completamente a dependência é descrevendo a função de distribuição (ou função densidade) conjunta de (X, Y) .

Embora a estimação das marginais F e G seja feita de maneira satisfatória, estimar distribuições conjuntas ainda é difícil. A exceção ocorre quando o vetor aleatório (X, Y) possui distribuição *normal bivariada* com vetor de médias (μ_x, μ_y) , variâncias (σ_x^2, σ_y^2) e coeficiente de correlação linear ρ , ou seja, sua função densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\},$$

(3.35)

com $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$; $\sigma_x, \sigma_y > 0$, $\rho \in (-1, 1)$ e $x, y \in \mathbb{R}$. A relação de duas variáveis com distribuição conjunta normal bivariada é definida por meio da determinação do parâmetro ρ , que pode ser estimado pelo coeficiente de correlação linear de Pearson.

Mesmo que existam as limitações metodológicas citadas, existe uma abordagem interessante, segundo a qual estimamos H usando a informação contida nas funções de distribuição marginais F e G , que são ajuntadas em uma função de distribuição conjunta por meio de um *modelo de cópula*.

A ideia do emprego de modelos de cópulas é simples: obter a função de distribuição conjunta H de (X, Y) a partir de suas funções de distribuição marginais F e G , respectivamente, por meio de uma função que as “ligue” ou acople. Essa função que liga F e G a H é que denominamos cópula. Podemos procurar a determinação dessa cópula sempre por causa de um resultado muito importante, chamado Teorema de Sklar, que garante que a função cópula sempre existe e, se X e Y são contínuas, a cópula que liga F e G é única (Nelsen [2006]).

O emprego de modelos de cópulas vem crescendo bastante nos últimos anos, principalmente devido à facilidade para implementação computacional e praticidade em aplicações. A teoria necessária para se proceder à sua aplicação ao nosso problema, está contida em Nelsen (2006).

Uma cópula bidimensional é uma função $C: I^2 \rightarrow I$, onde $I = [0,1]$, com as seguintes propriedades:

- 1) $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ e $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v; \forall u, v \in I$;
- 2) Para todo retângulo $[u_1, v_1] \times [u_2, v_2] \subseteq I^2$, temos

$$C(x_2, y_2) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_1, y_1) \geq 0. \quad (3.36)$$

Pode-se verificar que uma cópula bidimensional é, na verdade, uma função de distribuição conjunta bivariada cujas marginais são uniformes no intervalo $[0,1]$. Usaremos nesse texto o termo cópula para fazermos referência a cópulas bidimensionais, ressaltando que uma cópula pode ser definida em qualquer dimensão finita.

Conforme já colocado, queremos obter uma forma de ligar as funções de distribuição marginais à função de distribuição bivariada. Nesse contexto, o principal resultado é o Teorema de Sklar, que enunciamos:

Teorema de Sklar. Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição F e G , respectivamente, e função de distribuição conjunta H . Então, existe uma cópula C tal que

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.37)$$

Se X e Y são contínuas, então C é única. Caso contrário, C é unicamente determinada em $Im(F) \times Im(G)$.

Um corolário imediato do Teorema de Sklar é que podemos encontrar C diretamente pela relação

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (3.38)$$

para todo $(u, v) \in I^2$. Chamaremos a cópula associada à distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y de “cópula de X e Y ”.

3.2.2.1 Simulação de vetores aleatórios por meio de Cópulas

A geração de uma amostra de uma variável aleatória é facilmente executada pelo método da transformação integral de probabilidade: dado $Z \sim U(0,1)$ e uma função de distribuição F , fazendo $X = F^{-1}(Z)$, teremos que X será uma variável aleatória com função de distribuição F .

Por sua vez, podemos usar também a transformada integral de probabilidade para gerarmos uma amostra (x, y) de um vetor aleatório (X, Y) cuja função de distribuição conjunta é H e que tem funções de distribuição marginais F e G . Para tanto, precisamos de um par (Z, V) de variáveis aleatórias $Z \sim U(0,1)$ e $V \sim U(0,1)$ para que façamos $X = F^{-1}(Z)$ e $Y = G^{-1}(V)$. Contudo, esse par (Z, V) precisa manter a estrutura de dependência do vetor aleatório (X, Y) , definida por H .

O problema a solucionar, então, é a obtenção de um par (Z, V) de variáveis aleatórias $Z \sim U(0,1)$ e $V \sim U(0,1)$ que preserva a dependência original de (X, Y) , que é definida por H . A resolução desse problema pode ser provida pelo uso de cópulas e o método da distribuição condicional.

Suponhamos, então, que (X, Y) tem cópula C associada a H . Se obtivermos um par (Z, V) com função de distribuição conjunta C , podemos obter a amostra (x, y) com o uso da transformada integral de probabilidade, pois

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(F^{-1}(Z) \leq x, G^{-1}(V) \leq y) = P(Z \leq F(x), V \leq G(y)) \\ &= C(F(x), G(y)) = H(x, y). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para gerarmos a amostra (x, y) de (X, Y) pelo método da distribuição condicional, precisamos antes calcular a distribuição de V dado $Z = z$; com isso, dado $Z = z$, obtemos

a amostra v de V . Suponhamos, então, que a densidade de Z é f_Z e a densidade conjunta de (V, Z) é $r(v, z)$. A função de distribuição de $(V|Z = z)$, $F_{V|Z}(v|z)$, é

$$F_{V|Z}(v|z) = \int_0^v f(t|z) dt = \int_0^v \frac{r(t,z)}{f_Z(t)} dt = \int_0^v \frac{r(t,z)}{1} dt = \int_0^v \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z}(t, z) dt = \frac{\partial C}{\partial z}(t, z). \quad (3.40)$$

Assim, para gerarmos o par (x, y) do vetor aleatório (X, Y) usamos o método da distribuição condicional, com o seguinte algoritmo:

1) Gere $z \sim U(0,1)$ e $t \sim U(0,1)$ independentes.

2) Faça $v = F_V^{-1}(t|z) = \frac{\partial C^{-1}}{\partial z}(t, z)$.

3) Calcule $x = F^{-1}(z)$ e $y = G^{-1}(v)$.

O par desejado é (x, y) , que tem distribuição conjunta H , unicamente determinada pela cópula C .

3.2.2.2 Modelos de Cópulas

Assim como no caso de variáveis aleatórias no caso univariado, existem modelos probabilísticos parametrizados propostos para cópulas, que satisfazem os requisitos de sua definição. Uma classe relevante de tais modelos é o das cópulas Arquimedianas, que têm a seguinte forma:

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)), \quad (3.41)$$

onde $\phi: I \rightarrow [0, \infty]$ é uma função contínua, convexa e estritamente decrescente tal que $\phi(1) = 0$. Portanto, se encontramos uma função ϕ satisfazendo tais requisitos, podemos definir uma nova cópula, gerada por essa função. A Cópula produto, que define a relação de independência entre v.a.'s e que é dada por $C(u, v) = uv$, por exemplo, é gerada por $\phi(t) = -\ln t$.

As cópulas arquimedianas também possuem a propriedade de simetria, ou seja, $C(u, v) = C(v, u)$; além disso, se $c > 0$ é uma constante, então $c\phi$ é também um gerador de C .

Naturalmente, existem cópulas que não pertencem à classe das arquimedianas – por exemplo, a família de cópulas de Farlie-Gumbel-Morgenstern, bastante utilizada em análises de confiabilidade.

Vários modelos de cópulas estão implementados a pacotes estatísticos ou matemáticos, o que facilita sua aplicação. Para nossas aplicações, é conveniente exibir algumas famílias de cópulas com seus formatos típicos, conforme segue.

3.2.2.2.1 Família Clayton

A cópula da família Clayton é arquimediana, com expressão dada por:

$$C(u, v) = [\max(u^{-\beta} + v^{-\beta} - 1, 0)]^{-1/\beta}, \quad \beta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}. \quad (3.42)$$

O formato da função varia de acordo com o valor do parâmetro β , conforme mostra a Figura 3.12 abaixo. Nota-se que há uma correlação linear perfeita negativa quando β se aproxima de -1; à medida que β cresce a grandes valores positivos, surge uma correlação linear positiva.

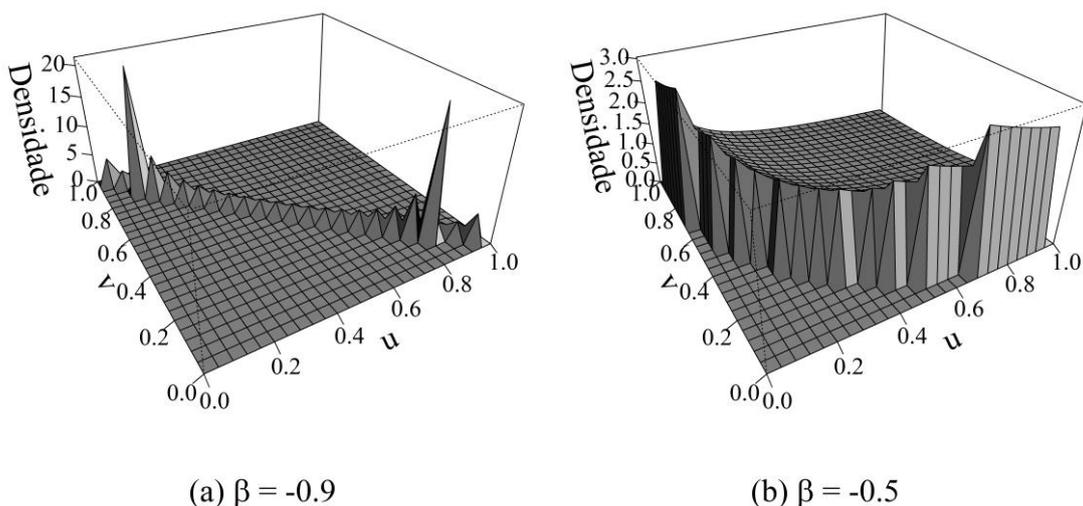
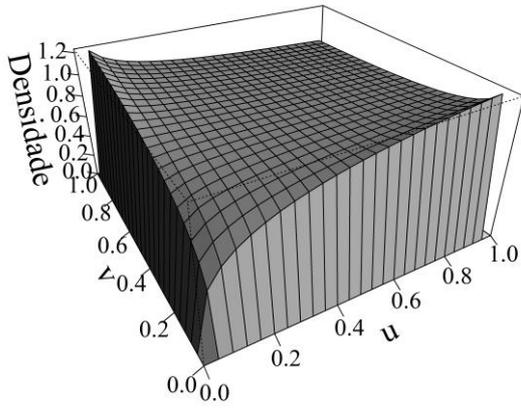
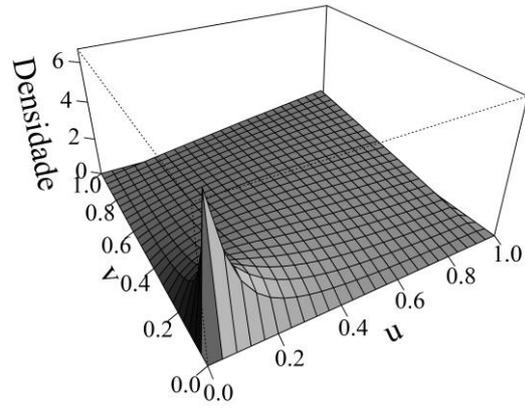


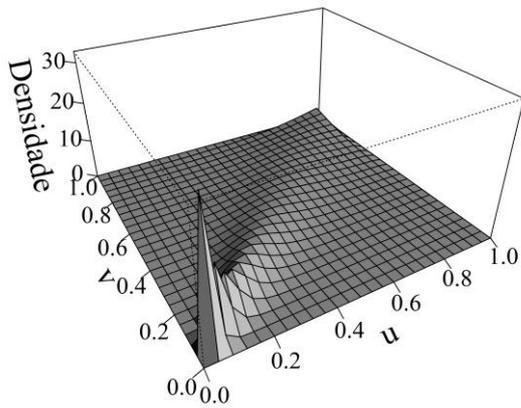
Figura 3.12 – Densidades da família Clayton de cópulas. (continua)



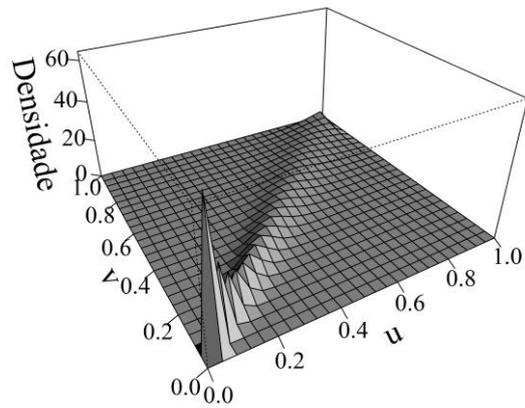
(c) $\beta = -0.1$



(d) $\beta = 1$



(e) $\beta = 5$



(f) $\beta = 10$

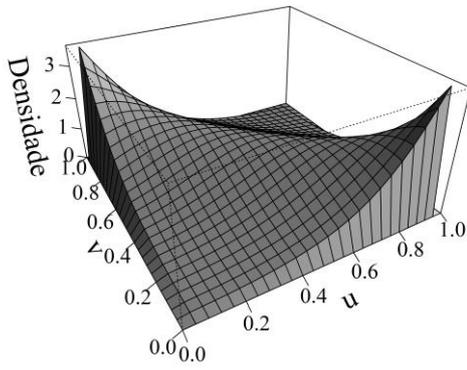
Figura 3.12 – Densidades da família Clayton de cópulas.

3.2.2.2.2 Família Frank

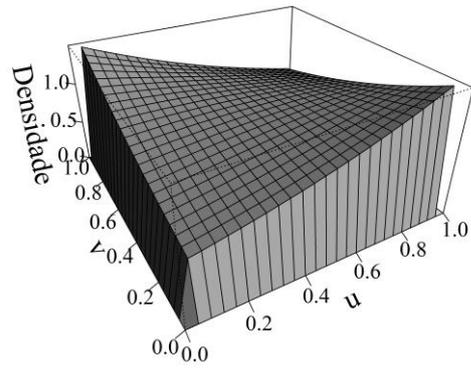
A cópula da família Frank também é arquimediana, cuja função é expressa por:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\beta u} - 1)(e^{-\beta v} - 1)}{e^{-\beta} - 1} \right], \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.43)$$

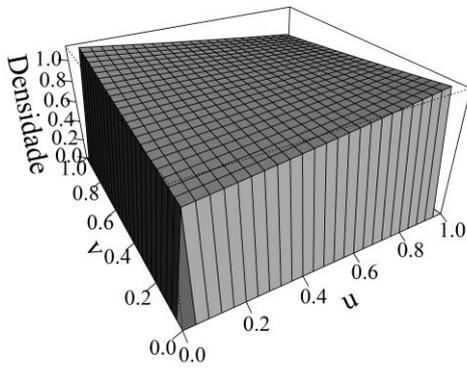
A forma típica de sua curva é apresentada na Figura 3.13:



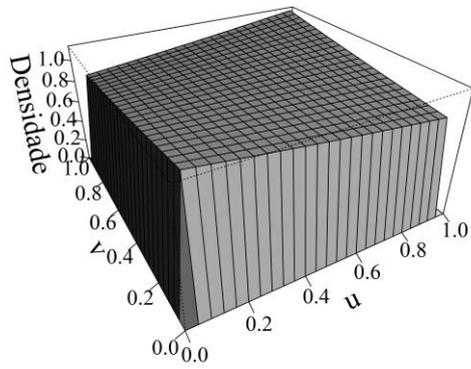
(a) $\beta = -5$



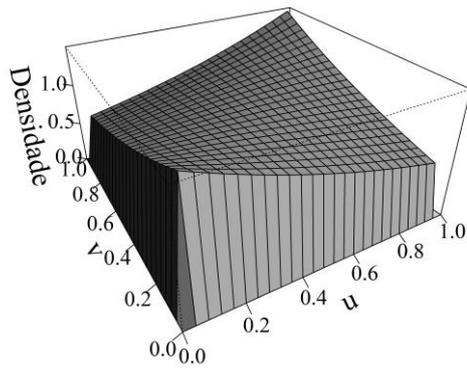
(b) $\beta = -1$



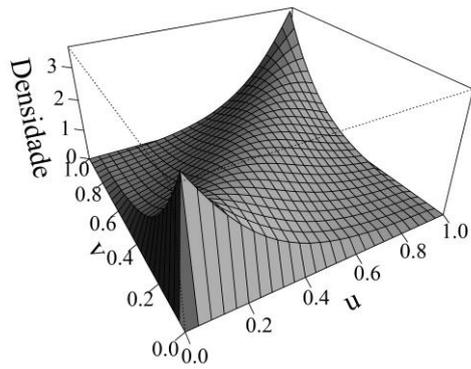
(c) $\beta = -0.3$



(d) $\beta = 0.3$



(e) $\beta = 1$



(f) $\beta = 5$

Figura 3.13 – Densidades da família Frank de cópulas.

Pode-se observar que a correlação linear aumenta com módulo de β : a depender do sinal, há relação negativa ou positiva. Ao mesmo tempo, observa-se concentração nas caudas (origem e ponto (0,0)) quando β cresce ou diminui muito. Valores de β próximos de zero aproximam a cópula à independência.

3.2.2.2.3 Família Ali-Mikhail-Haq

É uma cópula também arquimediana, dada pela seguinte expressão:

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \beta(1-u)(1-v)}, \quad \beta \in [-1, 1). \quad (3.44)$$

O formato da cópula Ali-Mikhail-Haq, com a variação do parâmetro β está na Figura 3.14:

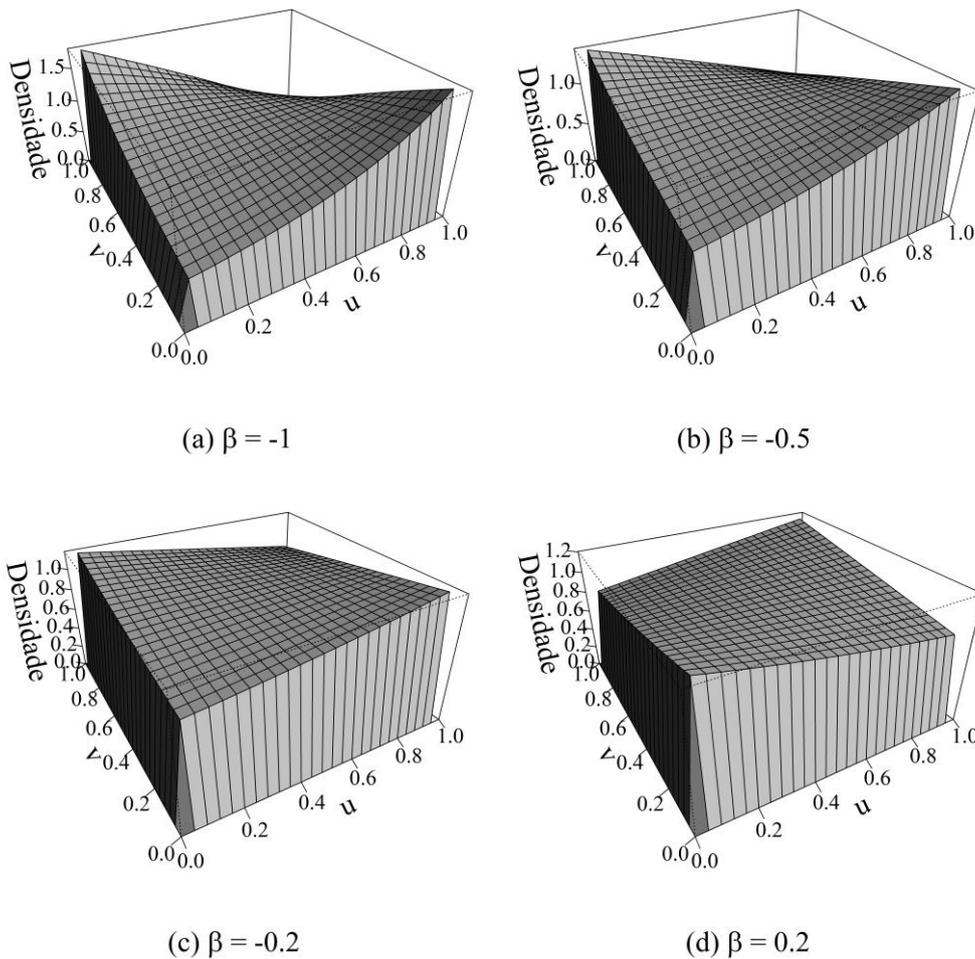


Figura 3.14 – Densidades da família Ali-Mikhail-Haq de cópulas. (continua)

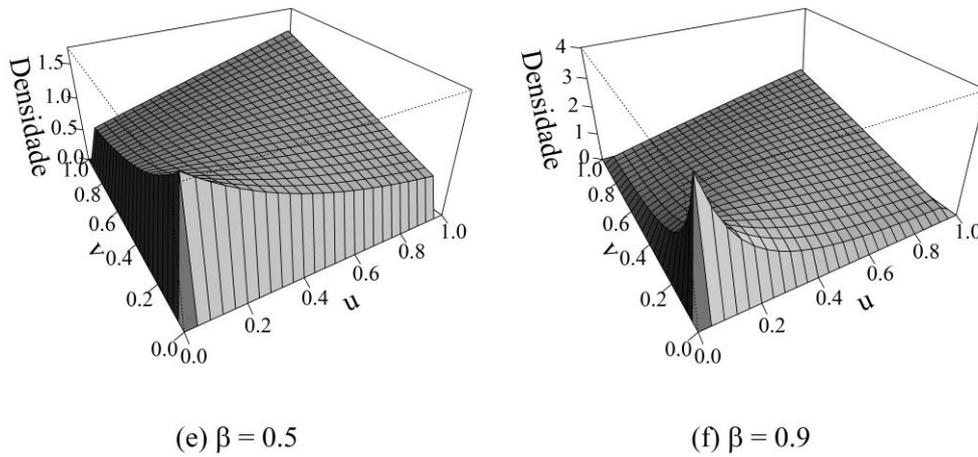


Figura 3.14 – Densidades da família Ali-Mikhail-Haq de cópulas.

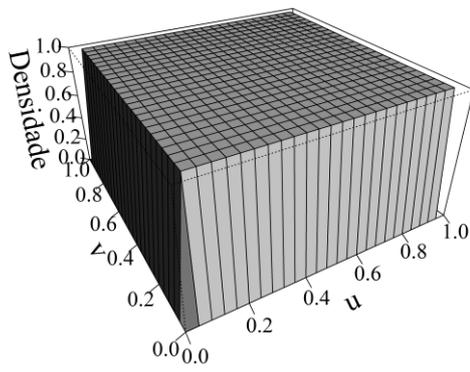
Valores negativos de β resultam em correlação negativa, enquanto que os valores positivos redundam em correlação positiva. Quanto maior β (em módulo), maior a correlação, mas deve-se notar que há bastante dispersão, pois há bastante densidade nas regiões distantes da bissetriz $u = v$. A independência estatística se dá quando $\beta = 0$.

3.2.2.2.4 Família Joe

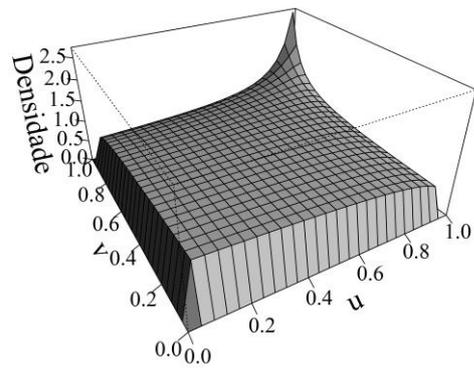
Sua expressão é dada por:

$$C(u, v) = 1 - [(1 - u)^\beta + (1 - v)^\beta - (1 - u)^\beta(1 - v)^\beta]^{1/\beta}, \quad \beta \in [1, \infty). \quad (3.45)$$

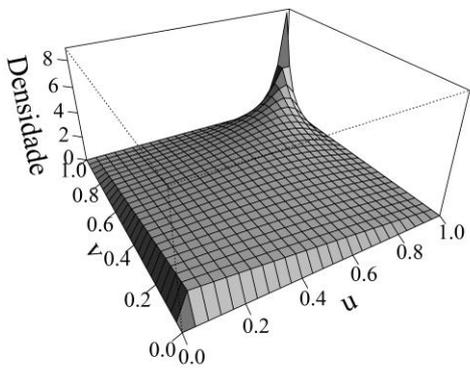
O formato típico, com a variação do parâmetro β é exibida na Figura 3.15. Observa-se que, para $\beta = 1$, ocorre independência. Ademais, à medida que o parâmetro β cresce, aumenta a correlação linear positiva, mas a assimetria à esquerda dessa cópula é forte, visto que é mantida a concentração de densidade em torno do ponto (1,1).



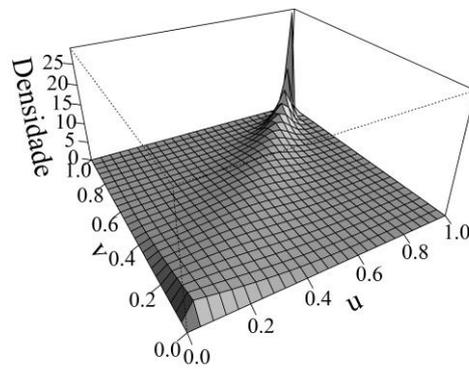
(a) $\beta = 1$



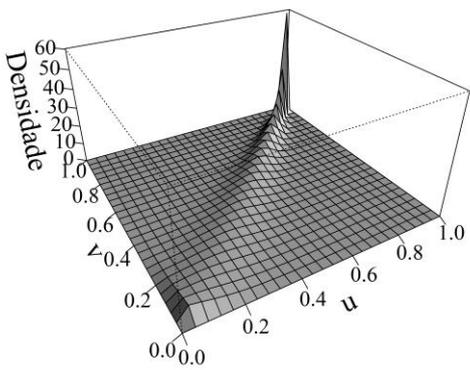
(b) $\beta = 1.2$



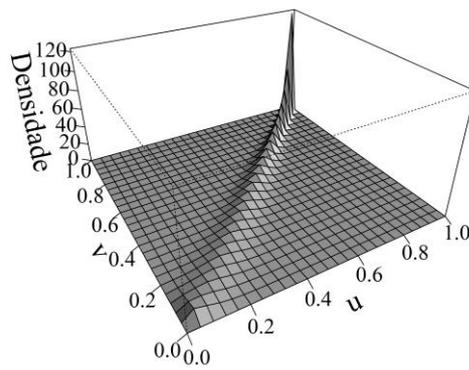
(c) $\beta = 2$



(d) $\beta = 5$



(e) $\beta = 10$



(f) $\beta = 20$

Figura 3.15 – Densidades da família Joe de cópulas.

3.2.2.2.5 Família Gumbel-Hougaard

É uma cópula pertencente à classe das cópulas de valor extremo, classificação dada por causa da concentração de densidade que ocorre na região próxima ao ponto (1,1). Sua expressão é fornecida por:

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\beta + (-\ln v)^\beta \right]^{1/\beta} \right\}, \quad \beta \in [1, \infty). \quad (3.46)$$

Formas típicas dessa função estão apresentadas na Figura 3.16, que revela que a cópula de Gumbel-Hougaard possui o caso da independência quando $\beta = 1$. A correlação é sempre positiva e cresce à medida que o parâmetro β aumenta, mas há assimetria à esquerda e forte concentração de densidade em torno de (1,1), ao mesmo tempo em que ocorre considerável densidade próximo à origem.

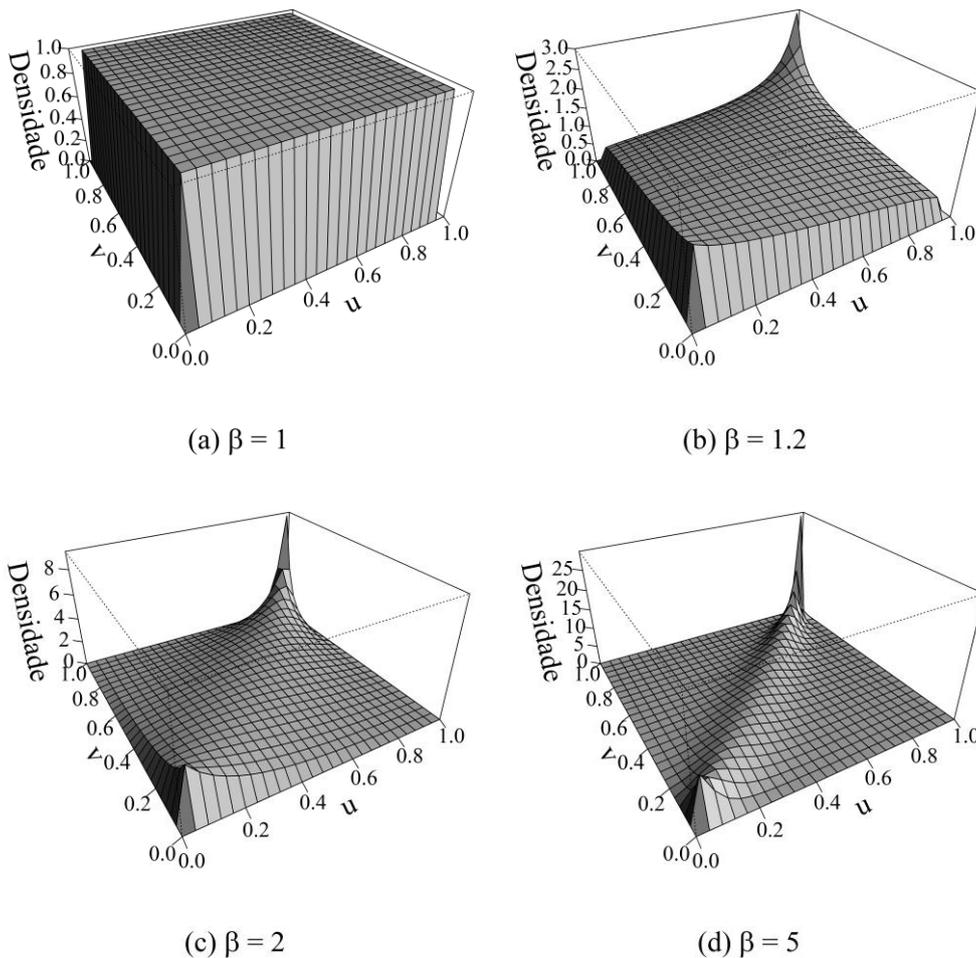
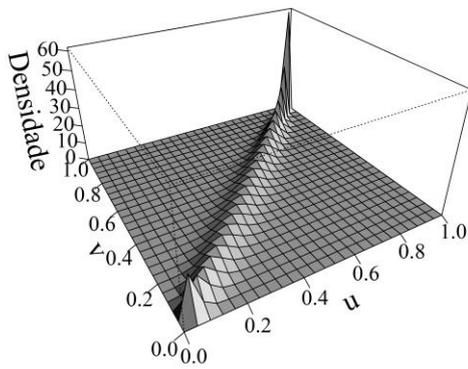
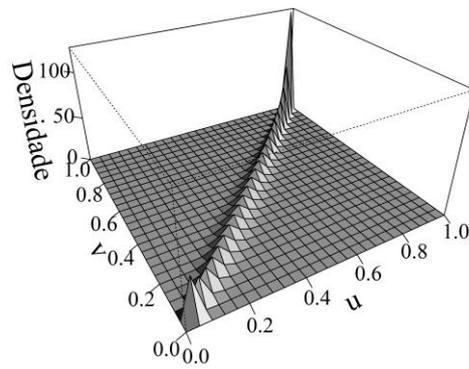


Figura 3.16 – Densidades da família Gumbel-Hougaard de cópulas. (continua)



(e) $\beta = 10$



(f) $\beta = 20$

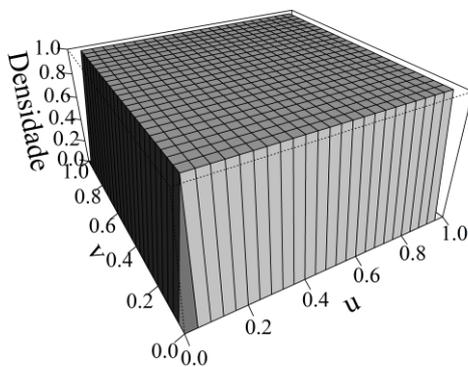
Figura 3.16 – Densidades da família Gumbel-Hougaard de cópulas.

3.2.2.2.6 Família Galambos

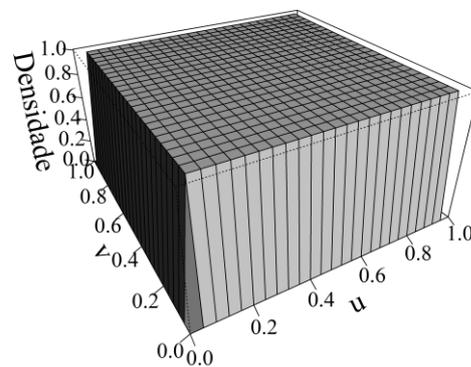
A família Galambos também é uma copula de valor extremo, cuja expressão é dada por:

$$C(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[(1-u)^{-\beta} + (1-v)^{-\beta} \right]^{-1/\beta} \right\}, \quad \beta \in [0, \infty). \quad (3.47)$$

As densidades de probabilidade dessa cópula podem ser visualizadas na Figura 3.17, de acordo com a variação do parâmetro β . Mais uma vez, nota-se correlação linear mais forte com o incremento de β , com discreta concentração na origem, sendo maior em torno de (1,1).

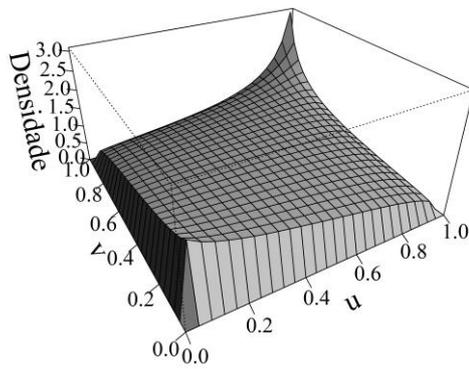


(a) $\beta = 0$

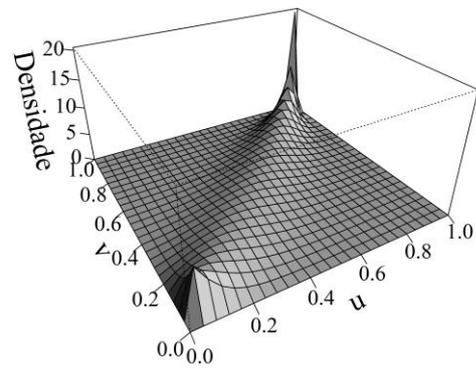


(b) $\beta = 0.1$

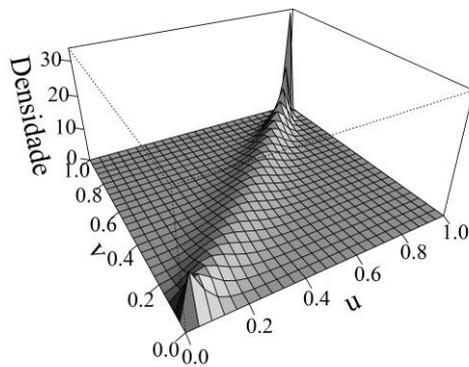
Figura 3.17 – Densidades da família Galambos de cópulas. (continua)



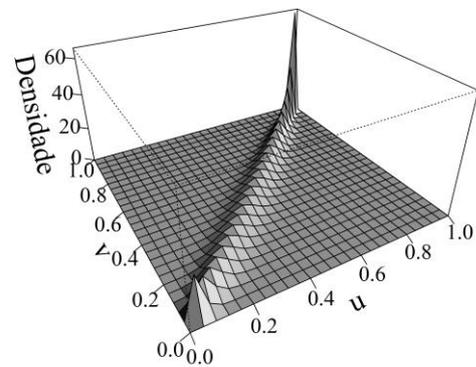
(c) $\beta = 0.5$



(d) $\beta = 3$



(e) $\beta = 5$



(f) $\beta = 10$

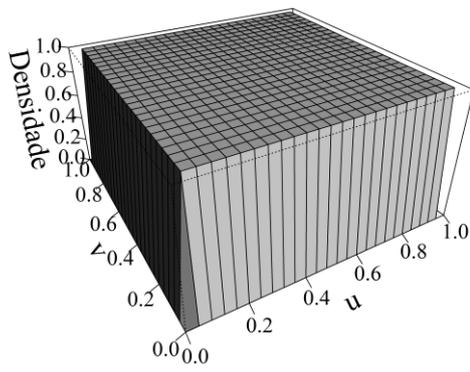
Figura 3.17 – Densidades da família Galambos de cópulas.

3.2.2.2.7 Família Husler e Reiss

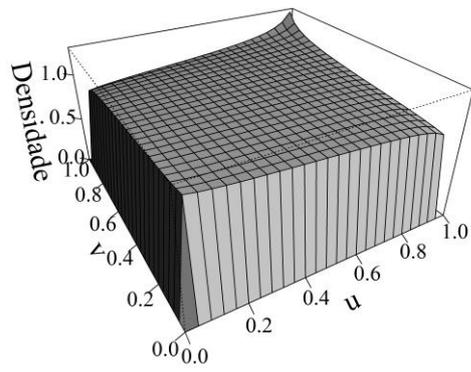
Essa é a terceira cópula de valor extremo que apresentamos, com função correspondente a

$$C(u, v) = \exp \left\{ \ln u \Phi \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} \beta \ln \left(\frac{u}{v} \right) \right] + \ln v \Phi \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} \beta \ln \left(\frac{u}{v} \right) \right] \right\}, \quad \beta \geq 0, \quad (3.48)$$

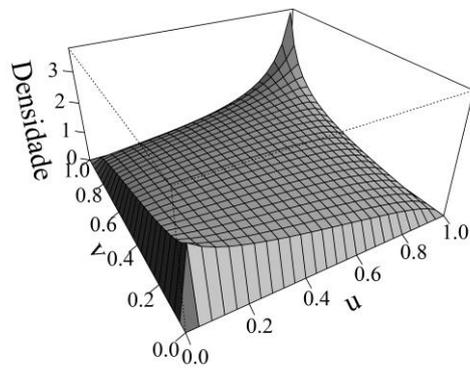
onde $\Phi()$ é função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão univariada. O formato de sua curva, variando-se o parâmetro β , está apresentado na Figura 3.18, onde é possível notar-se que seu padrão é bastante similar ao da cópula Galambos.



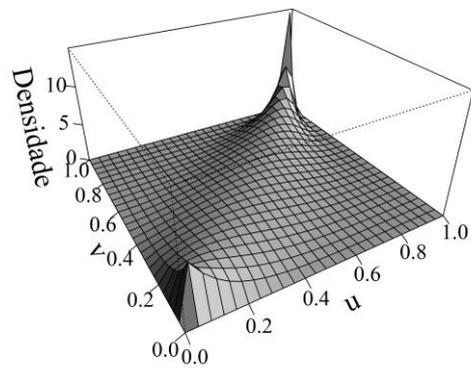
(a) $\beta = 0.1$



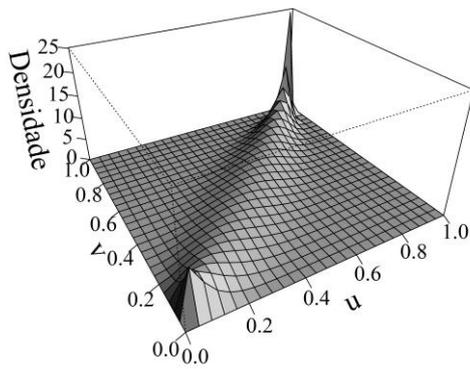
(b) $\beta = 0.5$



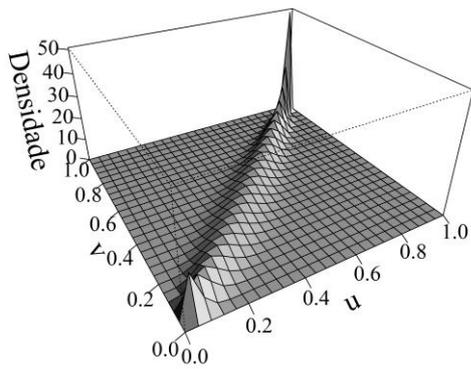
(c) $\beta = 1$



(d) $\beta = 3$



(e) $\beta = 5$



(f) $\beta = 10$

Figura 3.18 – Densidades da família Husler e Reiss de cópulas.

3.2.2.2.8 Família Farlie-Gumbel-Morgenstern

A cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern não pertence nem à classe arquimediana, nem à classe de valores extremos. Sua expressão é a seguinte:

$$C(u, v) = uv + \beta uv(1 - u)(1 - v), \quad \beta \in [-1, 1]. \quad (3.49)$$

Na Figura 3.19, pode-se notar que o formato dessa cópula é aproximadamente triangular na direção das caudas, que muda de acordo com o sinal do parâmetro β .

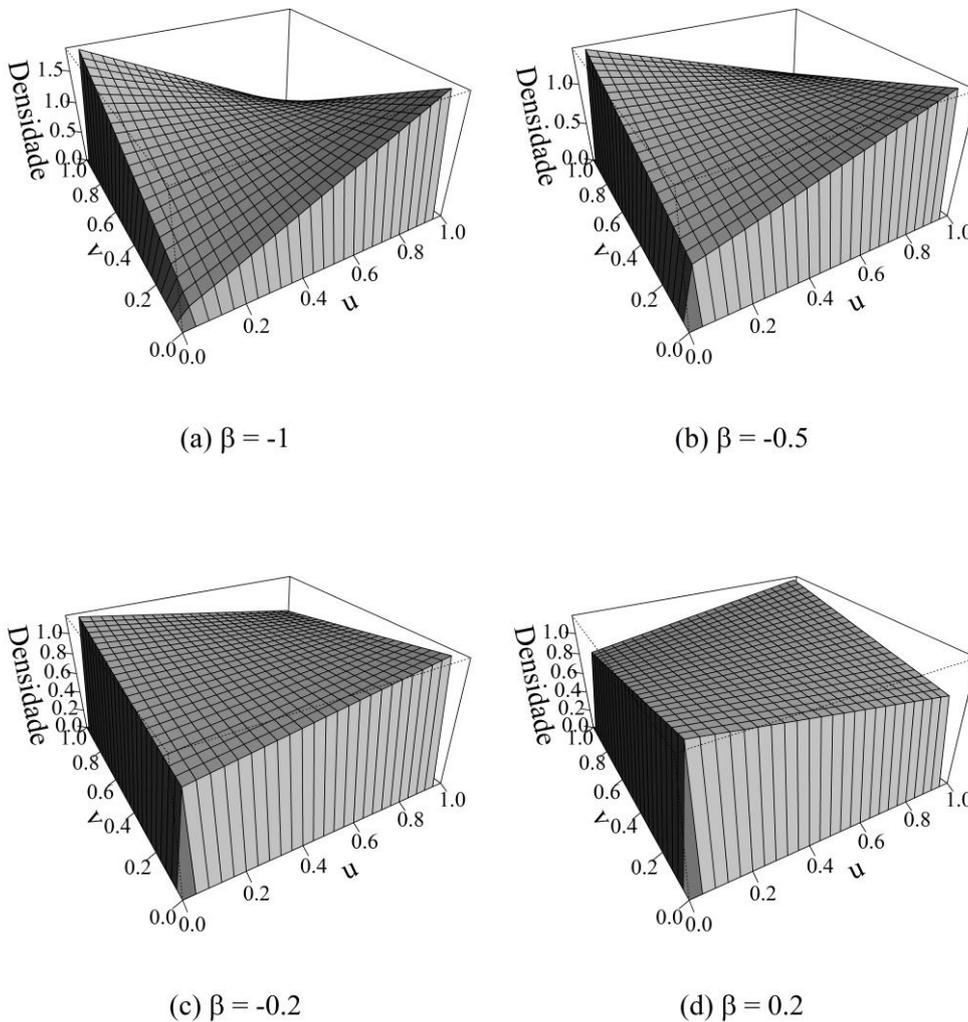


Figura 3.19 – Densidades da família Farlie-Gumbel-Morgenstern de cópulas. (continua)

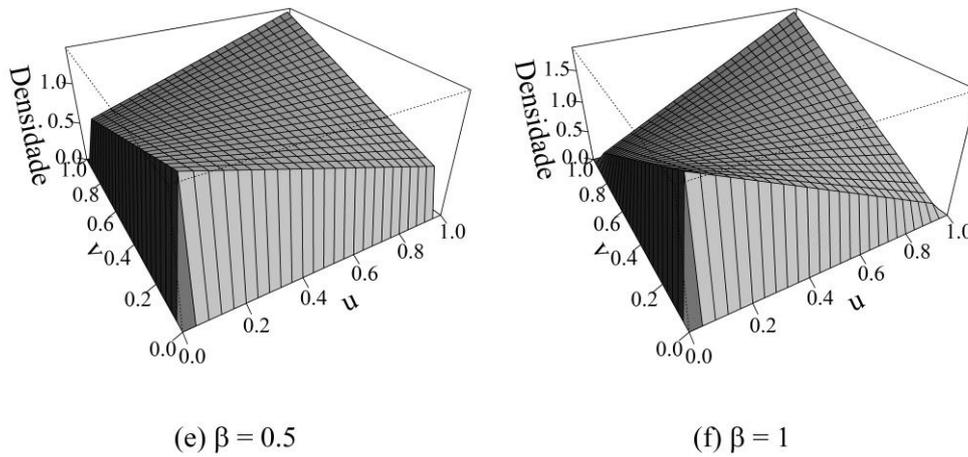


Figura 3.19 – Densidades da família Farlie-Gumbel-Morgenstern de cópulas.

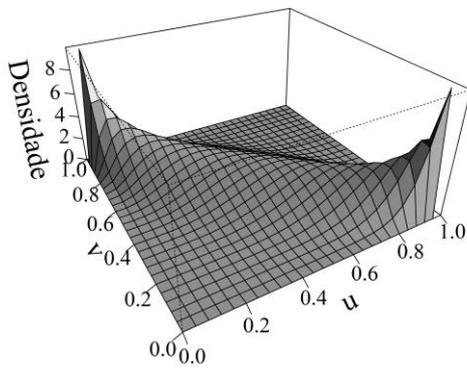
3.2.2.2.9 Família Normal

A expressão matemática para a cópula da Família Normal bivariada é assim descrita:

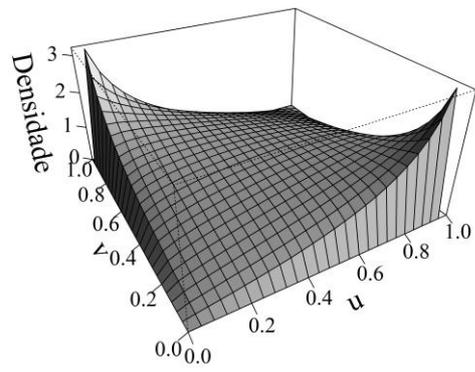
$$C(u, v) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (3.50)$$

onde $\Phi()$ denota a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão univariada e Φ_{Σ} é a função de distribuição acumulada da distribuição normal bivariada com média zero e matriz de variâncias e covariâncias Σ . Essa cópula possui, portanto, mais de um parâmetro – para o caso bivariado, são três $(\sigma_u^2, \sigma_v^2, \rho)$.

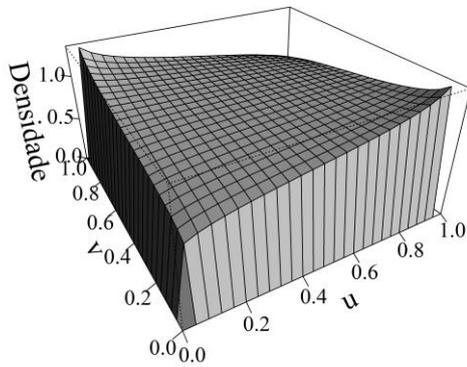
Formatos típicos de sua curva estão exibidos na Figura 3.20, em que fixamos $\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = 1$. Como esperado, a correlação linear aumenta quanto maior for o valor de ρ , na direção de seu sinal, mas há concentração nas caudas, conforme o caso. O caso $\rho = 0$ corresponde à independência.



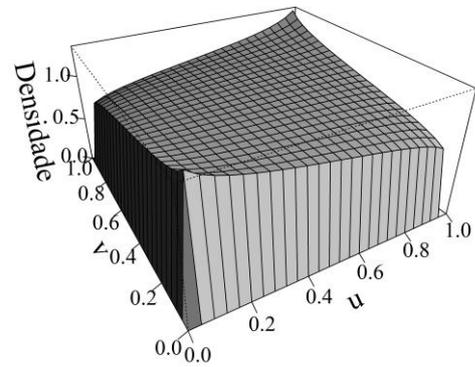
(a) $\rho = -0.9$



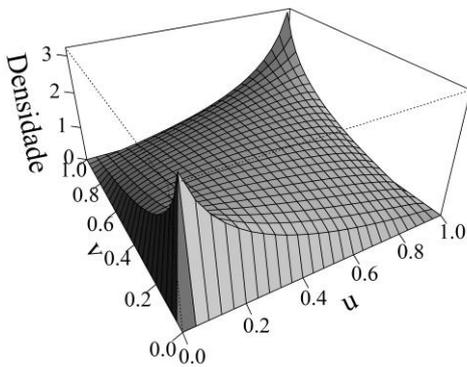
(b) $\rho = -0.5$



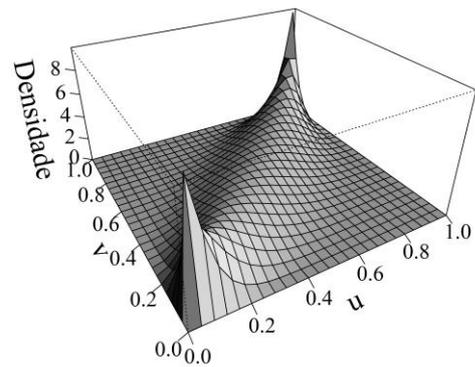
(c) $\rho = -0.1$



(d) $\rho = 0.1$



(e) $\rho = 0.5$



(f) $\rho = 0.9$

Figura 3.20 – Densidades da família Normal de cópulas.

3.2.3 ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Seja $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n de observações de um vetor aleatório $\mathbf{W} = (X, Y)$, com função densidade de probabilidade conjunta h , que depende do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$. Definimos a função de verossimilhança L como a função de distribuição conjunta da amostra $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, isto é

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k. \quad (3.51)$$

Se a amostra é identicamente e independentemente distribuída (i.i.d.), então segue que

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n h(x_i, y_i). \quad (3.52)$$

Definimos o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\boldsymbol{\theta}$ como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \sup L(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.53)$$

Ou seja, o EMV é aquele que maximiza a função L . Pode ser obtido analiticamente, derivando-se L e achando seu ponto de máximo, ou com métodos numéricos, como o método de Newton-Raphson.

Para o caso da regressão linear $Y = AX + C + \varepsilon$, com $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, por exemplo, o EMV dos parâmetros A e C coincide com o estimador de Mínimos Quadrados. A estimação por máxima verossimilhança será utilizada para estimar parâmetros dos modelos probabilísticos empregados de cópulas, para os dados simulados.

4 METODOLOGIA

Uma vez apresentados os fundamentos teóricos que baseiam este estudo, passamos a expor os métodos e abordagem que nos guiaram para a modelagem da correlação dos atributos c_f e G_f do concreto, para se analisar os eventuais efeitos que sua dependência podem ter em σ_N .

4.1 PROBLEMA FÍSICO

Em nosso problema, buscamos modelar e simular a aleatoriedade de c_f e G_f e o impacto de sua variabilidade estocástica sobre a tensão nominal de resistência à propagação de fratura (σ_N), que depende dessas duas quantidades por meio da relação expressa na equação (3.11), a saber:

$$\sigma_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{Dg(\alpha) + c_f g'(\alpha)}}. \quad (3.11)$$

A partir das distribuições marginais de c_f e G_f , poderíamos tentar determinar a distribuição de σ_N analiticamente, mas esse é um processo dispendioso e depende também da distribuição conjunta dessas duas variáveis, que é desconhecida. A melhor maneira de fazer isso é por meio da simulação de vários valores para σ_N a partir da geração de uma amostra para c_f e G_f , que mantenha sua estrutura de correlação – a qual tentaremos modelar com o emprego de modelos de cópulas.

Com uma amostra muito grande de valores simulados para σ_N , podemos estimar sua função densidade de probabilidade não-parametricamente, por meio de um histograma ou de núcleo-estimador. Naturalmente, a escolha das distribuições marginais bem como da cópula que determina a estrutura de dependência dessas variáveis, impactarão na distribuição final de σ_N .

Nossas análises verificam, assim, como a aleatoriedade e correlação enfrentada por c_f e G_f influenciam a determinação da resistência à fratura, para que se verifique como a

variabilidade estocástica inerente aos métodos de ensaio – em particular, o do Método de Efeito de Escala de Bazant, ao qual nos ateremos – pode impactar na determinação de σ_N .

Acessoriamente a esse propósito principal, outros objetivos foram perseguidos:

- 1) estudar o efeito de estruturas de correlação que não são dadas pela distribuição normal bivariada;
- 2) estimar pelo método de máxima verossimilhança a distribuição de c_f e G_f e sua respectiva estrutura de correlação, por meio dos modelos de cópulas;
- 3) realizar análise de sensibilidade dos modelos de cópulas e seus parâmetros sobre σ_N .
- 4) estudar o *software* R Project for Statistical Computing, que é livre e amplamente utilizado pela comunidade acadêmica em todo o mundo.

A realização de simulações não pode ser feita arbitrariamente, de tal modo que necessitamos de informações sobre o fenômeno da mecânica da fratura em vigas de concreto, que serão providas por dados de ensaios conduzidos por Brand et al. (2013) na *University of Illinois at Urbana Champaign* (UIUC) em vigas submetidas à flexão em três pontos com entalhe.

Nossa abordagem foi diretamente influenciada pelos trabalhos de Muñoz (2015) e Borges (2016), que analisaram os dados citados. Borges (2016) adota o enfoque da variabilidade estocástica de c_f e G_f , mas avalia apenas estruturas de correlação fornecidas pela distribuição normal multivariada, que usualmente não se ajusta bem a variáveis aleatórias estritamente positivas e com assimetria à direita.

Adicionalmente, a partir da distribuição de probabilidades dos estimadores dos parâmetros da regressão inerente ao Modelo de Efeito de Escala de Bazant, também são simulados valores correlacionados para o par (c_f, G_f) , a fim de estimamos a estrutura de dependência estatística – por meio de modelos de cópulas – que se ajustam bem a tais dados.

4.2 PROGRAMA EXPERIMENTAL

Para a realização das simulações, foram utilizados os dados experimentais de Brand et al (2013), obtidos de ensaios conforme as normas recomendadas por RILEM (1990) em vigas sob flexão em três pontos com único entalhe – corpo de prova que recebe o nome de Single Edge Notched Beam Specimen (SEN(B)). Os dados obtidos estão exibidos na Tabela 4.1 abaixo.

Viga	W (N)	L (mm)	S (mm)	D (mm)	t (mm)	a0 (mm)
D1a	530,7	1105	1000	255	80,0	88,0
D1b	527,3	1105	1006	260	79,0	95,0
D1c	529,2	1104	1004	258	79,0	88,5
D2a	192,3	700,0	601	152	79,0	58,0
D2b	193,7	700,0	602	153	79,0	53,0
D2c	189,8	700,0	601	154	79,0	55,0
D3a	40,6	349,0	252	63,0	80,0	22,5
D3b	41,0	347,5	249	63,5	80,0	22,0
D3c	41,9	347,5	248	65,5	79,5	24,5

Tabela 4.1 – Dados experimentais. Obtido de Borges (2016).

Portanto, foram ensaiadas nove vigas, com diferentes dimensões (três corpos de prova para cada um dos três tamanhos característicos 80mm x 150mm x 700mm, 80mm x 250mm x 1100mm e 80mm x 63mm x 350mm) e valores de α próximos a 0,35 (mínimo de 0,343 e máximo de 0,381).

Esses dados experimentais foram analisados e modelados por Borges (2016) pelo Método do Efeito de Escala de Bazant, que chegou aos seguintes resultados: os valores estimados dos parâmetros da regressão do método resultaram em $\hat{A} = 2,00 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{N}^2$ (desvio-padrão de $2,99 \times 10^{-12} \text{m}^3/\text{N}^2$) e $\hat{C}_0 = 3,17 \times 10^{-12} \text{m}^4/\text{N}^2$ (desvio-padrão de $5,06 \times 10^{-13} \text{m}^4/\text{N}^2$).

Além disso, foram estimadas as distribuições de G_f e c_f , obtendo-se como melhor ajuste aquele feito com a distribuição lognormal para ambas variáveis, com valores de média 70,96 N/m e desvio-padrão 12,77 N/m para G_f e de média 31mm e desvio-padrão 6,80

mm para c_f . Esses achados são compatíveis com recomendação feita por Bazant e Becq-Giraudon (2002), que também observaram que os dois atributos possuem distribuição aproximadamente lognormal.

Ademais, os dados coletados por Bazant e Becq-Giraudon (2002), com estimativas de G_f e c_f dadas pelo Método do Efeito de Escala de Bazant ($n = 25$) demonstram haver correlação positiva entre esses dois atributos, conforme mostra a Figura 4.1 abaixo.

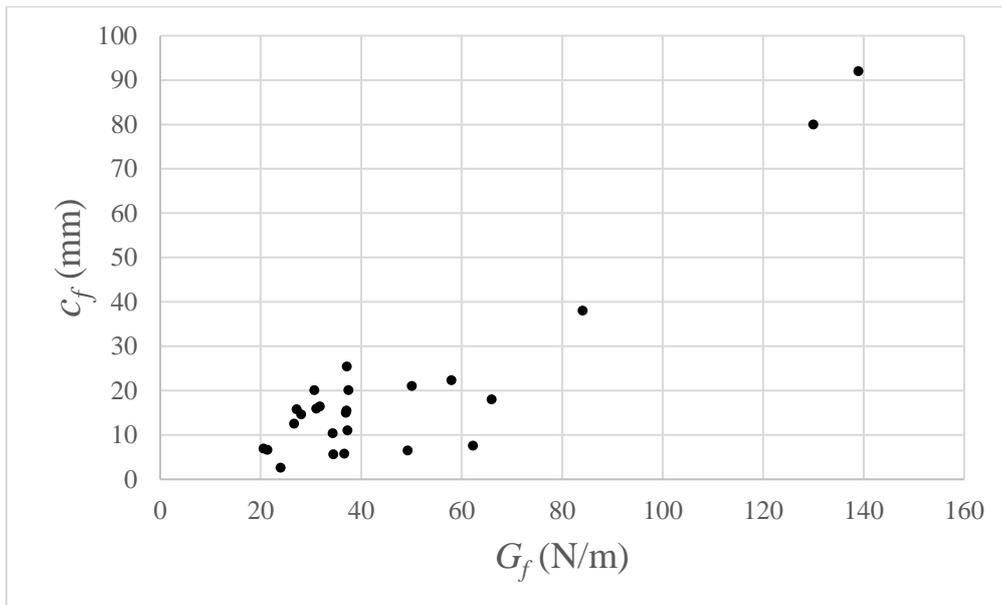


Figura 4.1 – Dispersão entre G_f e c_f pelo Método do EEB - Bazant e Becq-Giraudon (2002).

A partir das distribuições marginais, Borges (2016) propôs a simulação de σ_N a partir de uma estrutura de dependência de G_f e c_f dada pela distribuição normal bivariada, variando-se a correlação linear (com $\rho \in \{0, 0.5, -0.95\}$), o valor de α e também o de D (igual a 0,063m, 0,5m ou 1m).

As simulações aqui realizadas, por sua vez, partem das distribuições marginais estimadas por Borges (2016) para os dados experimentais de Brand et al (2013). Consideramos, então, várias estruturas de dependência entre G_f e c_f dadas por diversos modelos de cópulas, para que se avalie a influência da dependência estatística no valor resultante para σ_N .

5 RESULTADOS

Foram realizadas simulações com nove famílias de cópulas, além da situação de independência estatística, com a escolha dos parâmetros conforme a Tabela 5.1 abaixo.

Família da cópula	Parâmetro	Valores dos parâmetros tomados para a simulação					
		1	2	3	4	5	6
Clayton	β	-0,9	-0,5	-0,1	1	5	10
Frank	β	-5	-1	-0,3	0,3	1	5
Ali-Mikhail-Haq	β	-1	-0,5	-0,2	0,2	0,5	0,9
Joe	β	1	1,2	2	5	10	20
Gumbel-Hougaard	β	1	1,2	2	5	10	20
Galambos	β	0,1	0,5	1	3	5	10
Husler e Reiss	β	0,1	0,5	1	3	5	10
Farlie-Gumbel-Morgenstern	β	-1	-0,5	-0,2	0,2	0,5	1
Normal	ρ	-0,9	-0,5	-0,1	0,1	0,5	0,9

Tabela 5.1 - Famílias de cópulas e parâmetros utilizados para a simulação

5.1 SIMULAÇÃO DOS PARES (G_f, c_f)

Para cada um desses casos propostos para a simulação, observamos o formato da nuvem de 100.000 dados simulados para G_f e c_f (que estão expostos um a um em Anexo), para cada família de cópulas e cada escolha do parâmetro (β ou ρ , conforme o caso). Para a situação de independência, a simulação resultou no seguinte padrão de dispersão:

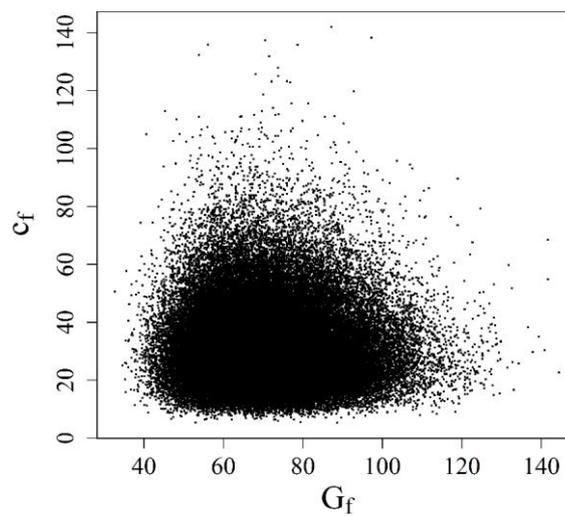


Figura 5.1 – Pares (G_f, c_f) simulados para situação de independência estatística

Alguns casos apresentaram um padrão que se revela mais condizente com aquele exibido na Figura 4.1, construída a partir dos pares (G_f, c_f) reunidos por Bazant e Becq-Giraudon (2002). São os que seguem nas próximas figuras, obtidos pela aplicação das seguintes cópulas: Joe (com $\beta = 2$ e $\beta = 5$), Gumbel-Hougaard (com $\beta = 2$ e $\beta = 5$), Galambos (com $\beta = 1$ e $\beta = 3$), Husler e Reiss (com $\beta = 3$ e $\beta = 5$). As simulações da família Normal com $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,9$, apesar de não fugirem muito ao padrão da dispersão de (G_f, c_f) adotada como paradigmática, foram incluídas principalmente para efeito de comparação com as simulações de Borges (2016).

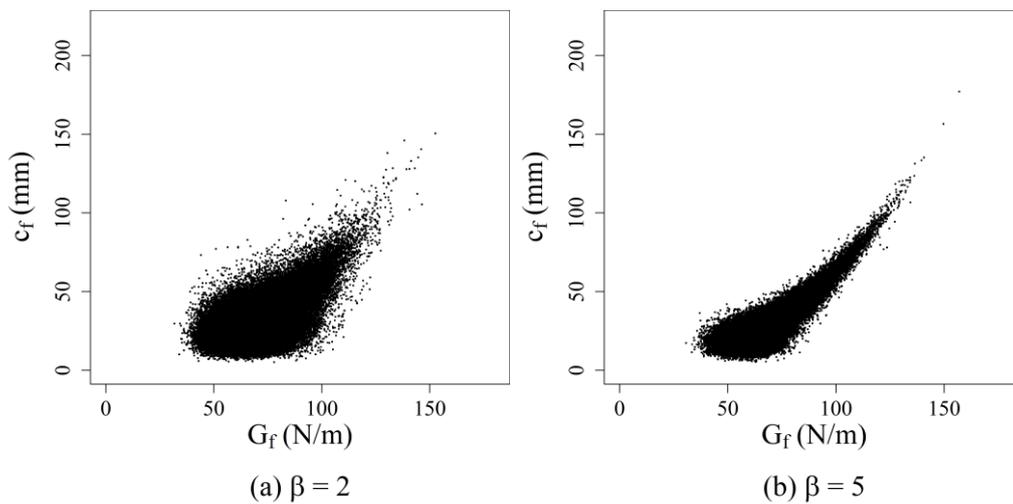


Figura 5.2 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Joe de cópulas

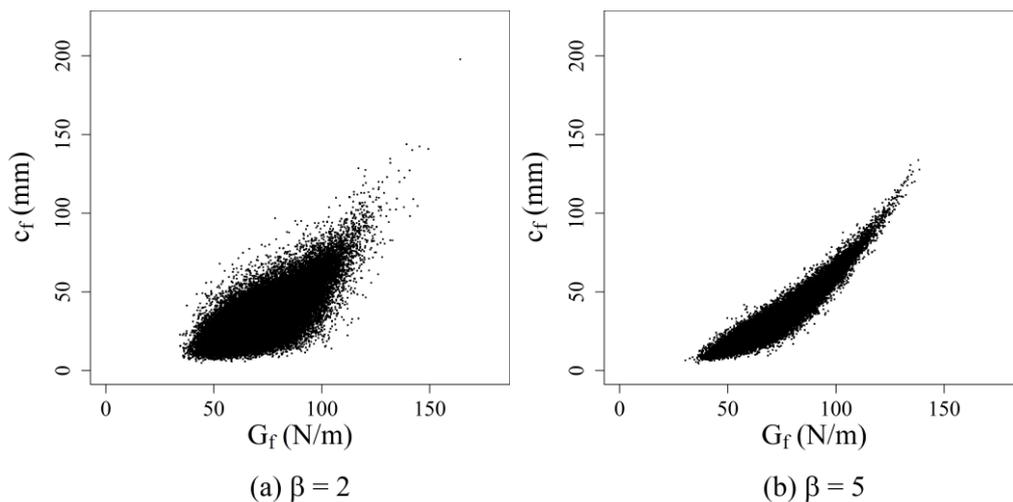


Figura 5.3 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Gumbel-Hougaard de cópulas

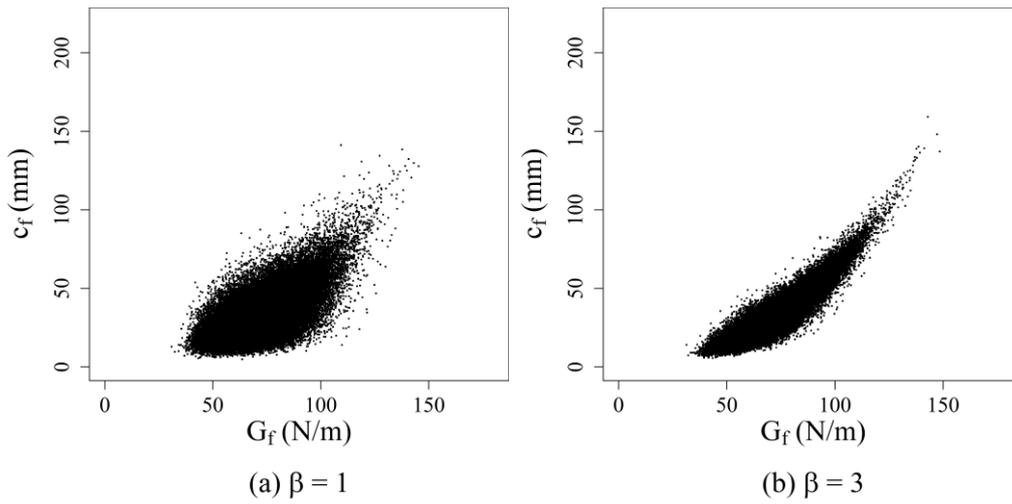


Figura 5.4 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Galambos de cópulas

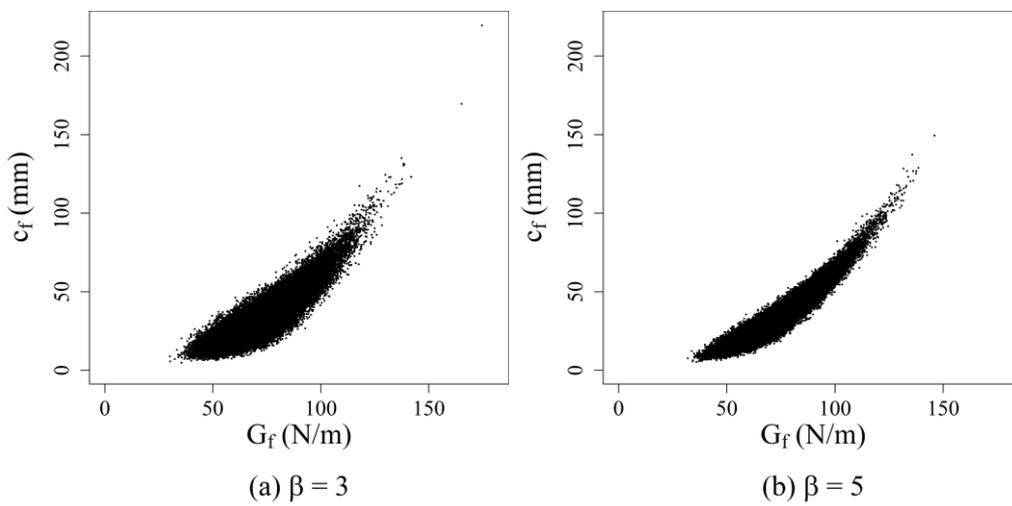


Figura 5.5 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Husler e Reiss de cópulas

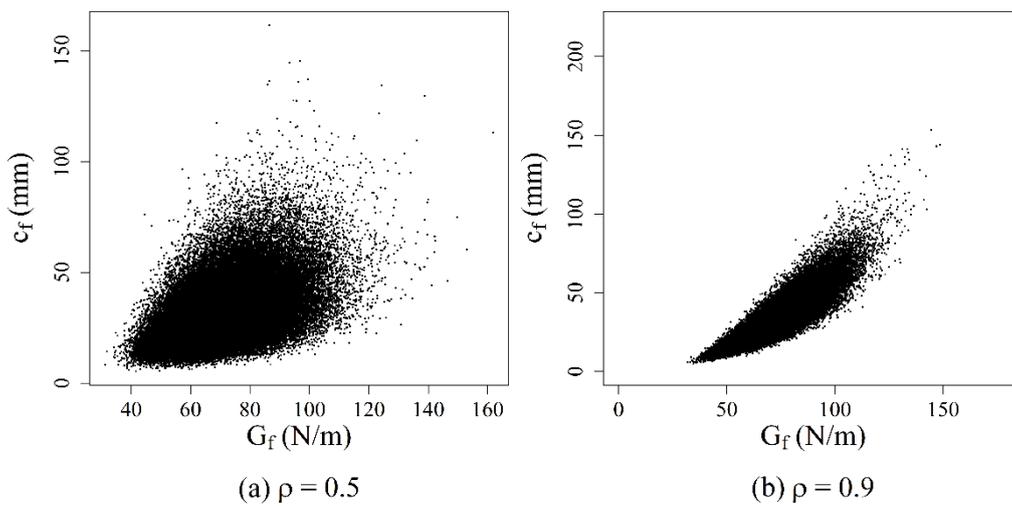


Figura 5.6 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Normal de cópulas

5.2 DENSIDADES EMPÍRICAS ESTIMADAS PARA σ_N

A partir dos pares (G_f, c_f) simulados com estrutura de dependência dada por cada modelo de cópula, com os parâmetros exibidos na Tabela 5.1, foi possível simular valores também para σ_N , com cálculo de acordo com a Equação (3.11), cuja expressão depende também de D e α . Para não extrapolarmos as diretrizes do programa experimental, utilizamos valores de D iguais a alguns daqueles presentes nos ensaios – precisamente, tomamos D igual a 63mm, 152mm ou 260mm – e fixamos $\alpha = 0,35$, valor que se encontra também dentro do intervalo – que é bastante reduzido – praticado pelos experimentos.

Com os 100.000 dados simulados de σ_N para cada família de cópulas e parâmetro (β ou ρ , conforme o caso) variando, estimamos sua densidade de probabilidade empírica, alternando-se o valor de D . Tais estimativas estão exibidas nas próximas figuras.

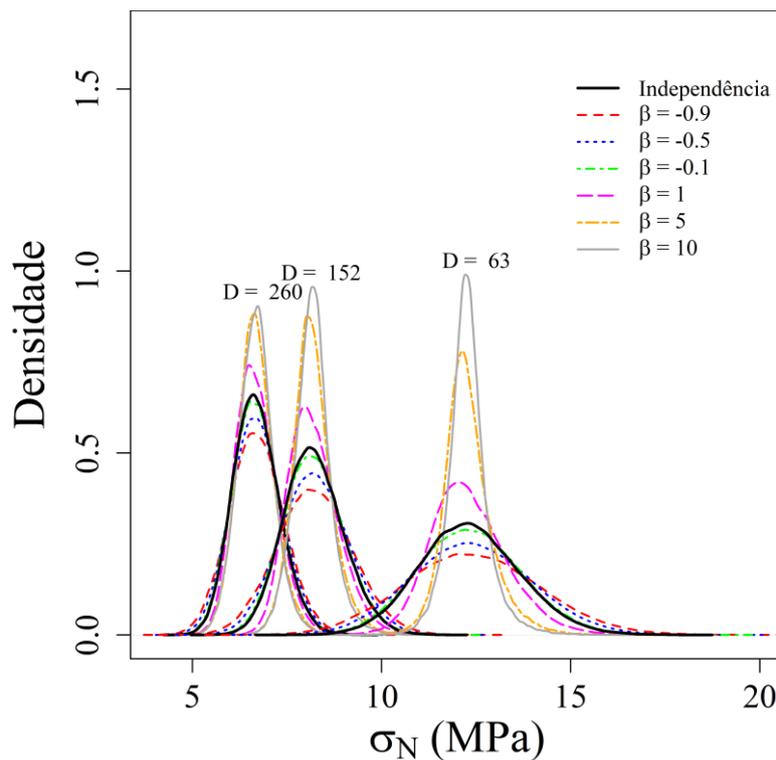


Figura 5.7 – Densidade empírica de σ_N para a família Clayton

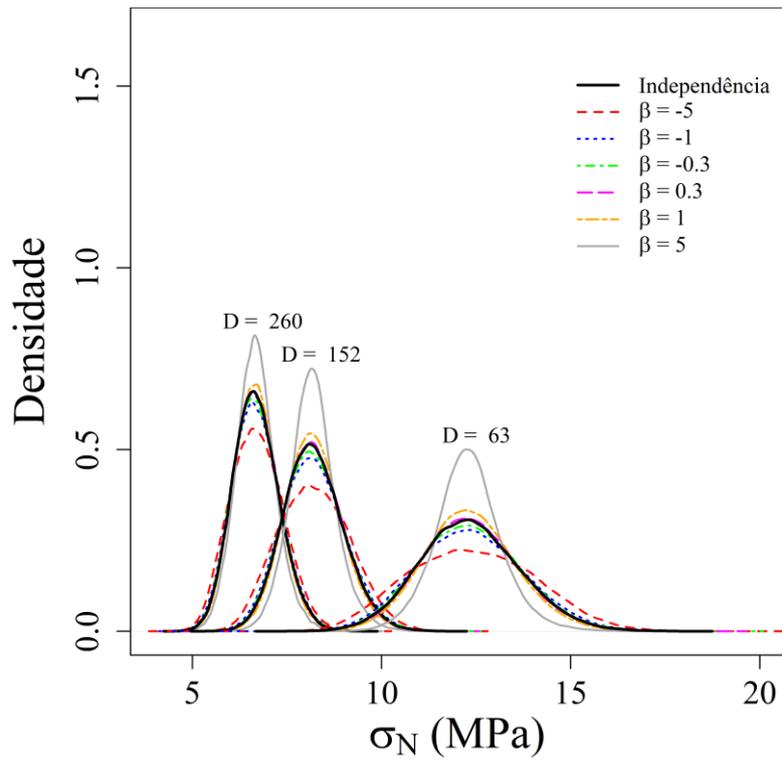


Figura 5.8 – Densidade empírica de σ_N para a família Frank

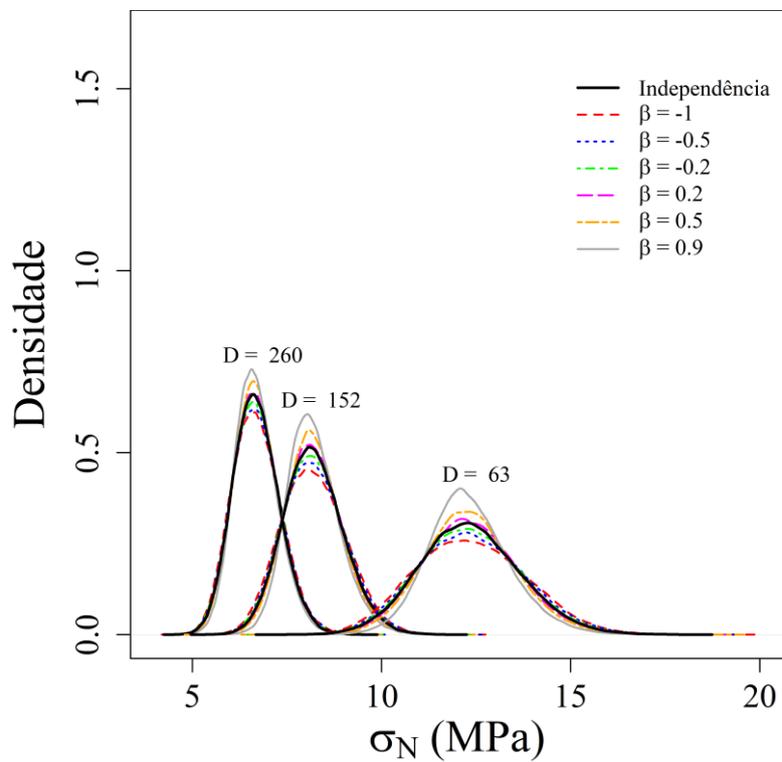


Figura 5.9 – Densidade empírica de σ_N para a família Ali-Mikhail-Haq

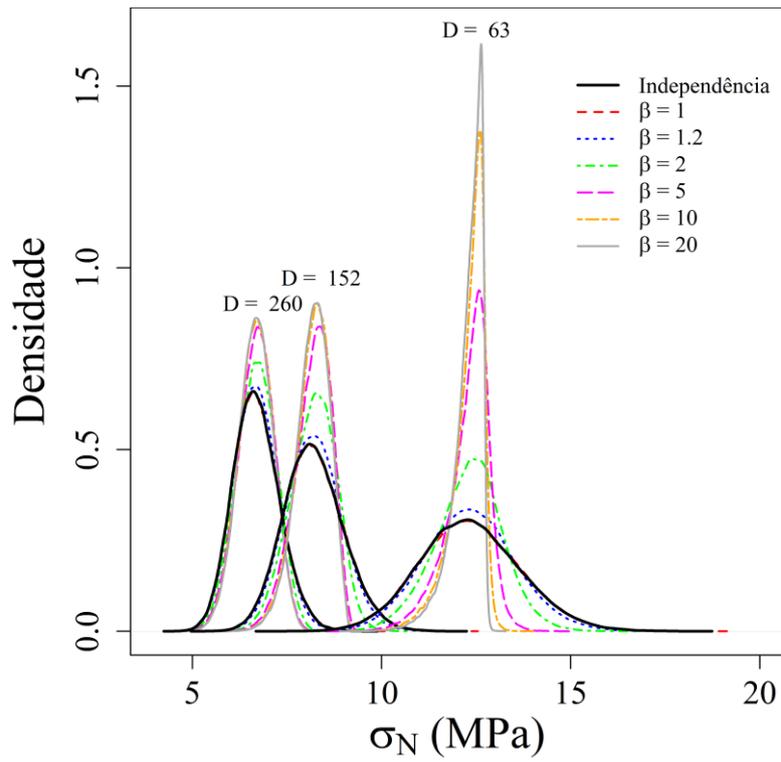


Figura 5.10 – Densidade empírica de σ_N para a família Joe

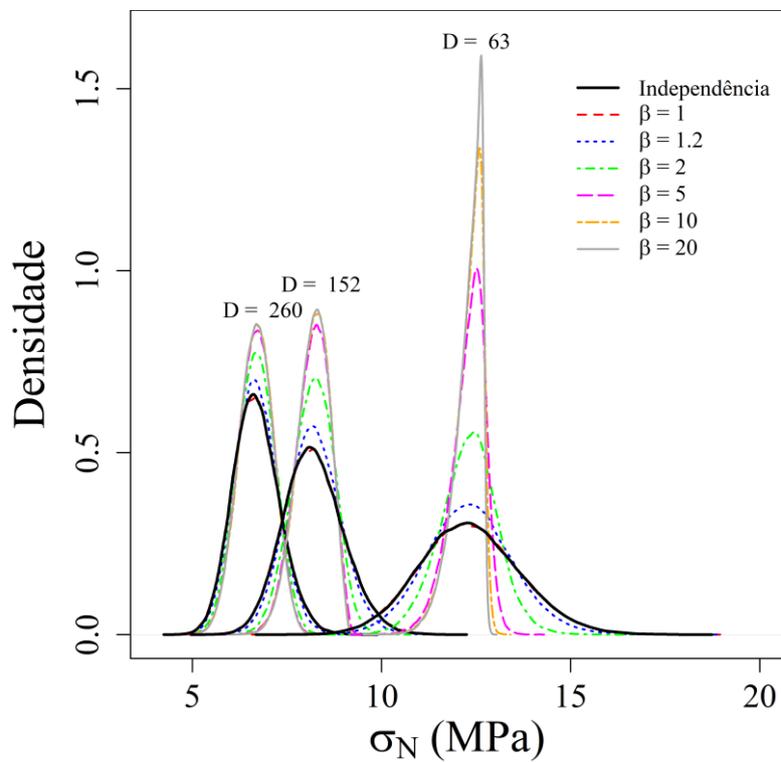


Figura 5.11 – Densidade empírica de σ_N para a família Gumbel-Hougaard

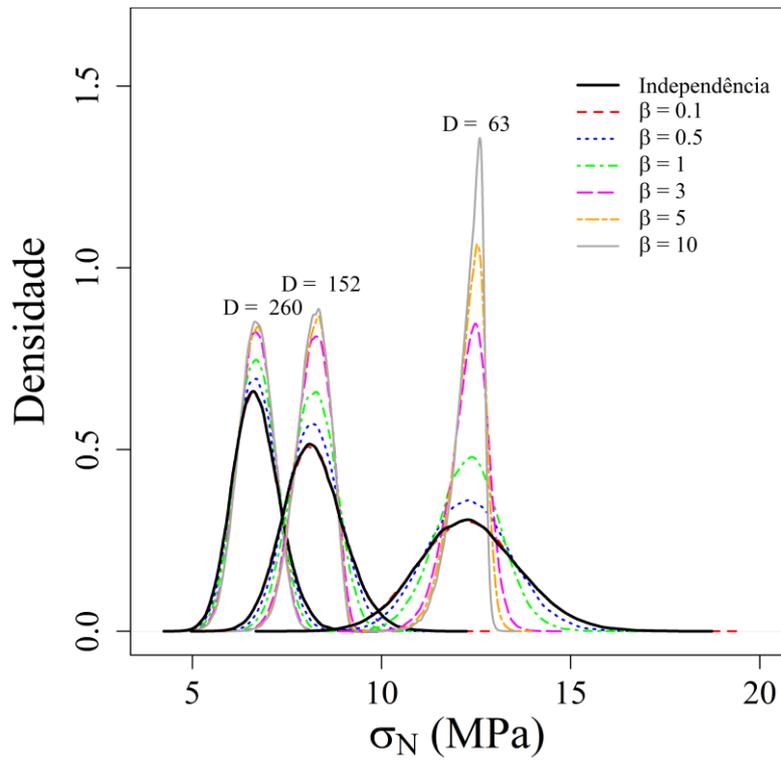


Figura 5.12 – Densidade empírica de σ_N para a família Galambos

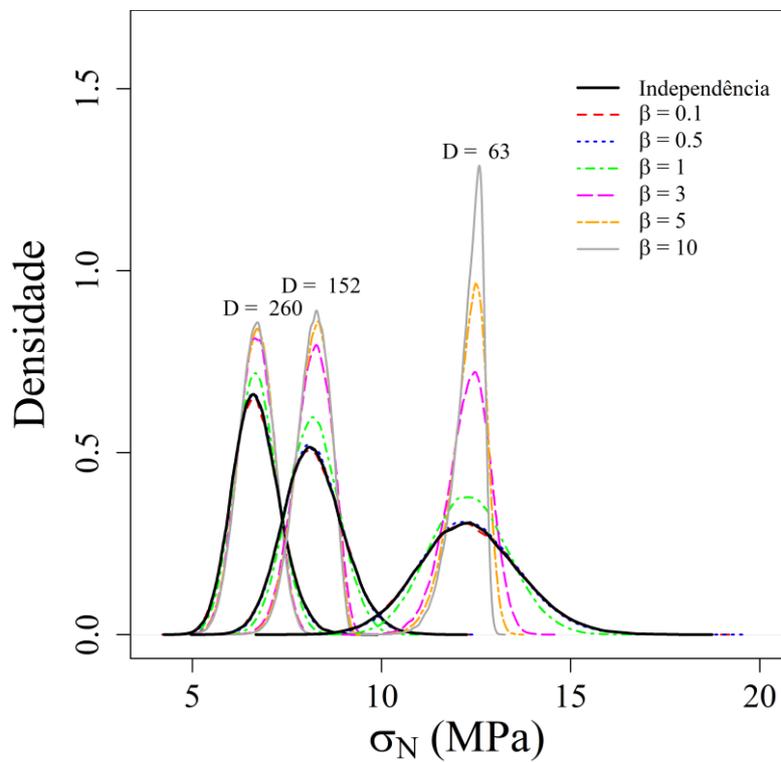


Figura 5.13 – Densidade empírica de σ_N para a família Husler e Reiss

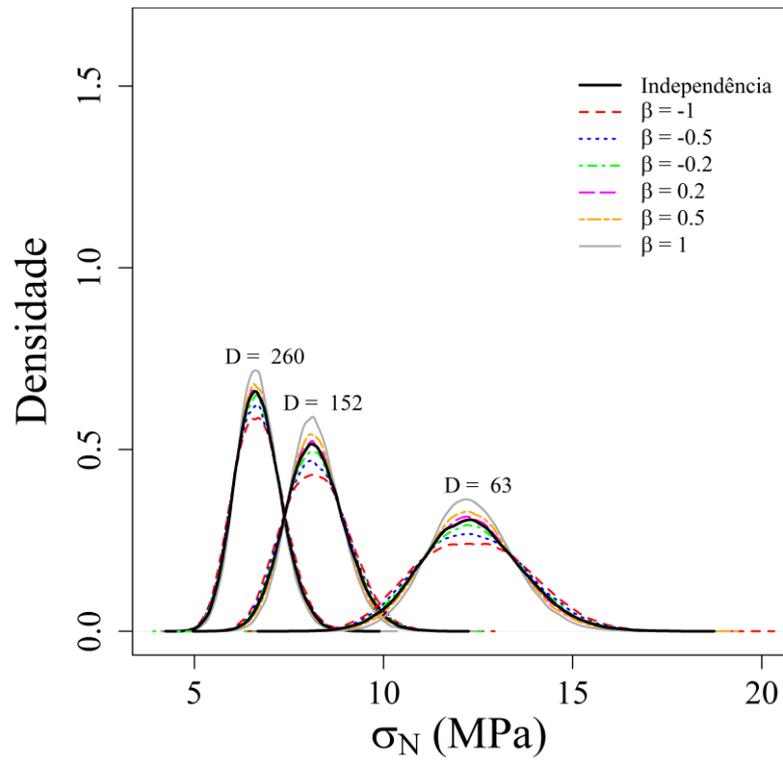


Figura 5.14 – Densidade empírica de σ_N para a família Farlie-Gumbel-Morgenstern

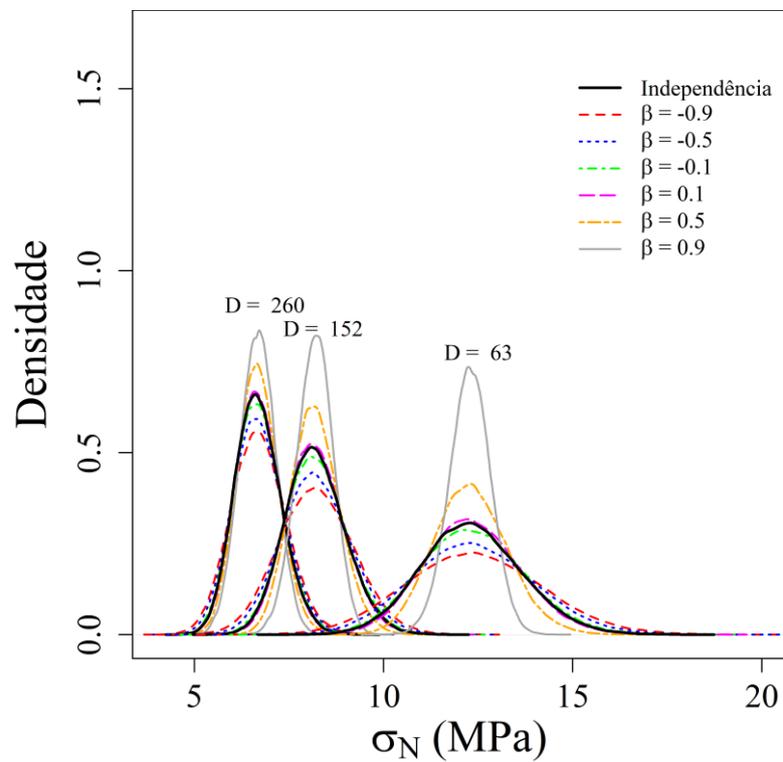


Figura 5.15 – Densidade empírica de σ_N para a família Normal

Nota-se, para todas as cópulas empregadas na simulação, que quanto mais cresce o valor de D , mais influente que os valores de G_f e de c_f – que são característicos e inerentes ao material – ele se torna, de tal maneira que a dispersão e variabilidade de σ_N diminui e, assim, essa resistência mostra-se menos suscetível à aleatoriedade de G_f e de c_f . Por isso, a densidade de σ_N é mais achatada (dispersa) quando menor D e seu valor médio é maior nessas condições.

Além disso, para de um mesmo valor de D , as densidades empíricas de σ_N revelam que uma maior correlação linear entre G_f e c_f – que está relacionada diretamente ao acréscimo do parâmetro β ou ρ – faz com que a variabilidade de σ_N diminua (conforme revela o achatamento de sua densidade). Isso é um resultado esperado, visto que maior correlação linear implica em menor variabilidade do par (G_f, c_f) , o que acarreta menor variabilidade também em σ_N . Assim, à medida que β ou ρ crescem, a distribuição de σ_N vai se degenerando e se concentrando cada vez mais em torno de sua moda. Esse fenômeno ocorre de maneira mais abrupta para menores valores de D , fato observado nas densidades empíricas estimadas para $D = 63\text{mm}$.

Pode-se observar também que a atribuição de uma estrutura de dependência para o vetor aleatório (G_f, c_f) impacta diretamente na distribuição de σ_N , conforme mostram as densidades estimadas quando comparadas com a densidade para a situação de independência (nas figuras, expressa pela curva com linha na cor preta). De maneira mais imediata, pode-se concluir também que os valores médios de σ_N são maiores quanto menor for D .

5.3 EFEITOS DE D E DA CÓPULA SOBRE O VALOR CARACTERÍSTICO DE σ_N

Conforme os dados simulados revelam, em acordo com expressão constante na Equação (3.11), os valores de D influenciam a variabilidade de σ_N e também, por óbvio, o valor médio desse atributo, qualquer que seja a estrutura de dependência existente entre G_f e c_f .

Ademais, de acordo com o Método de Efeito de Escala de Bazant (EEB), o valor característico de σ_N é calculado a partir dos valores característicos de G_f e de c_f , que Borges (2016) determina, para os dados experimentais aqui analisados, como sendo $\widehat{G}_f = 70,96$ N/m e $\widehat{c}_f = 31$ mm. Dessa forma, fixando $\alpha = 0,35$, podemos computar o valor característico $\widehat{\sigma}_N$ para vários valores de D , que são exibidos na Tabela 5.2 abaixo:

D (mm)	$\widehat{\sigma}_N$ (MPa)
63	12,596
100	10,612
150	8,993
200	7,944
250	7,192
300	6,621

Tabela 5.2 – Valor característico de σ_N para a variável D

A partir dos valores simulados para σ_N , com cada estrutura de cópulas e parâmetro (β ou ρ , conforme o caso) variando, pode-se calcular o seu valor médio $\overline{\sigma}_N$ para estimar seu valor característico. Em posse dessas informações, traçou-se uma curva “log(D) x σ_N ”, apresentada pela Figura 5.16, que tem o eixo das abcissas em escala logarítmica e apresenta formato aproximadamente linear:

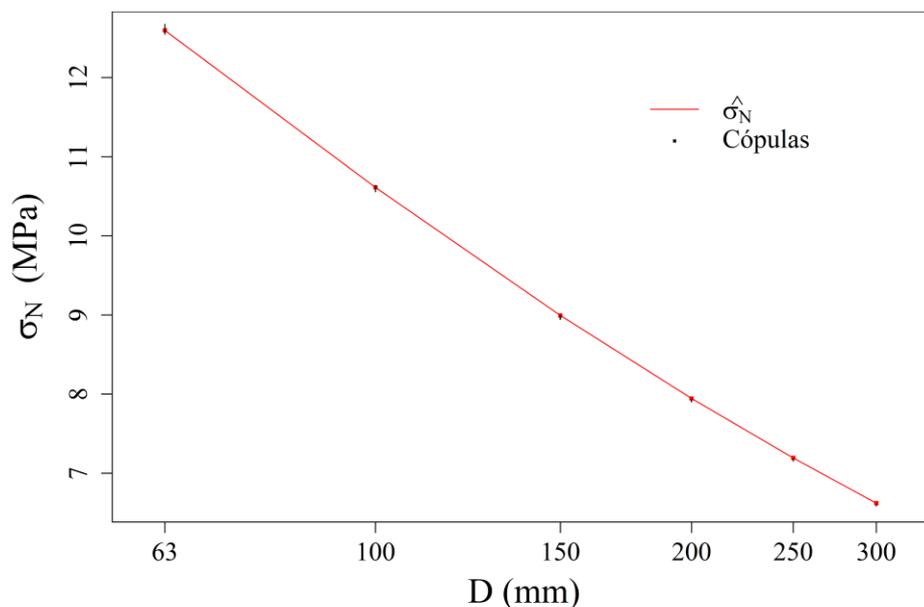


Figura 5.16 – Curva log(D) x σ_N

Reitere-se que nessa Figura 5.16 foram incluídos também os valores médios de σ_N para todas as cópulas que foram empregadas na simulação. No entanto, para cada D , os valores médios de cada cópula são muito próximos àquele calculado de acordo com o Método do EEB. Em vista disso, examinamos para cada D a relação de proximidade entre $\widehat{\sigma}_N$ e os valores médios $\overline{\sigma}_N$ de cada cópula, bem como os valores medianos, conforme apresenta a Figura 5.17. Para cada valor de D , foi calculado o valor médio e o mediano dos valores simulados de σ_N para cada cópula (em cada um dos parâmetros), o que resultou em 55 amostras de médias e medianas (para cada D).

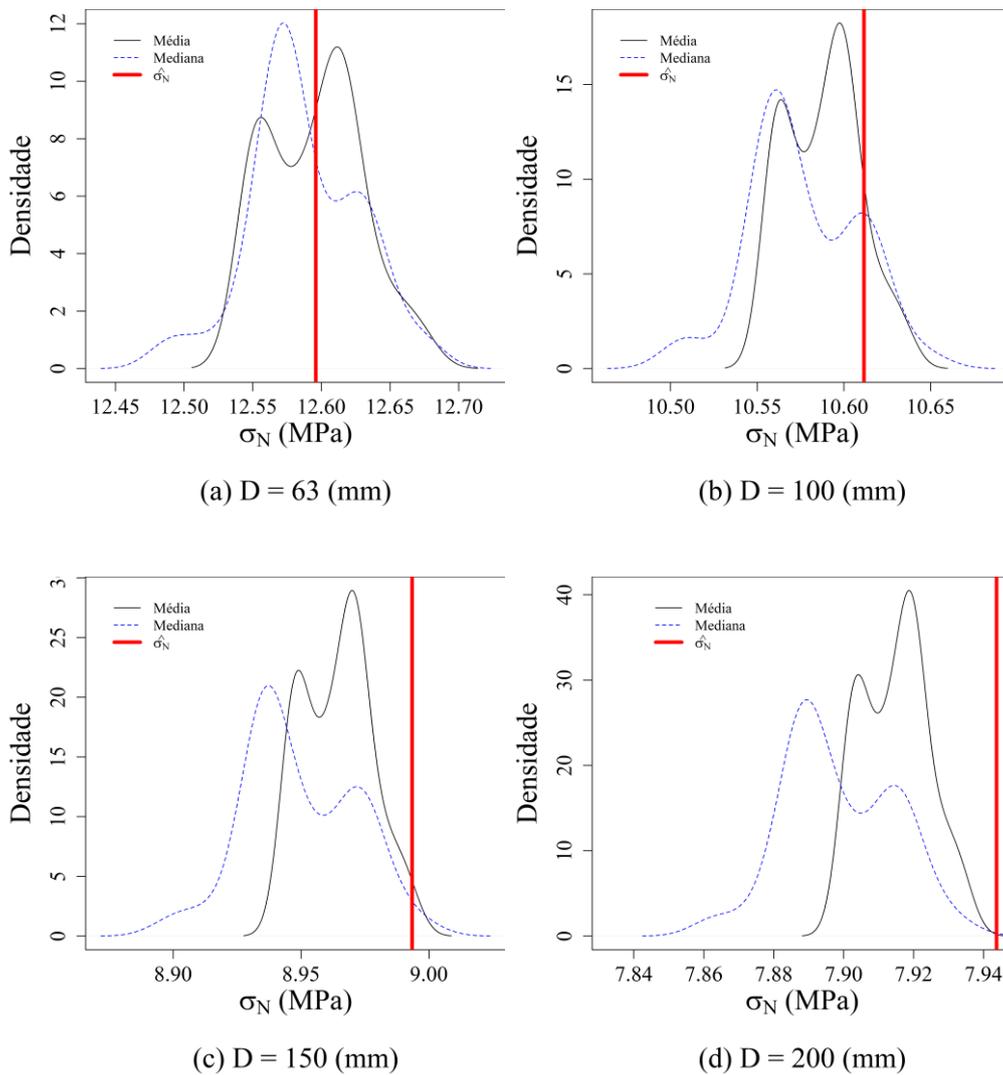


Figura 5.17 – Dispersão dos valores médios $\overline{\sigma}_N$ em relação a $\widehat{\sigma}_N$. (continua)

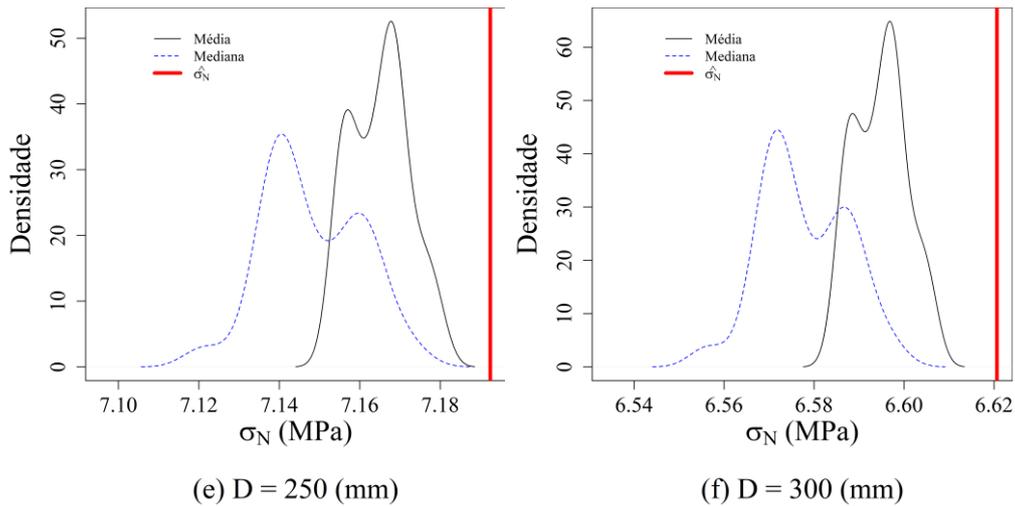


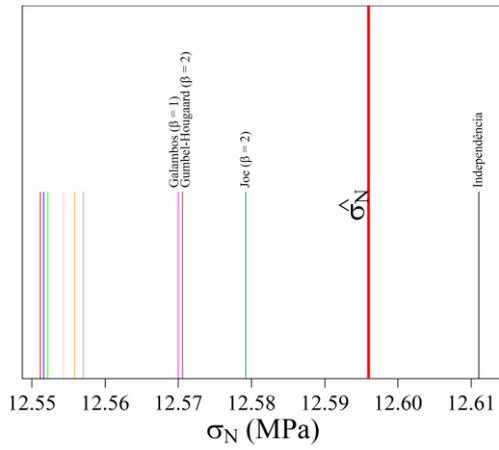
Figura 5.17 – Dispersão dos valores médios $\overline{\sigma}_N$ em relação a $\widehat{\sigma}_N$.

Vê-se, então, que o valor característico $\widehat{\sigma}_N$ estipulado pelo Método do EEB tende a ser maior que as médias $\overline{\sigma}_N$ quanto maior é D . Esse comportamento também é observado quando se considera a mediana como estimativa do valor característico para σ_N , mas há maior dispersão nessa forma de determinação, entre as várias cópulas utilizadas, do que na utilização da média.

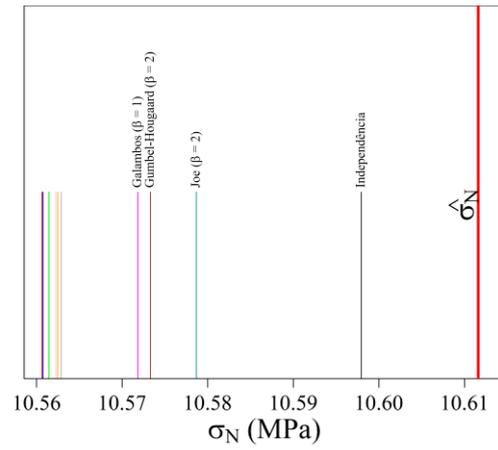
Contudo, deve-se atentar para o fato de que a diferença entre as estimativas é bastante pequena, de tal maneira que o valor $\widehat{\sigma}_N$, embora aparentemente possa superestimar o valor característico de σ_N , apresentou-se como bom método para sua determinação.

Dentre as cópulas cuja simulação dos pares (G_f, c_f) apresentou comportamento compatível⁴ com aquele obtido em Bazant e Becq-Giraudon (2002), buscamos avaliar qual era aquela que fornecia valor médio de σ_N mais próximo de $\widehat{\sigma}_N$, para cada valor de D . Os resultados estão expressos na Figura 5.18 abaixo. Note-se que a situação de independência também foi incluída nessa averiguação.

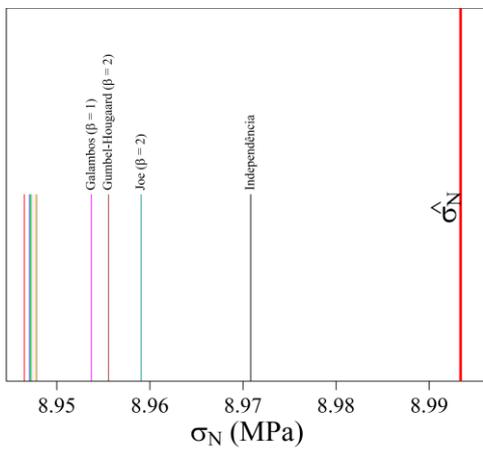
⁴ Que já citamos, a saber: Joe (com $\beta = 2$ e $\beta = 5$), Gumbel-Hougaard (com $\beta = 2$ e $\beta = 5$), Galambos (com $\beta = 1$ e $\beta = 3$), Husler e Reiss (com $\beta = 3$ e $\beta = 5$) e Normal (com $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,9$).



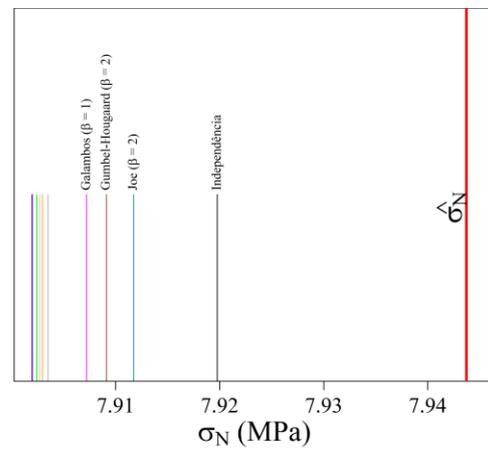
(a) $D = 63$ (mm)



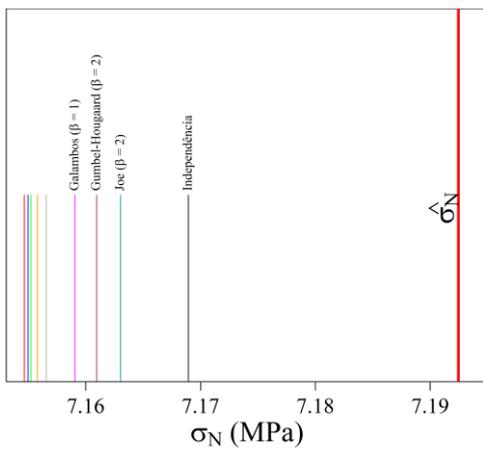
(b) $D = 100$ (mm)



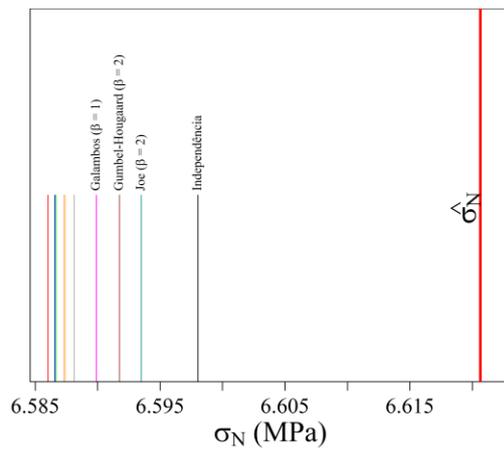
(c) $D = 150$ (mm)



(d) $D = 200$ (mm)



(e) $D = 250$ (mm)



(f) $D = 300$ (mm)

Figura 5.18 – Proximidade entre $\overline{\sigma}_N$ e $\widehat{\sigma}_N$

Nota-se, portanto, que a situação de independência sempre foi responsável pelo valor médio de σ_N mais próximo de $\widehat{\sigma}_N$, para todos os valores de D . Todavia, deve-se considerar que a literatura aponta haver dependência estocástica entre G_f e c_f .

Em segundo lugar, para todos os valores de D , a cópula Joe ($\beta = 2$) forneceu estimativas mais próximas de $\widehat{\sigma}_N$; em terceiro, Gumbel-Hougaard ($\beta = 2$); em quarto, a cópula Galambos ($\beta = 1$). A partir daí, várias das cópulas selecionadas (compatíveis), revezaram-se no quinto lugar mais próximo de $\widehat{\sigma}_N$, dependendo-se do valor de D , e assim respectivamente.

Os valores médios, medianas e outras estatísticas de locação e dispersão, para todos os modelos de cópulas e seus respectivos parâmetros, estão calculadas e tabuladas em Anexo.

5.4 SIMULAÇÃO PARA OS ESTIMADORES DOS VALORES CARACTERÍSTICOS DE G_f E c_f

Conforme descrito na Seção 3.1.2.1, no Método de Efeito de Escala de Bazant, a estimativa para os valores característicos de G_f e c_f , \widehat{G}_f e \widehat{c}_f , advém dos dois estimadores dos parâmetros da regressão linear, cuja distribuição, segundo a teoria estatística, é normal bivariada quando as hipóteses clássicas são assumidas.

Dessa forma, ao obtermos as estimativas da distribuição normal bivariada dos parâmetros da regressão A e C_0 , podemos observar como se dá a distribuição dos estimadores dos valores característicos de G_f e c_f por meio de simulação. De fato, a partir de pares simulados para \widehat{A} e \widehat{C}_0 – cuja distribuição normal bivariada é conhecida e estimada a partir da teoria da regressão linear –, são obtidos valores para \widehat{G}_f e \widehat{c}_f segundo as equações (3.19) e (3.20), a saber:

$$\widehat{G}_f = \frac{g(\alpha)}{\widehat{A}E} \quad (3.19)$$

e

$$\hat{C}_f = \frac{g(\alpha)\hat{C}_0.E}{g'(\alpha)}\hat{G}_f. \quad (3.20)$$

Note-se, portanto, que as expressões logo acima demonstram que \hat{C}_f é dado pelo produto de \hat{G}_f por constantes e por \hat{C}_0 , que está sujeito a aleatoriedade.

Para os dados de Brand et al. (2013), conforma já colocado, Borges (2016) obteve que \hat{A} e \hat{C}_0 possuem distribuição normal bivariada vetor de médias ($2,00 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{N}^2$, $3,17 \times 10^{-12} \text{m}^4/\text{N}^2$) e matriz de variância e covariâncias cujas entradas têm desvio-padrão de \hat{A} de $2,99 \times 10^{-12} \text{m}^3/\text{N}^2$, desvio-padrão de \hat{C}_0 igual a $5,06 \times 10^{-13} \text{m}^4/\text{N}^2$ e correlação igual a 0,96.

Assim, para esses valores, procedemos à simulação dos pares (\hat{G}_f, \hat{C}_f) , que resultou na dispersão ilustrada pela Figura 5.19:

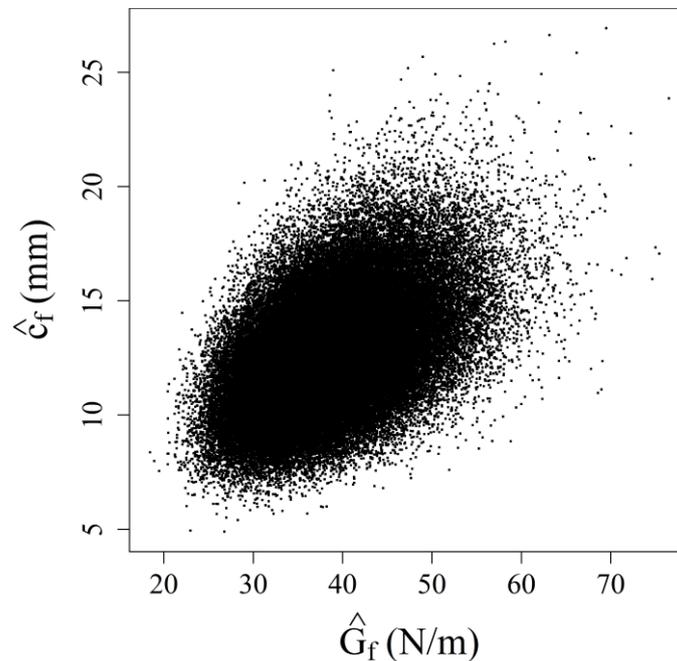


Figura 5.19 – Pares simulados para \hat{G}_f e \hat{C}_f

Note-se, portanto, que há uma tendência de correlação linear entre \widehat{G}_f e \widehat{c}_f , mas a variância entre essas variáveis aparentemente aumenta em seus maiores valores.

Estimamos, então as distribuições marginais (ver Figura 5.20) para os valores simulados para as duas variáveis, para as quais em ambas se observou bom ajuste com a distribuição log-normal, com parâmetros $\mu = 3,637$ e de locação igual a 0,166 para \widehat{G}_f , enquanto para \widehat{c}_f foram calculados $\mu = 2,52$ e parâmetro de locação igual a 0,186.

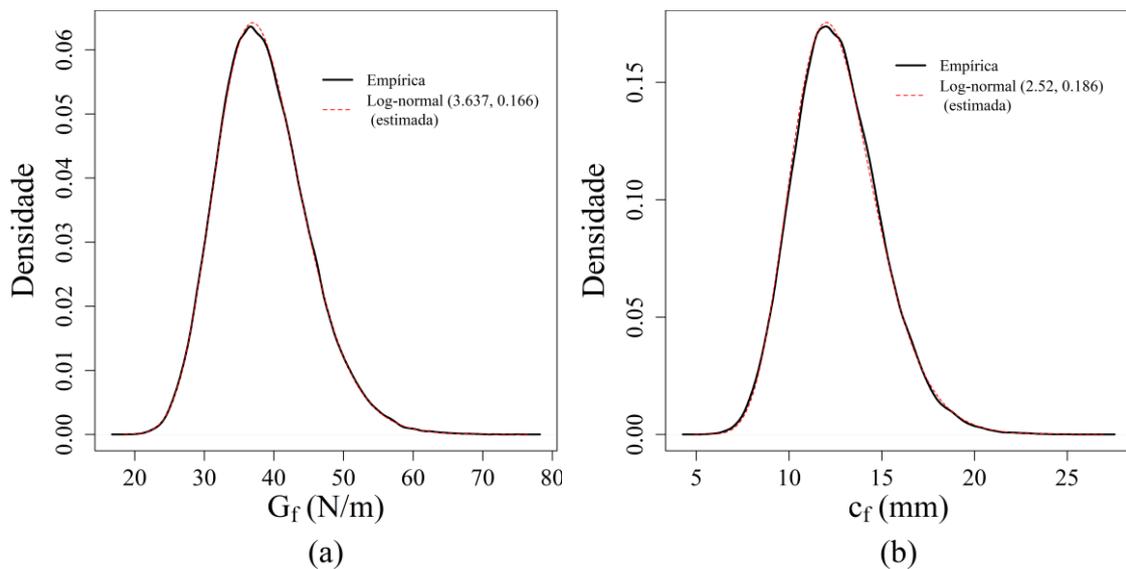


Figura 5.20 – Densidades marginais estimadas para: (a) \widehat{G}_f ; e (b) \widehat{c}_f .

Para a estimação do modelo de cópula, antes é necessário fazer a transformação $U = Fd(\widehat{G}_f)$ e $V = Fd(\widehat{c}_f)$, em que $Fd()$ denota a função de distribuição estimada para cada uma das variáveis. Dessa forma, a teoria apresentada nos garante que U e V terão distribuição uniforme e, assim, podem ser lançados como argumentos da função cópula C .

Para avaliarmos a relação entre as variáveis U e V , observamos primeiramente sua dispersão (*scatter plot*), exibida na Figura 5.21:

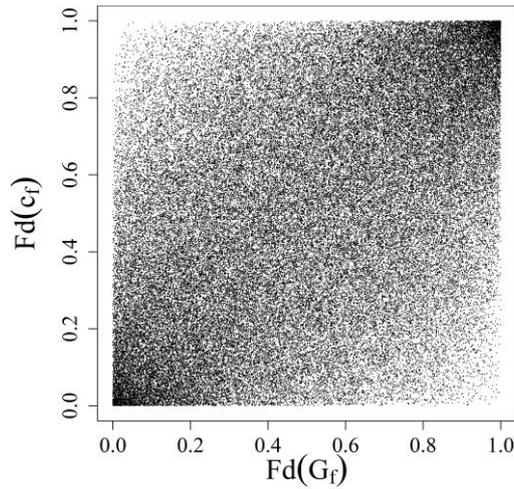


Figura 5.21 – Dispersão entre $U = Fd(\widehat{G}_f)$ e $V = Fd(\widehat{C}_f)$.

A estimativa da densidade empírica para a dispersão apresentada pelas variáveis uniformes U e V está apresentada na Figura 5.22:

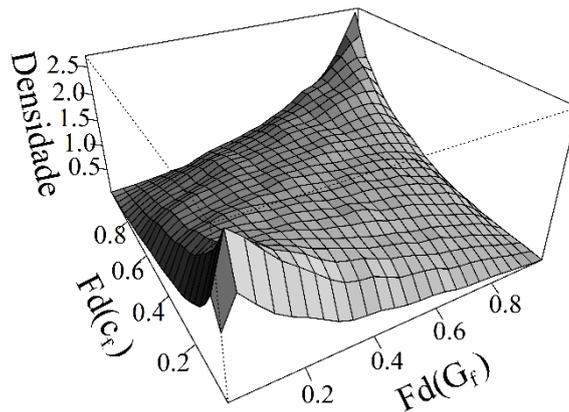


Figura 5.22 – Densidade empírica estimada para $U = Fd(\widehat{G}_f)$ e $V = Fd(\widehat{C}_f)$.

Há, portanto, correlação positiva, com concentração de massa de probabilidade em torno da reta bissetriz e também bastante densidade nas caudas, isto é, nas regiões próximas dos pontos (0,0) e (1,1), respectivamente. Esse comportamento típico foi observado como presente nos modelos de cópulas das famílias Normal e Frank.

A partir da amostra para as variáveis U e V , estimamos pelo método de máxima verossimilhança o parâmetro β para cada modelo de cópula aqui apresentado. Os resultados estão na Tabela 5.3:

Família de cópulas	Estimativa do parâmetro	Log-verossimilhança
Clayton	0,584	8.804,78
Frank	3,122	11.900,38
Ali-Mikhail-Haq	0,863	10.611,15
Joe	1,527	9.021,62
Gumbel-Hougaard	1,408	11.720,30
Galambos	0,676	11.875,90
Husler e Reiss	1,067	11.806,27
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1,000	10.187,28
Normal	0,479	13.022,56

Tabela 5.3 – Estimativas dos parâmetros das famílias de cópulas.

Um critério para a seleção do melhor modelo, entre os vários estimados, é a utilização daquele que possui o maior valor de log-verossimilhança ajustado aos dados. Assim, o melhor modelo estimado foi aquele da família Normal de cópulas, com parâmetro $\hat{\rho} = 0,479$.

Um comparativo gráfico das densidades estimadas para cada modelo de cópula está exposto na Figura 5.23, abaixo.

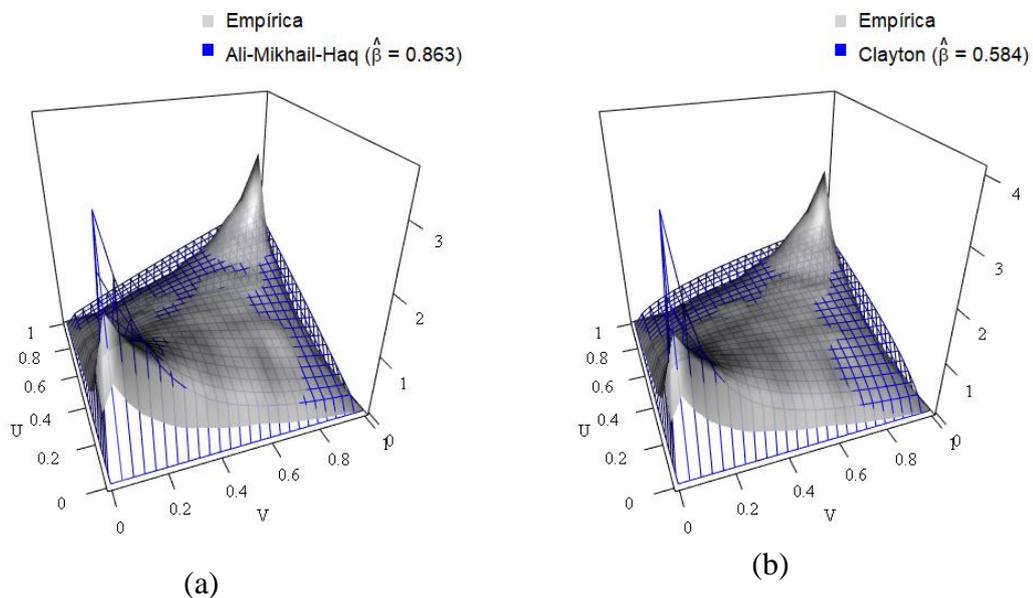


Figura 5.23 – Densidade estimada para $U = Fd(\hat{G}_F)$ e $V = Fd(\hat{c}_F)$, para cada família de cópulas: (a) Ali-Mikhail-Haq; (b) Clayton; (continua)

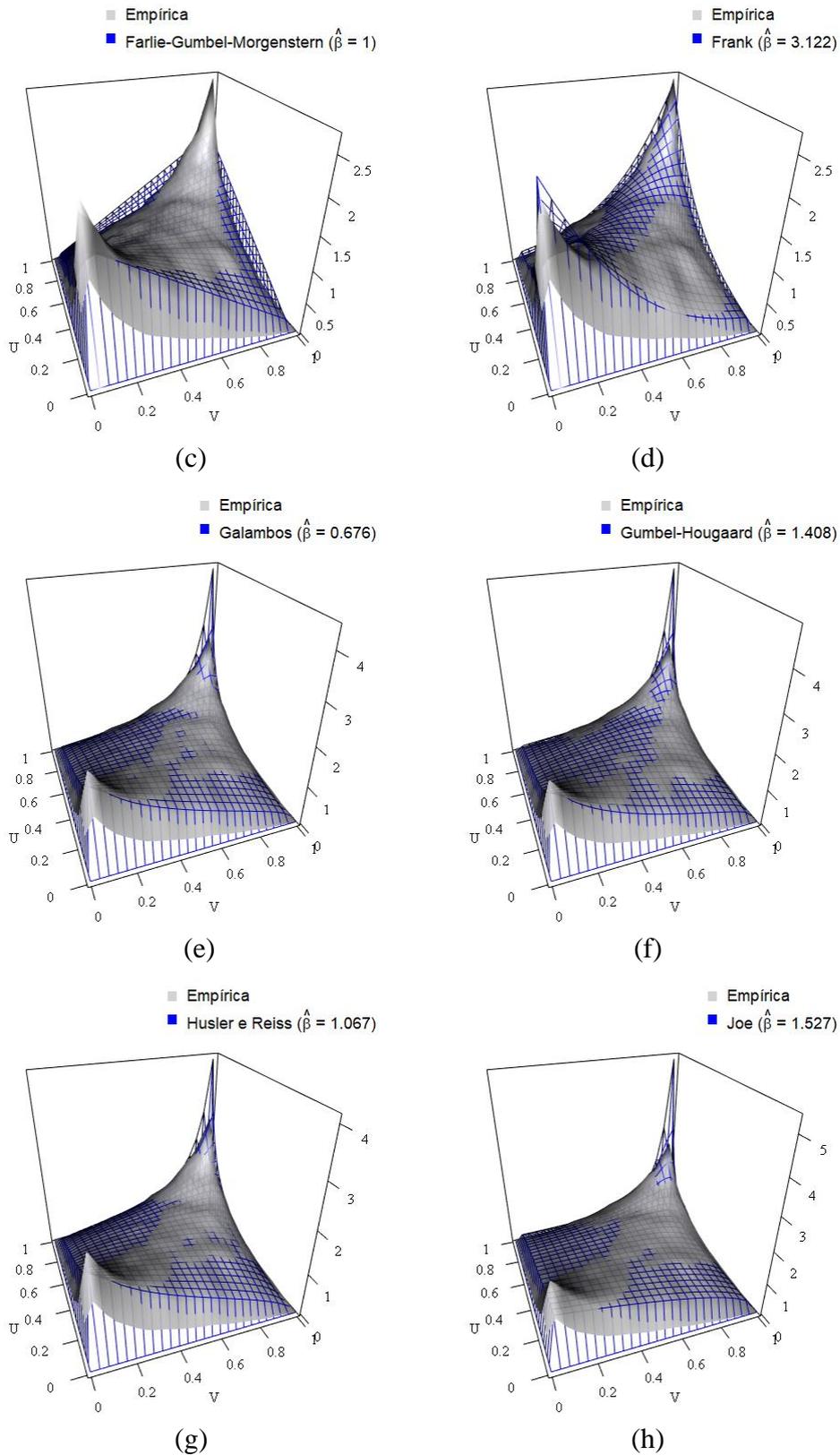


Figura 5.23 – Densidade estimada para $U = Fd(\hat{G}_F)$ e $V = Fd(\hat{C}_F)$, para cada família de cópulas: (c) Farlie-Gumbel-Morgenstern; (d) Frank. (e) Galambos; (f) Gumbel-Hougaard; (g) Husler e Reiss; (h) Joe.

Finalmente, a função densidade da melhor estimativa obtida, correspondente à família normal, está exibida na Figura 5.24:

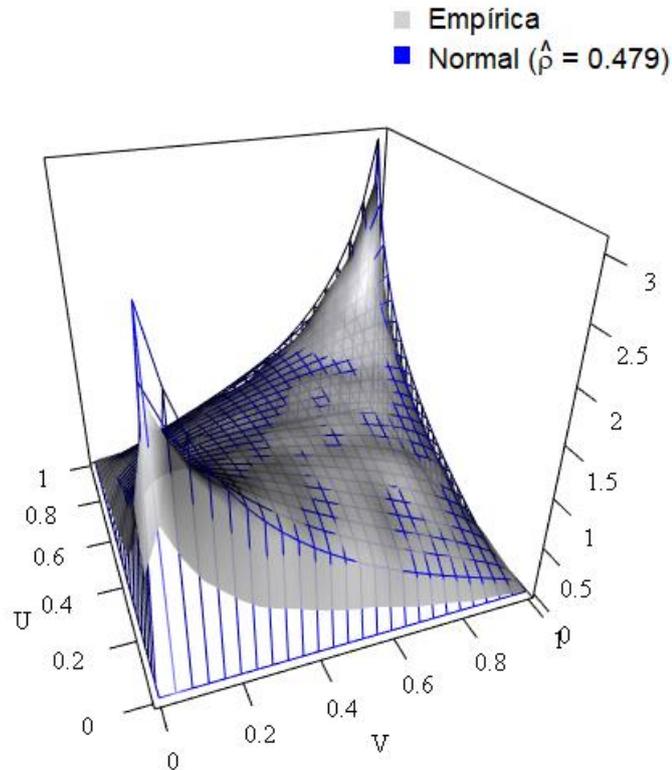


Figura 5.24 – Densidade estimada para $U = Fd(\widehat{G}_f)$ e $V = Fd(\widehat{C}_f)$, com a família Normal de cópulas e parâmetro $\hat{\rho} = 0,479$.

Mesmo com os resultados obtidos, deve-se ressaltar que os valores simulados para \widehat{G}_f e \widehat{C}_f não incorporam toda a variabilidade existente no método experimental do Efeito de Escala de Bazant, pois considera apenas a variabilidade teórica fornecida pelos estimadores dos parâmetros da regressão A e C_0 .

6 CONCLUSÕES

Os resultados das simulações realizadas nos permitem chegar a algumas conclusões, aplicáveis ao conjunto de dados experimentais utilizados neste esforço. Primeiramente, pôde-se observar que a estrutura de dependência entre G_f e c_f influi, conforme esperado, na distribuição de σ_N .

No entanto, a distribuição de σ_N é menos sensível à dependência de G_f e c_f quanto maior é o valor de D , pois essa dimensão geométrica das vigas aparentemente passa a ser mais dominante na determinação de σ_N do que esses atributos do material concreto relacionados à mecânica da fratura.

Em nosso estudo, alguns casos de simulação com cópulas se mostraram mais compatíveis com o padrão de dispersão e correlação descrito na literatura, como em Bazant e Becq-Giraudon (2002). Dentre esses casos, a cópula Joe ($\beta = 2$) forneceu estimativas mais próximas do valor característico de σ_N segundo o Método do Efeito de Escala de Bazant (EEB); em seguida, vieram as cópulas de Gumbel-Hougaard (com $\beta = 2$) e Galambos (com $\beta = 1$), respectivamente.

O valor característico $\widehat{\sigma}_N$ estipulado pelo Método do EEB apresentou a tendência, quanto maior D , de ser maior que as médias dos valores simulados de σ_N obtidos pelos modelos de cópulas. Esse comportamento também foi observado quando se considerou a mediana como estimativa do valor característico para σ_N .

No entanto, deve-se atentar para o fato de que a diferença entre as estimativas é demasiadamente pequena, de tal maneira que o valor $\widehat{\sigma}_N$, embora aparentemente possa superestimar o valor característico de σ_N , surge como bom método para sua determinação.

Assim, embora a estrutura de dependência entre G_f e c_f influa na distribuição de σ_N , nossas simulações apontaram que há diferenças muito pequenas entre o valor obtido com o emprego do Método do EEB e as estimativas calculadas pelos vários modelos de cópulas, de modo que a determinação final do valor característico de σ_N , para os dados

experimentais utilizados, aparentou não ser muito sensível à correlação apresentada por G_f e c_f .

Em relação aos valores simulados para \widehat{G}_f e \widehat{c}_f a partir da distribuição dos estimadores dos coeficientes da regressão utilizados no Método do EEB, encontramos que ambas as distribuições marginais de \widehat{G}_f e \widehat{c}_f se ajustaram bem à distribuição log-normal e sua correlação foi melhor aproximada a partir da cópula da família Normal.

É necessário realizar mais simulações, contudo, com um número maior de dados experimentais. Nesse mesmo sentido, consideramos conveniente que, em estudos futuros, sejam conduzidos vários ensaios para um mesmo traço ou composição de concreto – cada qual com os blocos de 9 observações mínimas necessárias ao procedimento descrito por RILEM (1990) –, a fim de que sejam obtidos vários registros (amostras) para o valor característico de σ_N , e, assim, seja possível estimar diretamente, a partir de dados coletados, a densidade empírica da estimativa provida pelo Método do EEB.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAŽANT, Z. P.. *Size effect in blunt fracture: Concrete, Rock, Metal*. Journal of Engineering Mechanics. pp.: 518 - 535, Vol. 110, 1984.

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J.. *Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials*. POR CRC PRESS, 1997.

BAŽANT, Z. P.; BECQ-GIRAUDON, E.. *Statistical prediction of fracture parameters of concrete and implications for choice of testing standard*. Cement and concrete research. pp.: 529 – 556, Vol. 32, 2003.

BAUTISTA, L. E. C. *Influência das tensões de origem térmica em problemas de estabilidade de blocos rochosos*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2007.

BORGES, J. F. *Confiabilidade e Quantificação da Incerteza da Resistência à Fratura Considerando Efeito de Escala em Vigas de Concreto*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação 13A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 122p., 2016.

BRAND, A., S.; AMIRKHANIAN, A. N.; ROESLER, J. R.. *Flexural capacity of rigid pavement concrete slabs with recycled aggregates*. Illinois Certer for Transportation, Urbana, IL, 2013.

GRIFFITH, A. *Philosophical transactions of the royal society of London*. SERIES A., Contains papers of a Mathematical or Physical character, 1921.

IRWIN, G.R. *Plastic Zone Near a Crack and Fracture and Toughness*. Sagamore Research Conference Proceedings, Vol. 4, 1958.

JAMES, BARRY R. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides. IMPA, 1981.

KUMAR, S.; BARAI, S. V. *Concrete fracture Models and Applications*. Nova Iorque, NY, Estados Unidos. Springer, 2011.

MIRANDA, A. C. O. *Propagação de trincas por fadiga em geometrias 2D complexas sob cargas cíclicas variáveis*. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2003.

MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. Edusp, 2004.

MUÑOZ P., I. D.. *Avaliação do risco de falha baseada na mecânica da fratura e efeito de escala considerando a incerteza da caracterização dos materiais cimentícios*. Civil, Publicação E.DM- 011A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 114 p., 2015.

NELSEN, R. *An introduction to Copulas*. 3. Ed. New York: Springer, 2006.

RILEM., 1990a. *Size effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete*. Mater. Struct.. 23, pp.: 461–465, (RILEM Draft Recommendation, TC 89-FMT Fracture Mechanics Of Concrete -Test Methods).

SILVA, F. H. B. T. (2017). *Análise Numérica da Fratura no Concreto em Modo I e Modo Misto Utilizando Elemento de Junta*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-08A/17, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 106p., 2017.

SILVA NETO, C.P. *Modelagem da fratura do Concreto Armado por meio de Interfaces Coesivas*. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. UFRGS, Porto Alegre.

ANEXO

A – GRÁFICOS DE DISPERSÃO PARA OS DADOS SIMULADOS, PARA CADA FAMÍLIA DE CÓPULAS

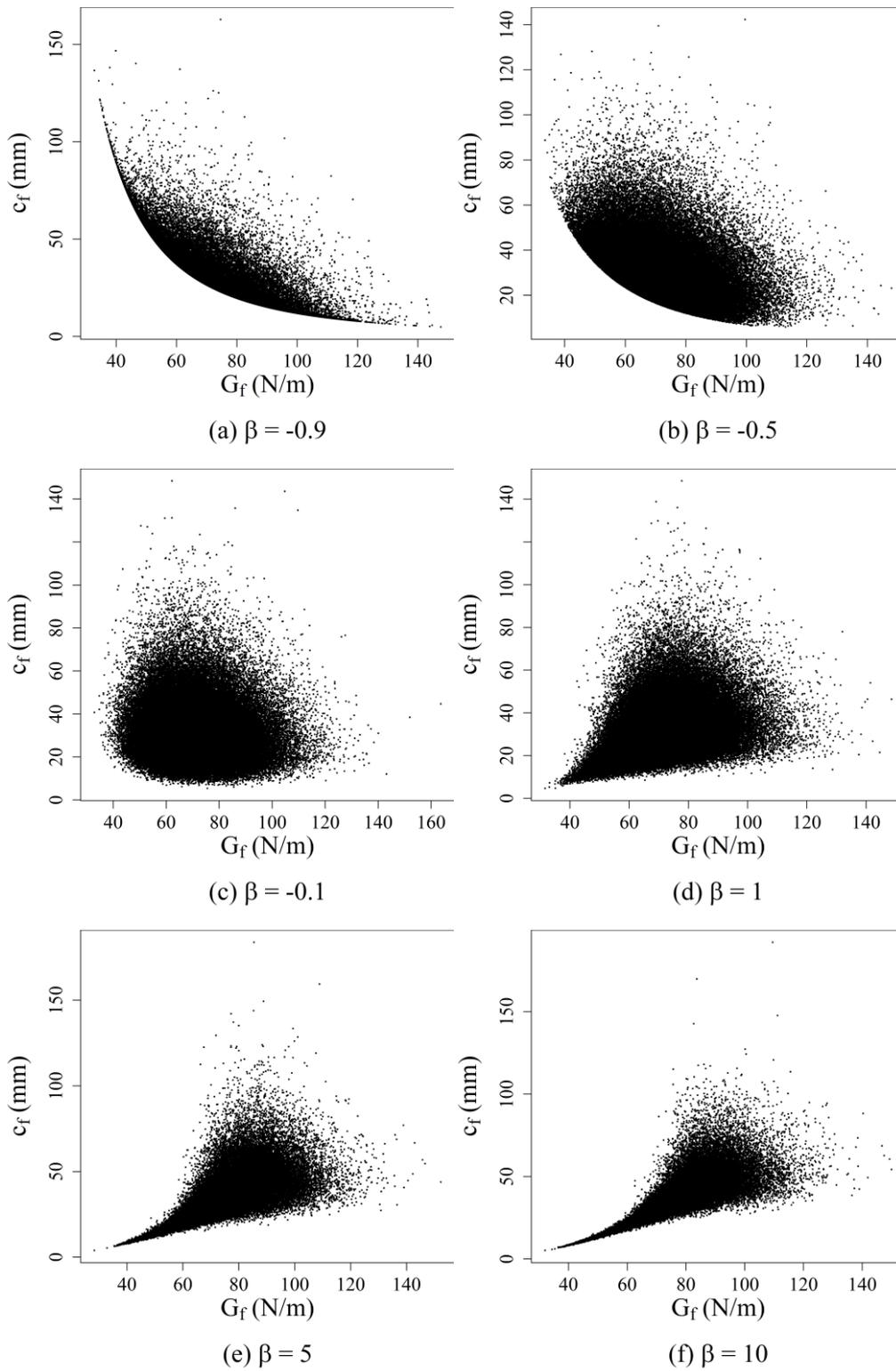


Figura 7.1 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Clayton

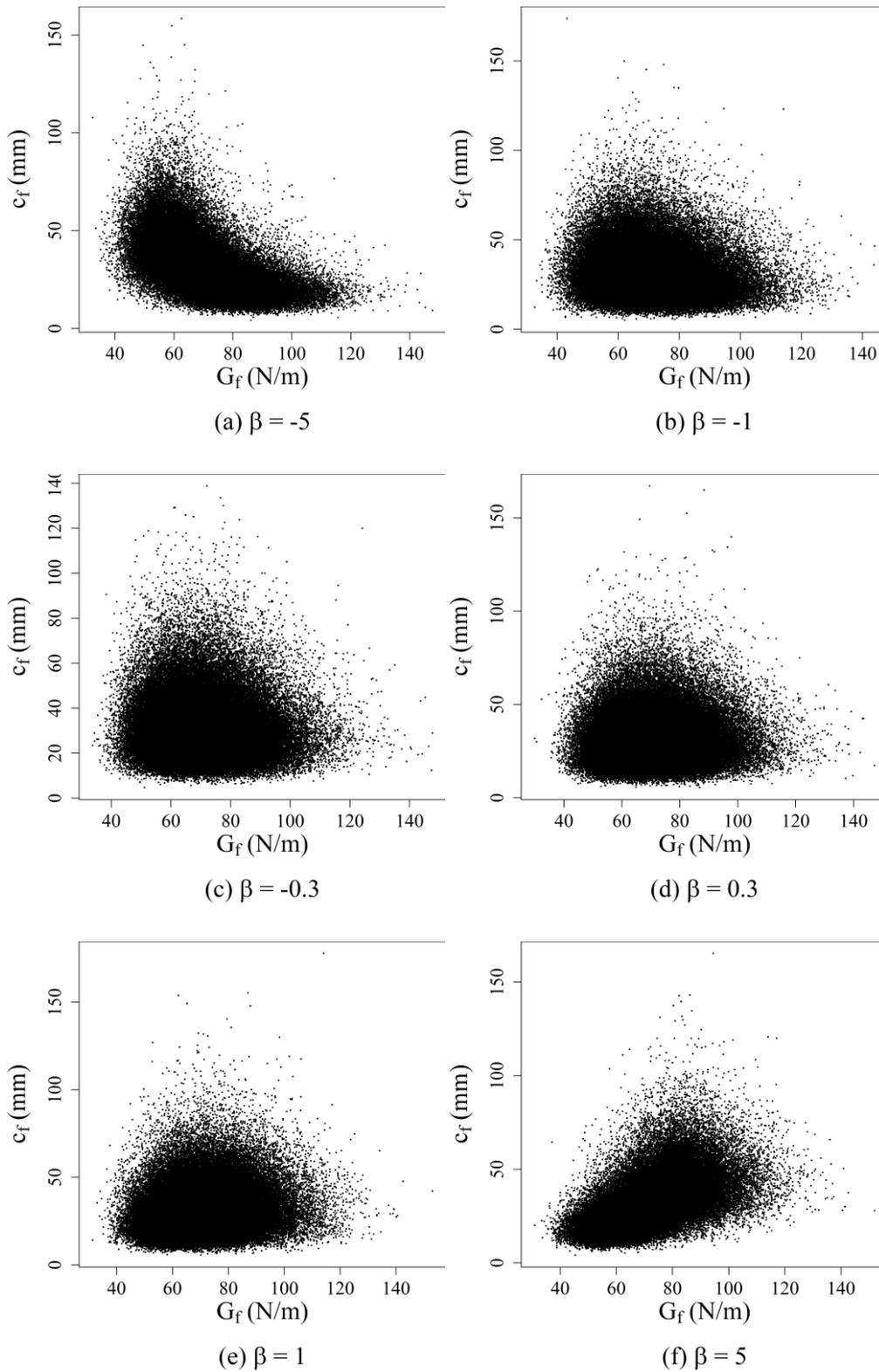


Figura 7.2 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Frank

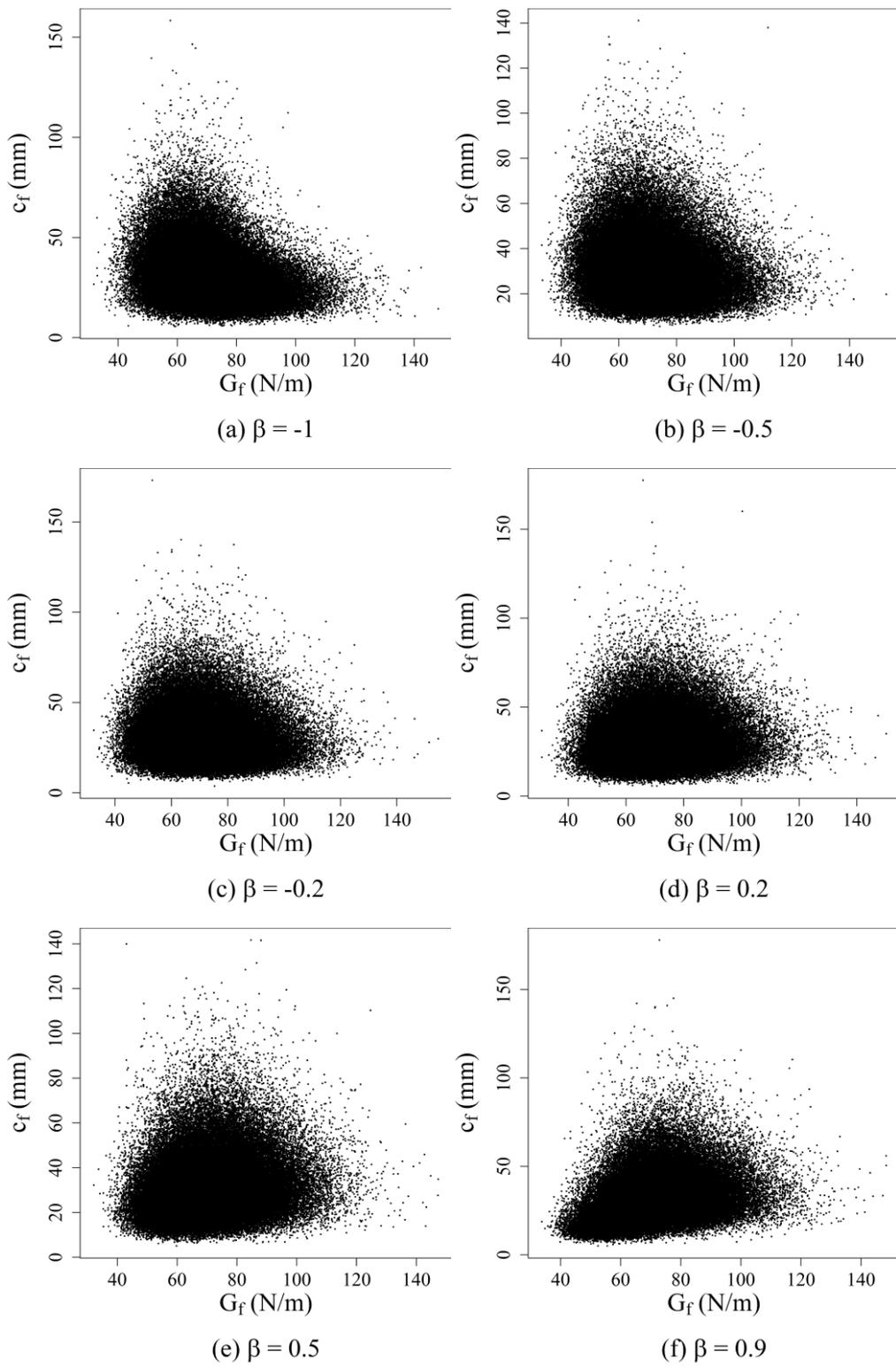


Figura 7.3 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Ali-Mikhail-Haq

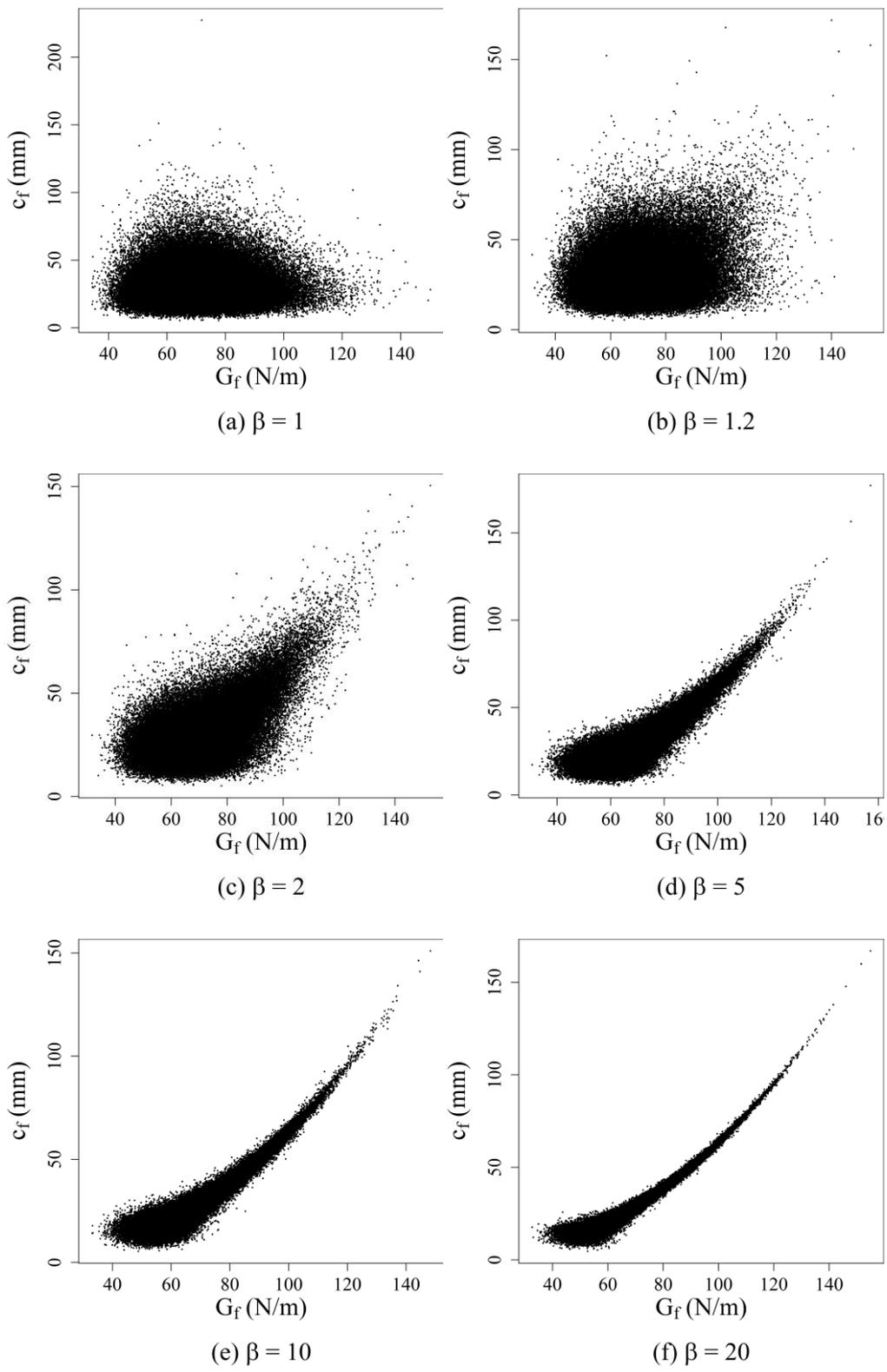


Figura 7.4 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Joe

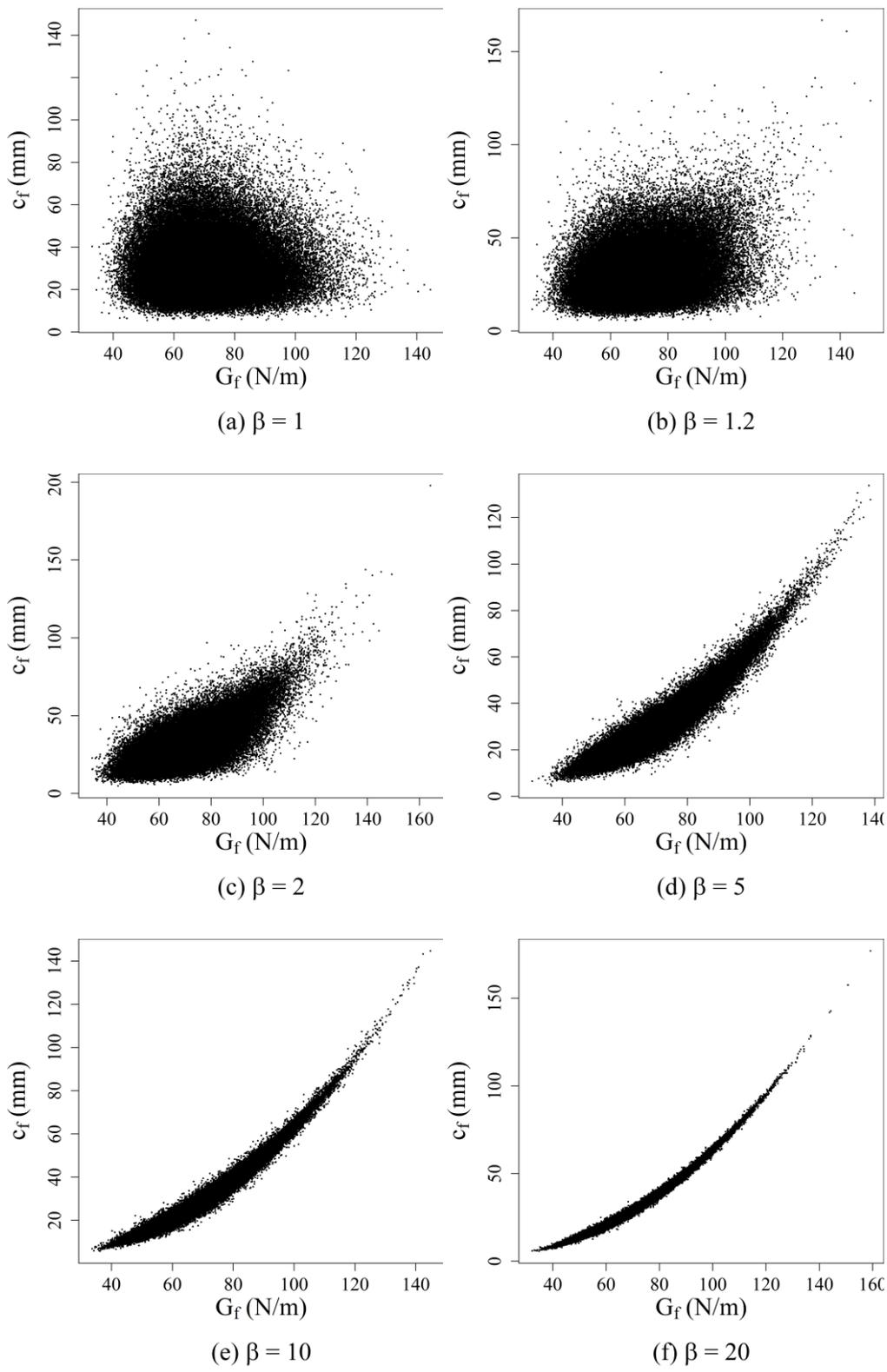


Figura 7.5 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Gumbel-Hougaard

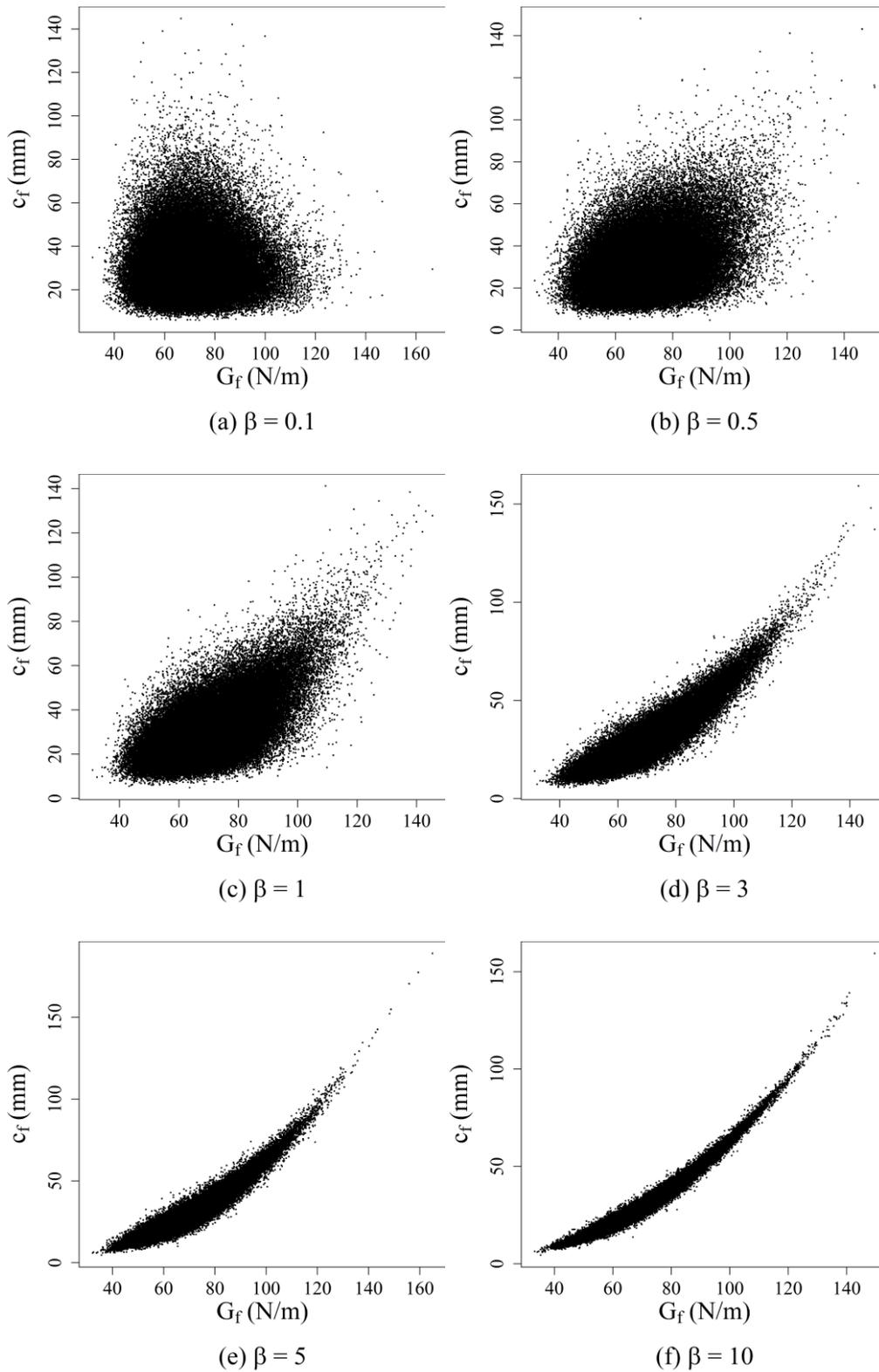


Figura 7.6 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Galambos

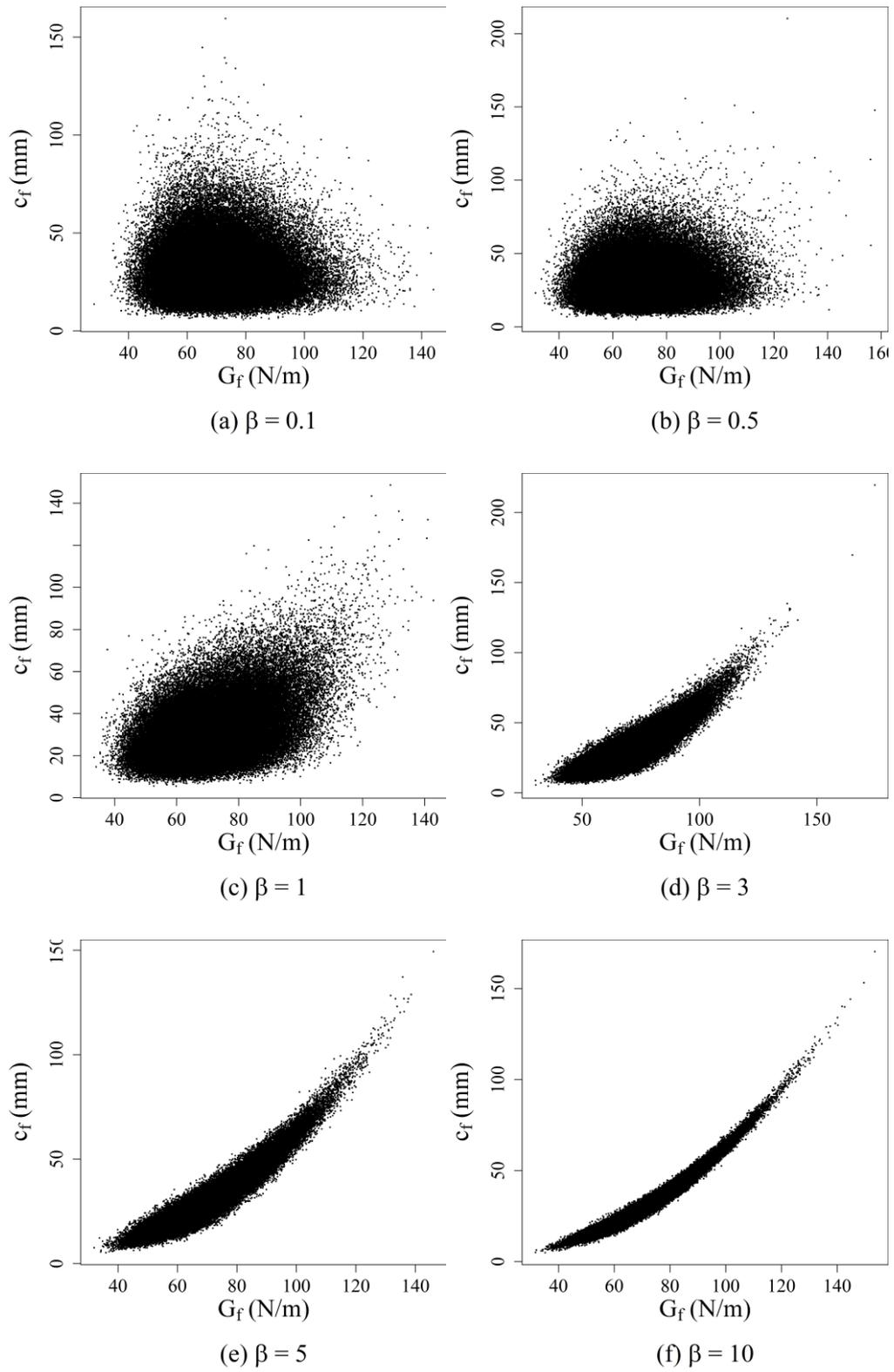


Figura 7.7 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Husler e Reiss

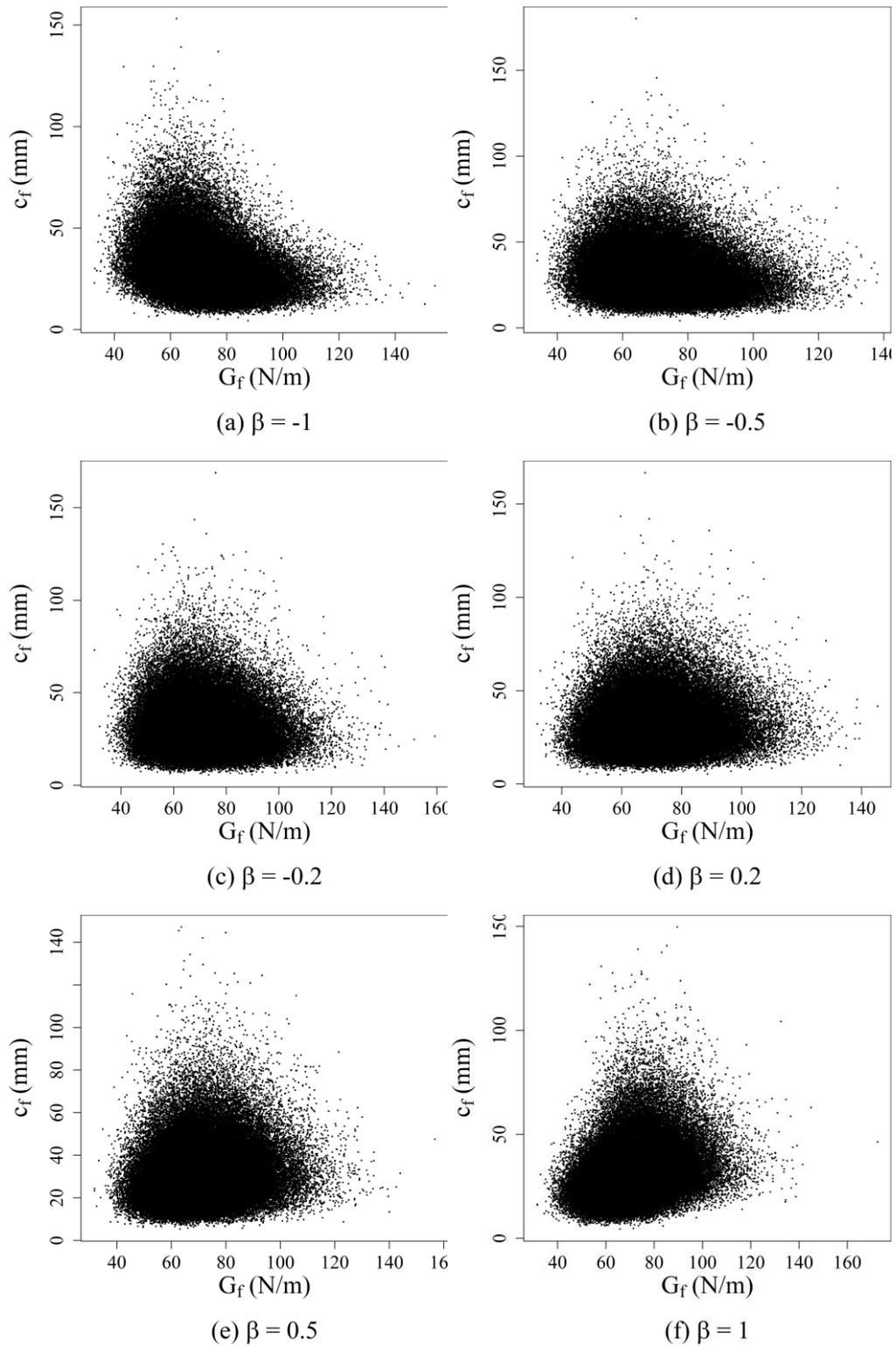


Figura 7.8 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Farlie-Gumbel-Morgenstern

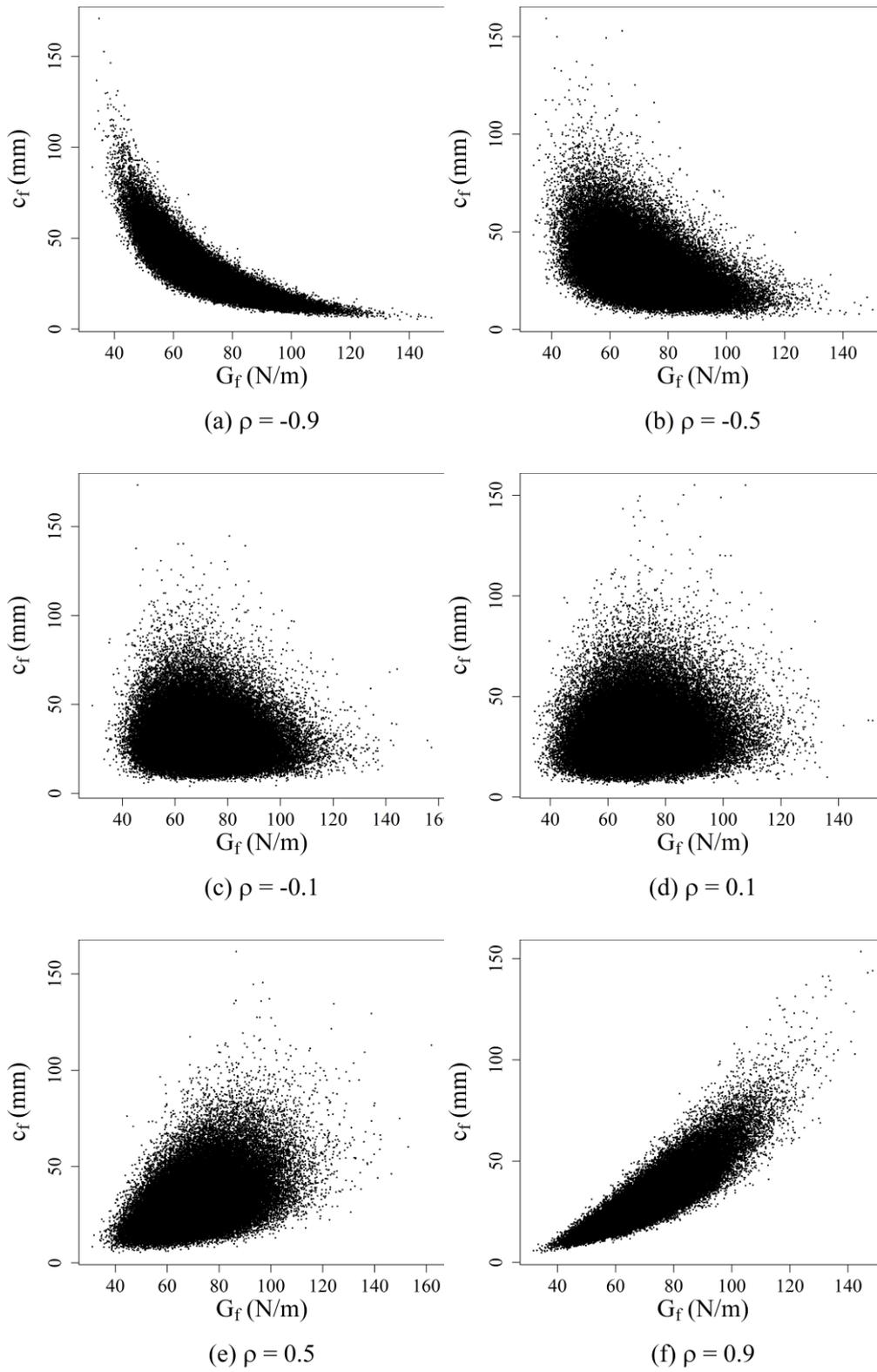


Figura 7.9 – Pares (G_f, c_f) simulados para a família Normal

B - ESTATÍSTICAS DE LOCAÇÃO E DISPERSÃO, PARA TODOS OS MODELOS DE CÓPULAS E SEUS RESPECTIVOS PARÂMETROS, PARA OS VALORES SIMULADOS DE σ_N

Tabela 7.1 - Estatísticas de locação e dispersão, para todos os modelos de cópulas e seus respectivos parâmetros, para os valores simulados de σ_N ($\alpha = 0,35$ e $n = 100.000$).

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\widehat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\widehat{\sigma}_N$ (MPa)
Ali-Mikhail-Haq	-1	63	12,573	12,624	1,493	0,118	12,596	-0,028
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	63	12,582	12,635	1,433	0,113	12,596	-0,039
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	63	12,573	12,616	1,380	0,109	12,596	-0,020
Ali-Mikhail-Haq	0,2	63	12,569	12,613	1,303	0,103	12,596	-0,017
Ali-Mikhail-Haq	0,5	63	12,558	12,602	1,231	0,098	12,596	-0,006
Ali-Mikhail-Haq	0,9	63	12,513	12,589	1,102	0,088	12,596	0,007
Clayton	-0,9	63	12,637	12,672	1,790	0,141	12,596	-0,076
Clayton	-0,5	63	12,618	12,648	1,590	0,126	12,596	-0,052
Clayton	-0,1	63	12,581	12,615	1,388	0,110	12,596	-0,019
Clayton	1	63	12,493	12,584	1,043	0,083	12,596	0,012
Clayton	5	63	12,487	12,558	0,680	0,054	12,596	0,038
Clayton	10	63	12,527	12,555	0,566	0,045	12,596	0,041
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	63	12,606	12,639	1,521	0,120	12,596	-0,043
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	63	12,582	12,625	1,440	0,114	12,596	-0,029
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	63	12,577	12,619	1,387	0,110	12,596	-0,023
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	63	12,561	12,603	1,308	0,104	12,596	-0,007
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	63	12,555	12,597	1,251	0,099	12,596	-0,001
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	63	12,548	12,589	1,133	0,090	12,596	0,007
Frank	-5	63	12,620	12,659	1,670	0,132	12,596	-0,063
Frank	-1	63	12,576	12,618	1,440	0,114	12,596	-0,022
Frank	-0,3	63	12,574	12,616	1,381	0,109	12,596	-0,020
Frank	0,3	63	12,572	12,614	1,314	0,104	12,596	-0,018
Frank	1	63	12,564	12,603	1,248	0,099	12,596	-0,007
Frank	5	63	12,547	12,572	0,908	0,072	12,596	0,024
Galambos	0,1	63	12,573	12,612	1,347	0,107	12,596	-0,016
Galambos	0,5	63	12,572	12,588	1,115	0,089	12,596	0,008
Galambos	1	63	12,583	12,570	0,870	0,069	12,596	0,026
Galambos	3	63	12,616	12,552	0,549	0,044	12,596	0,044
Galambos	5	63	12,628	12,550	0,471	0,038	12,596	0,046
Galambos	10	63	12,637	12,550	0,424	0,034	12,596	0,046
Gumbel-Hougaard	1	63	12,571	12,615	1,345	0,107	12,596	-0,019
Gumbel-Hougaard	1,2	63	12,581	12,600	1,159	0,092	12,596	-0,004
Gumbel-Hougaard	2	63	12,601	12,571	0,785	0,062	12,596	0,025
Gumbel-Hougaard	5	63	12,627	12,552	0,490	0,039	12,596	0,044
Gumbel-Hougaard	10	63	12,642	12,552	0,429	0,034	12,596	0,044
Gumbel-Hougaard	20	63	12,640	12,548	0,413	0,033	12,596	0,048
Husler e Reiss	0,1	63	12,562	12,611	1,346	0,107	12,596	-0,015
Husler e Reiss	0,5	63	12,568	12,608	1,297	0,103	12,596	-0,012
Husler e Reiss	1	63	12,568	12,581	1,051	0,084	12,596	0,015

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Husler e Reiss	3	63	12,609	12,557	0,601	0,048	12,596	0,039
Husler e Reiss	5	63	12,627	12,551	0,495	0,039	12,596	0,045
Husler e Reiss	10	63	12,637	12,550	0,431	0,034	12,596	0,046
Independência	0	63	12,565	12,611	1,340	0,106	12,596	-0,015
Joe	1	63	12,579	12,622	1,346	0,107	12,596	-0,026
Joe	1,2	63	12,587	12,605	1,222	0,097	12,596	-0,009
Joe	2	63	12,628	12,579	0,923	0,073	12,596	0,017
Joe	5	63	12,676	12,556	0,607	0,048	12,596	0,040
Joe	10	63	12,673	12,551	0,489	0,039	12,596	0,045
Joe	20	63	12,652	12,547	0,441	0,035	12,596	0,049
Normal	-0,9	63	12,632	12,671	1,796	0,142	12,596	-0,075
Normal	-0,5	63	12,605	12,650	1,614	0,128	12,596	-0,054
Normal	-0,1	63	12,587	12,627	1,408	0,111	12,596	-0,031
Normal	0,1	63	12,572	12,616	1,285	0,102	12,596	-0,020
Normal	0,5	63	12,552	12,582	0,999	0,079	12,596	0,014
Normal	0,9	63	12,562	12,554	0,575	0,046	12,596	0,042
Ali-Mikhail-Haq	-1	100	10,559	10,605	1,142	0,108	10,612	0,007
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	100	10,567	10,614	1,105	0,104	10,612	-0,002
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	100	10,560	10,599	1,070	0,101	10,612	0,012
Ali-Mikhail-Haq	0,2	100	10,558	10,599	1,019	0,096	10,612	0,012
Ali-Mikhail-Haq	0,5	100	10,549	10,591	0,973	0,092	10,612	0,020
Ali-Mikhail-Haq	0,9	100	10,514	10,584	0,894	0,084	10,612	0,027
Clayton	-0,9	100	10,612	10,634	1,340	0,126	10,612	-0,023
Clayton	-0,5	100	10,598	10,621	1,206	0,114	10,612	-0,009
Clayton	-0,1	100	10,569	10,599	1,074	0,101	10,612	0,013
Clayton	1	100	10,502	10,583	0,858	0,081	10,612	0,029
Clayton	5	100	10,511	10,566	0,645	0,061	10,612	0,046
Clayton	10	100	10,549	10,564	0,585	0,055	10,612	0,048
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	100	10,582	10,615	1,162	0,109	10,612	-0,003
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	100	10,564	10,605	1,109	0,105	10,612	0,006
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	100	10,563	10,601	1,074	0,101	10,612	0,011
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	100	10,552	10,592	1,023	0,097	10,612	0,019
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	100	10,549	10,589	0,986	0,093	10,612	0,022
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	100	10,541	10,583	0,910	0,086	10,612	0,029
Frank	-5	100	10,595	10,627	1,261	0,119	10,612	-0,016
Frank	-1	100	10,563	10,602	1,109	0,105	10,612	0,010
Frank	-0,3	100	10,559	10,600	1,070	0,101	10,612	0,012
Frank	0,3	100	10,561	10,599	1,025	0,097	10,612	0,012
Frank	1	100	10,558	10,593	0,983	0,093	10,612	0,019
Frank	5	100	10,548	10,573	0,774	0,073	10,612	0,038
Galambos	0,1	100	10,561	10,598	1,048	0,099	10,612	0,013
Galambos	0,5	100	10,569	10,583	0,894	0,084	10,612	0,029
Galambos	1	100	10,586	10,572	0,743	0,070	10,612	0,040
Galambos	3	100	10,609	10,561	0,567	0,054	10,612	0,051
Galambos	5	100	10,613	10,560	0,530	0,050	10,612	0,052

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Galambos	10	100	10,612	10,560	0,510	0,048	10,612	0,051
Gumbel-Hougaard	1	100	10,561	10,601	1,046	0,099	10,612	0,011
Gumbel-Hougaard	1,2	100	10,576	10,592	0,924	0,087	10,612	0,020
Gumbel-Hougaard	2	100	10,602	10,573	0,693	0,066	10,612	0,038
Gumbel-Hougaard	5	100	10,613	10,561	0,539	0,051	10,612	0,050
Gumbel-Hougaard	10	100	10,619	10,563	0,513	0,049	10,612	0,048
Gumbel-Hougaard	20	100	10,614	10,559	0,508	0,048	10,612	0,053
Husler e Reiss	0,1	100	10,553	10,596	1,049	0,099	10,612	0,015
Husler e Reiss	0,5	100	10,558	10,596	1,014	0,096	10,612	0,016
Husler e Reiss	1	100	10,570	10,579	0,854	0,081	10,612	0,032
Husler e Reiss	3	100	10,607	10,563	0,592	0,056	10,612	0,049
Husler e Reiss	5	100	10,616	10,561	0,542	0,051	10,612	0,051
Husler e Reiss	10	100	10,615	10,561	0,513	0,049	10,612	0,051
Independência	0	100	10,555	10,598	1,042	0,098	10,612	0,014
Joe	1	100	10,566	10,605	1,047	0,099	10,612	0,007
Joe	1,2	100	10,582	10,595	0,964	0,091	10,612	0,017
Joe	2	100	10,627	10,579	0,771	0,073	10,612	0,033
Joe	5	100	10,650	10,562	0,594	0,056	10,612	0,049
Joe	10	100	10,633	10,560	0,536	0,051	10,612	0,051
Joe	20	100	10,617	10,557	0,517	0,049	10,612	0,055
Normal	-0,9	100	10,606	10,633	1,344	0,126	10,612	-0,021
Normal	-0,5	100	10,580	10,621	1,223	0,115	10,612	-0,009
Normal	-0,1	100	10,568	10,609	1,088	0,103	10,612	0,003
Normal	0,1	100	10,560	10,601	1,007	0,095	10,612	0,011
Normal	0,5	100	10,551	10,580	0,826	0,078	10,612	0,032
Normal	0,9	100	10,580	10,562	0,582	0,055	10,612	0,049
Ali-Mikhail-Haq	-1	150	8,934	8,974	0,908	0,101	8,993	0,019
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	150	8,941	8,981	0,886	0,099	8,993	0,012
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	150	8,936	8,971	0,863	0,096	8,993	0,023
Ali-Mikhail-Haq	0,2	150	8,936	8,972	0,830	0,093	8,993	0,021
Ali-Mikhail-Haq	0,5	150	8,928	8,966	0,801	0,089	8,993	0,028
Ali-Mikhail-Haq	0,9	150	8,906	8,962	0,752	0,084	8,993	0,031
Clayton	-0,9	150	8,973	8,993	1,039	0,116	8,993	0,001
Clayton	-0,5	150	8,964	8,985	0,951	0,106	8,993	0,008
Clayton	-0,1	150	8,940	8,970	0,864	0,096	8,993	0,023
Clayton	1	150	8,898	8,962	0,731	0,082	8,993	0,032
Clayton	5	150	8,912	8,951	0,604	0,068	8,993	0,043
Clayton	10	150	8,943	8,950	0,573	0,064	8,993	0,044
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	150	8,952	8,982	0,922	0,103	8,993	0,012
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	150	8,938	8,975	0,888	0,099	8,993	0,019
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	150	8,936	8,971	0,866	0,096	8,993	0,022
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	150	8,930	8,966	0,834	0,093	8,993	0,027
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	150	8,930	8,965	0,809	0,090	8,993	0,028
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	150	8,923	8,960	0,761	0,085	8,993	0,033
Frank	-5	150	8,961	8,989	0,988	0,110	8,993	0,004

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Frank	-1	150	8,938	8,972	0,889	0,099	8,993	0,021
Frank	-0,3	150	8,935	8,971	0,863	0,096	8,993	0,022
Frank	0,3	150	8,936	8,971	0,833	0,093	8,993	0,023
Frank	1	150	8,938	8,967	0,807	0,090	8,993	0,026
Frank	5	150	8,933	8,955	0,680	0,076	8,993	0,039
Galambos	0,1	150	8,937	8,971	0,848	0,095	8,993	0,022
Galambos	0,5	150	8,947	8,961	0,748	0,084	8,993	0,033
Galambos	1	150	8,961	8,954	0,657	0,073	8,993	0,040
Galambos	3	150	8,971	8,947	0,559	0,062	8,993	0,047
Galambos	5	150	8,975	8,947	0,539	0,060	8,993	0,047
Galambos	10	150	8,973	8,947	0,529	0,059	8,993	0,046
Gumbel-Hougaard	1	150	8,937	8,973	0,847	0,094	8,993	0,021
Gumbel-Hougaard	1,2	150	8,950	8,967	0,768	0,086	8,993	0,026
Gumbel-Hougaard	2	150	8,971	8,956	0,628	0,070	8,993	0,038
Gumbel-Hougaard	5	150	8,975	8,948	0,544	0,061	8,993	0,046
Gumbel-Hougaard	10	150	8,979	8,950	0,531	0,059	8,993	0,043
Gumbel-Hougaard	20	150	8,974	8,946	0,529	0,059	8,993	0,047
Husler e Reiss	0,1	150	8,932	8,969	0,850	0,095	8,993	0,025
Husler e Reiss	0,5	150	8,935	8,969	0,826	0,092	8,993	0,024
Husler e Reiss	1	150	8,950	8,959	0,724	0,081	8,993	0,035
Husler e Reiss	3	150	8,971	8,947	0,570	0,064	8,993	0,046
Husler e Reiss	5	150	8,978	8,947	0,545	0,061	8,993	0,046
Husler e Reiss	10	150	8,975	8,947	0,531	0,059	8,993	0,046
Independência	0	150	8,933	8,971	0,844	0,094	8,993	0,023
Joe	1	150	8,938	8,976	0,848	0,094	8,993	0,018
Joe	1,2	150	8,955	8,969	0,794	0,088	8,993	0,024
Joe	2	150	8,988	8,959	0,672	0,075	8,993	0,034
Joe	5	150	8,998	8,947	0,572	0,064	8,993	0,046
Joe	10	150	8,985	8,947	0,541	0,061	8,993	0,047
Joe	20	150	8,973	8,944	0,532	0,060	8,993	0,050
Normal	-0,9	150	8,969	8,992	1,042	0,116	8,993	0,002
Normal	-0,5	150	8,948	8,984	0,962	0,107	8,993	0,009
Normal	-0,1	150	8,943	8,978	0,875	0,097	8,993	0,015
Normal	0,1	150	8,938	8,973	0,822	0,092	8,993	0,021
Normal	0,5	150	8,935	8,959	0,710	0,079	8,993	0,034
Normal	0,9	150	8,958	8,948	0,567	0,063	8,993	0,046
Ali-Mikhail-Haq	-1	200	7,886	7,922	0,776	0,098	7,944	0,022
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	200	7,892	7,928	0,761	0,096	7,944	0,016
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	200	7,888	7,919	0,744	0,094	7,944	0,025
Ali-Mikhail-Haq	0,2	200	7,889	7,921	0,721	0,091	7,944	0,023
Ali-Mikhail-Haq	0,5	200	7,883	7,916	0,701	0,089	7,944	0,028
Ali-Mikhail-Haq	0,9	200	7,866	7,914	0,667	0,084	7,944	0,030
Clayton	-0,9	200	7,915	7,935	0,870	0,110	7,944	0,009
Clayton	-0,5	200	7,910	7,930	0,807	0,102	7,944	0,014
Clayton	-0,1	200	7,891	7,918	0,745	0,094	7,944	0,025

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Clayton	1	200	7,861	7,914	0,652	0,082	7,944	0,030
Clayton	5	200	7,875	7,906	0,567	0,072	7,944	0,038
Clayton	10	200	7,899	7,905	0,547	0,069	7,944	0,039
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	200	7,899	7,927	0,787	0,099	7,944	0,016
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	200	7,890	7,922	0,762	0,096	7,944	0,022
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	200	7,887	7,919	0,746	0,094	7,944	0,024
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	200	7,882	7,916	0,724	0,091	7,944	0,028
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	200	7,884	7,915	0,706	0,089	7,944	0,028
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	200	7,879	7,911	0,672	0,085	7,944	0,033
Frank	-5	200	7,907	7,933	0,834	0,105	7,944	0,011
Frank	-1	200	7,888	7,920	0,763	0,096	7,944	0,023
Frank	-0,3	200	7,888	7,920	0,744	0,094	7,944	0,024
Frank	0,3	200	7,888	7,919	0,723	0,091	7,944	0,024
Frank	1	200	7,891	7,917	0,705	0,089	7,944	0,026
Frank	5	200	7,888	7,908	0,618	0,078	7,944	0,036
Galambos	0,1	200	7,889	7,920	0,734	0,093	7,944	0,024
Galambos	0,5	200	7,899	7,912	0,662	0,084	7,944	0,032
Galambos	1	200	7,908	7,907	0,601	0,076	7,944	0,037
Galambos	3	200	7,914	7,902	0,537	0,068	7,944	0,042
Galambos	5	200	7,917	7,902	0,523	0,066	7,944	0,041
Galambos	10	200	7,914	7,903	0,517	0,065	7,944	0,040
Gumbel-Hougaard	1	200	7,891	7,921	0,733	0,093	7,944	0,022
Gumbel-Hougaard	1,2	200	7,899	7,918	0,677	0,086	7,944	0,026
Gumbel-Hougaard	2	200	7,915	7,909	0,581	0,073	7,944	0,035
Gumbel-Hougaard	5	200	7,917	7,903	0,526	0,067	7,944	0,040
Gumbel-Hougaard	10	200	7,921	7,906	0,519	0,066	7,944	0,038
Gumbel-Hougaard	20	200	7,917	7,902	0,518	0,066	7,944	0,042
Husler e Reiss	0,1	200	7,885	7,917	0,735	0,093	7,944	0,026
Husler e Reiss	0,5	200	7,888	7,919	0,717	0,091	7,944	0,025
Husler e Reiss	1	200	7,900	7,911	0,647	0,082	7,944	0,033
Husler e Reiss	3	200	7,915	7,902	0,543	0,069	7,944	0,042
Husler e Reiss	5	200	7,920	7,903	0,527	0,067	7,944	0,041
Husler e Reiss	10	200	7,917	7,903	0,518	0,066	7,944	0,040
Independência	0	200	7,886	7,920	0,730	0,092	7,944	0,024
Joe	1	200	7,890	7,924	0,734	0,093	7,944	0,020
Joe	1,2	200	7,903	7,919	0,695	0,088	7,944	0,025
Joe	2	200	7,928	7,912	0,610	0,077	7,944	0,032
Joe	5	200	7,933	7,902	0,545	0,069	7,944	0,041
Joe	10	200	7,922	7,902	0,524	0,066	7,944	0,042
Joe	20	200	7,915	7,900	0,519	0,066	7,944	0,044
Normal	-0,9	200	7,912	7,934	0,873	0,110	7,944	0,010
Normal	-0,5	200	7,897	7,929	0,815	0,103	7,944	0,015
Normal	-0,1	200	7,895	7,926	0,753	0,095	7,944	0,018
Normal	0,1	200	7,890	7,921	0,716	0,090	7,944	0,023
Normal	0,5	200	7,890	7,911	0,637	0,081	7,944	0,032

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Normal	0,9	200	7,908	7,903	0,542	0,069	7,944	0,041
Ali-Mikhail-Haq	-1	250	7,138	7,170	0,688	0,096	7,192	0,022
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	250	7,143	7,175	0,678	0,094	7,192	0,017
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	250	7,140	7,168	0,665	0,093	7,192	0,025
Ali-Mikhail-Haq	0,2	250	7,140	7,170	0,647	0,090	7,192	0,022
Ali-Mikhail-Haq	0,5	250	7,136	7,165	0,632	0,088	7,192	0,027
Ali-Mikhail-Haq	0,9	250	7,122	7,164	0,607	0,085	7,192	0,028
Clayton	-0,9	250	7,162	7,180	0,761	0,106	7,192	0,013
Clayton	-0,5	250	7,157	7,177	0,713	0,099	7,192	0,016
Clayton	-0,1	250	7,142	7,167	0,665	0,093	7,192	0,025
Clayton	1	250	7,120	7,165	0,596	0,083	7,192	0,028
Clayton	5	250	7,133	7,158	0,534	0,075	7,192	0,034
Clayton	10	250	7,151	7,158	0,520	0,073	7,192	0,035
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	250	7,149	7,175	0,697	0,097	7,192	0,018
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	250	7,141	7,170	0,679	0,095	7,192	0,022
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	250	7,138	7,168	0,667	0,093	7,192	0,024
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	250	7,135	7,166	0,650	0,091	7,192	0,027
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	250	7,137	7,165	0,637	0,089	7,192	0,027
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	250	7,134	7,162	0,610	0,085	7,192	0,031
Frank	-5	250	7,154	7,179	0,733	0,102	7,192	0,014
Frank	-1	250	7,139	7,169	0,679	0,095	7,192	0,023
Frank	-0,3	250	7,139	7,168	0,665	0,093	7,192	0,024
Frank	0,3	250	7,140	7,168	0,648	0,090	7,192	0,024
Frank	1	250	7,143	7,167	0,635	0,089	7,192	0,025
Frank	5	250	7,141	7,159	0,571	0,080	7,192	0,033
Galambos	0,1	250	7,141	7,169	0,657	0,092	7,192	0,024
Galambos	0,5	250	7,148	7,163	0,602	0,084	7,192	0,030
Galambos	1	250	7,156	7,159	0,558	0,078	7,192	0,033
Galambos	3	250	7,159	7,155	0,512	0,072	7,192	0,037
Galambos	5	250	7,162	7,156	0,502	0,070	7,192	0,037
Galambos	10	250	7,160	7,156	0,498	0,070	7,192	0,036
Gumbel-Hougaard	1	250	7,141	7,170	0,656	0,092	7,192	0,022
Gumbel-Hougaard	1,2	250	7,149	7,168	0,614	0,086	7,192	0,025
Gumbel-Hougaard	2	250	7,161	7,161	0,543	0,076	7,192	0,032
Gumbel-Hougaard	5	250	7,163	7,157	0,504	0,070	7,192	0,036
Gumbel-Hougaard	10	250	7,167	7,159	0,499	0,070	7,192	0,034
Gumbel-Hougaard	20	250	7,162	7,156	0,499	0,070	7,192	0,037
Husler e Reiss	0,1	250	7,137	7,166	0,659	0,092	7,192	0,026
Husler e Reiss	0,5	250	7,141	7,168	0,644	0,090	7,192	0,024
Husler e Reiss	1	250	7,150	7,162	0,592	0,083	7,192	0,030
Husler e Reiss	3	250	7,160	7,155	0,515	0,072	7,192	0,038
Husler e Reiss	5	250	7,166	7,156	0,505	0,071	7,192	0,037
Husler e Reiss	10	250	7,162	7,156	0,499	0,070	7,192	0,036
Independência	0	250	7,138	7,169	0,653	0,091	7,192	0,024
Joe	1	250	7,142	7,172	0,657	0,092	7,192	0,020

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Joe	1,2	250	7,153	7,168	0,628	0,088	7,192	0,024
Joe	2	250	7,171	7,163	0,564	0,079	7,192	0,029
Joe	5	250	7,173	7,155	0,517	0,072	7,192	0,037
Joe	10	250	7,165	7,155	0,503	0,070	7,192	0,037
Joe	20	250	7,160	7,153	0,499	0,070	7,192	0,040
Normal	-0,9	250	7,158	7,179	0,763	0,106	7,192	0,013
Normal	-0,5	250	7,147	7,176	0,719	0,100	7,192	0,017
Normal	-0,1	250	7,145	7,174	0,672	0,094	7,192	0,019
Normal	0,1	250	7,142	7,170	0,643	0,090	7,192	0,022
Normal	0,5	250	7,143	7,162	0,585	0,082	7,192	0,030
Normal	0,9	250	7,156	7,156	0,515	0,072	7,192	0,037
Ali-Mikhail-Haq	-1	300	6,569	6,599	0,625	0,095	6,621	0,022
Ali-Mikhail-Haq	-0,5	300	6,574	6,603	0,617	0,093	6,621	0,017
Ali-Mikhail-Haq	-0,2	300	6,570	6,597	0,607	0,092	6,621	0,024
Ali-Mikhail-Haq	0,2	300	6,572	6,599	0,593	0,090	6,621	0,022
Ali-Mikhail-Haq	0,5	300	6,568	6,595	0,581	0,088	6,621	0,026
Ali-Mikhail-Haq	0,9	300	6,557	6,594	0,562	0,085	6,621	0,027
Clayton	-0,9	300	6,589	6,606	0,683	0,103	6,621	0,014
Clayton	-0,5	300	6,586	6,604	0,645	0,098	6,621	0,016
Clayton	-0,1	300	6,572	6,596	0,607	0,092	6,621	0,024
Clayton	1	300	6,556	6,595	0,553	0,084	6,621	0,026
Clayton	5	300	6,567	6,589	0,505	0,077	6,621	0,031
Clayton	10	300	6,581	6,589	0,495	0,075	6,621	0,031
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-1	300	6,578	6,603	0,632	0,096	6,621	0,018
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,5	300	6,573	6,599	0,618	0,094	6,621	0,022
Farlie-Gumbel-Morgenstern	-0,2	300	6,570	6,597	0,609	0,092	6,621	0,024
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,2	300	6,568	6,595	0,596	0,090	6,621	0,026
Farlie-Gumbel-Morgenstern	0,5	300	6,569	6,595	0,585	0,089	6,621	0,026
Farlie-Gumbel-Morgenstern	1	300	6,565	6,592	0,564	0,086	6,621	0,029
Frank	-5	300	6,582	6,606	0,661	0,100	6,621	0,015
Frank	-1	300	6,570	6,598	0,619	0,094	6,621	0,023
Frank	-0,3	300	6,570	6,597	0,607	0,092	6,621	0,023
Frank	0,3	300	6,571	6,597	0,593	0,090	6,621	0,023
Frank	1	300	6,574	6,596	0,583	0,088	6,621	0,024
Frank	5	300	6,573	6,590	0,534	0,081	6,621	0,030
Galambos	0,1	300	6,572	6,598	0,601	0,091	6,621	0,023
Galambos	0,5	300	6,577	6,593	0,557	0,085	6,621	0,028
Galambos	1	300	6,585	6,590	0,523	0,079	6,621	0,031
Galambos	3	300	6,586	6,587	0,488	0,074	6,621	0,034
Galambos	5	300	6,589	6,587	0,481	0,073	6,621	0,033
Galambos	10	300	6,587	6,588	0,478	0,072	6,621	0,033
Gumbel-Hougaard	1	300	6,572	6,599	0,600	0,091	6,621	0,022
Gumbel-Hougaard	1,2	300	6,578	6,597	0,567	0,086	6,621	0,024
Gumbel-Hougaard	2	300	6,588	6,592	0,512	0,078	6,621	0,029
Gumbel-Hougaard	5	300	6,589	6,588	0,482	0,073	6,621	0,033

Copula	β (ou ρ)	D (mm)	Mediana (MPa)	Média (MPa)	Desvio- padrão (MPa)	Coef. de variação	$\hat{\sigma}_N$ (MPa)	Média - $\hat{\sigma}_N$ (MPa)
Gumbel-Hougaard	10	300	6,593	6,590	0,479	0,073	6,621	0,030
Gumbel-Hougaard	20	300	6,589	6,587	0,479	0,073	6,621	0,033
Husler e Reiss	0,1	300	6,569	6,596	0,602	0,091	6,621	0,025
Husler e Reiss	0,5	300	6,572	6,597	0,591	0,090	6,621	0,023
Husler e Reiss	1	300	6,579	6,593	0,549	0,083	6,621	0,028
Husler e Reiss	3	300	6,586	6,586	0,490	0,074	6,621	0,035
Husler e Reiss	5	300	6,592	6,587	0,483	0,073	6,621	0,033
Husler e Reiss	10	300	6,588	6,588	0,478	0,073	6,621	0,033
Independência	0	300	6,570	6,598	0,598	0,091	6,621	0,023
Joe	1	300	6,573	6,601	0,601	0,091	6,621	0,020
Joe	1,2	300	6,582	6,598	0,578	0,088	6,621	0,023
Joe	2	300	6,597	6,593	0,528	0,080	6,621	0,027
Joe	5	300	6,598	6,587	0,493	0,075	6,621	0,034
Joe	10	300	6,591	6,587	0,481	0,073	6,621	0,034
Joe	20	300	6,586	6,585	0,478	0,073	6,621	0,036
Normal	-0,9	300	6,585	6,606	0,684	0,104	6,621	0,015
Normal	-0,5	300	6,576	6,603	0,649	0,098	6,621	0,018
Normal	-0,1	300	6,575	6,602	0,613	0,093	6,621	0,019
Normal	0,1	300	6,572	6,599	0,590	0,089	6,621	0,022
Normal	0,5	300	6,574	6,593	0,545	0,083	6,621	0,028
Normal	0,9	300	6,584	6,587	0,491	0,074	6,621	0,033

C – CÓDIGO EM R UTILIZADO PARA A REALIZAÇÃO DAS SIMULAÇÕES E ANÁLISE ESTATÍSTICA

```
require(copula)
require(VineCopula)
require(rgl)

set.seed(2546)

# DADOS DO BRAND: W em Newton e as demais medidas em mm
Wd <- c(530.7, 527.3, 529.2, 192.3, 193.7, 189.8, 40.6, 41.0, 41.9)
Ld <- c(1105, 1105, 1104, 700.0, 700.0, 700.0, 349.0, 347.5, 347.5)
Sd <- c(1000, 1006, 1004, 601, 602, 601, 252, 249, 248)
Dd <- c(255, 260, 258, 152, 153, 154, 63.0, 63.5, 65.5)
td <- c(80.0, 79.0, 79.0, 79.0, 79.0, 79.0, 80.0, 80.0, 79.5)
a0 <- c(88.0, 95.0, 88.5, 58.0, 53.0, 55.0, 22.5, 22.0, 24.5)
#Pult <- rep(0,9)

alpha0 <- a0/Dd

copulas <- c("Independência", "Clayton", "Frank", "Ali-Mikhail-Haq", "Joe", "Gumbel-Hougaard",
"Galambos", "Husler e Reiss", "Farlie-Gumbel-Morgenstern", "Normal")

beta <- list(0, c(-0.9, -0.5, -0.1, 1, 5, 10), c(-5, -1, -0.3, 0.3, 1, 5),
            c(-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 0.9), c(1, 1.2, 2, 5, 10, 20),
            c(1, 1.2, 2, 5, 10, 20), c(0, 0.1, 0.5, 3, 5, 10), c(0.1, 0.5, 1, 3, 5, 10),
            c(-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 1), c(-0.9,-0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 0.9))
names(beta) <- copulas

cores <- c("black", "red", "blue", "green", "magenta", "orange", "darkgray", "pink", "brown",
"darkcyan")

x_bar <- 70.96 # Valores calculados por Gomes(2016) para Gf e cf
s <- 12.77
mu_Gf <- log(x_bar^2/sqrt(x_bar^2+s^2))
sig_Gf <- sqrt(log(1+s^2/x_bar^2))

x_bar <- 31
s2 <- 6.8
mu_cf <- log(x_bar^2/sqrt(x_bar^2+s^2))
sig_cf <- sqrt(log(1+s^2/x_bar^2))

##### DENSIDADE DE CADA CÓPULA #####

for (j in 1:10){
for (k in 1:length(beta[[j]])) {
```

```

if (j == 1) {cop <- indepCopula(dim = 2)}
if (j == 2) {cop <- claytonCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 3) {cop <- frankCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 5) {cop <- joeCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 6) {cop <- gumbelCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 7) {cop <- galambosCopula( param = beta[[j]][k])}
if (j == 8) {cop <- huslerReissCopula( beta[[j]][k])}
if (j == 9) {cop <- fgmCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 10) {cop <- normalCopula(beta[[j]][k], dim = 2, dispstr = "un")}

# Verificar o formato da densidade da cópula
par(mai = c(0.8,0.8,0,0), oma = c(0,0,0,0))
persp(cop, dCopula, theta = -30, phi = 30, expand = 0.5, col = gray(0.95),
      ltheta = 60, shade = 0.75, ticktype = "detailed",
      xlab = "u", ylab = "v", zlab = "\n Densidade", cex.main = 2,
      cex.lab = 2, cex.axis = 1.5 )

if (j < 10){title(xlab = bquote(paste(" ", .(letters[k]), " " , beta, " = ", .(beta[[j]][k]), " ", sep="")),
cex.lab = 2)}
if (j==10){title(xlab = bquote(paste(" ", .(letters[k]), " " , rho, " = ", .(beta[[j]][k]), " ", sep="")),
cex.lab = 2)}
}}

```

SIMULA PAR Gf,cf DE ACORDO COM A CÓPULA, VARIANDO O PARÂMETRO

```

for (j in 1:10){
for (k in 1:length(beta[[j]] )){

if (j == 1) {cop <- indepCopula(dim = 2)}
if (j == 2) {cop <- claytonCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 3) {cop <- frankCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 4) {cop <- amhCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 5) {cop <- joeCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 6) {cop <- gumbelCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 7) {cop <- galambosCopula( param = beta[[j]][k])}
if (j == 8) {cop <- huslerReissCopula( beta[[j]][k])}
if (j == 9) {cop <- fgmCopula( beta[[j]][k], dim = 2)}
if (j == 10) {cop <- normalCopula(beta[[j]][k], dim = 2, dispstr = "un")}

u <- rCopula(100000, cop)
Gf <- qlnorm(u[,1], meanlog = mu_Gf, sdlog = sig_Gf)
cf <- qlnorm(u[,2], meanlog = mu_cf, sdlog = sig_cf)

nome <- paste("Simulação ", j, " ", copulas[j], " ", k, " - beta = ", beta[[j]][k], sep = "")

```

```
write.table(data.frame(Gf, cf), file = paste(nome, ".txt"), sep = ";", row.names = FALSE, col.names = TRUE)
```

```
## Gráficos de dispersão Gf x cf
par(mai = c(1.5,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(Gf, cf, pch = ".", cex = 2,
      xlab = expression(paste(G[f], " (N/m)")), ylab = expression(paste(c[f], " (mm)")), cex.lab =
2, cex.axis = 1.5)
```

```
if (j < 10){title(sub= bquote(paste(" ", .(letters[k]), " " , beta, " = ", .(beta[[j]][k]), sep="")), cex.sub
= 2, line = 6)}
```

```
if (j==10){title(sub= bquote(paste(" ", .(letters[k]), " " , rho, " = ", .(beta[[j]][k]), sep="")), cex.sub
= 2, line = 6)}
```

```
}}
```

```
##### DENSIDADE NÃO PARAMÉTRICA DE SIGMA_N #####
```

```
m <- 1
E <- 34.82 #GPa
for (i in c(2, 4, 7) ) {
```

```
D <- Dd[i]
S <- Sd[i]
alpha <- alpha0[i]
c_n <- 1.5*S/D
```

```
h <- 1/sqrt(pi) * (1.99 - alpha*(1-alpha)*(3.15 - 3.93*alpha + 3.7*alpha^2)) / ((1+2*alpha)*(1-
alpha)^1.5)
g <- pi*alpha*c_n*h
g1 <- sqrt(pi)*alpha*c_n* ( (14.8*alpha^3-22.89*alpha^2+14.16*alpha-3.15)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^1.5 + 1.5*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^2.5 - 2*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)^2/(1-
alpha)^1.5 )
```

```
simul <- read.table("Simulação 1 Independência 1 - beta = 0.txt", header = TRUE, sep = ";")
Gf <- simul[[1]]
cf <- simul[[2]]
sigma_N <- c_n*sqrt( Gf*E/(D*g + cf*g1 ) )
graf_ind <- density(sigma_N)
```

```
lim_leg <- c(8, 9.5, 12.5)
limitex <- c(11.5, 14.5, 20)
```

```
if (i == 2) {limitey <- rep(0.9, 10)}
if (i == 4) {limitey <- c(1, 0.8, 0.6, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.6, 0.8)}
```

```

if (i == 7) {limitey <- c(1, 0.5, 0.4, 1.6, 1.6, 1.4, 1.3, 0.4, 0.8)}

for (j in 2:10){

nome <- paste("Sigma_N ", j, " ", copulas[j], " D = ", D, sep = "")

par(mai = c(1.5,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(graf_ind, type = "l", xlim = c(4,limitex[m]), ylim = c(0,limitey[j-1]), lwd = 2, main = "",
      xlab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")), ylab = "Densidade", cex.lab = 2,
      cex.axis = 1.5)

for (k in 1:length(beta[[j]])) {

nome2 <- paste("Simulação ", j, " ", copulas[j], " ", k, " - beta = ", beta[[j]][k], ".txt", sep = "")
simul <- read.table(nome2, header = TRUE, sep = ";")

Gf <- simul[[1]]
cf <- simul[[2]]

sigma_N <- c_n*sqrt( Gf*E/(D*g + cf*g1 ) )
lines(density(sigma_N), type = "l", col = cores[k+1], lty = k+1, lwd = 1.5)
}

leg <- "Independência"
for (k in 1:length(beta[[j]])) { leg <- c(leg, bquote(paste(beta, " = ", .(beta[[j]][k]), sep="")))}

test <- legend(x = lim_leg[m], y = limitey[j-1], leg, col = c("black", cores[1:length(beta[[j]])]),
              lty = 1:7, bty = "n", cex = 1, lwd = 1, plot = FALSE)

legend(x = test$text$x[1], y = test$text$y[1], leg[[1]], col = c("black"),
       lty = 1, bty = "n", cex = 1, lwd = 2)
for (k in 1:length(beta[[j]])) { legend(x = test$text$x[k+1], y = test$text$y[k+1], leg[[k+1]], col =
cores[k+1],
       lty = k+1, bty = "n", cex = 1, lwd = 1.5)}

if (m == 3) letra <- 1
if (m == 2) letra <- 2
if (m == 1) letra <- 3

title(sub= paste("(", letters[letra], ") ", "D = ", D, " (mm)", sep=""), cex.sub = 2, line = 6)
}
m <- m + 1
}

```

```
##### GRÁFICOS JUNTOS, VARIANDO O D #####
```

```
lim_leg <- c(12.5)
```

```
limitex <- c(20)
```

```
limitey <- rep(1.65, 9)
```

```
for (j in 2:10){
```

```
  cord_tex <- matrix(numeric(0), ncol = 2)
```

```
  for (i in c(2, 4, 7) ) {
```

```
    D <- Dd[i]
```

```
    nome <- paste("Sigma_N 1 Independência D = ", D, ".txt", sep = "")
```

```
    sigma_N <- read.table(nome, header = TRUE, sep = ";")[[1]]
```

```
    graf_ind <- density(sigma_N)
```

```
    if (i == 2){
```

```
      par(mai = c(1,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
```

```
      plot(graf_ind, type = "l", xlim = c(4,limitex[1]), ylim = c(0,limitey[j-1]), lwd = 2, main = "",  
           xlab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")), ylab = "Densidade", cex.lab = 2,  
           cex.axis = 1.5)
```

```
    }
```

```
    if (i > 2){
```

```
      lines(graf_ind, type = "l", xlim = c(4,limitex[1]), ylim = c(0,limitey[j-1]), lwd = 2, main = "",  
            cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)
```

```
    }
```

```
  for (k in 1:length(beta[[j]])) {
```

```
    nome <- paste("Sigma_N ", j, " ", copulas[j], " D = ", D, " ", k, " - beta = ", beta[[j]][k], ".txt", sep =  
                "")
```

```
    sigma_N <- read.table(nome, header = TRUE, sep = ";")[[1]]
```

```
    lines(maior <- density(sigma_N), type = "l", col = cores[k+1], lty = k+1, lwd = 1.5)
```

```
  }
```

```
  cord_tex <- rbind(cord_tex, c(median(graf_ind$x)-0.2,max(maior$y)+0.04))
```

```
  lines(maior <- graf_ind, type = "l", col = "black", lty = 1, lwd = 2)
```

```
  }
```

```
  leg <- "Independência"
```

```
  for (k in 1:length(beta[[j]])) { leg <- c(leg, bquote(paste(beta, " = ", .(beta[[j]][k]), sep=""))) }
```

```
  test <- legend(x = lim_leg[1], y = limitey[j-1], leg, col = c("black", cores[1:length(beta[[j]])]),  
                lty = 1:7, bty = "n", cex = 1, lwd = 1, plot = FALSE)
```

```
  legend(x = test$text$x[1], y = test$text$y[1], leg[[1]], col = c("black"),  
         lty = 1, bty = "n", cex = 1, lwd = 2)
```

```
for (k in 1:length(beta[[j]]) ){ legend(x = test$text$x[k+1], y = test$text$y[k+1], leg[[k+1]], col =
cores[k+1],
lty = k+1, bty = "n", cex = 1, lwd = 1.5)}
```

```
if (j == 10) {cord_tex[2,2] <- cord_tex[2,2] - 0.02; cord_tex[1,2] <- cord_tex[1,2] + 0.03}
if (j >= 5 & j <= 8) {cord_tex[2,2] <- cord_tex[2,2] + 0.03}
text(labels = paste("D = ",Dd[c(2,4,7)]),cord_tex)
}
```

```
##### MÉDIAS DE SIGMA_N x D #####
```

```
E <- 34.82 #GPa
```

```
Ds <- c(63, 100, 150, 200, 250, 300)
```

```
Ss <- 4*Ds
```

```
#Ls <- Ss + 100
```

```
alpha <- 0.35
```

```
# Valores médios calculados por Gomes(2016) para Gf e cf
```

```
Gf_bar <- 70.96
```

```
Gf_sd <- 12.77
```

```
cf_bar <- 31
```

```
cf_sd <- 6.8
```

```
c_n <- 1.5*Ss/Ds
```

```
h <- 1/sqrt(pi) * (1.99 - alpha*(1-alpha)*(3.15 - 3.93*alpha + 3.7*alpha^2)) / ((1+2*alpha)*(1-
alpha)^1.5)
```

```
g <- pi*alpha*c_n*h
```

```
g1 <- sqrt(pi)*alpha*c_n* ( (14.8*alpha^3-22.89*alpha^2+14.16*alpha-3.15)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^1.5 + 1.5*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^2.5 - 2*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)^2/(1-
alpha)^1.5 )
```

```
SIGMA_N <- c_n*sqrt( Gf_bar*E/(Ds*g + cf_bar*g1) )
```

```
SIGMA_N <- cbind(Ds, SIGMA_N)
```

```
resumo <- matrix(numeric(0), ncol = 11)
```

```
for (i in 1:length(Ds)) {
```

```
D <- Ds[i]
```

```
S <- Ss[i]
```

```
c_n <- 1.5*S/D
```

```
h <- 1/sqrt(pi) * (1.99 - alpha*(1-alpha)*(3.15 - 3.93*alpha + 3.7*alpha^2)) / ((1+2*alpha)*(1-
alpha)^1.5)
```

```
g <- pi*alpha*c_n*h
```

```

g1 <- sqrt(pi)*alpha*c_n* ( (14.8*alpha^3-22.89*alpha^2+14.16*alpha-3.15)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^1.5 + 1.5*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^2.5 -2*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)^2/(1-
alpha)^1.5 )

for (j in 1:10){
for (k in 1:length(beta[[j]])) {

nome2 <- paste("Simulação ", j, " ", copulas[j], " ", k, " - beta = ", beta[[j]][k], " .txt", sep = "")
simul <- read.table(nome2, header = TRUE, sep = ";")

Gf <- simul[[1]]
cf <- simul[[2]]

sigma_N <- c_n*sqrt( Gf*E/(D*g + cf*g1 ) )

# O data frame "resumo" contém todos as estatísticas descritivas e de dispersão para os vários
#valores de D, cópulas e seus parâmetros

resumo <- rbind(resumo, data.frame(j = j, copula = copulas[j], k = k, beta = beta[[j]][k], D , alpha,
t(matrix(summary(sigma_N))), desviop = sd(sigma_N)))
}
}}
names(resumo)[7:12] <- names(summary(1))
resumo$CV <- resumo$desviop/resumo$Mean

resumo$sigma_N <- matrix(numeric(0), nrow = nrow(resumo))
for (i in 1:6) { resumo$sigma_N[((i-1)*55+1):(55*i)] <- SIGMA_N[i,2] }
resumo$dif <- resumo$sigma_N - resumo$Mean

write.table(resumo , file = "Resumo de Sigma_N.csv", sep = ";", dec = ",", row.names = FALSE,
col.names = TRUE)

##### GRÁFICO LOG(D) X MÉDIA DE Sigma_N #####

Ds <- c(63, 100, 150, 200, 250, 300)
Ss <- 4*Ds
alpha <- 0.35

Gf_bar <- 70.96
Gf_sd <- 12.77
cf_bar <- 31
cf_sd <- 6.8

c_n <- 1.5*Ss/Ds
h <- 1/sqrt(pi) * (1.99 - alpha*(1-alpha)*(3.15 - 3.93*alpha + 3.7*alpha^2)) / ((1+2*alpha)*(1-
alpha)^1.5)

```

```

g <- pi*alpha*c_n*h
g1 <- sqrt(pi)*alpha*c_n* ( (14.8*alpha^3-22.89*alpha^2+14.16*alpha-3.15)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^1.5 + 1.5*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)/(1-
alpha)^2.5 -2*(1.99-3.15*alpha+7.08*alpha^2-7.63*alpha^3+3.7*alpha^4)/(1+2*alpha)^2/(1-
alpha)^1.5 )

SIGMA_N <- c_n*sqrt( Gf_bar*E/(Ds*g + cf_bar*g1 ) )
SIGMA_N <- cbind(Ds, SIGMA_N)

par(mai = c(1,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(SIGMA_N[,1], y = SIGMA_N[,2], col = "red", lty = 1, type = "l", xaxt = "n",
      xlog = TRUE, , log = "x", cex.lab = 2, cex.axis = 1.5, xlim = c(60, 320),
      xlab = "D (mm)", ylab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")))
axis(1, at = Ds, cex.axis = 1.5)
points(SIGMA_N[,1], SIGMA_N[,2], col = "red", cex = 4, pch = ".")
points(resumo$D, resumo$Mean, pch = ".", cex = 1)

legend(x = 180, y = 12, legend = c(expression(hat(sigma[N])), "Cópulas"),
      col = c("red", "black"), bty = "n", lty = c(1,0), pch = c(NA, "."),
      cex = 1.5, pt.cex = c(NA, 3))

##### GRÁFICOS DE COMPARAÇÃO DO VALOR MÉDIO DE SIGMA_N #####
##### COM TODAS AS CÓPULAS E PARÂMETROS

#### MÉDIA e MEDIANA

Ds <- c(63, 100, 150, 200, 250, 300)
for (i in 1:6) {
  mediana <- resumo$Median[((i-1)*55+1):(55*i)]
  media <- resumo$Mean[((i-1)*55+1):(55*i)]
  x1 <- density(media)
  x2 <- density(mediana)

  y <- range(c(x1$y, x2$y))

  nome <- paste("Comparativo Sigma_N com média e mediana (todas cópulas), D = ", Ds[i],
  ".jpg", sep = "")
  par(mai = c(1.5,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))

  if (i <= 3){
    plot(x1, xlab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")), ylab = "Densidade", main = "",
          xlim = range(c(x1$x,x2$x)), ylim = c(0,y[2]), cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)}

  if (i > 3){
    plot(x1, xlab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")), ylab = "Densidade", main = "",

```

```
xlim = c(min(c(x1$X,x2$X))-0.01, SIGMA_N[i,2] + (0.1)^i), ylim = c(0,y[2]), cex.lab = 2,
cex.axis = 1.5)}
```

```
lines(x2, col = "blue", lty = 2)
abline(v = SIGMA_N[i,2], col = "red", lwd = 4)
title(sub= paste("(", letters[i], ") ", "D = ", Ds[i], " (mm)", sep=""), cex.sub = 2, line = 6)
```

```
legend(x = min(c(x1$X,x2$X)), y = y[2], legend = c("Média", "Mediana",
expression(hat(sigma[N]))), col = c("black", "blue", "red"),
lty = c(1,2,1), bty = "n", cex = 1, lwd = c(1,1,4))
```

```
}
```

```
### MÉDIAS E MEDIANAS PARA AS SIMULAÇÕES DE BOM COMPORTAMENTO ###
## Selecionar no .csv os casos de maior interesse
```

```
cj <- c(5,6,7,8,10)
beta <- list(0, 0, 0, 0, c(2, 5), c(2, 5), c(1, 3), c(3, 5), 0, c(0.5,0.9))
names(beta) <- copulas
indice <- list(0,0,0,0,c(3,4),c(3,4),c(3,4),c(4,5),0,6)
```

```
resumo2 <- read.table("Resumo de Sigma_N - SELECIONADOS.csv", header = TRUE, sep = ";", dec
= ",")
```

```
cores <- c("red", "blue", "green", "pink", "orange", "darkgray", "magenta", "brown", "darkcyan",
"black")
Ds <- c(63, 100, 150, 200, 250, 300)
for (i in 1:6) {
```

```
dados <- resumo2[((i-1)*10+1):(10*i),]
mediana <- dados$Median
media <- dados$Mean
cop <- as.vector(dados$copula[order(media)])
beta <- dados$beta[order(media)]
```

```
par(mai = c(1.5,0.3,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(sort(media), rep(1,10), type = "h", xlim = c(min(media), max(media, SIGMA_N[i,2])+0.001),
yaxt = "n",
ylab = "", xlab = expression(paste(sigma[N], " (MPa)")), col = cores, cex.lab = 2, cex.axis =
1.5)
abline(v = SIGMA_N[i,2], col = "red", lwd = 3)
title(sub= paste("(", letters[i], ") ", "D = ", Ds[i], " (mm)", sep=""), cex.sub = 2, line = 6)
```

```
for (k in 1:9){
rot <- as.expression(bquote(paste(.(cop[k]), " (", beta, " = ", .(beta[k]), ")", sep="")))
text(labels = rot, x = sort(media)[k], y = 1.01, srt = 90, cex = 0.9, adj = 0)
```

```

}
text(labels = cop[10], x = sort(media)[10], y = 1.01, srt = 90, cex = 0.9, adj = 0)
text(labels = expression(hat(sigma[N])), x = SIGMA_N[i,2], y = 0.95, srt = 90, cex = 2, adj = 0, pos
= 3)

if (i = 1){
for (k in 7:8){
rot <- as.expression(bquote(paste(.(cop[k]), "(", beta, " = ", .(beta[k]), ")"), sep = "")))
text(labels = rot, x = sort(media)[k]+(-1)^k*0.0005, y = 1.01, srt = 90, cex = 0.9, adj = 0)
}}
}

leg <- character(0)
for (k in 1:10){ leg <- c(leg, as.expression(bquote(paste(.(cop[k]), "(", beta, " = ", .(beta[k]), ")"),
sep = ""))))}
leg <- c(leg, expression(hat(sigma[N])))

test <- legend(x = SIGMA_N[i,2]-0.025, y = 1.4, leg, col = cores,
lty = 1, bty = "n", cex = 0.9, lwd = 1, plot = FALSE)

for (k in 1:10){ legend(x = test$text$x[k], y = test$text$y[k], leg[[k]], col = cores[k],
lty = 1, bty = "n", cex = 0.9, lwd = 1.5)}
legend(x = test$text$x[11], y = test$text$y[11], leg[[11]], col = "red", lty = 1, bty = "n", cex = 0.9,
lwd = 3)

##### SIMULAÇÃO A PARTIR DA DISTRIBUIÇÃO DOS ESTIMADORES DA REGRESSÃO #####

require(MASS)
require(copula)
require(rgl)
require(stats4)

dados <- read.table("dados_estimadores_regressao.csv", header = TRUE, sep = ";", dec = ",")

Gf <- dados[[1]]
cf <- dados[[2]]
rm(dados)
cor(Gf, cf)

par(mai = c(1.1,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(Gf, cf, pch = ".", cex = 2, # xlim = c(0,180), ylim = c(0,220),
xlab = "", ylab = expression(paste(hat(c[f]), " (mm)")), cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)
title(sub= expression(paste("\n", hat(G[f]), " (N/m)")), cex.sub = 2, line = 4)

par <- fitdistr(Gf, densfun = "log-normal")
par1 <- fitdistr(cf, densfun = "log-normal")
x1 <- sort(Gf)

```

```

x2 <- sort(cf)

par(mai = c(1.23,1,0,0.05), oma = c(0,0,0,0))
plot(density(Gf), lwd = 2, main = "", xlab = expression(paste(G[f], " (N/m)")), ylab = "Densidade",
      cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)
lines(x1, dlnorm(x1, meanlog = par[[1]][1], sdlog = par[[1]][2]), col = "red", lty = 2)
legend(x = 45, y = 0.06, legend = c("Empírica", paste("Log-normal (", round(par[[1]][1], 3), ", ",
round(par[[1]][2], 3), ") \n (estimada)", sep = "")),
      col = c("black", "red"), lty = c(1,2), bty = "n", cex = 1, lwd = c(2,1))
title(sub= "(a)", cex.sub = 2, line = 5)

par(mai = c(1.23,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(density(cf), lwd = 2, main = "", xlab = expression(paste(c[f], " (mm)")), ylab = "Densidade",
      cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)
lines(x2, dlnorm(x2, meanlog = par1[[1]][1], sdlog = par1[[1]][2]), col = "red", lty = 2)
legend(x = 15, y = 0.17, legend = c("Empírica", paste("Log-normal (", round(par1[[1]][1], 3), ", ",
round(par1[[1]][2], 3), ") \n (estimada)", sep = "")),
      col = c("black", "red"), lty = c(1,2), bty = "n", cex = 1, lwd = c(2,1))
title(sub= "(b)", cex.sub = 2, line = 5)

uG <- plnorm(Gf, meanlog = par[[1]][1], sdlog = par[[1]][2])
uc <- plnorm(cf, meanlog = par1[[1]][1], sdlog = par1[[1]][2])
f2 <- kde2d(uG, uc)

par(mai = c(1,1,0,0), oma = c(0,0,0,0))
plot(uG, uc, pch = ".", cex = 1, xlab = expression(Fd(G[f])), ylab = expression(Fd(c[f])), cex.lab = 2,
      cex.axis = 1.5)

copulas <- c("Clayton", "Frank", "Ali-Mikhail-Haq", "Joe", "Gumbel-Hougaard", "Galambos",
"Husler e Reiss", "Normal", "Farlie-Gumbel-Morgenstern")

beta <- var.beta <- log.ver <- convergencia <- numeric(0)

## Estimação do parâmetro da cópula por máxima verossimilhança

for (j in 2:10){
if (j == 2) {cop <- claytonCopula(dim = 2)}
if (j == 3) {cop <- frankCopula(dim = 2)}
if (j == 4) {cop <- amhCopula(dim = 2)}
if (j == 5) {cop <- joeCopula(dim = 2)}
if (j == 6) {cop <- gumbelCopula(dim = 2)}
if (j == 7) {cop <- galambosCopula()}
if (j == 8) {cop <- huslerReissCopula( )}
if (j == 9) {cop <- normalCopula(dim = 2, dispstr = "un")}
if (j == 10) {cop <- fgmCopula(dim = 2)}

modelo <- fitCopula(cop, cbind(uG, uc), method="ml", start = 0.9)

```

```

beta <- c(beta, attributes(modelo)$estimate)
var.beta <- c(var.beta, attributes(modelo)$var.est)
log.ver <- c(log.ver, attributes(modelo)$loglik)
convergencia <- c(convergencia, attributes(modelo)$fitting.stats$convergence)
}

resumo <- data.frame(copula = copulas, beta, var.beta, log.ver, convergencia)
write.table(resumo , file = "Parametros estimados.csv", sep = ";", dec = ",", row.names = FALSE,
col.names = TRUE)

par(mai = c(0.8,0.8,0,0), oma = c(0,0,0,0))
persp(f2, theta = -30, phi = 30, expand = 0.5, col = gray(0.95),
      ltheta = 60, shade = 0.75, ticktype = "detailed",
      xlab = "\n Fd(Gf)", ylab = "\n Fd(cf)", zlab = "\n Densidade", cex.main = 2,
      cex.lab = 2, cex.axis = 1.5 )

a <- list(numeric(0))
for (j in 2:10){
if (j == 2) {cop <- claytonCopula(beta[j-1], dim = 2)}
if (j == 3) {cop <- frankCopula(beta[j-1], dim = 2)}
if (j == 4) {cop <- amhCopula(beta[j-1], dim = 2)}
if (j == 5) {cop <- joeCopula(beta[j-1], dim = 2)}
if (j == 6) {cop <- gumbelCopula(beta[j-1], dim = 2)}
if (j == 7) {cop <- galambosCopula( param = beta[j-1])}
if (j == 8) {cop <- huslerReissCopula(beta[j-1])}
if (j == 9) {cop <- normalCopula(beta[j-1], dim = 2, dispstr = "un")}
if (j == 10) {cop <- fgmCopula(beta[j-1], dim = 2)}

# Verificar o formato da densidade da cópula estimada
par(mai = c(0,0.8,0,0), oma = c(0,0,0,0))

b <- persp(cop, dCopula, theta = -30, phi = 30, expand = 0.5, col = "blue",
          ltheta = 60, shade = 0.75, ticktype = "detailed",
          xlab = "\n U", ylab = "\n V", zlab = "\n Densidade", cex.main = 2,
          cex.lab = 2, cex.axis = 1.5)

if (j == 9){leg1 <- bquote(paste(.(copulas[j-1]), " (", hat(rho), " = ", .(round(beta[j-1], 3)),
)",sep=""))
} else {leg1 <- bquote(paste(.(copulas[j-1]), " (", hat(beta), " = ", .(round(beta[j-1], 3)), ")",sep=""))
}

legend("topright", legend = c("Empírica", as.expression(leg1)), pch = ".", col = c("darkgreen",
"blue"), cex=1, inset=c(0.02), bty = "n", pt.cex = 13)# , plot = FALSE)

a <- c(a,list(b))
}

for (j in 2:10) {

```

```

par3d(windowRect = c(100, 100, 612, 612) , family="serif" )

if (j == 9){leg1 <- bquote(paste(.copulas[j-1]), " (", hat(rho), " = ", .(round(beta[j-1], 3)),
)",sep=""')}
else {leg1 <- bquote(paste(.copulas[j-1]), " (", hat(beta), " = ", .(round(beta[j-1], 3)), ")",sep=""')}
}

legend3d("topright", legend = c("Empírica", as.expression(leg1)), pch = ".", col = c("lightgray",
"blue"),
        cex= 1.5, inset=c(0.02), , bty = "n", pt.cex = 15)

rgl.surface(x = f2$x, y = f2$z, z = f2$y, col = "lightgray", alpha = 0.9)
rgl.surface(x = a[[j]]$x, y = a[[j]]$z, z = a[[j]]$y, col = "blue", front="lines", back="lines")

aspect3d(1,1,1)
bg3d("white")
axes3d(col="black")
title3d(xlab = "U", zlab = "V", col = "black")
rgl.viewpoint( theta = 250, phi = 30, fov = 60, zoom = 0.88)

rgl.close()
}

```