

Universidade de Brasília (UnB)
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas (FACE)
Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais (CCA)
V Curso de Especialização em Mercado Financeiro e Investimentos



Elisa Carrer Iamashita

**COMPARAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS SEGUNDO OS MÉTODOS
LOWER PARTIAL MOMENT E MÉDIA-VARIÂNCIA.**

Brasília, DF

2018

Professora Doutora Márcia Abrahão Moura
Reitor da Universidade de Brasília

Professor Doutor Sérgio Antônio Andrade de Freitas
Decano de Ensino de Graduação

Professora Doutora Helena Eri Shimizu
Decana de Pesquisa e Pós-graduação

Professor Doutor Eduardo Tadeu Viera
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Professor Doutor José Antônio de França
Chefe do Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais

Professor Doutor Jorge Katsumi Niyama
Coordenador Geral do Programa Multi institucional e Inter-regional de
Pós-graduação em Ciências Contábeis da UnB, UFPB e UFRN

Professor Doutor Paulo Augusto Petenuzzo de Britto
Coordenador de Graduação do curso de Ciências Contábeis – Diurno

Professor Doutor Elivânio Geraldo de Andrade
Coordenador de Graduação do curso de Ciências Contábeis - Noturno

IAMASHITA, Elisa Carrer

Uma Comparação entre Otimização de Carteiras pelo Lower Partial Moment e Pelo Modelo de Média–Variância/ Elisa Carrer Iamashita - Brasília, 2018. 36f.

Orientador(a): Prof. Pós-Doutor Paulo Augusto Petenuzzo de Britto.

Trabalho de Conclusão de curso (Artigo – Pós-graduação Lato Sensu) – Universidade de Brasília, 1ºSemestre letivo de Ano.
Bibliografia.

1. Média-variância 2. *Downside Risk* 3. *Lower Partial Moment* (LPM) 4. Otimização de carteiras 5. Risco I. Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Gestão de Políticas Públicas da Universidade de Brasília. II. Título.

CDD

Elisa Carrer Iamashita

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS PELO
LOWER PARTIAL MOMENT E PELO MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA.**

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Departamento de Ciências Contábeis e Atuariais da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de Brasília como requisito à conclusão do curso de especialização em Mercado Financeiro e Investimentos e obtenção do certificado do curso.

Orientador: Prof. Pós-Doutor Paulo Augusto Petenuzzo de Britto.

Linha de pesquisa: Mercado Financeiro.

Área: Gestão de Risco.

Brasília, 24 de maio de 2018.

RESUMO

O trabalho seminal de Markowitz (1952) contribui para o campo das finanças ao estabelecer conceitos que viabilizaram o primeiro *framework* para otimização de carteiras, impactando não somente os estudiosos, mas também a prática de investidores e profissionais. No entanto, novas medidas de risco surgiram como alternativas para mensurar o risco de portfólios. Uma delas consiste em mensurar o risco considerando a probabilidade de ocorrência de *performance* abaixo de um alvo desejado. O objetivo deste trabalho é determinar carteiras ótimas, considerando o trabalho de Markowitz e a medida *Lower Partial Moment* (LPM). Utilizando a heurística proposta por Estrada (2008), foi verificado qual o melhor método para minimizar risco. Observou-se que as carteiras de menor risco foram aquelas que utilizaram a medida LPM, sendo que para a amostra utilizada, as carteiras de média-variância foram mais eficientes.

Palavras-chave: 1. Média-variância; 2. *Downside risk*; 3. *Lower Partial Moment* (LPM); 4. Otimização de carteiras e 5. Risco.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Exemplo heurística apresentada por Estrada (2008).	2
Tabela 2 – Carteira ótimas para os anos de 2012 e 2013.	27
Tabela 3 – Carteiras ótimas para os anos 2014 e 2015.....	27
Tabela 4 – Carteiras ótimas para o ano 2016.....	28
Tabela 5 – Índice Retorno/Risco das carteiras anuais.	29

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DSR - *Downside Risk*

MTP - Moderna Teoria do Portfólio

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fronteira Eficiente.....	17
Figura 2 - Processo de pesquisa.....	26

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1 Modelo de Média-variância	14
2.2 <i>Downside Risk</i>	17
3 METODOLOGIA.....	21
3.1 Tipo e Descrição Geral da Pesquisa.....	21
3.2 População e Amostra	21
3.3 Análise de Dados	22
4 RESULTADOS	27
5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES	31
6 REFERÊNCIAS.....	33

1 INTRODUÇÃO

A seleção do portfólio é um problema importante para a área das finanças. A questão consiste em alocar uma quantia de recursos entre os ativos disponíveis, de modo que, após um período específico, o *trade-off* risco e retorno seja o mais favorável. A dificuldade em equacionar esse problema reside no fato de que a seleção dos ativos é uma decisão *ex ante*, ou seja, os retornos futuros são desconhecidos no momento da decisão pelo investimento.

Como contribuição para essa questão, Von Neumann e Morgenstern (1944), foram um dos primeiros a trabalhar o conceito de adequação de preferências individuais às condições de incerteza, podendo-se modelar o comportamento dos tomadores de decisão, como por exemplo, dos investidores no momento da avaliação e seleção de ativos (CUSINATO, 2003). No entanto, embora a teoria da utilidade esperada tenha um apelo teórico e intuitivo, houve pouca aplicabilidade na prática, principalmente devido ao fato de que a função de utilidade apropriada é algo subjetivo. Na década seguinte, surgiram então os modelos de média-variância, que forneceram uma solução mais prática para o problema da seleção de portfólio (ROMAN e MITRA, 2009).

Segundo Markowitz (1952), a questão da seleção de portfólio nada mais é que o processo de escolher ativos e determinar suas quantidades, de acordo com as limitações de recursos. A busca por essa combinação gera vários problemas de otimização, e a relevância desses problemas depende simplesmente dos objetivos e restrições de cada investidor. Alguns podem querer minimizar o risco, outros podem querer minimizar o risco sujeito a um retorno desejado, outros podem querer maximizar retorno sujeito a um nível alvo de risco e outros podem querer maximizar os retornos ajustados ao risco (ESTRADA, 2008). Para os investidores típicos avessos ao risco, é sempre preferível uma combinação ótima de ativos de investimento que fornecem um risco menor e um retorno maior (MARKOWITZ, 1952). O trabalho pioneiro de Markowitz (1952) foi o primeiro *framework* para medir o risco e retorno de um portfólio, mudando radicalmente a forma de se analisar e encaminhar todas essas questões.

O estudo de Markowitz contribuiu fortemente para as bases da chamada Moderna Teoria do Portfólio (MTP). No entanto, apesar da sua importância seminal, existem

questionamentos sobre construção teórica apresentada, principalmente no uso da variância como medida de risco e, conseqüentemente, como critério de decisão. Assim, com o passar dos anos, a MTP foi revisada e outras metodologias alternativas para construção de portfólios foram propostas. No centro dessa discussão estão as medidas de *downside risk* (DSR), que consideram o risco de uma carteira a ocorrência de um desempenho abaixo de um já previamente estipulado ou desejado pelo investidor. Alguns autores, como Roman e Mitra (2009), consideram que esses demais métodos constituem uma nova fase de estudos, denominada de Teoria do Portfólio Pós-Moderna.

Este trabalho tem como objeto de estudo os métodos de média-variância e DSR e propõe-se simular as alocações de investimentos em ações para obter carteiras de mínimo risco com o objetivo de comparar os resultados obtidos de acordo com cada um dos modelos estudados. Assim, as carteiras terão seu risco auferido seguindo o modelo de média-variância, apresentado por Markowitz em 1952, e o modelo *Lower Partial Moment* (LPM), ou Momento Parcial Inferior, que faz parte desse novo grupo de medidas para análise de carteiras. Para alcançar esse objetivo, se fez necessário utilizar a heurística apresentada por Estrada (2008), para que fosse possível resolver o problema da endogeneidade da matriz de semicovariância que ocorre quando se deseja otimizar carteiras sob a ótica LPM. Isso é um obstáculo, pois para uma matriz endógena, nesse caso, significa que uma mudança nos pesos dos ativos afetam os elementos da matriz de semicovariância, ou seja, cada nova composição gera uma nova matriz. Assim, recorrendo ao trabalho de Estrada (2008), foi possível otimizar carteiras por meio das orientações já amplamente conhecidas e publicadas por Markowitz (1952).

A organização do trabalho é composta pelo referencial teórico, abordado no capítulo dois, no qual pretende-se apresentar os conceitos introduzidos por Markowitz (1952), e em seguida, expor as críticas a esse trabalho seminal que suportam os novos modelos de avaliação de carteiras. Obviamente, também se faz necessário abordar com mais detalhes o conceito de DSR e mais especificamente o modelo LPM, que é o foco principal desse estudo. O terceiro capítulo discorre sobre a metodologia de pesquisa, incluindo informações sobre os dados utilizados, sobre a otimização da carteira e sobre a heurística utilizada, que é a viabilizadora dos cálculos. Em sequência, há a apresentação dos resultados de risco e formatação das carteiras simuladas de acordo com as diferentes perspectivas. Por fim, as conclusões do estudo e as sugestões para futuros trabalhos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Harry Markowitz foi pioneiro na questão da otimização de portfólio. Seu trabalho intitulado “*Portfolio Selection*”, publicado em 1952, introduz o modelo que considera o investidor como sendo racional, com aversão ao risco e maximizador de sua própria utilidade esperada. Markowitz desenvolveu um conjunto de equações baseado no conceito de que o investidor deve estar igualmente interessado no risco assim como no retorno (NAWROCKI, 1999), atingindo o que Estrada (2008) chama de o coração do problema de otimização de carteiras.

Baseado, principalmente, em premissas sobre a distribuição dos retornos históricos dos ativos e sobre o comportamento dos investidores, o objetivo principal é a diversificação dos portfólios, visando uma composição que minimize risco ou maximize o retorno esperado pelo investidor (BEZERRA e MACHADO, 2016). No modelo, o risco é medido pela variância dos retornos históricos da carteira do investidor, enquanto que o retorno esperado, que é a medida de *performance* da carteira, é o retorno médio dos valores históricos. Por isso este modelo é denominado de média-variância. Segundo De Castro Júnior e Famá (2002), Markowitz moldou conceitos até hoje utilizados na análise do *trade-off* entre risco e retorno e estabeleceu um padrão prático para seleção de ativos por parte dos investidores racionais. Para Kato (2004), uma das grandes contribuições de Markowitz foi perceber que o risco de uma carteira não é a soma dos riscos dos ativos componentes, pois ele distingue a variabilidade dos retornos de um ativo isolado e sua contribuição para o risco do portfólio como todo.

Apesar da sua importância seminal, existem questionamentos acerca de construção teórica apresentada por Markowitz, principalmente no uso da variância como critério de decisão. Fishburn (1977) realiza um levantamento de autores que abordam as limitações introduzidas no artigo “*Portfolio Selection*”, como por exemplo Markowitz (1959), Quirk e Saposnik (1962), Borch (1963), Samuelson (1967), Bierwag (1974), Tsiang (1974), Fishburn (1975) e Feldstein (1977).

As críticas feitas ao uso da variância como medida de risco estão relacionadas ao fato de que esse modelo supõe que o investidor pesa igualmente a probabilidade de

retornos negativos ou retornos positivos ao formarem suas carteiras e assim, assumindo uma distribuição normal dos retornos (BEZERRA e MACHADO, 2016).

Segundo Fishburn (1977), os agentes tipicamente associam o risco à falha na obtenção de um retorno-alvo, e na medida em que essa afirmação é correta, não se pode considerar a distribuição dos retornos como simétrica, colocando em dúvida a utilização do modelo de média-variância. Kahneman e Tversky (1979) também corroboram com a afirmação de que os investidores possuem a tendência de atribuir maior importância ao efeito negativo das perdas ou dos baixos retornos. Essa aversão à perda abriu caminho para medidas de risco em uma distribuição assimétrica dos retornos, mais especificamente, considerando o lado inferior da distribuição (NAWROCKI, 1999).

Ainda em 1952, Roy já havia proposto uma medida de risco denominada *Safety First Criterion*, que considerava a assimetria das distribuições dos retornos. Em 1959, o próprio Markowitz também apresentou uma medida de risco nesse sentido, no livro intitulado “*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*”. O conceito apresentado por Roy (1952) é de que o investidor prefere a segurança do principal no momento de escolha entre opções de carteira, de modo que o seu gerenciamento de risco visa conhecer a probabilidade do retorno da carteira ficar abaixo de um limite pré-determinado e desejado. Segundo Roman e Mitra (2009), essa foi a primeira ocorrência de uma medida de risco mensurada por um desempenho abaixo de um alvo almejado.

Markowitz (1959), mais tarde, introduziu o conceito de semivariância, que pode ser considerado como os primórdios da origem das medidas de DSR. O conceito é uma medida de risco, que para amostras discretas, é calculada como a soma dos quadrados dos retornos abaixo de um retorno padrão menos o retorno padrão, sobre o número total de amostras, ou seja, é uma medida de risco que utiliza somente as diferenças negativas em relação a uma média dos retornos ou a um *benchmark*. Ao considerar um alvo específico como base para apuração do risco, a semivariância passa a considerar os objetivos e o perfil do investidor como um referencial ao passo que a variância não o faz e apenas mede a dispersão dos retornos ao redor da média (De BRITO NETO e VOLKNER, 2001).

Os trabalhos de Roy (1952) e Markowitz (1959) impulsionaram o que alguns autores chamam de a formação da Pós-Moderna Teoria do Portfólio. Desde então tem se observado o uso de novas formas de mensuração do risco, como a *downside risk*.

As medidas de DSR, segundo Kato (2004), teve seus primórdios com a semivariância definida por Markowitz (1959), conforme já abordado, e em seguida, os trabalhos de Stone (1973), Bawa (1975), Bawa e Lindberg (1977) e Fishburn (1977) e Nawrocki (1999), que também desenvolveram medidas de *downside risk*, ou seja, modelos no qual o risco é mensurado a partir de um resultado abaixo de um retorno de referência. Para Roman e Mitra (2009), esta abordagem visa discernir os bons retornos dos retornos ruins. Os bons retornos são aqueles acima de um referencial prévio e os retornos ruins são aqueles observados abaixo do referencial, sendo que, de acordo com DSR, apenas os retornos ruins são considerados como risco.

A despeito do embate entre a média-variância e semivariância, Markowitz (1959) mostra que quando a distribuição dos retornos é normal, tanto um modelo de média-variância quanto de DSR são capazes de prover uma boa análise. No entanto, para distribuições assimétricas, somente uma medida DSR é capaz de fazê-lo.

Além da discussão sobre a normalidade da distribuição dos retornos que seria oposto ao comportamento real do investidor, Jarrow e Zhao (2006) ainda citam mais algumas razões para a crescente atenção às medidas de *downside risk*. Um exemplo é a maior popularidade do uso de moedas estrangeiras e derivativos para constituição de carteiras, que alteram a distribuição de probabilidade do portfólio. Outro motivo pode ser atribuído aos momentos de desaceleração econômica que favorecem a alocação de ativos de renda fixa. A alocação desse tipo de produto nas carteiras contribui para formação das caudas longas nas distribuições de probabilidade, o que também dificulta a análise por média-variância.

2.1 Modelo de Média-variância

O modelo clássico de otimização de portfólio de média-variância introduzido por Markowitz (1952) tem como primeiros passos a estimativa do retorno esperado, da volatilidade da carteira e correlação entre os ativos. O objetivo é determinar as proporções de um capital a ser investido em cada ativo pertencente um mercado pré-determinado, de modo a minimizar o risco ou maximizar o retorno (SALAH, CHAOUCH, *et al.*, 2016).

Já o retorno da carteira pode ser analisado de acordo com o desempenho histórico dos ativos individuais e dos respectivos pesos de alocação.

No entanto, o risco da carteira exige um pouco mais de atenção, pois este não é a média ponderada dos riscos dos ativos e sim, o valor da dispersão dos resultados das ações em relação aos seus retornos médios, já que se trata de um modelo de média-variância. O risco da carteira depende também do comportamento em conjunto dos títulos, pois segundo Markowitz (1952), estes possuem retornos correlacionados. A correlação é o conceito estatístico abordado na MTP para quantificar a noção de diversificação, que é uma estratégia de investimento, observada também na sabedoria popular de não colocar todos os ovos na mesma cesta (FABOZZI, GUPTA e MARKOWITZ, 2002). Em essência, o ditado significa que aplicar todo o dinheiro em investimentos que podem fracassar, ou seja, cujos retornos estão altamente correlacionados, não é uma estratégia de investimento recomendável. Ativos altamente correlacionados entende-se como retornos que possuem comportamentos muito similares. O extremo seria duas ações, B e C, com exatamente o mesmo comportamento, isto é, perfeitamente correlacionadas, ou ainda, com coeficiente de correlação igual a +1. Isso significa dizer que investir em uma carteira com essas duas ações é tão arriscado quanto investir em cada ativo individualmente. O oposto seria o investimento em dois ativos, D e J, perfeito e negativamente correlacionados (coeficiente de correlação é igual a -1) (BRIGHAM e EHRHARDT, 2006). Assim, quando se trata de minimizar o risco, a diversificação de ativos por si só não é o suficiente, pois a diversificação feita com ativos altamente interdependentes pouco contribui para a redução do risco

De acordo com o estudo “*Potfolio Selection*” o retorno médio da carteira é calculado como:

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) \quad (1)$$

Onde:

$E(r_i)$ é o retorno esperado do ativo i;

$E(r_c)$ é o retorno esperado da carteira;

w_i é o percentual do valor total investido no ativo i .

Já o risco é calculado a partir da variância o que é obtida por meio da dispersão dos resultados dos ativos em relação a seus retornos médio, como é apresentado na equação (2).

$$\sigma_c^2 = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \quad (2)$$

Onde:

w_i é o percentual do valor total investido no ativo i ;

w_j é o percentual do valor total investido no ativo j ;

A expressão $\text{cov}(R_i, R_j)$ é a covariância entre retornos dos ativos i e j , que visa entender a relação de interdependência entre os ativos e é calcula a partir do produto dos desvios das variáveis, como representado na equação (3).

$$\text{cov}(R_i, R_j) = E[(R_i - R_{\mu i})(R_j - R_{\mu j})] \quad (3)$$

Onde:

$R_{\mu i}$ é o retorno médio do ativo i ;

$R_{\mu j}$ é o retorno médio do ativo j ;

A construção e a administração de carteiras de ações torna-se uma questão de otimização quando o objetivo passa a ser a busca pelas melhores composições de uma carteira dado as restrições do investidor e suas preferências acerca do binômio retorno-risco. Tais conjuntos ótimos formam uma região geométrica de eficiência no espaço risco-retorno, chamada de fronteira eficiente. Para qualquer investidor que se preocupe apenas com o *trade-off* entre risco e retorno, é economicamente eficiente optar dentre as carteiras que se situam nessa fronteira (FARIAS e De MOURA 2013). A figura 1 abaixo apresenta a forma básica da fronteira eficiente.

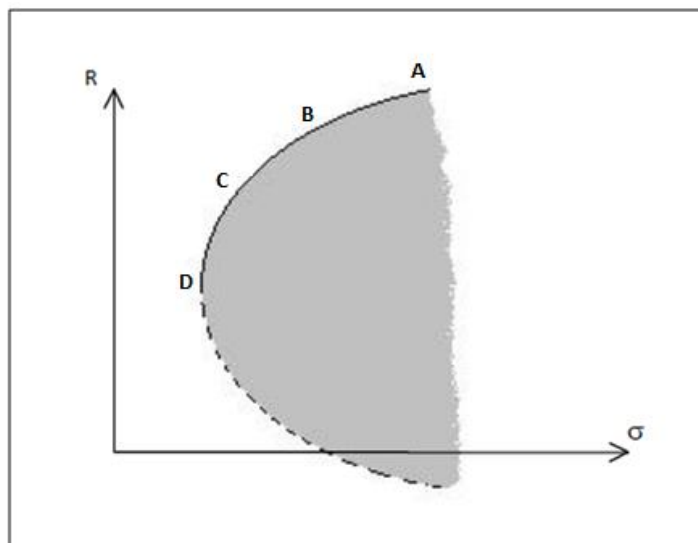


Figura 1 – Fronteira Eficiente.
Fonte: adaptado de Lintz e Renyi (1999).

Qualquer composição de retorno e risco que esteja fora do delimitado pela fronteira ABCD, não pode ser atingido por nenhuma combinação de ativos que compõem a carteira. Já as carteiras à direita do limite ABCD são carteiras ineficientes, pois estas carteiras, ao contrário do objetivo proposto, possuem um retorno inferior ao máximo possível para um dado nível de risco.

Em outras palavras, Markowitz (1952) afirma que a seleção de portfólio deve basear-se em características globais de recompensa por risco, ao contrário de compilar apenas carteiras com valores mobiliários com características de risco-recompensa individualmente atraentes.

2.2 Downside Risk

Conforme já mencionado, o conceito de atribuir como risco de uma carteira a ocorrência de um desempenho abaixo de um valor almejado teve seus primórdios com a semivariância, definida por Markowitz (1959). Nos anos 70, Bawa (1975) e Fishburn (1977) introduziram a *Lower Partial Moment* (LPM) como uma medida de DSR, que é a mais utilizada dentre as metodologias conhecidas de *downside risk* (CUMOVA e

NAWROCKI, 2014). Para Roman e Mitra (2009), o LPM pode ser inclusive considerado uma denominação genérica quando se pensa em medidas de risco abaixo de um alvo, uma vez que todas as fórmulas calculam o risco do portfólio a partir de um retorno-alvo e considerando o grau de aversão n às perdas do investidor.

Para um determinado alvo, quanto maior o valor de n , maior a aversão do investidor com relação a um desempenho da carteira abaixo do alvo desejado. Nawrocki e Staples (1989) argumentam que se o objetivo do investidor for atingir uma meta de retorno sem preocupação com possíveis perdas abaixo do alvo, então $n < 1$ e o investidor possui um perfil propenso ao risco. Já se grandes desvios com relação ao alvo são danosos, então $n > 1$ e o perfil do investidor é avesso ao risco. O grau $n=0$ seria o ponto no qual o investidor utiliza como único critério de decisão o valor retorno médio esperado, ou seja, o risco não é uma variável relevante em sua análise. A tabela 1 exemplifica o grau n e o perfil caçador de risco e avesso ao risco.

Carteira A		Carteira B	
Probabilidade	Retorno	Probabilidade	Retorno
0,5	10%	1	0%
0,5	-10%		

Quadro 1 – Probabilidade de ocorrência e perfil do investidor.

Fonte: Nawrocki e Staples (1989).

Ambas as carteiras possuem o mesmo retorno esperado (0%). Se a opção do investidor for pela Carteira A, então $n < 1$ porque o investidor prefere a chance de atingir o retorno desejado mesmo que haja uma chance de uma grande perda. Se a alternativa B for selecionada, então $n > 1$, já que o investidor prefere um retorno específico do que arriscar uma perda de 10%.

Fishburn (1977), define que a gama de valores de n variando de -1 a 4. Uma das contribuições do seu trabalho foi justamente apresentar essa faixa de valores. Para isso, ele fez um levantamento das funções de utilidade de von Neumann-Morgenstern que tem sido relatadas na literatura sobre investimentos e define assim, curvas de utilidade para perfis de risco de investidores. Para averiguar qual o grau de aversão ao risco do investidor e assim, ser possível calcular o risco via método LPM, Fishburn apresenta uma série de questões nas quais sempre confronta o investidor com pares de carteiras. O objetivo é apresentar carteiras que possuem o mesmo retorno esperado, mas com probabilidades

de ocorrências diferentes, tal qual como exemplificado no quadro 1, e observar qual é o nível de tolerância ao risco do investidor. Para tornar esse processo mais prático é possível automatizar esse questionário via um programa computacional que calcule automaticamente o grau n adequado.

Segundo Kato (2004), os diversos modelos de cálculo do LPM, apresentado por difentes autores, possuem diferenças sutis. Por exemplo: para Bawa e Lindberg (1977) o parâmetro deve ser um número positivo, diferentemente de Fishburn, que definiu o grau n , como um parâmetro variável entre -1 e 4. Já entre Sortino (2001) e Fishburn (1977) há apenas uma mudanças de nomenclatura. Fishburn apresenta o parâmetro t denominado como taxa de retorno-alvo. Já Sortino acredita que essa expressão pode induzir investidores a especificarem taxas de retornos altas e por isso nomeu o parâmetro t como a retorno mínimo aceitável.

Quando grau n é igual a 2, considera-se que a semivariância é um dos casos de LPM um vez que a semivariância considera o quadrado dos retornos, sendo este a ordem do LPM (ou grau) mais comumente utilizado (BAWA, 1975).

Semivariância ou LPM2 (Markowitz, 1959).

$$\sum_{PB}^2 = (1/T) \sum_{T=1}^T [Min(R_{pt} - B, 0)]^2 \quad (4)$$

Onde R_{pt} é o retorno do portfólio e B é o alvo de retorno desejado.

Modelo LPM (Bawa e Lindberg, 1977).

$$LPM = \int_a^t (t - x)^n dP(x), a = inf\{x\}, n = 0, 1, 2 \dots \quad (5)$$

Onde t é retorno alvo desejado e x é o retorno da carteira.

Modelo Alfa-t (Fishburn, 1977; Sortino, 2001).

$$F_{\alpha,t} [X] = \int_{-\infty}^t (t - x)^{\alpha} dP (x) \quad (6)$$

Onde t é retorno alvo desejado, x é o retorno da carteira e α é o grau de aversão ao risco do investidor.

Quanto à otimização do portfólio, é possível fazê-lo adotando o modelo LPM como mensurador de risco, mas a forma de resolução não é tão simples quanto o caso da média-variância. O problema maior é definir o grau de associação entre os ativos. No modelo de média-variância, é utilizada a covariância, enquanto que o nível de associação utilizado para LPM2 é a cosemivariância.

Isso é um complicador, pois para localizar um conjunto eficiente baseado na variância é exigido como entradas apenas valores médios, enquanto que a semivariância exige toda a distribuição conjunta de retornos. Conforme já abordado, Markowitz (1959) propõe a estimativa da semivariância de acordo à equação (4), com a comsemivariância sendo calculada de conforme a equação (8), abaixo.

$$S_{ij} = (1/T) \sum_{t=1}^k (R_{it} - B)(R_{jt} - B) \quad (7)$$

Assim, é necessário saber se o portfólio tem um desempenho inferior ao alvo B , como também precisamos saber se o ativo tem o desempenho inferior a B . Ocorre então que a matriz de comsemivariância é endógena, pois uma mudança nos pesos afeta quando o portfólio tem um desempenho inferior ao alvo, que por sua vez afeta os elementos da matriz de semicovariância, ou seja, $S_{ij} \neq S_{ji}$. Essa complexidade pode justificar a razão pela qual os profissionais e acadêmicos tem selecionado carteiras por décadas utilizando o modelo que tem a variância como medida de risco. O próprio Markowitz (1959) afirma que a variância tem uma vantagem sobre a semivariância com relação ao custo e a conveniência de uso.

3 METODOLOGIA

3.1 Tipo e Descrição Geral da Pesquisa

Quanto à tipologia de pesquisa, trabalhos científicos podem ser classificados de acordo com o objetivo, o método de investigação e o tipo de tratamento dos dados (GONÇALVES e MEIRELLES, 2004). Quanto aos objetivos, este trabalho classifica-se como uma pesquisa descritiva, uma vez que a proposta é apurar a diferença de performance e risco de carteiras otimizar seguindo a metodologia proposta em 1952 por Markowitz e o modelo momento parcial inferior de ordem 2 (LPM2).

Quanto ao método de investigação, este se classifica como uma pesquisa de levantamento devido ao uso de dados coletados para formar uma amostra extraída de determinada população, sendo os dados coletados definidos como secundários, sem o emprego de um instrumento de entrevista ou questionário (GIL, 1999).

Em relação à abordagem do problema, o estudo possui caráter essencialmente quantitativo devido ao uso de quantificação tanto nos procedimentos de coleta de informações, quanto no tratamento (RICHARDSON, 1999).

3.2 População e Amostra

Horizonte temporal para a pesquisa compreende o período de janeiro de 2012 a dezembro de 2016. Como critério para a seleção das ações, utilizou-se o volume de transações para as 10 mais negociadas em cada ano do índice IBOVESPA, sendo esta informação disponível como dado histórico no sítio eletrônico da BM&FBOVESPA. Montini e Araújo (2014) também utilizam em seu trabalho de otimização e portfólio o critério de liquidez dos ativos, sendo este crivo importante dado que o uso de ações menos líquidas envolvem, na prática, maiores custos operacionais e dificuldades de negociação.

Quanto ao valor de *performance* das ações, foi considerado o valor de fechamento semanal ajustado das negociações. Estes dados, por sua vez, foram extraídos da base de dados YAHOO FINANÇAS e foram armazenados em planilhas eletrônicas.

Após a seleção das ações, foram calculadas as taxas de retorno dos ativos de acordo com expressão abaixo (11).

$$R_{it} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (8)$$

3.3 Análise de Dados

Para encontrar as carteiras ótimas seguindo o modelo LPM recorreu-se ao trabalho de Estrada (2008) que disponibiliza uma simplificação visando a conveniência, ao estimar a semivariância da carteira. O objetivo do seu trabalho *Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach* é propor uma forma de obter a semivariância dos retornos da carteira usando uma expressão similar à usada para estimar a variância dos retornos da carteira. A expressão é apresentada a seguir:

$$\sum_{PB}^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sum ijB \quad (9)$$

Onde $\sum ijB$ é cosemivariância calculada como:

$$\sum ijB = (1/T)[Min(R_{it} - B, 0)Min(R_{it} - B, 0)] \quad (10)$$

Assim, passa-se a averiguar se o desempenho individual dos ativos é satisfatório (maior que o alvo) e a cosemivariância passa então a gerar uma matriz exógena. O próprio Estrada apresenta um exemplo simplificado e didático para demonstrar esse processo de

cálculo por meio de uma simulação de carteira com dois ativos (índices S&P 500¹ e Nikkei 225²), com composição de 80% e 20% e alvo (B) igual a zero.

Tabela 1 - Exemplo heurística apresentada por Estrada (2008).

Fonte: adaptado de Estrada (2008).

Ano	Ativo		Portfólio	Retornos Condicionais		
	S&P	Nikkei	80% -20%	S&P	Nikkei	Produto
1997	31.0	-21.2	20.6	0.0	-21.2	0.0
1998	26.7	-9.3	19.5	0.0	-9.3	0.0
1999	19.5	36.8	23.0	0.0	0.0	0.0
2000	-10.1	-27.2	-13.5	-10.1	-27.2	2.8
2001	-13.0	-23.5	-15.1	-13.0	-23.5	3.1
2002	-23.4	-18.6	-22.4	-23.4	-18.6	4.4
2003	26.4	24.5	26.0	0.0	0.0	0.0
2004	9.0	7.6	8.7	0.0	0.0	0.0
2005	3.0	40.2	10.4	0.0	0.0	0.0
2006	13.6	6.9	12.3	0.0	0.0	0.0

Na coluna “Portfólio” são registrados os retornos anuais. Na coluna “Retorno Condicionais” ocorre a avaliação de *performance* individual do ativo. Apenas aqueles com valor abaixo de zero ($B = 0$) são de interesse para o modelo, pois conforme tudo o que já foi discutido sobre as medidas de DSR, o objetivo é avaliar o risco de não se atingir um determinado resultado. Cada retorno condicionado é elevado ao quadrado e então é calcula-se a média para cada ativo. Já na coluna “Produto” é registrado o produto dos retornos dos ativos, no caso de S&P e Nikkei, sendo importante frisar que para que o esse seja considerado como uma informação a ser utilizada para cálculo no modelo, é necessário que ambos os ativos tenham apurado retorno inferior à zero naquele ano. Assim, passam a serem conhecidos os quatro elementos da matriz de semicovariância:

$$\sum_{S\&P, S\&P, 0} = \frac{(-0,101)^2 + (-0,13)^2 + (-0,186)^2}{10} = 0,0082 \quad (11)$$

¹ Índice composto por 500 ações cotadas nas bolsas NYSE e NASDAQ. Cada ativo é ponderado de valor de mercado, ou seja, o peso de cada ativo no índice é proporcional à sua importância no mercado.

² Nikkei 225 é o índice mais amplamente citado na bolsa de valores de Tóquio, comparável ao Dow Jones Industrial Average nos EUA. É composto de 225 empresas japonesas oriundas de diversos fatores.

$$\sum_{Nikkei, Nikkei, 0} = \frac{(-0,212)^2 + (-0,093)^2 + (-0,272)^2 + (-0,235)^2 + (-0,186)^2}{10} = 0,0217 \quad (12)$$

$$\sum_{S\&P, Nikkei, 0} = \frac{[(-0,101) * (-0,272)] + [(-0,13) * (-0,235)] + [(-0,234) * (-0,186)]}{10} = 0,0102 \quad (13)$$

Então a semivariância da carteira 80%-20% pode ser calculada de acordo com a equação (9):

$$\sum_{PB}^2 = [(0,8)^2(0,0082) + (0,2)^2(0,0217) + (0,8)(0,2)(0,0102)] = 0,0094 \quad (14)$$

Quanto à acuracidade da heurística, Estrada (2008) apresenta uma simulação de otimização para aferir essa questão. Utilizando dois ativos para compor 11 carteiras diferentes, o autor mensurou o risco seguindo a equação (4) e (9). A diferença dos desvios padrões entre o cálculo aproximado e exato é de menos de 1%, para todas as 11 carteiras, com uma média de 0,42%. Já a correlação entre os desvios padrões das duas formas de cálculo foi de 0,98. Araujo, Carvalho e Montini (2011), questionam o fato de Estrada (2008) não ter apresentado nenhum teste estatístico pertinente para mensurar proximidade dos resultados. Já Cheremushkin (2009), critica o trabalho de Estrada, demonstrando que a heurística tende a apresentar valores mais altos em relação ao cálculo exato.

Neste trabalho, visando a simplificação, a motivação para o emprego de qualquer heurística, será utilizado o modelo proposto por Estrada (2008) para que seja possível otimizar portfólios conforme os direcionamentos de Markowitz (1952).

Quanto ao alvo desejado de *performance*, ou retorno, para este trabalho foi considerado o valor zero, ou seja, nesta simulação a expectativa é de não se apurar perdas. O grau n aplicado no LPM, ou ordem, assumida será 2. Como justificativa pode-se citar Fishburn (1977), que argumenta que é possível observar empiricamente que $n = 2$, corresponde proximamente com os critérios de escolha relatados pelos gestores de

investimento. Ainda como justificativa há o fato de que o LPM de ordem 2 é o *framework* mais popularmente utilizado e conhecido, conforme já citado anteriormente. Como um terceiro argumento para a escolha, há o fato de que Estrada (2008) apresenta uma heurística que visa ser uma saída para viabilizar a otimização de portfólios de semivariância, sendo assim, possível aplicar a mesma simplificação matemática para otimizar carteiras na ótica do modelo LPM de grau 2. Recorrer a essa simplificação fez-se necessário devido à questão da endogeneidade da matriz de semicovariância. Uma matriz endógena é um problema, pois a cada mudança nos pesos dos ativos os elementos da matriz de semicovariância são modificados, gerando uma nova matriz, sendo assim impossível determinar qual a composição ótima do portfólio. É importante ressaltar que, com a utilização da heurística, o problema de minimização do risco pode ser resolvido com as mesmas técnicas amplamente utilizadas para otimizar carteiras seguindo a equação (2), sendo possível utilizar o suplemento Solver do software Microsoft Excel.

Após a construção das carteiras ótimas seguindo cada modelo, fez-se necessário uma avaliação da relação retorno e risco para verificar se somente o critério de mínimo risco seria racionalmente satisfatório para orientar o processo decisório de um investidor, que tivesse como restrição as condições acima apresentadas (portfólios de mínimo risco e retorno-alvo $B = 0$). Ou seja, se além de portfólios com menor risco, esses também são economicamente vantajosos, apresentando maior retorno por unidade de risco.

A figura 2, abaixo, apresenta o fluxograma da pesquisa, sendo os processos em **negrito** aqueles que foram efetivamente realizados para a elaboração do trabalho. Além de exibir a sequência operacional do processo de estudo, o intuito maior é retratar a opção feita pelo uso da heurística de Estrada (2008), como caminho para otimizar carteiras, versus o fluxo em cinza que seria executado se, para este trabalho, a otimização de carteiras segundo o LPM tivesse ocorrido sem o uso de um modelo simplificador.

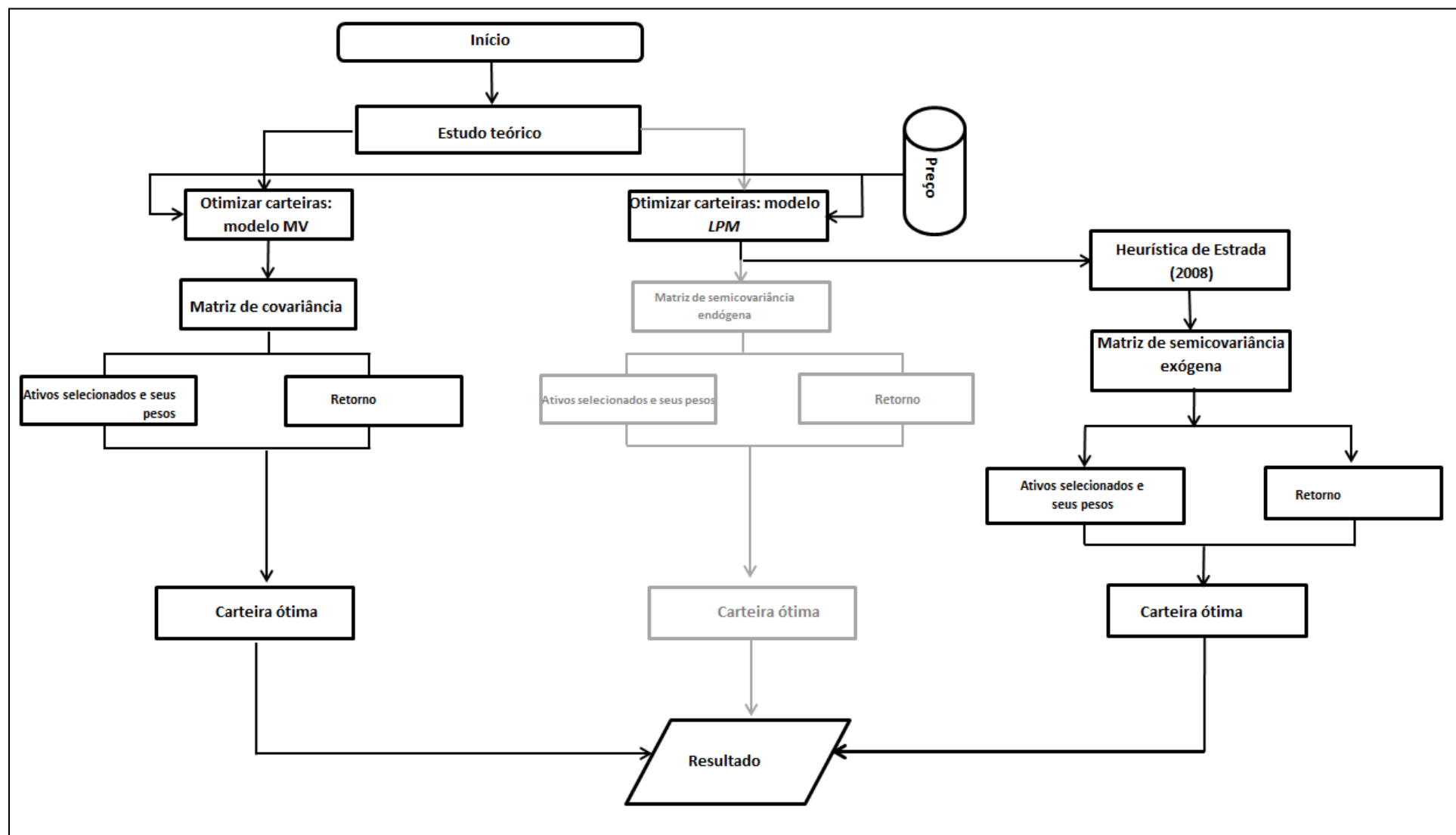


Figura 2 - Processo de pesquisa.

4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as carteiras ótimas de menor risco e alvo de *performance* igual a zero. As comparações entre os modelos utilizados para a otimização, média-variância e LPM2, estão resumidas nas tabelas 2, 3 e 4, assim como respectivos pesos dos ativos na composição do portfólio. Assim, é apresentada uma carteira anual para cada método de mensuração de risco, no período temporal de 2012 a 2016, totalizando 10 carteiras analisadas. As ações citadas nas tabelas abaixo estão representadas pelas siglas que representam o nome das companhias na bolsa de valores.

Tabela 2 – Carteira ótimas para os anos de 2012 e 2013.

2012						2013					
LPM2,0			Média-Variância			LPM2,0			Média-Variância		
Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco
ITUB4	7%	3,57%	BBDC4	33%	2,43%	CCR03	100%	3,35%	ABEV3	13%	1,74%
PETR4	63%		CIEL3	26%					CIEL3	19%	
VALE3	11%		GGBR4	2%					GGBR4	7%	
PETR3	20%		ITUB4	1%					ITSA4	35%	
			PETR4	5%					ITUB4	26%	
			PETR3	33%					PETR4	1%	
									VALE3	7%	
									CCR03	11%	

Códigos: ABEV3: AMBEV ON; BBDC4: Bradesco PN; BBSE3: BBSeguridade ON; BRAP4: Bradespar PN; BRFS3: BRF S.A.ON; BRKM5: Braskem PN; ccr03: Grupo CCR ON; CIEL3: Cielo ON; CMIG4: Companhia Energética Minas Gerais PN; CSNA3: Companhia Siderúrgica Nacional ON; GGBR4: Gerdau PN; ITSA4: Itaúsa PN; ITUB4 Itaú Unibanco PN; KROT3: Kroton ON; OGXP3: PGX Petróleo ON; PETR3: Petrobrás ON; PETR4: Petrobrás PN; USIM5: Usiminas PN; VALE3: Vale do Rio Doce ON.

Tabela3 – Carteiras ótimas para os anos 2014 e 2015.

2014						2015					
LPM2,0			Média-Variância			LPM2,0			Média-Variância		
Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco
PETR3	100%	8,26%	ABVE3	46%	2,59%	ABEV3	54%	1,94%	ABEV3	40%	1,75%
			BBSE3	8%		BRFS3	11%		BRFS3	11%	
			VALE3	8%		ITUB4	27%		CIEL3	14%	
			USIM5	3%		KROT3	6%		ITUB4	26%	
			BRFSE3	36%		PETR4	1%		KROT3	2%	
									VALE3	7%	

Códigos: ABEV3: AMBEV ON; BBDC4: Bradesco PN; BBSE3: BBSeguridade ON; BRAP4: Bradespar PN; BRFS3: BRF S.A.ON; BRKM5: Braskem PN; ccr03: Grupo CCR ON; CIEL3: Cielo ON; CMIG4: Companhia Energética Minas Gerais PN; CSNA3: Companhia Siderúrgica Nacional ON; GGBR4: Gerdau PN; ITSA4: Itaúsa PN; ITUB4 Itaú Unibanco PN; KROT3: Kroton ON; OGXP3: PGX Petróleo ON; PETR3: Petrobrás ON; PETR4: Petrobrás PN; USIM5: Usiminas PN; VALE3: Vale do Rio Doce ON.

Tabela 4 – Carteiras ótimas para o ano de 2016.

2016					
LPM2,0			Média-Variância		
Ativo	Peso	Risco	Ativo	Peso	Risco
ABEV3	60%	2,84%	ABEV3	68%	2,54%
BRFS3	25%		BRAP4	0%	
CIEL3	15%		BRFS3	10%	
			BRKM5	20%	
			CMIG4	2%	

Códigos: ABEV3: AMBEV ON; BBDC4: Bradesco PN; BBSE3: BBSeguridade ON; BRAP4: Bradespar PN; BRFS3: BRF S.A.ON; BRKM5: Braskem PN; ccro3: Grupo CCR ON; CIEL3: Cielo ON; CMIG4: Companhia Energética Minas Gerais PN; CSNA3: Companhia Siderúrgica Nacional ON; GGBR4: Gerdau PN; ITSA4: Itaúsa PN; ITUB4 Itaú Unibanco PN; KROT3: Kroton ON; OGXP3: PGX Petróleo ON; PETR3: Petrobrás ON; PETR4: Petrobrás PN; USIM5: Usiminas PN; VALE3: Vale do Rio Doce ON.

As tabelas apresentam os resultados nos quais todos os portfólios que mensuram a volatilidade dos ativos seguindo a média-variância obtiveram menor risco. Estrada (2008) argumenta seria indiferente a escolha dentre modelos de otimização de acordo com determinada medida de mensuração do risco, pois o investidor que prima pela minimização do risco terá sempre uma carteira otimizada. Por exemplo, caso o investidor escolhesse o modelo de Markowitz (1952), sua carteira teria um risco mínimo, caso a escolha fosse por semivariância, teria um portfólio também de risco mínimo.

Entretanto, conforme Araujo, Carvalho e Montini (2011), o argumento acima só seria válido se os retornos das carteiras tendessem a serem iguais. Caso contrário, é importante avaliar a relação retorno e risco para selecionar o modelo mais adequado. Assim, faz-se necessário avaliar o retorno das carteiras ótimas apresentadas nas tabelas 2, 3 e 4. O objetivo é analisar a relação Risco/Retorno das carteiras ótimas para averiguar se no período considerado (2012 – 2016) e no contexto dos modelos e restrições deste trabalho, orientar a decisão somente pela minimização do risco é o suficiente. Os índices de eficiência Risco/Retorno das carteiras ótimas estão compilados na tabela 5.

Tabela 5 – Índice Retorno/Risco das carteiras anuais.

Ano	Retorno/Risco	
	LPM2,0	Média Variância
2012	-3,43	7,94
2013	-1,98	4,93
2014	-3,89	5,59
2015	-9,84	-2,69
2016	-0,78	3,41

Os retornos de todas as carteiras de menor risco, ou seja, as carteiras otimizadas seguindo a média-variância, tiveram retornos substancialmente maiores às performances das carteiras LPM2,0. A relação Retorno/Risco foi negativo para todos os portfólios de maior risco, enquanto isso ocorreu apenas em 2015 com a carteira otimizada por média-variância. Isso indica que para essa amostra em específico, a análise de decisão indicaria o modelo de média-variância como melhor opção, seja pelo objetivo inicialmente traçado de obter carteiras de menor risco, seja pela relação retorno/risco. Em um primeiro momento é possível que surja o questionamento sobre como foi possível as carteiras ótimas LPM2,0 terem registrado retornos negativos, se o retorno alvo desejado era zero. A explicação está no fato de que a medida de risco LPM visa minimizar o risco do lado perdas, de acordo com os conceitos expostos na pesquisa de literatura, e considera que o investidor atribui mais valor ao risco de perder do que aos ganhos obtidos. Ocorre que devido ao problema da engoneidade da matriz de cosemivariância, a heurística utilizada passa a adotar o critério de retorno alvo como meta de desempenho de cada ação individualmente. Assim, todas as ações que *performaram* acima do valor desejado ($B=0$), não são uma variável utilizada nos cálculos, conforme já demonstrado na tabela 2.

Portanto, os resultados indicam qual medida de risco fornece o melhor desempenho dentro do contexto da heurística do portfólio e a amostra de dados no estudo, sendo que todas as carteiras que foram otimizadas segundo Markowitz (1952) foram mais eficientes, pois entregaram maior retorno por ponto percentual de risco. Neste momento outra dúvida pode surgir quando se interpreta os resultados: qual a razão de tamanha disparidade entre a eficiência dos dois modelos considerados?

Em uma primeira análise pode-se considerar o tamanho da amostra como uma resposta. Como a amostra para esse estudo foi reduzida as 10 ações com maior volume

de negociação, as ações com alto desempenho são poucas e decisivas para o resultado do portfólio, sendo que como estas não foram consideradas uma variável de entrada para o cálculo da otimização do risco no modelo LPM (novamente, vide exemplo da tabela 2), mas são consideradas para a otimização no modelo média-variância.

5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O trabalho buscou minimizar o risco de carteiras teóricas composta pelos ativos com maior negociação do índice Ibovespa. O objetivo era comparar o resultado utilizando o modelo de média-variância, introduzido por Markowitz em 1952, com a medida de LPM, com grau 2 e alvo igual a zero, que pertence ao grupo de medidas que visam estimar o risco sob a ótica exclusiva das perdas. Para isso, primeiramente, focou-se no desenvolvimento do texto, a discussão sobre a média-variância, sobre *downside risk* e sobre semivariância, uma das formas específicas dos modelos LPM, sem esquecer da problemática nos cálculos da matriz de cosemivariância. Assim, o trabalho de Estrada (2008) foi utilizado como uma forma de viabilizar a análise aqui proposta.

A revisão de literatura aponte o *downside risk* como uma medida de seleção de ativos bem mais adequada que ao clássico modelo de média-variância. Porém, no presente estudo, o risco das carteiras LPM2,0 não foram menores quando compradas as carteiras de mínimo risco segundo o modelo de média-variância. Também não se pode considerar, no contexto deste trabalho, que utilizar o LPM2,0 como método para otimizar portfólios seja uma estratégia exitosa, uma vez que o retorno por medida de risco de todas as carteiras LPM2,0 foi significativamente pior que a eficiência das carteiras de média-variância.

Para melhor compreender essa divergência, entre todo o levantamento bibliográfico e o resultado deste estudo, deve-se atentar para as limitações existentes na presente pesquisa. Primeiramente, a amostra com 10 ativos pode ter sido relevante para a eficiência da carteira LPM2,0, uma vez que com um número limitado de ativos, as carteiras simuladas são similares, fazendo com que a exclusão de determinados ativos para cumprimento das restrições do modelo, fez com que em termos de performance o resultado não tenha sido atrativo. Araujo, Carvalho e Montini (2011), inclusive realizaram testes que indicam que à medida que aumentam o número de ativos nas carteiras, decrescem as diferenças entre os modelos.

Sabendo das críticas e limitações que eventualmente possam ocorrer pelo fato do uso de métodos simplificadores, como a heurística apresentada por Estrada (2008), uma recomendação para trabalhos futuros é investigar outros modelos que viabilizem, em

termos de custos, o estudo de otimização sob a ótica do *downside risk*. Um exemplo é a pesquisa apresentada por Cumova e Nawrocki (2014), que apresenta uma simplificação efetiva em custo computacional e também quanto facilidade de aprendizagem.

Outra recomendação inclui a realização de testes de comparação com o objetivo de apurar as diferenças entre os modelos de otimização, por exemplos: média-variância, semivariância, modelo de Estrada (2008) e modelo de Nawrocki e Cumova (2010) e assim, ser possível averiguar se as heurísticas superestimam ou subestimam os resultados e, ainda, se os portfólios otimizados por meio do modelo clássico de média-variância e semivariância, apresentam resultados significativamente relevantes. Por fim, pode ser interessante utilizar em futuros estudos, *benchmarks* de mercado. Para um investidor, pode ser desejável não obter perdas, sendo assim seu alvo igual a zero. No entanto, mesmo que não haja perda absoluta, pode-se considerar que ocorrerá uma oportunidade de se investir em outros ativos livres de risco (KATO, 2004).

REFERÊNCIAS

ARAUJO, C, A; Comparação entre Métricas de Risco para Otimizar Carteiras de Investimentos em Ações. 2011. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Administração, **Faculdade de Economia Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo**, São Paulo, Brasil.

ARAUJO, A.; CARVALHO, V.; MONTINI, A. A.; Otimização de Carteiras pelo Downside Risk: uma comparação entre modelos. In: **XXXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção-ENEGEP**, 2011.

BAWA, V. S.; Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects. **Journal of Financial Economics**, v..2 n.1 p.95-121, 1975.

BAWA, V. S.; LINDENBERG, E. B.; Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework. **Journal of Financial Economics**, v.5 p.189-200, 1977.

BEZERRA, M. N.; MACHADO, M. A. V. Análise da Eficácia da Variância e de Medidas Downside Risk para Formação de Carteiras. **Enfoque: Reflexão Contábil**. v. 35, n.3, p. 33 -51, Maringá - Paraná, set./dez. 2016.

BIERWAG, G. O.; Liquidity Preference and Risk Aversion with an Exponential Utility Function: Comment **The Review of Economic Studies**, V. 41, P. 301 – 302, abr. 1974.

BORCH, K.; A Note on Utility and Attitudes to Risk, **Management Science**, v. 70, p. 697 - 700, jul. 1963.

BRIGHAM, E. F.; EHRHARDT, M. C. Administração **Financeira: teoria e prática**. São paulo: Cengage Learning, 2006.

CHEREMUSHKIN, S. V. Why D-CAPM is a big mistake? The incorrectness of the cosemivariance statistics. **Working Paper Series**, fev. 2009.

CUMOVA, D.; NAWROCKI, D. Portfolio Optimization in an Upside Potentialand Downside Risk Framework. **Journal of Economics and Business**, v.71, p. 68 -79, 2014.

CUSINATO, F. T.; Teoria da Decisão Sob Incerteza e a Hipótese da Utilidade Esperada: Conceitos Analíticos e Paradoxos. 2001. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Economia, **Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, Porto Alegre, Brasil.

DE BRITO NETO, C. T.; VOLKMER, J. F. **As Carteiras de Investimento e a Semivariância**. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 21, 2001, Salvador. Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção – ENEGEP, 2011.

DE CASTRO JÚNIOR, F. H. F.; FAMÁ, R. As Novas Finanças e a Teoria Comportamental no Contexto da Tomada de Decisão Sobre Investimentos. **Caderno de Pesquisas em Administração**, São Paulo, v. 9, n. 2, abril/junho 2002.

ESTRADA, J. Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach. **Journal of Applied Finance**, v.18, n.1, p. 57-72, Spring-Summer, 2008.

FABOZZI, F. J.; GUPTA, F.; MARKOWITZ, H. M. The Legacy of Modern Portfolio Theory. **Institutional Investor**, 2002.

FARIAS, T.A.; MOURA, F.R.; Carteiras Eficientes e Ingênuas: uma análise comparativa com o uso do modelo de Markowitz. **Revista de Economia Mackenzie**, v.11, n.2, mai./ago.2013.

FELDSTEIN, M. S.; Mean- Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection. **The Review of Economic Studies**, v. 36, p. 5 -12, jan. 1969.

FISHBURN, P. C.; **On the Foundations of Mean-Variance Analyses**. Mimeo, 1975.

FISHBURN, P. C. Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. **The American Economic Review**, v. 67, n. 2, p. 116-126, março 1977.

JARROW, R.; ZHAO, F. Downside Loss Aversion and Portfolio Management. **Management Science**. v. 52, n.4, abr. 2006.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**, v. 47, n.2, p. 263 -291, mar. 1979.

KATO, F. H. Análise de carteiras em tempo discreto. São Paulo, 2004. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Administração, **Faculdade de Economia** Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

LINTZ, A.; RENYI, L. Comparação de Estimadores de Volatilidade na Administração de Carteiras de Investimento: Uma Abordagem Através do Modelo de Markowitz. In: **III SemeAd - Seminários de Administração da FEA/USP**, 1999, São Paulo.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77 – 91, mar.1952.

MARKOWITZ, H. Portfolio **Selection: Efficient Diversification of Investments**. Nova York: John Wiley & Sons, 1959.

NAWROCKI, D. N. A Brief History of Downside Risk Measures. **The Journal of Investing**, v. 8, n. 3, p. 9 -25, outono de 1999.

NAWROCKI, D.; STAPLES, K.; A customized LPM Risk Measure for Portfolio Analysis. **Applied Economics**, v. 21, n. 2, p. 205 -218, 1989.

VON NEUMANN, J; MORGENTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. New Jersey: Princeton University Press, (1944 [1980]).

QUIRK, J. P.; SAPOSNIK, R.; Admissibility and Measurable Utility Functions, **The Review of Economic Studies**, v. 29, p. 140 – 146, fev. 1962

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa Social: Métodos e Técnicas**. São Paulo: Atlas, 1999.

ROMAN, D.; MITRA, G. Portfolio Selection Models: A Review and New Directions. **Wilmott Journal**, V.1, n. 2, p 69 – 85, abril 2009.

ROY, A. D. Safety First and the Holding of Assets. **Econometrica**, v. 20, n. 3, p. 431-449, jul. 1952.

SALAH, H. B.; CHAOUCH, M.; GANNOUN, A.; PERETTI, C. Mean And Median-Based Nonparametric Estimation of Returns in Mean-Downside Risk Portfolio Frontier. **Financial Economics**, p. 653 -681, jun. 2016.

SAMUELSON, P. A.; General Proof that Diversification Pays, Journal **of Financial and Quantitative Analysis**, v. 2, p. 1 -13, mar.1967.

SORTINO, F. A.; 2001. **From Alpha to Omega.** in Sortino. Satchell, 2001.

TSIANG, S.C.; "The Rationale of the Mean- Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money. **American Economic Review**, p. 354 – 71, jun. 1972.