

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

## **Projeto Final 2**

**Tema: Análise Elástica e Elastoplástica de Edifícios de Aço  
de Andares Múltiplos**

**Orientador:**

Nome: José Humberto Matias de Paula

**Aluno:**

Nome: Antonio Hildenberg Soares de Oliveira Filho

Matricula: 12/0110997

**Brasília  
06 de Dezembro de 2017**

Projeto Final de Graduação 02

Aluno: Antonio Hildenberg Soares de Oliveira Filho

Matricula: 12/0110997

Orientador: José Humberto Matias Paula

## **ANALISE ELÁSTICA E ELASTOPLÁSTICA DE EDIFÍCIOS DE AÇO DE ANDARES MÚLTIPLOS**

Projeto de Monografia apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade de Brasília, como requisito parcial para conclusão do Bacharelado em Engenharia Civil.

Brasília

06 de Dezembro de 2017

Este trabalho compõe a primeira parte do projeto final de graduação intitulado “Análise Elástica e Elastoplástica de Edifícios de Aço de Múltiplos Pavimentos” de autoria de Antonio Hildenberg Soares de Oliveira Filho realizado conforme as diretrizes do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade de Brasília (ENC).

Aprovado pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

---

Prof<sup>a</sup> MSc. José Humberto Matias de Paula – ENC/UnB - Orientador

---

Prof. Dr. Lenildo Santos da Silva – ENC/UnB

---

Prof. MSc Marco Aurélio Souza Bessa- Externo

## RESUMO

A análise estrutural de edifícios compõe uma das principais atividades no desenvolvimento de projetos de edificações e no entendimento do comportamento da estrutura. O produto de uma análise estrutural prevê a determinação dos esforços e dos deslocamentos dos elementos estruturais permitindo seu dimensionamento de forma segura e compatível com os critérios de economia e funcionalidade previstos pelas normas e pelo mercado. O processo de análise tradicional envolve a determinação dos esforços na estrutura indeformada, ou seja, na sua configuração inicial proposta e não leva em consideração as mudanças no regime de deformação do material, predominando, em todas as circunstâncias, o regime elástico. Por fim esses resultados são utilizados no dimensionamento da estrutura considerando a capacidade limite de suporte dos materiais no regime plástico, conforme recomendam as normas, o que gera maior economia e ductibilidade para a estrutura. Este trabalho visa, portanto, revisar as metodologias que englobam a determinação dos esforços na estrutura a partir de um análise elastoplástica, que compreende a formação de rótulas plásticas nas seções mais solicitadas e que geram uma reconfiguração dos diagramas de esforços na estrutura, para um maior entendimento do comportamento dos elementos estruturais. Em seguida será implantado um software para modelagem e previsão dos diagramas de esforços oriundos da análise elastoplástica. O resultado servirá de base para a avaliação de um edifício de aço de múltiplos pavimentos que comporá a segunda parte deste trabalho.

**Palavras-chaves:** análise estrutural, análise plástica elastoplástico, elástico, aço, rótula plástica, edifícios de múltiplos pavimentos

## Lista de Figuras

Figura 1 - Viga bi-apoiada com carga concentrada no centro do vão .....	12
Figura 2 - Diagrama tensão-deformação do aço; Beedle [2] .....	14
Figura 3 - Diagrama Momento-Curvatura; Beelde [2] .....	16
Figura 4 - Tensões e Deformações em estágios de flexão .....	18
Figura 5 - Distribuição de tensão na presença de esforços axiais de compressão (Beedle, pág108) .....	25
Figura 6 - Curva típica para seções I ao longo de todo o domínio de interação momento-força axial. Beedle[2].....	27
Figura 7 - Curva aproximada para qualquer seção I. Beedle [2] .....	27
Figura 8 - Ensaio de coluna com carga axial excêntrica aplicada. Beedle [2].....	28
Figura 9 - Análise de viga em balanço e combinação de fletor-cortante na plastificação da seção. Beedel [2] .....	30
Figura 10 - Curvas de influência do esforço cortante .....	32
Figura 11 - Ensaio de viga bi apoiada com cargas concentradas próximos aos apoios. Beedle[2] .....	34
Figura 12 - Diagrama de momentos de peças transversalmente carregada.....	37
Figura 13 - Pórtico de banzos paralelos .....	39
Figura 14 - Diagrama de momentos fletores do pórtico.....	41
Figura 15 - Portico Plano.....	42
Figura 16 - Análise da recarga plástica em viga (Davis & Brown, 1996).....	46
Figura 17 - Análise de curvas cargas-deslocamentos para estruturas porticadas. (Davis & Brown, 1996) .....	47
Figura 18 - Planta baixa do pavimento tipo da edificação .....	55
Figura 19 - Corte Esquemático do pórtico principal da edificação.....	55
Figura 20 - Lançamento da estrutura. Legenda: Linha continua: vigotas de sustentação das lajes. Linhas tracejadas: Vigas dos pórticos principais e secundários.....	57
Figura 21 - Exemplo de viga bi-apoiada suportando duas vigotas.....	58
Figura 22 - Coeficiente de forma externo.....	66
Figura 23 - Vento a 90° sobre portico de empena. ....	67
Figura 24 - Vento 90° Pórtico Intermediário.....	68
Figura 25 - Definição da Capacidade de Rotação .....	
Figura 26 - Histograma fator de forma perfis tipo H, na direção XX.....	76
Figura 27 - Histograma fator de forma perfis tipo I na direção XX.....	77
Figura 28 - Fator de forma perfis H na direção YY .....	77
Figura 29 - Histograma perfis I na direção YY.....	78
Figura 30 - Relação entre as inércias principais dos perfis Gerdau .....	81
Figura 31 - Superfícies de interação normal x fletor .....	82
Figura 32 - Trechos de uma viga continua e seus mecanismos. a) Vão central. b) Vão da empena. ....	84

<i>Figura 33 - Distribuição de tensões para seção plastificada para interação completa.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 34 - Lançamento da viga secundária de bordo .....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 35 - Lançamento do pórtico central .....</i>	<i>94</i>
<i>Figura 36 - Mecanismo formado para o portico central .....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 37 - Contraventamento dos pórticos secundários .....</i>	<i>98</i>
<i>Figura 38 - Diagrama cargas x deslocamentos da estrutura para todas as tentativas.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 39 - Mecanismo do portico de empena.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 40 - Graficos fator de carga x deslocamentos para o pórticos de empena .....</i>	<i>101</i>

## Sumário

1. INTRODUÇÃO .....	9
2. OBJETIVOS .....	10
3. PRINCIPIOS DA ANALISE ELASTOPLASTICA.....	11
3.1. Parâmetros de estudo na análise elastoplástica.....	11
3.1.1. Diagrama tensão-deformação do aço e relação momento-curvatura.....	13
3.1.2. Plastificação de uma seção retangular .....	18
3.1.3. Rótula Plástica, Redistribuição de Momentos e Mecanismos de Ruptura .....	21
3.1.4. Plastificação de uma seção I .....	23
3.2. Interação do cortante e esforço normal.....	24
3.2.1. Efeito do esforço normal.....	24
3.2.2. Efeito do esforço cortante .....	29
4. MÉTODOS DE ANALISE PLÁSTICA DE ESTRUTURAS.....	35
4.1. Teorema Estático .....	35
4.2. Teorema Cinemático .....	36
4.3. Teorema da Unicidade .....	36
4.4. Análise de pórtico com cargas distribuídas.....	36
4.5. Colapso Plástico.....	38
5. MÉTODOS DE VALIDAÇÃO DO MECANISMO (MOMENT CHECK).....	39
5.1. Método da tentativa e erro .....	39
5.2. Método da combinação de mecanismos.....	42
6. OUTRAS CONSIDERAÇÕES EM ANÁLISE PLÁSTICA.....	44
6.1. Acomodação Plástica (Shakedown).....	44
6.2. Recarga Plástica e Falsos Mecanismos .....	45
7. ANALISE DE INSTABILIDADE GLOBAL.....	46
7.1. Método de Rankine-Merchant.....	49
8. MÉTODOS DE ANÁLISE COMPUTACIONAL .....	53
8.1. MASTAN 2.....	53
8.2. Software Viga Mista 3.0 .....	53

9.	CRITÉRIOS DE PROJETO .....	54
9.1.	Considerações Gerais .....	54
9.2.	Tipologia estrutural .....	56
9.3.	Estados Limites .....	59
9.4.	Ações.....	60
9.4.1.	Ações Permanentes .....	60
9.4.2.	Ações Variáveis.....	61
9.4.2.1.	Ações de vento.....	62
9.5.	Combinações de Carga.....	68
9.6.	Propriedades do material .....	70
9.7.	Perfis estruturais.....	70
9.7.1.	Perfis com capacidade de rotação plástica.....	72
9.8.	Recomendações para análise plástica em edifícios de múltiplos pavimentos .....	79
9.8.1.	Análise dos fatores de carga em projeto.....	79
9.8.2.	Análise em pilares .....	80
9.8.3.	Recomendações para o travamento lateral de peças fletidas .....	83
9.8.4.	Análise de vigas .....	84
9.9.	Crítérios de dimensionamento de elementos mistos em aço e concreto.....	86
10.	DIMENSIONAMENTO DA ESTRUTURA.....	90
10.1	Dimensionamento das lajes.....	90
10.2.	Dimensionamento das vigas secundárias .....	91
10.3.	Dimensionamento do Pórtico Central .....	94
10.4	Dimensionamento dos Pórticos de Empena.....	99
11.	AVALIAÇÃO DO CONSUMO DE AÇO .....	102
12.	CONCLUSÃO .....	103
13.	BIBLIOGRAFIA.....	104



## 1. INTRODUÇÃO

O diagrama tensão-deformação dos elementos estruturais compõe uma das principais ferramentas de análise do comportamento dos materiais da construção civil. As diferenças entre suas propriedades é que tornam diversas as possibilidades de aplicação em estruturas reais. O estudo desse comportamento é dividido em diversas fases desde o momento inicial de aplicação dos carregamentos até a ruptura do elemento a ser analisado. Concomitantemente, aplicam-se sensores de deformação no elemento que permitem captar alongamentos e encurtamento das fibras do material, dependendo do tipo de esforço predominante a ser aplicado.

Essas curvas são frequentemente divididas em diversas fases, porém as mais comumente trabalhadas são a **zona elástica** e a **zona plástica**, e suas transições. A zona elástica compreende a faixa para a qual existe uma relação proporcional entre as tensões aplicadas e as deformações obtidas, além disso nota-se que o material tem capacidade de repor parcialmente sua configuração inicial, o que tipifica a nomenclatura dessa fase. A zona plástica é a fase na qual essa proporção entre as tensões e deformações não se aplica, tendendo as deformações a serem muito sensíveis e elevadas a incrementos graduais de carga, fenômeno descrito como a não linearidade física do material. Nota-se, também, que durante a plastificação o elemento não tende a reassumir sua configuração inicial, implicando em deformações permanentes à estrutura. A relação que comprova a proporção entre essas grandezas é atribuída à rigidez do elemento, dado tanto pelo material como pelas suas propriedades geométricas dependendo do tipo de esforço a ser analisado. Diversos modelos simplificados trabalham apenas com essas duas zonas em diversas variações na qual são gerados diagramas simplificados

Tipicamente o projeto de estruturas é feito no regime elástico, tanto para a obtenção dos carregamentos como para análise da resistência dos elementos. Nesse sentido, incorporar no dimensionamento o efeito da plastificação do material pode trazer ganhos de economia e uma compreensão mais realista do comportamento real de ruptura da estrutura, conforme Beedle [2].

## **2. OBJETIVOS**

### **1.1. Objetivos gerais:**

O presente trabalho tem o objetivo geral de propor um estudo comparativo entre os resultados do dimensionamento de um edifício em aço de quatro pavimentos, com três vãos que serão analisados através de um pórtico plano reticulado com dimensões padronizadas.

O dimensionamento da estrutura será realizado por meio de uma análise elastoplástica de primeira ordem e em seguida por meio de uma análise elastoplástica de segunda ordem. Os resultados para a análise de primeira e de segunda ordem serão gerados o auxílio do software MASTAN2 desenvolvido por Ronald Ziemian e William McGuire além de outros recursos computacionais disponíveis para este tipo de análise.

### **1.2. Objetivos Específicos:**

- a) Rever os conceitos e procedimentos envolvendo a análise plástica de estruturas em elementos de aço com suficiente ductibilidade;
- b) Analisar o comportamento de rótulas plásticas e sua influência na redistribuição de momentos e formação de mecanismos em pórticos planos de múltiplos pavimentos;
- c) Utilizar software para a análise elastoplástica de primeira ordem e de segunda ordem com o software MASTAN2;
- d) Comparar os resultados obtidos em termos de economia de material entre dois pórticos padronizados dimensionados pelos modelos citados.

### **3. PRINCIPIOS DA ANALISE ELASTOPLASTICA**

A análise plástica é um método de dimensionamento de estruturas de aço que se baseia na determinação de uma carga última de colapso capaz de gerar grandes deformações na estrutura a ponto de torna-la impraticável. Segundo Beedle [2] este método mostra uma grande vantagem no dimensionamento estrutural em relação aos tradicionais métodos elásticos por permitir incorporar no modelo uma resistência adicional à estrutura em decorrência do processo de plastificação do material que, conseqüentemente, gera uma maior economia de recursos em relação aos demais métodos.

Atualmente, as diretrizes fornecidas no dimensionamento de estruturas de aço incorporando a análise plástica são de grande valia em projetos de edifícios de múltiplos pavimentos, como prédios residenciais e comerciais, por fornecerem, com maior precisão, o comportamento da estrutura na situação de colapso e permitirem uma maior economia de material, como citado anteriormente. Os capítulos que se seguem visam fornecer as bases para uma metodologia a ser aplicada na análise estrutural deste tipo de estrutura.

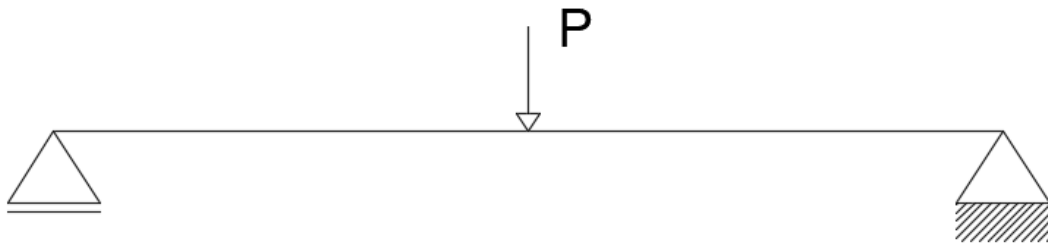
#### **3.1. Parâmetros de estudo na análise elastoplástica**

Uma estrutura de múltiplos pavimentos tem o seu comportamento ditado pela flexão de seus elementos, principalmente lajes e vigas, em decorrência das dimensões dos seus vãos necessários para a ocupação adequada da área construída.

Essa característica associada às propriedades do aço permite prever o comportamento da estrutura na situação de colapso provocado por um conjunto de carga externas atuando em seus elementos. Segundo Beedle [2] o colapso plástico é definido como a situação de ruína da estrutura provocado pela plastificação de diversas seções críticas do elemento ao ponto de que as deformações elevadas no mesmo tornam a estrutura instável a medida que uma carga externa é aplicada com consecutivos aumentos na estrutura.

O método se baseia em determinar qual o valor da carga, para um determinado ponto de aplicação e uma dada condição de contorno na estrutura que gera essa condição de instabilidade. Como exemplo podemos supor uma

viga bi-apoiada como a da imagem abaixo com uma carga  $P$  aplicada no meio do seu vão.



*Figura 1 - Viga bi-apoiada com carga concentrada no centro do vão*

O momento fletor gerado pela carga tende a fletir a viga induzindo uma determinada curvatura ao elemento. Essa deflexão é atingida pela formação de um momento fletor resistente na seção que se iguala, para garantir o equilíbrio, ao momento fletor aplicado para cada trecho do vão. O esforço resistente é mantido pela formação de tensões de tração nas fibras inferiores do elemento e de compressão nas fibras superiores. A distribuição dessas tensões ao longo da seção depende de algumas hipóteses que serão adotadas ao longo de toda explanação do conceito de análise plástica, sendo elas:

- a) Não se admite tensões de tração e compressão decorrentes de esforços axiais, torçores e cisalhantes (Posteriormente será feita uma análise avaliando a influência desses esforços no cálculo plástico);
- b) As deformações são pequenas, tornando válida a análise de pequenos deslocamentos;
- c) As seções permanecem planas após flexão (Hipótese de Bernoulli);
- d) A relação entre tensões e deformações é linear ao longo da seção.

Como consequência das hipóteses acima a distribuição de tensões ao longo da seção tende a ser linear com valores máximos, tanto na compressão como na tração, nas fibras mais externas e assumindo um valor nulo na região do centroide da seção. Outra característica é que as tensões não variam ao longo de uma mesma profundidade na seção.

A medida que se aumenta o valor da carga  $P$  o momento fletor resistente aumenta provocado pelo acréscimo de tensões. Paralelamente a curvatura da viga aumenta acompanhada pelas deformações das fibras da seção. Para um

determinado valor de  $P$ , as tensões nas fibras extremas da seção localizada no meio do vão atingem o valor máximo possível, definido como a tensão de escoamento do aço ( $f_y$ ). A partir deste ponto define-se que a seção iniciou o processo de plastificação e atingiu o fim do seu comportamento elástico. Para cada acréscimo sucessivo na carga  $P$  o aumento do momento fletor resistente nesta seção se dará aumentando a região plástica, incorporando mais fibras ao escoamento mantendo as tensões na seção limitada ao valor máximo de  $f_y$ . Neste momento a seção encontra-se parcialmente plástica e elástica, e a curvatura na viga tende a aumentar em taxas mais acentuadas que na condição puramente elástica. A medida que  $P$  aumenta é possível identificar que as demais fibras da seção se plastificam aumentando a profundidade da zona de escoamento em direção à linha neutra e conseqüentemente a curvatura da viga aumenta de forma acelerada para pequenos acréscimos de carga. As deformações das fibras tendem a se acentuar para valores na ordem de 1,5 vezes seu tamanho inicial (Beedle, pág 5) e nesse instante admite-se que o elemento apresenta uma deformação incompatível com sua finalidade ou uma condição instável. A carga responsável por essa condição na estrutura analisada é definida como a **carga crítica de colapso plástico** ou **carga última** por ser capaz de gerar grandes deformações na estrutura.

### **3.1.1. Diagrama tensão-deformação do aço e relação momento-curvatura**

Uma das principais propriedades do aço que permite o dimensionamento da estrutura a partir da análise elastoplástica é o escoamento das fibras da seção e a manutenção de uma tensão praticamente uniforme durante o regime plástico gerando grandes deformações para pequenos acréscimos de carga.

De uma forma geral o comportamento de aços temperados é dividido em diversas etapas de acordo com o nível de carregamento ao qual a peça é submetida. A relação entre a tensão e a deformação medida nas fibras dos elementos metálicos é tipicamente exemplificada pela imagem abaixo.

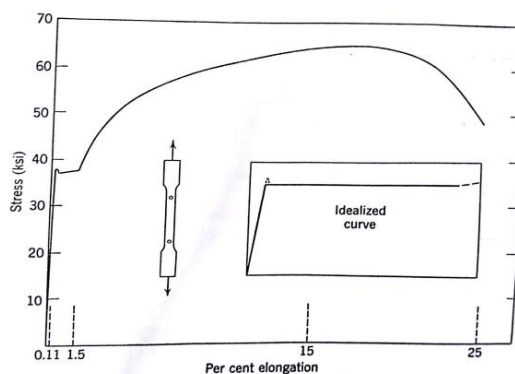


Figura 2 - Diagrama tensão-deformação do aço; Beedle [2]

A primeira fase do diagrama, referente a zona linear, corresponde ao trecho elástico, no qual as deformações são diretamente proporcionais as tensões aplicadas e a relação entre esses parâmetros é dado pelo módulo de elasticidade do material ( $E$ ). O trecho apresenta, portanto, um comportamento linear até uma deformação limite de 0,11m/m e pode ser formulado a partir da equação abaixo:

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{Equação 1}$$

Onde  $\sigma$  representa a tensão em  $\text{kgf/cm}^2$ ,  $E$  o módulo elasticidade que de acordo com a NBR 8800 pode ser adotado como  $200.000\text{kgf/cm}^2$  e  $\epsilon$  a deformação em m/m. A medida que o nível de tensões na seção aumenta até atingir a tensão de escoamento do aço  $f_y$ , as fibras iniciam o regime plástico na qual é observada a manutenção da tensão de escoamento e elevadas deformações na fibra. Esse trecho é definido na zona parcialmente horizontal do gráfico quando as deformações estão contidas no intervalo entre 0,10m/m e 1,5m/m aproximadamente. A existência da zona plástica é umas das propriedades que torna viável o dimensionamento de estruturas a partir de uma análise plástica e permite incorporar uma maior resistência aos elementos metálicos.

Por último após o escoamento da fibra observa-se que o aço apresenta um ganho de resistência, sendo admitido um novo trecho na relação constitutiva do material definido como encruamento ou *strain-hardening*. Nesse trecho o material passa a ter uma nova relação média entre a tensão e a deformação, definido como  $E_{st}$ , onde o prefixo se refere a strain-hardening. Ao final desta etapa observa-se uma perda de resistência do aço coincidindo com um fenômeno definido como estrição, na qual em ensaios de tração de barras

cilíndricas simples, observa-se o encurtamento do diâmetro da barra até a ruptura física do elemento, finalizando o ensaio.

A zona de encruamento do aço corresponde a faixa de maior visibilidade no domínio de deformações de um ensaio tensão-deformação. Em média a deformação atingida pelo aço no momento da ruptura física pode atingir 0,25m/m ou seja, quase 25% o tamanho inicial da fibra. Além disso o módulo de encruamento ( $E_{st}$ ) tem um comportamento muito variável ao longo de toda essa zona. Pelos motivos citados acima a incorporação do ganho adicional de resistência na fase de encruamento não será considerada nos métodos de análise plástica utilizados neste texto. Sendo assim é recomendável utilizar, para fins de simplificação um diagrama tensão-deformação incorporando apenas a zona elástica linear e a plástica horizontal, conhecido como diagrama elastoplástico perfeito para fins de análise plástica da estrutura. A figura 03 ilustra uma relação simplificada definida anteriormente e que será utilizada como referência no desenvolvimento da análise plástica deste trabalho.

Os conceitos definidos anteriormente entre as tensões aplicadas e as deformações atingidas fornecem uma compreensão da resistência do aço como material estrutural. Para elementos predominantemente fletidos é importante analisar também o efeito da rigidez do elemento estrutural aos momentos fletores aplicados. Nesse caso uma relação entre o momento resistido e a curvatura correspondente para um trecho unitário do elemento fornece uma boa compreensão do comportamento da estrutura.

Um típico exemplo de relação momento-curvatura para uma viga bi-apoiada de seção constante com carga concentrada no seu ponto médio do seu vão central pode ser visto na figura abaixo, incorporando um comportamento elastoplástico perfeito para o aço.

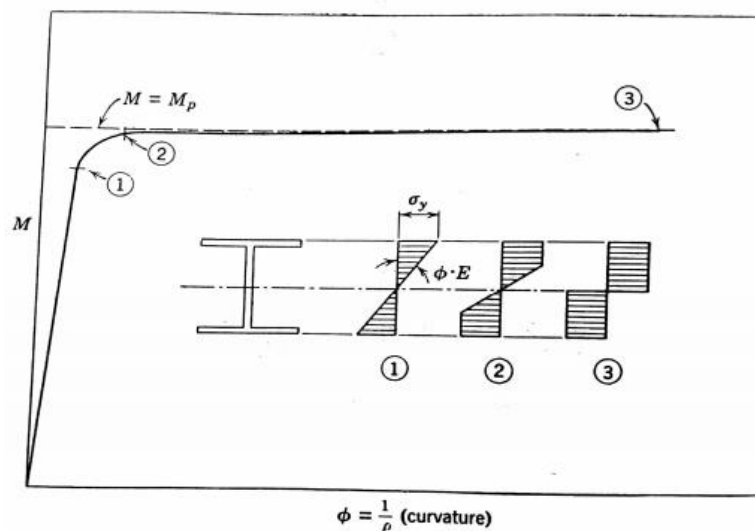


Figura 3 - Diagrama Momento-Curvatura; Beelde [2]

Nota-se que, inicialmente, a relação entre o momento aplicado e a curvatura medida é elástica e, portanto, linear com uma inclinação equivalente a rigidez da viga. Essa rigidez pode ser analisada pela combinação da elasticidade do aço e pela geometria da seção o que é equivalente a equação abaixo:

$$R = EI \quad \text{Equação 2}$$

Onde E representa o módulo de elasticidade do aço e I a inércia da seção em relação ao eixo horizontal que passa pelo centroide da seção. O momento fletor nesta zona pode ser obtido da seguinte relação.

$$M = EI\phi \quad \text{Equação 3}$$

No qual M é o momento fletor atuando na seção ao longo do vão em Nm e  $\phi$  a curvatura da viga gerada pela flexão em  $m^{-1}$ . Dada a relação acima, a medida que o momento fletor aumenta a curvatura segue a mesma proporção até o início do escoamento das fibras extremas da seção central da viga conforme indicado no diagrama. O momento no qual esta configuração é atingida é classificado como  $M_y$ , e representa o final do regime elástico da seção.

A partir deste ponto, novos incrementos na carga concentrada geram uma elevação do momento fletor resistido. Para aumentar a capacidade resistente da seção a tensão não mais cresce de forma proporcional às deformações quando ela atinge o valor da tensão de escoamento  $f_y$ . Como analisado anteriormente a tensão tende a permanecer constante no valor de  $f_y$  durante o escoamento da



fibra. Para aumentar a resistência ao momento atuante as tensões das fibras adjacentes aos bordos mais externos, tendem a escoar sucessivamente em direção a linha neutra e o diagrama de tensões na seção passa a ser dividido em duas zonas uma, uma parcialmente plástica e outra elástica. Durante esta etapa a curvatura da viga tende a aumentar em taxas mais elevadas para cada novo incremento de carga e isso se deve ao início da plastificação das seções centrais da viga exemplificada.

Por esse motivo a inclinação da curva que fornece a relação momento-curvatura da viga diminui sucessivamente, nas condições de contorno fornecidas, e perde-se a linearidade da relação entre esses dois parâmetros tornando inválida a equação 3. A medida que a zona plástica aumenta sua profundidade, se aproximando da linha neutra, a curvatura aumenta consideravelmente em decorrência do aumento das deformações das fibras nas seções centrais da viga e a curva tende a uma inclinação nula assintótica para um determinado valor de momento resistente.

Em uma condição ideal onde toda a seção central da viga plastifica a curvatura aumentaria indefinidamente tendendo ao infinito, pois nesse ponto a tensão em qualquer fibra permaneceria constante e suas deformações se prolongariam em taxas elevadas. Na prática, no entanto, essa condição não ocorre pois seria impossível atingir uma curvatura infinita, fletindo a viga de forma indefinida. Isso implica, na realidade, que a seção central da viga permanece parcialmente plastificada, possuindo uma zona elástica no seu interior. Mesmo nessa condição observa-se que pequenos incrementos na carga  $P$  aumentam a curvatura de forma elevada. O momento responsável pela plastificação plena da seção é denominado como momento de plastificação ( $M_p$ ) e embora não possa ser atingido, observa-se que dependendo da geometria da seção é possível alcançar percentuais elevados do seu valor, conforme será visto no capítulo seguinte.

Nas condições acima, as deformações excessivas, conforme pode-se ver na curva típica que fornece a relação momento-curvatura no seu trecho mais horizontal, comprometem sua funcionalidade e de toda a estrutura, admitindo-se

uma condição de colapso no elemento, mesmo sem que a peça tenha atingindo a ruptura da seção.

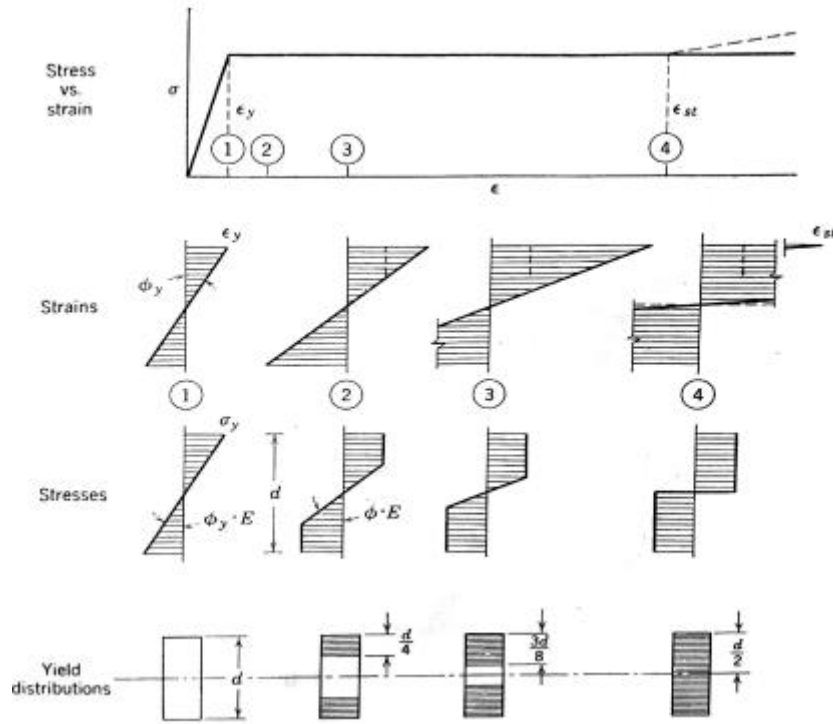


Figura 4 - Tensões e Deformações em estágios de flexão

Todas as propriedades ilustradas neste tópico mostram de que forma a análise plástica pode ser aplicada visando um dimensionamento mais econômico incorporando o ganho de resistência proporcionado pelo processo de plastificação da seção ao invés de se analisar a estrutura incorporando apenas análise elástica. Outros fatores tornam este método mais prático e preciso conforme será analisado nas seções posteriores.

### 3.1.2. Plastificação de uma seção retangular

Aplicando os conceitos e comportamentos ilustrados na seção anterior é possível compreender o processo de plastificação de uma seção retangular e definir os principais parâmetros geométricos e físicos que fundamentam a análise plástica de estruturas.

Como analisado anteriormente o momento fletor resistente da seção pode ser fornecido pela equação 3. Uma outra forma de obtê-lo é considerando o

equilíbrio dos esforços internos na seção, ou seja, conhecendo a distribuição de tensões ao longo da seção o somatório da força de compressão gerada nas fibras comprimidas deve ser igual ao da força de tração nas fibras opostas. Isso gera um binário em relação ao centroide da seção responsável por resistir ao momento externo aplicado na seção. Essa condição é expressa através da integral abaixo.

$$M = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y \quad \text{Equação 4}$$

Desenvolvendo a equação acima pode-se relacionar o momento fletor resistente a dois parâmetros: a tensão atuante  $\sigma$  e ao módulo resistente da seção ( $W$ ) em  $m^3$ . O momento pode ser obtido da seguinte forma:

$$M = \sigma \cdot W \quad \text{Equação 5}$$

Essa segunda propriedade relaciona a inércia da seção em relação a distância da fibra mais externa à linha neutra para cada nível de tensão, seja compressão ou tração. Para uma seção retangular o módulo resistente é igual para as duas zonas e pode ser escrito em função de suas propriedades geométricas, conforme abaixo.

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^2}{6} [m^3] \quad \text{Equação 6}$$

Quando a seção inicia seu processo de plastificação o trecho elástico diminui, dando espaço para uma zona plástica a partir das fibras mais externas. Quando o escoamento atinge todas as fibras da seção, que como visto anteriormente, se trata de uma situação hipotética, o momento resistente é máximo e por definição é denominado como momento de plastificação  $M_p$ . Utilizando o equilíbrio dos esforços na seção é possível determinar uma nova formulação para o momento fletor resistido, da seguinte forma:

$$M_p = \sigma_y Z \quad \text{Equação 7}$$

No qual  $Z$  representa o módulo plástico da seção em  $m^3$  e pode ser analisado de forma análoga ao módulo resistente no sentido de ser uma propriedade intrínseca da geometria da seção. Por definição, o módulo plástico pode ser calculado como somatório do momento de primeira ordem da zona comprimida e da zona tracionada, ou seja:

$$Z = A_t y_t + A_c y_c \quad \text{Equação 8}$$

No qual  $A$  representa parte da área da seção,  $y$  a altura do centroide da área em relação à fibra com deformações nulas durante a plastificação, e os sufixos  $t$  e  $c$  representam a zona tracionada e comprimida respectivamente. É possível notar desta definição, que a linha divisória do campo de tensões na seção, onde as fibras não são solicitadas, não necessariamente coincide com o centroide da seção, e conseqüente com a linha neutra. Essa condição se observa quando há alguma assimetria na seção. Observando o fato de que a tensão em uma seção plastificada é uniforme e corresponde a  $\sigma_y$ , da condição de equilíbrio de forças atuando na mesma, chega-se à conclusão que a área comprimida deve ser igual a área tracionada, e, portanto, a linha divisória, sobre a qual são medidos os momentos estáticos de cada zona deve ser a linha que divide a seção em duas áreas iguais. Para seções simétricas, como a seção retangulares, essa condição só é estabelecida pela linha que perpassa o centroide da seção, coincidindo com a linha neutra da mesma.

Para seções em regime de transição entre o limite plástico e elástico a distribuição de tensões é alterada substancialmente e as equações anteriores perdem o domínio de validade para toda a altura da seção. Uma nova equação em função da distribuição observada é deduzida por Beedle [2] da seguinte forma:

$$M = \sigma_y W_e + \sigma_y Z - \sigma_y Z_e \quad \text{Equação 9}$$

Na qual  $W_e$  representa o módulo resistente da zona que permanece elástica e  $Z$  o módulo plástico da seção. Aplicando o princípio da superposição na equação 9, é possível desprezar uma parte do modulo plástico referente a zona elástica, dessa forma é introduzida a variável  $Z_e$ , equivalente ao modulo plástico do trecho da seção que está no estado elástico. A diferença entre os dois últimos termos da equação 9 representa a contribuição da zona efetivamente plastificada na seção. A equação 9 pode ser reescrita em termos das grandezas atuantes sendo:

$$M = \sigma_y W_e + \sigma_y Z_p \quad \text{Equação 10}$$

Segundo Beedle a equação 10 pode ser expandida em termos da curvatura gerada pelo momento aplicado da seguinte forma:

$$M = \sigma_y \left( Z - \frac{b\sigma_y^2}{3E^2\phi^2} \right) \quad \text{Equação 11}$$

No qual dividindo a equação acima pelo momento de início de escoamento da seção gera-se uma relação adimensional conforme abaixo.

$$\frac{M}{M_y} = \frac{Z}{W} - \frac{b\sigma_y^2}{3WE^2\phi^2} \quad \text{Equação 12}$$

Uma curva típica representada pela equação acima é demonstrada na imagem 02. Para um momento elevado onde a curvatura tende a ser expressiva, supondo tendendo ao infinito a segunda parcela da equação 12 tende a ser nula. Tal condição é hipoteticamente atingida quando o momento resistente equivale ao momento de plastificação e é representada pelo trecho parcialmente horizontal da curva momento curvatura. Segundo a equação 12, a relação entre o momento de plastificação e o momento de início de escoamento é dada pela proporção entre os módulos resistente e plástico. Essa variável é definida como fator de forma (f) e representa a capacidade resistente da seção além do regime elástico.

$$f = \frac{M_p}{M_y} = \frac{Z}{W} \quad \text{Equação 13}$$

O fator de forma varia essencialmente pela geometria da seção. Para uma seção retangular o valor obtido é de 1,5. Para seções circulares chega-se a 1,7 e para seções em I varia entre 1,10 e 1,18 com uma média em 1,14, segundo Beedle [2]. Tal grandeza, apesar de expressar uma reserva de resistência deve ser bem avaliada em decorrência do aumento expressivo das flechas que a peça passa a absorver após o atingimento do momento de escoamento da seção.

### **3.1.3. Rótula Plástica, Redistribuição de Momentos e Mecanismos de Ruptura**

A plastificação de uma seção não é um fenômeno isolado ao longo de um elemento estrutural por estar diretamente relacionado com os momentos fletores aplicados ao longo do vão. Quando uma seção plastifica inteiramente nota-se que em seções adjacentes uma parte das fibras também plastificam aumentando a abrangência da zona plastifica e influenciado de forma relevante nos deslocamentos obtidos.

Toda a zona plastificada ao redor da seção analisada passa a se comportar como uma rótula na qual é mantido um momento aplicado equivalente ao momento de plastificação. Esse fenômeno é definido como rótula plástica, que segundo Beedle [2] é uma zona de escoamento em decorrência da flexão do elemento estrutural e sempre deve ocorrer nos pontos de máximo momento aplicado ao longo do vão. O comprimento de uma rótula plástica se estende desde a seção escoada até os pontos onde o momento aplicado sejam menores que o momento de início de escoamento  $M_y$ . A formação de rótulas plástica é fundamental para a compreensão da análise plástica.

Para uma viga biengastada com carregamento linear aplicado transversalmente em relação ao vão os momentos máximos surgem, inicialmente, nos apoios extremos. Após atingir o momento de plastificação a capacidade resistente da viga se esgota nesses contornos e o momento resistido se mantém igual a  $M_p$ . O incremento de resistência é proporcionado pelas demais seções da viga que ainda não plastificaram. O momento fletor resistente tende a se elevar na seção central da viga até o momento que o momento resistente atinge o valor de  $M_p$  na seção central. Nesse momento a viga perde sua capacidade resistente e suas deformações se elevam em taxas superiores as anteriores, notando-se uma elevada curvatura no elemento.

A capacidade de transmitir os momentos fletores para outras zonas ainda não plastificada da seção é chamada de redistribuição de momentos e representa uma importante característica da análise plástica. A redistribuição permite incrementar a resistência dos elementos estruturais através da formação de diversas rótulas plásticas no elemento ou na estrutura.

Quando um número crítico de rótulas se formam de maneira a produzir grandes deformações na estrutura admite-se que os trechos elásticos remanescentes não mais absorvem os esforços externos aplicados. Nesse caso a estrutura atingiu uma configuração instável. A geometria final é definida como um *mecanismo* e segundo Beedle [2] corresponde a uma configuração onde a capacidade resistente do elemento se extingue.

### 3.1.4. Plastificação de uma seção I

A relação momento curvatura para um elemento de seção I segue as mesmas proposições de uma seção retangular já demonstrada. A diferença reside nas próprias condições de continuidade deste tipo de seção que gera diferentes conjuntos de equação para cada domínio.

Uma primeira análise deve ser feita considerando que a zona plástica está contida dentro da mesa do elemento enquanto a zona elástica contribui com a alma e parte da mesa. Essa situação ocorre tipicamente após se atingir o momento de início de escoamento  $M_y$ . A equação representativa dessa condição é expressa abaixo conforme Beedle [2].

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\phi}{\phi_y} \left(1 - \frac{bd^2}{6S}\right) + \frac{bd^2}{4S} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\phi_y^2}{\phi}\right) \quad \text{Equação 14}$$

A segunda condição é atendida quando a zona plástica contribui tanto com a mesa como com parte da alma da seção, enquanto a zona elástica fica totalmente confinada na alma.

$$\frac{M}{M_y} = f - \frac{wd^2}{12S} \left(\frac{\phi_y}{\phi}\right)^2 \quad \text{Equação 15}$$

A curva que representa as duas equações segue uma relação muito próxima da curva obtida para uma seção retangular. A tendência, conforme indica a equação 15, quando a curvatura é elevada e o momento de plastificação é atingido na seção a relação entre o momento máximo e o momento de início de escoamento é dada pelo fator de forma. Uma análise do cálculo do fator de forma permite determinar que o valor médio para seções retangulares é de 1,14. Conforme mostra Beedle [2], o valor do fator de forma para seções I é um dos menores se comparados com outros formatos de seção, incluído a retangular. Apesar dessa característica indicar uma menor reserva de resistência, esse tipo de seção tende a apresentar melhores resultados práticos pois tem melhor relação de peso linear e permite atingir percentuais próximos da plastificação sem ser retirado do regime elástico o que favorece na análise de flechas da peça.

### **3.2. Interação do cortante e esforço normal**

Toda a análise realizada anteriormente não leva em consideração os efeitos da presença de esforços cortantes ou normais expressivos na estrutura visando a simplificação e uma melhor ordenação dos conceitos da análise plástica. Por definição, quando a plastificação da seção é analisada puramente em decorrência dos momentos aplicados a conceitualização é chamada como *simple plastic theory* (Beedle, pág 106).

Esses efeitos, no entanto, geram resultados secundários a serem acrescentados na análise plástica. A principal consequência é a redução do momento de plastificação da seção para uma mesma carga última aplicada sobre a estrutura. Apesar disso, nota-se que as características da rótula plástica são mantidas mesmo com a redução de  $M_p$ , o que permite o acréscimo de modificações simples no procedimento de cálculo para determinação da carga última que será explicado no capítulo 4. A seguir são fundamentados os efeitos desses esforços na análise plástica.

#### **3.2.1. Efeito do esforço normal**

O esforço axial é predominante na análise e dimensionamento de colunas e bielas de uma edificação. De uma forma geral, esse esforço pode ser desprezado no estudo da análise plástica quando sua intensidade for pequena em relação aos níveis de momentos fletores suportados pela estrutura. Essa condição é válida para edificações de pequena elevação em condições mais usuais de carregamento. No entanto para edifícios de múltiplos pavimentos, no qual os valores de carga axial suportados aumentam consideravelmente nos pilares a medida que se aproxima dos seus pontos de fundação torna-se necessário incorporar esses efeitos na análise.

O efeito da presença de um esforço axial é melhor analisado na distribuição de tensões nas fibras de uma seção genérica. Conforme visto em 3.1.1 a distribuição de tensões provocadas pelo momento fletor puro é diretamente proporcional às deformações, sendo nula no centroide da seção e máxima nas fibras mais externas, criando duas zonas, uma de compressão e outra de tração, que no caso de seções simétricas em relação a linha neutra apresentam a



mesma área de atuação. A presença do esforço axial, no entanto, altera a distribuição de tensões pois força a tensão de escoamento  $f_y$  a ser atingida primeiramente nas fibras comprimidas para depois se propagar na zona tracionada. Como consequência a distribuição de tensão é alterada em relação a existente apenas pelo momento puro pela simples superposição dos efeitos.

Em seções simétricas a área que abrange a zona comprimida fica diferente da área da zona tracionada. Isso permite dividir a distribuição em duas partes: uma provocada pela flexão pura e outra provocada pelo esforço axial. Conforme imagem abaixo:

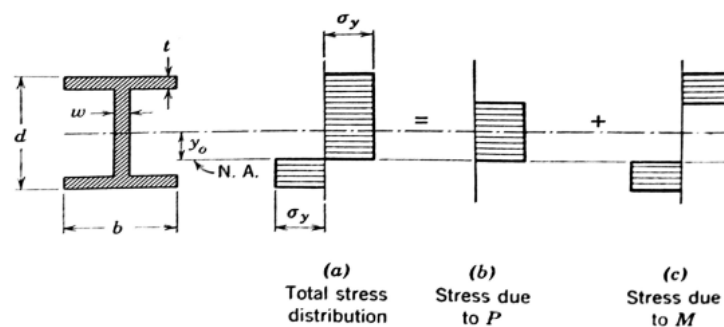


Figura 5 - Distribuição de tensão na presença de esforços axiais de compressão (Beedle, pág108)

O momento que plastifica a seção ( $M_{pc}$ ) pode ser determinado pela seguinte relação a partir da distribuição de tensão da imagem acima para o caso em que a linha neutra esteja na alma da peça:

$$M_{pc} = \sigma_y(Z - wy_0^2) \quad \text{Equação 16}$$

Na qual  $w$  é a espessura da alma e  $y_0$  a distância entre o centroide da seção e a linha neutra da distribuição de tensões combinadas. A equação proposta pode ser dividida em duas parcelas, a primeira composta pelo módulo plástico da seção ( $Z$ ) corresponde ao momento de plastificação  $M_p$  da seção. A segunda parcela corresponde ao efeito da presença da força axial e sua contribuição é dada diminuindo o momento de plastificação. É possível se obter uma relação adimensional entre a força axial aplicada e o momento de plastificação necessário para formar a rótula plástica. Conforme pode-se ver no esquema “b” da figura Figura 5 a força de compressão pode ser calculada como:

$$P = 2\sigma_y y_0 w \quad \text{Equação 17}$$

Substituindo a equação acima na equação 16, encaixando na parcela referente a força axial e dividindo-se as equações por  $M_p = \sigma_y Z$  obtemos a seguinte relação quando a linha neutra está na alma da viga:

$$\frac{M_{pc}}{M_p} = 1 - \frac{A^2}{4wZ} \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 \quad \text{para } 0 < \frac{P}{P_y} < \frac{w(d-2t)}{A} \quad \text{Equação 18}$$

Na qual A é a área da seção e  $P_y$  a força que escoou a seção de forma isolada, sendo:

$$P_y = \sigma_y A \quad \text{Equação 19}$$

Quando a linha neutra atinge a mesa da seção uma relação similar pode ser obtida, conforme demonstra Beedle[2]. As equações que representam a força axial aplicada (P) e o momento de plastificação da seção com carga normal aplicada ( $M_{pc}$ ) são:

$$P = \sigma_y [A - b(d - 2y_0)] \quad \text{Equação 20}$$

$$M_{pc} = \frac{\sigma_y}{2} \left[ d \left( A - \frac{P}{\sigma_y} \right) - \frac{1}{2b} \left( A - \frac{P}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad \text{para } (\sigma_y w(d - 2t) < P < P_y) \quad \text{Equação 21}$$

No qual d é a altura da seção, b a largura e t a espessura da mesa. Dividindo-se a equação de  $M_{pc}$  pelo momento de plastificação puro obtemos a seguinte relação adimensional:

$$\frac{M_{pc}}{M_p} = \frac{A}{2d} \left[ d \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) - \frac{A}{2b} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right)^2 \right] \quad \text{para } \left( \frac{w(d-2t)}{A} < \frac{P}{P_y} < 1 \right) \quad \text{Equação 22}$$

O resultado pode ser analisado graficamente pela figura abaixo para todo o domínio descrito nas equações 18 e 22.

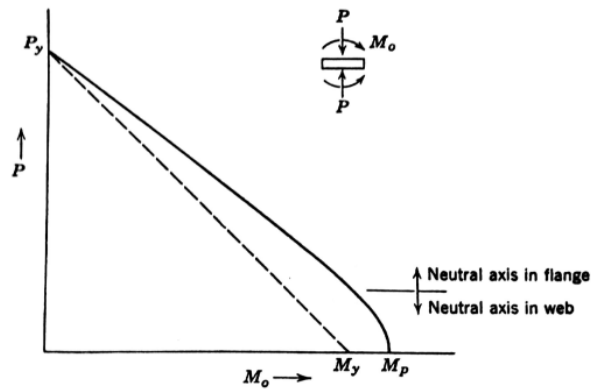


Figura 6 - Curva típica para seções I ao longo de todo o domínio de interação momento-força axial. Beedle[2]

Conforme pode-se notar pelo gráfico acima quando a força axial atinge o valor de  $P_y$  o momento necessário para plastificar a seção é nulo e a peça escoava em decorrência do esforço normal sem criar uma rótula plástica. A medida que o esforço axial diminui o momento de plastificação vai ganhando relevância e quando a relação entre  $P/P_y < 15\%$  o esforço axial pode ser negligenciado para a grande maioria dos perfis I com uma boa precisão, segundo Beedle, pág 111. Ainda segundo o autor uma curva aproximada pode ser utilizada para qualquer seção I levando em consideração todos os pontos discutidos anteriormente.

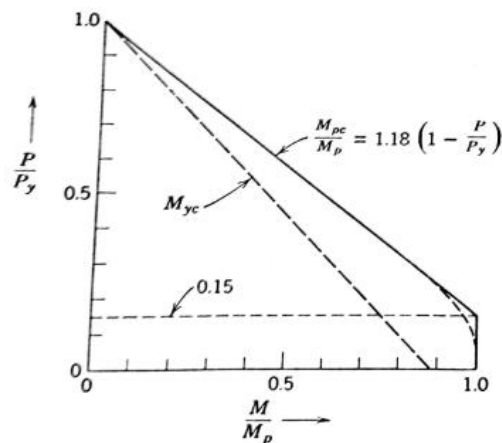


Figura 7 - Curva aproximada para qualquer seção I. Beedle [2]

Conforme indica a figura, o efeito do esforço axial pode ser omitido quando seu valor é inferior a 15% da resistência ao escoamento da seção. Para as demais faixas do domínio de aplicação da força, pode ser dada pela reta representada pela equação abaixo transcrita do gráfico e obtida como uma média a partir de vários tipos de seções.

$$\frac{M_{pc}}{M_p} = 1,18 \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) \quad \text{Equação 23}$$

O efeito da redução do momento de plastificação pode se atestado experimentalmente conforme mostrou Beedle, pág 110 em um ensaio com uma coluna sujeita a uma carga excêntrica na sua seção. O resultado é mostrado na figura abaixo na qual a reta superior listrada representa a curva teórica a ser obtida sem a existência de um esforço axial e a reta inferior listrada representa o valor teórico obtido para a o momento de plastificação na condição do ensaio. A curva sólida representa o resultado real do ensaio.

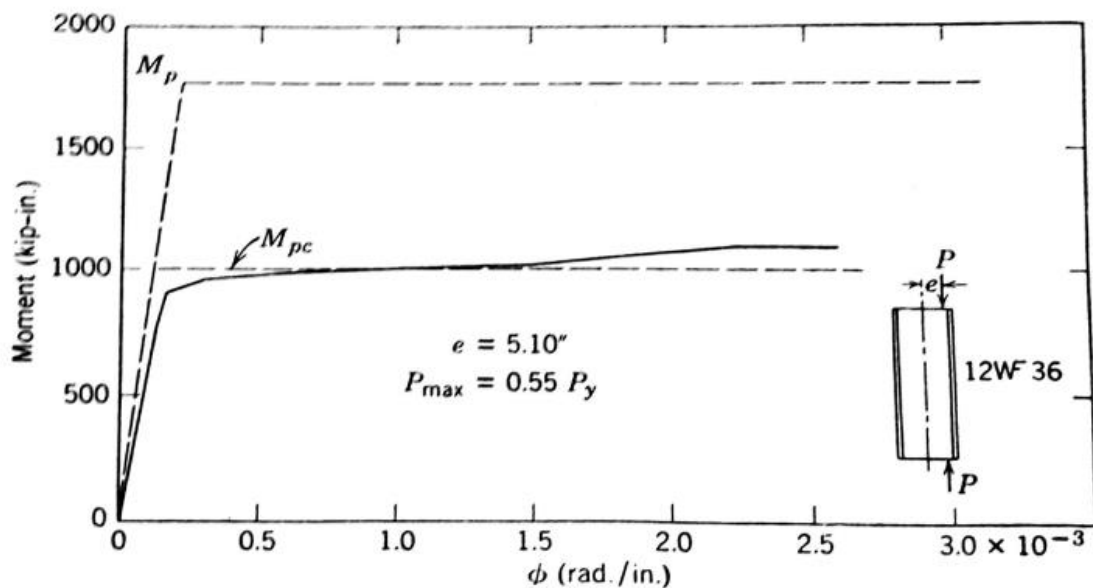


Figura 8 - Ensaio de coluna com carga axial excêntrica aplicada. Beedle [2]

Como pode-se notar, há uma precisão satisfatória entre o momento de plastificação calculado e o obtido experimentalmente. Pode-se notar que um esforço axial correspondente a 55% de  $P_y$  é suficiente para causar uma redução de 40% na resistência à flexão do elemento, perdendo-se boa parte da capacidade resistente da coluna. Outra consideração relevante é observar que após o início da plastificação da seção, a perda de rigidez do elemento é acentuada e as deformações aumentam em taxas elevadas para pequenos acréscimos de carga. Esse é exatamente o comportamento físico de uma rótula plástica e demonstra como essa característica é mantida mesmo com a redução na intensidade de  $M_p$ .

### 3.2.2. Efeito do esforço cortante

O efeito do esforço cortante sobre o momento de plastificação é similar ao do esforço axial no sentido de diminuir o momento resistente da peça, porém com mecanismos distintos.

Elementos com elevadas cargas, principalmente concentradas, aplicadas sobre pequenos vãos ou próximos aos apoios tendem a resistir cortantes de elevada intensidade e que nesse caso determinam o processo de plastificação antes mesmo do efeito gerado pela flexão, causando grandes deformações antecipadamente (Beedle).

Analisando uma viga em balanço com uma carga concentrada no seu extremo livre podemos analisar o efeito combinado dos esforços sabendo que a distribuição de momentos é linear com valor máximo no engaste e zero na extremidade livre, enquanto o cortante é constante ao longo de toda a viga. Utilizando duas seções ao longo do elemento como referência, uma entre a extremidade livre e a metade do vão definida como seção A, e a outra próxima ao engaste definida como seção C, pode-se avaliar a superposição dos esforços.

Caso o vão seja pequeno e a carga tenha valor elevado o cortante será determinante no dimensionamento. Observando as seções nota-se inicialmente pelo comportamento elástico uma distribuição parabólica de tensões ao longo da altura do elemento, principalmente na seção A. Para vigas I, a transição entre a mesa e a alma provoca um elevado acréscimo de tensão na alma, que se torna o elemento da peça determinante na resistência a esse esforço. Com o aumento do cortante nota-se que a plastificação tende a surgir primeiramente na alma e o processo se estende até as mesas.

Caso a relação entre carga aplicada e o vão diminua, o momento fletor ganha relevância e inicia o processo de plastificação da seção imposta sobre o engaste. A rótula se estende para seções adjacentes a partir da plastificação das mesas e parte da alma na seção C, criando um núcleo elástico no interior da seção. Por hipótese a seção A está suficientemente distante do engaste para sofrer plastificação em qualquer parte por ação do momento resistido. Nesse caso, em C, o núcleo elástico presente na alma é responsável por resistir ao esforço cortante aplicado a partir de uma distribuição de tensão parabólica. Assim, como

na seção C há menos área, ainda elástica, para resistir ao cortante, a tensão máxima atuando atinge primeiramente o seu valor de escoamento no centro da parábola e em seguida se propaga para as demais fibras ainda elásticas, somando a zona plastificada às fibras escoadas pelo momento fletor. Isso gera a plastificação da seção com valores menores de momento, reduzindo  $M_p$ .

Portanto, dependendo da relação entre a intensidade da carga aplicada e o vão superado, a seção pode plastificar em decorrência da distribuição de tensão apenas do momento fletor ou do cortante, nesse último caso representado pela seção A, ou pela atuação conjunta dos esforços, conforme visto para a seção C. Um exemplo das hipóteses listadas acima é ilustrado na imagem abaixo para as seções propostas.

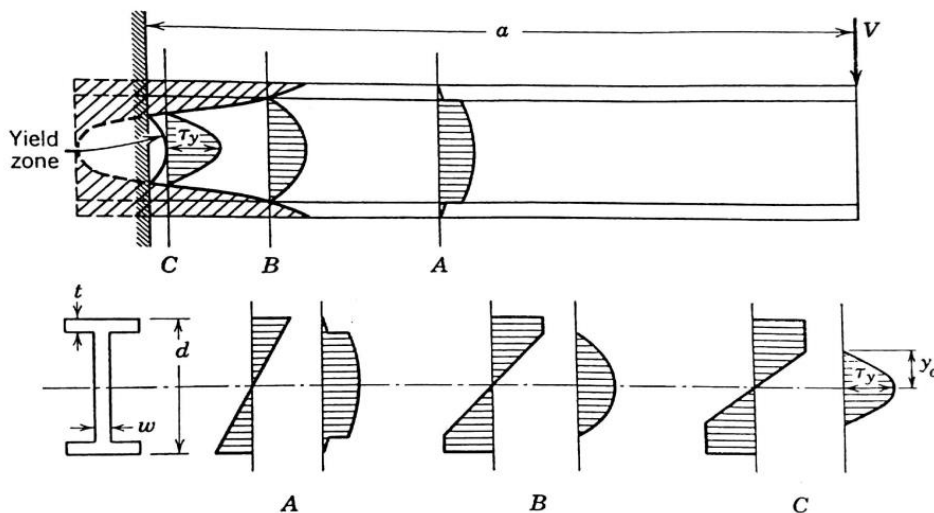


Figura 9 - Análise de viga em balanço e combinação de fletor-cortante na plastificação da seção. Beedel [2]

Uma forma de se avaliar a interação entre o momento e o cortante na redução do momento de plastificação é obter uma relação adimensional entre os efeitos, conforme foi feito para outras análises.

O processo de plastificação de uma seção com cortante relevante se dá tanto pelo escoamento das mesas, pela flexão, como pelo escoamento da região central da alma, pelo cortante, conforme já analisado previamente. Dada a distribuição parabólica de tensões ao longo alma a tensão máxima cisalhante é obtida por ser aproximadamente 1,5 vezes a tensão média provocada pelo cortante na alma. Essa consideração pode escrita da seguinte forma:

$$\tau_y = 1,5\tau_m = 1,5 \frac{V}{2wy_0} \quad \text{Equação 24}$$

Na qual  $V$  é o esforço cortante resistido,  $w$  a espessura da alma e  $y_0$  a distância entre o centro da seção e a fibra mais externa ainda elástica, ou seja, compreende o trecho da alma não plastificado. O valor da tensão cisalhante de escoamento pode ser relacionado com  $f_y$  sabendo que esta última equivale a aproximadamente a  $\sqrt{3} = 1,372$  de  $\tau_y$ . Usando com referência a viga em balanço da figura 10 a relação entre o momento e o cortante é a própria distância da seção ao ponto de aplicação da carga, figura representada pela letra “a”. Substituindo essas duas considerações na equação 24 podemos obter uma relação entre o momento responsável pelo escoamento de parte da seção no mesmo instante que o cortante inicia a plastificação das fibras centrais da alma., neste texto definido como  $M_{ps}$ . Tal relação é formulada conforme abaixo:

$$\frac{f_y}{\sqrt{3}} = 0,75 \frac{M_{ps}}{awy_0} \quad \text{Equação 25}$$

Sabendo que o momento fletor é responsável por plastificar apenas as fibras mais externas da seção, permanecendo as fibras internas elásticas e responsáveis por resistir ao cortante, o mesmo pode ser determinado conforme demonstrado pela equação 09. Dessa forma o momento atuante durante essa condição é representado como:

$$M_{ps} = M_p - \sigma_y \frac{wy_0^2}{3} \quad \text{Equação 26}$$

Substituindo a equação acima na equação anterior e dividindo todos os termos por  $M_p = \sigma_y Z$  temos:

$$\frac{9Z}{16a^2w} \left(\frac{M_{ps}}{M_p}\right)^2 + \frac{M_{ps}}{M_p} - 1 = 0 \quad \text{Equação 27}$$

A equação acima representa uma condição geral para qualquer tipo de seção para uma viga I em balanço com carga concentrada aplicada no seu extremo. Para a resolução da equação acima Beedle, pág 116 propõe uma simplificação para o coeficiente que multiplica a variável quadrática. Assim é possível obter uma solução simplificada conforme abaixo:

$$\frac{M_{ps}}{M_p} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4C(d/a)^2}}{2C(d/a)^2}$$

Equação 28

Tal solução relaciona de forma adimensional a redução do momento de plastificação com a esbeltes da viga em relação ao seu vão ( $a/d$ ).  $C$  é uma constante que depende da relação entre a área total da seção e a área da alma, sendo:

$$C = \frac{9}{16} \left( \frac{A}{2wd} - 0,25 \right)$$

Equação 29

Beedle, pág 115, fornece uma solução gráfica que relaciona diversos tipos de seções aplicadas a equação 28. O comportamento das curvas é demonstrado conforme abaixo.

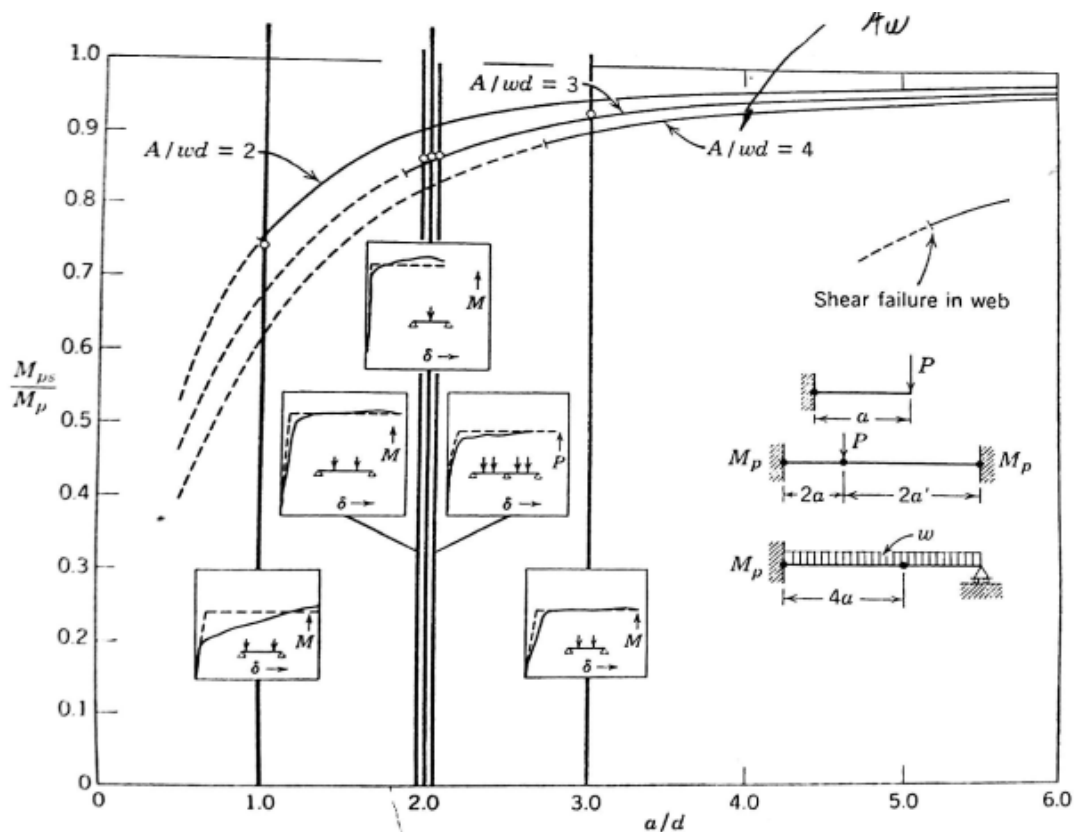


Figura 10 - Curvas de influência do esforço cortante

As tendências das curvas mostram que a medida que a relação entre o vão ou a distância entre o apoio e o ponto de aplicação das cargas externas, e a altura da viga aumentam, ou seja, o momento tem maior relevância, pode-se desprezar o efeito na redução do momento de plastificação da seção. A figura também mostra, através de pontos de descontinuidades nas curvas, que a medida que essa relação diminui o cortante passa a ser determinante a ponto de



a viga escoar inteiramente na alma pela ação das tensões cisalhantes ao invés do momento atuante.

Beedle [2], no entanto, demonstra que ao se analisar curvas de ensaios reais para a determinação do momento de plastificação em algumas estruturas com seções I, elas desenvolveram um momento resistente similar ao momento de plastificação, até a observação de deformações muito acentuadas. Esse resultado é demonstrado, ainda na figura anterior, pelas barras verticais que representam a razão entre o momento obtido no ensaio e  $M_p$  para diversas condições de carregamento onde a interação cortante-fletor é relevante exemplificadas nos quadros junto com o diagrama momento-curvatura correspondente.

Esses resultados são justificados pelo processo de *strain-hardening* das fibras escoadas em seções onde a presença de elevados momentos coincide com elevados cortantes, gerando um grande gradiente no diagrama de momentos fletores. O encruamento das fibras permite que o momento de plastificação se desenvolva inteiramente em outras seções da viga onde essa condição combinada dos dois esforços não coexistam. Isso permite o funcionamento mais próximo de uma rótula plástica nessas seções do que naquelas primeiramente solicitadas.

Como exemplo podemos notar no gráfico abaixo, que representa o diagrama carga-deformação de um ensaio para uma viga bi-apoiada com cargas concentradas aplicadas próximas dos seus apoios. A curva listrada com maior patamar representa o resultado teórico para um ensaio apenas com momento aplicado. A curva em linha sólida representa o resultado do ensaio.

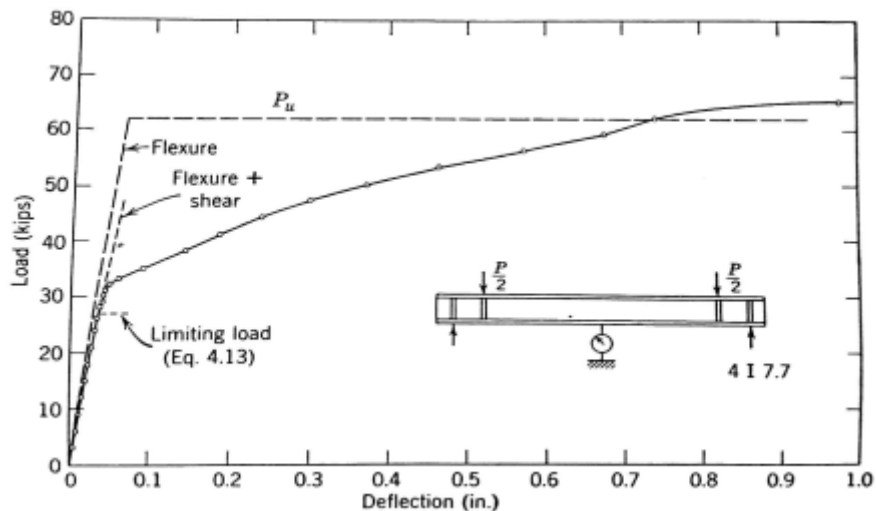


Figura 11 - Ensaio de viga bi apoiada com cargas concentradas próximos aos apoios. Beedle[2]

Nota-se que a perda de rigidez da estrutura é prematura em relação ao resultado teórico em decorrência da interação do momento com o esforço cortante, porém nota-se pelo abatimento da curva, que o comportamento não é representativo de uma rótula plástica pois ainda há capacidade resistente pela viga com o encruamento das fibras e pela capacidade plástica das seções centrais da viga. A medida que a carga aumenta, até se aproximar da carga crítica, onde é formado um mecanismo, a inclinação da curva se torna ainda menor, e as deformações são bastante acentuadas.

Conforme analisa Beedle, pág 118, a aplicação das equações propostas anteriormente, para se obter a redução da capacidade da estrutura de desenvolver plenamente o momento de plastificação é muito conservadora. Portanto é aconselhável analisar a interação entre momento e cortante apenas quando o cortante tem capacidade suficiente de escoar a alma dos elementos desprezando seu efeito na redução de  $M_p$ .

## 4. MÉTODOS DE ANÁLISE PLÁSTICA DE ESTRUTURAS

É possível se calcular facilmente o colapso plástico com o conhecimento do mecanismo de ruptura, porém, poucas estruturas possuem somente um mecanismo possível, portanto há a necessidade de teoremas que possibilitam a seleção do verdadeiro mecanismo de colapso entre as várias possibilidades. A hipótese básica feita é que uma rótula plástica se forma em qualquer membro que atingir o valor de momento,  $M_p$  considerado uma constante.

O colapso plástico ocorre quando um número suficiente de rótulas plásticas foi atingido para que a estrutura se transforme em um mecanismo. As deflexões nestas rótulas podem aumentar enquanto os momentos fletores permanecem constantes, em seu valor plástico. Os teoremas apresentados a seguir possibilitam a determinação de qual o mecanismo responsável pelo colapso plástico de uma estrutura

Para esta fundamentação não está sendo considerada a redução do momento de plastificação gerada pela presença de esforços axiais e cortantes expressivos, conforme pode ser analisado no capítulo 3.2 deste trabalho. Tal condição é definida como *simple plastic theory*.

### 4.1. Teorema Estático

No geral, existem várias distribuições de momento em um pórtico hiperestático para os quais todas as equações de equilíbrio estático sejam obedecidas, quando este encontra-se submetido a um conjunto de carregamentos externos. Greenberg e Prager nomearam este tipo de distribuição de momento fletor como estaticamente admissível. Além disso, caso nenhum dos momentos atuantes na estrutura supere o momento plástico, diz-se que esta estrutura é segura. Para que um pórtico seja capaz de suportar uma distribuição de cargas, deve haver ao menos uma distribuição de momentos fletores que seja tanto segura quanto estaticamente admissível. O teorema estático diz que esta condição é suficiente para a garantia de que o pórtico possa suportar estas cargas.

Supondo que uma estrutura esteja submetida a uma série de cargas fixas sendo  $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$ , valores fixos,  $\lambda$  um valor de fator de carga variável e  $\lambda_c$  o

fator de carga que causa o colapso plástico. Desta forma, o teorema pode ser enunciado como: *Se há uma distribuição de momentos fletores em uma estrutura que seja tanto segura quanto estaticamente determinada, para um conjunto de cargas  $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$  o valor de  $\lambda$  deve ser menor ou igual a  $\lambda_c$ .*

#### **4.2. Teorema Cinemático**

Ao se conhecer qual o mecanismo de ruptura de uma estrutura submetida a um certo carregamento, pode-se obter o fator de carga de colapso se igualando o trabalho realizado pelas cargas e o trabalho absorvido pelas rótulas plásticas.

Caso o mecanismo de ruptura não seja conhecido, uma equação desse tipo pode ser desenvolvida para cada mecanismo. Então, encontra-se um valor de  $\lambda$  correspondente a cada possível mecanismo. O teorema cinemático se refere a estes valores e pode ser enunciado como: *Para uma certa estrutura submetida a um conjunto de cargas  $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$  o valor de  $\lambda$  que corresponde a um mecanismo deve ser igual ou superior ao fator de carga de colapso  $\lambda_c$ .*

#### **4.3. Teorema da Unicidade**

O teorema estático dita que para qualquer valor de  $\lambda$  superior a  $\lambda_c$  não há distribuição de momentos que seja segura e estaticamente admissível. O teorema cinemático, por sua vez, dita que não há mecanismo cujo fator de carga seja inferior ao fator de carga de colapso  $\lambda_c$ . Combinando estes dois teoremas, obtém-se o teorema da singularidade, que diz que para uma certa estrutura submetida a um conjunto de cargas  $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$  se há pelo menos uma distribuição de momentos segura e estaticamente admissível na qual o momento plástico ocorre em seções suficientes para causar um mecanismo, então o fator de carga correspondente  $\lambda$  é o fator de carga de colapso  $\lambda_c$ .

#### **4.4. Análise de pórtico com cargas distribuídas**

Caso um pórtico seja submetido a uma carga uniformemente distribuída, a distribuição de momentos fletores é parabólica, com momentos plásticos podendo ocorrer em qualquer seção. Caso o mecanismo de colapso correto

envolva uma rótula plástica em posição de momento fletor máximo, a localização desta rótula deve ser determinada, o que gera em alguns casos, um cálculo mais trabalhoso, apesar de técnicas de limites superiores e inferiores através dos teoremas apresentados nesta seção gerarem aproximações adequadas.

Caso um membro esteja submetido a um carregamento uniformemente distribuído, deve-se obter o valor máximo deste momento neste membro. A figura abaixo mostra um membro de uma estrutura de comprimento L submetido a uma carga total  $P = p \cdot L$ , sendo esta uniformemente distribuída.

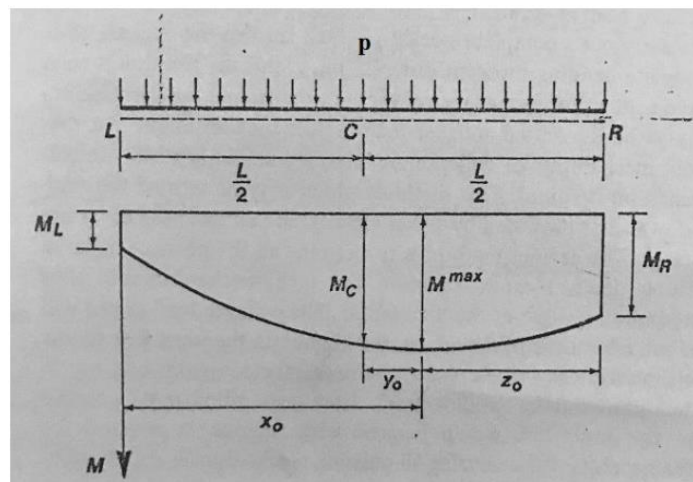


Figura 12 - Diagrama de momentos de peças transversalmente carregada

Supõe-se que os valores de momento  $M_c$ ,  $M_l$  e  $M_r$  sejam conhecidos, com C sendo o centro do membro, e L e R sendo suas extremidades direita e esquerda. Para este caso, o valor de momento máximo ocorre na posição que pode ser descrita por  $x_0$ ,  $y_0$ , ou  $z_0$  dependendo do referencial. As seguintes equações são obtidas através de estática elementar:

$$x_0 = \frac{4M_c - 3M_l - M_r}{W} \quad \text{Equação 30}$$

$$y_0 = \frac{M_r - M_l}{W} \quad \text{Equação 31}$$

$$z_0 = \frac{4M_c - M_l - 3M_r}{W} \quad \text{Equação 32}$$

$$M_{max} = M_L + \frac{Px_0^2}{2L} = M_C + \frac{Py_0^2}{2L} = M_R + \frac{Pz_0^2}{2L} \quad \text{Equação 33}$$

#### **4.5. Colapso Plástico**

Caso uma estrutura com  $r$  graus de hiperestaticidade sofra colapso plástico com a presença de  $(r+1)$  rótulas plásticas, com um grau de liberdade, diz-se que esta estrutura sofreu colapso completo. Isto nem sempre ocorre, podendo este colapso ser parcial ou supercompleto.

No caso do colapso supercompleto, dois ou mais mecanismos diferentes ocorrem à mesma carga, o que significa que haverá mais que  $(r+1)$  rótulas plásticas. Já no caso do colapso parcial, as rótulas plásticas formadas não tornam todo o pórtico estaticamente determinado, havendo diferentes combinação de momentos fora da área de ruptura para a qual o mecanismo ocorra. Este mecanismo ainda é válido, desde que seja encontrada uma combinação de momentos qualquer que torne este mecanismo seguro

## 5. MÉTODOS DE VALIDAÇÃO DO MECANISMO (MOMENT CHECK)

Para se encontrar a carga de colapso plástico, diferentes métodos foram desenvolvidos. Dentre eles, destacam-se o método de tentativa e erro, e o método da combinação de mecanismos. O primeiro método é utilizado quando, a partir de experiência prévia já se conhece qual o tipo de mecanismo para o qual o colapso plástico ocorre em uma estrutura.

Este método consiste na verificação de que é possível encontrar uma distribuição de momentos fletores estaticamente determinada e segura para o mecanismo de colapso admitido. Quando o mecanismo de colapso não é conhecido, o método de combinação de mecanismos é mais apropriado. O mesmo consiste na análise de uma série de mecanismos combinados formados a partir de mecanismos independentes. Ao se encontrar um mecanismo que se imagine ser o de colapso, procede-se de forma similar ao método da tentativa e erro.

### 5.1. Método da tentativa e erro

O método da tentativa e erro é apresentado a partir de sua aplicação em um pórtico de telhado inclinado conforme visto na figura abaixo. Este pórtico está sobre efeito de cargas distribuídas, que para efeito de conveniência encontram-se representadas por suas resultantes, agindo no centro de cada membro do pórtico, e deve possuir um fator de carga de colapso de 1,6.

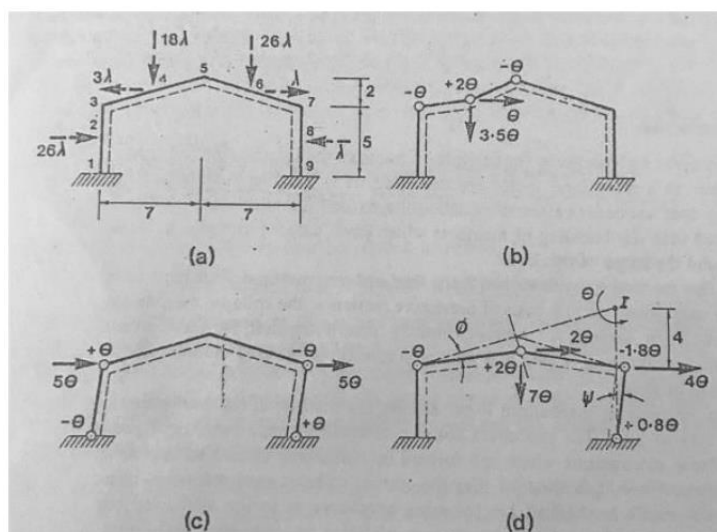


Figura 13 - Pórtico de banzos paralelos

Visto que o método consiste na verificação estática do mecanismo considerado, deve-se inicialmente obter as equações de equilíbrio, utilizando-se o método dos deslocamentos virtuais. Este pórtico possui 3 graus de hiperestaticidade e 9 posições de possíveis rótulas, o que resultam em 6 equações de equilíbrio relacionando os 9 momentos fletores desconhecidos. 4 das equações são obtidas a partir dos mecanismos de viga, conforme visto no item (b) da imagem, enquanto uma se refere ao mecanismo de deslizamento (c), e outra ao mecanismo de deslizamento (d).

Ao se analisar estes diferentes mecanismos, igualando o trabalho realizado pelos carregamentos ao trabalho absorvido pelas rótulas plásticas, chega-se às seguintes equações:

*Equação 34*

$$32,5\lambda = -M_1 + M_2 - M_3$$

$$30\lambda = -M_3 + 2M_4 - M_5$$

$$45\lambda = -M_5 + 2M_6 - M_7$$

$$1,25\lambda = -M_7 + 2M_8 - M_9$$

$$52,5\lambda = -M_1 + M_3 - M_7 + M_9$$

$$152\lambda = -M_3 + 2M_5 - 1,8M_7 + 0,8M_9$$

Os cálculos são efetuados considerando um valor fixo de  $M_p$  e atuando como se  $\lambda_c$  fosse o valor a ser encontrado, efetuando-se as correções necessárias nestes valores posteriormente, através de uma relação de proporção. É sabido que para este tipo de pórtico, a ruptura se dá devido ao mecanismo do tipo (d), sendo somente necessário o ajuste da posição das rótulas plásticas no meio dos membros. Assim, para que haja colapso plástico por este mecanismo, deve-se ter:

$$M_3 = -40 ; M_5 = +40; M_7 = -40 e M_9 = +40$$

Substituindo estes valores nas equações de equilíbrio, encontra-se que:

$$\lambda = 1,474; M_1 = -34,7; M_2 = -14,7; M_4 = +22,1; M_6 = +33,2 e M_8 = +0,9$$



Nenhum destes momentos excede o valor de  $M_p$ , portanto este é de fato o mecanismo de colapso plástico. Contudo, devido à carga ser distribuída, é possível que um dos membros possua um valor de momento máximo superior ao momento plástico, o que significa que a posição de uma ou mais rótulas plásticas encontra-se equivocada. Isto de fato ocorre neste pórtico, pois há um momento fletor máximo de 45,2 no banzo direito do mesmo, como visto na figura abaixo. Assim, realiza-se uma nova análise, com uma rótula plástica neste ponto, chamado agora de 10.

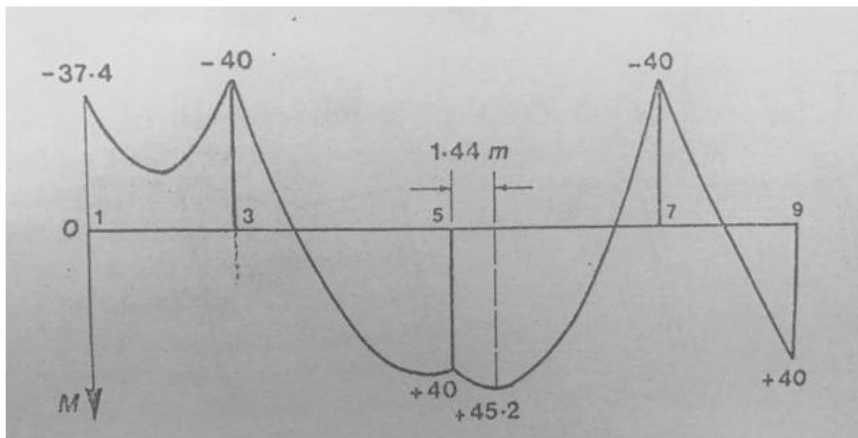


Figura 14 - Diagrama de momentos fletores do pórtico

Com esta mudança de posição na rótula plástica, é necessária a alteração da equação de equilíbrio da viga relacionada ao telhado direito. Assim, com a mudança de ângulos tem-se a seguinte equação:

$$17,85\lambda = -M_5 + 1,25M_{10} - 0,25M_7$$

A partir destes cálculos, encontra-se que os momentos do novo mecanismo são:

$$M_3 = -40; M_{10} = +40; M_7 = -40; M_9 = +40; \lambda = 1,404; M_1 = -33,7; M_2 = -14,1; M_4 = +18,4; M_5 = +34,7; M_6 = +29; M_8 = +0,9$$

Como se que um valor de  $\lambda_c = 1,6$ :

$$M_p = 40 \frac{1,6}{1,404} = 45,6$$

## 5.2. Método da combinação de mecanismos

Este método parte do princípio de que para uma certa estrutura e carregamento, todos os mecanismos de colapso podem ser obtidos através da combinação de um certo número de mecanismos independentes, sendo possível formar uma equação para cada mecanismo, de forma a se encontrar o seu fator de carga  $\lambda$ .

O mecanismo de ruptura distingue-se dos outros devido ao fato de possuir o menor  $\lambda$ . Assim, este método procura combinar os mecanismos independentes com menor valor de  $\lambda$ , de forma a encontrar outros mecanismos que valores ainda menores deste parâmetro. Após se obter um mecanismo, deve-se realizar a análise estática do mesmo, de forma a se verificar que realmente se trata do mecanismo responsável pelo colapso plástico. Para se exemplificar este método, utiliza-se como exemplo um pórtico retangular, cujas dimensões e carregamento são mostrados na imagem abaixo.

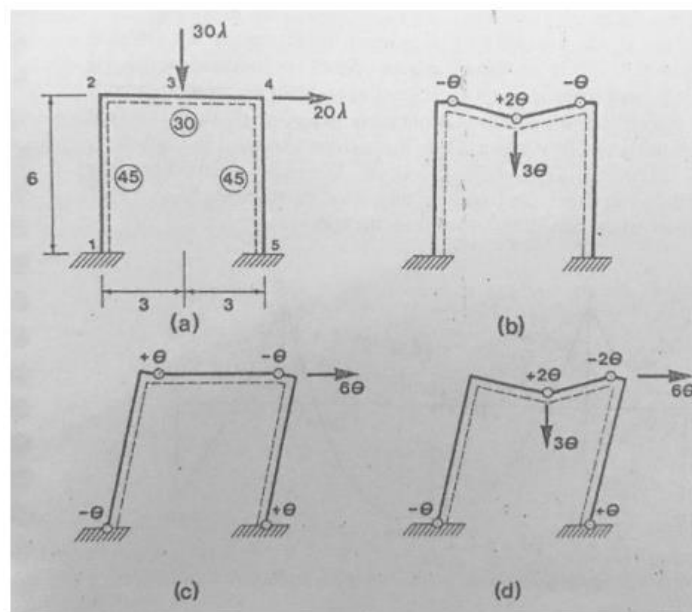


Figura 15 - Pórtico Plano

Nesse pórtico, o momento plástico das colunas é 50% superior ao da viga. Pede-se que se encontre os momentos plásticos que garantem um fator de carga de 1,5. Considera-se inicialmente o momento das colunas 45kNm e o momento da viga 30kNm para a resolução deste problema. Este pórtico possui três graus de hiperstaticidade, e há 5 posições possíveis para rótulas plásticas, portanto há 2 equações de equilíbrio independentes. Estas equações podem ser obtidas

a partir do mecanismo de viga e de deslizamento, representados por (b) e(c), sendo estes:

$$90\lambda = M_2(-\theta) + M_3(+2\theta) + M_4(-\theta) \quad \text{Equação 35}$$

$$120\lambda = M_1(-\theta) + M_2(+\theta) + M_4(-\theta) + M_5(+\theta)$$

Primeiramente, considera-se o mecanismo de viga (b) como um possível mecanismo de colapso plástico. Com isso:

$$90\lambda = -30(-\theta) + 30(+2\theta) \pm 30(-\theta) = 120$$

$$\lambda = 1,333$$

Faz-se a mesma coisa para o mecanismo de deslizamento obtendo um fator de carga de 1,25. Pode-se procurar um mecanismo com  $\lambda$  menor com a combinação dos mecanismos de viga (b) e deslizamento (c). Verifica-se que ao se somar as rotações e deflexões destes mecanismos, obtém-se o mecanismo (d). Percebe-se que isto anula a rotação em 2, o que implica em um menor trabalho realizado. Através de uma análise cinemática, obtêm-se a seguinte equação para este mecanismo:

$$90\lambda + 120\lambda = M_1(-\theta) + M_3(+2\theta) + M_4(-2\theta) + M_5(+\theta)$$

Ao se considerar este mecanismo como o de ruptura plástica obtemos um fator de carga igual a 1. O valor de  $\lambda$  mais baixo deve-se ao fato de que, ao se somar os mecanismos (b) e (c), há o cancelamento da rotação em 2, o que acarreta em menor trabalho absorvido. Para se confirmar que este se trata realmente do mecanismo de ruptura, faz-se a análise estática. No colapso plástico, os momentos neste mecanismo são:

$$M_1 = -45 ; M_3 = +30 ; M_4 = -30 ; M_5 = +45$$

Substituindo esses valores nas outras equações de equilíbrio, encontra-se que:

$$M_2 = 0 \text{ e } \lambda = 1$$

O que confirma a hipótese de que se trata do mecanismo de colapso.

## 6. OUTRAS CONSIDERAÇÕES EM ANÁLISE PLÁSTICA

### 6.1. Acomodação Plástica (Shakedown)

Usualmente prédios são dimensionados considerando cargas estáticas, ou seja, aplica-se um valor médio da carga ao longo da vida útil do edifício, desprezando-se variações significativas que as intensidades dessas cargas podem atingir, tanto para análises plásticas como para análises elásticas. Essa simplificação permite uma otimização do processo de dimensionamento da estrutura, porém, se distancia dos efeitos reais a qual o edifício será submetido ao longo da sua vida útil.

No entanto, algumas observações de estruturas submetidas a cargas cíclicas com seções parcialmente plastificadas, ou seja, resistindo a esforços entre o momento de plastificação e o momento de escoamento inicial das fibras, podem causar deslocamentos elevados na mesma, configurando um comportamento próximo a de um mecanismo para valores inferiores a carga de colapso inicialmente avaliada da estrutura, fenômeno esse conhecido como *shakedown* (Davis & Brown, 1996). Esse fenômeno pode ocorrer de duas formas:

- a) Quando uma seção é submetida à fadiga, em decorrência da flexão alternada de um elemento, submetendo suas fibras consecutivamente, ora a tração e ora a compressão.
- b) Quando cargas cíclicas sucessivas são aplicadas causando progressivos deslocamentos na estrutura até um ponto onde a estrutura perde grande rigidez, configurando um estado definido como mecanismo de colapso incremental.

O fenômeno é avaliado a partir da determinação de um fator de carga que reside entre o fator de carga de início de escoamento e o fator de carga plástico de colapso da estrutura. Esse fator é definido como fator de carga *shakedown*, na qual, para cargas acima deste valor, qualquer uma das duas formas listada anteriormente podem ocorrer, levando ao colapso da estrutura. (Davis & Brown, 1996).

É possível determinar o fator de carga *shakedown* e dimensionar a estrutura plasticamente a partir deste parâmetro. Essa avaliação, no entanto,

requer um processo complexo de avaliação e, portanto, o método tem pouca aplicabilidade no dimensionamento de estruturas. Aliados a esse fator, Davis e Brown mostram que estudos estatísticos evidenciam que a probabilidade de um edifício colapsar pelo efeito de uma única carga com valor elevado em relação a sua média, é maior que o colapso gerado por cargas cíclicas de menor intensidade na estrutura. Outras pesquisas também indicam que ao se avaliar algumas estruturas, o fator de carga *shakedown* obtido, em poucas ocasiões apresentou reduções significativas em relação ao fator de carga de colapso e o próprio *strain-hardening* também apresenta benefícios ao limitar os sucessivos incrementos nos deslocamentos gerados por cargas cíclicas.

Por esses motivos o uso do fator de carga *shakedown* para o dimensionamento de estruturas utilizando análise plástica pode ser usualmente desprezado, no entanto é importante ressaltar que com o advento de soluções numéricas robustas e acessíveis e quando a estrutura é submetida a repetidas cargas com diferentes intensidades, mas com importância relevante, ao longo de sua vida útil, deve-se avaliar a necessidade ou não de aplicação do método. (Davis & Brown, 1996).

## **6.2. Recarga Plástica e Falsos Mecanismos**

Outro efeito importante na análise plástica remete ao conceito de falsos mecanismos. Essa condição surge quando uma rótula plástica formada, tem a direção de sua rotação no sentido oposto ao do momento que a formou quando o falso mecanismo é originado. Esse efeito muitas vezes induz à avaliação de que um mecanismo se formou devido a presença de um número elevado de rótulas na estrutura, no entanto o colapso só é verdadeiramente formado quando o mecanismo real é constituído.

Um outro fenômeno que é um caso específico dos falsos mecanismos é o da recarga plástica, na qual uma rótula plástica se desfaz em função da inversão do sentido de rotação em um determinado estágio da história de formação das rótulas plásticas. No exemplo abaixo obtido de Davis e Brown, a viga no exemplo a apresenta um fator de carga de 0,893 e nesse momento uma rótula é formada no ponto onde uma carga concentrada é aplicada, a 1000mm

do apoio central. A medida que se aumenta o fator aproximando-se de 1,0, os momentos se redistribuem e a rótula plástica inicial se desfaz e outras duas rótulas são formadas sobre o apoio central e a 1000mm do apoio extremo direito. Essa última condição representada por b, configura um mecanismo.

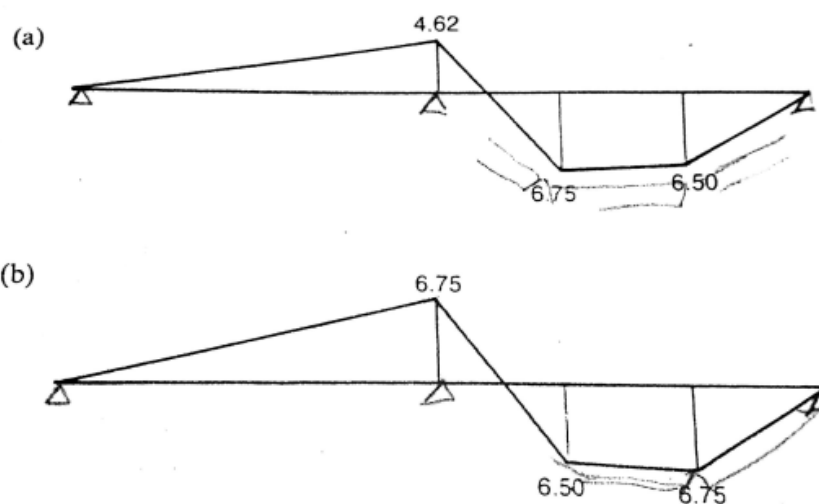


Figura 16 - Análise da recarga plástica em viga (Davis & Brown, 1996)

Esses fenômenos, carecem de atenção do projetista, pois podem induzir a avaliações incorretas. Softwares de análise plástica devem incluir formas de identificar esses fenômenos e permitir uma análise coerente do colapso da estrutura. O uso do software MASTAN2 aborda esses conceitos, sendo possível identificar a recarga plástica de diversas rótulas ao longo do histórico de formação do colapso para vários cenários de lançamento e carregamento analisados nesse estudo.

## 7. ANÁLISE DE INSTABILIDADE GLOBAL

Em edifícios de múltiplos pavimentos é comum a necessidade de se analisar efeitos de segunda ordem na estrutura. Esses efeitos decorrem da não linearidade física dos materiais e não linearidade geométrica da estrutura. Ou seja, no caso do aço a não linearidade física decorre da própria característica do seu diagrama tensão-deformação após o término da faixa de deformações elásticas e a não linearidade geométrica é função das mudanças na geometria deslocada da estrutura após sucessivos incrementos de carga, principalmente considerando seus deslocamentos horizontais. Esses efeitos potencializam os

deslocamentos e induzem a formação de esforços maiores que os inicialmente previstos por uma análise primeira ordem.

Uma forma de analisar o impacto dos efeitos de segunda ordem é através das mudanças nas curvas típicas que representam a relação entre o fator de carga aplicado e os deslocamentos representativos da estrutura obtidos em análises de primeira ordem, tanto elásticas como plásticas. A imagem abaixo ilustra os efeitos em questão.

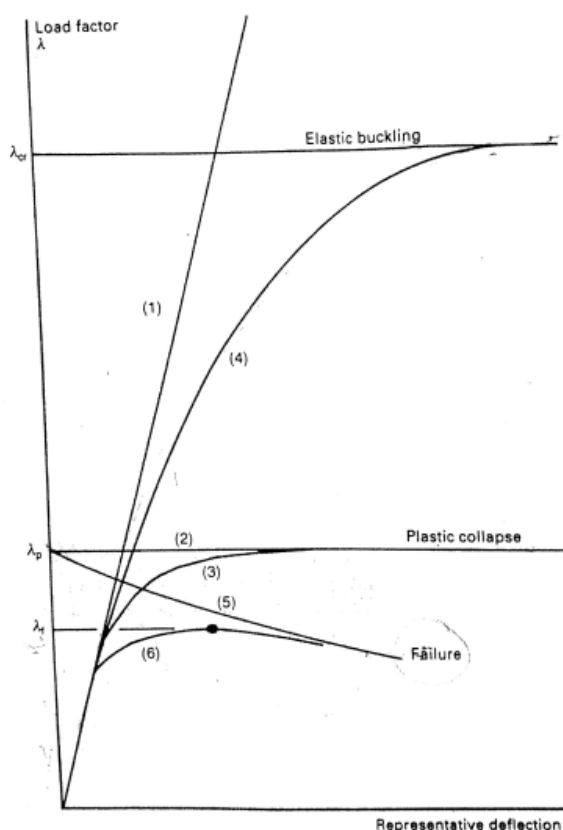


Figura 17 - Análise de curvas cargas-deslocamentos para estruturas porticadas. (Davis & Brown, 1996)

As curvas 01, 02 e 03 representam os modelos elástico-linear, rígido-elástico e elastoplástico respectivamente. Os modelos 01 e 02 são modelos idealistas de comportamento simplificado da estrutura, pois consideram apenas o comportamento elástico linear, no caso do modelo 01, ou então tratam a estrutura como extremamente rígida até um determinado fator de carga, acima do qual, há uma brusca perda de rigidez permitindo que o edifício se desloque de forma indefinida, no caso do modelo 02. Nenhum dos modelos citados é afetado pelos efeitos de segunda ordem.

Já as curvas 04, 05 e 06 sofrem alterações em decorrência dos efeitos de segunda ordem. As curvas 04 e 05 representam modificações das curvas 01 e 02 respectivamente. A mudança entre o comportamento elástico linear da curva 01 para o comportamento da curva 04 decorre da existência do efeito definido com  $P-\Delta$ , na qual a medida que o fator de carga é aumentado, as seções dos elementos se deformam implicando em pequenos deslocamentos na estrutura. As cargas axiais interagem com esses pequenos deslocamentos geométricos aumentando a flexão dos elementos estruturais, principalmente em pilares. Conseqüentemente isso implica em mais deslocamentos até uma perda progressiva da estabilidade da estrutura. A carga que gera essa instabilidade é representada pelo fator de carga elástica crítica ( $\lambda_{cr}$ ). Do ponto de vista teórico, essa terminologia não é a mais adequada pois pode induzir a análise indicando que a instabilidade foi causada por algum efeito de flambagem local dos elementos, quando submetidos a elevadas tensões de compressão, no entanto do ponto de vista prático, é conveniente se atribuir essa terminologia para o efeito em questão (Davis & Brown, 1996). Da mesma forma observa-se uma tendência de queda na relação entre o fator de carga e os deslocamentos na curva 05, se distanciando do fator de carga de colapso plástico ( $\lambda_p$ ).

A curva 06 no entanto é a de maior interesse na análise plástica, pois incorpora tanto o modelo elástico com uma mudança importante no trecho elasto-plástico em decorrência dos efeitos de segunda ordem. Nota-se que a partir de um determinado fator de carga, a curva tende a ser assintótica à curva 05 e isso implica que transposto esse fator de carga, deslocamentos elevados são mantidos mesmo com uma redução de  $\lambda$ , implicando em um colapso prematuro da estrutura com fatores de carga inferiores a  $\lambda_p$ . O fator de carga máximo, representado por  $\lambda_f$  é definido como fator de carga de ruína. De início, por este valor ser inferior a  $\lambda_p$  ele é utilizado como parâmetro de dimensionamento, caso se utilize uma análise elastoplástica de segunda ordem e este representa a melhor estimativa do comportamento real da estrutura.

Apesar do fator de carga de ruína ser limitado ao valor do fator de carga de colapso plástico, a diferença entre os dois valores não é proporcionalmente grande. O principal motivo decorre do *strain-hardening* que impede que as rótulas



plásticas rotacionem de forma constante sobre o mesmo momento, mas que seja necessário um aumento no momento para aumentar o deslocamento, gerando uma melhora na rigidez da estrutura. Outro motivo decorre do fato da maior parte das estruturas práticas não possuírem elevada esbeltez, o que limita os efeitos de segunda ordem na estrutura, implicando que o próprio strain-hardening compensa a perda de rigidez provocado por esses efeitos. No entanto é importante ressaltar que a medida que a esbeltez da estrutura aumenta, principalmente para edifícios de grande porte, como arranha-céus, a diferença entre  $\lambda_f$  e  $\lambda_p$  pode ser relevante, implicando em grandes diferenças na análise da estrutura.

### 7.1. Método de Rankine-Merchant

Uma estimativa adequada para o fator de colapso com a consideração da instabilidade global é obtida através do método de Rankine-Merchant, que leva em conta os efeitos de não linearidade geométrica e física e fornece uma aproximação para o fator de colapso  $\lambda_f$  a partir do fator de carga de colapso plástico  $\lambda_p$  e do fator de colapso para instabilidade elástica  $\lambda_{cr}$ . A fórmula deste método, de origem empírica, é dada conforme abaixo.

*Equação 36*

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{1}{\lambda_p} + \frac{1}{\lambda_{CR}}$$

Estes fatores de carga se assemelham com os critérios definidos na seção anterior, e mostram a influência que a não linearidade física e geométrica podem ter no fator de carga de colapso final da estrutura. Comparações entre resultados experimentais e os valores obtidos por esta equação evidenciaram que a mesma resulta em valores razoáveis em casos nas quais as cargas laterais sejam elevadas, ou seja, com maior fator de colapso para instabilidade elástica, enquanto para valores de cargas horizontais baixas em relação às cargas verticais, a equação é bastante conservadora. Como visto anteriormente, a existência do endurecimento do material após o escoamento garante que estruturas em pórticos utilizadas em situações práticas geralmente atingem valores pelo menos iguais ao momento de plastificação teórico. Isto se deve ao

fato de que a relação entre  $\lambda_{crit}/\lambda_p$  ser maior que 10, na maioria dos casos. Sendo a rigidez residual devido ao endurecimento suficiente para compensar os efeitos da mudança de geometria. Além disso, também é visto que os fechamentos da estrutura também compensam estas mudanças. Levando em conta estes fatores, Wood propôs uma modificação da fórmula de Rankine-Merchant para:

*Equação 37*

$$\frac{1}{\lambda_f} = \frac{0,9}{\lambda_p} + \frac{1}{\lambda_{CR}} \quad \text{quando } 4 \leq \lambda_{crit}/\lambda_p \leq 10;$$

$$\lambda_f = \lambda_p \quad \text{quando } \lambda_{crit}/\lambda_p \geq 10$$

Wood não propôs que esta formula pudesse ser aplicada para  $\lambda_{crit}/\lambda_p < 4,0$ , porém verifica-se a partir de experimentos que ela estima resultados com razoável precisão a favor da segurança na maioria dos casos a partir da continuação do seu domínio. As equações acima são de uso inconveniente pois avaliam a carga de ruína como uma relação entre  $\lambda_{crit}$  e  $\lambda_p$ , sendo mais adequado considerar os efeitos de segunda ordem apenas a partir do fator de carga de instabilidade elástica  $\lambda_{crit}$ . Ao se utilizar prescrições normativas nas equações pode-se considerar que  $\lambda_f$  corresponde à carga de cálculo fatorado, ou seja, o coeficiente médio de majoração das cargas nominais corresponde ao mínimo valor de carga de colapso plástico  $\lambda_f$ . Como este fator de carga já é conhecido, é conveniente fazer:

$$\alpha = \frac{\lambda_{crit}}{\lambda_f} \quad (38)$$

O fator de colapso plástico  $\lambda_p$  de uma estrutura é derivado a partir de um mecanismo de ruptura plástica, função do limite de escoamento do aço  $f_y$ . Visto isso, considera-se que o fator de carga de ruína  $\lambda_f$  seja um fator de carga limite, determinado a partir de um mecanismo de colapso plástico que devido aos efeitos de segunda tem valor inferior a  $\lambda_p$ . Pode-se então definir que  $\lambda_f$  é função de um limite de escoamento, assim como o fator de carga plástico, porém fictício e de valor igualmente reduzido definido como  $f_{ry}$ . Assim, pode-se estabelecer a seguinte relação:

*Equação 39*

$$\frac{f_{ry}}{f_y} = \frac{\lambda_f}{\lambda_p}$$

A partir desta relação, pode ser rescrever a equação proposta por Wood da seguinte forma:

Equação 40

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_p} = \frac{1}{0,9 + \frac{\lambda_p}{\lambda_f} \frac{\lambda_f}{\lambda_{crit}}} \rightarrow \frac{\lambda_f}{\lambda_p} = \frac{f_{ry}}{f_y} = \frac{1}{0,9 + \left(\frac{f_{ry}}{f_y}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

E disso tem-se que:

Equação 41

$$\frac{f_{ry}}{f_y} = \frac{\lambda_f}{\lambda_p} = \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha}$$

Ao se analisar esta equação para os limites mínimos e máximos de  $\lambda_{cr}/\lambda_p$  vistos em (68), obtém-se os limites em função de  $\alpha$ . Para o limite mínimo,  $\lambda_{cr}/\lambda_p = 4$ , tem-se que:

$$\lambda_{crit} = 4\lambda_p \rightarrow \alpha = \frac{\lambda_{crit}}{\lambda_f} = \frac{4\lambda_p}{\lambda_f} = 4 \frac{f_{ry}}{f_y} = 4 \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha}$$

$$\alpha = 4 \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha} = \frac{9\alpha}{\alpha - 1} \rightarrow \alpha^2 - 4,6\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 4,6$$

Logo, o limite inferior da equação é  $\alpha = 4,6$ . Da mesma forma, analisa-se o limite máximo de  $\lambda_{cr}/\lambda_p$ , de valor 10:

$$\lambda_{crit} = 10\lambda_p \rightarrow \alpha = \frac{\lambda_{crit}}{\lambda_f} = \frac{10\lambda_p}{\lambda_f} = 10 \frac{f_{ry}}{f_y} = 4 \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha}$$

$$\alpha = 10 \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha} = \frac{3,6\alpha}{\alpha - 1} \rightarrow \alpha^2 - 10\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 10$$

Assim, tem-se equações para se avaliar a rigidez de uma estrutura baseando-se no fator de instabilidade elástica  $\lambda_{cr}$  e no fator de colapso da estrutura  $\lambda_f$ . Ao contrário das equações propostas por Wood, estas não necessitam da determinação de  $\lambda_p$  a partir de análise elastoplástica. Assim:

Equação 42

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_p} = \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha} \text{ quando } 4,6 \leq \lambda_{cr}/\lambda_f \leq 10;$$

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_p} = 1; \lambda_f = \lambda_p \text{ quando } \lambda_{cr}/\lambda_f \geq 10$$

Para  $\lambda_{cr}/\lambda_f < 4,6$ , recomenda-se a elaboração de uma análise elastoplástica de segunda ordem para obtenção do fator de carga de ruína  $\lambda_f$ . Considerando  $\lambda_f$  o fator de carga de ruína já ponderada, tem-se que  $\lambda_f = 1$ , e então encontra-se a relação entre  $\lambda_f$  e  $\lambda_p$  em função de  $\lambda_{cr}$ , e não da relação  $\lambda_{cr}/\lambda_p$ . Assim:

**1- Para  $4,6 \leq \lambda_{cr} \leq 10$ :**

$$\lambda_f = \frac{\alpha - 1}{0,9\alpha} \lambda_p$$

**2- Para  $\lambda_{cr} > 10$ :**

$$\lambda_f = \lambda_p$$

**3- Para  $\lambda_{cr} \leq 4,6$ :** É necessária a elaboração de uma análise elastoplástica de segunda ordem para obtenção do fator de carga de ruína  $\lambda_f$ .

No caso de uma carga não majorada, como foi o exemplo acima, devem-se multiplicar os limites de 4,6 e 10 pelo fator de segurança que considera as incertezas do carregamento, que usualmente é tratado pelas normas como 1,4. Nesse casos adotando-se um  $\lambda_f$  de 1,4 na razão  $\lambda_{cr}/\lambda_f$  os valores limites de  $\lambda_{cr}$  passam a ser **6,44** e **14,0**. Para a avaliação da carga crítica elástica  $\lambda_{cr}$  e consequentemente a estimativa da carga de ruína  $\lambda_f$ , é necessário um modelo matemático consistente, por processo manual ou computacional. A utilização de métodos mais simplificados, contudo, não é um problema, pois erros nos valores de  $\lambda_{cr}$ , desde que não significantes, não alteram de forma grave o valor de  $\lambda_f$ . Para o caso de uma relação  $\lambda_{cr}/\lambda_p \approx 5,0$ , um erro de  $\beta\%$  no valor de  $\lambda_{cr}$  resulta em um erro de aproximadamente  $0,2\beta\%$  em  $\lambda_f$ , sendo este valor ainda menor para relações de  $\lambda_{cr}/\lambda_p$  maiores.

## **8. MÉTODOS DE ANÁLISE COMPUTACIONAL**

### **8.1. MASTAN 2**

O software MASTAN 2 é um programa gráfico, que fornece funções de lançamento ou pré-processamento, análise e pós-processamento de estruturas bi e tridimensionais. As funções de pré-processamento se referem ao lançamento da estrutura, definição das suas condições de contorno, cargas e propriedades geométricas e físicas. As rotinas de análises permitem avaliações de primeira e segunda ordem elásticas e inelásticas das estruturas. Por último as funções de pós processamento permitem a interpretação do comportamento da estrutura através da análise de diagramas de esforços e deslocamentos, além das curvas de interação entre esses elementos. O programa é baseado em rotinas programadas no software MATLAB, permitindo, caso seja do interesse do usuário, incorporar novas rotinas ao programa.

### **8.2. Software Viga Mista 3.0**

O software Viga Mista 3.0 é um software gratuito disponibilizado pelo departamento de engenharia civil da Universidade de São Paulo, campi de São Carlos e é programado para o dimensionamento de vigas mistas biapoiadas compostas por perfis I em temperatura ambiente ou em situação de incêndio.

O programa permite lançar lajes mistas e maciças de concreto, aproveitando de todas as propriedades geométricas e de lançamento de cada uma delas. O programa foi utilizado para o dimensionamento das vigas secundárias de apoio das lajes e de bordo da estrutura.

## 9. CRITÉRIOS DE PROJETO

### 9.1. Considerações Gerais

A estrutura de múltiplos pavimentos que será dimensionada terá uma arquitetura típica da região de Brasília/DF, composta por 4 pavimentos e uma laje de cobertura, sendo um deles um pilotis com espaço para vagas de estacionamento e acesso ao edifício, e outros três pavimentos tipos com moradias unifamiliares.

Os critérios arquitetônicos utilizados foram apenas referências e não constituem um estudo aprofundado das diretrizes para esse tipo de edifício. No entanto visando obter uma edificação compatível foi utilizada a Norma Geral de Gabaritos (NGB) 11-89 da Asa Sul, Plano Piloto de Brasília, contemplando edifícios na superquadra 400. Em resumo as diretrizes estabelecidas foram:

- a) Edifício de 4 pavimentos, com laje de cobertura, sendo um deles um pilotis e os outros 3 pavimentos tipo, sem subsolos.
- b) Área de projeção de 262,5m<sup>2</sup>, divididos em 3 apartamentos, com um de 60m<sup>2</sup> e outros dois de 75m<sup>2</sup>, respeitando os limites da norma que estabelece até no máximo 18 apartamentos ou uma área mínima de 14m<sup>2</sup> para cada unidade.
- c) A laje de cobertura destina-se somente para o abrigo de caixas d'água e casas de máquinas além de outros equipamentos prediais. Não serão admitidos fins recreativos nesse pavimento. Não será utilizado elevadores, mas apenas escadas para circulação no edifício.
- d) O pé-direito adotado será de 2,8m com altura total do edifício de 11,2m, respeitando o máximo de 27m para a região.
- e) Foi definida uma vaga de estacionamento para cada unidade domiciliar totalizando 9 vagas, com dimensões de 2,5mx5m e com área e quantidades superiores ao mínimo de 8m<sup>2</sup> normativo.

Com base nessas diretrizes foi possível conceber um modelo arquitetônico compatível com estruturas de múltiplos pavimentos da região citada. Esses critérios serão determinantes para o lançamento da estrutura a ser analisada. As imagens abaixo ilustram um croqui da arquitetura adotada para o edifício. Todas as dimensões estão em milímetros.

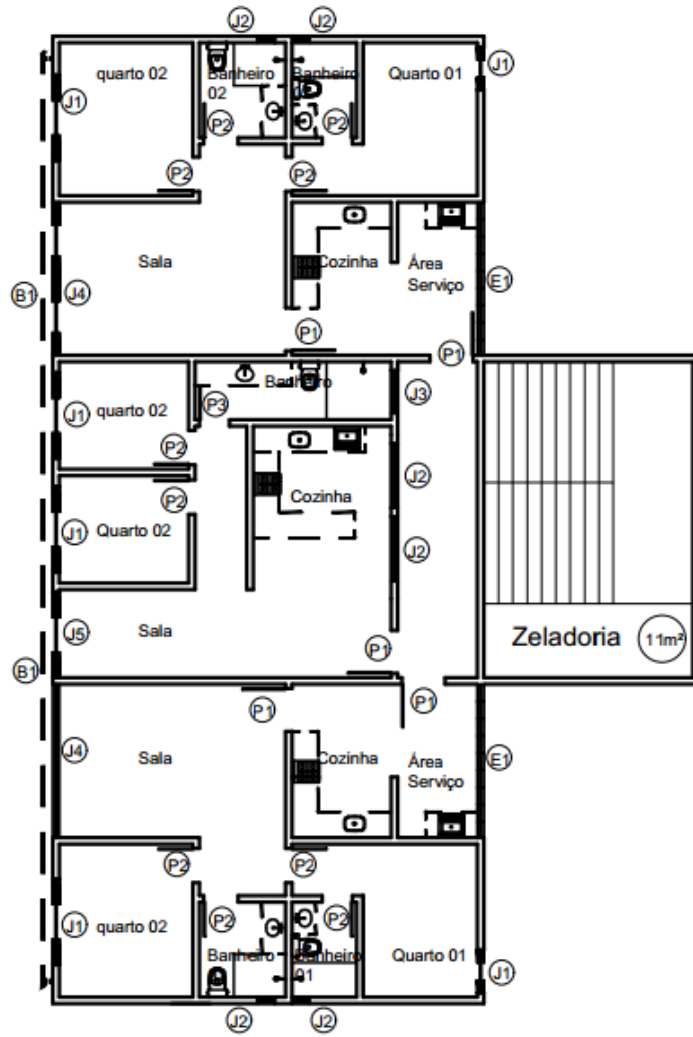


Figura 18 - Planta baixa do pavimento tipo da edificação

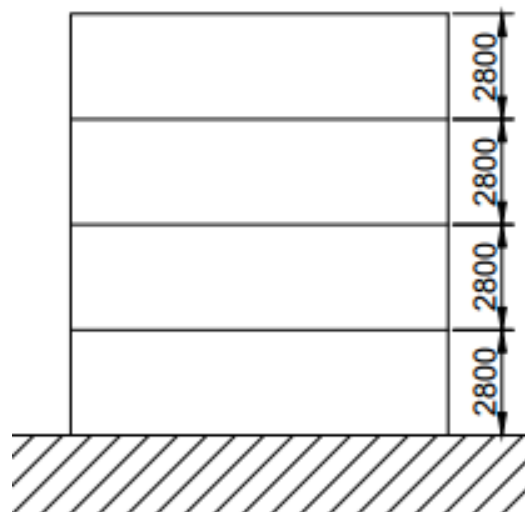


Figura 19 - Corte Esquemático do pórtico principal da edificação

## 9.2. Tipologia estrutural

De posse das diretrizes arquitetônicas definidas, foi possível estabelecer os posicionamentos dos pilares e conseqüentemente os vãos a serem analisados neste projeto. Todos os elementos estruturais serão em aço com seções I ou H de classe 1, conforme critérios da norma BS5950. As lajes serão do tipo mistas em *steel-deck*.

Neste lançamento foi considerado a existência de 4 pórticos principais, dois compondo as empenas e delimitado na planta pelos elementos P01-V01-P02 e P09-V13-P10 superando um único vão de 10m e outros 2 pórticos limitados pelos elementos P03-V05-P04-P05 e P06-V09-P07-P08 transpondo dois vãos de 10m e 5m.

A disposição prévia dos pilares prevê sua orientação dispondo sua maior inércia no mesmo sentido dos pórticos principais. A justificativa para essa escolha visa garantir maior rigidez para esses pórticos e conseqüentemente menor deslocabilidade horizontal da estrutura na direção desses elementos. Outro motivo é devido a facilidade de se executar ligações mais rígidas entre os pilares e as vigas dispondo essa ligação sobre a mesa dos pilares. Essa condição também atende critérios práticos de execução, facilitando o procedimento durante a construção. Todas essas condições previnem que as rótulas plásticas se formem antecipadamente nos pilares, condição importante para a estabilidade da estrutura e que será detalhada mais adiante.

Além dos pórticos principais, foram elencados 3 pórticos secundários delimitados pelos elementos P09-V16-P06-V15-P03-V14-P01; P10-V19-P07-V18-P04-V17-P02 e P08-V20-P05 superando 3, 3 e 1 vão de 7,5m respectivamente. Para esses pórticos secundários serão adotadas ligações rotuladas entre as vigas e os pilares. Essa condição decorre da dificuldade prática de se conseguir ligações rígidas conectando a viga sobre a alma dos pilares, na direção de menor inércia das colunas. Quanto aos deslocamentos horizontais, a contribuição da perda de rigidez das ligações viga-pilar pode ser compensada com a associação de pórticos múltiplos nesta direção, acarretando em menor deslocabilidade.



As demais vigas da estrutura compõem um sistema de três vigas secundárias que visam dar sustentação para as lajes de concreto da estrutura, separadas entre si por vãos de 1875mm, e que se apoiam diretamente sobre as vigas de bordo dos pórticos secundários. As ligações entre as vigas secundárias e as vigas de bordo, são feitas através das almas dos elementos, o que assemelha ao comportamento de uma rótula.

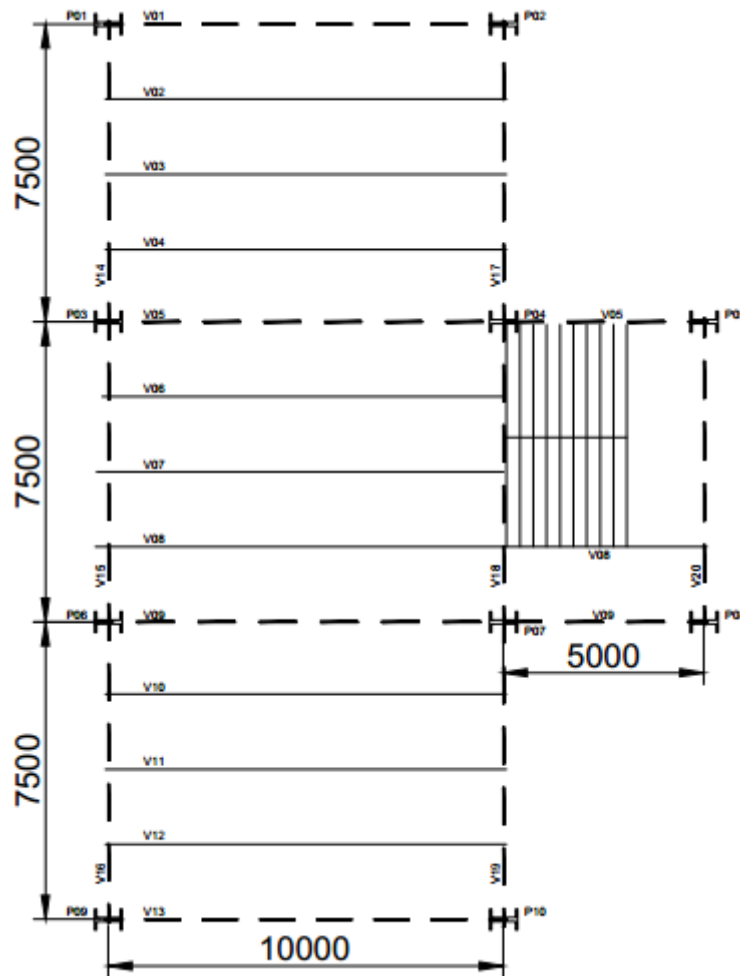
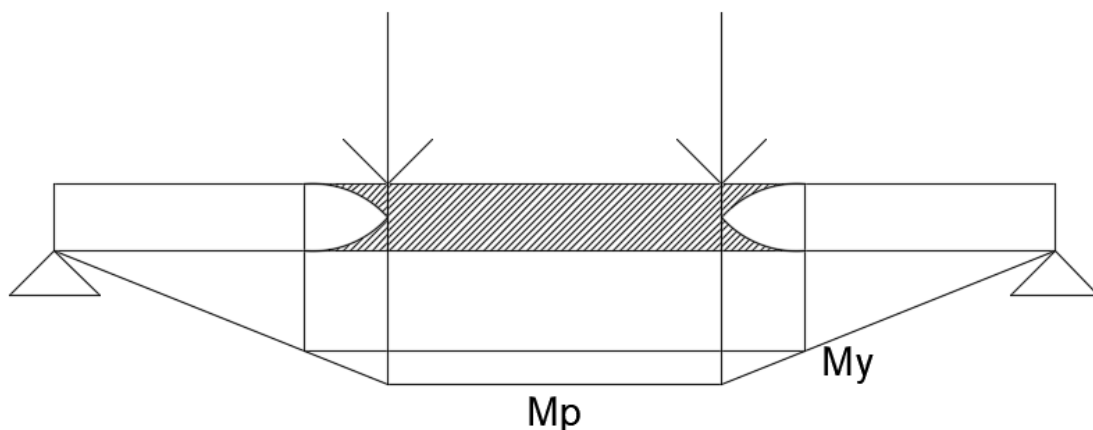


Figura 20 - Lançamento da estrutura. Legenda: Linha contínua: vigotas de sustentação das lajes. Linhas tracejadas: Vigas dos pórticos principais e secundários.

O posicionamento e a quantidade de vigas secundárias definidas neste projeto que servirão de apoio para as lajes visam atender critérios construtivos que indicam que para vãos inferiores a 4 metros lajes *steel-decks* não necessitam de escoramentos, que implica em menores custos e maior produtividade (CBCA). Para adequar o lançamento a esse critério deve-se adotar mais de uma viga secundária em cada laje. O uso de apenas duas vigas

secundárias foi dispensado levando em consideração critérios de formação de rótulas plásticas sobre as vigas de apoio desses elementos. As vigas V14 a V19 compõem um sistema de vigas simplesmente apoiadas devido a característica da sua ligação com os pilares, conforme descrito anteriormente. Aplicando duas cargas espaçadas uniformemente em 2500mm sobre uma viga bi-apoiada, o mecanismo é formado com a presença de uma única rótula plástica na seção central da viga, no entanto, pela presença das cargas externas, o momento fletor na região central entre as cargas é constante ao longo de toda essa extensão, fazendo com que o momento resistido  $M_p$  não se limite a apenas uma seção, mas sim a todas as seções centrais entre as cargas. Somando ao fato que nas seções adjacentes que resistem a um momento superior ao momento de início de escoamento ( $M_y$ ) e inferior a  $M_p$  há uma plastificação parcial da seção, o comprimento da rótula plástica passa a ter uma dimensão muito elevada. Em decorrência disso a viga perde significativamente sua rigidez, pois a quantidade de fibras ainda elásticas diminui acentuadamente. A imagem abaixo ilustra esse fato, na qual a zona hachurada representa a rótula plástica.



*Figura 21 - Exemplo de viga bi-apoiada suportando duas vigotas*

Em uma análise plástica o controle dos deslocamentos é feito essencialmente pelas fibras ainda elásticas do elemento. Os escoamentos das fibras implicam em pequena rigidez, conforme pode-se notar na Figura 3 - Diagrama Momento-Curvatura; Beelde [2]; na qual a zona elástica interna da seção é responsável pela rigidez do elemento durante o processo de formação da rótula plástica.

Em decorrência dessa análise optou-se pelo uso de três vigotas para a sustentação das lajes, garantindo melhor controle dos vãos e das condições de carregamento sobre as vigas de apoio.

### 9.3. Estados Limites

As normas brasileiras de projeto estrutural, utilizam como critérios para a atendimento da segurança e desempenho da estrutura as diretrizes estabelecidas pelos estados-limites. A NBR 8800 define o estado-limite ultimo e o estado-limite de serviço como critérios de avaliação.

Os estados-limites últimos estão relacionados com segurança da estrutura ao se considerar as ações mais desfavoráveis ao longo de todas as etapas de vida da mesma. Os estados-limites de serviço estão relacionados com o desempenho da estrutura sob condições normais de utilização. Quando a estrutura atende a ambos os critérios o dimensionamento é considerado satisfatório. Os estados-limites últimos podem ser atendidos quando a seguinte equação é satisfeita para todas as combinações de carga mais desfavoráveis.

$$R_d \geq S_d \quad \text{Equação 43}$$

Na qual  $S_d$  representa as cargas majoradas, que serão discutidas no capítulo seguinte e  $R_d$  representa a resistência minorada. Uma forma de minorar a resistência de um elemento estrutural é feita diminuindo o momento de plastificação da seção com um fator de segurança de 0,9, incorporando reduções na tensão de escoamento do aço.

Para o estado limite de serviço só será considerado o critério dos deslocamentos limites da estrutura. Não serão analisadas vibrações, empoçamentos ou variações dimensionais dos elementos em decorrência das características de uso predominantemente residencial da edificação.

Tabela 1 - Deslocamentos Limites

Deslocamentos Limites	
Vigas de Piso	L/300
Deslocamento horizontal do topo dos pilares em relação à base	H/300

Na qual  $L$  é vão superado pelas vigas,  $H$  a altura do edifício até o topo dos pilares considerados,  $h$  a altura entre dois pavimentos consecutivos e  $L_f$  o vão superado pelas lajes mistas.

#### **9.4. Ações**

A análise dos tipos de carregamentos que são aplicados sobre estruturas é regida pelas diretrizes das normas brasileiras NBR 8800/2008 e NBR 8186. Segundo essas normas as ações, cuja a natureza pode ser oriunda de forças, pressões ou deslocamentos impostos à estrutura, são responsáveis por provocar o surgimento de esforços e deformações nos elementos que servirão de análise para o dimensionamento.

Em virtude da variabilidade da natureza, dos valores e da frequência que as ações podem atuar em uma estrutura, a sua análise ainda requer uso da experiência de projetistas e das diretrizes normativas para que as ações mais relevantes e tempestivas sejam utilizadas visando um projeto mais econômico que atenda aos níveis de serviços da estrutura. Isso implica que análises de ações em edifícios de múltiplos pavimentos são diferentes das análises feitas em estruturas de galpões leves, estruturas de transposição, como pontes e viadutos, e estruturas de contenção. A tentativa de uniformizar as diretrizes das ações entre estruturas com uso similar pode acarretar em dimensionamentos exagerados ou pouco representativos, implicando em falhas ao longo da vida útil da estrutura.

Nesse contexto, para direcionar a análise, as ações podem ser classificadas em ações permanentes, variáveis e excepcionais. Em seguida são detalhadas e quantificadas todas as ações mais relevantes que são usualmente utilizadas em edifícios de múltiplos pavimentos em aço.

##### **9.4.1. Ações Permanentes**

As ações permanentes, são definidas com as ações que ocorrem com valores constantes ou possuem pequena variação em torno de sua média ao longo da vida útil da estrutura. Essas ações são subdivididas em ações diretas e indiretas, conforme abaixo.

- a) **Ações permanentes diretas:** São ações como o peso próprio da estrutura e dos demais elementos construtivos permanentes como fechamentos e elementos de vedação, empuxo de terra e carga de equipamentos fixos.
- b) **Ações permanentes indiretas:** São ações como deslocamentos horizontais impostos à estrutura, recalques nos apoios e elementos de protensão.

Para este estudo adotou-se as ações permanentes mais usais em análises de edifícios de múltiplos pavimentos em aço. O peso próprio de vigas e pilares será detalhado posteriormente a partir da definição das seções utilizadas no dimensionamento da estrutura. A tabela abaixo resume as ações consideradas segundo recomendações da norma NBR 6120.

Tabela 2 - Ações permanentes consideradas na análise. \* Considerando o pé-direito de 2,8m

Ações	Peso específico	Espessura	Carga
Peso próprio das lajes	2500 kgf/m <sup>3</sup>	12 cm	300 kgf/m <sup>2</sup>
Revestimento (Contrapiso de argamassa e piso de cerâmico)	3000 kgf/m <sup>3</sup>	3 cm	90 kgf/m <sup>2</sup>
Empuxo do solo	Não considerado para este tipo de edificação		
Carga de equipamentos fixos	Não considerado para este tipo de edificação		
Recalques em apoios	Não considerado para este tipo de edificação		
Peso próprio dos elementos de vedação	1300 kgf/m <sup>3</sup>	15 cm	*546 kgf/m

#### 9.4.2. Ações Variáveis

As ações variáveis são ações cujos valores apresentam variações significativas em torno da sua média ao longo da vida útil da estrutura. E são divididas em duas categorias conforme abaixo:

- a) **Ações variáveis normais:** São ações variáveis com grande probabilidade de ocorrência na estrutura. Para esta análise destacam-se cargas de vento, deslocamentos impostos por variações de temperatura, pressões hidrostáticas e cargas acidentais, sendo estas últimas cargas decorrente do uso da edificação (pessoas, móveis, veículos e etc).
- b) **Ações variáveis especiais:** São ações variáveis como sismos e ou cargas de natureza muito específica, cuja probabilidade de ocorrência

depende da região geográfica ou do uso da edificação, mas que tem probabilidade de ocorrência durante a vida útil da estrutura.

Para este estudo adotou-se as ações variáveis mais usuais em análises de edifícios de múltiplos pavimentos em aço. A tabela abaixo resume as ações consideradas segundo recomendações da norma NBR 6120. Todas as ações variáveis abaixo serão aplicadas diretamente sobre a laje.

*Tabela 3 - Ações variáveis consideradas na estrutura*

<b>Ações</b>	<b>Carga</b>
Corredores e escadas com acesso ao público	300 kgf/m <sup>2</sup>
Edifícios residenciais (Salas, quartos e etc)	150 kgf/m <sup>2</sup>
Garagens	300 kgf/m <sup>2</sup>
Terrações sem acesso ao público	200 kgf/m <sup>2</sup>

#### **9.4.2.1. Ações de vento**

O vento caracteriza uma ação variável importante na análise edifícios de múltiplos pavimentos e ganha relevância com o aumento do número de pisos e da esbeltez do edifício. Por ser uma carga atuando horizontalmente na estrutura o vento é uma ação que potencializa os efeitos de segunda ordem implicando em maiores deslocamentos horizontais e ampliando os esforços atuantes, principalmente em pilares e vigas de pavimentos inferiores do edifício.

As ações decorrentes do vento foram obtidas a partir dos direcionamentos da NBR 6123/88. Segundo a norma as forças decorrentes do vento atuantes sobre a estrutura dependem das condições geográficas e de ocupação da região onde a estrutura se situa, da geometria e porte do edifício, da permeabilidade das suas fachadas e da velocidade do vento na região de estudo.

Devido à grande variabilidade entre as variáveis citadas pela norma, a análise de cargas de vento sobre uma estrutura de múltiplos pavimentos requer uma compreensão específica do projeto a ser elaborado. Usualmente edifícios com geometrias não convencionais, ou com altura elevada, típicos de arranha-céus, em regiões densamente ocupadas necessitam de análises laboratoriais em escala reduzida para obtenção de parâmetros mais precisos e uma compressão mais fidedigna do comportamento da estrutura, conforme prescrito

pela própria norma, cujos coeficientes e parâmetros se aplicam a estruturas convencionais e que possuem maior recorrência em projetos de edifícios de múltiplos pavimentos. Portanto as análises descritas em seguida prescrevem um direcionamento amplo para estruturas convencionais, similares aos edifícios que compõe a base desse estudo.

#### **9.4.2.1.1. Pressão Dinâmica**

A pressão dinâmica ( $q$ ) corresponde a pressão exercida pelo vento sobre uma superfície do edifício. Essa pressão é utilizada para determinar o valor da força aplicada sobre diversas zonas da fachada do edifício, através de correções multiplicando seu valor por coeficientes de pressão. O valor da pressão dinâmica é obtido através da velocidade característica ( $V_k$ ) do vento pela seguinte equação.

$$q = 0,0625 (V_k)^2 \quad \text{Equação 44}$$

Na qual a pressão dinâmica é fornecida em  $\text{kgf/m}^2$  e  $V_k$  em  $\text{m/s}$ . A velocidade característica é parâmetro que depende das condições do vento na região do projeto. Ela é obtida a partir de medições locais da velocidade média do vento, definida pela norma como velocidade básica ( $V_0$ ), que é padronizada como a velocidade de uma rajada de 3s medida a 10m do chão em campo aberto e plano, cuja probabilidade de ser ultrapassada em um período de 50 anos é de 63%. A conversão da velocidade básica para a característica é feita por coeficientes que levam em consideração a topografia do terreno (Fator  $S_1$ ), a rugosidade do terreno, as dimensões do edifício e a altura sobre o terreno (Fator  $S_2$ ), e o grau de segurança que a estrutura deve ter ao longo da sua vida útil em decorrência do seu uso (Fator  $S_3$ ). A relação entre esses parâmetros é dada pela equação abaixo:

$$V_k = S_1 S_2 S_3 V_0 \quad \text{Equação 45-}$$

A velocidade básica é obtida através das isopletras de velocidade mapeadas para todo o território brasileiro. Na região do Distrito Federal seu valor é de  $35\text{m/s}$ , valor a ser adotado nesse estudo. Os fatores são obtidos a partir de ábacos e tabelas indicados pela norma. O resultado final dos fatores a serem utilizados é resumido conforme abaixo.

- a) Fator S1:** O fator topográfico leva em consideração a localização do edifício em relação ao terreno. Se localizado em terrenos planos ou na base de encostas é adotado igual a 1,0. Esse será o valor adotado neste estudo, visto que um levantamento usando imagens georreferenciadas da região mostram uma declividade média de 3,5% (Aproximadamente 2,01°). Para edifícios no topo de encostas com declividades médias superiores a 3° é necessário utilizar equações que variam S1 com a altura do edifício, conforme prescrições normativas.
- b) Fator S2:** O fator S2 é obtido através da classificação da categoria de rugosidade do terreno e da classe da edificação, sendo a primeira dividida em 5 categorias que levam em conta o tipo de ocupação do solo. Para este estudo adotou-se a categoria IV para regiões urbanizadas com cota média das edificações superior a 10m. Para a classe da edificação foi adotada classe B, pois esta tem sua maior dimensão, seja altura ou comprimento, entre 20m e 50m. Com essas classificações e com o auxílio de tabelas é possível calcular o fator S2 para cada altura dos pavimentos através da equação abaixo, na qual os parâmetros b, Fr e p são tabelados em norma. A tabela abaixo consta o valor de S2 para os pavimentos do edifício.

$$S_2 = bF_r(z/10)^p \quad \text{Equação 46}$$

Tabela 4 - Fator S2 para cada pavimento

Altura do pavimento - Z (m)	S2	
2,8	0,71	
5,6	0,77	
8,4	0,82	
11,2	0,84	
Fr	b	p
0,98	0,85	0,125

- c) Fator S3:** O fator estatístico é adotado em função do uso da edificação e tabela em norma. Para o uso residencial o valor adotado é igual a 1,0 (Grupo 02).



De posse dos valores acima foi possível obter a pressão dinâmica na altura de referência de cada pavimento utilizando a  $q = 0006252(V_k)^2$

Equação 44. Os valores obtidos estão resumidos na tabela abaixo.

*Tabela 5 - Pressão dinâmica em cada pavimento*

<b>Altura do pavimento - Z (m)</b>	<b>S1</b>	<b>S2</b>	<b>S3</b>	<b>Vk (m/s)</b>	<b>q (kgf/m<sup>2</sup>)</b>
2,8	1	0,71	1,00	24,87	38,65
5,6	1	0,77	1,00	27,12	45,96
8,4	1	0,82	1,00	28,53	50,86
11,2	1	0,84	1,00	29,57	54,65

#### **9.4.2.1.2. Forças Horizontais por ação do vento**

Os efeitos das forças horizontais por ação do vento serão incorporados na estrutura por cargas horizontais aplicadas nos níveis das lajes de cada pavimento. Isso decorre do fato das lajes serem elementos de maior rigidez na direção das cargas aplicadas, se comparados com outras partes, como vedações e pilares. Além disso, por questões construtivas, cargas aplicadas sobre as vedações se distribuem melhor pelas lajes do que pelos pilares, em virtude das formas de ligação e assentamento desses elementos sobre toda a estrutura.

Portanto, o procedimento se baseia em calcular a carga de cada prumada sobre o nível de cada laje, utilizando como referência o pé-direito, que no caso é de 2,8m para a obtenção da área de influência sobre cada pavimento. Ainda segundo a norma, para definir a força e os efeitos resultantes sobre uma área da fachada da estrutura é preciso obter coeficientes de forma e pressão que relacionam tanto pressões externas como internas da edificação. De forma geral, toda superfície da edificação sofre ação de forças externas decorrentes do vento e de forças internas em decorrência da permeabilidade da estrutura. Isso faz com que a força resultante sobre uma superfície seja definida da seguinte forma.

$$F = (C_e - C_i)qA \quad \text{Equação 47}$$

Na qual  $C_e$  representa o coeficiente de forma externo, que varia dependendo da direção do vento em relação a estrutura e também da face da edificação considerada na análise. Já  $C_i$  representa o coeficiente de forma

interno, e depende das condições de permeabilidade das fachadas e cobertura, ou seja, do tamanho e direção das aberturas (janelas, brises entre outros elementos). Para a obtenção do  $C_i$  a norma define o conceito de abertura dominante, que é uma abertura com área superior a área total das demais aberturas. Para este projeto foi considerado que a fachada principal é formada por uma única abertura dominante, em função do tamanho e proximidade das janelas nesta face. Como resultado o valor do coeficiente de forma interno depende da direção do vento em relação à abertura dominante, conforme item 6.2.5. Os resultados obtidos são listados abaixo para uma relação entre a largura e o comprimento em planta da edificação de 2,25 e para uma relação entre a altura e a largura de 1,12.

Tabela 6 - Coeficientes de forma interno

Direção do Vento em relação a estrutura	$C_i$
Vento na direção da abertura dominante	+ 0,1
Vento paralelo à abertura dominante	- 0,4

Já para o coeficiente de forma externo foi utilizado a tabela 04 da norma que dá o valor para cada região da fachada dependendo da direção do vento, conforme pode-se ver pela imagem abaixo.

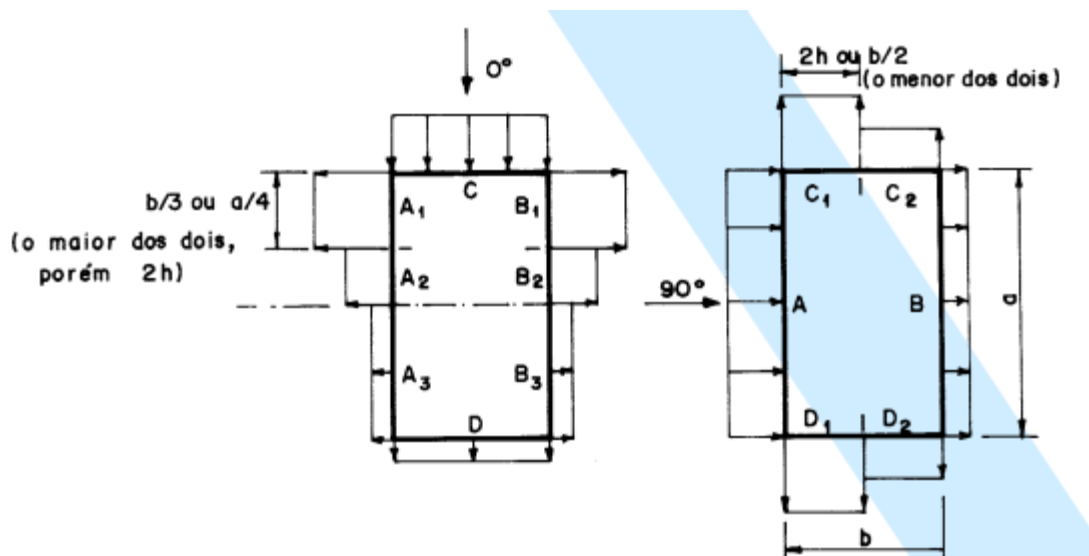


Figura 22 - Coeficiente de forma externo

Conforme pode ser notado, há várias combinações possíveis para a análise da força de vento. Para esta estrutura, serão analisadas apenas as cargas com valor significativo e sobre os pórticos principais, que superam o vão

de 10m. O valor obtido para a força em cada pavimento é resumido na tabela abaixo.

Tabela 7 - Força resultante do vento em cada pavimento na direção dos pórticos principais

Altura do pavimento - Z (m)	q (kgf/m <sup>2</sup> )	Vento 0°		Vento 90°			
		Fachada Lateral		Barlavento		Sotavento	
		F (kgf)	Ce-Ci	F (kgf)	Ce-Ci	F (kgf)	Ce-Ci
2,8	39	-406	-0,5	487	0,6	-568	-0,7
5,6	46	-483	-0,5	579	0,6	-676	-0,7
8,4	51	-534	-0,5	641	0,6	-748	-0,7
11,2	55	-574	-0,5	689	0,6	-803	-0,7

Por simetria, os valores para o vento a 0° mostram que as forças em cada lateral do edifício atuam na mesma direção, porém em sentidos contrários e o efeito é benéfico a estrutura, pois tende a tracionar as vigas dos pórticos principais, portanto a análise do vento a 0° não será considerada. Para o vento a 90° foi considerado a força na fachada a barlavento e a sotavento. A área de influência foi calculada considerando uma altura de 2,8m e o vão entre cada pórtico de 7,5m. A força com sinal positivo indica que esta atua para o interior da edificação, enquanto com sinal negativo para o exterior da fachada. O resultado para o vento a 90° pode ser mostrado nas imagens abaixo para os pórticos de empena e intermediários.

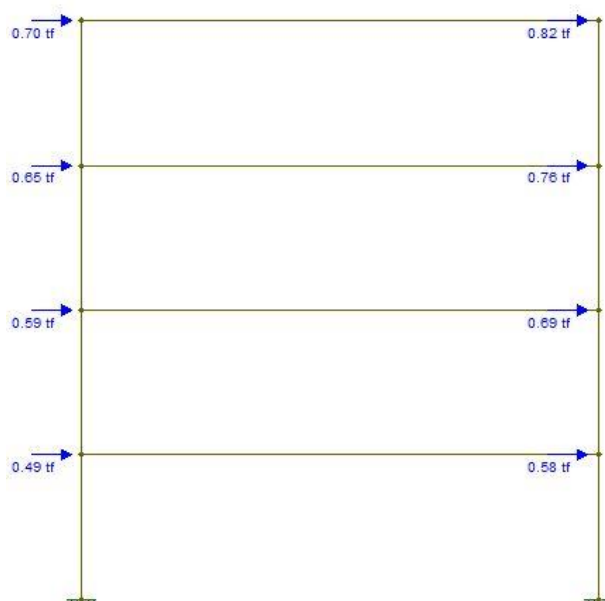


Figura 23 - Vento a 90° sobre portico de empena.

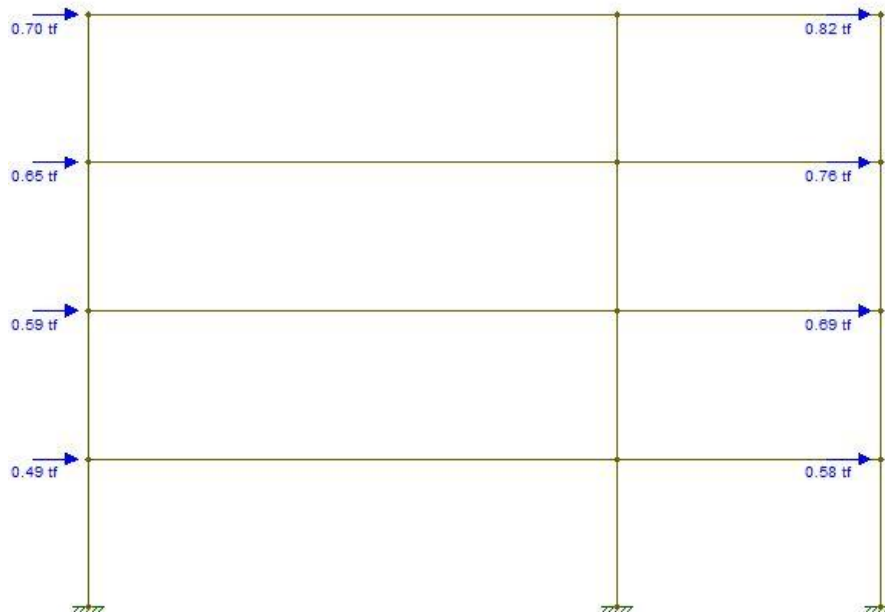


Figura 24 - Vento 90° Pórtico Intermediário

## 9.5. Combinações de Carga

Segundo a norma 8800 no seu item 4.7 um carregamento é definido, pela combinação das ações que tem probabilidades não desprezíveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura em um período pré-estabelecido, de forma a se obter os efeitos mais desfavoráveis, respeitando os estados limites últimos e de serviço.

Ainda segundo a norma as combinações são classificadas entre últimas e de serviço, englobando carregamentos para a verificação dos estados limites últimos e de serviço respectivamente. Nas combinações as cargas são divididas de acordo com sua natureza, frequência e duração na estrutura, e para tanto a norma considera a aplicação de coeficientes de majoração e minoração dependendo dos fatores citados, conforme indicados nas tabelas 1 e 2 da norma.

A norma, no entanto, não aborda metodologias para combinações de carga quando a análise da estrutura utiliza a análise plástica. Conforme já visto, o método plástico baseia na obtenção de um fator de carga ( $\lambda$ ) no momento que o mecanismo é formado. Esse fator, multiplicado pelos valores

representativos inicialmente calculados das ações, gera as cargas que formam o colapso da estrutura. Com base nesse conceito, a aplicação da análise plástica pode ser feita inicialmente a partir da aplicação dos valores representativos das ações, e através de um processo iterativo, aumenta-se o fator até o colapso. Para a garantia da segurança, pode-se adotar que a estrutura satisfaz as condições de estabilidade quando o colapso é formado com um fator de carga superior a 1,4, valor médio próximo dos coeficientes de majoração das ações dados pela norma. Portanto a equação que resume as combinações de cargas a serem utilizadas na estrutura é dada conforme abaixo.

$$S_n = \sum P_i + V_p + \sum \Psi_i V_{s,i} \quad \text{Equação 48}$$

Nota-se que as ações permanentes ( $P_i$ ) e a ação variável principal ( $V_p$ ) são tratadas a partir dos seus valores representativos, sem majoração. Ainda assim é mantida a minoração da carga variável secundária ( $V_{s,i}$ ) em virtude da baixa probabilidade de ocorrência simultânea com seus valores máximos das ações variáveis, conforme indica a norma no item 4.7.6. Outra consideração conservada nesta análise é a indicação na tabela 01, item a, que ações variáveis favoráveis à segurança não serão utilizadas nas combinações, e caso a carga permanente atenuar os efeitos desfavoráveis da carga variável principal, ela deve ser minorada por um coeficiente igual a 0,9. Ainda segundo a norma, pela tabela 02 é possível determinar um coeficiente de minoração da ação variável secundária de 0,5 para a carga acidental e 0,6 para o vento. A partir dessas diretrizes foi possível determinar duas combinações com efeitos mais desfavoráveis, sendo estas resumidas na tabela abaixo na qual P representa o somatório das cargas permanentes, V a carga de vento e S as demais cargas variáveis acidentais atuando sobre a laje.

Tabela 8 - Combinações de carga

<b>Cargas</b>	
Combinação 01	P+Q+0,6V
Combinação 02	P+V+0,5Q

## 9.6. Propriedades do material

As características do aço a ser utilizado nesta análise e especificado para fins de projeto e execução devem atender os critérios mínimos conforme abaixo:

- a) Aço ASTM A 572 Grau 50
- b) Limite de escoamento mínimo ( $f_y$ ): 3450kgf/cm<sup>2</sup>
- c) Relação entre  $f_u/f_y > 1,25$
- d) Modulo de elasticidade (E): 2000tf/cm<sup>2</sup>
- e) Alongamento mínimo na ruptura: 0,18m/m (18%)

A justificativa para o uso do aço ASTM A572 com os limites de escoamento e ruptura listados são em decorrência da disponibilidade desse material no mercado, além de cumprir com o requisito que a tensão de ruptura seja superior a 25% da tensão de escoamento. O critério para o alongamento mínimo das fibras após a ruptura visa estabelecer um amplo patamar de escoamento que permita a abertura de rótulas plásticas e uma maior ductibilidade para a estrutura.

## 9.7. Perfis estruturais

A escolha dos perfis estruturais a serem utilizados para projetos em aço pode ser ampla dependendo da disponibilidade e do tipo de edificação que será construída. No geral, é possível identificar três tipologias de perfis, conforme abaixo.

- a) **Perfis conformados a frio (Chapa Dobrada):** Esses perfis compõem uma grande variedade de tipos de seções, e são formados pela dobra de lâminas de aço criando seções com melhor otimização das suas propriedades geométricas, garantindo rigidez suficiente para fins estruturais. Esses elementos têm grande aplicabilidade em edificações com ações representativas de pequena intensidade, como galpões leves e mezaninos. Devido ao baixo consumo de aço, apresentam grande economia de material e agilidade durante a construção.
- b) **Perfis Laminados:** São perfis conformados a quente, geralmente em formatos do tipo I ou H. Apesar de existirem outras especificações, essas seções são as mais disponíveis e utilizadas. Esses perfis

apresentam um consumo de aço proporcionalmente mais elevado que chapas dobradas. Em decorrência disso, perfis com geometria I ou H apresentam uma geometria que otimiza a distribuição de massa ao longo de um eixo, garantindo elevada rigidez à flexão para momentos aplicados na mesma direção. Esses perfis apresentam seções com dimensões e espessuras pré-definidas por fabricantes.

- c) Perfis Soldados:** São similares aos laminados em termos de tipos de seções e propriedades geométricas, sendo predominantemente utilizados com seções I ou H, porém com a característica das seções serem formadas pela solda de chapas, geralmente mais espessas que as utilizadas para chapas dobradas. Uma vantagem é a maior flexibilidade na confecção de perfis com tamanhos e espessuras variadas, não se restringindo aos valores comerciais.

Para projetos de múltiplos pavimentos, o tipo de perfil mais utilizado é o laminado, em virtude das características desse tipo de estrutura. Edifícios de múltiplos pavimentos possuem grandes vãos a serem superados, que demandam elementos com elevada rigidez para resistir à momentos fletores em uma dada direção e reduzir os deslocamentos da estrutura. Além disso os valores normativos de cargas impostas decorrentes do uso da edificação, no geral, implicam em intensidades elevadas se comparados com uso em edificações como galpões leves, implicando em elementos com maior consumo de aço. Devido a essas características, perfis soldados, também são aplicáveis, mas passam a ser menos competitivos por questões construtivas, pois demandam trabalhos adicionais como soldas e verificações da qualidade dessas ligações. Esses perfis são principalmente recomendados quando as dimensões especificadas por fabricantes de perfis laminados não são mais adequadas para o projeto analisado.

Já perfis de chapa dobrada, tem pequena competitividade nesse tipo de estrutura pois implicariam em elementos de grande porte e com espessura mais elevada se comparadas com as dimensões usualmente trabalhadas no mercado. Isso retira a vantagem desses perfis, que por serem leves, tem grande trabalhabilidade durante a construção e baixo consumo de aço, o que não se aplicaria a esse tipo de projeto em decorrência da intensidade das cargas

utilizadas. Nesse estudo as análises serão feitas a partir de perfis laminados disponibilizados pela Gerdau-Açominas no seu catálogo de bitolas de perfis estruturais.

### 9.7.1. Perfis com capacidade de rotação plástica

Segundo a NBR 8800 em seu item 4.10.3, assim como outros códigos, determina que uma estrutura pode ser dimensionada plasticamente desde que sejam satisfeitas condições que garantam que as seções não irão flambar localmente ou lateralmente com torção permitindo que as mesmas desenvolvam o momento de plastificação da seção e permitam a abertura de rótulas plásticas.

Perfis que garantem essa condição são definidos pela norma brasileira como perfis compactos, ou conforme nomenclatura mais geral, perfis classe 01. Esses perfis, portanto, apresentam características geométricas, como a simetria em relação ao eixo que atravessa a alma e esbeltezas locais de suas mesas e da sua alma que junto a adoção de travamentos da sua mesa comprimida impedem deslocamentos laterais e assim torna-se possível atingir  $M_p$ . A formação de rótula plástica de um perfil é atribuída a sua capacidade de rotação ( $R$ ). Essa medida é definida a partir da seguinte relação.

$$R = \frac{\kappa_1}{\kappa_p} - 1 \quad \text{Equação 49}$$

Na qual  $\kappa_1$  representa a curvatura de um elemento fletido para um momento resistido ligeiramente inferior a  $M_p$ , e  $\kappa_p$  representa a curvatura desenvolvida por  $M_p$  até se atingir alguma instabilidade, na qual há uma redução de  $M_p$ . A figura abaixo ilustra esse conceito, na qual  $\kappa_p$  foi determinado próximo ao final do ensaio quando a relação entre  $M/M_p$  diminuiu. Pode-se também adotar como referência para  $\kappa_p$  o momento em que  $M/M_p$  volta a ser igual a 01. (Matias de Paula)



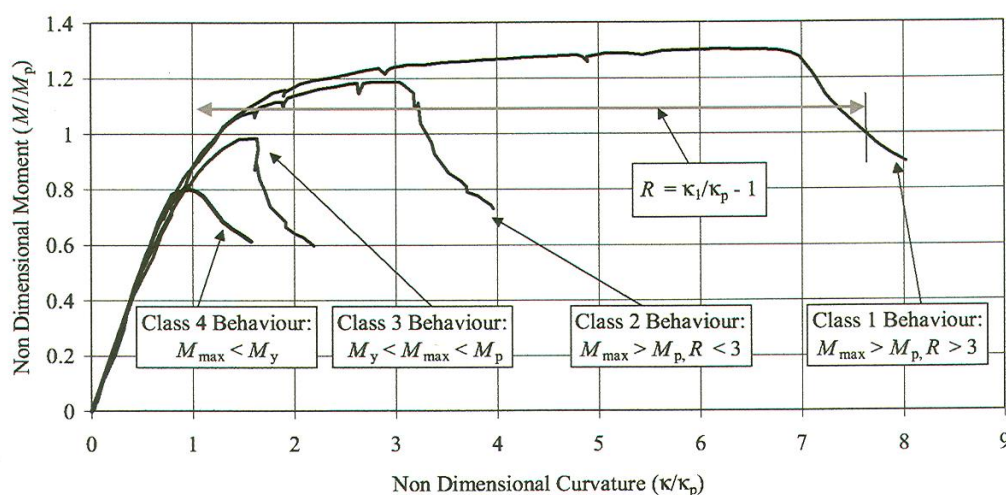


Figura 25 - Definição da Capacidade de Rotação

Quanto maior  $R$ , maior a capacidade de rotação do perfil e conseqüentemente a possibilidade dele desenvolver uma rótula plástica. Algumas normas utilizam esse critério para definir 4 ou 3 classes de seções, além das seções de classe 01 já citadas. Em todas as demais classes há algum tipo de instabilidade que impede a formação consistente de rótulas plásticas e, portanto, não são apropriadas para uso em análise plástica de edifícios. A Figura 25 ilustra as demais curvas para os outros tipos de classe. Nota-se que para perfis classe 04, o momento resistente sequer atinge o momento de início de escoamento da seção, esses perfis são classificados como esbeltos. O Eurocode 3/01 define que seções com  $R$  superior a 3 já podem ser consideradas compactas. Esse limite, no entanto, varia com o tipo de norma utilizada.

Apesar dos conceitos definidos, do ponto de vista prático, as normas estabelecem limites que variam em função da geometria, e conseqüentemente da esbeltez dos elementos que compõem a seção de perfil fletido. Para elementos não enrijecidos comprimidos, como as mesas de perfis I ou H as normas trazem valores para a relação entre a espessura da mesa e seu comprimento limitadas no máximo às seguintes equações para os perfis serem classificados como de classe 01.

Tabela 9 - Limites para a esbeltez local das mesas

NORMA	b/t
	(Classe 1)
AISC-LRFD/94	172 / (Fy) <sup>1/2</sup>
AISC-ASD/89	136 / (Fy) <sup>1/2</sup>
CAN/CSA-S16.1/94	145 / (Fy) <sup>1/2</sup>
A-4000/90	131 / (Fy) <sup>1/2</sup>
BS-5950/2000 ( <i>Perfis laminados</i> )	141 / (Fy) <sup>1/2</sup>
BS-5950/2000 ( <i>Perfis soldados</i> )	124 / (Fy) <sup>1/2</sup>
NBR-8800/86	136 / (Fy) <sup>1/2</sup>
Eurocode 3/2001	138 / (Fy) <sup>1/2</sup>

Os valores dependem da tensão de escoamento (fy em MPa) e podem variar de 7,0 a 10,0 para um aço com tensão de escoamento de 300MPa. A adoção de um limite de 10,0 no lugar de 7,2 pode gerar uma economia de até 15% no consumo de aço.

Para elementos enrijecidos fletidos, submetidos parte a compressão e parte a tração, como é o caso de almas de vigas tipo I ou H pode-se adotar os seguintes limites para a classificação do perfil como de classe 01.

Tabela 10 - Limites de esbeltez para alma

NORMA	d/t
	(Classe 1)
AISC-LRFD/94	1679 / (Fy) <sup>1/2</sup>
AISC-ASD/89	1081 / (Fy) <sup>1/2</sup>
CAN/CSA-S16.1/94	1100 / (Fy) <sup>1/2</sup>
A-4000/90	1296 / (Fy) <sup>1/2</sup>
BS-5950/2000	1310 / (Fy) <sup>1/2</sup>
NBR-8800/86	1064 / (Fy) <sup>1/2</sup>
Eurocode 3/2001	1103 / (Fy) <sup>1/2</sup>

Novamente os valores acima podem apresentar grande variação dependendo do critério utilizado. Para tensões de escoamento de 300MPa pode-se obter limites entre 70 e 100. Para elementos submetidos a flexocompressão, caso típico de pilares de edifícios de múltiplos pavimentos, a tensão adicional de compressão gera um reposicionamento da linha neutra, fazendo com que a maior parte da seção fique comprimida. Nesses casos, a instabilidade da alma é mais provável, fazendo com os limites para que a seção seja classificada como de classe 01 sejam menores que o de seções submetidas a flexão pura.

Tabela 11 - Limites de esbeltez para peças flexocomprimidas

NORMA	d/t
	(Classe-1)
AISC-LRFD/94	1680 (1-2,75n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n ≤ 0,125
	500(2,33-n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n > 0,125
AISC-ASD/89	1081 (1-1,4n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n ≤ 0,270
	674 / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n > 0,270
CAN/CSA-S16.1/94	1100 (1- 0,39n) / (Fy) <sup>1/2</sup> ,   n
A-4000/91	1296 (1-1,67n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n ≤ 0,270
	826(1-0,52-n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n > 0,270
BS-5950/2000	1310 / ((1,2a + 0,4) (Fy) <sup>1/2</sup> )
NBR-8800/86	1064 (1-1,60n) / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n ≤ 0,234
	665 / (Fy) <sup>1/2</sup> , para n > 0,234
Eurocode 3/2001	6070 / ((13a -1) (Fy) <sup>1/2</sup> ),

Na tabela acima, n é a relação entre a carga axial aplicada e a força de plastificação axial da seção (Py) dada por:

$$n = \frac{P}{P_y} \quad \text{Equação 50}$$

E α dado como:

$$\alpha = \frac{n+1}{2} \quad \text{Equação 51}$$

Para este estudo serão utilizados os critérios da norma BS-5950/2000 tanto para o limite de esbeltez de mesas comprimida dado pela Tabela 9 como os limites de esbeltez para almas flexocomprimidas dado pela Tabela 11. Isso

torna o processo de análise e escolha dos perfis iterativo e específico para cada perfil, que serão analisados inicialmente elasticamente para obtenção dos valores das cargas axiais e então comparados com os resultados gráficos obtidos com o software MASTAN2.

### 9.7.2. Análise dos perfis Gerdau-Açominas

Os perfis estruturais laminados comercializados pela Gerdau-Açominas no seu catálogo de bitolas de 09/2017 apresentam 108 tipos distribuídos entre 69 do tipo I e 39 do tipo H. Os perfis apresentam dimensões variadas apresentando alturas entre 148mm a 628mm, e peso linear entre 13kg/m a 217kg/m, medidas essas que servem de base para a identificação dos perfis.

#### a) Fator de forma na direção de maior inércia (Eixo XX – Horizontal a seção)

Para esses elementos foi possível obter os dois histogramas abaixo, tanto para perfis tipo H como para perfis tipo I.

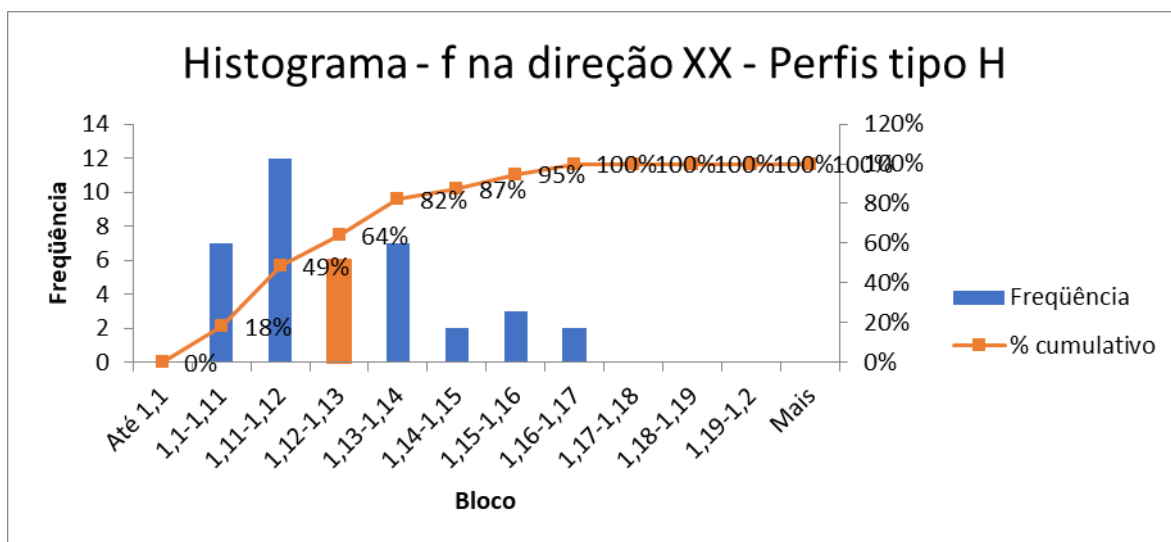


Figura 26 - Histograma fator de forma perfis tipo H, na direção XX

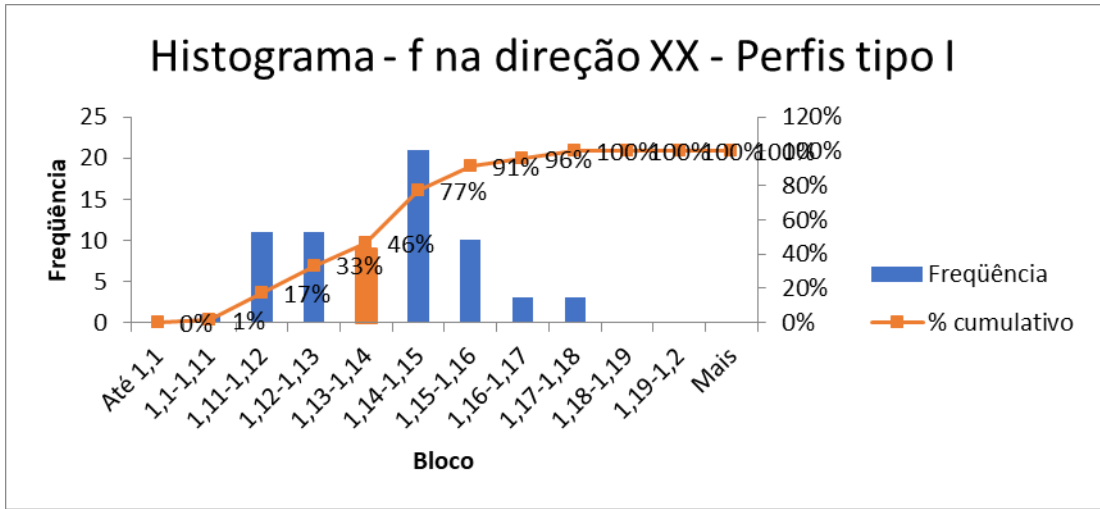


Figura 27 - Histograma fator de forma perfis tipo I na direção XX

Conforme mostram os dados acima, os perfis de classe 01 tipo I brasileiros apresentam fator de forma médio entre 1,12 e 1,13 (coluna destacada de laranja), valores um pouco inferiores à média americana de 1,14, conforme Beedle [2]. Para os perfis H a média é entre 1,13 e 1,14. Mas observa-se que ambos apresentam distribuição próxima tendo 100% dos seus valores variando entre 1,10 e 1,18.

**b) Fator de forma na direção de menor inércia (Eixo YY – Vertical a seção)**

Para esses elementos foi possível obter os dois histogramas abaixo, tanto para perfis tipo H como para perfis tipo I.

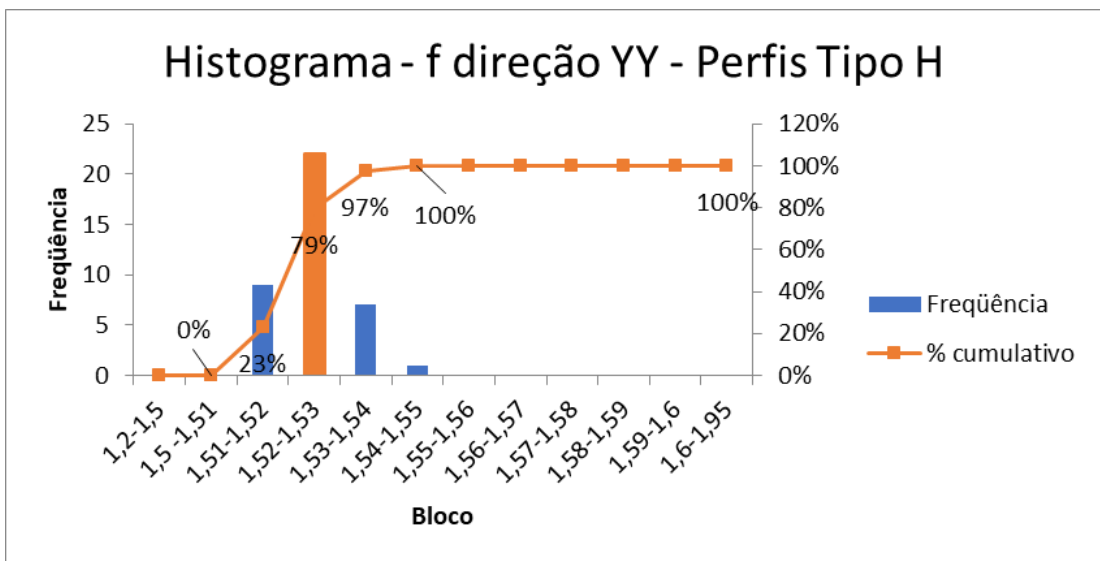


Figura 28 - Fator de forma perfis H na direção YY

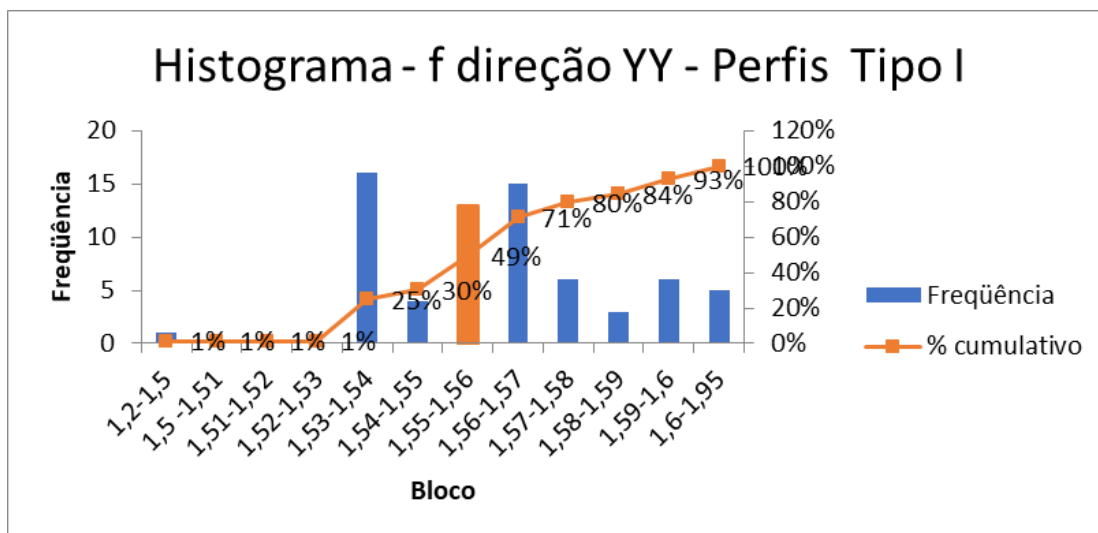


Figura 29 - Histograma perfis I na direção YY

Nessa análise nota-se uma diferença entre o intervalo onde há maior frequência dos valores obtidos para perfis I ou H. A média para seções do tipo H está entre 1,52 e 1,53, com elevada concentração da amostra em torno desse intervalo totalizando aproximadamente 85% dos perfis desse tipo. Para perfis do tipo I há uma melhor distribuição com a mesma probabilidade distribuída em uma faixa entre 1,52 e 1,60, com média entre 1,55 e 1,56.

A análise acima, demonstra a diferença entre os valores dos fatores de forma para perfis brasileiros nas direções de maior e menor inércia, fato evidenciado pelas médias obtidas de 1,13 e 1,55 respectivamente. Essa diferença tem relevância nos métodos de análise plástica pois, conforme descrito no capítulo 03 desta monografia, uma análise inicial pode indicar que seções com maior fator de forma, por possuírem maior margem entre o início da plastificação e a formação da rótula plástica, são um fato positivo para fins de projeto. No entanto essa propriedade indica que algumas fibras iniciam o processo de escoamento muito antes da formação da rótula plástica. A plastificação de parte da seção implica em perda de rigidez para o elemento e como consequência, nota-se um aumento dos deslocamentos da estrutura, violando o estado limite de serviço antes mesmo da formação de um número representativo de rótulas plásticas. Nesse cenário, tende-se a aproveitar menos da rigidez e resistência da estrutura, implicando em maior consumo de material.

Portanto, perfis I ou H, apesar de possuírem um dos menores fatores de forma entre as seções disponíveis para sua direção de maior inércia, são mais

indicados, pois a diferença entre o momento de início de plastificação e o momento de plastificação é menor, evitando que a estrutura se desloque de forma acentuada antes da formação do mecanismo, o que representa uma vantagem em termos de aproveitamento de material. Invertendo-se o fator de forma, observa-se que em média, para momentos resistidos na direção de maior inércia, o início do escoamento da seção ocorre com um momento equivalente a 88,5% de  $M_p$ , enquanto que na direção de menor inércia essa relação pode chegar, em média, a 64% de  $M_p$ , o que corrobora a análise anterior.

## **9.8. Recomendações para análise plástica em edifícios de múltiplos pavimentos**

Além dos diversos requisitos e recomendações acerca da análise plástica de estrutura de múltiplos pavimentos citados anteriormente, serão descritos abaixo, em tópicos, algumas recomendações e direcionamentos de projeto que envolvem critérios de lançamento e definição de perfis para projetos originados da análise plástica.

### **9.8.1. Análise dos fatores de carga em projeto**

O projeto de edifícios de múltiplos pavimentos parte de um processo iterativo, na qual a escolha do perfil é definida após uma otimização que atenda os estados limites e critério econômicos. O critério de parada no dimensionamento, no entanto, é feito de forma a se obter um fator de carga de colapso de segunda ou primeira ordem superior a 1,4.

Outro critério relevante na análise é evitar que a primeira rótula plástica seja formada com fator de carga inferior ou próximo de 1,0. Isso implica que a estrutura não possui rigidez suficiente para se manter totalmente elástica, mesmo para cargas representativas ou valores inferiores a ela. A consequência disso, são flechas mais elevadas ainda no início do histórico de carregamento previsto para a estrutura, violando, antecipadamente, o estado limite de serviço. A partir dessas considerações e visando maior economia de material é possível estabelecer o seguinte corolário, na qual é recomendável que a todas as rótulas plásticas estejam em um intervalo para o fator de carga entre 1,15 e 1,60, sendo que a última rótula plástica não deverá ser inferior a 1,40. Essa condição nem

sempre é atendida em virtude da relação entre as rigidezes entre as vigas e pilares adotados e também em decorrência da existência de sistemas de contraventamento que ampliam substancialmente os fatores de carga. Além disso dependendo das dimensões dos vãos a serem superados os deslocamentos podem ser mais relevantes no dimensionamento da estrutura forçando um aumento nos fatores de carga de colapso. Apesar disso, essa condição pode ser adotada como referência para um projeto com consumo de aço otimizado.

### **9.8.2. Análise em pilares**

Outras considerações importantes a serem levadas em conta em projetos de edifícios de múltiplos pavimentos em aço analisados plasticamente refere-se ao dimensionamento dos pilares. A ruína desses elementos é em geral, catastrófica para a edificação, indicando o grau de importância que esses elementos devem ter em projetos.

Conforme já analisado em capítulos anteriores, a formação da rótula plástica implica em elevada perda de rigidez para um elemento, em decorrência do escoamento das fibras de determinadas seções. A presença de rótulas plásticas em pilares, pode ser considerada crítica dependendo do instante de tempo da sua formação. Caso a primeira rótula plástica seja formada em um pilar, os deslocamentos na edificação serão bastante acentuados devido a uma perda elevada na rigidez da estrutura, cenário na qual não se faz bom proveito da rigidez dos demais elementos a ele ligado. Portanto, a recomendação é evitar o surgimento de rótulas plásticas no início do processo de plastificação da estrutura. De forma geral, isso é feito fazendo com que os pilares tenham uma rigidez superior aos demais elementos e também condicionando que a única rótula plástica a se formar em um pilar seja a última rótula, para a qual o mecanismo se completa, e sobre a qual o colapso da estrutura é inevitável.

O perfil mais adequado para análises de pilares são os perfis do tipo H, devido as suas propriedades geométricas, por terem uma altura próxima da largura das suas mesas. Essa característica, faz com que a proporção entre a maior inércia e a menor inércia seja muito inferior a de perfis I, indicando uma



boa equivalência entre as rigidezes nas duas direções principais. Isso é importante devido a característica própria das colunas que geralmente resistem a flexões biaxiais, dependendo das características do lançamento. Como elementos submetidos a elevados momentos tendem a ser analisados inicialmente pela maior inércia, a escolha de perfis H permite uma inércia equivalente na outra direção principal, facilitando a análise. Isso pode ser constatado a partir da apreciação abaixo feita para os perfis Gerdau já descritos anteriormente. Nota-se que na faixa correspondente aos perfis H, a relação entre a maior e a menor inércia é inferior a 5 vezes, enquanto para perfis I pode chegar a quase 50 vezes.

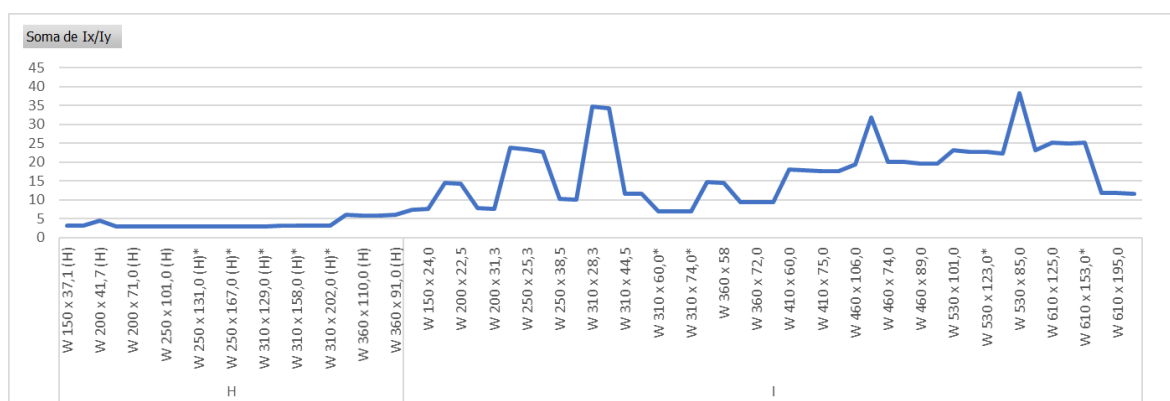


Figura 30 - Relação entre as inércias principais dos perfis Gerdau

Além dos fatores acima, o momento de plastificação resistente da seção diminui na presença de esforços axiais, conforme descrito na seção 3.2.1 desta monografia. De forma resumida, este efeito tem relevância quando a proporção entre a carga axial aplicada e a carga axial de plastificação da seção ( $P_y$ ) é superior a 0,15, conforme Beedle [2], sendo que esta referência é variável segundo alguns autores. Essa consideração geralmente deve ser verificada em casos de edifícios de múltiplos pavimentos, nas quais cargas axiais em pilares podem apresentar valores significativos. Para fazer esta análise pode-se utilizar as equações simplificadas obtidas de Neal [1] para a representação das superfícies de plastificação com a interação entre os esforços axiais e a redução no momento de plastificação para seções I e H.

- a. Perfis I fletidos em torno do eixo de maior inércia

$$0,1 \leq n \leq 1; \quad Z_{prx} = 0,27(1 - n)(4 + n)Z_p \quad \text{Equação 52}$$

b. Perfis I fletidos em torno do eixo de menor inércia

$$0,3 \leq n \leq 1; \quad Z_{prx} = 2,04(1 - n)(0,4 + n)Z_p \quad \text{Equação 53}$$

c. Perfis H fletidos em torno do eixo de maior inércia

$$0,1 \leq n \leq 1; \quad Z_{prx} = 0,156(1 - n)(7 + n)Z_p \quad \text{Equação 54}$$

d. Perfis H fletidos em torno do eixo de menor inércia

$$0,2 \leq n \leq 1; \quad Z_{prx} = 0,156(1 - n)(8 + n)Z_p \quad \text{Equação 55}$$

Essas curvas são plotadas na imagem abaixo mostrando a interação entre esses efeitos. Usualmente é recomendável trabalhar com perfis que tenham a relação entre a carga axial resistida e carga axial de plastificação da seção inferior a 0,3, zona considerada ideal pois dessa forma se aproveita mais do material. No entanto é aceitável se trabalhar com perfis com essa relação trabalhando entre 0,3 e 0,5, sendo essa faixa uma zona de transição para o projetista, pois valores superiores a 0,5 não são recomendados, pois a redução do momento de plastificação pode chegar a 40% em perfis do tipo I com momento em função do eixo de maior inercia.

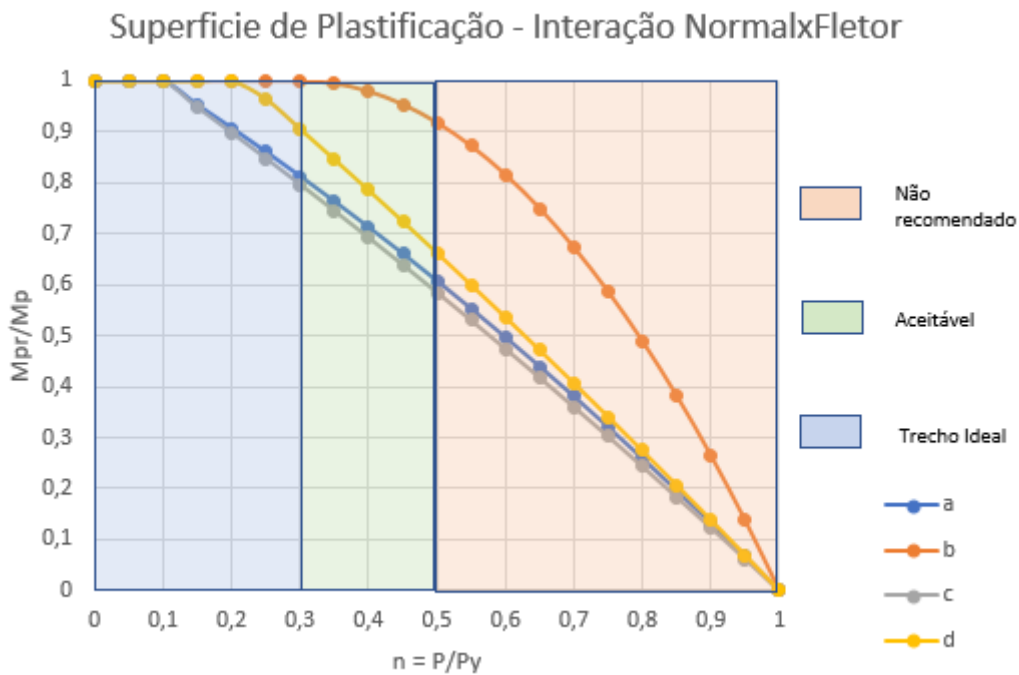


Figura 31 - Superfícies de interação normal x fletor

### 9.8.3. Recomendações para o travamento lateral de peças fletidas

Além das recomendações sobre os limites de esbeltez locais ao qual os perfis devem cumprir para serem classificados como perfis compactos ou de classe 01 as normas, entre elas a NBR 8800, definem que os perfis devem desenvolver as rótulas plásticas antes que ocorram flambagens laterais com torção. A norma brasileira no seu item 4.10.3 define que para essa última condição devem ser atendidas nos pontos de formação de rótula plástica que a seção transversal do perfil de aço deve ser simétrica em relação ao plano da alma e deve possuir contenção lateral adequada.

O travamento lateral evita a flambagem lateral com torção prematura, e para que esta não venha a ocorrer o comprimento destravado da mesa comprimida nos trechos situados entre dois pontos adjacentes da formação de rótulas plásticas não deve exceder, para o caso de perfis I duplamente simétricos com área da mesa comprimida igual ou maior que a mesa tracionada, carregadas no plano da alma o valor de  $L_{pd}$  dado por:

$$L_{pd} = \left( 0,12 + 0,076 \frac{M_1}{M_2} \right) \frac{E}{f_y} r_y \quad \text{Equação 56}$$

Na qual  $M_1$  e  $M_2$  representam o menor e o maior momento, respectivamente, das extremidades do comprimento destravado considerado, tomada como positiva quando os momentos provocarem curvatura reversa e negativa quando provocarem curvatura simples. E é o modulo de elasticidade do aço,  $f_y$  a tensão de escoamento adotada e  $r_y$  o raio de giração em relação ao eixo de menor inércia. Para os perfis obtidos para as vigas dos pórticos foram calculados os seguintes espaçamentos máximos adotados como se segue, considerando que a mesa comprimida deve ser fixada por meio de pinos junto às formas das lajes. No caso padronizou-se o espaçamento máximo de 298cm para todos os pórticos.

Tabela 12 - Distância máxima para travamento lateral

	Perfil	$r_y$ (cm)	$L_{pd}$ (cm)
<b>Portico Central</b>	W360x39	2,73	310
<b>Portico Empena</b>	W360x32,9	2,63	298

Portanto, em termos de análise plástica para se garantir que a estrutura irá desenvolver rótulas, redistribuir os momentos e colapsar por um mecanismo deve-se, resumindo os pontos abordados até então, garantir o travamento lateral adequado da mesa comprimida, o uso de perfis compactos e um aço com grande patamar de escoamento definido, visando um dimensionamento plástico da estrutura.

#### 9.8.4. Análise de vigas

Vigas em pórticos são geralmente tratadas como contínuas, incorporando todos os vãos ao longo do seu alinhamento. Isso depende das condições estabelecidas durante o lançamento da estrutura, mas de forma geral, o efeito da continuidade se mostra benéfico para a redistribuição dos momentos e controle dos deslocamentos sobre os vãos.

O colapso de vigas contínuas ou trechos desse elemento possui um mecanismo característico conforme pode ser visualizado na imagem abaixo, na qual se extraiu um vão central e um vão de empena de uma viga hipoteticamente contínua.

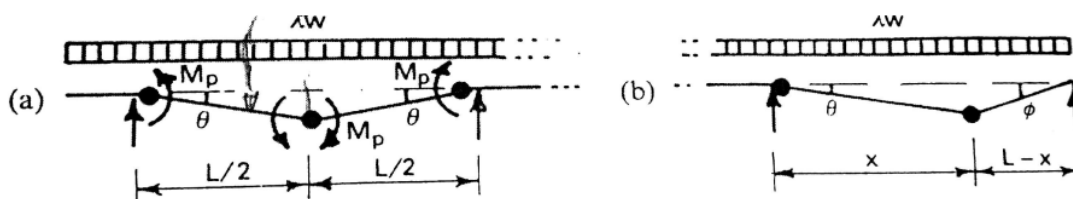


Figura 32 - Trechos de uma viga contínua e seus mecanismos. a) Vão central. b) Vão da empena.

Conforme pode-se notar os mecanismos de viga que se formam indicam a formação de rótulas plásticas sobre os apoios, primeiramente, e em seguida sobre uma seção do vão. Uma característica importante é que essas rótulas destroem a continuidade da viga, liberando os vãos para colapsar de forma independente dos demais vãos adjacentes (Davis & Brown, 1996). Utilizando o método dos trabalhos virtuais para a viga com carga uniforme aplicada, podemos rapidamente concluir que o valor do momento de plastificação obtidos para o vão central e de empena serão:

$$\text{Momento de Plastificação vão interno: } M_p = \frac{\lambda w L^2}{16} \quad \text{Equação 57}$$

$$\text{Momento de Plastificação vão de empena: } M_p = \frac{\lambda w L^2}{11,66} \quad \text{Equação 58}$$

Na qual L é o comprimento do vão, w a carga distribuída aplicada e  $\lambda$  o fator de carga aplicado para a obtenção do mecanismo. Nota-se que o valor obtido para o momento de plastificação do vão mais extremo é superior ao do vão central. Essa diferença provoca a necessidade de se ter uma seção não uniforme para todos os vãos caso o comprimento L não varie. A solução para essa questão depende das condições executivas do projeto e é muito impactada no lançamento da estrutura. Algumas recomendações são indicadas abaixo em tópicos.

- a) Projetar uma viga uniforme a partir da seção mais crítica, no caso a seção de empena. Essa solução gera um maior consumo de material, no entanto pode ser vantajosa caso as flechas sejam um parâmetro prioritário do projeto.
- b) Projetar a viga como uma série de vigas com dois vãos apenas, ao longo de toda a extensão. Essa solução economiza em ligações, porém gera um consumo maior de material e um aumento das reações sobre os pilares internos, implicando em custos maiores para as fundações.
- c) Utilizar uma seção maior apenas para os vãos extremos. Essa solução é a mais econômica, porém deve-se atentar para o posicionamento da transição entre as diferentes seções. O ideal é que a transição seja feita no penúltimo vão, prolongando a viga de maior seção sobre o penúltimo apoio e indo até o ponto de inflexão da flecha elástica. Caso a transição ocorra diretamente sobre o apoio, deve-se verificar se a rótula plástica se forma na seção mais fraca e não o contrário.
- d) Por último, ajustar o vão mais extremo para uma dimensão próxima de 85% do comprimento do vão central, pois nessa condição os momentos de plastificação dados pelas equações anteriores se igualam. Essa condição depende da arquitetura do projeto.

### **9.9. Critérios de dimensionamento de elementos mistos em aço e concreto**

As vigas secundárias são elementos que suportam os sistemas de lajes da estrutura e descarregam suas cargas para os pilares dos pórticos principais. Em virtude das condições de lançamento desses elementos, as ligações nos seus apoios são difíceis de serem confeccionadas com rigidez suficiente para transmitirem momentos. Portanto considera-se que essas vigas são biapoiadas sobre seus apoios, conforme já discutido em seção anterior.

O dimensionamento desses elementos não deve ser feito aplicando-se a análise elastoplástica com as diretrizes já elencadas ao longo deste estudo, pois isso acarretaria em superdimensionamento, com um consumo de aço muito acima dos padrões para esse tipo de projeto, sendo, portanto, antieconômico. Isso ocorre devido aos vãos elevados que implicam em grandes deslocamentos a serem mitigados, fator este determinante no dimensionamento, que combinados com a necessidade de perfis compactos para a plastificação da seção geram elementos com grande consumo de aço.

A solução mais coerente é aproveitar a interação das vigas com as lajes de concreto existentes e dimensioná-las como elementos mistos em concreto e aço. Apesar do foco desta monografia ser a análise plástica de elementos metálicos, serão discutidas brevemente as diretrizes necessárias para a determinação dos perfis das vigas secundárias em virtude do seu peso na composição final do consumo de aço da estrutura. O anexo O da NBR 8800 trata as diretrizes para o dimensionamento desses elementos.

As lajes com fôrmas em aço são padronizadas de acordo com catálogos de fabricantes. Conforme catálogo da Metform, as lajes para edifícios residências são do tipo MF-50, com altura das nervuras de 50mm. As fôrmas são disponíveis em espessuras de 0,8mm, 0,95mm e 1,25mm que junto com a espessura da capa de concreto permitem determinar os vãos máximos que podem ser superados pelas lajes e as cargas máximas suportadas, retirado o peso próprio, de acordo com as tabelas do fabricante. Mais detalhes quanto as escolhas das lajes serão descritas no dimensionamento.

Para as vigas, a norma distingue dois conceitos relacionados com a interação entre o aço e o concreto, definidos como interação parcial e interação completa. A ligação entre a viga metálica e o concreto da laje pode ser feita com uso de pinos ou trechos de chapas dobradas em perfil U. Esses conectores são soldados diretamente nas vigas ou através das formas das lajes sobre as mesas dos perfis. A interação completa ocorre quando a resistência dos conectores é maior que a resistência dos materiais comprimidos ou tracionados, no caso o concreto e o aço respectivamente. Quando isso ocorre a laje de concreto não desliza sobre a mesa do perfil, fazendo com que as tensões se desenvolvam plenamente considerando a atuação conjunta dos dois materiais. A interação parcial ocorre quando a resistência dos conectores é inferior a resistência dos materiais, e os esforços atuantes sobre esses elementos plastificam suas seções. Os conectores perdem rigidez e não conseguem manter a ligação total entre o aço e o concreto, permitindo o deslizamento relativo entre os dois elementos, isso faz com que as tensões atuem individualizadas em cada parte, não aproveitando as aéreas da seção de forma conjunta. (Pfeil & Pfeil, 2009)

As vigas com interação total atingem o seu momento resistente com a plastificação da seção, tanto do aço como do concreto comprimido. Para a viga dimensionado com interação parcial, a quantidade de conectores diminui em relação a ligação total, trazendo alguma economia no dimensionamento. A interação parcial também prevê a plastificação da seção, porém incorporando mudanças no cálculo em decorrência do deslizamento relativo entre os elementos. Para garantir a plastificação dos materiais no estado limite último a norma recomenda o uso de perfis compactos. No entanto, como a flambagem lateral dos perfis e a local da mesa é limitada pela ligação da mesa comprimida com o concreto, basta verificar a possibilidade de flambagem local da alma. Caso o perfil tenha uma esbeltez local da alma inferior ao valor abaixo, este pode ser considerado como compacto.

$$\frac{h_w}{t_w} \leq 3,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad \text{Equação 59}$$

Para o aço adotado o limite é de 90,53, valor que engloba boa parte dos perfis disponíveis no catálogo da Gerdau. Para esses perfis o dimensionamento

é feito com seguinte distribuição entre de tensões na seção de acordo com a norma.

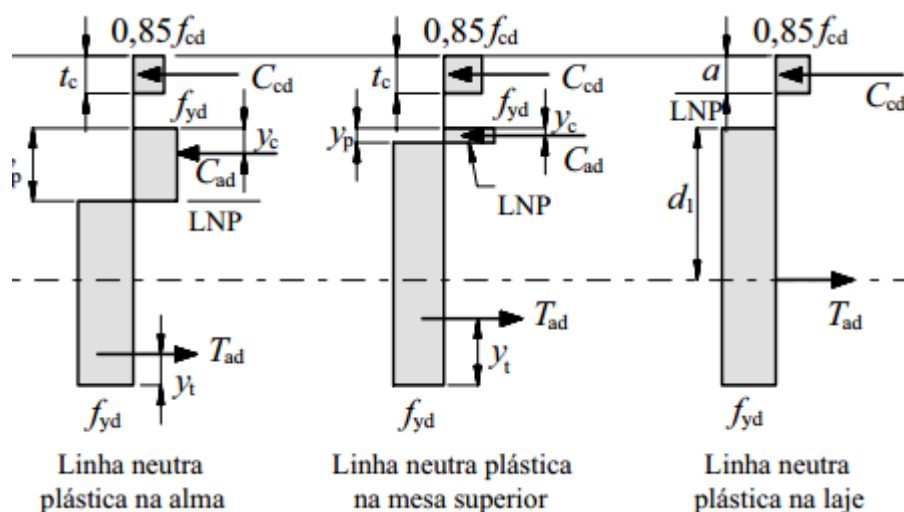


Figura 33 - Distribuição de tensões para seção plastificada para interação completa

Perfis com esbeltez local da alma superior ao valor acima devem ser analisados elasticamente, determinando-se as tensões atuantes no concreto e no aço distribuídas linearmente, limitando-as aos valores indicados pela norma que são inferiores às tensões de escoamento para as fibras mais externas, pois o critério de ruptura passa a ser a flambagem local da alma. Quanto aos esforços cortantes, atribua-se que toda a resistência é oriunda da seção de aço, desprezando a parcela de concreto. Para este estudo, foi considerado no dimensionamento das vigas mistas apenas seções compactas, segundo os critérios fornecidos e com interação completa, o que resulta em um momento resistente mais elevado para o conjunto.

Para as flechas foi obtida uma nova inércia da seção, dividindo-se a área de aço pela razão abaixo.

$$\alpha = \frac{E_{aço}}{E_{concreto}} \quad \text{Equação 60}$$

Sendo  $E_{concreto}$  o módulo de elasticidade secante do concreto. Essa nova área, na prática reduz a largura efetiva de concreto que influencia no dimensionamento da viga e considera uma nova área equivalente de aço de igual tamanho, chamada de seção homogeneizada. Tendo estes valores e adotando-se a interação completa para o dimensionamento da viga mista pode-se calcular



uma nova inércia equivalente da seção modificada. Com essa inércia é possível aplicar as equações básicas para o cálculo dos deslocamentos elásticos em viga para cada condição de contorno estabelecida, pois como a plastificação só ocorre na condição limite, é plausível adotar que em condições de serviço predomina o regime elástico.

A norma ainda define que o dimensionamento da viga mista depende do processo construtivo adotado. Caso não se escore a viga, durante a fase inicial, na qual o concreto ainda não possui resistência, toda a carga permanente desse período deve ser suportada pela viga de aço. Do contrário não há a necessidade de verificações adicionais. Neste estudo adotou-se que as vigas são escoradas durante a construção.

O dimensionamento de conectores, depende do tipo de interação a ser adotada. Para a interação completa, os conectores devem romper após a plastificação das seções de aço e de concreto. Isso é atingido quando a soma das resistências dos conectores é superior às resistências nominais do concreto em compressão e do aço em tração. O espaçamento dos conectores pode ser uniformemente distribuído ao longo do vão, devendo apenas observar alguns limites na quantidade de conectores caso haja cargas concentradas.

## 10. DIMENSIONAMENTO DA ESTRUTURA

Aplicando todos os conceitos elencados nas seções anteriores foi possível obter um dimensionamento prático da estrutura analisada. O processo de dimensionamento foi feito, inicialmente, a partir da escolha das lajes com fôrma de aço incorporada (*steel-deck*) que melhor otimizava questões construtivas com a capacidade de superar os vãos propostos. Em seguida realizou-se o dimensionamento das vigas secundárias de suporte da laje utilizando o modelo de viga mista com interação completa proposto pelo anexo O da NBR 8800. Da mesma forma, utilizando os mesmos direcionamentos definiu-se o perfil para a viga de bordo que apoia as vigas secundárias de suporte das lajes. Por último com as cargas nominais obtidas da análise das vigas e lajes dos pavimentos foi possível incorporar os carregamentos nos pilares que formam os pórticos principais da estrutura, tanto os centrais como os das empenas, estes por sua vez, foram dimensionados plasticamente utilizando os conceitos abordados nesse estudo. Os resultados são listados nesta sequência descrita conforme os itens que se seguem.

### 10.1 Dimensionamento das lajes

Lajes com fôrma incorporada seguem padrões construtivos pré-estabelecidos pelos seus fabricantes conforme já analisado anteriormente. Seguindo as recomendações do catálogo de *Steel-Deck* da Metform é indicado o uso para instalações residenciais de fôrmas do tipo MF-50, na qual a altura da nervura não é superior a 50mm. Em seguida, optou-se por uma fôrma com espessura de 0,8mm e laje com altura total de 120mm, para maior compatibilidade entre a laje e as dimensões dos conectores utilizados no dimensionamento das vigas secundárias. Segundo o fabricante, para essas dimensões as lajes superam vãos máximos sem escoramentos de

*Tabela 13 - Vãos máximos sem escoramento*

Altura total da laje (mm)	Espessura da fôrma (mm)	Vãos máximos sem escoramentos (mm)			
		Simples	Duplos	Triplos	Balanço
120	0,8	1650	2600	2700	850

O posicionamento das lajes será feito de forma que as nervuras sejam direcionadas perpendicular às vigas secundárias de apoio. Dessa forma os vãos entre as vigas secundárias e os pórticos principais são uniformes e iguais a 1.875mm, valor inferior aos vãos máximos duplos e triplos listados. Além de atender esse critério, é preciso verificar a carga máxima, desconsiderando as cargas permanentes, que pode ser aplicada na laje com os vãos propostos. A carga de projeto, considerando apenas a utilização e os revestimentos totalizam 336kgf/m<sup>2</sup>. Para a laje proposta, o catálogo do fabricante considera para um vão de 1,900mm a capacidade de suporte da laje à uma carga de 1.033kgf/m<sup>2</sup>, valor muito superior ao aplicado. Esses critérios tornam o dimensionamento da laje satisfatório.

*Tabela 14 - Dados da laje dimensionada*

<b>Altura total da laje (mm)</b>	120
<b>Espessura da fôrma (mm)</b>	0,8
<b>Carga máxima (kgf/m<sup>2</sup>)</b>	1.033
<b>Vão (mm)</b>	1.875
<b>Consumo de concreto (m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>)</b>	0,095
<b>Armadura de retração</b>	
Tipo de tela	Q-75
Composição	Ø3,8 x Ø3,8 - 150x150
Peso (kg/m <sup>2</sup> )	1,21
<b>Armadura da forma (kg/m<sup>2</sup>)</b>	8,39

## 10.2. Dimensionamento das vigas secundárias

O dimensionamento das vigas secundárias foi feito utilizando o software Viga Mista 3.0 (Kotinda, Rigobello, & Oliveira, 2011) conforme descrito anteriormente. Os resultados foram obtidos para o cálculo de vigas mistas com interação completa, utilizando perfis com alma compacta, considerando a laje com as características definidas na seção anterior e disposta com nervuras perpendiculares a seção dos perfis. O concreto adotado tem resistência característica de 30MPa. As ligações das vigas e a laje serão feitas com conectores do tipo pino com cabeça de diâmetro de 15.9mm, limite de ruptura de 450MPa, e altura após soldagem de 90mm. Será aplicado apenas um pino por nervura distribuídos uniformemente ao longo do vão da viga.

Será adotado que durante o processo construtivo as vigas serão escoradas. Para a avaliação das flechas adotou-se comportamento elástico considerando a largura efetiva corrigida da seção de concreto conforme descrito anteriormente.

Para a viga secundária de apoio das lajes a carga solicitante mais crítica adotada foi de 16 kgf/cm distribuídos uniformemente ao longo dos 10m de vão da viga. Para o estado limite último adotou-se um momento fletor de cálculo de 28tf.m e um cortante de cálculo de 11,2tf. Para o estado limite de serviço adotou-se uma flecha limite de 3,33cm. Os valores obtidos para os esforços cortantes e as flechas calculadas foram obtidos conforme abaixo:

*Tabela 15 - Resultados vigas secundarias de apoio da laje*

Seção	kg/m	I <sub>tr</sub> (cm <sup>4</sup> )	f (cm)	Momento Resistente (tfm)	Cortante (tf)
W 310 x 28,3	28,3	20537	5,07	27,56	34,86
W 310 x 32,7	32,7	23390	4,45	30,83	38,85
W 360 x 32,9	32,9	27724	3,76	33,2	38,09
W 310 x 38,7	38,7	27056	3,85	34,39	33,87
W 410 x 38,8	38,8	38790	2,69	41,63	48

Na qual  $I_{tr}$  corresponde ao momento de inércia da seção homogeneizada. Nota-se, conforme era esperado pelas dimensões do vão que o estado limite de serviço é determinante na escolha do perfil, sendo pelo critério da flecha o perfil mais econômico obtido corresponde ao W410x38,8. Para os conectores, na situação de dimensionamento com interação completa, foram obtidos um total de 28 conectores espaçados uniformemente ao longo de cada metade do vão da viga com resistência de 119,8tf para cada trecho.

Para as vigas secundárias de bordo que apoiam as vigas de suporte das lajes, foi feito o seguinte lançamento estrutural, adotando-se três cargas concentradas de 8,36tf cada oriundas das reações das vigas que se apoiam sobre a mesma.

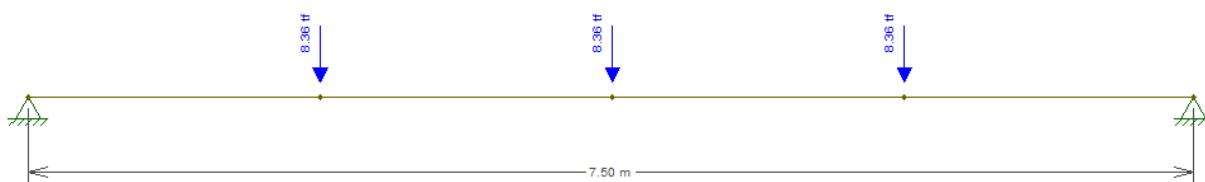


Figura 34 - Lançamento da viga secundária de bordo

Os diagramas de esforços mostram que o momento de cálculo máximo, obtido na seção central do vão de 7,5m totaliza 43tf.m e o cortante de cálculo máximo é de 17,59tf. Adotando as mesmas condições para a laje e para as propriedades dos conectores, apenas considerando que para estas vigas, as nervuras estão paralelas à seção do perfil, permitindo o aproveitamento do concreto no interior da nervura. A largura efetiva, adotada neste caso como 1/8 do vão totalizou 93,75mm, valor igual à largura efetiva das vigas anteriores. Na tabela abaixo mostra-se os valores obtidos para os esforços resistentes de cálculo e as flechas obtidas para as mesmas seções analisadas anteriormente.

Tabela 16 - Resultado para as vigas de bordo

Seção	kg/m	Itr (cm <sup>4</sup> )	f (cm)	Momento Resistente (tfm)	Cortante (tf)
W 310 x 28,3	28,3	20537	4,17	27,56	34,86
W 310 x 32,7	32,7	23390	3,66	30,83	38,82
W 360 x 32,9	32,9	27724	3,09	33,21	38,09
W 310 x 38,7	38,7	27056	3,16	34,37	33,87
W 410 x 38,8	38,8	38790	2,21	41,63	48,01
W 410 x 46,1	46,1	44789	1,91	47,57	53,31

Para estas vigas, o momento fletor é o critério determinante na escolha do perfil. O deslocamento limite aceitável para o vão de 750cm foi de 2,5cm. O critério do estado limite último dado pelo momento fletor só é atendido para o perfil W410x46,1. Dessa forma obteve-se os seguintes perfis dimensionados como viga mista para todos pavimentos. Para os conectores, na situação de dimensionamento com interação completa, foram obtidos um total de 18 conectores ao longo de cada metade do vão da viga com resistência de 119,5tf para cada trecho. As propriedades das vigas são listadas abaixo.

Tabela 17 - Propriedade do perfil W410x38,8

Viga	Seção	kg/m	Area (cm <sup>2</sup> )	Zx (cm <sup>3</sup> )	Ix (cm <sup>4</sup> )	tf (mm)	d (mm)	tw (mm)	bf (mm)
Apoio Lajes	W 410 x 38,8	38,8	50,3	736,8	12777	8,8	399	6,4	140
Bordo	W 410 x 46,1	46,1	59,2	891,1	15690	11,2	403	7	140

### 10.3. Dimensionamento do Pórtico Central

Para o dimensionamento dos pórticos centrais foi utilizada uma análise elasto-plástica de segunda ordem adotando as mesmas premissas detalhadas ao longo deste estudo. O lançamento da estrutura foi concebido por etapas, iniciando com as seções mais leves disponíveis e sem contraventamento. A cada análise os resultados apontavam a necessidade do lançamento de um sistema de contraventamento para controle dos deslocamentos laterais, inicialmente muito acima dos limites estabelecidos em 9.3. Portanto adotou-se um sistema de contraventamento em X ao longo da prumada de menor vão, o resultado pode ser visualizado da seguinte forma.

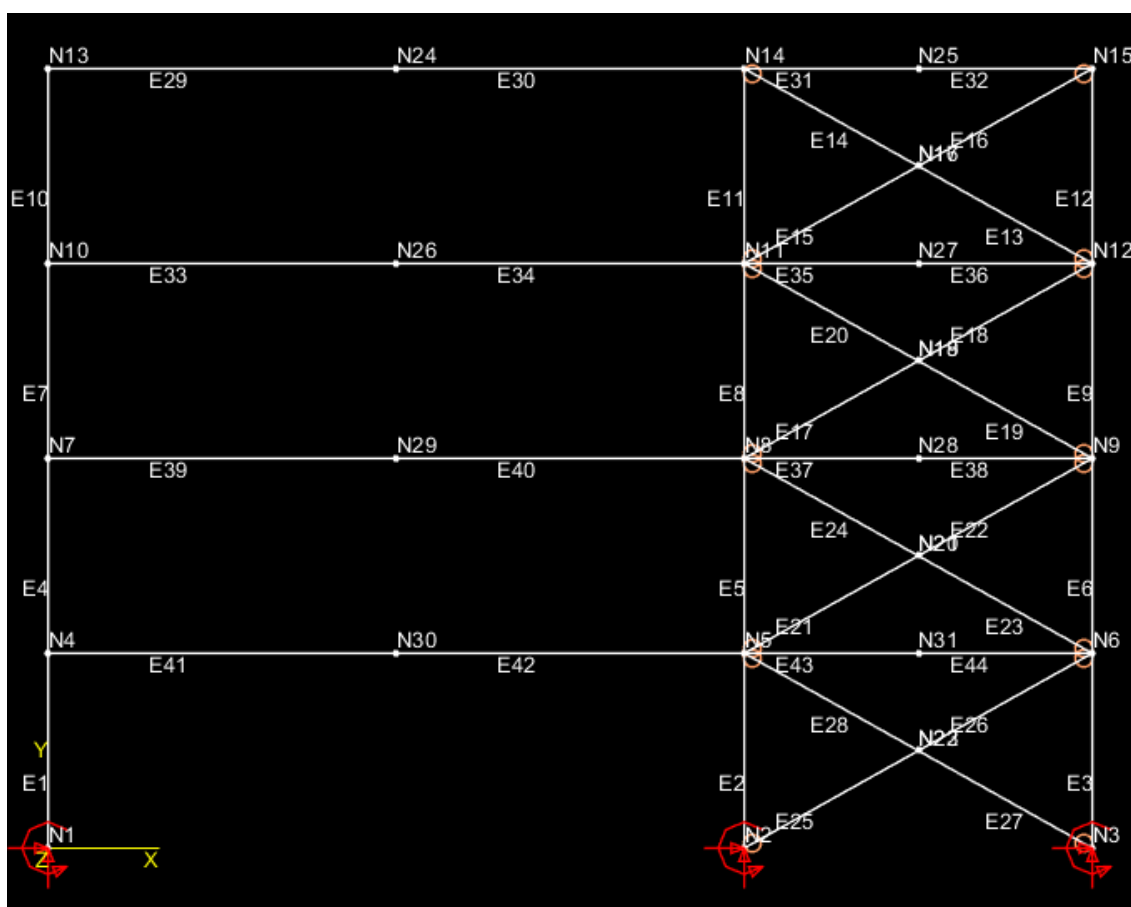


Figura 35 - Lançamento do pórtico central

Inicialmente, sem a estrutura de contraventamento proposta, o mecanismo de colapso se aproximava do mecanismo de pórtico, sendo os deslocamentos no topo da edificação o limitante no dimensionamento. A adoção do sistema de contraventamento trouxe grande rigidez para a estrutura, transferindo a formação do mecanismo para as vigas de maior vão. Essa solução também foi adotada visando criar um pórtico com elevada rigidez aos deslocamentos horizontais, permitindo o controle desses deslocamentos nos pórticos das empenas, por meio da contribuição das lajes, como um diafragma rígido e através de um sistema de contraventamento entre os pórticos secundários, permitindo uma solução com menor consumo de aço para os pórticos da empena.

A combinação mais crítica obtida foi a combinação 01, para os quais foram incorporadas as cargas de vento minoradas além das cargas permanentes e acidentais distribuídas em todos os vãos totalizando 16kg/cm. Foram ainda incorporadas no topo dos pilares em cada pavimento uma carga concentrada de 25tf oriunda das reações das vigas secundárias de bordo, que totalizam 12,5tf cada. A partir do lançamento da estrutura contraventada foram feitas 3 tentativas de lançamento e os resultados são expostos a seguir.

*Tabela 18 - Resultado da análise dos porticos centrais*

Tentativa	Elemento	Seção	kg/m	Mp (tfm)	Fator de Carga - Última rótula	Fator de Carga - Primeira rótula	Deslocamento topo pilar (cm)	Deslocamento na viga (cm)
Tentativa01	Viga	W 310 x 32,7	32,7	16,74285	1,433	1,2	0,74	5,2
	Pilar	W 200 x 46,1 (H)	46,1	17,08785				
Tentativa02	Viga	W 360 x 32,9	32,9	18,8922	1,641	1,355	0,52	4,03
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	22,62855				
Tentativa03	Viga	W 360 x 39,0	39	23,03565	1,899	1,461	0,41	3,28
	Pilar	W 200 x 71,0 (H)	71	27,7104				

Os deslocamentos aceitáveis são de 3,73cm para o topo dos pilares e 3,33cm para as flechas nas vigas. Para este pórtico os critérios de dimensionamento foram aceitos para a tentativa 03, na qual tanto a flecha na viga foi inferior ao limite, quando a formação da primeira rótula se dá com valores superiores a 1,4. Observou-se ainda a formação de rótula plástica em pilares antes da última rótula. Os resultados acima foram obtidos considerando o efeito

reductor do momento de plastificação gerado pelas elevadas cargas axiais, além da minoração de  $M_p$  pelo coeficiente reductor da resistência de 0,9. O efeito das cargas axiais na redução de  $M_p$  é mostrado abaixo, incluindo a classificação da classe do perfil conforme 9.7.1.

Tabela 19 - Influência das cargas verticais no perfil

Tentativa	Elemento	Seção	kg/m	Carga máx (kgf)	n	(M/M <sub>p</sub> )/1,1	Esbeltez Máxima(mesa)	Esbeltez Real - mesa	Esbeltez Máxima (alma)	Esbeltez Real - alma	Classe
Tentativa01	Viga	W 310 x 32,7	32,7	0	0,00	0,90	7,59	4,72	70,53	41,12	Classe 01
	Pilar	W 200 x 46,1 (H)	46,1	140000	0,69	0,35	7,59	9,23	49,83	22,36	Não é classe 01
Tentativa02	Viga	W 360 x 32,9	32,9	0	0,00	0,90	7,59	7,47	70,53	53,10	Classe 01
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	140600	0,54	0,51	7,59	7,22	53,36	17,32	Classe 01
Tentativa03	Viga	W 360 x 39,0	39	0	0,00	0,90	7,59	5,98	70,53	47,32	Classe 01
	Pilar	W 200 x 71,0 (H)	71	141110	0,45	0,60	7,59	5,92	55,55	15,80	Classe 01

Nota-se que na primeira tentativa, obteve-se um perfil que não é classe 01 o que motivou a correção na segunda tentativa. Quanto aos esforços axiais é possível notar a influência deles nos perfis e na redução do momento de plastificação da seção. Para a primeira análise chegou-se a uma redução de 65% de  $M_p$ , fator este de grande pressão sobre a instabilidade da estrutura, evidenciado pela formação prematura de rótulas plásticas, permitindo deslocamentos elevados. Essa situação é amenizada à medida que os pilares são reforçados com seções maiores. Os perfis adotados foram, portanto, os da terceira tentativa, com W360x39 para vigas e W200x71 (H) para os pilares. Para a última análise, o colapso obtivo é mostrado na figura abaixo em escala real.



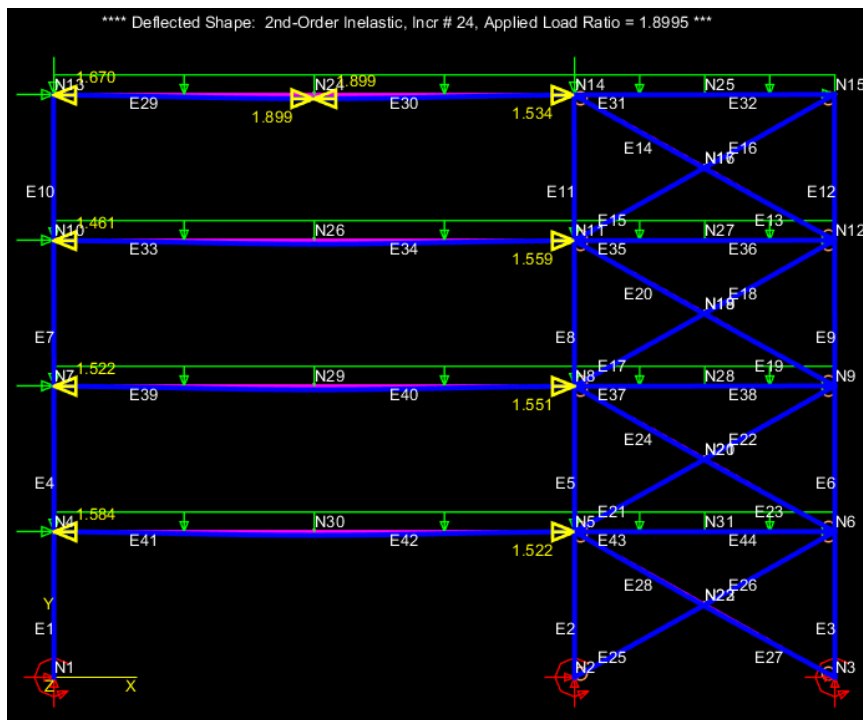


Figura 36 - Mecanismo formado para o portico central

Para o sistema de contraventamento foi adotado um perfil circular tubular com diâmetro de 4" e espessura de 5mm, rotulados nas ligações com o pórtico. Esse mesmo perfil foi utilizado para o contraventamento na direção dos pórticos secundários da estrutura. Para reduzir o consumo de aço nos contraventamentos dos pórticos secundário, estes foram adotados como X porém interceptando dois pavimentos ao invés de um único como foi lançado para os pórticos principais Esses contraventamento foram aplicado apenas na fachada traseira do edifício. A imagem abaixo resume o exposto.

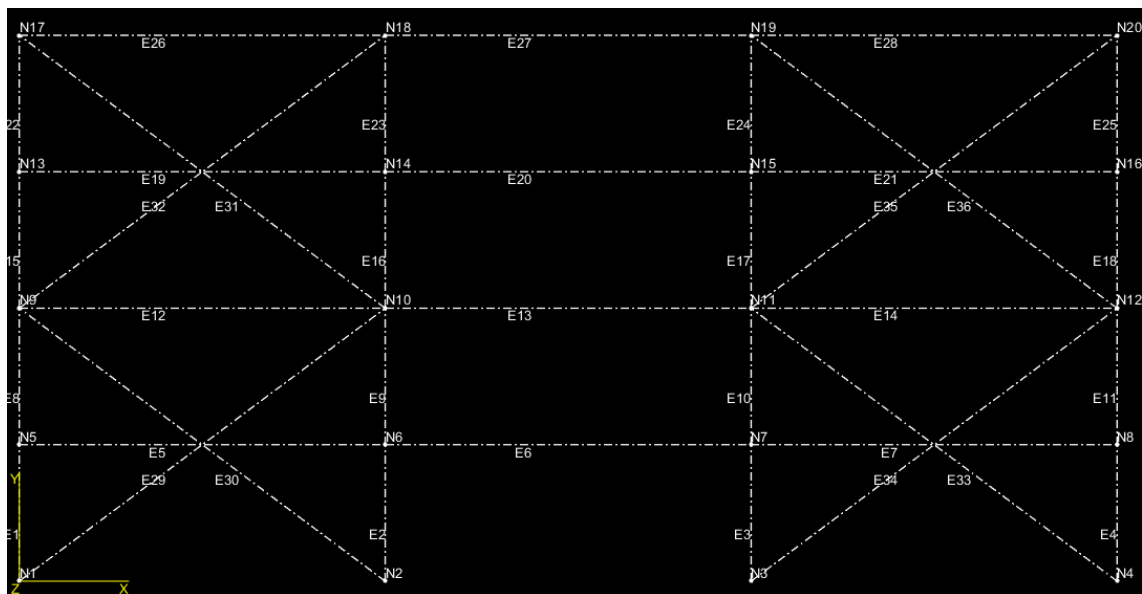


Figura 37 - Contraventamento dos pórticos secundários

As propriedades desse perfil são resumidas conforme abaixo.

Tabela 20 - Dados do perfil de contraventamento

<b>Diâmetro</b>	<b>espessura (mm)</b>	<b>peso (kg/m)</b>	<b>Área (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>I<sub>x</sub> (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>W<sub>x</sub> (cm<sup>3</sup>)</b>
4"	5	11,91	15,17	177,46	34,93

Analisando os deslocamentos verticais nas vigas do edifício é possível verificar a perda progressiva de rigidez a medida que as rótulas plásticas são formadas e os mecanismo de viga se constituem. Em específico para a viga do último pavimento nota-se como a melhoria da rigidez dos perfis utilizados a cada tentativa aumentam o fator de carga de colapso da estrutura. A imagem abaixo representa o deslocamento vertical na seção central do vão desta viga em função do fator de carga aplicado para as três análises realizadas.

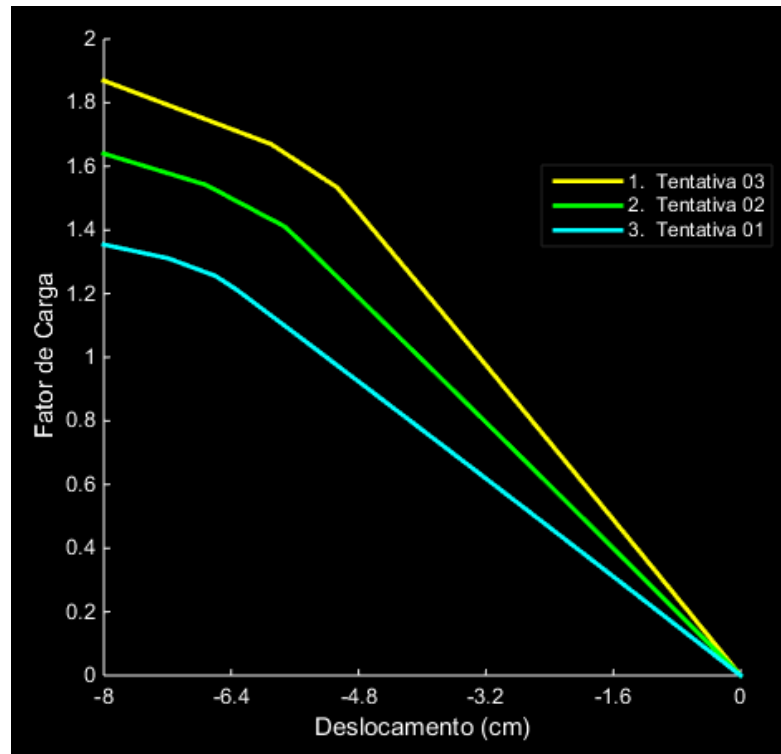


Figura 38 - Diagrama cargas x deslocamentos da estrutura para todas as tentativas

#### 10.4 Dimensionamento dos Pórticos de Empena

De forma similar aos centrais, os pórticos da empena foram dimensionados a partir de uma análise elastoplástica de segunda ordem. Nesse pórtico, no entanto, não se adotou nenhuma estrutura de contraventamento, em virtude da presença da laje, que atua como um diafragma rígido, contendo grandes deslocamentos laterais através da rigidez dos pórticos centrais.

A combinação mais crítica utilizada foi a combinação 01, para os quais foram incorporadas as cargas de vento minoradas além das cargas permanentes e acidentais distribuídas em todos os vãos totalizando 10kg/cm. Foram ainda incorporadas no topo dos pilares em cada pavimento uma carga concentrada de 12,5tf oriunda das reações das vigas secundárias de bordo. O resultado obtido evidência um mecanismo de pórtico, ao invés de um de viga como obtido para o pórtico central. Isso ocorre devido à maior liberdade para deslocamentos horizontais desenvolvido pela estrutura. Esses deslocamentos, no entanto, foram limitados aos limites de serviço estabelecidos. Foram realizadas três análises com diferentes perfis tanto para vigas como para os pilares. Os resultados são mostrados na tabela abaixo.

Tabela 21 - Resultados do pórtico de empena

Tentativa	Elemento	Seção	kg/m	Mp (tfm)	Fator de Carga - Última rótula	Fator de Carga - Primeira rótula	Deslocamento topo pilar (cm)	Deslocamento na viga (cm)
Tentativa01	Viga	W 310 x 28,3	28,3	14,2	1,296	1,118	5,186	4,39
	Pilar	W 200 x 41,7 (H)	41,7	15,5				
Tentativa02	Viga	W 310 x 32,7	32,7	16,7	1,634	1,322	3,864	3,42
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	22,6				
Tentativa03	Viga	W 360 x 32,9	32,9	18,9	1,805	1,494	3,208	2,93
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	22,6				

Os deslocamentos aceitáveis são de 3,73cm para o topo dos pilares e 3,33cm para as flechas nas vigas. Para este pórtico os critérios de dimensionamento foram aceitos para a tentativa 03, na qual tanto a flecha na viga foi inferior ao limite, quando a formação da primeira rótula se dá com valores superiores a 1,4. Não observou-se a formação de rótula plástica em pilares. Os resultados acima foram obtidos considerando o efeito redutor do momento de plastificação gerado pelas elevadas cargas axiais, além da minoração de Mp pelo coeficiente redutor da resistência de 0,9. O efeito das cargas axiais na redução de Mp é mostrado abaixo, incluindo a classificação da classe do perfil conforme 9.7.1.

Tabela 22 - Efeito das cargas axiais e classificação dos perfis

Tentativa	Elemento	Seção	kg/m	Py(kgf)	n	(M/Mp)/g	Esbeltez Máxima (If)	Esbeltez Real	Esbeltez Máxima (Iw)	Esbeltez Real3	Classe Nova
Tentativa01	Viga	W 310 x 28,3	28,3	125925	0,00	0,90	7,59	5,73	70,53	45,20	Classe 01
	Pilar	W 200 x 41,7 (H)	41,7	184575	0,39	0,65	7,59	7,03	57,05	21,86	Classe 01
Tentativa02	Viga	W 310 x 32,7	32,7	145245	0,00	0,90	7,59	4,72	70,53	41,12	Classe 01
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	262200	0,28	0,75	7,59	7,22	60,44	17,32	Classe 01
Tentativa03	Viga	W 360 x 32,9	32,9	145245	0,00	0,90	7,59	7,47	70,53	53,10	Classe 01
	Pilar	W 200 x 59,0 (H)	59	262200	0,28	0,75	7,59	7,22	60,43	17,32	Classe 01

O resultado acima mostra que a redução máxima do momento de plastificação foi de aproximadamente 35%, bastante inferior à redução dos pórticos centrais. O lançamento que melhor apresentou resultados, respeitando os estados limites últimos e de serviço correspondem à análise 03, na qual foram selecionados os perfis W360x32,9 para as vigas e o W200x59(H) para os pilares. O mecanismo formado corresponde ao figura abaixo.

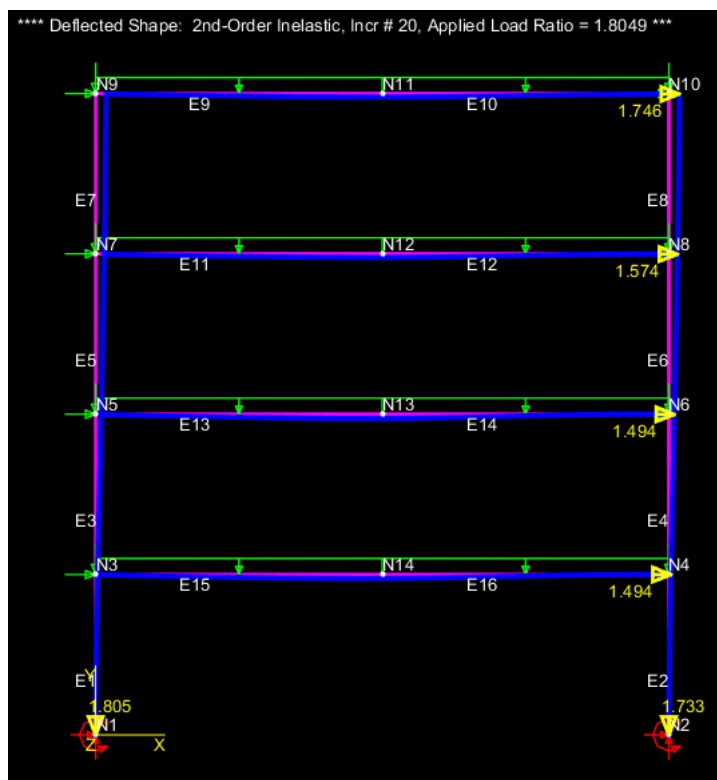


Figura 39 - Mecanismo do portico de empena

Fazendo uma análise similar ao do pórtico central, porém tomando como referência os deslocamentos no topo dos pilares é possível analisar o efeito da perda de rigidez da estrutura a medida que as rotulas plásticas são formadas. A imagem abaixo representa o resultado para todas as análises realizadas.

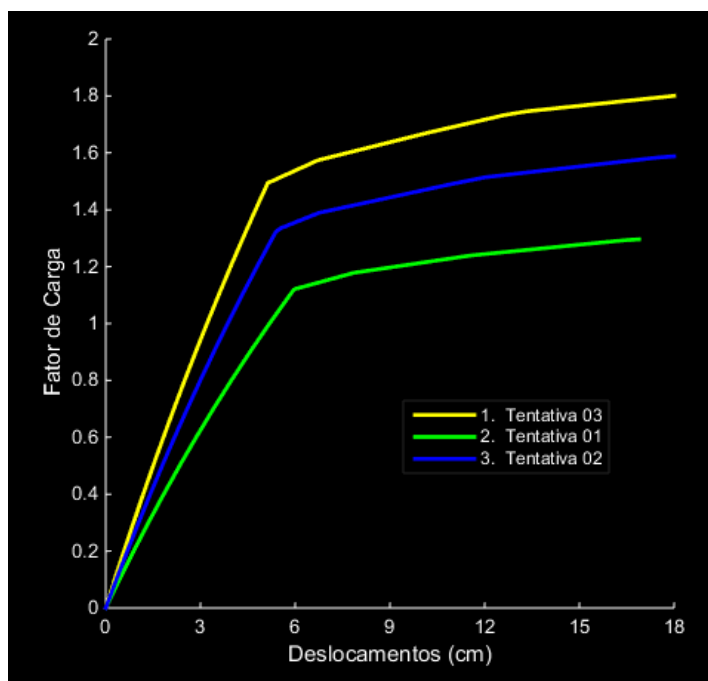


Figura 40 - Gráficos fator de carga x deslocamentos para o pórticos de empena

## 11. AVALIAÇÃO DO CONSUMO DE AÇO

Para avaliação do consumo de aço de um edifício de múltiplos pavimentos deve-se considerar o peso dos seguintes elementos:

- 1) Vigas e pilares dos pórticos planos calculados plasticamente
- 2) Vigas secundárias de bordos e de apoio das lajes
- 3) Contraventamentos (Pórtico principal e pórticos secundários)
- 4) Ligações (10% do consumo total – Itens 01, 02 e 03)
- 5) Perdas (5% do consumo total – Itens 01, 02 e 03)
- 6) Aço das fôrmas e armaduras de retração das lajes

A área total construída totaliza 900m<sup>2</sup> considerando os 4 pavimentos. O resultado do levantamento com os perfis adotado é resumido na tabela abaixo.

Tabela 23 - Consumo de aço da edificação

Perfil	Peso (kg/m)	Comp. Total (m)	Peso total (kg)
W 360 x 32,9	32,9	80	2632,0
W 200 x 59,0 (H)	59	44,8	2643,2
W 410 x 38,8	38,8	360	13968,0
W 410 x 46,1	46,1	210	9681,0
W 360 x 39,0	39	120	4680,0
W 200 x 71,0 (H)	71	67,2	4771,2
TR Ø4" 5mm	11,91	166,6	1984,2
<b>Total (kg)</b>			40359,6
<b>Peso total/Área Construída (kg/m<sup>2</sup>)</b>			44,8

Considerando as perdas e o aço das fôrmas armaduras de retração das lajes temos:

Tabela 24 - Peso total da edificação com lajes, ligações e perdas

<b>Peso Total /Área Construída (kg/m<sup>2</sup>)</b>	44,8
<b>Peso total+Ligações e Perdas (kg)</b>	46413,5
<b>Armadura da forma (kg)</b>	7551
<b>Armadura de retração (kg)</b>	1089
<b>Peso Aço/Área Construída (kg/m<sup>2</sup>)</b>	61,2

## 12. CONCLUSÃO

Através da edificação projetada e de toda a teoria vista ao longo deste projeto, conclui-se que o uso da análise plástica é bastante proveitoso para o projeto de estruturas de aço. O uso de *softwares* como o Mastan2, usado neste projeto dá mais agilidade e flexibilidade para a análise de edifícios de múltiplos pavimentos, sendo o uso destes bastante simples, prático e rápido, desde que se tenha o conhecimento teórico deste tipo de análise.

Em relação ao edifício projetado, percebe-se que apesar dos perfis obtidos pelo dimensionamento serem compactos, o aproveitamento da plasticidade da estrutura fica evidente pois os fatores de carga obtidos encontravam-se entre 1,4 e 1,8. Mesmo assim, foi visto que o dimensionamento é dominado pelo estado limite de serviço, isto é, pelas deformações. Para que se possa ter um maior proveito da plasticidade, teve-se que limitar as deformações na estrutura, através de sistemas de contraventamento.

De forma geral, considera-se proveitoso o uso de análise plástica neste tipo de estrutura, visto que o consumo de aço para construção da mesma encontra-se dentro de valores esperados. O uso do método plástico em conjunto com *softwares* também permite saber a ordem nas quais as rótulas plásticas são formadas, qual o fator de carga para o qual isto ocorre e aonde as mesmas se localizarão, o que permite que se tenha um maior rigor na verificação destes pontos durante a construção da estrutura, e também durante a sua manutenção.

### 13. BIBLIOGRAFIA

- [1]. Neal, B.G; **Plastic Methods of Structural Analysis, 3rd Edition**, Chapman & Hall, London, England (1977);
- [2]. Beedle S. Lynn; **Plastic Design of Steel Frames**; John Wiley & Sons Inc, New York, United States of America (1958).
- [3]. Davis J.M; Brown B.A; **Plastic Design to BS 5950**; Blackwell Science Ltd; London, England (1996)
- [4]. Horne M.P.; **Plastic Theory of Structures**; 2° Edition; Manchester University, England (1979)
- [5]. ABNT, (2008), **NBR-8.800:86: NBR-8.800 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios, Método dos Estados Limites - Procedimento**, Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro, Brasil.
- [6]. Kotinda, T., Rigobello, R., & Oliveira , G. (2011). **Viga Mista Versão 3.0**. São Paulo, São Paulo, Brasil.
- [7]. Matias de Paula, J. H. (s.d.). **Um Estudo Sobre a Capacidade de Rotação Plástica de Vigas Soldadas Tipo-I de Aço**. Brasília/DF.
- [8]. Metform. (2017). **Catalogo de Lajes Steel-Deck**
- [9]. Pfeil, W., & Pfeil, M. (2009). **Estruturas de Aço**. Rio de Janeiro: LTC