



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

FADIGA MULTIAXIAL: AVALIAÇÃO COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS DA MÍNIMA CIRCUNFERÊNCIA, MÉTODO DA CAIXA E MÉTODO DO MOMENTO DE INÉRCIA

Por,
Vinícius Vieira Zanardi

Brasília, 23 de novembro de 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**FADIGA MULTIAXIAL: AVALIAÇÃO
COMPARATIVA ENTRE OS MÉTODOS DA
MÍNIMA CIRCUNFERÊNCIA, MÉTODO DA
CAIXA E MÉTODO DO MOMENTO DE INÉRCIA**

POR,

Vinícius Vieira Zanardi

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ ENM (Orientador) _____

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM _____

Prof. Lucival Malcher, UnB/ ENM _____

Brasília, 23 de novembro de 2017

RESUMO

Este trabalho apresenta uma avaliação comparativa entre três diferentes métodos para o cálculo da amplitude de tensão cisalhante equivalente, em critérios de fadiga multiaxial, baseados na abordagem de plano crítico: Método da Mínima Circunferência/*Minimum Circumscribed Circle (MCC)*, Método da Caixa/*Maximum Rectangular Hull (MRH)* e Método do Momento de Inércia/*Moment of Inertia (MOI)*. Os resultados destes métodos serão aplicados ao critério de fadiga multiaxial proposto por Susmel e Lazzarin (2002), a fim de avaliar quais métodos fornecem as melhores estimativas de resistência a fadiga, para ensaios de flexão e torção em situações no limiar da resistência à fadiga para diferentes tipos de aço. Visando a avaliação do modelo de Susmel e Lazzarin, foi convencionado um índice de resistência em fadiga que mede o quanto a situação de carregamento imposta nos testes está distante da condição de falhar (limite de fadiga), definido como Índice de Erro (IE). Para se computar o plano crítico, foi utilizada a definição proposta por Araújo *et al.* (2011), a qual considera explicitamente a influência da tensão normal máxima na localização do plano crítico. Em termos gerais, o melhor desempenho foi obtido pelo Método da Caixa, o qual apresentou a média dos índices de erro (IE) mais próxima aos dados experimentais, 2,0% de erro para carregamentos síncronos e 1,9% para assíncronos, e um menor desvio padrão.

ABSTRACT

This work presents a comparative evaluation of three different methods available in the literature for calculating the equivalent shear stress amplitude on a critical plane based multiaxial fatigue approach: Minimum Circumscribed Circle (MCC), Maximum Rectangular Hull (MRH) and Moment of Inertia (MOI). These method's results will be applied to Susmel and Lazzarin's criteria, in order to evaluate which method provides the best estimate of fatigue strength for different steel types under traction and torsion loads. In order to evaluate the performance of such multiaxial model, an error index was adopted, in which negative values for the error index indicates that fatigue loading is less than the material fatigue strength. The critical plane definition used in this work was based on the definition proposed by Araújo *et al.* (2011), which considers the influence of the maximum normal stress on the critical plane localization. In general, MRH presented de best results, obtaining error index values near experimental data values, 2.0% for synchronous loadings and 1.9% for asynchronous, and the lowest standard deviation. All methods were applied using Matlab.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	10
1.2 OBJETIVO E ESTRUTURA DO RELATÓRIO	12
2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS PRELIMINARES.....	13
2.1 MECANISMOS DE DANO POR FADIGA	13
2.2 VETOR TENSÃO	15
2.3 FADIGA UNIAXIAL.....	17
2.4 ESTADO UNIAXIAL DE TENSÃO	18
2.5 CARREGAMENTOS COMBINADOS E NÃO PROPORCIONALIDADE	19
2.6 ESTADO MULTIAXIAL DE TENSÕES	20
3 ABORDAGEM DE PLANO CRÍTICO PARA FADIGA MULTIAXIAL.	23
3.1 MODELOS BASEADOS NA DETERMINAÇÃO DE PLANOS CRÍTICOS.....	23
3.2 FINDLEY	23
3.3 SUSMEL E LAZZARIN.....	24
3.4 MATAKE.....	25
4 AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL	27
4.1 INTRODUÇÃO	27
4.2 MÉTODO DA MAIOR PROJEÇÃO	28
4.3 MÉTODO DA MAIOR CORDA.....	29
4.4 MÉTODO DA MENOR CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA.....	30
4.5 MÉTODO DA CAIXA.....	32
4.6 MÉTODO DO MOMENTO DE INÉRCIA.....	33
5 RESULTADOS.....	37
5.1 INTRODUÇÃO	37
5.2 DADOS EXPERIMENTAIS	37
5.3 ANÁLISE CRÍTICA DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO PLANO CRÍTICO	39
5.4 AVALIAÇÃO COMPARATIVA.....	41
5.5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	47
6 CONCLUSÃO	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	51
ANEXOS	54

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Nucleação de trincas no interior dos grãos de uma estrutura cristalina.	13
Figura 2 - Vista esquemática dos estágios I e II de uma trinca de fadiga (modificada de Dowling, 1993).	14
Figura 3 - Forças externas atuando no corpo Ω e plano de corte imaginário passando pelo ponto O..	15
Figura 4 - Decomposição do vetor tensão no Tetraedro de Cauchy.	16
Figura 5 - Construção esquemática da curva S-N.	17
Figura 6 - Efeito da tensão média na resistência e limite de fadiga.	18
Figura 7 - Carregamento cíclico.	19
Figura 8 - História de tensão (a) não proporcional e (b) proporcional	20
Figura 9 - Sistema de coordenadas (eA, eB, n) referenciado em coordenadas esféricas.	20
Figura 10 - Modos de crescimento de trincas (a) Caso A e (b) Caso B (Pinheiro, P. A. B., 2012).	21
Figura 11 - Projeção do vetor tensão t em um plano material Δ para um ciclo de carregamento (Araújo et al., 2011).	22
Figura 12 - Efeito da tensão normal na propagação de micro-trincas.	23
Figura 13 - Curvas modificadas de Wöhler	25
Figura 14 - Componentes do vetor tensão atuando em um plano material genérico (Petrucci G., 2015)	27
Figura 15 - Método da Maior Projeção.	28
Figura 16 - Método da Maior Corda	29
Figura 17 - Método da Menor Circunferência Circunscrita (modificada de Dantas, P.A., 2009).	30
Figura 18 - Método da Caixa (modificada de Araújo, J. A., 2011)	32
Figura 19 - Método do Momento de Inércia (modificado de Meggiolaro, M.A., 2016)	33
Figura 20 - Projeção das tensões cisalhantes para (a) teste 7 e (b) teste 8.	39
Figura 21 - Projeção das tensões cisalhantes para (a) teste 16 e (b) teste 20.	39
Figura 22 - Nuvem de pontos representando a amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal para teste n° 15.	41
Figura 23 - Amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal para teste n° 15 (resultados obtidos pelo MRH e indicação do τ_a do plano crítico circulado em vermelho).	41
Figura 24 - Valores da tensão cisalhante máxima para carregamentos síncronos ($\lambda = 1$)	43
Figura 25 - Índices de erro para carregamentos síncronos ($\lambda = 1$)	44
Figura 26 - Valores da tensão cisalhante máxima para carregamentos assíncronos ($\lambda \neq 1$)	46
Figura 27 - Índice de erro para carregamentos assíncronos ($\lambda \neq 1$)	46
Figura 28 - Média dos índices de erro (IE) obtidas por cada método para carregamentos síncronos e assíncronos	47
Figura 29 - Desvio padrão da média dos índices de erro (IE) obtidas por cada método para carregamentos síncronos e assíncronos.	48
Figura 30 - Projeção das tensões cisalhantes para o (a) teste 7 e (b) teste 8.	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Dados experimentais para diferentes metais testados sob carregamentos combinados de flexão/torção.....	38
Tabela 2 - Resultados obtidos pelo MCC para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.	42
Tabela 3 - Resultados obtidos pelo MRH para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.	42
Tabela 4 - Resultados obtidos pelo MOI para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.	43
Tabela 5 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.	44
Tabela 6 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.	45
Tabela 7 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.	45
Tabela I. 1 - Resultados de ρ e ρ_{lim} encontrados para o MCC.....	55
Tabela I. 2 - Resultados de ρ e ρ_{lim} encontrados para o MRH.....	56

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	razão de amplitude
a_1	comprimento do lado do retângulo na direção A
a_2	comprimento do lado do retângulo na direção B
dm	massa infinitesimal do fio
dp	perímetro do fio infinitesimal
dp_A	comprimento do fio infinitesimal na direção A
dp_B	comprimento do fio infinitesimal na direção B
e_A	vetor unitário na direção A
e_B	vetor unitário na direção B
f_{-1}	limite de resistência a fadiga para flexão alternada
$g(*)$	função periódica
I_o	momento de inércia da origem
I_{cm}	momento de inércia do centro de massa
$I_{cm,t}$	momento de inércia total do fio
k	parâmetro material
L	comprimento
M	massa total do fio
n	vetor unitário de um plano
n_x, n_y, n_z	componentes do vetor unitário n
N_f	número de ciclos
p_i, q_i	pontos de tangência do retângulo na história de tensões cisalhantes
P	perímetro total do fio
R	razão de carregamento
R_{rot}	matriz de rotação
t	vetor tensão
t_n	vetor tensão normal
t	tempo
t_{-1}	limite de resistência a torção alternada

Símbolos Gregos

ΔF	força resultante
ΔS	elemento de área
$\Delta\sigma_{Mises}$	tensão equivalente de Von Mises
τ	vetor tensão cisalhante
τ_a	amplitude da tensão cisalhante
τ_m	tensão cisalhante média
τ_i	tensão cisalhante no i -ésimo instante
τ_A	tensão cisalhante na direção A
τ_B	tensão cisalhante na direção B
τ_1	tensão cisalhante na direção A para o Método da Caixa
τ_2	tensão cisalhante na direção B para o Método da Caixa
$\tau_{c,A}$	distância do centro do fio infinitesimal à origem O, na direção A
$\tau_{c,B}$	distância do centro do fio infinitesimal à origem O, na direção B

$\tau_{m,A}$	tensão média na direção A
$\tau_{m,B}$	tensão média na direção B
σ	tensor das tensões
σ_n	tensão normal
σ_x	tensão normal na direção x
σ_y	tensão normal na direção y
σ_{zz}	tensão normal na direção z
σ_f'	coeficiente de resistência à fadiga
$\sigma_{ij,a}$	amplitude da componente da tensão
$\bar{\sigma}_{ij}$	tensão normal média
σ_{min}	tensão mínima
σ_{max}	tensão máxima
σ_a	amplitude da tensão
σ_m	tensão média
$\sigma_{n,max}$	tensão normal máxima
α	expoente de resistência à fadiga
α_{ij}	frequência angular
ϕ^c, θ^c	coordenadas esféricas do plano crítico
λ	parâmetro material
λ_{xy}	relação de frequência entre componentes da tensão
ρ	razão de tensão
ρ_{lim}	limite máximo da razão de tensão

Subscritos

-1	relativo ao carregamento periódico alternado
O	relativo a origem
a	amplitude
max	valor máximo
min	valor mínimo
n	relativo à tensão normal
xx	componente do tensor tensão na direção x
yy	componente do tensor tensão na direção y
zz	componente do tensor tensão na direção z
xy	relativo à componente do tensor tensão
x, y, z	eixos coordenados no sistema O xyz
m	valor médio
A	direção A
B	direção B
cm	centro de massa
total	total
i	relativo ao i-ésimo ponto/instante

Sobrescritos

c relativo ao plano crítico

Siglas

MCC Minimum Circumscribed Circle
MRH Maximum Rectangular Hull
MOI Moment of Inertia

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Fadiga é um processo de mudança estrutural permanente, progressivo e localizado que ocorre quando um componente ou estrutura está submetido a ciclos repetidos de tensão, podendo resultar na falha do material sob tensões bem mais baixas que o limite de resistência à ruptura e tensão de escoamento do material.

A análise de resistência à fadiga é de fundamental importância no desenvolvimento de componentes mecânicos com funções estruturais, uma vez que estes são frequentemente submetidos a carregamentos cíclicos. Bielas, eixos de transmissão, barras de torção, vasos de pressão, braços de suspensão, tubulações em plantas químicas e refinarias, componentes aeronáuticos, entre outros, estão frequentemente sob estados bi-axiais ou tri-axiais de tensão. Quando sujeitos a carregamentos dinâmicos, podem resultar na iniciação e propagação de trincas de fadiga. O processo de fadiga sob estes estados complexos de tensão é conhecido como *Fadiga Multiaxial*.

Os primeiros estudos relativos ao assunto de Fadiga Multiaxial foram realizados por Lanza (1886), o qual publicou os primeiros resultados de testes envolvendo carregamentos combinados de flexão e torção. Posteriormente, Mason (1917), Haigh (1923), Nishiara e Kawamoto (1941), Gough *et al* (1951), Sines (1955) e Crossland (1956), publicaram mais resultados experimentais, originando as primeiras hipóteses teóricas para explicar o processo de fadiga sob cargas multiaxiais. Pesquisas realizadas por Brown e Miller (1973), Krempl (1974), Lee (1980) e Garud (1981) demonstraram que, tratando-se de aplicações a situações complexas de fadiga multiaxial, as informações obtidas a partir de teorias uniaxiais não são adequadas.

Diversas teorias a respeito do tema Fadiga Multiaxial já foram propostas ao longo dos anos, em que, de um modo geral, tais teorias são baseadas em três diferentes abordagens: i) modelos baseados nas deformações; ii) modelos baseados nas tensões; iii) modelos baseados na energia de deformação. Tendo como foco principal deste trabalho a abordagem das tensões, será apresentada as principais teorias que envolvem a fadiga multiaxial de alto ciclo. Os critérios das tensões podem ser divididos em quatro grupos diferentes: a) tensões equivalentes empíricas; b) invariante das tensões; c) tensões médias e d) planos críticos (Dantas, A.P., 2009).

Em termo das tensões equivalentes empíricas, os trabalhos desenvolvidos por Gough e Pollar (1951) são considerados os mais relevantes, em que foi proposta uma fórmula empírica de uma elipse para o critério de fadiga multiaxial. Sines (1959) foi um dos primeiros a utilizar os invariantes das tensões e estabeleceu um critério tendo por alicerce o primeiro e o segundo invariante do tensor tensão. Papadopoulos *et al.* (1997) propuseram um critério de fadiga com base no levantamento da média das tensões para um volume elementar. Porém, tal critério sofreu críticas por apresentar a limitação de não

considerar os efeitos de carregamentos não proporcionais (Papadopoulos *et al*, 1997). Nos últimos anos, modelos baseados na abordagem de plano crítico para avaliação de fadiga multiaxial têm ganhado popularidade (You B. and Lee S., 1996; Papadopoulos *et al*, 1997;).

Os critérios baseados na abordagem de plano crítico têm como fundamento observações experimentais da nucleação e crescimento de micro trincas em um material submetido a carregamento cíclico. Este critério indica que a trinca inicia em planos materiais preferenciais, chamados planos críticos, onde as amplitudes cisalhantes ou normais são mais severas (Socie, 1993; Socie e Marquis, 2000). Além da determinação do provável local de nucleação da trinca, tais parâmetros também podem ser correlacionados com a vida por fadiga obtida a partir de simples testes de flexão ou torção alternada pura. Porém, o modo como determinar o plano crítico não é padronizado e nem uma tarefa trivial, resultando no surgimento de diversas propostas de como encontrá-lo.

Findley (1956) propôs a localização do plano crítico com base na combinação linear da amplitude de tensão cisalhante com a tensão normal máxima atuando no plano crítico. Brown e Miller (1973) afirmaram que o plano crítico é o plano de máxima amplitude da deformação cisalhante e que as trincas poderiam crescer sobre estes paralelamente a superfície (caso A) ou indo desta para o interior (caso B). Matake (1977) propôs um critério de fadiga usando uma combinação linear entre a máxima amplitude da tensão cisalhante observada no plano crítico com a máxima tensão normal para esse plano. Socie (1987), Fatemi e Socie (1988), McDiarmid (1994), Carpinteer e Spagnoli (2001), Susmel e Lazzarin (2002), entre outros, também propuseram modelos de plano crítico.

As primeiras tentativas para calcular a amplitude da tensão cisalhante em histórias de tensão multiaxiais são devidas a Grubisic e Simbürger (1976) que propuseram o método da maior projeção da história de tensões cisalhantes e Fuchs e Stephens (1980), o método da maior corda. Embora, atualmente, existam diversos métodos de se computar a amplitude da tensão de cisalhamento equivalente, a metodologia mais popular foi introduzida primeiramente por Dang Van (1984), afirmando que a tensão de cisalhamento pode ser encontrada através do raio da menor circunferência que circunscreva a história de carregamento (Método da Menor Circunferência).

Posterior à metodologia proposta por Dang Van, vários métodos de "superfície envoltória" surgiram, visando encontrar resultados cada vez mais precisos para a amplitude de tensão de cisalhamento. Bin Li *et al.* (2000) apresentaram, no contexto das tensões desviadoras, o método da Mínima Elipsóide Circunscrita para avaliar a amplitude da tensão de cisalhamento sob carregamento multiaxial complexo. Mamiya & Araújo (2002) propuseram o Método do Elipsóide com menor norma Frobenius, em que o referido método baseia-se em circunscrever um prisma qualquer ao menor elipsóide que envolva a história de carregamento. Araújo *et al.* (2011) apresentaram o Método da Caixa, indicando que a amplitude da tensão de cisalhamento é encontrada pela diagonal do maior retângulo capaz de envolver a história de carregamento.

Em contrapartida aos métodos de "superfície envoltória", Meggiolaro *et al.* (2015) propôs o Método do Momento de Inércia, afirmando que seu método apresenta valores mais acurados de amplitude da tensão cisalhante quando comparados aos métodos de superfície, notadamente para carregamentos não proporcionais. Tendo em vista esse fato, mais à frente será realizada uma comparação entre o Método do Momento de Inércia, Método da Menor Circunferência e Método da Caixa.

1.2 OBJETIVO E ESTRUTURA DO RELATÓRIO

O objetivo deste trabalho é o de conduzir uma avaliação comparativa entre três diferentes métodos para o cálculo da amplitude de tensão cisalhante em modelos de fadiga multiaxial para alto ciclo, baseados na abordagem de plano crítico. Os métodos a serem avaliados são: Método da Mínima Circunferência/*Minimum Circumscribed Circle (MCC)*, proposto por Dang Van (1984), Método da Caixa/*Maximum Rectangular Hull (MRH)*, Araújo *et al.* (2011), e Método do Momento de Inércia/*Moment of Inertia (MOI)*, proposto por Meggiolaro *et al.* (2015). Os resultados destes métodos serão aplicados ao critério de fadiga multiaxial proposto por Susmel e Lazzarin (2002), a fim de avaliar quais métodos fornecem as melhores estimativas de resistência a fadiga, para ensaios de flexão e torção, em situações no limiar da resistência à fadiga para aço duro, aço 34Cr4, aço GGG60, aço 30NCD16, aço 39NiCrMo3 e aço 25CrMo4. Ressalta-se que a implementação de todos os métodos ocorreu via elaboração de rotinas no software Matlab.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no capítulo Introdução, foi apresentada uma contextualização histórica do processo de pesquisa e desenvolvimento de teorias no âmbito da fadiga multiaxial. No segundo capítulo, denominado Definições e Conceitos Preliminares, serão apresentados os principais conceitos necessários à caracterização da fadiga. O terceiro capítulo, cujo título é Abordagem de Plano Crítico para Fadiga Multiaxial, explica o conceito de Plano Crítico e apresenta a descrição de modelos de fadiga multiaxial bastante citados na literatura. O quarto capítulo, denominado Amplitude da Tensão Cisalhante em Fadiga Multiaxial, apresenta os principais métodos utilizados para se computar a amplitude da tensão cisalhante em um dado plano, além do detalhamento do Método do Momento de Inércia, o qual afirma obter resultados mais precisos que os métodos de superfície envoltória. O capítulo cinco será dedicado a apresentação dos resultados da comparação, por meio de dados experimentais extraídos da literatura, entre os métodos MCC, MRH e MOI. Esses métodos serão analisados e avaliados através de seus resultados de amplitude da tensão cisalhante no plano crítico e dos índices de erros obtidos pelo critério de Susmel e Lazzarin (2002). Por fim, o capítulo Conclusão conterá resumidamente as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 MECANISMOS DE DANO POR FADIGA

Fadiga é uma forma de falha mecânica decorrente da aplicação repetida de carregamentos variáveis no tempo. Este modo de falha se caracteriza pela nucleação e propagação lenta e gradual de trincas que resultam na ruptura de um componente mecânico devido às variações de tensão e deformação (Takahashi, Bruno Ximenes, 2014).

O dano por fadiga se caracteriza pela nucleação, formação de microtrincas e crescimento estável de trincas até a fratura do material. Erwing e Humphrey (1903) conduziram um trabalho experimental com o objetivo de avaliar os vários estágios do processo de fadiga, analisando, através de um microscópio óptico, a mesma região do corpo de prova em diferentes etapas do processo de fadiga.

A Figura 1 representa uma ilustração esquemática de parte da estrutura cristalina de um material submetido a um carregamento de tração periódico $\sigma(t)$. Em um carregamento uniaxial, a trinca tende a se propagar no plano a 45° da direção do carregamento, ou seja, no plano de máxima amplitude da tensão cisalhante (estágio I da Figura 2).

Após poucos ciclos de carregamento, surgem bandas de escorregamento em alguns grãos (representadas pelas linhas no interior dos hexágonos), dando início à etapa de nucleação da trinca. Conforme o número de ciclos aumenta, as bandas de escorregamento crescem em uma única trinca dominante, se tornando mais largas e com bordas definidas (linha mais espessa da Figura 1).

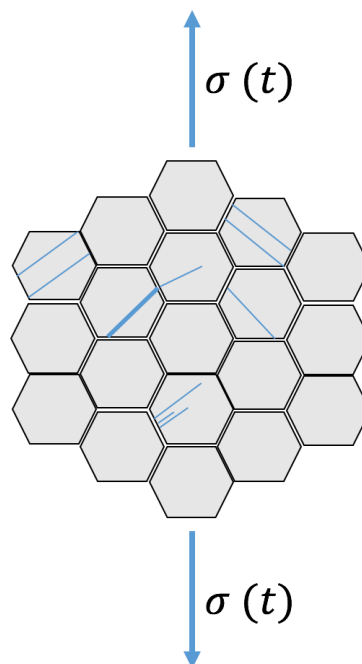


Figura 1 - Nucleação de trincas no interior dos grãos de uma estrutura cristalina.

As bandas de escorregamento são geradas pelas tensões cisalhantes cíclicas que induzem discordâncias nos planos da estrutura cristalina do material, resultando em uma deformação plástica localizada. Em razão dos carregamentos repetidos, eventualmente podem surgir bandas de escorregamento por intrusões ou extrusões. Essa primeira fase de crescimento da trinca é chamada de Estágio I e normalmente é curta. Após o crescimento da ordem de alguns grãos, a trinca começa a se propagar na direção normal à orientação da máxima tensão principal, dando início a fase chamada de Estágio II. No estágio III, a trinca atinge um tamanho crítico e se propaga de forma rápida e instável, provocando a ruptura brusca do componente. (Forsyth, P. J. E., 1962). A Figura 2 ilustra os estágios I e II de crescimento de uma trinca de propagação.

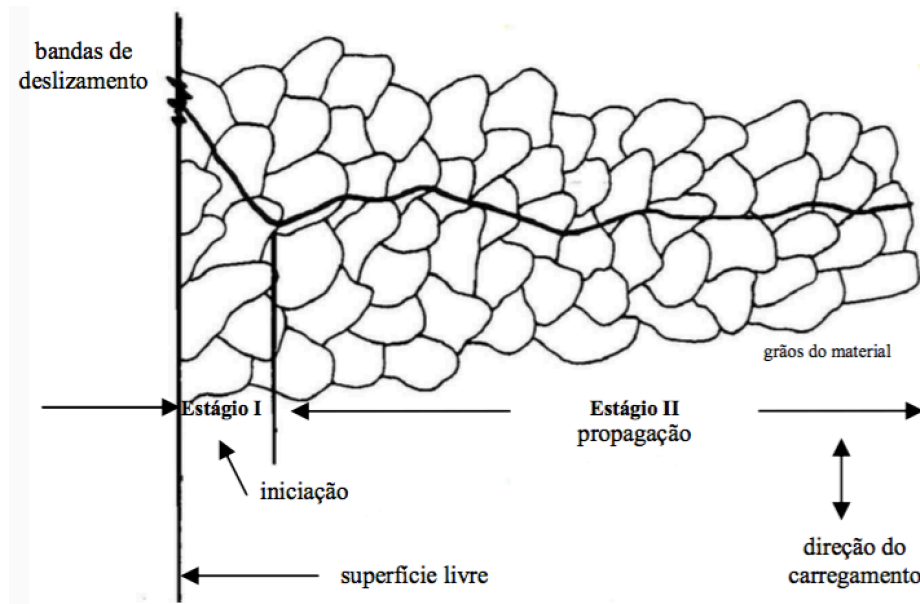


Figura 2 - Vista esquemática dos estágios I e II de uma trinca de fadiga (modificada de Dowling, 1993).

2.2 VETOR TENSÃO

Para a realização desta análise, primeiramente, Cauchy considerou um plano imaginário de corte passando por um ponto específico \mathbf{O} em um corpo sólido Ω (Figura 3).

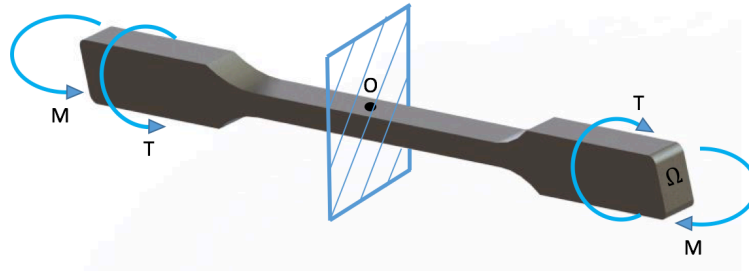


Figura 3 - Forças externas atuando no corpo Ω e plano de corte imaginário passando pelo ponto \mathbf{O} .

O plano de corte que passa por \mathbf{O} é definido pelo seu vetor unitário \mathbf{n} e o vetor tensão \mathbf{t} nesse ponto, sendo consequência de uma força resultante $\Delta\mathbf{F}$ em um elemento de área ΔS , expresso pela seguinte equação:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}. \quad (1)$$

O vetor tensão \mathbf{t} depende do ponto \mathbf{O} contido no plano Ω e do vetor normal ao plano de corte do sólido. Dessa forma, Cauchy assumiu que o vetor tensão depende linearmente de \mathbf{n} . A maneira como o vetor tensão depende de \mathbf{n} é definida pelo *Teorema de Cauchy*:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \quad (2)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ corresponde a um tensor de segunda ordem, simétrico, chamado Tensor Tensão de Cauchy. Conhecendo-se $\boldsymbol{\sigma}$, o teorema de Cauchy permite determinar o vetor tensão \mathbf{t} em qualquer plano normal.

Levando em consideração um sistema de coordenadas ortogonais composto pelos vetores unitários \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y e \mathbf{n}_z , um estado de tensão tridimensional definido pelo Tensor Tensão de Cauchy pode ser representado pela seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

em que a diagonal principal do tensor tensão representa as componentes normais e o restante são componentes cisalhantes do tensor.

Por equilíbrio de momentos no elemento de tensão, é possível demonstrar que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Dessa forma, o Tensor Tensão $\boldsymbol{\sigma}$ se torna simétrico com apenas seis escalares independentes para definir o estado de tensão de um ponto.

O vetor tensão \mathbf{t} pode ser decomposto em dois vetores: um vetor tensão normal à superfície de corte, denominado vetor tensão normal \mathbf{t}_n , e outro paralelo à superfície de corte, denominado vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ (Figura 4).

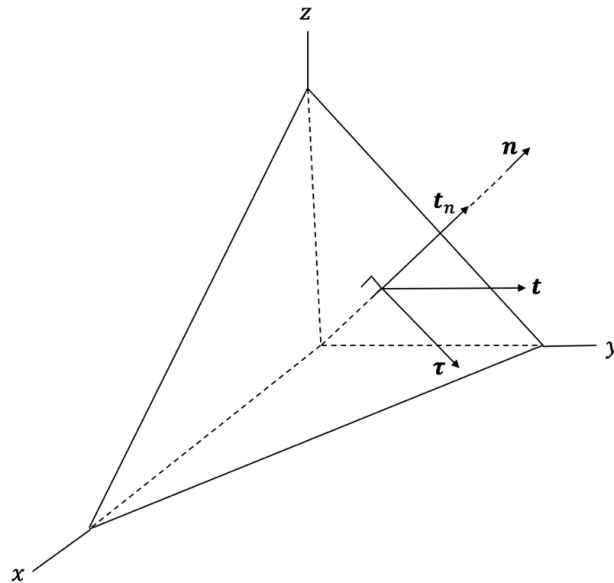


Figura 4 - Decomposição do vetor tensão no Tetraedro de Cauchy.

O vetor tensão \mathbf{t} é definido como:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_n + \boldsymbol{\tau}. \quad (4)$$

O vetor tensão normal é definido pela tensão normal, σ_n , na direção normal \mathbf{n} :

$$\mathbf{t}_n = \sigma_n \mathbf{n} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (5)$$

O vetor tensão cisalhante é definido como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (6)$$

2.3 FADIGA UNIAXIAL

Métodos para caracterização da vida em termos de tensão nominal surgiram a partir do trabalho de Wöhler (1860), tendo analisado o fenômeno de fadiga em eixos de máquinas ferroviárias. Tais métodos são baseados no Diagrama de Wöhler (curva S-N). Esta curva relaciona a amplitude de tensão nominal aplicada em um corpo de prova e a quantidade de ciclos até a falha do respectivo corpo. Estes dados são usualmente obtidos em carregamentos de flexão, torção ou tração/compressão.

Em 1910, Basquin observou estes dados e verificou que eles poderiam ser linearizados em um gráfico log-log. A Equação (7) descreve o comportamento das curvas S-N e é chamada de relação de Basquin.

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^\alpha \quad (7)$$

em que σ_a é a amplitude de tensão, N_f é o número de ciclos até a falha, σ'_f é o coeficiente de resistência à fadiga e α é o expoente de resistência a fadiga.

O número de ciclos para vida infinita estabelece um limite denominado limite de resistência à fadiga que é a tensão máxima ou a amplitude da tensão abaixo da qual não será observado o fenômeno da fadiga, mesmo quando o material estiver submetido a um número infinito de ciclos. A Figura 5 descreve uma curva S-N com limite de resistência à fadiga em aproximadamente 10^6 ciclos.

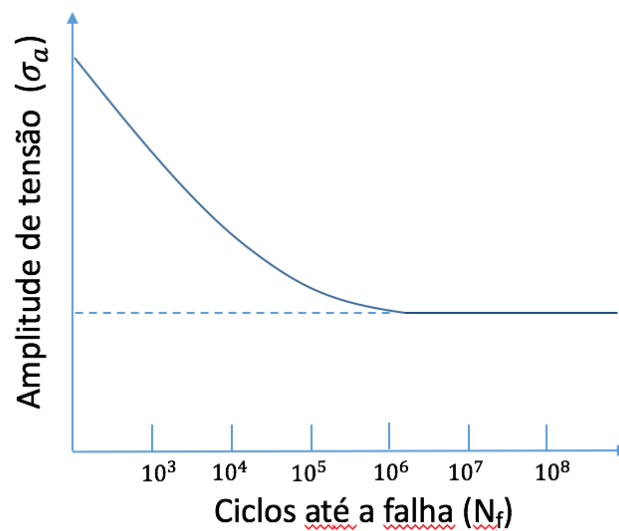


Figura 5 - Construção esquemática da curva S-N.

Um aspecto muito importante a ser levado em conta no estudo de fadiga é a influência das tensões médias na determinação da resistência à fadiga. Considerando uma mesma amplitude de tensões, um aumento no nível da tensão média observada na história de tensões irá resultar em uma diminuição da vida em fadiga do material, como pode ser visto na Figura 6.

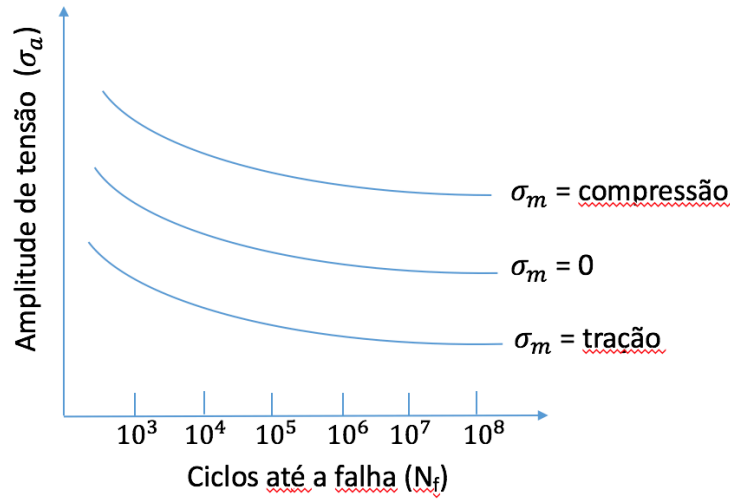


Figura 6 - Efeito da tensão média na resistência e limite de fadiga.

2.4 ESTADO UNIAXIAL DE TENSÃO

Vamos considerar um corpo como o da Figura 3, porém submetido apenas a um carregamento externo periódico de tração/compressão de tal maneira que no ponto O, o estado de tensão seja da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx}(t) = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a}g(\cdot)(\alpha t), \quad (8)$$

em que t é o tempo, α é a frequência angular, $\sigma_{xx,a}$ é a amplitude da componente da tensão, $\bar{\sigma}_{xx}$ é o valor médio da componente da tensão e $g(\cdot)$ é uma função periódica. Os valores máximos e mínimos das componentes do tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ para os casos uniaxiais e periódicos é dado por:

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma}_{xx} + \sigma_{xx,a}, \quad \sigma_{min} = \bar{\sigma}_{xx} - \sigma_{xx,a}. \quad (9)$$

A faixa de tensão é definida por:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}. \quad (10)$$

Outros parâmetros importantes a serem levados em conta na análise de fadiga são a razão de carregamento R e a razão de amplitude A, Tais parâmetros são expressos por:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad e \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}. \quad (11)$$

O cálculo da amplitude (σ_a) e valor médio (σ_m) de tensão no contexto uniaxial é um processo trivial, sendo encontrados a partir das seguintes equações:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad e \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \quad (12)$$

A Figura 7 apresenta um gráfico de carregamento cíclico uniaxial, sendo possível visualizar as relações apresentadas nas equações anteriores.

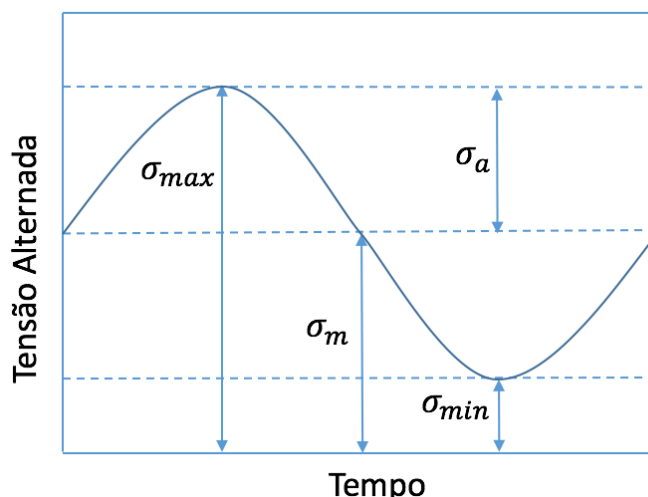


Figura 7 - Carregamento cíclico.

2.5 CARREGAMENTOS COMBINADOS E NÃO PROPORCIONALIDADE

Na seção anterior foi apresentado e analisado o fenômeno de fadiga caracterizado por carregamentos uniaxiais. Entretanto, em problemas práticos de engenharia, é mais comum que componentes mecânicos estejam sujeitos a estados multiaxiais de tensão. Isso é verificado em componentes aeronáuticos, máquinas, eixos automobilísticos, cabos condutores de energia, entre outros.

No projeto de qualquer componente mecânico, é necessário assegurar que o material não irá falhar, sendo preciso identificar os esforços atuantes e onde eles são mais severos. Uma história de tensões genéricas para um carregamento cíclico multiaxial pode ser representada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ \sigma_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ \sigma_{zx}(t) & \sigma_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij}(t) = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,a}g(\cdot)(\lambda_{ij}t - \beta_{ij}), \quad (13)$$

As histórias de tensão podem ser classificadas como proporcionais, não proporcionais, síncronas e assíncronas (Dantas, A. P., 2009). Quando a razão e direção das tensões principais, resultantes de um carregamento cíclico, permanecem constantes ao longo de um ciclo e passam pela origem (inclusive também a projeção pela origem), este carregamento é caracterizado como proporcional. Dessa forma, percebe-se uma relação de proporcionalidade entre os componentes da história de tensões. Carregamentos não proporcionais não possuem uma relação de proporcionalidade, ou seja, seus componentes da história de tensão não apresentam uma relação fixa. A Figura 8 exemplifica uma história de tensão proporcional e não proporcional. Em relação ao sincronismo, uma história de tensões é dita síncrona quando as componentes do tensor das tensões estão na mesma frequência ou seus períodos são iguais. Caso contrário, é chamada de assíncrona.

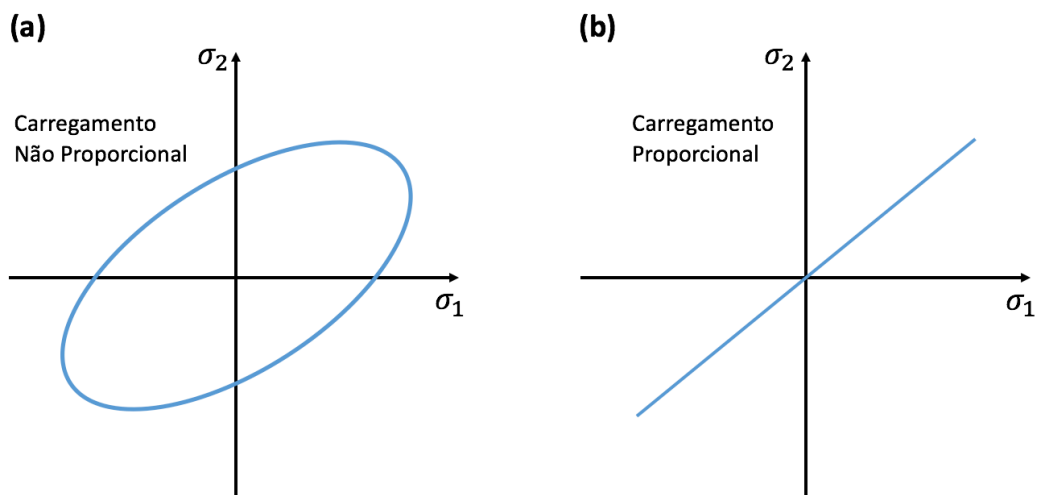


Figura 8 - História de tensão (a) não proporcional e (b) proporcional

2.6 ESTADO MULTIAXIAL DE TENSÕES

Considere o tetraedro da Figura 9. Em casos multiaxiais, tendo em vista a formulação de modelos de fadiga baseados no conceito de plano crítico, é viável descrever o vetor tensão em um sistema de coordenadas ortonormal, em que uma das bases é o vetor normal \mathbf{n} e os outros dois estão contidos no de plano de corte Δ . Várias podem ser as opções de escolha para as duas bases contidas no plano, em que, dentro das diversas opções, escolhem-se os vetores \mathbf{e}_A (paralelo ao plano xy) e \mathbf{e}_B (aponta na direção de z). A orientação do plano material Δ pode ser descrito utilizando-se coordenadas esféricas ϕ e θ .

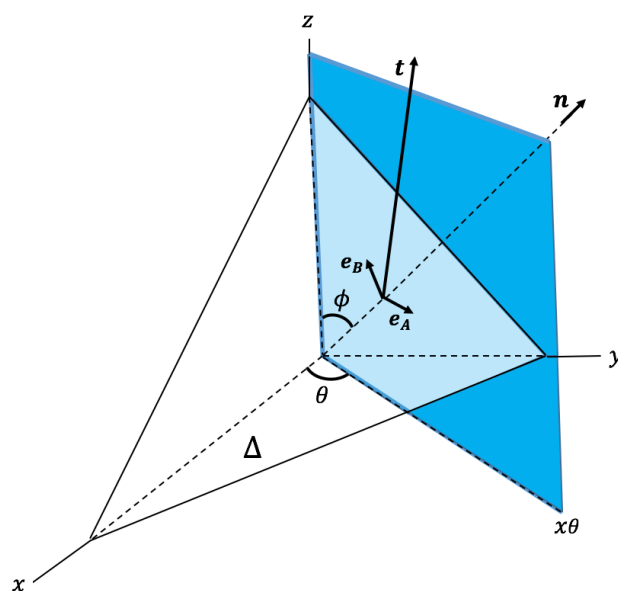


Figura 9 - Sistema de coordenadas $(\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{n})$ referenciado em coordenadas esféricas.

O vetor normal \mathbf{n} e as bases \mathbf{e}_A e \mathbf{e}_B do sistema de coordenadas podem ser escritos como:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ \text{sen}\phi\text{sen}\theta \\ \text{cos}\phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} -\text{sen}\theta \\ \text{cos}\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -\text{cos}\phi\text{cos}\theta \\ -\text{cos}\phi\text{sen}\theta \\ \text{sen}\phi \end{pmatrix}. \quad (14)$$

A decomposição do vetor tensão se torna:

$$\mathbf{t} = \tau_A \mathbf{e}_A + \tau_B \mathbf{e}_B + \sigma_n \mathbf{n}, \quad (15)$$

$$\tau_A = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_A, \quad \tau_B = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_B, \quad \sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (16)$$

em que τ_A e τ_B correspondem às componentes cisalhantes ao longo das direções A e B, respectivamente.

A notação utilizada acima se baseia na terminologia introduzida primeiramente por Brown e Miller (1973) para descrever o modo de crescimento de trincas na superfície de um componente mecânico. As tensões cisalhantes atuantes na direção A são responsáveis pela propagação da trinca ao longo da superfície (Figura 10a), enquanto as tensões cisalhantes na direção B induzem o crescimento da trinca para dentro da superfície (Figura 10b).

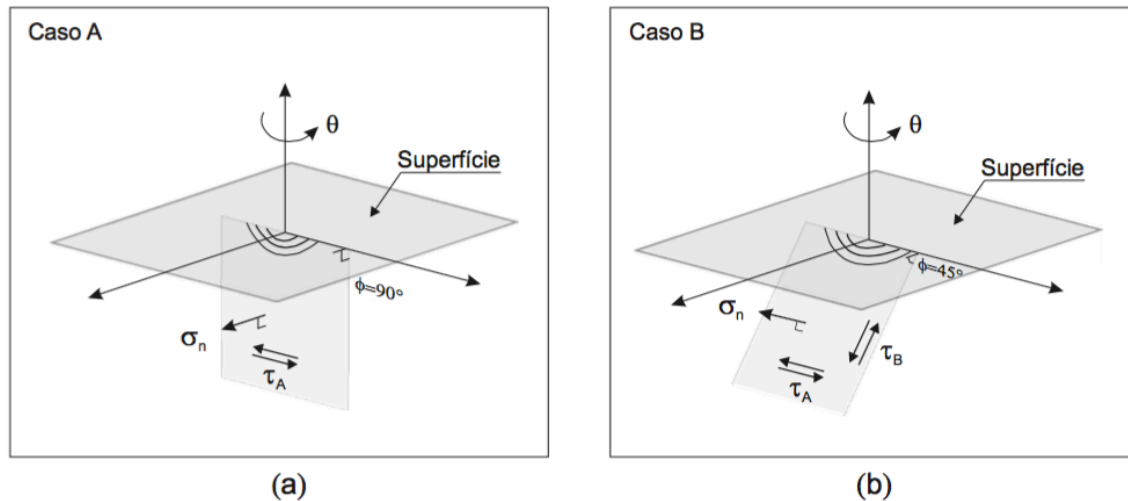


Figura 10 - Modos de crescimento de trincas (a) Caso A e (b) Caso B (Pinheiro, P. A. B., 2012)

Visualizando em termos geométricos, o ângulo θ fornece a orientação do plano de crescimento da trinca em relação ao eixo x, enquanto ϕ corresponde ao ângulo de penetração da trinca na superfície.

Em carregamentos cíclicos complexos, durante um ciclo, a tensão cisalhante varia sua direção e magnitude, descrevendo uma curva fechada ψ ao longo dos diversos planos de corte Δ . Já o vetor normal mantém sua direção em todos os planos, alterando apenas sua magnitude. A Figura 11 exemplifica a projeção do vetor tensão \mathbf{t} em um plano material Δ para o período de um ciclo de carregamento.

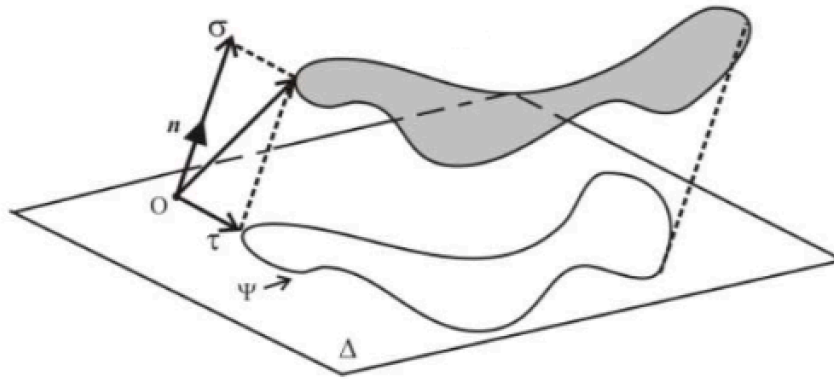


Figura 11 - Projeção do vetor tensão t em um plano material Δ para um ciclo de carregamento (Araújo et al., 2011)

A curva fechada ψ gerada através da projeção do vetor tensão t é diferente em cada plano de corte passando pelo mesmo ponto, podendo-se concluir que a tensão cisalhante τ_α depende da orientação do plano em que atua, ou seja, ela é função do vetor normal n e das outras duas bases e_A e e_B . A amplitude de tensão cisalhante τ_α pode ser calculada de diversas maneiras. Mais a frente nesse trabalho será apresentada e detalhada metodologias relevantes para esse cálculo.

3 ABORDAGEM DE PLANO CRÍTICO PARA FADIGA MULTIAXIAL.

3.1 MODELOS BASEADOS NA DETERMINAÇÃO DE PLANOS CRÍTICOS

Um ponto material, quando submetido a uma história de tensões, pode gerar diferentes níveis de amplitudes de tensão em planos de corte distintos. O plano onde ocorre o maior nível de tensão será o plano responsável por ocasionar o dano por fadiga, denominado também de Plano Crítico.

Modelos de fadiga do tipo plano crítico se baseiam em inúmeras observações experimentais que indicam que a nucleação de trincas tende a ocorrer em planos materiais submetidos a "combinações severas" de tensões cisalhantes e normais, sendo tais planos geralmente caracterizados por elevados níveis de tensão cisalhante. Segundo Fatemi e Socie (1988), as tensões normais a esses planos, quando atuantes na forma de tração, favorecem a propagação de micro-trincas, pois diminuem as forças de coesão entre as faces da trinca, como pode ser visto na Figura 12.

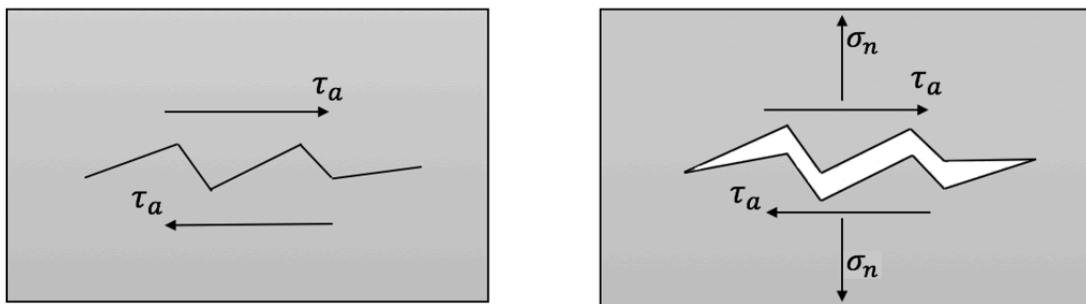


Figura 12 - Efeito da tensão normal na propagação de micro-trincas.

Ainda há divergência sobre uma correta definição do conceito de plano crítico, em que tal definição apresenta duas abordagens que vem sendo empregadas. Alguns pesquisadores alegam que o plano crítico corresponde ao plano onde a amplitude da tensão cisalhante τ_a é máxima, enquanto outros definem o plano crítico como aquele onde a combinação entre τ_a e a tensão normal σ_n é mais severa.

A seguir, tendo em vista a abordagem das tensões, serão detalhados três modelos de fadiga multiaxial bastante citados na literatura baseados na determinação de planos críticos.

3.2 FINDLEY

Findley (1956) considerou que o plano crítico é aquele onde o efeito combinado da amplitude da tensão cisalhante, τ_a , e a tensão normal máxima, $\sigma_{n,max}$, é a mais severa dentre todos os planos materiais. A localização das coordenadas que definem a orientação do plano é dada por:

$$(\theta^c, \phi^c) : \max_{\theta, \phi} \{ \tau_a(\theta, \phi) + k \sigma_{n,max}(\theta, \phi) \}, \quad (17)$$

em que o subscrito c em θ e ϕ faz menção às coordenadas esféricas do plano crítico e k é um parâmetro material a ser determinado.

O modelo de Findley é baseado na relação linear entre a amplitude da tensão cisalhante e da máxima tensão normal, em que a falha por fadiga ocorrerá se a expressão a seguir não for atendida (critério de admissibilidade):

$$\max_{\theta, \phi}(\tau_a + k\sigma_{n,max}) \leq \lambda, \quad (18)$$

sendo λ outro parâmetro material a ser determinado.

Os parâmetros k e λ são obtidos a partir dos limites de fadiga em flexão (ou tração-compressão) alternada, f_{-1} , e torção alternada, τ_{-1} , através das seguintes relações:

$$k = \frac{1 - 0,5r}{\sqrt{r - 1}}, \quad \lambda = \frac{f_{-1}}{2\sqrt{r - 1}}, \quad (19)$$

em que $r = f_{-1}/\tau_{-1}$.

3.3 SUSMEL E LAZZARIN

Para Susmel e Lazzarin (2002), o plano crítico será definido como aquele que apresentar a maior amplitude de tensão cisalhante dentre todos os planos em uma dada história de tensões:

$$(\theta^c, \phi^c) = \max_{\theta, \phi}\{\tau_a(\theta, \phi)\} \quad (20)$$

A máxima amplitude de tensão cisalhante geralmente ocorre em dois ou mais planos. Sendo assim, o plano escolhido para ser utilizado no modelo da fadiga será o que apresentar a maior tensão normal, $\sigma_{n,max}$, dentre os planos críticos.

Susmel e Lazzarin observaram que no plano crítico a tensão normal máxima leva em consideração efeitos da tensão média na resistência a fadiga. Assim, propuseram em seu modelo que a falha ocorrerá quando a seguinte equação for violada:

$$\tau_a(\theta^c, \phi^c) + k\rho(\theta^c, \phi^c) \leq \lambda, \quad \rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}, \quad (21)$$

em que λ e k são parâmetros materiais a serem quantificados.

O critério de Susmel e Lazzarin, denominado Método das Curvas Modificadas de Wöhler/*Modified Wöhler Curve Method (MWCM)*, é baseado nas curvas modificadas de Wöhler (Figura 13) para estimar a resistência a fadiga sob condições de carregamentos multiaxiais. Tais curvas levam em conta a amplitude da tensão cisalhante e a componente normal da tensão nesse plano.

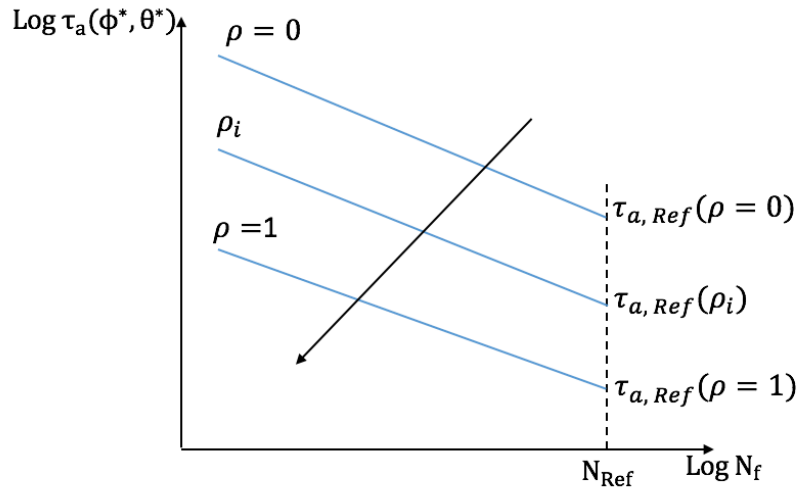


Figura 13 - Curvas modificadas de Wöhler

Considerando a curva modificada de Wöhler da Figura 13, em que a abscissa corresponde ao número de ciclos para a falha e a ordenada, a amplitude da tensão cisalhante $\tau_a(\theta^c, \phi^c)$ calculada no plano crítico, vemos que essa curva está representada por três retas: uma correspondente ao ensaio de torção pura ($\rho = 0$), outra à flexão com $\rho = 1$ e outra à uma história de tensões gerais ($\rho = \rho_i$). É visível que os diferentes valores do parâmetro ρ alteram o valor do limite de resistência a fadiga, mostrando a influência da tensão normal sobre a resistência do material. Verifica-se que a diminuição da resistência em fadiga é causada por um aumento do valor do parâmetro ρ , em que essa relação se aplica até um valor limite ρ_{lim} , acima do qual tal relação não possui sentido ou os valores não possuem significado físico e, portanto, o critério não pode ser aplicado (Susmel L. *et al*, 2005). Esse limite depende das propriedades do material e pode ser obtido por:

$$\rho_{lim} = \frac{f_{-1}}{2t_{-1} - f_{-1}}. \quad (22)$$

Os parâmetros k e λ podem ser encontrados através da seguinte relação:

$$k = t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2}, \quad \lambda = t_{-1}, \quad (23)$$

em que f_{-1} e t_{-1} são os limites de resistência a fadiga completamente alternada para flexão e torção pura, respectivamente.

3.4 MATAKE

O modelo de Matake (1977), considera como plano crítico aquele no qual é observada a maior amplitude da tensão cisalhante, sendo a localização das coordenadas que definem a orientação do plano dadas por:

$$(\theta^c, \phi^c) = \arg\{\max_{\theta, \phi} \tau_a(\theta, \phi)\}. \quad (24)$$

O critério de admissibilidade a ser utilizado para verificação nesse plano é:

$$\tau_a(\theta^c, \phi^c) + k\sigma_{n,max}(\theta, \phi) \leq \lambda, \quad (25)$$

Os parâmetros k e λ podem ser encontrados através da seguinte relação:

$$k = \frac{2t_{-1}}{f_{-1}} - 1, \quad \lambda = t_{-1}, \quad (26)$$

4 AMPLITUDE DA TENSÃO CISALHANTE EM FADIGA MULTIAXIAL

4.1 INTRODUÇÃO

Durante um ciclo de carregamento, a tensão normal atuante em um plano material não altera sua direção, permanecendo sempre perpendicular ao plano, independente se o carregamento é proporcional ou não proporcional. Sendo assim, para se computar a amplitude, valor médio ou valor máximo da tensão normal, é necessário somente considerar seu valor algébrico, pois sua variação em função do tempo é uma grandeza escalar. Em contrapartida, a tensão cisalhante projetada no plano material em função do tempo, varia sua magnitude, direção e sentido. Devido a isso, avaliar a amplitude de tensão cisalhante τ_a é um problema bem mais complexo, cuja solução não é trivial.

A Figura 14a mostra o comportamento da tensão cisalhante e normal no plano material Δ para um determinado ciclo de carregamento. Percebe-se uma variação de direção, sentido e magnitude da tensão cisalhante, gerando a curva fechada Ψ . Em relação a tensão normal, verificamos uma variação apenas em sua magnitude. A Figura 14b mostra a projeção do caminho percorrido pelas componentes da tensão cisalhantes nas direções v e u no plano Δ , em que Ψ_p denota o caminho percorrido para um carregamento proporcional e Ψ_{np} para um carregamento não proporcional.

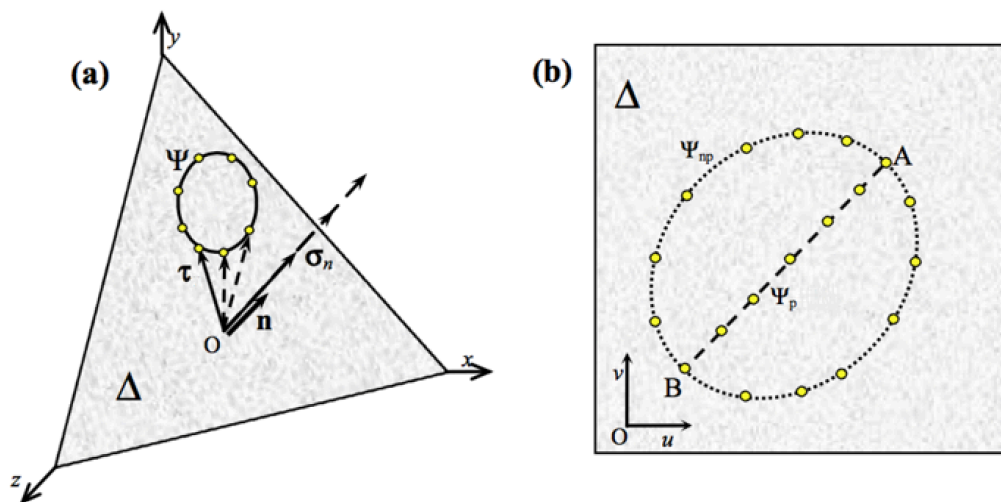


Figura 14 - Componentes do vetor tensão atuando em um plano material genérico (Petrucci G., 2015)

Para um carregamento proporcional, τ_a e τ_m podem ser encontrados diretamente pelo valor máximo e mínimo do módulo do vetor cisalhante τ representado na figura. No caso de um carregamento não proporcional, a identificação de τ_a e τ_m se torna bem mais complicada.

Atualmente, há diversas propostas para o cálculo da amplitude da tensão cisalhante projetada em um plano material, não havendo um consenso entre quais métodos são os mais eficazes. O método da Menor Circunferência Circunscrita geralmente é a mais utilizada para determinação da amplitude da

tensão cisalhante. Neste capítulo, será feita uma revisão dos principais métodos utilizados para o cálculo de τ_a , incluindo métodos desenvolvidos recentemente, como o Método da Caixa e o Método do Momento de Inércia.

4.2 MÉTODO DA MAIOR PROJEÇÃO

Grubisic e Simbürger (1976) foram responsáveis pela primeira tentativa de se obter a amplitude da tensão cisalhante, τ_a , e seu valor médio, τ_m . O Método da Maior Projeção consiste na projeção, propriamente dita, da história de tensões cisalhantes formadas pela curva fechada Ψ em segmentos de reta sobre o plano de corte Δ , sendo sua origem o ponto de aplicação O sobre esse plano (Figura 15).

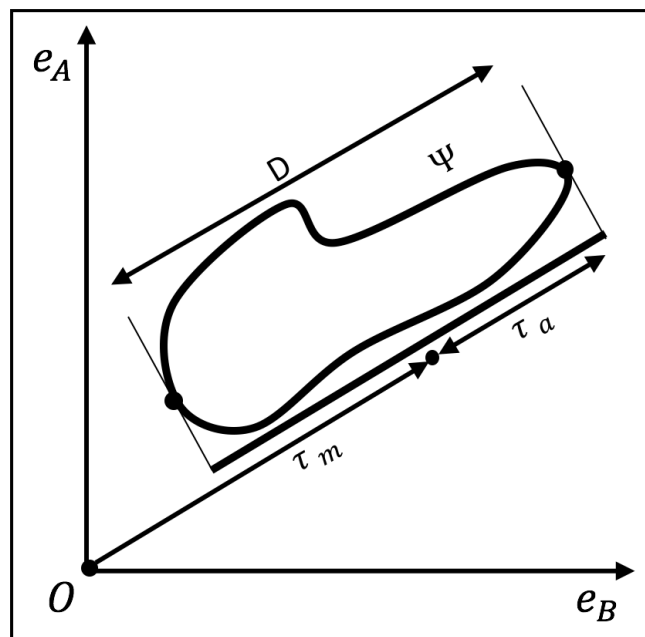


Figura 15 - Método da Maior Projeção

A amplitude de tensão cisalhante corresponde a metade da medida do maior segmento de todas as projeções de Ψ sobre o plano Δ . A tensão média é encontrada pelo módulo do vetor que parte da origem O até o ponto médio da maior projeção.

Segundo Bernasconi e Papadopoulos (2005), o Método da Maior Projeção apresenta a inconsistência de não conseguir diferenciar carregamentos proporcionais de carregamentos não proporcionais. Afirma também que o método não garante um único valor de τ_m , além de outras inconsistências envolvendo τ_m .

4.3 MÉTODO DA MAIOR CORDA

Fuchs e Stephens (1980) foram quem propuseram a segunda proposta para obter a amplitude da tensão cisalhante. Este método consiste em obter a maior corda de uma curva fechada, ou seja, obter o segmento de reta entre os dois pontos mais distantes entre si, pertencentes à curva Ψ . A Figura 16 ilustra o método.

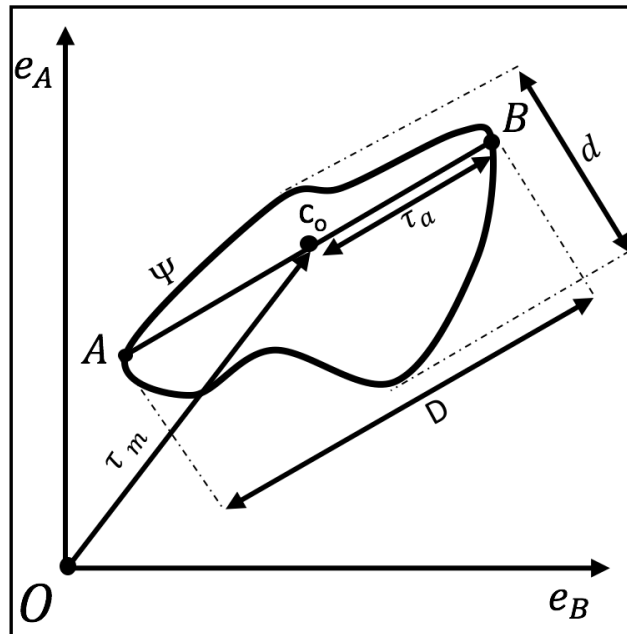


Figura 16 - Método da Maior Corda

A amplitude de tensão cisalhante τ_a é encontrado pela metade do valor do comprimento da corda. O ponto médio desse segmento de reto faz referência ao vetor tensão médio, em que o módulo desse vetor corresponde à τ_m .

Em termos matemáticos, a tensão cisalhante τ_a é encontrada pela seguinte expressão:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t^*} \left\{ \max_t \|\tau(t) - \tau(t^*)\| \right\}, \quad (27)$$

em que t^* e t são dois instantes de tempos quaisquer. Sendo assim, o valor médio τ_m pode ser definido como o comprimento do vetor na direção do meio da corda, assim:

$$\tau_m = \frac{1}{2} \|\tau(t) + \tau(t^*)\|. \quad (28)$$

Porém, segundo Bernasconi e Papadopoulos (2005), assim como no Método da Maior Projeção, o Método da Maior Corda apresenta a inconsistência de não conseguir diferenciar carregamentos proporcionais de carregamentos não proporcionais, além de afirmar que o método não garante um único valor de τ_m .

4.4 MÉTODO DA MENOR CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

O objetivo do Método da Menor Circunferência Circunscrita é o de encontrar a menor circunferência que circunscreva a curva fechada Ψ gerada pela história de tensões cisalhantes projetadas em um plano Δ . O raio dessa circunferência corresponde à amplitude de tensão cisalhante, τ_a , e o centro dessa circunferência é a tensão média τ_m (Figura 17). Dessa maneira, pode se dizer que τ_a é definida pela dimensão do segmento que une o vetor tensão médio à maior distância de um ponto da curva Ψ .

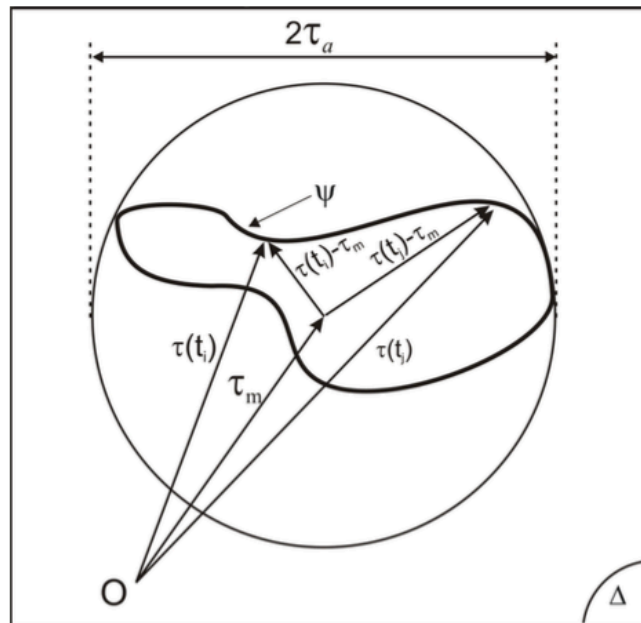


Figura 17 - Método da Menor Circunferência Circunscrita (modificada de Dantas, P.A., 2009)

Existem diversas abordagens para se obter o a menor circunferência, em que o método do Algoritmo Incremental, proposto inicialmente por Dang Van *et al.* (1984), é o mais utilizado e amplamente aceito para obtenção da amplitude e média da tensão cisalhante.

Para compreensão do funcionamento desse método, considere um plano Δ definido pelo seu vetor unitário \mathbf{n} , no qual foi obtido as componentes do vetor tensão cisalhante sobre esse plano para um número finito de instantes t_i , $i = 1, 2, \dots, k$ do carregamento periódico. Dessa maneira, o conjunto de componentes do vetor cisalhante $\tau(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ gerados pela curva Ψ descrita por τ sobre Δ fica representado por um polígono de k vértices. O problema agora se restringe em obter o menor círculo que circunscreve essa curva poligonal composta por k vértices.

Uma quantidade imensa de circunferências circunscritas à história da tensão cisalhante representada pelo polígono no plano Δ podem ser obtidas, porém apenas uma única circunferência será a menor. O centro dessa circunferência determina o valor da tensão média τ_m no plano Δ . A tensão média pode ser expressa matematicamente pela seguinte relação:

$$\tau_m = \min_w \left\{ \max_{t_i} \|\tau(t_i) - w\| \right\}, \quad (29)$$

em que $\tau(t_i)$ é um elemento do conjunto de k vértices do polígono e w é um ponto do plano Δ .

Para explicar a relação *min-max* da Equação (29), vamos assumir que inicialmente seja escolhido um ponto w^* , arbitrariamente, pertencente ao plano Δ , como um candidato para ser o centro da mínima circunferência que circunscribe o polígono gerado pelo conjunto de componentes do vetor cisalhante $\tau(t_i)$. A quantidade de circunferências que contém essa curva poligonal com centro em w^* é infinita, mas apenas uma única circunferência será a menor capaz de conter todos os vértices da curva. A relação de maximização na Equação (29) vem do fato de o raio da circunferência corresponder a maior distância entre todos os vértices do polígono, isto é, os componentes do vetor cisalhante $\tau(t_i)$, e o ponto w^* inicialmente escolhido como centro da menor circunferência. O raio R^* da menor circunferência com centro w^* e circunscrita ao polígono é dado por:

$$R^* = \max_{t_i} \|\tau(t_i) - w^*\| \quad (30)$$

Em relação a questão da minimização na Equação (29), após a determinação do raio da circunferência circunscrita centrada em w^* , pode-se escolher outro ponto, digamos w^{**} para determinar uma outra circunferência de raio R^{**} , menor que a anterior, porém também circunscrita à curva poligonal. Assim, dentre os novos w implementados, procura-se, dentre todos eles, o centro de uma circunferência que forneça o menor raio, sendo esse centro o τ_m . Em outras palavras, podemos dizer que procura-se minimizar a quantidade $\max_{t_i} \|\tau(t_i) - w\|$ variando w .

Após a determinação do centro τ_m , a amplitude da tensão cisalhante no plano material é obtida pela seguinte expressão:

$$\tau_a = \max_{t_i} \|\tau(t_i) - \tau_m\| \quad (31)$$

4.5 MÉTODO DA CAIXA

Araújo *et al.* (2011) propuseram uma definição para a amplitude da tensão cisalhante baseada no Método da Caixa, no qual é proposto a utilização do maior retângulo como alternativa capaz de determinação de τ_a para os diferentes tipos de carregamento. Considere uma figura geométrica retangular com orientação arbitrária circunscrevendo a curva ψ , gerada pela história de carregamento das tensões cisalhantes, como ilustrado na Figura 18.

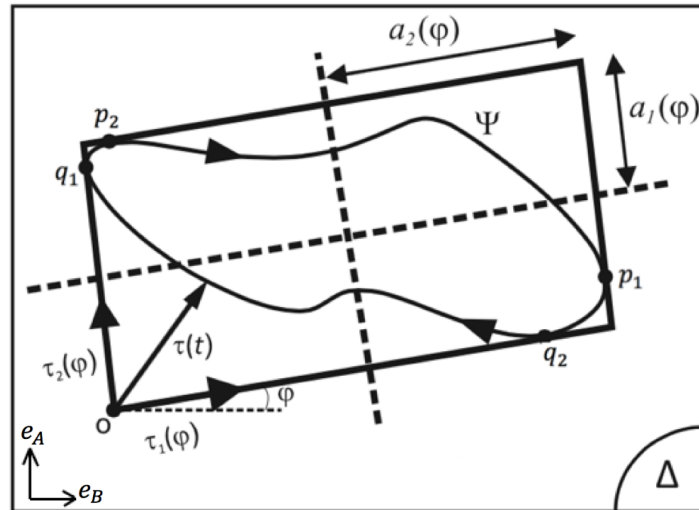


Figura 18 - Método da Caixa (modificada de Araújo, J. A., 2011)

O retângulo é tangente à história de tensões nos seguintes pontos:

$$p_i(\varphi) = \arg \left\{ \max_t \tau_i(\varphi, t) \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (32)$$

$$q_i(\varphi) = \arg \left\{ \min_t \tau_i(\varphi, t) \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

em que $p_i(\varphi)$ e $q_i(\varphi)$ são pertencentes a curva Ψ , sendo $\tau_i(\varphi, t)$ a representação da i -ésima componente da tensão cisalhante $\tau(t)$ projetada no plano de corte no instante t , descrita em termos de uma base com orientação φ .

Para cada orientação φ do retângulo, define-se a amplitude da i -ésima componente $a_i(\varphi)$ da história de carregamento como sendo a metade do lado do retângulo:

$$a_i(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \max_t \tau_i(\varphi, t) - \min_t \tau_i(\varphi, t) \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (34)$$

Sejam $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$ as componentes da tensão cisalhante ao longo das direções e_B e e_A , respectivamente. Rotacionando essas direções por um ângulo φ , essas componentes devem ser multiplicadas pela matriz de rotação R para manutenção da escala de projeção sobre os eixos coordenados. A matriz de rotação é definida como:

$$R_{rot} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (35)$$

As componentes das tensões cisalhantes ficam da seguinte maneira:

$$\tau_1(\varphi, t) = \cos(\varphi)\tau_1(t) + \sin(\varphi)\tau_2(t) \quad (36)$$

$$\tau_2(\varphi, t) = -\sin(\varphi)\tau_1(t) + \cos(\varphi)\tau_2(t) \quad (37)$$

A amplitude de tensão cisalhante encontrada pelo método da caixa é então definida pelo comprimento da metade da diagonal do retângulo:

$$\tau_a = \max_{\varphi} \sqrt{a_1(\varphi)^2 + a_2(\varphi)^2} \quad (38)$$

4.6 MÉTODO DO MOMENTO DE INÉRCIA

Meggiolaro *et al.* (2015) propuseram o Método do Momento de Inércia como forma de determinação da amplitude da tensão de cisalhamento equivalente. É mencionado em seu artigo que a amplitude de tensão cisalhante é tradicionalmente calculada por métodos de superfície envoltória, em que esses métodos funcionam somente para histórias de carregamento relativamente simples, uma vez que as superfícies envoltórias perdem informação da história original no momento do cálculo da amplitude de tensão cisalhante.

O Método do Momento de Inércia se baseia em uma abordagem integral que assume que a curva fechada gerada pela história de tensões corresponde a um fio homogêneo de massa unitária. O centro de massa desse fio (centroide) determina a tensão média τ_m da história, definida pelas suas componentes de tensão média nas direções A e B (Figura 19), e o momento de inércia do centroide do fio é responsável pelo cálculo da tensão de cisalhamento equivalente τ_a .

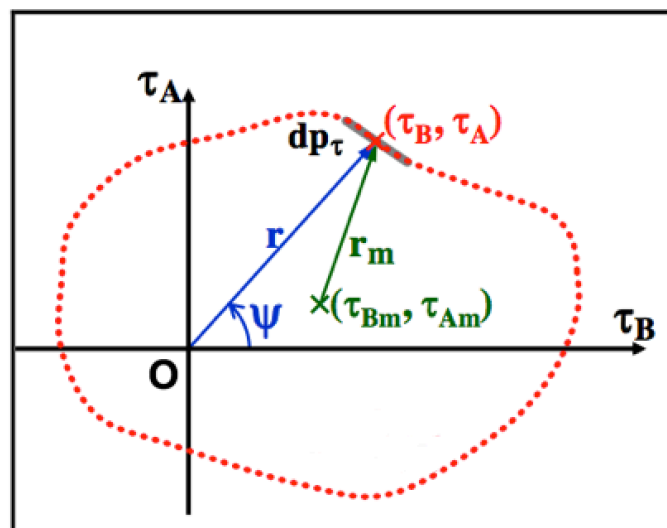


Figura 19 - Método do Momento de Inércia (Meggiolaro, M.A., 2016)

Para o cálculo do perímetro do fio, considera-se primeiramente comprimentos infinitesimais nas direções A e B, representados pela subtração das tensões adjacentes na história de tensão:

$$dp_A = \tau_A(t^*) - \tau_A(t), \quad (39)$$

$$dp_B = \tau_B(t^*) - \tau_B(t), \quad (40)$$

em que t^* representa um instante de tempo imediatamente após t . Dessa maneira, um comprimento infinitesimal do fio pode ser representado por:

$$dp = \sqrt{dp_A^2 + dp_B^2}. \quad (41)$$

O perímetro total do fio é dado pela soma de seus comprimentos infinitesimais:

$$P = \int dp. \quad (42)$$

O centro de gravidade está localizado no centroide do perímetro. O centroide é primeiramente calculado para cada segmento nas direções A e B:

$$\tau_{c,A} = \frac{\tau_A(t^*) - \tau_A(t)}{2}, \quad \tau_{c,B} = \frac{\tau_B(t^*) - \tau_B(t)}{2}, \quad (43)$$

em que o vetor formado pelas componentes $\tau_{c,A}$ e $\tau_{c,B}$ representam a distância do centro de cada fio infinitesimal à origem O. A tensão média pode então ser definida nas direções A e B:

$$\tau_{m,A} = \frac{1}{P} \int \tau_{c,A} dp_A, \quad (44)$$

$$\tau_{m,B} = \frac{1}{P} \int \tau_{c,B} dp_B. \quad (45)$$

Observe que as Equações (44) e (45) são análogas a equação de cálculo de centro de massa:

$$CM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n d m, \quad (46)$$

em que M representa a massa total dos componentes, m é a massa individual de cada componente a ser analisado e d representa a distância de cada componente a um determinado ponto de referência. No caso do Método do Momento de Inércia, a massa total corresponde ao perímetro total, a massa individual ao comprimento infinitesimal e a tensão $\tau_{c,k}$ é a distância do centroide do fio de comprimento dp_k até a origem O.

Considere agora a equação do momento de inércia de massa:

$$I = \int r^2 dm \quad (47)$$

em que r é a distância da massa dm até um ponto de referência.

A seguinte relação pode ser considerada para um fio de massa M e comprimento P :

$$\frac{dm}{M} = \frac{dp}{P}, \quad dm = \left(\frac{M dp}{P}\right), \quad (48)$$

em que dm é a massa infinitesimal do fio, M sua massa total, dp é seu comprimento infinitesimal e P é seu comprimento total.

Para o cálculo do momento de inércia do fio em relação ao seu centroide, primeiramente calcula-se o momento de inércia de cada fio infinitesimal em relação à origem O. Pelo teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I_o = I_{cm} + md^2 \quad (49)$$

em que I_{cm} é o momento de inércia do centro de massa do fio infinitesimal, m é sua massa e d é a distância do fio até a origem O. Assim, temos:

$$I_o = \int \frac{mL^2}{12} dm + \int (\tau_{c,A})^2 dm + \int (\tau_{c,B})^2 dm \quad (50)$$

Sabendo-se que a massa resultante da somatória de todas as massas infinitesimais m possui valor unitário, que $L = dp$ e aplicando a relação da Equação (48) na Equação (50), temos que:

$$I_o = \frac{1}{P} \int \left(\frac{dp^2}{12} + \tau_{c,A}^2 + \tau_{c,B}^2 \right) dp \quad (51)$$

O momento de inércia da origem também pode ser encontrado aplicando-se o teorema dos eixos paralelos no ponto referente ao centroide da história de carregamento, isto é, na posição $(\tau_{m,B}, \tau_{m,A})$. Temos:

$$I_o = I_{cm,t} + Md_m \quad (51)$$

$$I_{cm,t} = I_o - Md_m \quad (53)$$

em que $I_{cm,t}$ agora é o momento de inércia do centro de massa do fio como um todo, ou seja, de todo o caminho da história de carregamento, M é a massa total do fio e d é a distância do centro de massa do fio até a origem O. Assim, encontramos a seguinte relação para cálculo do momento de inércia do centroide do fio:

$$I_{cm,t} = \frac{1}{P} \int \left(\frac{dp^2}{12} + \tau_{c,A}^2 + \tau_{c,B}^2 \right) dp - (\tau_{m,A}^2 + \tau_{m,B}^2) \quad (54)$$

Por fim, o Método do Momento de Inércia afirma que a tensão de cisalhamento equivalente τ_a é encontrada através da tensão equivalente de von Mises pela seguinte relação:

$$\tau_a = \frac{\Delta\sigma_{Mises}}{2} = \sqrt{12 I_{cm,t}} \quad (55)$$

5 RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Ao longo da estrutura do relatório foram introduzidos o conceito de plano crítico, os métodos mais usuais para efetuação do cálculo da amplitude de tensão cisalhante no plano de corte contendo uma história de tensão periódica e alguns modelos de fadiga multiaxial, baseados na abordagem das tensões, bastante citados na literatura. Neste capítulo, retirou-se da literatura vinte dados experimentais envolvendo carregamentos de fadiga biaxial do tipo flexão/torção para seis ligas de aço diferente com sinais harmônicos em fase e fora de fase, em frequências síncronas e assíncronas.

Este amplo número de resultados experimentais foi relacionado com o objetivo de comparar as estimativas fornecidas pelo modelo de fadiga multiaxial utilizado, quando a amplitude da tensão de cisalhamento τ_a é calculada pelo Método da Menor Circunferência, Método da Caixa e Método do Momento de Inércia.

Apesar de serem revisados, neste estudo, três modelos de fadiga multiaxial amplamente citados na literatura, o enfoque do trabalho está na comparação entre métodos utilizados para cálculo da amplitude de tensão cisalhante, em critérios de fadiga multiaxial. Desta maneira, dentre os modelos apresentados, optou-se somente pela utilização do modelo de Susmel e Lazzarin, uma vez que trabalhos relativamente recentes apresentaram bons resultados via utilização deste critério (Araújo *et al.*, 2011). Na tabela 5.1 constam os dados experimentais obtidos da literatura.

Para avaliação do modelo de Susmel e Lazzarin, foi convencionado um índice de resistência em fadiga que mede o quanto a situação de carregamento imposta nos testes está distante da condição de falhar (limite de fadiga), que é calibrado pelos parâmetros k e λ . Dessa maneira, para se avaliar a qualidade dos resultados estimados, é definido um índice de erro IE:

$$IE(\%) = \frac{\tau_a(\theta^c, \phi^c) + k \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}(\theta^c, \phi^c) - \lambda}{\lambda} 100$$

Um valor negativo para o índice IE indica que a falha por fadiga não ocorrerá até 2×10^6 ciclos de carregamento, isto é, que a tensão aplicada é menor que o limite de resistência a fadiga do material.

5.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados apresentados na Tabela 1 estão relacionados com testes experimentais realizados por Nishihara & Kawamoto (1945) - testes 1 a 10, Liu (1991) - testes 11 a 13, 19 e 20, Froustey (1987) - testes 14 e 15, e Bernasconi (2008) - testes 16 e 17 para carregamentos senoidais síncronos e assíncronos de flexão/torção. O sub índice a corresponde a amplitude das tensões, σ_x e τ_{xy} são as tensões normal e

cisalhante, respectivamente, λ_{xy} é razão de frequência entre o sinal de τ_{xy} e σ_x , e β_{xy} é a diferença de fase.

Os testes de 1 a 20 descrevem ensaios de flexão e torção em situações no limiar da resistência à fadiga para aço duro, aço 34Cr4, aço GGG60, aço 30NCD16, aço 39NiCrMo3 e aço 25CrMo4, em fase e fora de fase. Os dez primeiros testes apresentam a mesma frequência de sollicitação ($\lambda = 1$), enquanto que os dez últimos atuam sob diferentes frequências. Não há a presença de carregamentos médios nos testes.

As tensões reportadas na Tabela 1 correspondem à máxima combinação de tensões que o corpo de prova pode suportar para um limite de 2×10^6 ciclos de carregamento. Os valores do limite de resistência à fadiga para os casos de flexão alternada (f_{-1}) e torção alternada (t_{-1}) também são apresentados na tabela.

Tabela 1- Dados experimentais para diferentes metais testados sob carregamentos combinados de flexão/torção

Teste	σ_{xa} (MPa)	τ_{xa} (MPa)	λ_{xy}	β_{xy} (°)
Material: Aço Duro; $f_{-1}=319,9$ MPa; $t_{-1}=196,2$ MPa				
1	138,1	167,1	1	0
2	140,4	169,9	1	30
3	145,7	176,3	1	60
4	150,2	181,7	1	90
5	245,3	122,6	1	0
6	249,7	124,8	1	30
7	252,4	126,2	1	60
8	258,0	129,0	1	90
9	299,1	62,8	1	0
10	304,5	63,9	1	90
Material: Aço 34Cr4; $f_{-1}=343,0$ MPa; $t_{-1}=204,0$ MPa				
11	263,0	132,0	4	0
Material: Aço GGG60; $f_{-1}=275,0$ MPa; $t_{-1}=249,0$ MPa				
12	186,0	93,0	0,25	0
13	185,0	93,0	4	0
Material: Aço 30NCD16; $f_{-1}=585,0$ MPa; $t_{-1}=405,0$ MPa				
14	285,0	285,0	0,25	0
15	290,0	290,0	4	0
Material: Aço 39NiCrMo3; $f_{-1}=585,0$ MPa; $t_{-1}=405,0$ MPa				
16	259,5	150,0	2	0
17	266,0	153,6	3	0
Material: Aço 25CrMo4; $f_{-1}=340,0$ MPa; $t_{-1}=228,0$ MPa				
18	210,0	105,0	0,25	0
19	220,0	110,0	2	0
20	242,0	121,0	2	90

A Figura 20 e Figura 21 apresentam o diagrama de fase para os testes 7 e 8, 16 e 20, respectivamente. Os testes 7 e 8 correspondem a histórias de tensões de ensaios flexão e torção fora de fase e síncronos, o teste 16 corresponde a um ensaio flexão e torção em fase e assíncrono, e o teste 20 ao ensaio flexão e torção fora de fase e assíncrono.

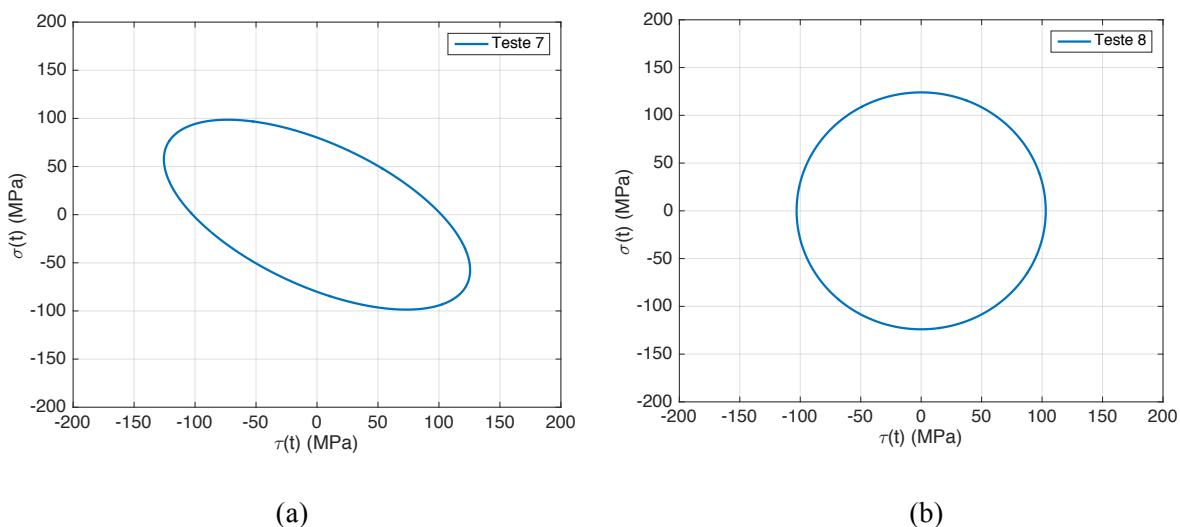


Figura 20 - Projeção das tensões cisalhantes para (a) teste 7 e (b) teste 8

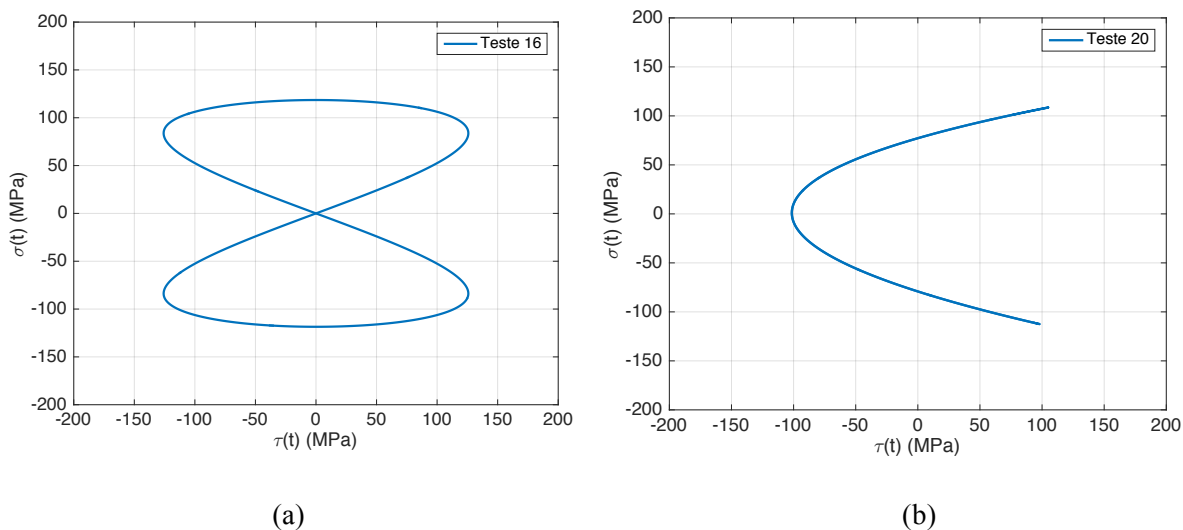


Figura 21 - Projeção das tensões cisalhantes para (a) teste 16 e (b) teste 20

5.3 ANÁLISE CRÍTICA DA DEFINIÇÃO CLÁSSICA DO PLANO CRÍTICO

Diversas abordagens para a definição de plano crítico em fadiga multiaxial foram propostas ao longo dos anos. Uma das primeiras propostas foi a idealizada por Findley (1959), no qual definiu-se o plano crítico como aquele onde é observado o máximo valor da combinação linear entre a amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal. Brown e Miller (1973) apresentaram um modelo baseado na avaliação da fadiga multiaxial de baixo ciclo, no qual consideraram que no plano de máxima deformação cisalhante, onde ocorre nucleação de trinca, identificado como o plano crítico, a deformação normal influencia no

processo de propagação da trinca. McDiarmid (1994) aplicou o conceito de Brown e Miller no campo da fadiga de alto ciclo, onde o plano crítico é determinado pela combinação linear da amplitude da tensão cisalhante e da tensão normal, no plano de máxima amplitude da tensão cisalhante, tanto para as trincas de Caso A, como para trincas de Caso B. Susmel e Lazzarin (2002), considerando que a máxima amplitude de tensão cisalhante geralmente ocorre em dois ou mais planos, definem que o plano escolhido para ser utilizado no modelo da fadiga, o plano crítico, será o plano de máxima tensão cisalhante que apresente a maior tensão normal, $\sigma_{n,max}$, dentre todos os planos de igual valor da máxima tensão cisalhante.

A ideia central que governa a maior parte das abordagens de plano crítico para fadiga de alto ciclo referencia que a trinca se inicia com base na máxima amplitude da tensão cisalhante da história de tensões. Em decorrência disso, para se obter uma avaliação da resistência à fadiga de um material metálico, é necessário identificar um plano do material (plano crítico), onde a amplitude da tensão cisalhante seja máxima.

Socie (2000) afirma que todos os critérios de plano crítico para fadiga de alto ciclo apresentam a mesma forma geral, isto é, levam em consideração os efeitos da amplitude da tensão cisalhante e normal. No geral, todos os modelos são baseados em três diferentes observações: (i) tensões cisalhantes cíclicas causam trincas em materiais dúcteis, (ii) tensões normais de tração diminuem a vida em fadiga do material e (iii) tensões médias compressivas aumentam a vida em fadiga do material.

A definição de plano crítico adotada neste trabalho foi primeiramente proposta por Araújo *et al.* (2011), em que o plano crítico, para histórias de tensões que conduzam a mais de um valor igual para a amplitude da tensão cisalhante, é aquele onde for observado a maior tensão normal entre os mesmos valores da máxima tensão cisalhante τ_a , dentro de uma tolerância específica. A Figura 22 ilustra uma nuvem de pontos representando todos os valores da máxima tensão normal versus a amplitude da tensão cisalhantes em todos os planos, considerando incrementos de 1° nas angulações para o teste n° 15. Neste gráfico, percebe-se que máxima amplitude da tensão cisalhante permanece relativamente constante com valores aproximados de 370 MPa, enquanto a máxima tensão normal sofre uma variação significativa (190 a 240 MPa, aproximadamente).

A Figura 23 apresenta um gráfico com a amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal em torno de uma pequena variação de τ_a ($\tau_a - 0,4$ MPa) para o teste n° 15. Neste teste, a máxima amplitude da tensão cisalhante é $\tau_a = 367,3$ MPa, com uma normal máxima de $\sigma_{n,max} = 221,8$. Pela definição clássica, este seria o plano crítico. Porém, observa-se um outro valor de tensão cisalhante próximo à amplitude máxima, $\tau_a = 366,9$, cuja normal máxima é $\sigma_{n,max} = 227,9$. Comparando-se esses dois pontos, se verifica que, para uma variação de 0,4 MPa entre as amplitudes da tensão cisalhante, há uma variação de 6 MPa entre as tensões normais. Dessa maneira, o plano crítico será o plano contendo a tensão cisalhante de 366,9 MPa e a tensão normal de 227,9 MPa, para uma tolerância de 0,4 MPa em torno de τ_a .

Para avaliação comparativa dos métodos estudados neste projeto, a qual será apresentada no capítulo seguinte, utilizou-se uma tolerância de 0,1 MPa em torno da máxima cisalhante encontrada.

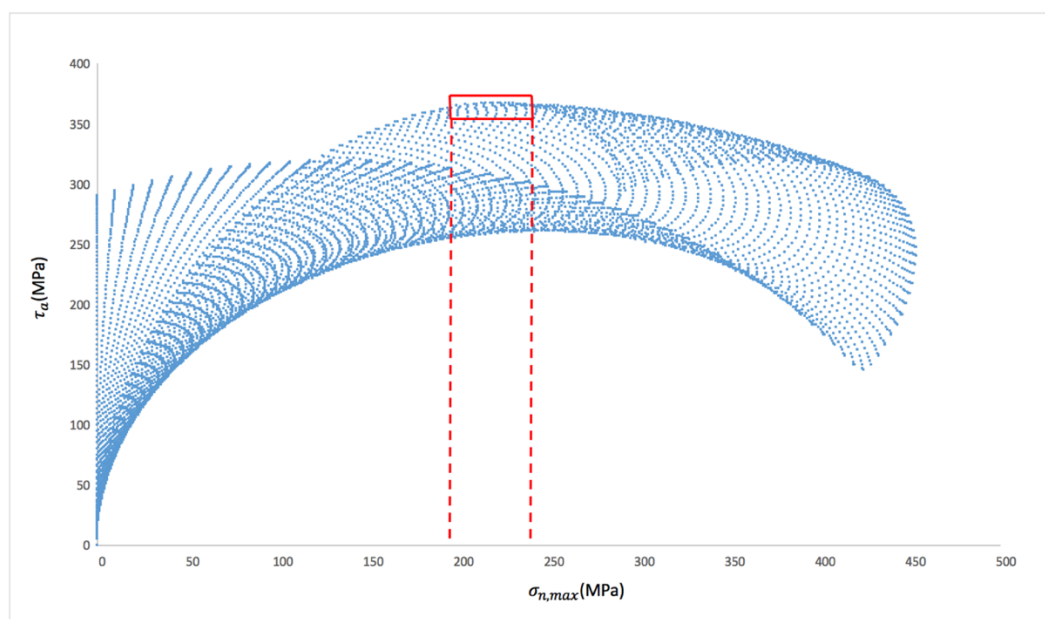


Figura 22 - Nuvem de pontos representando a amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal para teste nº 15.

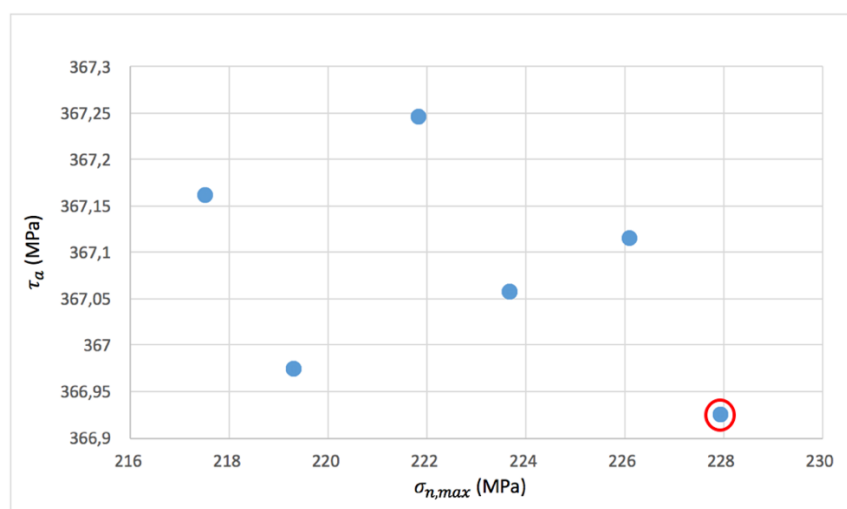


Figura 23 - Amplitude da tensão de cisalhamento versus a máxima tensão normal para teste nº 15 (resultados obtidos pelo MRH e indicação do τ_a do plano crítico circulado em vermelho).

5.4 AVALIAÇÃO COMPARATIVA

O conjunto de testes (Tabela 1) para seis ligas de aços diferentes com experimentos no limite de resistência à fadiga foram utilizados para validação dos métodos da Menor Circunferência Circunscrita (MCC), Método da Caixa (MRH) e Método do Momento de Inércia (MOI) no processo de obtenção da máxima amplitude da tensão de cisalhamento no plano crítico.

Os resultados serão apresentados por meio de gráficos e tabelas, a fim de comparar os métodos MCC, MRH e MOI. As Tabelas 2-4 descrevem os resultados obtidos para os três métodos. Cada tabela

apresenta os resultados obtidos para a amplitude da tensão cisalhante no plano crítico, $\tau_{a,c}$, a tensão normal máxima no plano crítico, $\sigma_{n,c}$, a localização do plano de crítico, θ_c e ϕ_c , e o Índice de Erro (IE).

Os primeiros dez testes (1 a 10) são referentes à testes de flexão e torção, proporcionais e não proporcionais, harmônicas e síncronos realizados por Nishihara e Kawamoto (1945), cujos resultados são encontrados nas Tabelas 2, 3 e 4. É importante ressaltar que todos os testes para os casos síncronos e proporcionais apresentam os mesmos resultados para os três métodos (testes 1, 5 e 9), como esperado.

Tabela 2 - Resultados obtidos pelo MCC para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.

Método da Mínima Circunferência/ <i>Minimum Circumscribed Circle (MCC)</i> Modelo de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	IE (%)
1	180,7	73,9	78	90	-0,3
2	180,7	90,6	170	90	1,4
3	180,5	129,6	174	90	5,3
4	181,7	150,2	0	90	7,9
5	173,4	125,7	158	90	1,8
6	170,4	146,2	158	90	2,7
7	154,5	185,7	157	90	1,0
8	129,0	258,0	0	90	2,7
9	162,2	153,0	147	90	0,1
10	152,2	170,0	136	90	-1,8

Tabela 3 - Resultados obtidos pelo MRH para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.

Método da Caixa/ <i>Maximum Rectangular Hull (MRH)</i> Modelo de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	IE (%)
1	180,7	73,9	78	90	-0,3
2	180,7	90,6	170	90	1,4
3	180,5	129,6	174	90	5,3
4	181,7	150,2	0	90	7,9
5	173,4	125,7	158	90	1,8
6	170,4	146,2	158	90	2,7
7	159,7	164,1	169	59	0,4
8	161,2	164,6	0	53	1,0
9	162,2	153,0	147	90	0,1
10	158,9	162,9	0	133	-0,1

Tabela 4 - Resultados obtidos pelo MOI para os dez primeiros testes envolvendo carregamentos de flexão e torção, síncronos, em fase e fora de fase para aço duro.

Método do Momento de Inércia/ <i>Moment of Inertia (MOI)</i> Modelo de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	IE (%)
1	180,7	73,9	78	90	-0,3
2	180,7	90,6	170	90	1,4
3	186,1	115,5	176	68	6,3
4	194,2	123,4	0	115	10,7
5	173,4	125,7	158	90	1,8
6	173,4	147,4	164	66	4,1
7	186,5	163,3	174	56	11,2
8	196,5	168,9	0	54	16,0
9	162,2	153,0	147	90	0,1
10	174,4	173,4	0	131	7,3

A fim de ilustrar melhor os resultados das amplitudes da tensão cisalhante no plano crítico obtidos por cada método, e os índice de erro (EI) gerados pela implementação do $\tau_{a,c}$ no modelo de Susmel e Lazzarin, foram elaborados os gráficos da Figura 24 e Figura 25, apresentando os valores obtidos para cada teste.

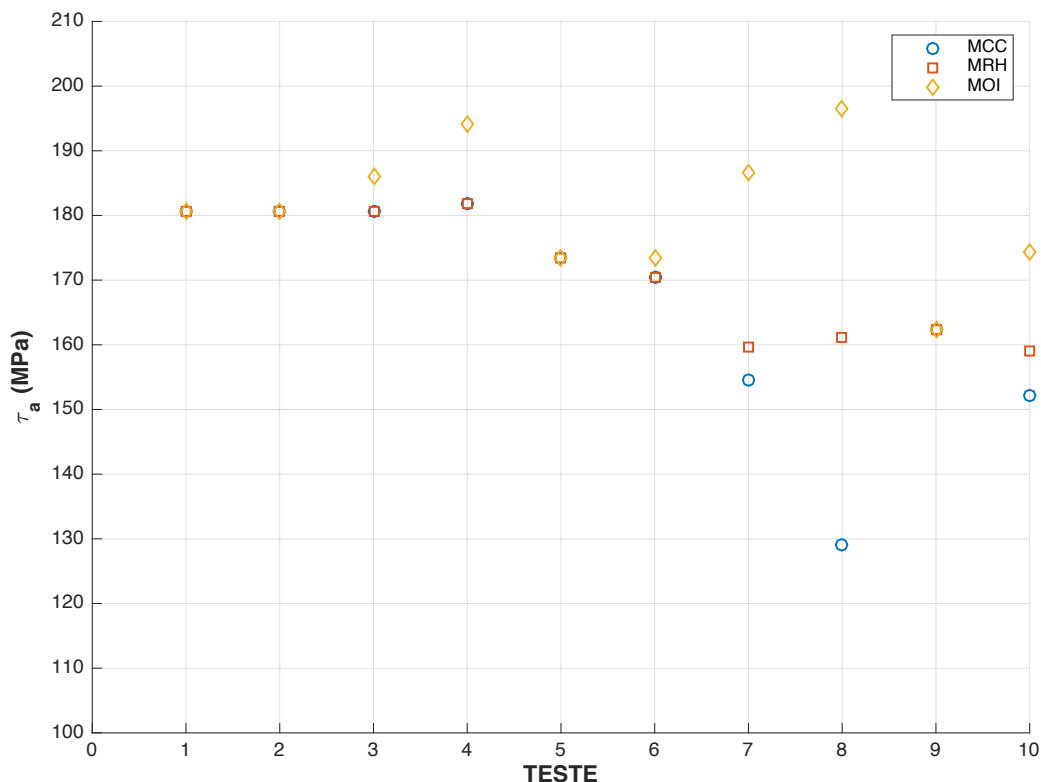


Figura 24 - Valores da tensão cisalhante máxima para carregamentos síncronos ($\lambda = 1$)

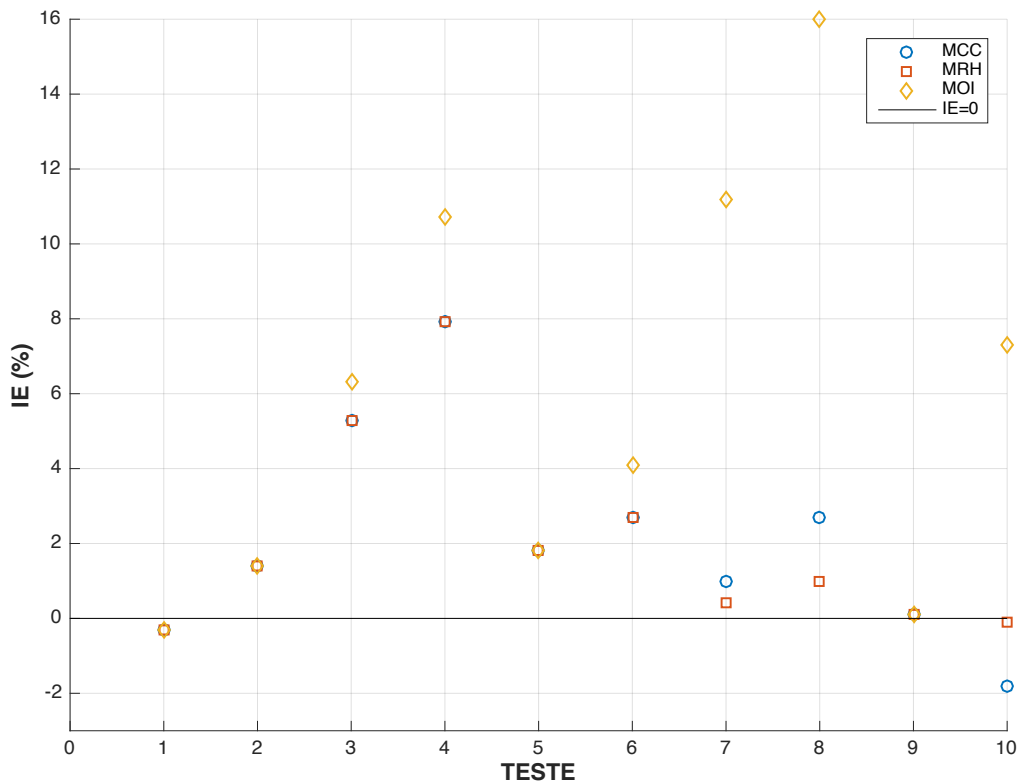


Figura 25 - Índices de erro para carregamentos síncronos ($\lambda = 1$)

O conjunto de experimentos numerados de 11 a 20 na Tabela 1 é caracterizado por 5 ligas de aço submetidas a carregamentos de flexão e torção, assíncronos. Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 5, 6 e 7. É importante observar que nenhum dos resultados para estes testes apresentam estritamente os mesmos valores de amplitude da tensão cisalhante obtidos pelo MCC, MRH e MOI.

Tabela 5 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.

Método da Mínima Circunferência/ <i>Minimum Circumscribed Circle (MCC)</i> Modelo de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	EI (%)
11	179,4	301,1	22	90	2,6
12	126,9	219,4	23	90	28,4
13	126,3	211,9	158	90	25,9
14	303,0	391,9	14	90	10,7
15	319,4	381,5	167	90	12,0
16	178,0	280,3	162	90	15,5
17	203,1	237,7	21	90	12,5
18	143,2	247,7	23	90	6,8
19	137,3	230,1	17	90	2,9
20	136,9	289,0	17	90	13,7

Tabela 6 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.

Método da Caixa/ <i>Maximum Rectangular Hull (MRH)</i> Modelo de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	EI (%)
11	222,3	176,5	0	55	1,6
12	158,2	121,7	0	54	-2,0
13	156,4	124,3	1	55	-1,6
14	353,4	213,8	0	120	4,1
15	367,3	221,8	0	119	7,5
16	215,0	182,5	0	57	7,2
17	225,7	175,0	4	58	8,9
18	178,6	137,5	0	54	-2,1
19	169,2	147,6	0	55	-3,6
20	164,2	173,1	1	57	-1,2

Tabela 7 - Resultados para os testes 11-20 envolvendo carregamentos de flexão e torção, assíncronos, em fase e fora de fase para diferentes tipos de aço.

Método do Momento de Inércia/ <i>Momento of Inertia (MOI)</i> Modelos de Susmel e Lazzarin					
Teste	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	θ_c (°)	ϕ_c (°)	EI (%)
11	187,6	160,0	2	129	-10,6
12	128,6	132,9	1	57	-2,1
13	132,0	113,4	3	129	-8,5
14	326,7	248,4	0	69	1,8
15	296,9	244,0	1	66	-3,9
16	196,9	165,8	178	53	0,1
17	199,4	173,0	179	53	1,8
18	150,7	130,5	178	52	-11,9
19	157,9	136,7	178	52	-8,7
20	168,8	157,0	1	53	-2,3

A fim de ilustrar melhor os resultados das amplitudes da tensão cisalhante no plano crítico obtidos por cada método, e os índice de erro (EI) gerados pela implementação do $\tau_{a,c}$ no modelo de Susmel e Lazzarin, foram elaborados os gráficos da Figura 26 e Figura 27, apresentando os valores obtidos para cada teste.

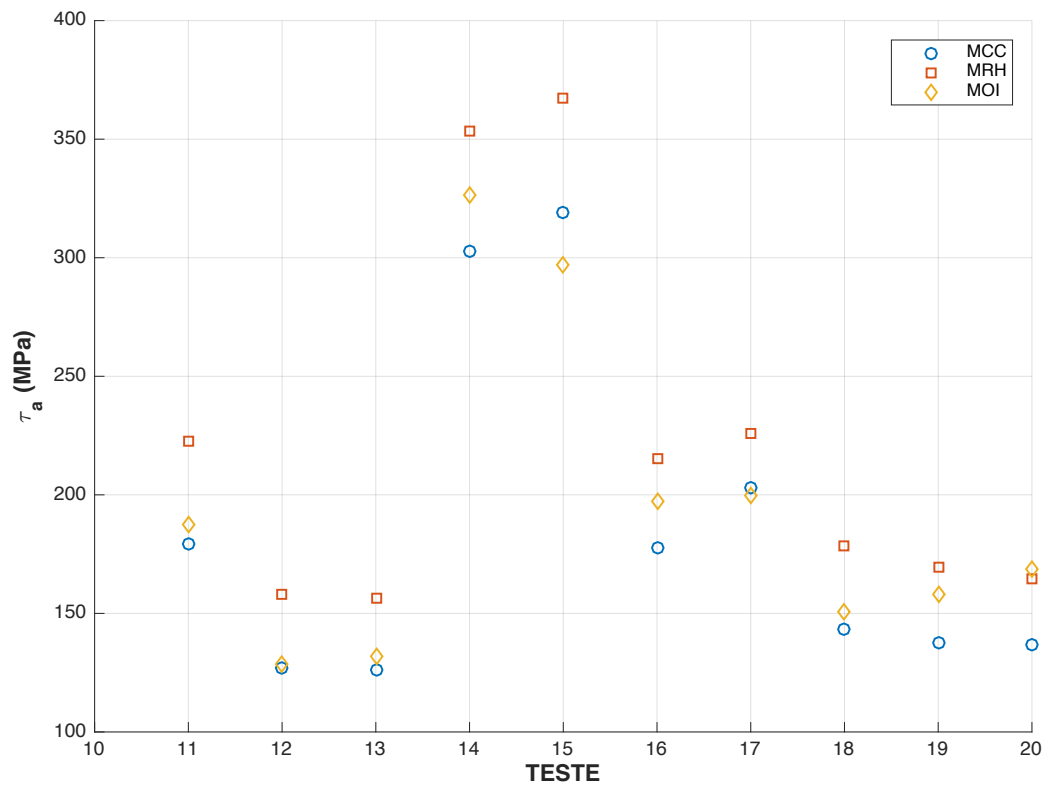


Figura 26 - Valores da tensão cisalhante máxima para carregamentos assíncronos ($\lambda \neq 1$)

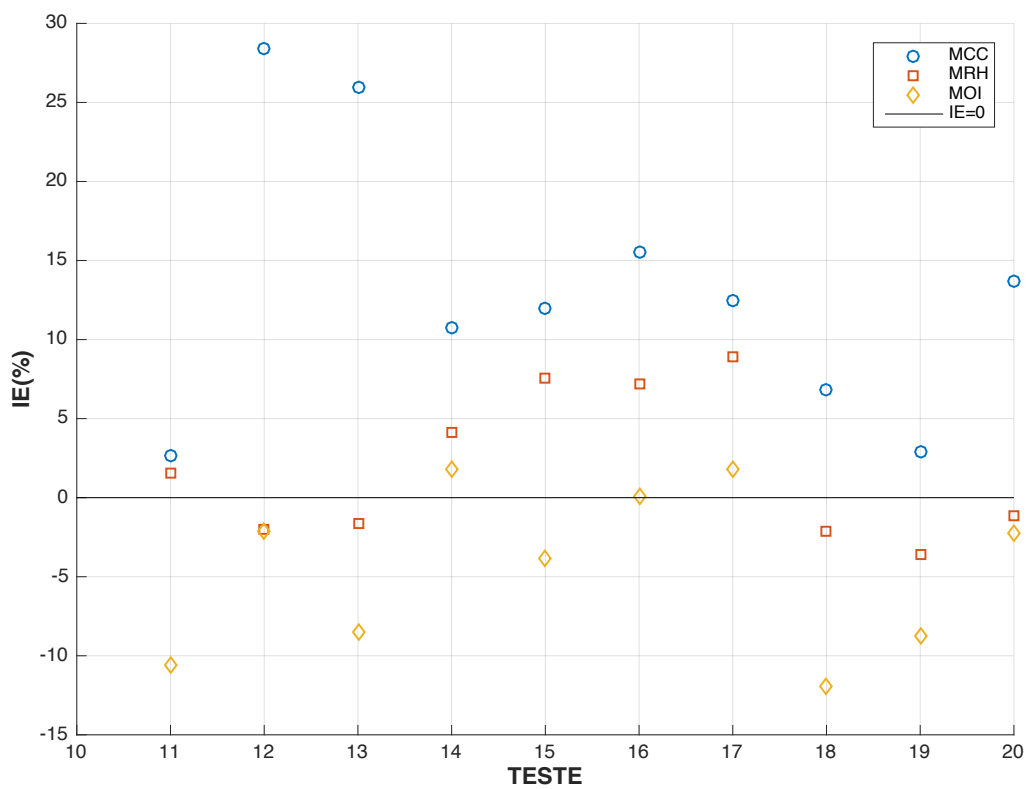


Figura 27 - Índice de erro para carregamentos assíncronos ($\lambda \neq 1$)

5.5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Pode-se observar que para carregamentos síncronos (testes 1 a 10), o MRH apresentou em todos os casos valores de índice de erro (IE) menores ou iguais aos demais métodos. Dessa maneira, permite-se dizer que os valores de amplitude máxima da tensão cisalhante obtidos pelos Método da Caixa, aplicados ao critério de Susmel e Lazzarin (2002), para os testes de carregamentos síncronos, são os que mais se aproximam dos dados experimentais, seguido pelo MCC e, posteriormente, pelo MOI, o qual apresentou uma maior discrepância para os testes com ângulos de fase de 60° e 90°.

Nos carregamentos síncronos e proporcionais, as componentes da tensão cisalhante projetadas nos planos de corte formam segmentos de retas e, nesses casos, a amplitude da tensão cisalhante é idêntica no plano crítico para os três métodos estudados, como pode ser visto nos testes 1, 5 e 9. Já para carregamentos síncronos não proporcionais, e carregamentos assíncronos, há uma maior dispersão de resultados, fornecendo localizações e valores diferentes para o plano crítico e amplitude da tensão cisalhante.

Para os carregamentos assíncronos correspondentes aos testes 11, 12, 13, 18 e 20, o uso do MRH para o cálculo da amplitude máxima da tensão cisalhante, em conjunto com o modelo de Susmel e Lazzarin, forneceu as melhores estimativas de resistência à fadiga. O teste 19 apresentou índice de erro menor ao aplicar-se o MCC e, para os testes 14, 15, 16 e 17, o cômputo de τ_a por meio do MOI gerou os menores erros. Ressalta-se que a maioria dos resultados obtidos pelo modelo multiaxial, com o uso do MOI, se encontra abaixo do limite de resistência a fadiga do material. A Figura 28 ilustra a média dos índices de erros (EI) encontrados pelo referido modelo para cada método implementado, levando-se em consideração os testes com carregamento síncronos (1 a 10) e assíncronos (11 a 20).

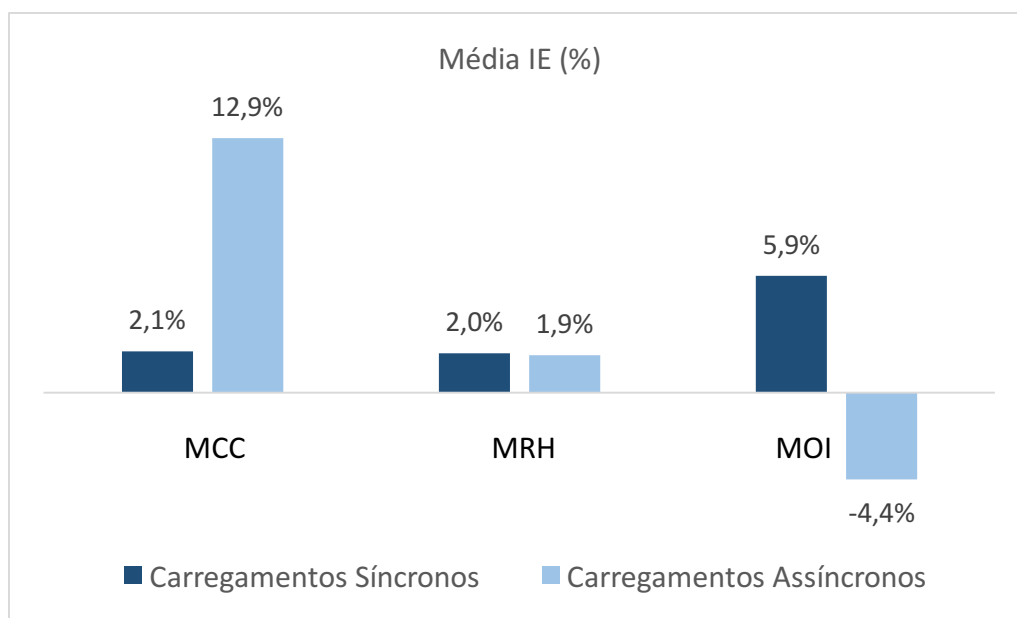


Figura 28 - Média dos índices de erro (IE) obtidas por cada método para carregamentos síncronos e assíncronos

Avaliando-se a Figura 28, percebe-se que o MRH obteve as menores médias de índice de erro para os testes com carregamentos síncronos e assíncronos. Ao comparar as médias do MCC com o MOI, verifica-se um menor erro obtido pelo MCC para testes com carregamentos síncronos, porém um maior índice de erro em relação aos carregamentos assíncronos.

A diferença entre as médias dos índices de erro obtidas pelo MCC para carregamentos síncronos e assíncronos (2,1% e 12,9%, respectivamente), pode estar associada ao fato de o Método da Menor Circunferência não estar capturando o efeito da não proporcionalidade, uma vez que carregamentos assíncronos estão sempre fora de fase.

O Método do Momento de Inércia (MOI), ao contrário do MCC e MRH, não utiliza figuras geométricas para determinação da amplitude da tensão cisalhante, e sim uma abordagem integral, a qual assume que a curva fechada gerada pela história de tensões corresponde a um fio homogêneo de massa unitária. Esta abordagem dificulta a avaliação dos possíveis erros no método. Porém, analisando os resultados obtidos pelo MOI, verifica-se uma maior discrepância de resultados para os testes síncronos, notadamente os testes 4, 7, 8, e 10. Inclusive, pode-se perceber através do cálculo do desvio padrão da média do IE (Figura 29), que o MOI foi o único método a apresentar um desvio padrão maior para carregamentos síncronos, quando comparado ao resultado do desvio para testes com carregamentos assíncronos.

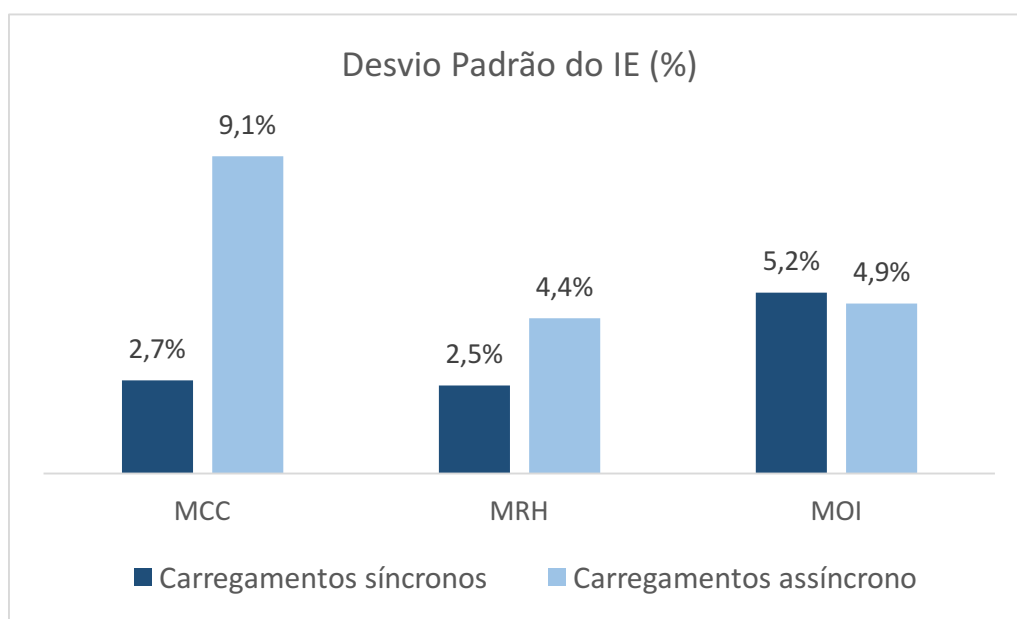


Figura 29 - Desvio padrão da média dos índices de erro (IE) obtidas por cada método para carregamentos síncronos e assíncronos

Importante ressaltar que os testes 4, 7, 8 e 10 apresentam histórias de carregamento com geometrias relativamente simples (elipses e circunferências), indicando uma dificuldade do método em percorrer esse tipo de geometria (Figura 30).

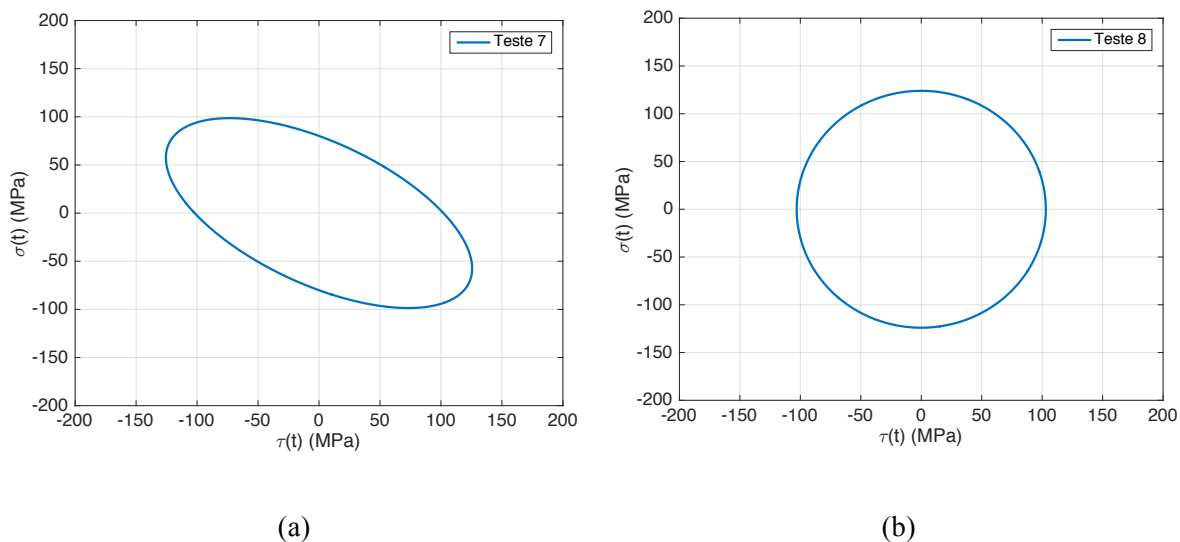


Figura 30 - Projeção das tensões cisalhantes para o (a) teste 7 e (b) teste 8

Em relação ao MRH, dentre os motivos para seu bom desempenho, pode-se destacar sua sensibilidade ao nível de não proporcionalidade do carregamento. Neste método, inicialmente é encontrado um retângulo cujos lados devem ser tangentes à história de tensões cisalhantes projetadas no plano de corte. A captura dos efeitos de não proporcionalidade da história de tensões ocorre perante às sucessivas rotações do retângulo, referenciadas em uma de suas bases. Dessa maneira, são gerados novos retângulos tangentes à projeção das componentes da história de tensões cisalhantes no plano de corte, e procura-se, dentre todos os retângulos, o maior deles. A tensão cisalhante será dada pelo comprimento da metade do valor da diagonal desse retângulo.

O critério de Susmel e Lazzarin, quando aplicado em conjunto com os resultados obtidos do τ_a pelos métodos do MCC, MRH e MOI, apresentou, no geral, índices de erro próximos aos dados experimentais, notadamente quando aplicado ao Método da Caixa. Este modelo considera a tensão cisalhante como principal fator determinante ao dano por fadiga, verificando-se também a influência da tensão normal na resistência a fadiga do material.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma contextualização e definição de conceitos preliminares necessários à caracterização da fadiga multiaxial, além da descrição de modelos de fadiga multiaxial bastante citados na literatura e os principais métodos utilizados para realização do cálculo da máxima amplitude da tensão cisalhante, em critérios de fadiga multiaxial, baseados na abordagem de plano crítico. No geral, o melhor desempenho foi obtido pelo Método da Caixa (MRH), o qual apresentou a média dos índices de erro (IE) mais próxima aos dados experimentais e um menor desvio padrão. O Método do Momento de Inércia (MOI) mostrou-se efetivo para computação da máxima amplitude da tensão cisalhante em carregamentos assíncronos, porém apresentou altos índices de erro para carregamentos síncronos com figuras geométricas simples (elipses e circunferências). O Método da Mínima Circunferência (MCC), ao contrário do MOI, apresenta boas médias de IE para carregamentos síncronos e valores de médias mais discrepantes para carregamentos assíncronos (dificuldade do método em capturar os efeitos de não proporcionalidade do carregamento). Ressalta-se também que o uso de uma pequena tolerância no cálculo da máxima amplitude da tensão cisalhante permite considerar, mais apropriadamente, a influência da tensão normal no processo de dano por fadiga.

Para prosseguimento deste trabalho, sugere-se a realização de ensaios em mais histórias de carregamento, uma vez que a amostra analisada ainda é pequena, assim como a busca por histórias que provoquem valores mais discrepantes entre as amplitudes das tensões cisalhantes encontradas pelos métodos estudados, tornando possível uma melhor análise das limitações de cada método.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Algarte, R. D. (2009). Um Modelo de Vida em Fadiga Multiaxial de Alto Ciclo Baseado em uma Nova Medida para a Amplitude de Tensão Cisalhante. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.TD-001/2009, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 70p.
- Araújo, J. A., Balthazar, Jose Carlos, Vilela, N. R. C. Algoritmo para implementação do critério de plano crítico para fadiga multiaxial. In: 1o Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2000, Natal - RN. 1o CONEM, 2000.
- Araújo, J. A., Dantas A. P., Castro F. C., Mamiya E. N., Ferreira J. L. A., On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. Int J Fatigue 2011;33:1092-100.
- Bernasconi, A., Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications. Int J Fatigue 2002;24:649-657.
- Beugre, O. M. R., (2014). Fadiga multiaxial sob carregamento de amplitude variável: Avaliação do método de Bannantine-Socie. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 57 p.
- Bin Li, Santos, J. L. Freitas M. A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation. Fatigue Fract Engng Mater Struct. 24:165-177. 2000
- Brown, M.W.; Miller, K.J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress strain condition, Proc Inst Mech Engrs, 1973 187:745-755
- Cardoso, R. A., (2015). Problema de propagação de trincas em condições de *fretting*. Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-233/2015, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 81p.
- Carpinteri A.; Spagnoli A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals, Int. J. Fatigue 23:135-145. 2001
- Crossland B., Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, IMechE 138-149. Londres. 1956
- Dang Van K. Le Douaron A.; Lieurade H.P. Multiaxial fatigue limit: a new approach, in: Proc. 6th Int. Conf. Fract. Advances in Fracture Research. Pergamon Press, pp.1879- 1885. Oxford. 1984
- Dantas, A. P. (2009). Proposta Alternativa para Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial, Publicação ENM.TD-003/2009, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 142p.
- Fatemi, A., and Socie, D. F., (1988), A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 11, pp. 149-165.
- Findley, W.N., Coleman, J.J. and Handley, B.C. Proc. Conf. on the Fatigue of metals. The Institution of Mechanical Engineers. pp. 150. Nova Iorque. 1956
- Fuchs, H. O. and Stephens, R. I. Metal Fatigue in Engineering. John Wiley and Sons. Nova Iorque.

1980

Garud, Y.S. Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art. J. Testing and Evaluation, Vol. 9, pp. 165–178. 1981

Giordani, F. A., (2015). Estudo de metodologias para medir a vida em fadiga multiaxial não proporcional. Dissertação de mestrado em Ciências Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, 132p.

Gonçalves, C. A., (2006) Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM-99A/06, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 88p.

Gough H.J. and Pollard H.V. and Clenshaw W.J. Some experiments on the resistance of metals to previous under combined stresses. Aeronautical research council reports. R and M 2522, HMSO. Londres. 1951

Grubisic V., Simbürger A. Fatigue under combined out of fase multiaxial stress, Proc. Int. Conf. Fatigue Testing and Design, Society of Environmental Engineers, 27.1-27.8. Lon- dres. 1976

Haigh, B.P., (1923), The Thermodynamic Theory of Mechanical Fatigue and Hysteresis in Metals, Rep. British Association for the Advancement of Science, pp. 358-368.

Krempf E., The Influence of State of Stress on Low Cycle Fatigue of Structural Materials ASTM STP 549, American Society for Testing and Materials. 1974, Philadelphia, PA.

Lanza, G., (1886), Strength of shaft subjected to both twisting and bending' J. Eng. Mat. Tech., Trans ASME, Vol. 8, pp. 130-144.

Lee, S.B. Evaluation of Theories on Multiaxial Fatigue with Discriminating Specimen, Ph.D. thesis, Stanford University, Stanford, 1980

Malcher, L., (2006). Um modelo para determinação da resistência à fadiga multiaxial para carregamentos de flexão e torção combinados, fora de fase e com amplitude constante. Com base no critério do invariante do tensor. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação: ENM.DM-105A/06, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília DF, 105p.

Mason, W., (1917), Alternating Stress Experiments, Proc. IMechE, Feb., pp. 121-196.

Matake T. An explanation on fatigue limit under combined stress. Bull. JSME 20:257-263. 1977

McDiarmid, D. L. A Shear Stress Based Critical-Plane Criterion of Multiaxial Fatigue Failure for Design and Life Prediction. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. Vol. 17, No 12, pp. 1475-1485. 1994

Meggiolaro M. A., Castro J. T. P, The moment of inertia method to calculate equivalent ranges in non-proportional tension-torsion histories. Journal of Materials Research and Technology 2015;4(3):229-234.

Nishiara, T. and Kawamoto, M., (1941), The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Twisting, Memoirs, College of Engineering, Kyoto Imp. University, Japan, vol. 10, pp. 177-201.

P. J. E. Forsyth. Proceedings of the crack propagation symposium. 1962.

Papadopoulos, I. V.; Davoli, P.; Gorla, C.; Filippini, M., and Bernasconi, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals, *Int. J. Fatigue*. Vol. 19, No. 3, pp. 219–235. 1997

Petrucci, G., A critical assessment of methods for the determination of shear stress amplitude in multiaxial fatigue criteria belonging to critical plane class. *Int J Fatigue* 2015;74:119-131.

Pinheiro, P.A.B. (2012). Análise crítica de modelos de fadiga de plano crítico e proposta de uma nova medida de amplitude da tensão cisalhante. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação ENM.DM-70A/04, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília DF, XXp.

Sines, G., (1955), *Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses*, NACA Technical Note 3495, Washington, USA.

Socie, D. F., (1987), *Multiaxial Fatigue Damage Models*, *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME, Vol. 109, Oct. pp. 293-298.

Susmel L., and Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, *Blackwell Science Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct* 25, 63-78. 2002

Wu, H., Meggiolaro, M. A., Castro J. T. P., Application of the Moment of Inertia Method to the Critical-Plane Approach. *International Conference on Multiaxial Fatigue & Fracture*, Seville, June 1st-3rd, 2016.

You B, Lee S. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals, *International Journal Fatigue* 1996; 18(4):235-244.

ANEXOS

		Pág.
Anexo I	Valores limites para o modelo de Susmel e Lazzarin	55
Anexo I	Rotinas Matlab	57

Nas Tabelas I.1 e I.2 estão os valores da amplitude da tensão cisalhante τ_a , a tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ e ρ (Equação 21) obtidos através dos métodos da Menor Circunferência Circunscrita e o Método da Caixa no plano crítico, respectivamente. O valor de ρ_{lim} (Equação 22) também é apresentado para cada teste.

Tabela I. 1 - Resultados de ρ e ρ_{lim} encontrados para o MCC

Minimum Circumscribed Circle				
Teste	ρ_{lim}	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	ρ
1	4,4124	180,74	73,94	0,4910
2	4,4124	180,74	90,58	0,5012
3	4,4124	180,49	129,58	0,7179
4	4,4124	181,7	150,2	0,8266
5	4,4124	173,39	125,71	0,7250
6	4,4124	170,42	146,15	0,8576
7	4,4124	154,51	185,74	1,2021
8	4,4124	129	258	2,0000
9	4,4124	162,16	153,01	0,9436
10	4,4124	152,16	170,01	1,1173
11	4,0291	179,35	301,07	1,6787
12	1,2332	126,85	219,41	1,7297*
13	1,2332	126,26	211,88	1,6781*
14	2,6000	302,96	391,93	1,2937
15	2,6000	319,38	381,49	1,1945
16	2,6000	177,97	280,31	1,5750
17	2,6000	203,14	237,72	1,1702
18	2,9310	143,22	247,72	1,7296
19	2,9310	137,3	230,12	1,6760
20	2,9310	151,03	253,13	1,6760

Tabela I. 2 - Resultados de ρ e ρ_{lim} encontrados para o MRH

Maximum Rectangular Hull				
Teste	ρ_{lim}	$\tau_{a,c}$ (MPa)	$\sigma_{n,c}$ (MPa)	ρ
1	4,4124	180,74	73,94	0,4910
2	4,4124	180,74	90,58	0,5012
3	4,4124	180,49	129,58	0,7179
4	4,4124	181,7	150,2	0,8266
5	4,4124	173,39	125,71	0,7250
6	4,4124	170,42	146,15	0,8576
7	4,4124	159,65	164,1	1,0279
8	4,4124	161,22	164,56	1,0207
9	4,4124	162,16	153,01	0,9436
10	4,4124	158,91	162,87	1,0249
11	4,0291	222,29	176,48	0,7939
12	1,2332	158,22	121,74	0,7694
13	1,2332	156,42	124,33	0,7948
14	2,6000	353,43	213,75	0,6048
15	2,6000	367,25	221,84	0,6041
16	2,6000	215,01	182,52	0,8489
17	2,6000	225,72	175	0,7753
18	2,9310	178,63	137,45	0,7695
19	2,9310	169,19	147,62	0,8725
20	2,9310	164,16	173,13	1,0546

ANEXO II: Rotinas Matlab

```
%% ROTINA PRINCIPAL

%% GERA A HISTÓRIA DE CARREGAMENTO PARA CADA TESTE E BUSCA OS
MÉTODOS PARA CÁLCULO DA MÁXIMA CISALHANTE

passo=1*pi/180;

%Teste
sigmaxa=140.4;
tauxya=169.9;
lam=1;
angdefase=30;

tensao_nor_max=0;
fase=angdefase*pi/180;
periodo=2*pi;

if lam<1
    periodo=2*pi/lam;
end

%Tensor tensão
T = [sigmaxa tauxya 0; tauxya 0 0; 0 0 0];

%Variação dos planos
i=1;
for theta=0:passo:pi-passo
    for phi=0:passo:pi-passo

        %Vetores unitários dos planos
        n = [sin(phi)*cos(theta); sin(phi)*sin(theta); cos(phi)];
        ea = [-sin(theta); cos(theta); 0];
        eb = [-cos(phi)*cos(theta); -cos(phi)*sin(theta); sin(phi)];

        ii=1;

        for t = 0:pi/32:periodo

            tensor_c(1,1) = T(1,1)*sin(t);
            tensor_c(1,2) = T(1,2)*sin(t*lam - fase);
            tensor_c(1,3) = T(1,3)*sin(t);
            tensor_c(2,2) = T(2,2)*sin(t*lam - fase);
            tensor_c(2,3) = T(2,3)*sin(t);
            tensor_c(3,3) = T(3,3)*sin(t) ;

            tensor_c=[ tensor_c(1,1)    tensor_c(1,2)
tensor_c(1,3) ;
                    tensor_c(1,2)    tensor_c(2,2)    tensor_c(2,3) ;
                    tensor_c(1,3)    tensor_c(2,3)    tensor_c(3,3)
];

            %Cálculo do vetor tensão
            vet_t = tensor_c*n;
            vet_escalar_normal=vet_t'*n;
            vet_normal=vet_t'*n*n;
```

```

        vetor_cis(:,:,ii)=vet_t - vet_normal; %armazena toda
        cisalhante em cada intervalo de tempo

        if vet_escalar_normal > tensao_nor_max
            tensao_nor_max=vet_escalar_normal;
        end

        %Projeção do vetor cisalhante no plano ea x eb
        vetcis_ea(ii,1)=vetor_cis(:,:,ii) '*ea; %TA --> produto
escalar
        vetcis_eb(ii,1)=vetor_cis(:,:,ii) '*eb; %TB --> produto
escalar
        ii=ii+1;
    end

    TA=vetcis_ea;
    TB=vetcis_eb;

    [diag,angulo,a1,a2]=mrhfunc_vini(TA,TB); %Chama a função
para realizar o cálculo da máxima cisalhante (no caso, está chamando
a função para cálculo da máxima cisalhante pelo MRH)

    Diagonal(i,1)=diag;
    Theta(i,1)=theta;
    Phi(i,1)=phi;
    Normal(i,1)=tensao_nor_max;

    matrix(i,:)=[diag tensao_nor_max theta phi];
    tensao_nor_max=0;
    i=i+1;

end
end

Taa=max(matrix(:,1));
[x,y]=find(matrix(:,1) >= Taa-0.1); %Tolerância de 0.1 MPa
H=matrix(x,:); %Pega todas as LINHAS da matriz que contém máx
diagonal
max_normal=max(matrix(x,2)); %Máximo valor da normal
[w,z]=find(matrix(x,2)==max_normal,1); %Pega as tensões normais das
máx diagonais

Amplitude=H(w,:); % Máxima Cisalhante com maior normal
Ta=H(w,1); %Máxima cisalhante na maior normal
normal=H(w,2);
theta=H(w,3); %Plano de máxima cisalhante
phi=H(w,4); %Plano de máxima cisalhante
tet=theta*180/pi;
ph=phi*180/pi;
table(Ta, normal, tet, ph)

```

```

%% CÁLCULO DA MÁXIMA CISALHANTE PELO MÉTODO DA CAIXA (MRH)

%TA = vetor tensão cisalhante na direção ea;
%TB = vetor tensão cisalhante na direção ea;
l=1;
for rot = 0:pi/20:pi-pi/20

% Matriz de rotação
S12=(cos(rot)*TA)-(sin(rot)*TB);
S21=(sin(rot)*TA)+(cos(rot)*TB);

% Metades dos lados
a1=1/2*[max(S12)-min(S12)];
a2=1/2*[max(S21)-min(S21)]; %

%Amplitude
Tal=sqrt(a1^2+a2^2);
S12min=min(S12);
S21min=min(S21);

matriz(l,:)=[a1 a2 rot Tal S12min S21min];

l=l+1;
end

Diag_max=max(matriz(:,4)); %Máxima diagonal
[p,q]=find(matriz(:,4)==Diag_max,1); %Linhas que contém a diagonal
L=matriz(p,:); %Pega todas as LINHAS da matriz que contém máxima
diagonal
Ta_MRH=max(Diag_max); %Redundante

```

```

%% CÁLCULO DA MÁXIMA CISALHANTE PELO MÉTODO DO MOMENTO DE INÉRCIA
(MOI)

i=1;
L=length(TA);

while i < L
    %Cálculo do comprimento infinitesimal do perímetro e somas
    dTA(i,1)=TA(i+1,1)-TA(i,1);
    dTB(i,1)=TB(i+1,1)-TB(i,1);
    dp1(i,1)=sqrt((dTA(i,1)^2)+(dTB(i,1)^2)); %derivada do perímetro

    %Para tensões principais na centroide
    TAc(i,1) = (TA(i+1,1)+TA(i,1))/2; %Centroide de TA
    TBc(i,1) = (TB(i+1,1)+TB(i,1))/2; %Centroide de TB

    TAm1(i,1)=TAc(i,1)*dp1(i,1); %Tensão principal TA
    TBm1(i,1)=TBc(i,1)*dp1(i,1); %Tensão principal TB

    %Para momento polar de inércia (PMOI)
    Io1(i,1)=(dp1(i,1).^2/12).*dp1(i,1); %haste
    Io2(i,1)=TAc(i,1).^2.*dp1(i,1); %TAc
    Io3(i,1)=TBc(i,1).^2.*dp1(i,1); %TBc

    Io(i,1)=Io1(i,1)+Io2(i,1)+Io3(i,1);

    i=i+1;
end

TAm=sum(TAm1);
TBm=sum(TBm1);
Iorigem=sum(Io);

%Cálculo das tensões médias na centroide do perímetro em cada plano
tauAm=(1/sum(dp1))*TAm; %tauAm
tauBm=(1/sum(dp1))*TBm; %tauBm

%Cálculo do Momento de Inércia Origem
Iorigem = (1/sum(dp1))*Iorigem;

%Teorema dos eixos paralelos
I = Iorigem - (tauAm^2 + tauBm^2);

tensao_mises=sqrt(3*I);
Ta_MOI=max(tensao_mises); %Máxima amplitude da tensão cisalhante

```

