



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**OTIMIZAÇÃO GENÉTICA DE VIGAS DE
PAREDES FINAS COMPÓSITAS: UMA
ABORDAGEM FENOMENOLÓGICA**

Por,

Gabriel Sales Candido Souza

Brasília, 5 de dezembro de 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

OTIMIZAÇÃO GENÉTICA DE VIGAS DE PAREDES FINAS COMPÓSITAS: UMA ABORDAGEM FENOMENOLÓGICA

Por,

Gabriel Sales Candido Souza

Relatório submetido como requisito para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque (Orientador) _____

Prof. MSc. Gino Bertollucci Colherinhas (Coorientador) _____

Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes _____

Prof. Dr. Flamínio Levy Neto _____

Brasília 5 de dezembro de 2017

*À Elis e tantos outros que, apesar de breve jornada,
muito iluminaram nossas vidas.*

Agradecimentos

Antes de tudo e todos gostaria de agradecer à minha bisavó, Maria de Lurdes. O que você fez por todos nós é imensurável. Sem a vida que levaste, sem sua visão de mundo, sem seu amor por todos nós e, enfim, sem você toda nossa família teria tomado rumos diferentes. Se hoje pude fazer o que fiz, chegar onde cheguei e sonhar com onde posso chegar tudo isso eu devo à você, bisa.

À minha família, por todo o suporte, amor, carinho e compreensão desde sempre. Aos meus pais, Mara e Alberto, por simplesmente existirem. Eu devo tudo à vocês e jamais serei capaz de colocar em palavras o que ambos representam pra mim. Sem o apoio de vocês nada disso seria possível.

Às minhas avós, Martha e Vastir, gostaria de agradecê-las. Vó Martha, você é como minha segunda mãe. Meu muito obrigado pelo acolhimento durante esses anos de UnB e pela compreensão durante meus erros da juventude. Você é eternamente responsável pelo ser humano que me tornei e que quero me tornar. Obrigado por ser essa pessoa incrível que sempre me apoiou e que nunca reclamou quando eu ficava fora virando noites estudando, trabalhando, projetando... Você é demais! Vó Vastir, você é sensacional. Sua humildade, bondade e afeto são simplesmente contagiantes. Minhas sinceras desculpas por não poder me fazer presente naqueles Domingos em que a família se reunia. O simples fato de poder contar com sua existência me tranquiliza. Passamos por momentos difíceis mas estamos por aqui! Eu amo vocês.

Ao meu irmão, Tiê. Por me aturar durante todos estes anos e ser um irmão mais velho como nenhum outro. Você é uma inspiração pra mim, *hermano*. Ver você estudando feito louco pra atingir seus objetivos e obtendo sucesso foi uma experiência que me marcou muito na vida. Eu não preciso me estender e falar o quanto você é incrível... Deixa pra Presidência da República.

Às minhas irmãs, Gabriela e Maitê, gostaria de agradecer por todo o amor e companheirismo. Maitê, quando você crescer e entender o que lhe escrevo quero que saiba que você foi uma bebê muito lindinha! Gabriela, mil desculpas por não poder jogar muito Mario Kart com você quando me pedia. A propósito, você também foi uma neném muito bonitinha. Meu irmão e minhas irmãs, saibam de uma coisa: eu sempre vou amar vocês!

Ao meu professor orientador, Éder Lima de Albuquerque, por abraçar desde o

início a ideia maluca que foi este Projeto de Graduação. Você é uma fonte de inspiração enorme pra mim. Sua tranquilidade, bondade, compreensão e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Você não tem ideia do quão importante foi ter te encontrado para orientar o meu PG. Muito obrigado mesmo. Sem você a concepção deste trabalho jamais seria possível e, com certeza, ele teria ficado apenas no plano das ideias. Mais uma vez: **muito obrigado!**

Ao Gino Bertollucci Colherinhas, co-orientador deste projeto e meu grande amigo. Se não fosse por você a própria ideia de se fazer este PG jamais teria surgido. Caso não se recorde, eu mesmo te lembro: foi naquele dia em que estávamos virando uma noite no Bloco G enquanto você desenvolvia sua Dissertação e eu trabalhava no projeto da Draco. Sem aquela conversa, nada disso teria acontecido. Valeu demais!

À equipe Draco Volans de SAE AeroDesign por me proporcionar a melhor experiência durante meus anos de UnB. A grandeza desta equipe não dá pra quantificar. Todo o aprendizado e crescimento que tive nos 3 anos em que estive por lá me levaram a querer fazer este trabalho. Muito mais do que isso! Se hoje eu tenho plena convicção de que quero ser um engenheiro mecânico eu devo isto à Draco. As saudades são eternas e por favor, usem e abusem desse PG! Em especial, eu gostaria de agradecer aos meus companheiros de 2016. João, Lucas, Pantu, Bê, Léo e Franco, vocês são os melhores. Compartilhar o sonho de ser campeão daquela competição e termos entrado juntos nessa com sangue no olho foi um experiência sem igual. Vocês tem contribuição única no meu crescimento como engenheiro e como pessoa e queria agradecer à vocês. Ou Draco, ou nada! E antes que me esqueça: VAI ESTRUTA!

Aos meus amigos Ciro, Gi, Sobral, Natasha e Tarcila. Por toda a compreensão, amizade, conforto, momentos vividos... Tudo! Vocês são muito especiais pra mim e fazem parte dos irmãos e irmãs que a vida me deu. Obrigado é pouco. Sei que este 2017 começou com o pé esquerdo... Todos estávamos esperançosos pela chegada daquela a quem dedico este trabalho, nossa sobrinha. Juntos conseguimos seguir em frente, sempre com alegria. Gi, você é uma mulher **absurdamente forte**. Tenho uma admiração especial por você, saiba disso. Tarsasha e Narcila, a alegria e união de vocês é uma coisa que nunca vi antes, é simplesmente raro. Sobral, mesmo longe quero que você me leve de novo no Bar do Delegado tomar um caldo de polvo. Aquilo ali simplesmente não existe. Abraço, meu velho! Ciro: muito obrigado, cara. Tu és um dos grandes responsáveis pelo resultado desse PG. Mas isso não é o mais importante. Você é o cara! Um dia a gente ainda faz um pós-doc no mesmo lugar pra dividir um AP e montar a nossa república.

À galera da Cúpula do Trovão, agradeço demais vocês. Rommel, Senna, PD, Druds, Zé e Ludovico vocês são demais. Quero que saibam também que muito desse trabalho foi desenvolvido admirando a música de vocês. Que a Pollares e a San Lunes decolem e sejam tudo aquilo que merecem ser. Rommel, queria deixar um agradecimento especial à você. Por todo o companheirismo, conversas e bom, por tudo.

À minha companheira de todas as horas, Luiza. Você é a melhor coisa que me aconteceu nos últimos tempos. Você também é responsável por este PG ter sido possível. Queria agradecer a você por todo o amor, companheirismo, cumplicidade e afeto. Amo tu, flor!

Ao meu mais antigo e duradouro amigo, Thiago Scheiner. Cara, mil desculpas por furar umas 50 vezes por semana contigo, não fiz por mal! Agradeço por todos os anos de amizade e pela compreensão infinita. Tu é um cara que merece o mundo! E grava isso: tu vai ter, mano! Você é uma das pessoas mais incríveis desse mundo!

Ao Fernando Valente, meu eterno chefe. Você foi e é uma inspiração pra mim. Se hoje eu sei o que é fibra carbono eu devo a você. Serei eternamente grato pelo acolhimento e investimento em mim durante meu período na Abaris. Se algum dia eu for chefe de alguém, vou ser exatamente como você (se é que isso é possível). Muitíssimo obrigado, *mestre!*

Ao professor Théo Allan Darn Zapata por despertar em mim a paixão pelo formalismo e pela beleza única da Matemática. Suas aulas foram muito importantes para mim e até hoje cai uma lágrima quando lembro do Teorema de Stokes Generalizado. Belíssimo!

Ao professor Volnei Tita da Escola de Engenharia de São Carlos da USP pelos conselhos, mesmo que pontuais, para a concepção da segunda etapa deste trabalho. Aquela apontada de dedo que você deu quando conversamos me abriu a cabeça para muitas coisas, obrigado!

Aos membros da banca examinadora por acreditarem no potencial e no sucesso deste trabalho. Por sempre se disponibilizarem a tirar minhas dúvidas e serem responsáveis pelo engrandecimento do projeto. Em especial ao professor Flamínio Levy Neto por me presentear com o livro “Comportamento de Dutos de Aço com Reparos Compósitos Híbridos”.

Aos técnicos e amigos do SG-09. Marcão, Seu Arthur, Pereira e Tarsis, aprendi demais com vocês! Obrigado, vocês são responsáveis diretos pela minha formação como engenheiro.

A todos os funcionários da Universidade deixo também meus agradecimentos. Se alguém pode desenvolver qualquer coisa que seja por aqui, este alguém deve à vocês.

Enfim, à todos aqueles que de alguma forma são responsáveis diretos ou indiretos pela minha caminhada: obrigado!

*“The whole of our infrastructure,
from sewers to power supplies and communication,
everything that wasn’t invented by God is invented by an engineer.”
(Prince Philip, Duke of Edinburgh)*

Resumo

Longarinas são os principais membros estruturais da asa de um avião. Elas devem ser capazes de suportar todos os esforços distribuídos ao longo da asa, alguns dos pesos concentrados da própria aeronave e outros carregamentos que porventura sejam transmitidos às mesmas. Considerando apenas carregamentos estáticos, utilizando o modelo desenvolvido para vigas de paredes finas compósitas de célula única e um critério de falha baseado em fenômenos físicos, uma otimização fundamentada em algoritmos evolutivos é proposta. Utilizando uma ferramenta de algoritmos genéticos, alguns parâmetros estruturais são avaliados para se atingir *designs* ótimos para a longarina de seção transversal circular e fechada. Restrições dimensionais e estruturais são consideradas visando uma função objetivo que minimize a massa da estrutura e maximize a rigidez do laminado. Comparam-se os resultados encontrados com aqueles obtidos anteriormente para a mesma estrutura em estudo e obtém-se redução de aproximadamente 33% em sua massa final.

Palavras-chaves: materiais compósitos. vigas de paredes finas. otimização multi-objetivo. algoritmos genéticos. longarina da asa.

Abstract

Spars are the main structural members of an aircraft wing. They should support all the distributed loads along it and some of the concentrated weights of the aircraft. Considering only static loads, using the structural mechanical modelling developed for single-cell thin-walled composite beams and a failure criteria based on physical phenomena, an evolutionary optimization is proposed. Using a Genetic Algorithm (GA) toolbox previously developed, some structural parameters are evaluated to reach optimal circular cross-section spar designs. Dimensional and structural project constraints are considered aiming a multi-objective fitness function that minimizes the spar weight and maximizes the laminate stiffness. We compare the achieved with previously obtained results for the same structure under study obtaining a mass reduction of approximately 33%.

Key-words: composite materials. thin-walled beams. multi-objective optimization. genetic algorithms. wing spar.

Lista de Figuras

1.1.1	Proposta de classificação hierárquica de compósitos sintéticos e naturais. Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]	2
1.1.2	Comparativo entre resistência e rigidez específicas de materiais compósitos e metais. Fonte: Jones [2]	3
1.1.3	Importância relativa das necessidades de baixo custo e desempenho estrutural em componentes compósitos utilizados em diferentes ramos da indústria. Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]	5
1.1.4	Custos, taxas de produção e desempenhos estruturais relativos de componentes obtidos em compósitos empregados na construção civil e na área biomédica. Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]	5
1.1.5	Boeing 787 Dreamliner. Fonte: Boeing [4]	6
1.1.6	Northrop Grumman B-2 Spirit. Fonte: Wikipedia [5]	7
1.1.7	Corveta Visby-class da marinha sueca. Fonte: Pinterest [6]	7
1.1.8	Iate comercial Mirabella-V. Fonte: LiveYachting [7]	8
1.1.9	Prótese de perna para atletismo. Fonte: Sapo Desporto [8]	8
2.2.1	Tensões em um elemento	13
2.2.2	Deformação angular de engenharia e tensorial	14
2.3.1	Sistema de coordenadas principal de uma lâmina ortotrópica	16
2.3.2	Sistema de coordenadas principal $(1, 2)$ e natural (x, y)	18
2.4.1	Seção do laminado antes (ABCD) e após (A'B'C'D') a deformação. Fonte: adaptado de Daniel e Ishai [37]	21
2.4.2	Deformações e curvaturas do plano médio do laminado	22
2.4.3	Representação da variação das deformações e tensões ao longo da espessura de um laminado multidirecional	23
2.4.4	Sistema de numeração das camadas de um laminado	23
2.4.5	Resultantes de tensão e momento por unidade de comprimento. Fonte: adaptado de Jones [2]	24
2.5.1	Alguns padrões de tecelagem mais comuns. Fonte: Price et. al. [38]	29
2.5.2	Direções <i>fill</i> e <i>warp</i> em um rolo de tecido compósito. Fonte: Price et. al. [38]	29

2.5.3	Vista frontal de uma célula unitária da estrutura tecida	30
3.2.1	Linha média da seção transversal e sistemas coordenados	33
3.2.2	Viga de parede fina compósita com várias células. Fonte: Vasiliev e Morozov [36]	34
3.3.1	Viga de parede fina genérica e sistemas de coordenadas local e global. Fonte: Zhang e Wang [9]	34
3.3.2	Empenamento axial em uma viga de parede fina sob torção livre. Fonte: adaptado de Vasiliev e Morozov [36]	35
3.4.1	Forças e momentos por unidade de comprimento na parede da viga	42
3.5.1	Desenho esquemático para a determinação da tensão de cisalhamento σ_{sz} em um ponto genérico da seção transversal da viga	46
4.3.1	Fratura de uma lâmina UD sujeita à compressão transversal e cisalhamento intraplanar	50
4.4.1	Círculo de Mohr para compressão uniaxial e cisalhamento transversal efetivo	51
4.4.2	Envelopes de falha da matriz para uma lâmina de fibra de vidro-epóxi típica sob compressão transversal e cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	53
4.4.3	Resistência à tração transversal como função do número de camadas empilhadas em um laminado utilizando os modelos de Dvorak [54] baseados nos dados experimentais coletados por Wang [55]. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	55
4.4.4	Idealização da geometria da trinca proposta por Dvorak [54]. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	55
4.4.5	Modos de deslocamento de uma trinca superficial. Fonte: adaptado de Narayanasamy, Prasad e Dowling [56]	56
4.4.6	Geometria de uma trinca contida em uma lâmina espessa sujeita à tração e ao cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	58
4.4.7	Geometria de uma trinca através de uma lâmina fina sujeita à tração e ao cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	58
4.4.8	Geometria das trincas nos laminados UD para carregamentos de tração transversal e cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]	59
4.4.9	Região com dobras conhecida como <i>kink band</i> (esq.) e ondulações locais representantes do desalinhamento das fibras (dir.)	61
5.2.1	Exemplo que ilustra o problema de minimização de f , onde x_1 é o minimizador global e \bar{v} é o valor ótimo. Fonte: adaptado de Izmailov e Solodov [68]	68
5.3.1	Definição dos componentes de um cromossomo. Fonte: Colherinhas [1]	70
5.6.1	Método da roleta. Fonte: adaptado de Colherinhas [1]	72
5.6.2	Seleção por torneio. Fonte: Colherinhas [1]	73
5.6.3	Cruzamento em ponto único (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]	73

5.6.4	Cruzamento em dois pontos (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]	74
5.6.5	Cruzamento em pontos aleatórios (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]	74
5.6.6	<i>Blend crossover</i> (BLX- α). Fonte: adaptado de Colherinhas [1]	75
5.6.7	Mutação em codificação binária (ponto único). Fonte: Colherinhas [1]	75
6.1.1	Sistema de coordenadas adotado	77
6.2.1	Aeronave DV-GEVX 1	78
6.3.1	Diagrama V-n de manobra e de rajada	79
6.4.1	Distribuição de sustentação na semi-envergadura alar na situação crítica de voo	81
6.4.2	Distribuição de arrasto na semi-envergadura alar na situação crítica de voo	82
6.4.3	Diagramas de esforço cortante para a situação crítica de voo	82
6.4.4	Diagramas de momentos fletor e torsor para a situação crítica de voo	83
6.4.5	Esquemático da meia-asa para o pouso 1 toque (dimensões em milímetros)	83
6.4.6	Distribuição de sustentação na situação crítica de pouso	84
6.4.7	Distribuição de arrasto na situação crítica de pouso	85
6.4.8	Diagramas de esforço cortante para a situação crítica de pouso	85
6.4.9	Diagramas de momentos fletor e torsor para a situação crítica de pouso	86
7.1.1	Geometria da viga explorada no primeiro estudo de caso	87
7.1.2	Estudo de convergência da malha das simulações	94
7.1.3	Comparativos entre o deslocamento transversal na extremidade livre da viga para ângulo θ das fibras variável	95
7.1.4	Comparativos entre o deslocamento transversal na extremidade livre da viga para espessuras t_1 e t_2 das camadas variáveis	96
7.2.1	Envelopes da falha e dados experimentais do WWFE para o compósito unidirecional de E-glass/LY556	97
7.2.2	Envelopes da falha e dados experimentais do WWFE para a lâmina unidirecional de E-glass/MY750 com fibras à $\theta = 0^\circ$ sob estado biaxial de tensão	98
7.2.3	Resistência à compressão como função do ângulo θ para laminados AS4-3502 cruzados angulados	99
7.3.1	Valor da função objetivo ao longo das iterações	101
7.3.2	Valor da função objetivo ao longo das iterações do AG	104
7.3.3	Deslocamentos na longarina ótima durante o voo crítico	105
7.3.4	Distribuição de tensões e fator de segurança ao longo da espessura na seção crítica da longarina ótima durante a situação de voo crítico	106
7.3.5	Deslocamentos na longarina ótima durante o pouso crítico	107
7.3.6	Distribuição de tensões e fator de segurança ao longo da espessura na seção crítica da longarina ótima durante a situação de pouso	108

A.0.1	Fluxograma representativo do algoritmo desenvolvido	120
A.0.1	Deslocamento da seção como um corpo rígido	122
A.0.2	Vetores unitários associados aos sistemas global e local de coordenadas . .	123

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Economia específica média em algumas estruturas. Fonte: Jones [2] . . .	5
Tabela 2 – Notações tensorial e contraída para tensões e deformações	13
Tabela 3 – Notação e propriedades de interesse para lâminas ortotrópicas.	16
Tabela 4 – Propriedades típicas de compósitos PRF com reforços unidirecionais. Fonte: adaptado de Vasiliev e Morozov [36]	20
Tabela 5 – Propriedades típicas de lâminas reforçadas com tecidos em matriz epó- xica. Fonte: Vasiliev e Morozov [36]	31
Tabela 6 – Propriedades caracterizadoras do critério LaRC03	64
Tabela 7 – Posição da roda do TPP na semi-envergadura da asa	78
Tabela 8 – Parâmetros do DV-GEVX 1 para cálculo dos esforços na asa	81
Tabela 9 – Esforços provenientes do pouso 1 toque	84
Tabela 10 – Coeficientes aerodinâmicos considerados durante o pouso	84
Tabela 11 – Propriedades da lâmina de carbono-epóxi.	88
Tabela 12 – Comparativo entre os resultados obtidos e os documentados em [9] . . .	88
Tabela 13 – Comparativo entre os deslocamentos axiais obtidos e os documentados em [9] após correção	89
Tabela 14 – Comparativo entre os deslocamentos máximos obtidos e os documen- tados em [9] para o laminado “anti-simétrico” após correção	90
Tabela 15 – Comparativo entre os deslocamentos angulares provocados pela carga axial obtidos e os documentados em [9] após correção	90
Tabela 16 – Desvio relativo entre os resultados do trabalho [9] e os reproduzidos neste texto	90
Tabela 17 – Parâmetros de rigidez para a parede da viga circular com diferentes sequências de empilhamentos	92
Tabela 18 – Respostas lineares e angulares da extremidade livre da viga	93
Tabela 19 – Parâmetros da otimização de validação do AG	101
Tabela 20 – Valores ótimos encontrados para a viga	102

Tabela 21 – Fator de segurança mínimo e ângulo de torção máximo da longarina ótima	105
Tabela 22 – Parâmetros do LaRC03 para o material da longarina	107

Lista de abreviaturas e siglas

MPRF	Matriz Polimérica Reforçada por Fibras
TCL	Teoria Clássica dos Laminados
WWFE	World Wide Failure Exercise
IC	Inteligência Computacional
PRF	Plástico Reforçado com Fibras
FRP	Fiber Reinforced Polymer
FPF	First Ply Failure
LPF	Last Ply Failure
AE	Algoritmo Evolutivo
AG	Algoritmo Genético
GA	Genetic Algorithm
AR	Razão de Aspecto
CP	Corpo de Prova
1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
UD	Unidirecional
BD	Bidirecional
L	Longitudinal
T	Transversal
Sym	Simétrica

Lista de símbolos

Símbolos Latinos

Q	Matriz de Rigidez Reduzida
T	Matriz de Transformação
R	Matriz de Reuter
\bar{Q}	Matriz de Rigidez Reduzida Transformada
S	Matriz de Flexibilidade Reduzida
\bar{S}	Matriz de Flexibilidade Reduzida Transformada
u	Deslocamento na direção x
v	Deslocamento na direção y
w	Deslocamento na direção z
A	Matriz de Rigidez de Extensão
B	Matriz de Rigidez de Acoplamento
D	Matriz de Rigidez de Flexão
L	Força de Sustentação
D	Força de Arrasto
C_l	Coefficiente de Sustentação
C_d	Coefficiente de Arrasto
C_m	Coefficiente de Momento
S	Área da Asa
X^T	Resistência à tração longitudinal
Y^T	Resistência à tração transversal

X^C	Resistência à compressão longitudinal
Y^C	Resistência à compressão transversal
S_{12}	Resistência ao cisalhamento no plano principal
E_1	Módulo de elasticidade longitudinal
E_2	Módulo de elasticidade transversal
G_{12}	Módulo de cisalhamento no plano principal
E_a	Módulo de elasticidade aparente
$OXYZ$	Sistema de coordenadas global
nsz	Sistema de coordenadas local
N_x	Força normal por unidade de comprimento na direção x
N_y	Força normal por unidade de comprimento na direção y
N_{xy}	Força cortante por unidade de comprimento
M_x	Momento fletor no plano (y, z) por unidade de comprimento
M_y	Momento fletor no plano (x, z) por unidade de comprimento
M_{xy}	Momento torsor na direção z por unidade de comprimento
$\underline{R}(s)$	Vetor raio
$r(s)$	Componente normal do vetor raio
$q(s)$	Componente tangencial do vetor raio
U	Deslocamento da viga na direção X
V	Deslocamento da viga na direção Y
W	Deslocamento da viga na direção Z
\bar{u}	Deslocamento normal da superfície média na direção n
\bar{v}	Deslocamento tangencial da superfície média na direção s
\bar{w}	Deslocamento axial da superfície média na direção z
\bar{w}_ω	Empenamento axial da superfície média na direção z
K_X	Curvatura global da viga devido à flexão no plano (Y, Z)
K_Y	Curvatura global da viga devido à flexão no plano (X, Z)

K_{XY}	Taxa de torção da viga
K_{ω}	Curvatura global da viga devido à torção
N_{sz}	Fluxo de cisalhamento
\mathbf{k}	Matriz de rigidez da viga no sistema local
\mathbf{H}	Matriz de rigidez da viga em sua forma híbrida no sistema local
F_Z	Esforço normal atuante na viga
M_X, M_Y	Momentos fletores atuantes na viga
M_{ω}	Bi-momento atuante na viga
\mathbf{E}	Matriz de rigidez da viga no sistema global
FI	Índice de Falha
a_0	Comprimento da trinca idealizada
G	Taxa de dissipação de energia
g	Razão de tenacidades
h	Espessura total do laminado
t	Espessura da lâmina
z_k	Coordenadas das lâminas ao longo da espessura
n_i	Fator de Impacto
n_g	Fator de Carga
FS	Fator de Segurança

Símbolos Gregos

ν_{12}	Coeficiente de Poisson Maior
ν_{21}	Coeficiente de Poisson Menor
θ	Ângulo entre a direção x e a direção longitudinal 1
σ_x	Tensão normal na direção x
σ_y	Tensão normal na direção y
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano (x, y)

ε_x	Deformação linear na direção x
ε_y	Deformação linear na direção y
γ_{xy}	Deformação angular no plano (x, y)
ε_x^0	Deformação linear do plano médio devido à tração
ε_y^0	Deformação linear do plano médio devido à compressão
γ_{xy}^0	Deformação angular do plano médio devido ao cisalhamento no plano (x, y)
κ_x	Curvatura do plano médio devido à flexão no plano (x, z)
κ_y	Curvatura do plano médio devido à flexão no plano (y, z)
κ_{xy}	Curvatura do plano médio devido à torção na direção z
α	Ângulo entre as direções X e s da parede da viga
Φ	Deslocamento angular da viga em torno do eixo Z
β	Perímetro da seção transversal
Ω	Área da seção transversal
$\psi(s)$	Função de Torção
$\omega(s)$	Função de Empenamento
Γ	Energia de deformação por unidade de comprimento
α, α_0	Ângulo do plano de fratura
η	Coefficiente de fricção interna
ρ	Massa específica

Subscritos

I, II	Modos de solitação da trinca
eff	Tensões efetivas
<i>is</i>	<i>In situ</i>
F	Fibra
M	Matriz

obj	Objetivo
diz	Dizimação
ind	Individuo
ger	Geração
tpp	Trem de Pouso Principal
trap	Trapezoidal
max	Máximo
T	Transversal
L	Longitudinal

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização e Motivação	1
1.2	Revisão Bibliográfica	9
1.3	Objetivos	10
1.4	Metodologia	10
1.5	Organização do Trabalho	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	Introdução	12
2.2	Relações Tensão-Deformação para Materiais Anisotrópicos	12
2.3	Análise Macromecânica de uma Lâmina	15
2.3.1	Comportamento elástico de uma lâmina	17
2.4	Teoria Clássica dos Laminados	20
2.4.1	Relações deformação-deslocamento	21
2.4.2	Resultantes de tensão e momento por unidade de comprimento	23
2.4.3	Equação constitutiva de laminados multidirecionais	25
2.4.4	Acoplamentos nos níveis da lâmina e do laminado	26
2.4.5	Relação deformação-carregamento	27
2.4.6	Relação tensão-carregamento	28
2.5	Mecânica de Lâminas com Reforço Bidirecional	28
2.5.1	Módulo de elasticidade aparente	30
3	VIGAS DE PAREDES FINAS COMPÓSITAS	32
3.1	Considerações Gerais	32
3.2	Classificação e Geometria	33
3.3	Cinemática de Vigas de Parede Fina	33
3.3.1	Hipóteses de trabalho	35
3.3.2	Deslocamentos da viga no sistema de coordenadas global	35
3.3.3	Deslocamentos de pontos do plano médio no sistema de coordenadas local	36

3.3.4	Deslocamentos de pontos genéricos da seção transversal no sistema de coordenadas local	37
3.3.5	Deformações de pontos genéricos da seção transversal no sistema de coordenadas local	38
3.4	Equações Constitutivas no Sistema de Coordenadas Local	42
3.5	Equações Constitutivas no Sistema de Coordenadas Global	45
	4 CRITÉRIOS DE FALHA PARA MATERIAIS COMPÓSITOS	47
4.1	Introdução	47
4.2	Modos de Falha	48
4.3	Critério de Falha de Hashin	48
4.3.1	Melhorias para o modo de compressão da matriz	49
4.4	Critério de Falha LaRC03	50
4.4.1	Falha da matriz sob compressão transversal	50
4.4.1.1	Cálculo dos coeficientes de influência e da resistência ao cisalhamento transversal	52
4.4.1.2	Determinação do ângulo do plano de fratura	53
4.4.2	Falha da matriz sob tração transversal	54
4.4.2.1	Efeito <i>in situ</i>	54
4.4.2.2	Mecânica da fratura de uma lâmina trincada	54
4.4.2.3	Falha de lâminas espessas empilhadas	57
4.4.2.4	Falha de lâminas finas empilhadas	58
4.4.2.5	Falha de laminados unidirecionais	59
4.4.3	Falha da fibra sob tração	60
4.4.4	Falha da fibra sob compressão	60
4.4.5	Falha da matriz sob compressão biaxial	62
4.4.6	Sumário do critério LaRC03	63
4.4.6.1	Falha da matriz	63
4.4.6.2	Falha das fibras	63
4.4.6.3	Parâmetros do critério	63
4.5	Critério de Falha de Tsai-Wu	65
	5 OTIMIZAÇÃO GENÉTICA	67
5.1	Introdução	67
5.2	Otimização	67
5.3	Algoritmos genéticos	69
5.4	População inicial	70
5.5	Função objetivo	71
5.6	Operadores genéticos	71
5.6.1	Seleção	71
5.6.1.1	Seleção proporcional – roleta (<i>Roulette-Wheel</i>)	71
5.6.1.2	Seleção por torneio	72

5.6.2	Elitismo	72
5.6.3	Dizimação	73
5.6.4	Cruzamento	73
5.6.4.1	<i>Blend crossover</i> (BLX- α)	74
5.6.5	Mutação	75
5.6.5.1	Mutação <i>creep</i> uniforme	76
6 ESTUDO DE CASO: LONGARINA DA ASA DE UMA AERONAVE RÁDIO-CONTROLADA		77
6.1	Introdução	77
6.2	Configuração da Aeronave	78
6.3	Fatores de Projeto	78
6.4	Análise de Cargas na Asa e Esforços Internos	79
6.4.1	Situação crítica de voo	79
6.4.2	Situação crítica de pouso	83
7 RESULTADOS E DISCUSSÃO		87
7.1	Viga Circular de Parede Fina	87
7.1.1	Validação inicial	88
7.1.2	Comparação de modelos	90
7.1.3	Comparativo com MEF e análise de convergência de malha	93
7.1.4	Caso unicamada	94
7.1.5	Caso bicamada	95
7.2	Crítérios de Falha	97
7.2.1	Compósito UD de E- <i>glass</i> /LY556 epóxi	97
7.2.2	Lâmina UD de E- <i>glass</i> /MY750 epóxi	98
7.2.3	Laminados cruzados angulados	99
7.3	Otimização via Algoritmos Genéticos	100
7.3.1	Validação do AG	100
7.3.2	Otimização da longarina da asa	102
7.3.2.1	Função objetivo	103
7.3.2.2	Resultados	103
7.3.2.3	Análise dos resultados	105
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS		109
8.1	Conclusões	109
8.2	Propostas de Trabalhos Futuros	110
REFERÊNCIAS		112

APÊNDICES	119
APÊNDICE A – FUNCIONAMENTO DO ALGORÍTMO DE VI- GAS DESENVOLVIDO	120
ANEXOS	121
ANEXO A – CAMPO DE DESLOCAMENTOS	122
ANEXO B – MATRIZES DE RIGIDEZ	124

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Motivação

O estudo de cascas e placas finas é de importância ímpar para a indústria aeronáutica. Devido à necessidade da concepção de estruturas extremamente leves, projetistas buscam cada vez mais por materiais que apresentem altas resistência e rigidez específicas.

Dentre estes, cabe-se dar destaque aos materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras (MPRF). Dando enfoque para as estruturas de parede fina, muitos trabalhos tem sido desenvolvidos na área. Métodos analíticos com hipóteses simplificadoras ganharam considerável espaço por terem implementação relativamente fácil, diminuindo drasticamente o tempo e custo gastos para a realização de análises. Além disso, o alto desenvolvimento intelectual e tecnológico das últimas décadas fez com que a engenharia buscasse cada vez mais por soluções ótimas para os problemas enfrentados. A democratização do acesso aos computadores e o aumento da sua capacidade de processamento convergiu para o desenvolvimento de algoritmos baseados em Inteligência Computacional (IC) [1].

Desta forma, a busca pelo ponto ótimo é realizada sem a necessidade da fabricação de incontáveis corpos de prova (CP) para se testar as inúmeras configurações possíveis. Devido ao alto grau de anisotropia associado aos materiais compósitos, é natural que se alie a utilização de Inteligência Computacional para a obtenção de estruturas ótimas sem a necessidade de um grande número de ensaios e testes em estruturas protótipo.

Há décadas, para a indústria substituir os materiais metálicos, os quais são amplamente usados, testados e estudados, não configura uma tarefa simples, necessitando-se de justificativas muito bem fundamentadas. Razões semelhantes às dos compósitos atraíram a indústria aeroespacial para a utilização do titânio em larga escala nos anos 50 [2] e muitos problemas foram detectados após o gasto de milhões de dólares em pesquisa, desenvolvimento e ferramentas. Isto levou à um sentimento de “euforia controlada” que resultou em uma abordagem melhor balanceada quanto à utilização dos materiais compósitos [2].

Materiais compósitos são aqueles que possuem dois ou mais constituintes distintos em sua estrutura possuindo uma matriz e uma fase de reforço. Esta mesclagem, normal-

mente, se dá em níveis meso e macroscópico (i.e.¹ identificável a olho nú) e dá origem a um outro material com propriedades únicas e desejáveis. A combinação macro representa um excelente contraponto às ligas metálicas, que são combinações em nível atômico e, essencialmente, atuam como um único material para todos os efeitos [2]. Dessa forma, ao imaginar um compósito, deve-se pensar em um novo material que será constituído de, usualmente, dois ingredientes que contribuem **isoladamente** para as propriedades finais. Algumas destas últimas que podem ser aprimoradas são: resistência; rigidez; isolamento acústico; peso; condutividade térmica; isolamento térmico; vida à fadiga; resistência à corrosão; dentre outras [2]. Por ser um tema muito amplo e de larga abrangência, realizam-se classificações a fim de discriminar cada um dos tipos existentes de compósitos e como são realizadas as análises nestes.

Em geral, existem quatro tipos de materiais compósitos:

- Fibrosos: consistem de fibras embebidas por uma matriz;
- Laminados: constituídos por várias camadas de diferentes materiais;
- Particulados: semelhante aos fibrosos com a diferença de possuírem, ao invés de fibras, partículas imersas em uma matriz;
- Combinações entre os outros tipos citados.

A Figura 1.1.1 apresenta a classificação dos compósitos sintéticos e naturais [3].

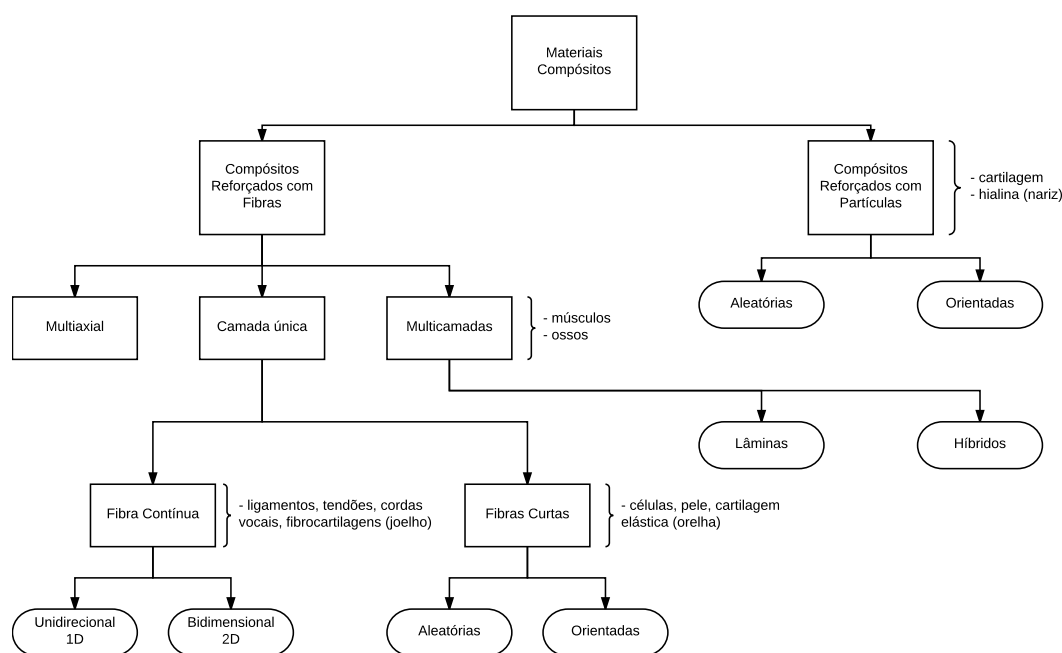


Figura 1.1.1 – Proposta de classificação hierárquica de compósitos sintéticos e naturais.
Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]

¹ Do latim *id est*, que significa “isto é”.

O escopo do presente texto está aliado aos materiais compósitos sintéticos de matriz polimérica reforçados por fibras (Plástico Reforçado com Fibras – PRF). Nestes, os principais reforços fibrosos amplamente difundidos em nível comercial são as fibras de vidro-E, carbono e aramida [3]. Mais especificamente, os materiais compósitos avançados são aqueles que atingem altíssimas resistência e rigidez específicas (i.e. resistência e rigidez divididas pela massa específica); termo este que se difundiu após a utilização em considerável escala das fibras de carbono pela indústria aeroespacial.

Por sua vez, os compósitos avançados do tipo MPRF representam a maior revolução técnica desde a turbina à jato. Estes materiais podem ser produzidos para atingirem resistência e rigidez semelhantes à do aço com apenas 70% do peso do último. Para o caso do alumínio, atingem-se propriedades semelhantes com apenas 60% do peso [2]. A Figura 1.1.2 traz um comparativo entre alguns materiais compósitos com os principais metais usados pela indústria.

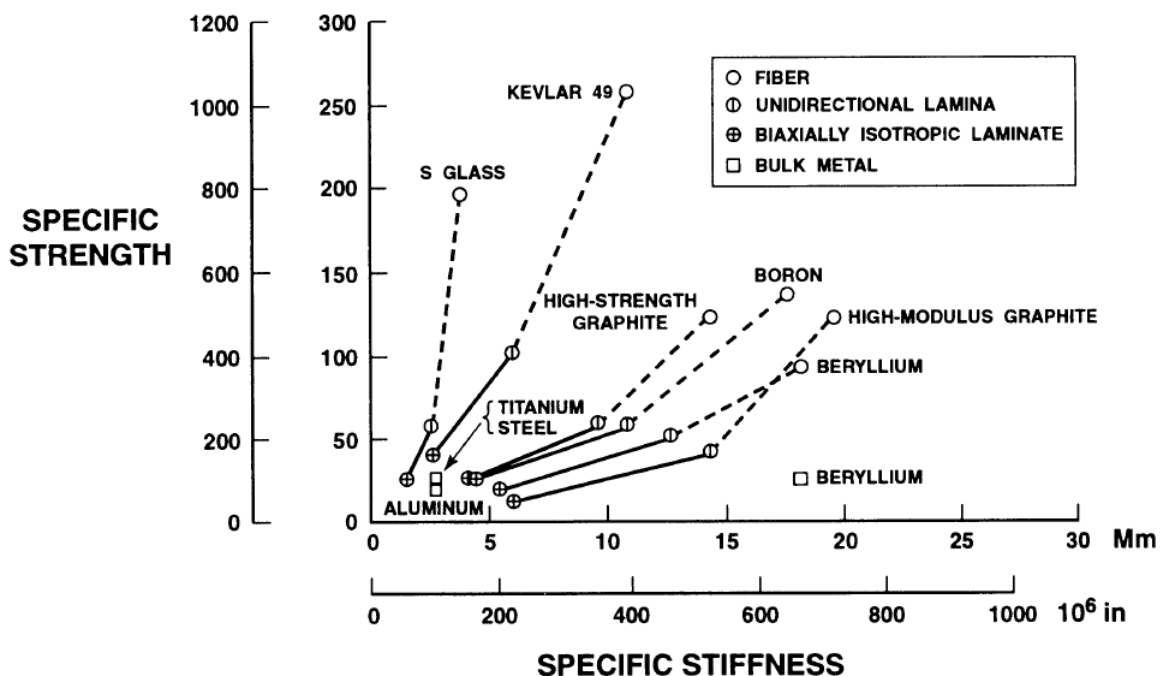


Figura 1.1.2 – Comparativo entre resistência e rigidez específicas de materiais compósitos e metais. Fonte: Jones [2]

Na Figura 1.1.2, os círculos vazios representam as propriedades das fibras analisadas isoladamente e, por isso, apresentam os maiores valores para ambas as características. Círculos com uma linha no meio são lâminas com reforços unidirecionais (UD), ou seja, levam em conta os efeitos da matriz nas características contrastadas. Além disso, existem os dados representados pelos círculos com duas linhas perpendiculares. Estes, por sua vez, representam as resistência e rigidez específicas para um compósito laminado biaxialmente isotrópico uma vez que lâminas não são utilizadas separadamente para a confecção de estruturas. Note a diminuição das propriedades à medida que se aumenta o “grau de aplicabilidade” do material. O laminado biaxialmente isotrópico é colocado apenas para servir como base de comparação de uma estrutura compósita com outra, ou entre algum

metal. E, por fim, tem-se os metais representados pelos quadrados.

Os metais, por serem isotrópicos e estarem representados por um valor médio de referência, necessitam cada de apenas um ponto no gráfico para serem caracterizados. Diferentemente, os compósitos, por apresentarem grande dependência com a orientação do carregamento, precisam de vários pontos. As linhas pontilhadas representam como a variação da fração volumétrica das fibras (V_f) influencia nas propriedades do compósito e, por isso, conectam as características das fibras isoladas com as das lâminas unidirecionais correspondentes. Em contrapartida, as linhas cheias representam a variabilidade das características de laminados, que encontram-se presentes na faixa de compósitos biaxialmente isotrópicos (e.g.² lâminas com reforço bidirecional) até as da lâmina unidirecional correspondente. Esta última região é a área de relevância à título de projeto e aplicações industriais. Desta maneira, são essas as zonas avaliadas quando um comparativo com os metais é realizado. A escolha do material a ser selecionado para uma aplicação cabe ao engenheiro e dependerá intimamente das peculiaridades do projeto. Mesmo para as combinações mais pobres, a Figura 1.1.2 evidencia que as propriedades específicas obtidas para os compósitos são da mesma ordem de grandeza dos metais. A principal diferença está na gama de possibilidades de escolha destas características. Enquanto os metais encontram-se concentrados em uma mesma zona no gráfico (com exceção do berílio), os compósitos preenchem largas regiões do quadrante. Assim, o projetista possui diversas opções para seleção de materiais que possam atender às suas restrições de dimensionamento.

Além disso, para a implementação na indústria ser vantajosa, uma análise de custo deve ser realizada. Deve-se verificar a superioridade das propriedades dos compósitos aliado a um retorno financeiro, em determinado período de tempo, que seja maior do que o obtido quando se usa um metal para confeccionar uma mesma estrutura em específico. Este tipo de análise foge ao escopo deste trabalho. Entretanto, cabe a informação que, de modo geral, os custos relacionados à manufatura de estruturas utilizando compósitos costumam possuir ordem de grandeza semelhante a dos materiais metálicos [2]. Esta é uma característica de projeto e demanda uma decisão a ser tomada pelo projetista envolvendo também políticas de empresas e, em alguns casos, de governo. As Figuras 1.1.3 e 1.1.4 trazem gráficos comparativos entre os custos, as taxas de produção e os desempenhos estruturais relativos de compósitos em suas respectivas áreas de aplicação.

A grande vantagem que os materiais compósitos trouxeram consigo foi a de redução do peso das estruturas. Devido à sua alta rigidez e resistência específicas, uma quantidade menor de material pode ser utilizada para suportar às mesmas condições de solicitação. Assim, muitos ramos da indústria dedicaram e dedicam-se a substituir parcial e/ou completamente estruturas metálicas por suas correspondentes fabricadas utilizando um material compósito. Isto se torna ainda mais crítico para o caso de estruturas sensíveis ao seu peso próprio como no caso dos aviões militares, por exemplo. A Tabela 1 traz informações acerca do quanto se obtém de economia em dólares americanos ao se reduzir

² Do latim *exempli gratia*, que significa “por exemplo”.

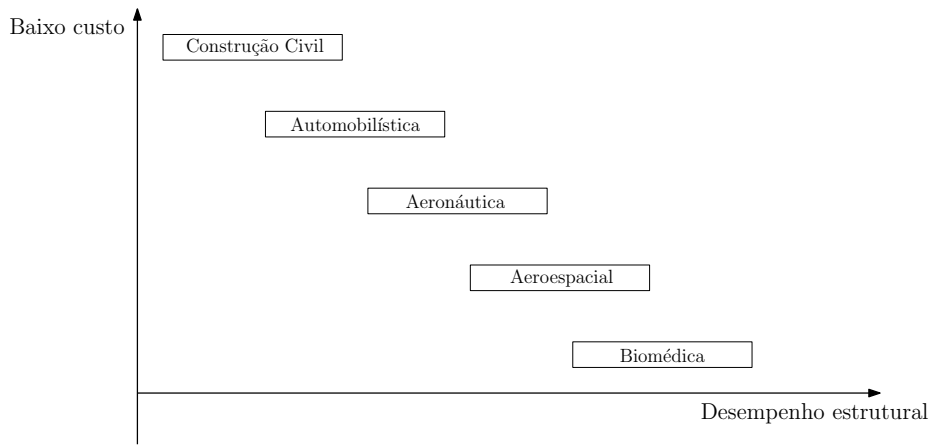


Figura 1.1.3 – Importância relativa das necessidades de baixo custo e desempenho estrutural em componentes compósitos utilizados em diferentes ramos da indústria. Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]

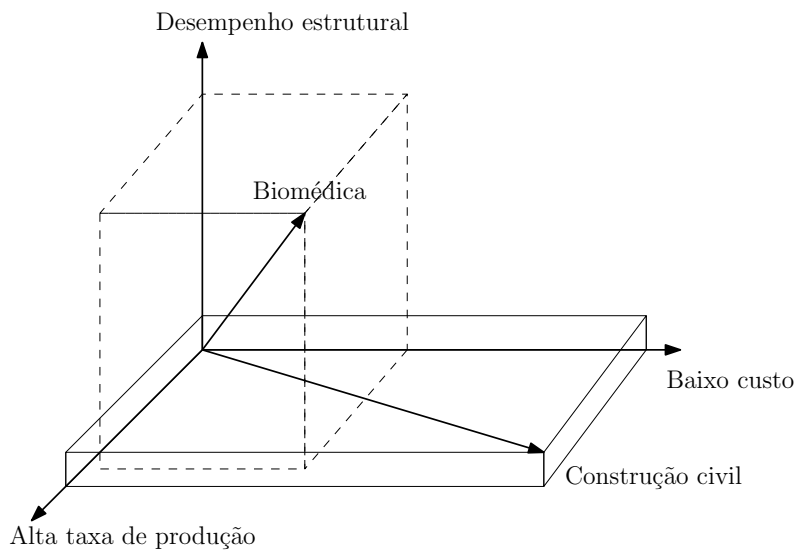


Figura 1.1.4 – Custos, taxas de produção e desempenhos estruturais relativos de componentes obtidos em compósitos empregados na construção civil e na área biomédica. Fonte: adaptado de Neto e Pardini [3]

a massa de uma determinada estrutura em um quilograma.

Tabela 1 – Economia específica média em algumas estruturas. Fonte: Jones [2]

Estrutura	Economia Específica (U\$/kg)
Aeronave de transporte civil (pequena)	55
Helicóptero	110
Turbina de avião	440
Caça militar	440
Avião comercial	880
Telescópio de vigilância espacial (SST)	1100
Satélite de órbita baixa	2200
Satélite geoestacionário	22000
Ônibus espacial americano	33000

Os dados presentes na Tabela 1 não são os mais atuais (datam da década de 1970). Contudo, eles carregam consigo uma boa perspectiva do quão importante é a busca pela redução de peso das estruturas em determinados setores. As economias mostradas variam de U\$55.00 para as aeronaves civis de pequeno porte para impressionantes U\$33,000.00 para o ônibus espacial americano [2]. Ou seja, para cada 1.0 quilograma que tais estruturas possuam a menos em relação ao seu peso próprio (quando se substituem os materiais metálicos pelos compósitos para sua confecção, tornando-as mais leves), se obtém uma economia relativa em dólares. Assim, quanto maior for a sensibilidade ao peso de uma determinada estrutura, mais aplicações de materiais compósitos serão investigadas.

Quando se discute sobre materiais compósitos, as primeiras aplicações que atingem a imaginação são aquelas aliadas às tecnologias de ponta. Mas nem sempre estes materiais estão verdadeiramente distantes do “palatável” ao público comum. Atualmente, eles estão presentes em quase todos os lugares e permeiam o dia-a-dia das pessoas. Alguns exemplos de aplicações dos compósitos são: aeronaves, plataformas marítimas de petróleo, trens de alta velocidade, artigos esportivos como tacos de golfe e raquetes de tênis, implantes ortopédicos, painéis de carro, orelhões e outras [2,3].

Quanto às aplicações de compósitos na indústria, cabe-se dar destaque à aeronáutica. Bons exemplos da aviação comercial são as aeronaves Boeing 777, Boeing 787 Dreamliner (Figura 1.1.5) e Airbus A380. Dos citados, o Boeing 787 possui 50% de sua estrutura confeccionada em materiais compósitos, por exemplo.



Figura 1.1.5 – Boeing 787 Dreamliner. Fonte: Boeing [4]

Na aviação militar, citam-se o Northrop Grumman B-2 Spirit, Boeing F-18 e Lockheed Martin F-22. Em especial, o B-2 Spirit (Figura 1.1.6) possui aproximadamente 85% de sua estrutura confeccionada apenas de compósitos.

Os compósitos também são amplamente utilizados na indústria naval. A corveta³ Visby-class da marinha sueca possui 100% de seu casco feito com um sanduíche de PVC com fibras de carbono (Figura 1.1.7). Outro exemplo é o iate Mirabella-V, possuidor

³ Corveta é uma classe de navios de guerra.



Figura 1.1.6 – Northrop Grumman B-2 Spirit. Fonte: Wikipedia [5]

de um mastro com 88.3 metros de altura (Figura 1.1.8) confeccionado inteiramente em laminado de carbono-epóxi.



Figura 1.1.7 – Corveta Visby-class da marinha sueca. Fonte: Pinterest [6]

No automobilismo, a Ferrari-F50 possui uma célula de vida feita inteiramente de um laminado de fibra de carbono combinado com resina epóxica. Os carros da Fórmula 1 também possuem estes e outros componentes fabricados com materiais compósitos. No ramo da energia renovável um exemplo notável está nas pás das turbinas eólicas. Estas são, geralmente, fabricadas por infusão e possuem uma grande parcela de compósitos do tipo



Figura 1.1.8 – Iate comercial Mirabella-V. Fonte: LiveYachting [7]

MPRF como principais constituintes. Para atletas portadores de necessidades especiais do atletismo existem próteses para as pernas feitas de materiais compósitos.



Figura 1.1.9 – Prótese de perna para atletismo. Fonte: Sapo Desporto [8]

Poder-se-ia relatar inúmeros exemplos e casos de sucesso em que os compósitos foram aplicados para substituição dos materiais mais usuais. Dessa maneira, fica evidente que os compósitos fazem parte não só do presente mas também do futuro da indústria e academia.

1.2 Revisão Bibliográfica

As estruturas compostas por vigas de paredes finas compósitas de seção transversal fechada possuem aplicações em diversos setores da engenharia. Como exemplo, tem-se as pás de turbinas eólicas que, geralmente, são fabricadas de materiais compósitos que são, tipicamente, estruturas delgadas tendo em vista que sua envergadura é muito maior do que suas outras dimensões espaciais. Em problemas práticos de otimização, o modelo de vigas unidimensional (1D) tradicional é preferido para uma modelagem simplificada destes componentes, tendo-se em vista o benefício de possuir um número reduzido de graus de liberdade para a análise do problema [9].

A modelagem 1D de vigas de paredes finas atraiu e atrai a atenção de muitos pesquisadores. Vlasov [10] e Leontiev [11] provavelmente foram os responsáveis por desenvolver o primeiro modelo unidimensional de vigas de paredes delgadas para materiais isotrópicos, seguidos por Gjelsvik [12] e Murray [13]. Seus modelos são aplicáveis para estruturas que possuam tanto seções transversais fechadas quanto abertas. A expansão destas teorias de viga 1D para materiais anisotrópicos foi primeiramente realizada por Mansfield [14] e Sobey [15]. Todavia, seus modelos não levam em consideração os efeitos de empenamento axial e flexão da parede como uma casca e muitos trabalhos foram desenvolvidos para aprimorar estas formulações [9]. Kollar e Pluzsik [16] desenvolveram um modelo 1D de vigas compósitas de célula única com empilhamentos arbitrários das lâminas para seções transversais abertas e fechadas. Nesta formulação, a flexão de casca da parede é considerada. O efeito da anisotropia do material é levado em conta na deformação por cisalhamento do plano médio da parede da viga no caso das seções fechadas por vias de duas condições de compatibilidade aplicadas nas seções abertas. Entretanto, negligencia-se o efeito de empenamento axial resultando em uma matriz de rigidez global 4×4 relacionando extensão, duas flexões transversais e torção da viga. Em seguida, os autores da teoria em questão estenderam seu modelo para incluir os efeitos do empenamento [17]. Contudo, este é desacoplado dos outros quatro nesta nova formulação e é calculado especificamente para vigas engastadas com extremidade livre.

O trabalho desenvolvido por Librescu e Song [18] contém uma grande quantidade de informações compiladas acerca deste assunto. Este livro discorre apenas sobre o tema das vigas de paredes finas compósitas. Ao incluir os efeitos do empenamento axial, o modelo do trabalho [18] resulta em uma matriz de rigidez global 5×5 da viga que relaciona os outros quatro efeitos do trabalho [16] e o bimomento. Mas, novamente, as influências inerentes à anisotropia do material na deformação angular devido ao cisalhamento da parede da viga não são consideradas. Aplicações recentes da última formulação são encontradas nos trabalhos de Lee e Lee [19], Vo e Lee [20–23], Cárdenas et. al. [24] e em muitos outros.

Além disso, cabe-se dar a ressalva de que mais pesquisas foram recentemente realizadas acerca deste tema. No que diz respeito, dá-se destaque aos trabalhos desenvolvidos

por Zhang e Wang [9], Eken e Kaya [25], Focacci, Faraboschi e De Stefano [26], Cárdenas et. al. [27], Rivera et. al. [28] e Victorazzo e De Jesus [29].

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo implementar uma teoria unidimensional para as vigas de paredes finas compósitas de célula única para laminados arbitrários como a proposta por Zhang e Wang. No atual modelo, ambos os efeitos de empenamento axial e anisotropia do material são completamente considerados aumentando a acurácia desta formulação. Não é levada em consideração a deformação devido ao cisalhamento transversal da seção da viga.

Ao final do projeto, almeja-se ter posse de uma metodologia de otimização para a longarina da asa do avião da equipe Draco Volans de AeroDesign (DV-GEVX 1), utilizando a ferramenta de algoritmos genéticos desenvolvida por Colherinhas aliada ao modelo de Zhang e Wang e fazendo uso do critério de falha LaRC03.

1.4 Metodologia

Implementa-se um algoritmo em ambiente MATLAB tanto da formulação de vigas desenvolvida por Zhang e Wang quanto do critério de falha LaRC03. São realizados comparativos entre resultados obtidos em diversos trabalhos para as estruturas em estudo com o presente modelo formulado e, além disso, são contrastadas diferenças entre as teorias de falha LaRC03 e Tsai-Wu. Verificam-se os resultados obtidos pelo autor do presente texto com os documentados pelos desenvolvedores da modelagem utilizada e sugerem-se correções no artigo base publicado pelos pesquisadores.

Em posse destes resultados, é realizado um estudo acerca de otimização por vias de algoritmos genéticos. Paralelamente, realizam-se alguns testes com a ferramenta de otimização desenvolvida por Colherinhas. Ao final do projeto, após validação do AG, é realizada a otimização da longarina da asa do VANT da equipe Draco Volans de AeroDesign. Nesta, algumas restrições são definidas e a conduzimos utilizando o critério de falha baseado em fenômenos físicos LaRC03 em conjunto com a teoria de vigas de paredes finas compósitas estudada neste trabalho.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho é dividido em oito capítulos, cada qual com seus temas, especificidades e seções. O Capítulo 1 apresenta uma introdução ao tema “materiais compósitos” falando sobre o que são, o porque de sua utilização e aplicações dos mesmos em estru-

turas relevantes. Faz-se um breve estudo do estado-da-arte acerca deste tema de grande interesse. Além disso, é feita uma breve revisão bibliográfica acerca do tema de vigas de paredes finas, um dos escopos deste trabalho, no que se tem datado desde o livro escrito por Vlasov [10]. Por fim, o capítulo se encerra com os objetivos deste texto. O Capítulo 2 é destinado à fundamentação teórica do tema. Neste, expõe-se desde a análise macromecânica de lâminas compósitas com reforço unidirecional até a mecânica de lâminas com reforço bidirecional, passando pela formulação da Teoria Clássica dos Laminados. No Capítulo 3 o tema “vigas de paredes finais compósitas” é atacado. Define-se o que são estes objetos e como se enquadram na análise estrutural. A cinemática e as equações constitutivas das vigas são descritas como proposto por Zhang e Wang [9]. O Capítulo 4, por sua vez, trata acerca da falha e como esta acontece para os materiais compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras (MPRF). Neste, são discutidos dois critérios: um fenomenológico (LaRC03) e outro que não baseia-se em fenômenos físicos (Tsai-Wu), dando enfoque ao primeiro. Para o Capítulo 5, tem-se um resumo a respeito da teoria de otimização onde volta-se a atenção para os algoritmos evolutivos e, em especial, os algoritmos genéticos. No Capítulo 6 é realizada uma análise de cargas atuantes em asas de aeronaves utilizando o Método de Schrenk [30] para a sustentação e o descrito por Raymer [31] para o arrasto. Em posse dos carregamentos atuantes, contrói-se os diagramas de esforços internos para a longarina do DV-GEVX 1, protótipo utilizado pela equipe Draco Volans de AeroDesign no ano de 2016. O Capítulo 7 traz os resultados obtidos neste trabalho, comparando o que foi obtido pelo autor com o que se tem documentado na bibliografia. É realizado um comparativo da formulação de vigas utilizada neste texto com as formulações e resultados encontrados por diversos outros autores. Adicionalmente, contrastam-se os critérios de falha de Tsai-Wu e LaRC03, expondo as vantagens do último. Além disso, os resultados obtidos pela otimização da longarina da asa do DV-GEVX 1 via algoritmos genéticos são apresentados e discutidos. O Capítulo 8 é reservado às conclusões e propostas de temas para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta a teoria clássica de compósitos laminados utilizada neste trabalho. Primeiramente, é abordada a macromecânica das lâminas de materiais compósitos do tipo MPRF mostrando como são realizadas as análises nestes tipos de estruturas, passando por sua definição e equações constitutivas. Em seguida, é apresentada a Teoria Clássica dos Laminados, estendendo a análise para estruturas compósitas constituídas por mais de uma lâmina dando atenção especial à mecânica dos tecidos discutindo como a tecelagem afeta na resistência da lâmina.

2.2 Relações Tensão-Deformação para Materiais Anisotrópicos

A Lei de Hooke generalizada relacionando tensões com deformações em notação contraída é dada por [2]:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (2.1)$$

onde σ_i ($i = 1, \dots, 6$) são as componentes de tensão em um elemento cúbico tridimensional (3D) nas direções 1, 2 e 3, como mostra a Figura 2.2.1, C_{ij} é a matriz de rigidez e ε_j são as componentes de deformação.

A notação contraída para tensões e deformações 3D é definida na Tabela 2 em relação a notação tensorial usual para situações onde os tensores de tensão e deformação são simétricos. Nesta, γ_{ij} são as deformações de cisalhamento de engenharia e ε_{ij} são as deformações de cisalhamento tensoriais (ou puras).

Dessa forma, definem-se as deformações como [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

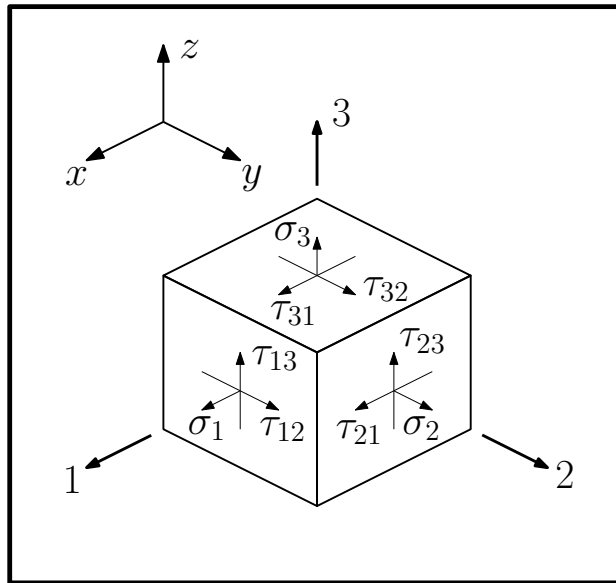


Figura 2.2.1 – Tensões em um elemento

Tabela 2 – Notações tensorial e contraída para tensões e deformações

Tensões		Deformações	
Notação Tensorial	Notação Contraída	Notação Tensorial	Notação Contraída
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
$\tau_{23} = \sigma_{32}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	ε_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

e

$$\begin{aligned}
 \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\
 \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

onde u , v e w são os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente.

A Figura 2.2.2 evidencia a diferença entre as deformações angulares de engenharia e tensorial. Note que a deformação γ_{ij} corresponde a angulação total que o elemento experimenta quando submetido ao estado de **cisalhamento simples**. Em contrapartida, a deformação ε_{ij} representa metade deste ângulo “ γ_{ij} ” que o mesmo elemento experimenta quando em **cisalhamento puro**. Fisicamente, a deformação de engenharia implica em uma rotação do elemento enquanto a deformação tensorial é acompanhada de um “esticamento” (*stretching*) do mesmo.

A matriz C_{ij} de rigidez possui 36 constantes na Eq. (2.1). Este número pode ser reduzido ao se considerar características importantes da energia de deformação. Materiais

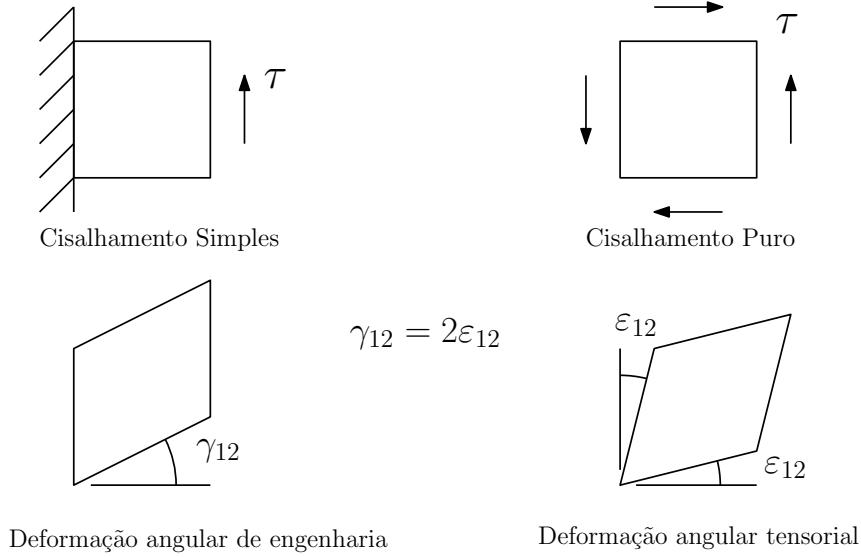


Figura 2.2.2 – Deformação angular de engenharia e tensorial

elásticos para os quais um potencial elástico existe e que seja igual à densidade de energia de deformação (energia por unidade de volume) [32], têm um incremento de trabalho por unidade de volume dado por [2]:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i, \quad (2.4)$$

quando as tensões σ_i atuam por intermédio das deformações $d\varepsilon_i$. Fazendo uso da Eq. (2.1), tem-se que:

$$dW = C_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_j. \quad (2.5)$$

Integrando a última com relação às deformações, encontra-se o trabalho por unidade de volume como:

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j. \quad (2.6)$$

Por outro lado, a Lei de Hooke pode ser obtida a partir da Eq. (2.6):

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j, \quad (2.7)$$

de tal sorte que, tomando a segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij}. \quad (2.8)$$

Analogamente, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji}. \quad (2.9)$$

Como a ordem de diferenciação de W é imaterial³ [2], é trivial que:

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (2.10)$$

³ A ordem de i_1, \dots, i_k é imaterial na diferenciação de uma função f com relação às variáveis x_{i_1}, \dots, x_{i_k} se a mesma possui derivadas parciais de todas as ordens que sejam contínuas. Funções com tal propriedade são ditas C^∞ [33]. Este resultado é conhecido como Teorema de Clairaut-Schwarz.

Portanto, a matriz de rigidez é simétrica e possui 21 constantes diferentes sendo que apenas 18 destas são independentes [2]. Por hipótese, considera-se um meio contínuo que segue a Lei de Hooke generalizada. Além disso, levam-se em conta apenas pequenas deformações. Dessa maneira, as componentes de deformação são funções lineares das componentes de tensão [32]. Assim, segue-se imediatamente que a Eq. (2.10) é válida.

Similarmente, W pode ser expresso em termos das compliâncias (ou matriz de flexibilidade) e tensões. Logo, ao efetuarem-se duas diferenciações com respeito às tensões, pode-se mostrar que $S_{ij} = S_{ji}$. Portanto, a matriz S_{ij} de compliância também é simétrica [34].

Finalmente, as relações tensão-deformação para materiais lineares elásticos anisotrópicos em seu caso mais geral são dadas como [34]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

Para o caso em que existam dois planos de propriedades materiais simétricas para um dado material, a simetria existirá para um terceiro plano mutuamente ortogonal à estes. Para um sistema de coordenadas alinhado com as direções materiais principais, a Lei de Hooke é dada como [2]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

e tais materiais são ditos ortotrópicos. Note que estes possuem apenas 9 constantes independentes na matriz de rigidez.

2.3 Análise Macromecânica de uma Lâmina

O termo lâmina é usado para se tratar de uma estrutura plana cuja espessura é muito menor do que suas outras dimensões espaciais. Assim, assume-se que esta se encontra sob estado plano de tensões. Define-se o sistema de coordenadas principal (ou material) conforme é mostrado na Figura 2.3.1.

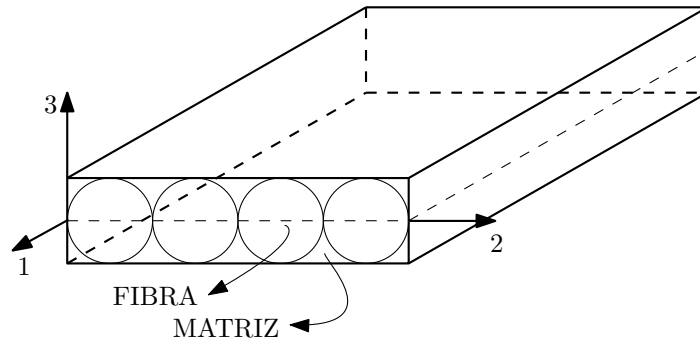


Figura 2.3.1 – Sistema de coordenadas principal de uma lâmina ortotrópica

As direções principais 1 e 2 são definidas como paralela e perpendicular às fibras, respectivamente. Outra possível nomenclatura é chamar as direções principais de longitudinal (L) e transversal (T). Neste texto é adotada a primeira convenção. A direção 3 é normal ao plano (1,2). Desta forma, os planos ortogonais de simetria são: (1,2), (2,3) e (1,3).

Vale à pena ressaltar que a hipótese de se assumir um estado plano de tensões na lâmina não se deve meramente à tentativa de se realizar uma idealização da realidade. Deve-se também ao fato da lâmina possuir capacidade resistiva apenas àqueles esforços que são aplicados no plano principal (1,2). O objetivo da aplicação dos compósitos é o de utilizar suas propriedades nobres para otimizar uma estrutura. Dessa forma, nunca se submeteria intencionalmente um material deste tipo a um esforço que é normal ao plano principal [2].

A Tabela 3 apresenta as propriedades de interesse e suas notações para a análise de lâminas ortotrópicas. Esta convenção será adotada ao longo de todo este texto.

Tabela 3 – Notação e propriedades de interesse para lâminas ortotrópicas.

Propriedade	Notação
Módulo de elasticidade longitudinal	E_1
Módulo de elasticidade transversal	E_2
Módulo de cisalhamento no plano principal	G_{12}
Coefficiente de Poisson Maior	ν_{12}
Coefficiente de Poisson Menor	ν_{21}
Resistência à tração longitudinal	X^T
Resistência à tração transversal	Y^T
Resistência à compressão longitudinal	X^C
Resistência à compressão transversal	Y^C
Resistência ao cisalhamento no plano principal	S_{12}

2.3.1 Comportamento elástico de uma lâmina

A relação tensão-deformação para a lâmina no sistema de coordenadas principal é dada por [2]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{Q} é a Matriz de Rigidez Reduzida da lâmina e seus termos são dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (2.14a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (2.14b)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad (2.14c)$$

$$Q_{66} = G_{12}. \quad (2.14d)$$

Em sua forma explícita, percebe-se que os termos da matriz de rigidez reduzida dependem de cinco constantes de engenharia. Contudo, apenas quatro delas são independentes. Devido à simetria de \mathbf{Q} , temos que:

$$\begin{aligned} Q_{12} = Q_{21} &\Rightarrow \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \\ &\Rightarrow \nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}. \quad (2.15)$$

Materiais cujas direções principais estão alinhadas com a direção de carregamento são ditos *especialmente ortotrópicos*. Isto evidencia o fato da dependência do sistema de coordenadas adotado para descrever a rigidez da lâmina e, conseqüentemente, sua equação constitutiva. Define-se então outro sistema de coordenadas que, por sua vez, não é alinhado com o sistema de coordenadas principal (Figura 2.3.2). O material é dito *geralmente ortotrópico* quando se descreve sua relação tensão-deformação por vias deste sistema de coordenadas não-principal (ou natural).

Naturalmente, deve-se buscar como quantificar essa relação neste novo sistema de coordenadas em função da relação descrita no sistema principal. Expressando as tensões atuantes no plano (x, y) em termos das tensões atuantes em um plano principal $(1, 2)$, que está rotacionado em um ângulo θ entre as direções 1 e x , tem-se [35]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

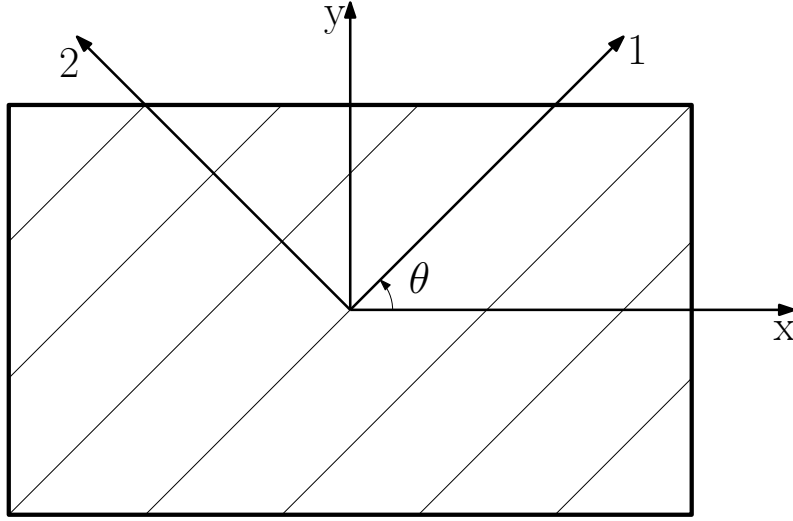


Figura 2.3.2 – Sistema de coordenadas principal (1, 2) e natural (x, y)

De forma semelhante, as deformações no plano (x, y) são dadas como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Denotando por $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$, escreve-se a Matriz de Transformação como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Convém observar que $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta)$ e $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta)$. Substituindo a Eq. (2.17) na Eq. (2.13) e substituindo novamente na Eq. (2.16), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{R} é chamada de Matriz de Reuter [2] e é definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

É possível mostrar que $\mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{T}^{-T}$ (aqui o termo $(*)^{-T}$ quer dizer $((*)^{-1})^T$). Denotando por $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T} = \bar{\mathbf{Q}}$, a relação tensão-deformação para a lâmina no sistema de coordenadas natural tem sua forma final dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Tem-se que $\bar{\mathbf{Q}}$ é a Matriz de Rigidez Reduzida Transformada. Esta, por sua vez, é uma matriz cheia (não possui termos nulos) e se assemelha com a matriz de rigidez para materiais anisotrópicos, sob estado plano de tensões, com ambas possuindo nove elementos. Contudo, as duas se diferenciam pelo fato de $\bar{\mathbf{Q}}$ depender apenas de quatro coeficientes independentes e o ângulo θ enquanto \mathbf{C} depende de seis coeficientes dessa natureza. Explicitamente [2],

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}n^4, \quad (2.22a)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})n^2m^2 + Q_{12}(n^4 + m^4), \quad (2.22b)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}m^4, \quad (2.22c)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{22} - Q_{12} + 2Q_{66})n^3m, \quad (2.22d)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m - (Q_{22} - Q_{12} + 2Q_{66})m^3n, \quad (2.22e)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(n^4 + m^4), \quad (2.22f)$$

são os termos da matriz de rigidez reduzida expressos no sistema de coordenadas natural.

O inverso da rigidez é, por definição, a flexibilidade. Assim, invertendo $\bar{\mathbf{Q}}$ obtemos $\bar{\mathbf{S}}$. A última é chamada de Matriz de Flexibilidade Reduzida Transformada. Ou seja,

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{Q}}^{-1}. \quad (2.23)$$

E, por outro lado,

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\mathbf{S}\mathbf{T}. \quad (2.24)$$

Explicitamente, os termos da matriz de flexibilidade reduzida expressos no sistema de coordenadas natural são [2]:

$$\bar{S}_{11} = S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4, \quad (2.25a)$$

$$\bar{S}_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})n^2m^2 + S_{12}(n^4 + m^4), \quad (2.25b)$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4, \quad (2.25c)$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})m^3n - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})n^3m, \quad (2.25d)$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})m^3n, \quad (2.25e)$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})n^2m^2 + S_{66}(n^4 + m^4). \quad (2.25f)$$

Por muitas vezes, é desejável que se relacionem deformações com tensões. Esta correspondência é dada por intermédio da flexibilidade. Assim, outra maneira de se escrever a equação constitutiva de uma lâmina ortotrópica no sistema não-principal tem a forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.26)$$

Os comentários tecidos a título de comparação entre a matriz de rigidez de uma lâmina ortotrópica e a de um material anisotrópico sob estado plano de tensões são completamente análogos para o comparativo entre a flexibilidade de ambos. A Tabela 4 apresenta propriedades típicas de lâminas compósitas unidirecionais.

Tabela 4 – Propriedades típicas de compósitos PRF com reforços unidirecionais. Fonte: adaptado de Vasiliev e Morozov [36]

Propriedade	Vidro-Epóxi	Carbono-Epóxi	Carbono-PEEK	Aramida-Epóxi	Bóro-Epóxi	Bóro-Alumínio	Carbono-Carbono
Fração volumétrica de fibra	0.65	0.62	0.61	0.6	0.5	0.5	0.6
Massa específica (g/cc)	2.1	1.55	1.6	1.32	2.1	2.65	1.75
Módulo de elasticidade longitudinal (GPa)	60	140	140	95	210	260	170
Módulo de elasticidade transversal (GPa)	13	11	10	5.1	19	140	19
Módulo de cisalhamento no plano principal	3.4	5.5	5.1	1.8	4.8	60	9
Coefficiente de Poisson Principal	0.3	0.27	0.3	0.34	0.21	0.3	0.3
Resistência à tração longitudinal (MPa)	1800	2000	2100	2500	1300	1300	340
Resistência à compressão longitudinal (MPa)	650	1200	1200	300	2000	2000	180
Resistência à tração transversal (MPa)	40	50	75	30	70	140	7
Resistência à compressão transversal (MPa)	90	170	250	130	300	300	50
Resistência ao cisalhamento no plano principal (MPa)	50	70	160	30	80	90	30

2.4 Teoria Clássica dos Laminados

Laminados são estruturas compostas por mais de uma lâmina e são definidos por uma sequência de empilhamento. As lâminas, por sua vez, são ditas camadas do laminado. Estas podem ter como constituintes materiais isotrópicos, ortotrópicos, anisotrópicos, etc. Neste texto nos restringiremos ao caso de camadas compostas por lâminas ortotrópicas. A sequência de empilhamento define a posição e angulação de cada camada no laminado.

A Teoria Clássica dos Laminados (TCL) adota uma série de hipóteses [37] as quais estão listadas abaixo.

1. As lâminas são homogêneas e ortotrópicas;
2. O laminado e suas lâminas têm espessuras muito pequenas se comparadas com suas outras dimensões espaciais e encontram-se sob estado plano de tensões (i.e. $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$);
3. Os deslocamentos u , v e w são pequenos se comparados com a espessura do laminado;
4. Os deslocamentos são contínuos ao longo do laminado;
5. Os deslocamentos no plano (x, y) variam linearmente ao longo da espessura do laminado, ou seja, u e v são funções lineares da coordenada z ;
6. Seções planas normais ao plano médio do laminado permanecem planas e normais à este plano, ou seja, as deformações angulares γ_{xz} e γ_{yz} são nulas;

7. As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;
8. Distâncias normais ao plano médio permanecem constantes implicando que $\varepsilon_z = 0$.
Dessa forma, o deslocamento transversal w independe da coordenada z ;

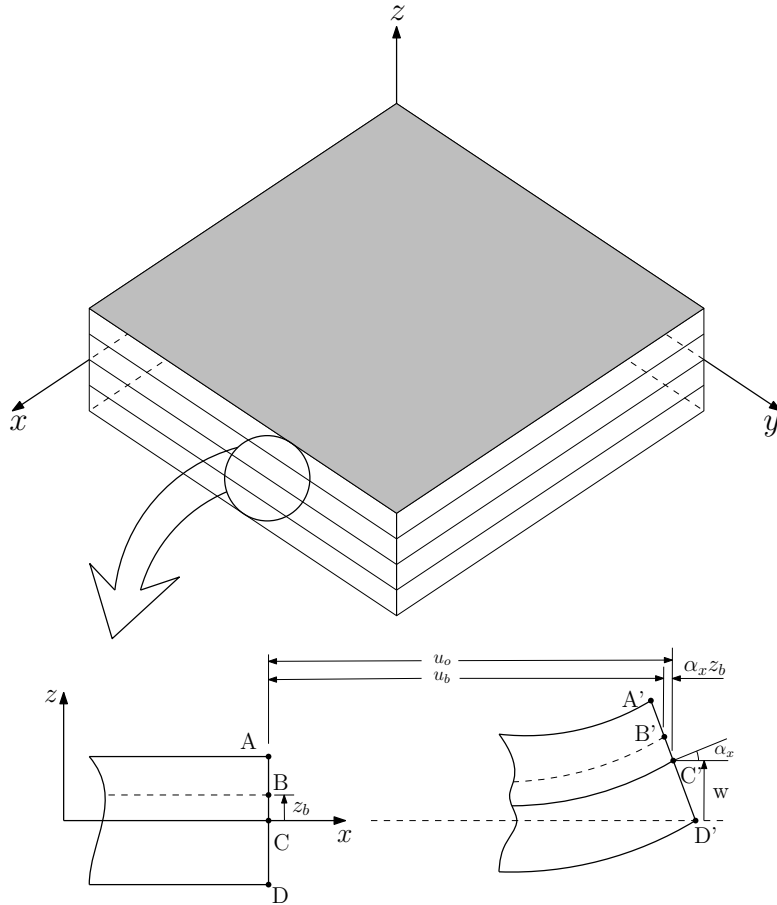


Figura 2.4.1 – Seção do laminado antes (ABCD) e após (A'B'C'D') a deformação. Fonte: adaptado de Daniel e Ishai [37]

2.4.1 Relações deformação-deslocamento

Em virtude das hipóteses adotadas pela TCL, podemos dizer que as relações deformação-deslocamento para o laminado são as mesmas que àquelas derivadas na teoria de placas de Kirchhoff-Love. Assim, com auxílio da Figura 2.4.1, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x, \quad (2.27a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y, \quad (2.27b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}. \quad (2.27c)$$

Os termos com sobrescrito zero (i.e. $(*)^0$) representam as deformações normais e angulares do plano médio do laminado. A coordenada z representa a posição relativa ao

longo da espessura com origem no plano médio da placa e os κ 's são as curvaturas deste plano. Explicitamente,

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad (2.28a)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \quad (2.28b)$$

Sumarizando, estas deformações correspondem às quatro respostas básicas do laminado [36] conforme a Figura 2.4.2:

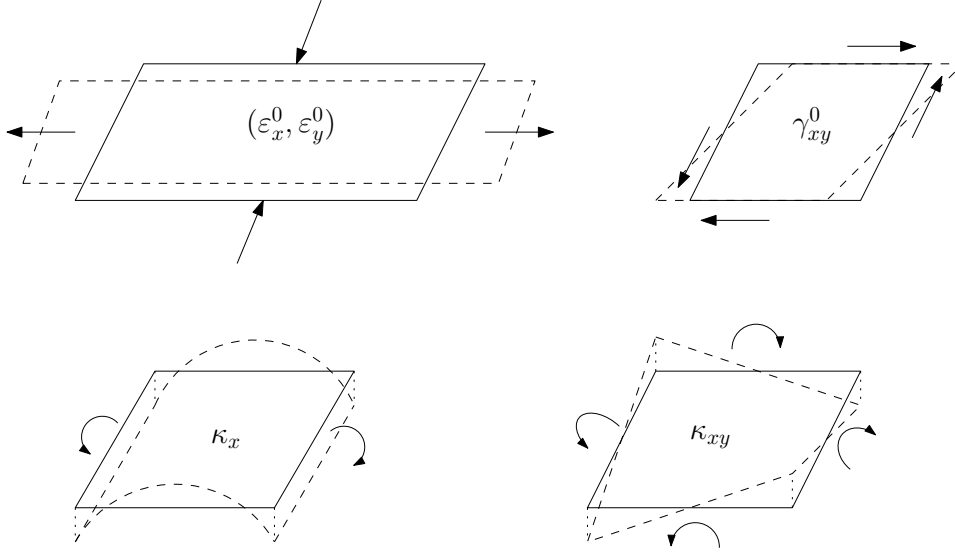


Figura 2.4.2 – Deformações e curvaturas do plano médio do laminado

- $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0)$: Deformações normais do plano médio devido à tração e/ou compressão;
- γ_{xy}^0 : Deformação angular do plano médio devido ao cisalhamento no plano (x, y) ;
- (κ_x, κ_y) : Curvaturas do plano médio devido à flexão nos planos (x, z) e (y, z) , respectivamente;
- κ_{xy} : Curvatura do plano médio devido à torção na direção z .

De acordo com Jones [2], as deformações são expressas na forma vetorial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

Note que a Eq. (2.29) atesta que as deformações variam linearmente na espessura do laminado. Substituindo-a na Eq. (2.21), se obtém a relação tensão-deformação para cada uma das camadas do laminado no sistema de coordenadas natural em função das

deformações e curvaturas do plano médio.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.30)$$

O subíndice k na relação representa a k -ésima camada em análise. Além disso, note também que apesar das tensões se comportarem de forma linear, elas variam descontinuamente de uma camada para a outra como representado na Figura 2.4.3.

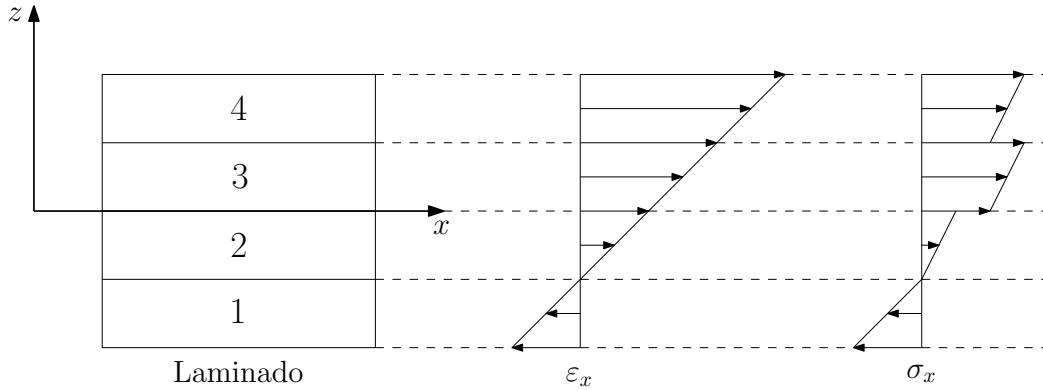


Figura 2.4.3 – Representação da variação das deformações e tensões ao longo da espessura de um laminado multidirecional

Isto ocorre porque a matriz de rigidez varia de uma lâmina para a outra em função do seu material e do ângulo θ . Existe assim um gradiente de tensão na interface das camadas. Portanto, as tensões apesar de serem lineares também são, em geral, descontínuas. Além disso, a linha neutra do laminado não necessariamente localiza-se no centro geométrico do mesmo em consequência da anisotropia da estrutura. A Figura 2.4.4 apresenta a convenção adotada para o sistema de coordenadas z .

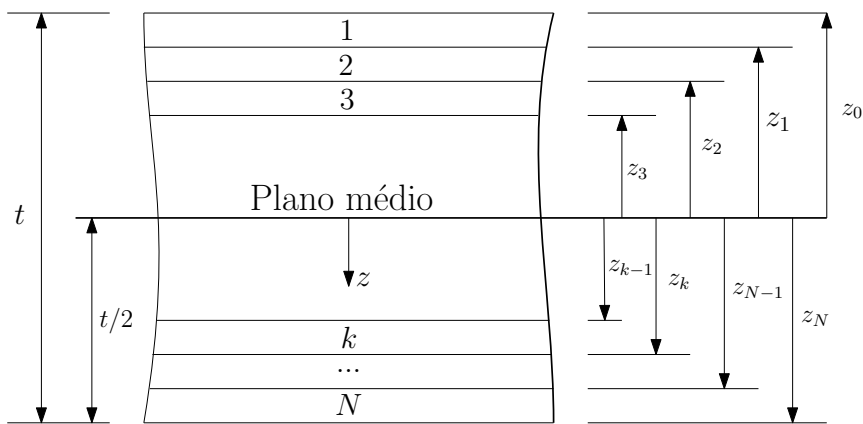


Figura 2.4.4 – Sistema de numeração das camadas de um laminado

2.4.2 Resultantes de tensão e momento por unidade de comprimento

Devido à existência dos gradientes interlaminares de tensão, não é conveniente se trabalhar diretamente com elas como na Eq. (2.30). Desta forma, é preferível trabalhar-se

com as resultantes de forças e momentos, as quais são obtidas ao se integrar as tensões de cada camada ao longo da espessura z do laminado; estas estarão concentradas no plano médio conforme mostrado na Figura 2.4.5. Para tal, basta impor condições de equilíbrio estático.

Assim, as resultantes de tensão e momento (por unidade de comprimento) que agem no plano médio do laminado são dadas(os) por [2]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz, \quad (2.31a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz. \quad (2.31b)$$

Onde:

- N_x, N_y : resultante de tensões normais por unidade de comprimento;
- N_{xy} : resultante de tensão de cisalhamento por unidade de comprimento;
- M_x, M_y : resultante de momentos fletores por unidade de comprimento;
- M_{xy} : resultante de momento torsor por unidade de comprimento.

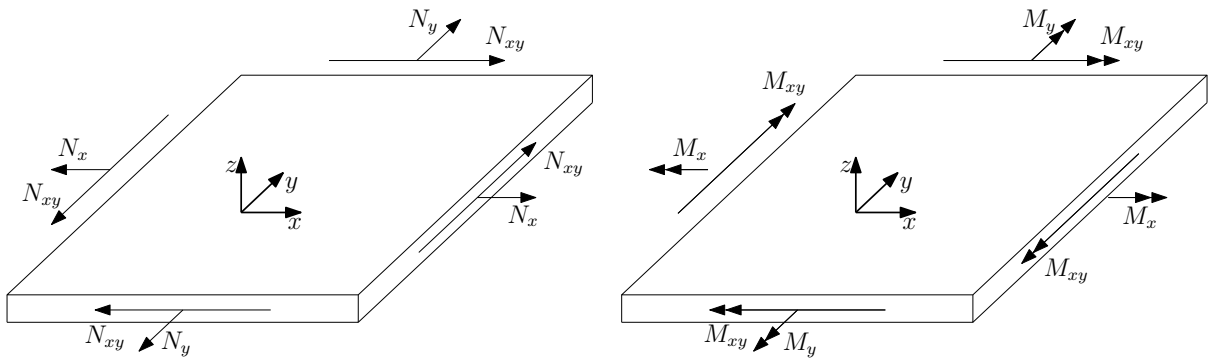


Figura 2.4.5 – Resultantes de tensão e momento por unidade de comprimento. Fonte: adaptado de Jones [2]

2.4.3 Equação constitutiva de laminados multidirecionais

Substituindo as Eqs. (2.31) na Eq. (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \\ &+ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \end{aligned} \quad (2.32)$$

e,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz \\ &+ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Avaliando as Eqs. (2.32) e (2.33) nota-se que as deformações e curvaturas do plano médio e a matriz de rigidez podem ser retiradas da integral pois são constantes ao longo da espessura das lâminas que constituem o laminado. Dessa forma, rearranjando de maneira conveniente, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

e,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \left(\sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right) \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Definindo três novas matrizes como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (2.36a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (2.36b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (2.36c)$$

e combinando as Eqs. (2.36) com as Eqs. (2.34) e (2.35) chega-se à equação constitutiva do laminado em sua forma mais geral.

$$\begin{Bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (2.37)$$

A matriz que relaciona as forças e momentos com as deformações e curvaturas é chamada de Matriz de Rigidez do Laminado. A última tem dimensão 6×6 e seus termos são:

- Matriz de Rigidez de Extensão (A_{ij}): relaciona as resultantes de forças \underline{N} no plano (x, y) às deformações $\underline{\varepsilon}^0$ do plano médio;
- Matriz de Rigidez de Acoplamento (B_{ij}): acopla as resultantes de forças \underline{N} às curvaturas $\underline{\kappa}$ e os momentos resultantes \underline{M} às deformações $\underline{\varepsilon}^0$;
- Matriz de Rigidez de Flexão (D_{ij}): relaciona os momentos resultantes \underline{M} às curvaturas $\underline{\kappa}$ do plano médio.

Dessa forma, a matriz de rigidez de acoplamento evidencia que esforços normais e transversais que atuam no laminado provocam flexão e torção do mesmo, ao passo em que momentos fletores e torsões provocam deformações lineares e angulares no laminado.

2.4.4 Acoplamentos nos níveis da lâmina e do laminado

Com propósito de análise, considere um laminado com empilhamento qualquer que possua apenas uma das resultantes de forças por unidade de comprimento atuando no mesmo; por exemplo N_x . Objetivando-se a visualização dos efeitos do acoplamento e de cada um dos outros termos da sua equação constitutiva, escreve-se N_x em sua forma explícita para este caso. Então,

$$N_x = \underbrace{A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0}_{\text{Extensão do plano médio}} + \underbrace{A_{16}\gamma_{xy}^0}_{\text{Cisalhamento do plano médio}} + \underbrace{B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y}_{\text{Flexão nos planos } xz \text{ e } yz} + \underbrace{B_{16}\kappa_{xy}}_{\text{Torção na direção } z}.$$

Analogamente, no caso isolado de apenas o momento fletor por unidade de comprimento M_x ser não-nulo, temos:

$$M_x = \underbrace{B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0}_{\text{Extensão do plano médio}} + \underbrace{B_{16}\gamma_{xy}^0}_{\text{Cisalhamento do plano médio}} + \underbrace{D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y}_{\text{Flexão nos planos } xz \text{ e } yz} + \underbrace{D_{16}\kappa_{xy}}_{\text{Torção na direção } z}.$$

Colocando nesta forma é fácil perceber com exatidão o acoplamento que é realizado pelo intermédio da matriz B_{ij} . A última, por construção, é dependente de três parâmetros: angulação, material e sequência de empilhamento das lâminas.

Os efeitos de acoplamento surgem tanto no nível da lâmina quanto no nível do laminado. Note que ao construir-se um laminado tal que $B_{ij} = 0$ ainda assim existe acoplamento entre a extensão e o cisalhamento do plano médio para o caso de N_x , por exemplo. Este acoplamento surge pois $A_{16} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{16})_k (z_k - z_{k-1}) \neq 0$. Isto advém do fato de $\bar{Q}_{16} \neq 0$, em sua forma mais geral, e este ser o termo da matriz de rigidez que relaciona a tensão normal σ_x com a deformação angular γ_{xy} no nível da lâmina. Este efeito, por sua vez, manifesta-se no laminado por intermédio do coeficiente A_{16} . Com argumentação semelhante conclui-se que B_{16} também é um acoplamento advindo, exclusivamente, da rigidez da lâmina. Analogamente, para o caso de M_x temos que o acoplamento no nível da lâmina está associado aos coeficientes B_{16} e D_{16} .

Desta vez considere apenas $\bar{Q}_{16} = 0$. Em consequência deste fato, tem-se que os termos A_{16} , B_{16} e D_{16} são nulos se mantidos apenas nos casos de N_x e M_x . Mesmo ao se anular o acoplamento que ocorre no nível da lâmina ainda assim verifica-se a existência de efeitos acoplados no laminado. Estas manifestações advém do fato de B_{11} e B_{12} não se anularem. Assim, consegue-se perceber a existência de dois níveis de acoplamento na estrutura: um referente à lâmina e o outro diz respeito ao laminado em si conforme já foi dito. Para os outros casos (e.g. $N_{xy} \neq 0$) a análise se faz de forma completamente análoga.

A discussão acerca do acoplamento se deu com o objetivo de se por à luz o quão sensível pode ser o problema de se fabricar uma estrutura laminada adequada para uma determinada aplicação em específico. Isto evidencia a necessidade de se trabalhar com os inúmeros parâmetros que influem no problema através de um algoritmo de otimização.

2.4.5 Relação deformação-carregamento

Devido à descontinuidade camada-a-camada da tensão existente em um laminado multidirecional é mais conveniente trabalhar-se com as deformações uma vez que estas são contínuas ao longo da espessura do mesmo. Para tal, deve-se inverter a relação constitutiva dada pela Eq. (2.37) e, assim, relacionar deformações e curvaturas do plano médio com as resultantes de tensão e momento (por unidade de comprimento) aplicados na estrutura. Logo,

$$\begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \end{Bmatrix}. \quad (2.38)$$

A matriz que relaciona as deformações e curvaturas com as forças e momentos é chamada de Matriz de Flexibilidade do Laminado e é simplesmente dada pela inversão da matriz de rigidez do laminado. Vale ressaltar que ambas as matrizes (flexibilidade e

rigidez) são simétricas. As matrizes que compõem a flexibilidade são dadas por [2]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \quad (2.39b)$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* \quad (2.39c)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}^{*-1}, \quad (2.39d)$$

em que $\mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Além disso, é fácil mostrar que $\mathbf{c} = \mathbf{b}^T$.

2.4.6 Relação tensão-carregamento

A determinação das relações entre tensão e deformação é feita por intermédio da Eq. (2.29). Geralmente, é de grande interesse determinarmos as tensões atuantes em cada lâmina para posterior implementação destas em algum critério de falha, por exemplo. Dessa forma, detém-se a capacidade de prever com certa confiança quais camadas de um laminado estarão sujeitas à falha e, principalmente, qual camada irá falhar primeiro.

Munidos da Eq. (2.38) relacionam-se as tensões com as forças e os momentos aplicados da seguinte maneira:

$$\sigma_k = \bar{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{a}\underline{N} + \mathbf{b}\underline{M}) + z\bar{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{c}\underline{N} + \mathbf{d}\underline{M}). \quad (2.40)$$

2.5 Mecânica de Lâminas com Reforço Bidirecional

Os tecidos de reforço têm importância fundamental na tecnologia e ciência de materiais compósitos. Tratam-se literalmente de fibras que são tecidas umas sobre as outras formando uma malha que quando combinada com resina dá origem às lâminas com reforço bidirecional. Os vários padrões dessas malhas tecidas (geralmente de fibra de carbono, vidro ou aramida) existentes têm seus nomes derivados da indústria têxtil. Alguns padrões de tecelagem estão descritos na Figura 2.5.1.

As principais vantagens do emprego das lâminas reforçadas tecidos são seu custo e sua processabilidade, principalmente no que diz respeito à manufatura em larga escala de um laminado específico [36]. No que diz respeito à processabilidade, os tecidos são mais facilmente manuseáveis do que as lâminas unidirecionais, o que diminui a complexidade de manter o alinhamento dos fios durante um processo de laminação manual (*hand lay-up*), por exemplo. Em contrapartida, a principal desvantagem no emprego dos tecidos é o ângulo $\alpha \geq 0$ (Figura 2.5.3) que os fios fazem com o plano da camada devido às ondulações provenientes da própria tecelagem.

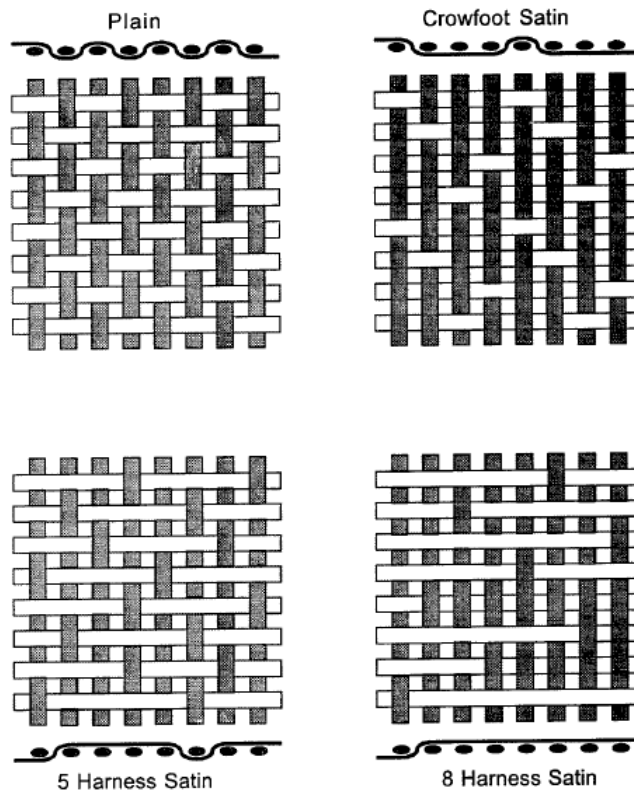


Figura 2.5.1 – Alguns padrões de tecelagem mais comuns. Fonte: Price et. al. [38]

As direções que definem o desenvolver dos fios de preenchimento e principal (ou dominante) são chamadas de *fill* (ou trama) e *warp* (ou urdume) como na Figura 2.5.2, respectivamente. Neste trabalho serão considerados apenas tecidos balanceados. Estes possuem um único tipo de fibra de reforço e a mesma quantidade de fios por unidade de área nas direções *fill* e *warp*. Dessa forma, as propriedades longitudinais e transversais são equivalentes (e.g. $E_1 = E_2$) o que não implica que estes sejam necessariamente isotrópicos.

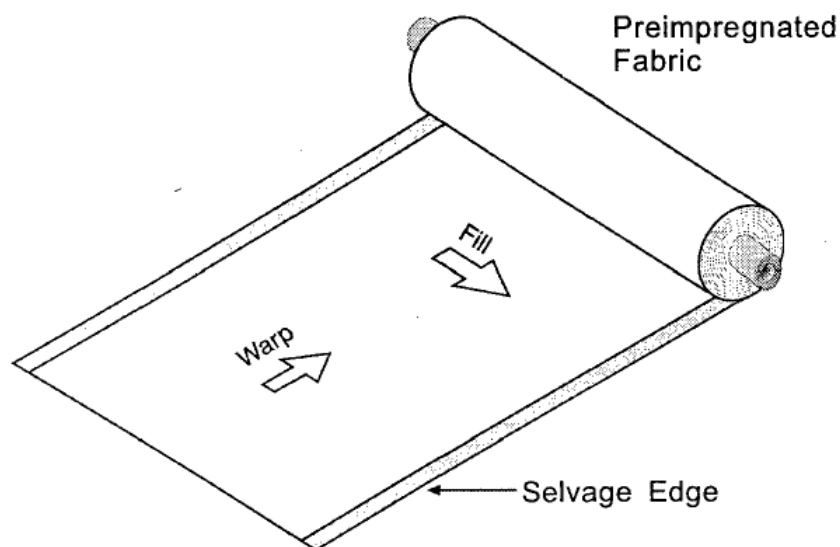


Figura 2.5.2 – Direções *fill* e *warp* em um rolo de tecido compósito. Fonte: Price et. al. [38]

2.5.1 Módulo de elasticidade aparente

As ondulações realizadas pelos fios no tecido implicam em uma redução da rigidez da lâmina. Considere a tração da estrutura mostrada na Figura 2.5.3 na direção *warp*.

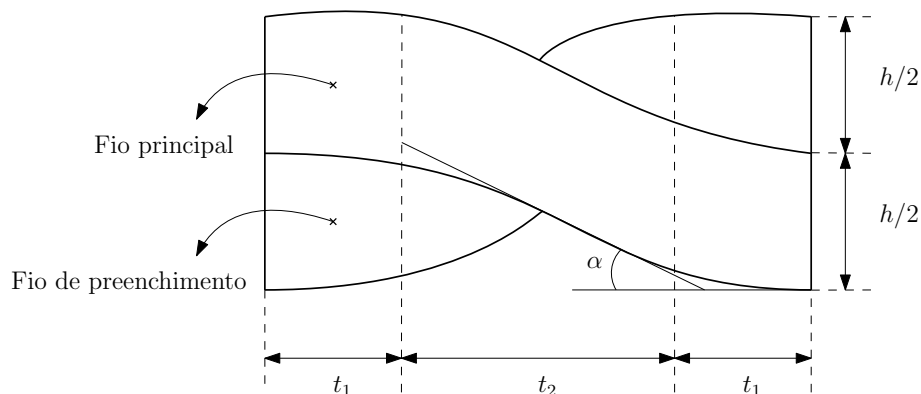


Figura 2.5.3 – Vista frontal de uma célula unitária da estrutura tecida

O módulo de elasticidade aparente do composto é calculado por meio de:

$$E_a A_a = E_f A_f + E_w A_w, \quad (2.41)$$

sendo $A_a = h(2t_1 + t_2)$ a área aparente da seção transversal e $A_f = \frac{h}{2}(2t_1 + t_2)$ e $A_w = \frac{h}{4}(4t_1 + t_2)$ as áreas referentes aos fios nas direções *fill* e *warp*, respectivamente. Substituindo na Eq. (2.41), tem-se:

$$E_a = \frac{1}{2} \left[E_f + \frac{E_w(4t_1 + t_2)}{2(2t_1 + t_2)} \right]. \quad (2.42)$$

Por hipótese, os fios que estão ao longo da direção *fill* são ortogonais aos que estão na direção *warp*. Como a direção do carregamento é perpendicular à última, é razoável dizer que $E_f = E_2$ em que E_2 é o módulo de elasticidade transversal da lâmina ortotrópica unidirecional. Note ainda que E_w pode ser decomposto em duas parcelas referentes às larguras t_1 e t_2 da seguinte forma:

$$\frac{2t_1 + t_2}{E_w} = \frac{2t_1}{E_1} + \frac{t_2}{E_\alpha}, \quad (2.43)$$

sendo E_1 o módulo de elasticidade longitudinal de uma lâmina ortotrópica unidirecional.

Com intuito de encontrar a relação entre o módulo aparente do tecido E_a e o ângulo α , investiga-se como descrever o módulo E_α .

Invertendo a relação tensão-deformação para uma lâmina (no sistema de coordenadas principal) obtemos a relação deformação-tensão. Esta ocorre por intermédio da matriz de flexibilidade reduzida da lâmina \mathbf{S} que é dada por [36]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Denotando o termo S_{11} da Eq. (2.44) no sistema de coordenadas (x, y) culmina na equivalência $\bar{S}_{11} = 1/E_x$. Assim, comparando com a Eq. (2.25a) e explicitando os termos S_{ij} da matriz de flexibilidade em função das constantes de engenharia, temos:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \left[\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^2 \theta. \quad (2.45)$$

Denotando $E_x = E_\alpha$ e substituindo os resultados nas Equações (2.43) e (2.42), obtém-se [36]:

$$E_\alpha = \frac{E_2}{2} + \frac{E_1(4t_1 + t_2)}{4 \left(2t_1 + t_2 \left[\cos^4 \alpha + \frac{E_1}{E_2} \sin^4 \alpha + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{21} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right] \right)}. \quad (2.46)$$

Com intuito comparativo, listam-se algumas propriedades mecânicas típicas para tecidos compósitos na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades típicas de lâminas reforçadas com tecidos em matriz epóxica.
Fonte: Vasiliev e Morozov [36]

Propriedade	Tecido de fibra de vidro-epóxi	Tecido de fibra de aramida-epóxi	Tecido de fibra de carbono-epóxi
Fração volumétrica de fibras	0.43	0.46	0.45
Massa específica (g/cc)	1.85	1.25	1.40
Módulo de elasticidade longitudinal (GPa)	26	34	70
Módulo de elasticidade transversal (GPa)	22	34	70
Módulo de cisalhamento no plano principal (GPa)	7.2	5.6	5.8
Coefficientes de Poisson	0.13	0.15	0.09
Resistência à tração longitudinal (MPa)	400	600	860
Resistência à compressão longitudinal (MPa)	350	150	560
Resistência à tração transversal (MPa)	380	500	850
Resistência à compressão transversal (MPa)	280	150	560
Resistência ao cisalhamento no plano principal (MPa)	45	44	150

Note que existem consideráveis discrepâncias entre as propriedades das lâminas de reforço bidirecional e unidirecional feitas do mesmo material. Como exemplo prático, considere um tecido de fibra de vidro com os seguintes parâmetros: $\alpha = 12^\circ$, $t_2 = 2t_1$. Utilizando as propriedades expostas na Tabela 4 para a lâmina unidirecional, obtém-se $E_\alpha = 23.5$ GPa para o módulo aparente do tecido. Como comparativo, um laminado cujo empilhamento é $[0^\circ/90^\circ]$ com mesmo material possui $E = 36.5$ GPa. Dessa forma, o módulo de elasticidade aparente de um tecido deste tipo é 37% menor que o módulo do mesmo material reforçado com fibras unidirecionais [36].

3 Vigas de Paredes Finas Compósitas

3.1 Considerações Gerais

A engenharia de estruturas lida com corpos sólidos de diversas maneiras distintas. Estas modelagens podem ser classificadas como de: corpos sólidos bi e tridimensionais (2D e 3D), placas e cascas, vigas de seção sólida e vigas de paredes finas/espessas. Estes sólidos distinguem-se entre si por vias de suas dimensões relativas.

Os corpos sólidos dimensionais possuem todas as suas três dimensões espaciais com mesma ordem de grandeza. Isto significa dizer que nenhuma delas pode ser desconsiderada em uma análise, pois todas são de tamanhos “comparáveis”. Em contrapartida, as vigas de seção sólida possuem as dimensões de sua seção transversal pequenas em comparação com sua envergadura. As vigas de paredes finas/espessas possuem, por sua vez, todas as três dimensões espaciais com diferentes ordens de magnitude. Dessa maneira, a espessura da parede é pequena em relação as dimensões características de sua seção transversal e envergadura. Além disso, também vale o mesmo que para as vigas de seção sólida.

De fato, todas estas diferentes estruturas e suas respectivas equações podem ser obtidas à partir das equações da mecânica dos meios contínuos tridimensional utilizando os fatores que distinguem estes corpos sólidos entre si. Por esta perspectiva, a teoria de placas e cascas constitui uma aproximação bidimensional da teoria da elasticidade 3D enquanto as vigas de seção sólida e as de paredes finas/espessas constituem aproximações unidimensionais da mesma. Contudo, apesar desta semelhança, a teoria de vigas de paredes finas/espessas é distinta da teoria de vigas de seção sólida [18].

Assim, de maneira geral, as vigas de paredes finas são barras unidimensionais de seção transversal com parede delgada cujo principal objetivo de suas aplicações são a de redução do peso próprio destas estruturas. Tais sólidos estão englobados pelos chamados elementos estruturais lineares [39].

Por fim, ressalta-se a relevância deste tópico destacando que aqui será sintetizada a formulação das equações governantes para as vigas de paredes finas compósitas, objeto de estudo do presente trabalho.

3.2 Classificação e Geometria

Considere uma viga de comprimento L com contorno médio da seção transversal e sistemas coordenados expressos conforme a Figura 3.2.1.

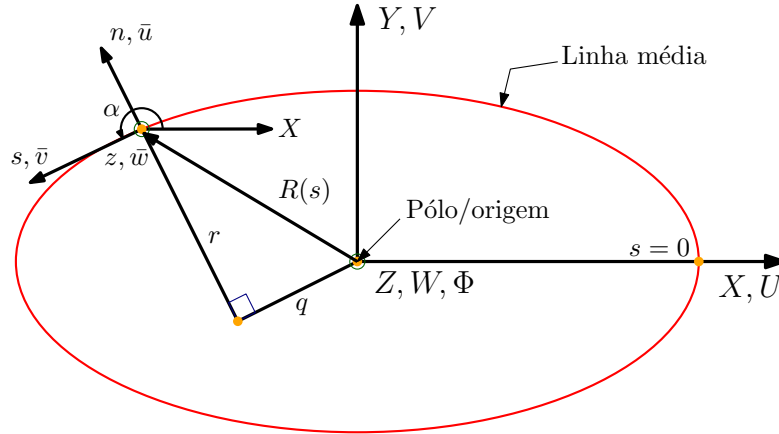


Figura 3.2.1 – Linha média da seção transversal e sistemas coordenados

Seja a espessura h uma função da coordenada s que descreve o contorno médio; $h = h(s)$. Ou seja, a espessura da parede é livre para variar ao longo do contorno da seção transversal da viga mas esta será mantida constante ao longo de sua envergadura. Tomemos ainda l como uma outra dimensão característica da seção transversal da viga (i.e. largura ou altura). Denotando δ como a espessura máxima que a parede da estrutura possui, temos que quando:

$$\delta/l \leq 0.05, \quad l/L \leq 0.05 \quad (3.1)$$

então, conforme Vlasov [10], a viga pode ser classificada como de parede fina. Caso contrário, a viga é dita de parede espessa.

Pode-se ainda distinguir as vigas de parede fina em duas categorias: as de seção transversal aberta e fechada [18]. No caso das que possuem seção transversal fechada, a área que o contorno da seção envolve é chamada de célula. Assim, essa classe de vigas pode possuir uma ou mais destas unidades. No caso de possuir apenas uma, esta é dita de célula única. Caso contrário, é chamada de multicelular.

3.3 Cinemática de Vigas de Parede Fina

A Figura 3.3.1 apresenta uma viga de parede fina genérica. Esta estrutura tem como material constituinte algum laminado compósito do tipo FRP. Dois sistemas coordenados são definidos para posterior análise; os sistemas de coordenadas $OXYZ$ e nsz . O primeiro é definido para a viga enquanto o segundo refere-se à parede da mesma e tem sua origem na linha média de sua seção transversal. Nomeiam-se tais sistemas como sistema

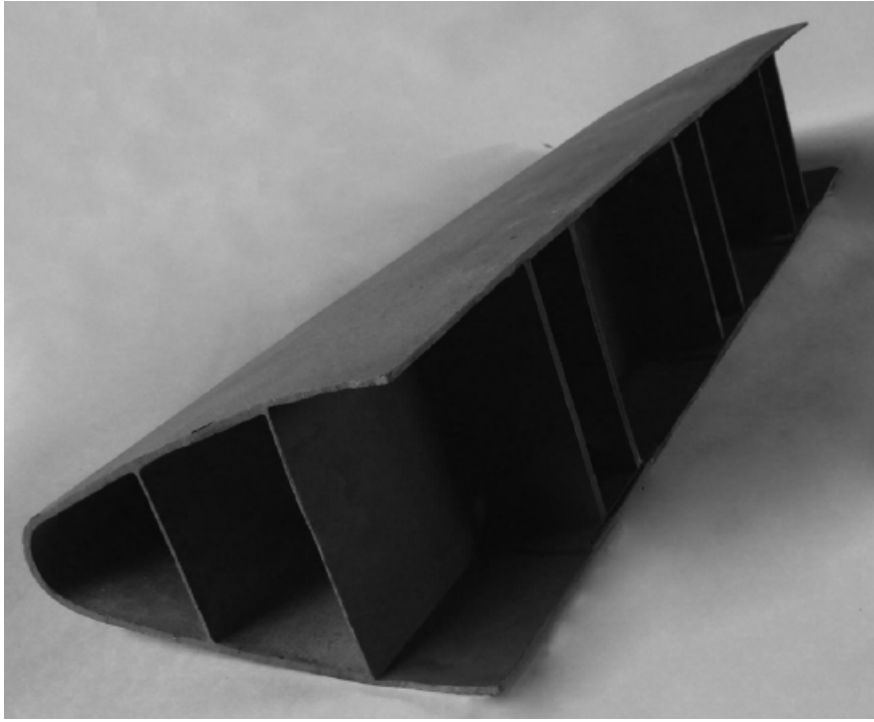


Figura 3.2.2 – Viga de parede fina compósita com várias células. Fonte: Vasiliev e Morozov [36]

de coordenadas global e local, respectivamente. Note que o ângulo θ é mensurado entre o eixo s e a direção longitudinal das fibras.

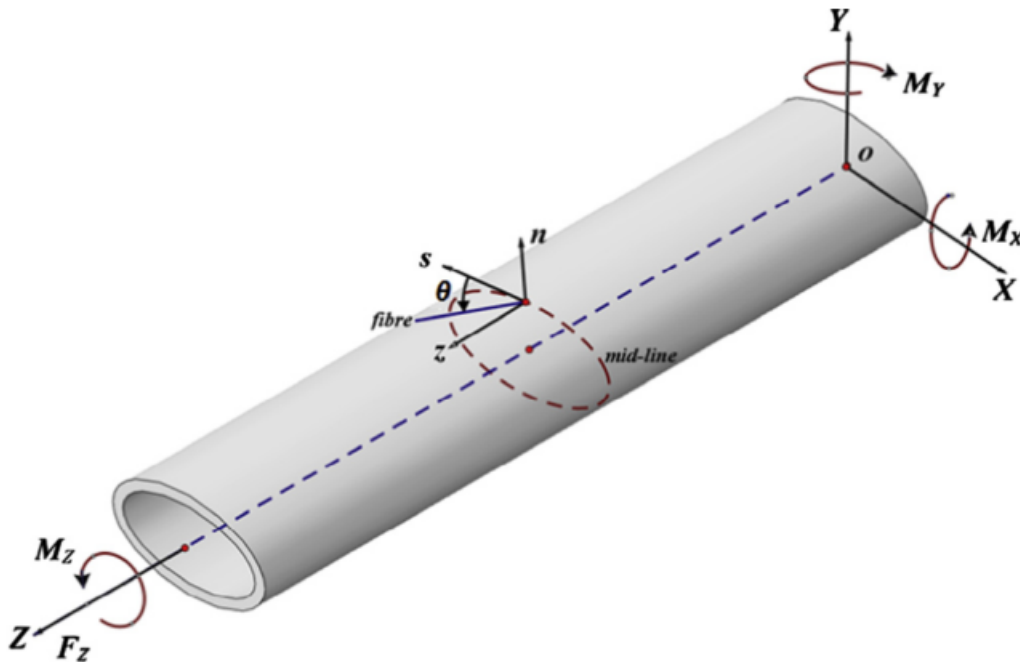


Figura 3.3.1 – Viga de parede fina genérica e sistemas de coordenadas local e global. Fonte: Zhang e Wang [9]

Munidos destes sistemas de coordenadas, a cinemática das vigas de parede fina será desenvolvida conforme a modelagem apresentada por Zhang e Wang [9].

3.3.1 Hipóteses de trabalho

Considera-se que a viga pode estar sujeita à esforços de todas as naturezas e em todas as direções. Com intuito do desenvolvimento de uma teoria unidimensional que considere as anisotropias do material de maneira completa e os efeitos do empenamento axial, uma série de hipóteses cinemáticas são postuladas:

1. O plano da seção transversal da viga comporta-se como um corpo rígido quando é submetido à carregamentos. Colocado de outra forma, isto significa afirmar que a seção transversal permanece rígida em seu próprio plano;
2. A seção transversal, após experimentar movimento de corpo rígido, permanece perpendicular ao seu eixo axial deformado;
3. Adicionalmente ao movimento de corpo rígido da seção transversal, é permitido empenamento elástico na direção axial.

Uma ilustração do que é o empenamento axial está exposta na Figura 3.3.2. Trata-se, portanto, do movimento relativo entre os pontos da linha média seção transversal da viga na direção axial.

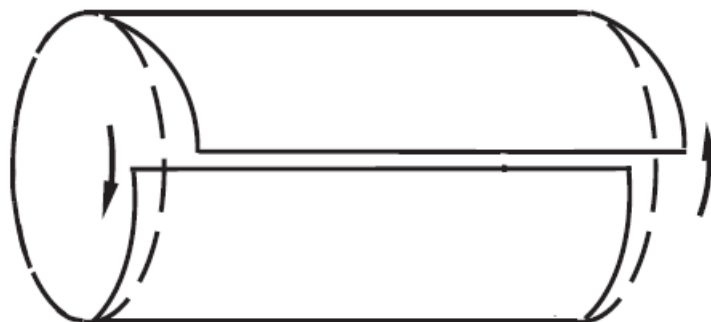


Figura 3.3.2 – Empenamento axial em uma viga de parede fina sob torção livre. Fonte: adaptado de Vasiliev e Morozov [36]

3.3.2 Deslocamentos da viga no sistema de coordenadas global

O movimento de corpo rígido da seção transversal, postulado pela primeira hipótese, consiste de três movimentos de translação e três de rotação. Os movimentos translacionais podem ser representados por $U(0,0,Z) = U(Z)$, $V(0,0,Z) = V(Z)$ e $W(0,0,Z) = W(Z)$ que são os deslocamentos de um ponto $(0,0,Z)$ da seção transversal conforme mostrado na Figura 3.2.1. As rotações de corpo rígido, por sua vez, são representadas por $\Phi_X(Z)$, $\Phi_Y(Z)$ e $\Phi_Z(Z)$ cada qual referente ao giro em torno dos eixos X , Y e Z , respectivamente.

Estes seis deslocamentos de corpo rígido são ditos como deslocamentos fundamentais da viga. Uma das principais tarefas na modelagem unidimensional de vigas de parede fina está em determiná-los. Uma vez conhecidos, pode-se calcular os deslocamentos translacionais de um ponto (X, Y, Z) qualquer da seção transversal conforme:

$$U(X, Y, Z) = U(Z) - \Phi_Z(Z)Y, \quad (3.2a)$$

$$V(X, Y, Z) = V(Z) + \Phi_Z(Z)X, \quad (3.2b)$$

$$W(X, Y, Z) = W(Z) + \Phi_X(Z)Y - \Phi_Y(Z)X, \quad (3.2c)$$

Além disso, a segunda hipótese significa matematicamente que:

$$U'(Z) = \Phi_Y(Z), \quad V'(Z) = -\Phi_X(Z), \quad (3.3)$$

onde o sobrescrito de derivação significa $d(*)/dZ$ (derivada de $(*)$ em relação à variável Z). A Eq. (3.3) indica que os efeitos da deformação por cisalhamento são negligenciados. Isto reduz os seis deslocamentos fundamentais originais para apenas quatro, conforme pode ser observado na Figura 3.2.1. Tem-se, então, os três deslocamentos de translação originais e um único de rotação $\Phi(Z) = \Phi_Z(Z)$.

3.3.3 Deslocamentos de pontos do plano médio no sistema de coordenadas local

Fazendo uso da terceira hipótese de trabalho e das Eqs. (3.2) e (3.3), pode-se expressar os deslocamentos de um ponto genérico $(X(s), Y(s), Z)$ na seção transversal da viga como:

$$U(X(s), Y(s), Z) = U(Z) - \Phi(Z)Y(s), \quad (3.4a)$$

$$V(X(s), Y(s), Z) = V(Z) + \Phi(Z)X(s), \quad (3.4b)$$

$$W(X(s), Y(s), Z) = W(Z) - V'(Z)Y(s) - U'(Z)X(s) + \bar{w}_\omega(X(s), Y(s), Z), \quad (3.4c)$$

onde \bar{w}_ω é o empenamento axial da superfície média. Como notação, a barra será usada como sobrescrito das variáveis referentes ao plano médio. Vale à pena ressaltar que o empenamento axial é uma quantidade descrita localmente em contraste aos deslocamentos globais da viga.

Os deslocamentos normal $\bar{u}(s, z)$ e tangencial $\bar{v}(s, z)$ do plano médio são obtidos através de uma transformação do sistema de coordenadas global, enquanto o deslocamento axial $\bar{w}(s, z)$ é igual a $W(X(s), Y(s), Z)$ da Eq. (3.4c) pois assume-se que o plano (n, s) coincide com o plano (X, Y) . A demonstração completa desta transformação encontra-se no Anexo A. Assim, as expressões finais para os deslocamentos de um ponto da superfície

média no sistema local são:

$$\bar{u}(s, z) = U(Z) \sin \alpha(s) - V(z) \cos \alpha(s) - \Phi(z)q(s), \quad (3.5a)$$

$$\bar{v}(s, z) = U(Z) \cos \alpha(s) + V(z) \sin \alpha(s) + \Phi(z)r(s), \quad (3.5b)$$

$$\bar{w}(s, z) = W(Z) - V'(Z)Y(s) - U'(Z)X(s) + \bar{w}_\omega(s, z), \quad (3.5c)$$

onde $\alpha(s)$, $r(s)$ e $q(s)$ são definidos conforme a Figura 3.2.1. Note que o ponto de partida $s = 0$ pode ser adotado de forma arbitrária. Matematicamente, temos que:

$$r(s) = X(s)Y'(s) - Y(s)X'(s), \quad (3.6a)$$

$$q(s) = X(s)X'(s) + Y(s)Y'(s), \quad (3.6b)$$

$$\cos \alpha(s) = X'(s), \quad \sin \alpha(s) = Y'(s). \quad (3.6c)$$

Assim, temos que os três deslocamentos de um ponto pertencente ao plano médio da seção transversal da viga, definidos no sistema de coordenadas local, dependem de cinco deslocamentos; quatro deslocamentos fundamentais da viga no sistema global e um deslocamento referente ao empenamento axial no sistema local.

3.3.4 Deslocamentos de pontos genéricos da seção transversal no sistema de coordenadas local

Fazendo uso da Teoria de Placas de Kirchhoff-Love [40], obtém-se os deslocamentos de um ponto (n, s, z) arbitrário da seção transversal da viga. Estes são:

$$u(s, n, z) = \bar{u}(s, z), \quad (3.7a)$$

$$v(s, n, z) = \bar{v}(s, z) - n \left[\frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial s} - \frac{\bar{v}(s, z)}{R(s)} \right], \quad (3.7b)$$

$$w(s, n, z) = \bar{w}(s, z) - n \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial z}. \quad (3.7c)$$

Novamente, temos a interdependência dos deslocamentos de um ponto da seção transversal da viga descrito no sistema local com os deslocamentos fundamentais da viga no sistema global de coordenadas. De forma genérica, $R(s)$ é a magnitude do vetor raio que parte de um pólo P (localizado no ponto (x_P, y_P)) da seção transversal até um ponto da linha média da mesma. Assim, o raio é dado por:

$$\underline{R}(s) = r(s)\mathbf{e}_n + q(s)\mathbf{e}_t, \quad (3.8)$$

onde os vetores unitários \mathbf{e}_n e \mathbf{e}_t estão definidos no Anexo A.

Para o caso de seções simétricas, temos que $(x_P, y_P) = (0, 0)$, ou seja, o pólo e a origem são coincidentes. Dessa forma, temos que:

$$R(s) = \sqrt{r(s)^2 + q(s)^2} = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.9)$$

onde denotou-se a norma $|\underline{R}(s)|$ simplesmente por $R(s)$ em concordância com a notação adotada nas Eqs. (3.7).

3.3.5 Deformações de pontos genéricos da seção transversal no sistema de coordenadas local

Usam-se as relações deformação-deslocamento da Teoria de Cascas de Koiter-Sanders [41, 42] em consistência com a Teoria de Placas de Kirchhoff-Love para descrever as deformações locais ε_{ss} , ε_{zz} e γ_{sz} de um ponto qualquer da seção da viga. Estas são dadas por:

$$\varepsilon_{ss}(n, s, z) = \bar{\varepsilon}_{ss} + n\bar{\kappa}_{ss}, \quad (3.10a)$$

$$\varepsilon_{zz}(n, s, z) = \bar{\varepsilon}_{zz} + n\bar{\kappa}_{zz}, \quad (3.10b)$$

$$\gamma_{sz}(n, s, z) = \bar{\gamma}_{sz} + n\bar{\kappa}_{sz}, \quad (3.10c)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{ss}$, $\bar{\varepsilon}_{zz}$ e $\bar{\gamma}_{sz}$ são as deformações e $\bar{\kappa}_{ss}$, $\bar{\kappa}_{zz}$ e $\bar{\kappa}_{sz}$ são as curvaturas do plano médio da parede da casca. Aqui, a variável n desenvolve papel análogo ao da variável z na Teoria Clássica dos Laminados. Por definição:

$$\bar{\varepsilon}_{ss}(s, z) = \frac{\partial \bar{v}(s, z)}{\partial s} + \frac{\bar{u}(s, z)}{R(s)}, \quad (3.11a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{zz}(s, z) = \frac{\partial \bar{w}(s, z)}{\partial z}, \quad (3.11b)$$

$$\bar{\gamma}_{sz}(s, z) = \frac{\partial \bar{v}(s, z)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}(s, z)}{\partial s}, \quad (3.11c)$$

$$\bar{\kappa}_{ss}(s, z) = -\frac{\partial^2 \bar{u}(s, z)}{\partial s^2} + \frac{1}{R(s)} \frac{\partial \bar{v}(s, z)}{\partial s}, \quad (3.11d)$$

$$\bar{\kappa}_{zz}(s, z) = -\frac{\partial^2 \bar{u}(s, z)}{\partial z^2}, \quad (3.11e)$$

$$\bar{\kappa}_{sz}(s, z) = -2\frac{\partial^2 \bar{u}(s, z)}{\partial s \partial z} + \frac{1}{2R(s)} \left[3\frac{\partial \bar{v}(s, z)}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial s} \right]. \quad (3.11f)$$

A primeira hipótese adotada para o desenvolvimento da cinemática das vigas de parede fina implica que a deformação e curvatura tangenciais do plano médio da seção transversal devem ser nulos (i.e. $\bar{\varepsilon}_{ss}, \bar{\kappa}_{ss} = 0$). Além disso, quando o raio $R(s)$ for suficientemente grande (o que é válido para a maioria dos casos práticos, incluindo o caso do presente texto) pode-se desconsiderar o segundo termo na Eq. (3.11f) da curvatura devido à torção do plano médio da parede da viga.

Substituindo \bar{u} da Eq. (3.5a) nas Eqs. (3.11e) e (3.11f), temos:

$$\bar{\kappa}_{zz}(s, z) = \cos \alpha(s)K_X + \sin \alpha(s)K_Y - q(s)K_\omega, \quad (3.12a)$$

$$\bar{\kappa}_{sz}(s, z) = -2[U'(Z)Y''(s) - V'(Z)X''(s) - \Phi'(Z)q'(s)] = 2K_{XY}, \quad (3.12b)$$

onde, novamente, considera-se um raio $R(s)$ suficientemente grande para que $X''(s) = 0 = Y''(s)$ e $q'(s) \approx 1$ na derivação da Eq. (3.12b). Note que as curvaturas locais κ_{zz} e κ_{sz} da parede estão em termos das curvaturas globais K_X , K_Y , K_{XY} e K_ω da viga. As

últimas são tais que:

$$K_X = -V''(Z), \quad (3.13a)$$

$$K_Y = -U''(Z), \quad (3.13b)$$

$$K_{XY} = \Phi'(Z), \quad (3.13c)$$

$$K_\omega = -\Phi''(Z). \quad (3.13d)$$

Portanto, fisicamente, tem-se:

- K_X, K_Y : curvaturas globais da viga devido à flexão nos planos (Y, Z) e (X, Z) , respectivamente;
- K_{XY} : taxa de torção global da viga;
- K_ω : curvatura global da viga devido à torção. Esta é relacionada ao bimomento atuante em uma seção transversal da viga devido à ação da torção em vigas vinculadas.

Vale ressaltar que o tipo de torção que é considerado no presente modelo não é referente à torção livre de St. Venant. Trata-se do caso não-uniforme (comumente chamado de flexo-torção) que, além de ser mais geral, é um tipo de carregamento que induz a ocorrência de flexão e torção simultaneamente, inclusive em vigas cujo material constituinte é isotrópico [39].

Agora, para deduzir as deformações $\bar{\varepsilon}_{zz}$ e $\bar{\gamma}_{sz}$, substituímos \bar{v} da Eq. (3.5b) na expressão da Eq. (3.11c), obtendo:

$$\bar{\gamma}_{sz} = \frac{\partial \bar{w}(s, z)}{\partial s} + U'(z)X'(s) + V'(z)Y'(s) + \Phi'(z)r(s). \quad (3.14)$$

E então, integrando a Eq. (3.14) com respeito à variável s a partir de um ponto arbitrário, por exemplo $s = 0$, leva-nos à:

$$\begin{aligned} \bar{w}(s, z) = \bar{w}(0, z) - U'(z)[X'(s) - X'(0)] - V'(z)[Y'(s) - Y'(0)] \\ - \Phi'(z) \int_0^s r(s)ds + \int_0^s \bar{\gamma}_{sz}ds, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que, da Eq. (3.5c), $\bar{w}(0, z) = W(z) - V'(z)Y(0) - U'(z)X(0) + \bar{w}_\omega(0, z)$. Substituindo a última igualdade na Eq. (3.15):

$$\begin{aligned} \bar{w}(s, z) = W(z) - U'(z)X(s) - V'(z)Y(s) - \Phi'(z) \int_0^s r(s)ds \\ + \int_0^s \bar{\gamma}_{sz}ds + \bar{w}_\omega(0, z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comparando a Eq. (3.16) com a Eq. (3.5c), temos que o deslocamento devido ao empenamento local da superfície média da seção transversal da viga é dado por:

$$\bar{w}_\omega(s, z) = -\Phi'(z) \int_0^s r(s)ds + \int_0^s \bar{\gamma}_{sz}ds + \bar{w}_\omega(0, z). \quad (3.17)$$

Utilizando a condição de empenamento médio nulo (i.e. $\oint \bar{w}_\omega(s, z) ds = 0$), somos capazes de determinar $\bar{w}_\omega(0, z)$. O último é dado por:

$$\bar{w}_\omega(0, z) = \frac{1}{\beta} \oint \left[\Phi'(z) \int_0^s r(s) ds - \int_0^s \bar{\gamma}_{sz} ds \right] ds, \quad (3.18)$$

onde $\beta = \oint ds$ é o perímetro da seção transversal. Note que as Eqs. (3.17) e (3.18) correlacionam o deslocamento devido ao empenamento axial \bar{w}_ω com a deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$. Dessa forma, se faz necessária a descrição desta deformação em prol da determinação deste deslocamento.

Antes de deduzir a relação que definirá a deformação angular, perceba que toda a cinemática derivada até então se aplica para vigas com seção transversal aberta. Neste caso, a única diferença entre as abordagens estaria na integral de linha da Eq. (3.18) que, ao invés de ser uma integração fechada, simplesmente representaria o valor bruto do perímetro da seção. Além disso, para o cálculo correto de $\bar{w}_\omega(0, z)$, dever-se-ia igualar a deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$ a zero.

O presente texto trata de vigas com seções transversais fechadas e prossegue dando enfoque a esta abordagem. Para o caso de interesse, ao igualarmos o limite superior de integração na Eq. (3.18) ao perímetro da seção (i.e. $s = \beta$), temos que:

$$\oint \bar{\gamma}_{sz} ds = 2\Omega\Phi'(z), \quad (3.19)$$

onde $2\Omega = \oint r(s) ds$ é o dobro da área da seção transversal da viga e também é conhecida como Área Setorial.

Para a determinação da deformação angular na Eq. (3.19), assume-se um fluxo de cisalhamento constante a partir da torção livre de St. Venant ao longo da parede da seção transversal da viga [18]. Assim,

$$N_{sz} \approx N_{szT} = G(s, z)t(s, z)\bar{\gamma}_{sz}(s, z), \quad (3.20)$$

onde $G(s, z)$ é o módulo de cisalhamento equivalente e $t(s, z)$ é a espessura da parede.

Contudo, não é mostrado no trabalho [18] como calcular o módulo de cisalhamento equivalente para o caso de compósitos com empilhamento aleatório. Seguindo esta abordagem, obtém-se a deformação angular a partir da Eq. (3.19) como:

$$\bar{\gamma}_{sz} = \psi(s)\Phi'(z) = \psi(s)K_{XY}, \quad (3.21)$$

onde $\psi(s)$ é chamada de Função de Torção e é dada por:

$$\psi(s) = \frac{2\Omega}{t(s, z)G(s, z)\mathcal{L}}, \quad (3.22)$$

e,

$$\mathcal{L} = \oint \frac{ds}{t(s, z)G(s, z)}. \quad (3.23)$$

Outra forma de se atacar o problema é mostrada por [19]. Nesta, ao invés de se assumir um fluxo de cisalhamento N_{sz} constante, assume-se que a quantidade $\bar{\gamma}_{sz}t$ é constante ao longo da parede da seção transversal da viga. Assim, a função de torção conforme [19] é dada por:

$$\psi(s) = \frac{2\Omega}{t \oint [ds/t]}. \quad (3.24)$$

Neste modelo a função de torção independe do módulo de cisalhamento equivalente $G(s, z)$ que se faz presente na modelagem de [18]. Entretanto, a quantidade $\bar{\gamma}_{sz}t$ não possui significado físico o que é uma das principais críticas ao método.

Prosseguindo com a função de torção que é mostrada em [18], obtém-se o deslocamento axial da linha média ao se substituir a Eq. (3.21) na Eq. (3.16). Dessa forma,

$$\bar{w}(s, z) = W(z) - U'(z)X(s) - V'(z)Y(s) + \bar{w}_\omega(s, z), \quad (3.25)$$

é o deslocamento axial da linha média da seção transversal da viga. Na Eq. (3.25), $\bar{w}_\omega(s, z)$ representa a contribuição ao deslocamento axial devido ao empenamento da linha média. Esta é dada por:

$$\bar{w}_\omega(s, z) = -\Phi'(z)\omega(s). \quad (3.26)$$

Na última equação, o termo $\omega(s)$ é denominado Função de Empenamento e este é dado por:

$$\omega(s) = \eta(s) - \frac{1}{\beta} \oint \eta(s) ds, \quad (3.27)$$

onde:

$$\eta(s) = \int_0^s [r(s) - \psi(s)] ds. \quad (3.28)$$

Com isto, se é capaz de descrever a deformação axial da linha média da parede da viga em função das suas deformações e curvaturas globais. Usando a definição dada pela Eq. (3.11) e, portanto, fazendo a derivada parcial de $\bar{w}(s, z)$ na Eq. (3.25), tem-se que:

$$\bar{\epsilon}_{zz} = \epsilon_Z + Y(s)K_X + X(s)K_Y + \omega(s)K_\omega, \quad (3.29)$$

onde $\epsilon_Z = W'(Z)$.

Finalmente, ao substituir as Eqs. (3.12), (3.21) e (3.29) nas Eqs. (3.10), temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} = \epsilon_Z + [Y(s) - n \cos \alpha(s)]K_X + [X(s) + n \sin \alpha(s)]K_Y \\ + [\omega(s) - nq(s)]K_\omega, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e,

$$\gamma_{sz} = [\psi(s) + 2n]K_{XY}, \quad (3.31)$$

que são as deformações axial e angular de um ponto genérico da parede da seção transversal, respectivamente. Ambas encontram-se em termos das deformações e curvaturas globais da viga.

Alguns pontos desta modelagem valem a pena serem discutidos. Primeiramente, no que tange às vigas com seções transversais fechadas, espera-se que a contribuição do empenamento \bar{w}_ω ao deslocamento axial $\bar{w}(s, z)$ seja pequena em comparação com as outras fontes de deslocamento desta natureza. Conseqüentemente, é esperada uma deformação axial devido ao empenamento muito pequena se comparada às outras existentes nas Eqs. (3.29) e (3.30). Desta forma, a modelagem efetuada por [9] opta por fazer o uso da Eq. (3.30). Além disso, o uso da Eq. (3.21) introduz erros significativos para o cálculo da deformação angular da linha média $\bar{\gamma}_{sz}$ porque esta não considera em completude a anisotropia do material da viga. Portanto, isto compromete a descrição precisa da deformação angular γ_{sz} pois $\bar{\gamma}_{sz}$ é a parte dominante da primeira.

Por fim, é exposta na próxima subseção uma forma alternativa para se calcular $\bar{\gamma}_{sz}$ conforme proposto por [9] sem se fazer uso da Eq. (3.21); elemento chave das modelagens propostas por [18, 19].

3.4 Equações Constitutivas no Sistema de Coordenadas Local

Fazendo uso da Teoria de Placas de Kirchhoff-Love, pode-se simplificar as relações tensão-deformação tridimensionais de uma lâmina geralmente ortotrópica para o caso plano bidimensional como feito na Seção 2.3. Estas, no sistema de coordenadas local, são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{sz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ss} & \bar{Q}_{sz} & \bar{Q}_{sn} \\ \bar{Q}_{sz} & \bar{Q}_{zz} & \bar{Q}_{zn} \\ \bar{Q}_{sn} & \bar{Q}_{zn} & \bar{Q}_{nm} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix}_k. \quad (3.32)$$

Novamente, não é conveniente se trabalhar com as tensões pois estas são descontínuas ao longo da espessura do laminado. Assim, integram-se as tensões das camadas para se obter as forças e momentos resultantes na parede da viga por unidade de comprimento (Fig. 3.4.1).

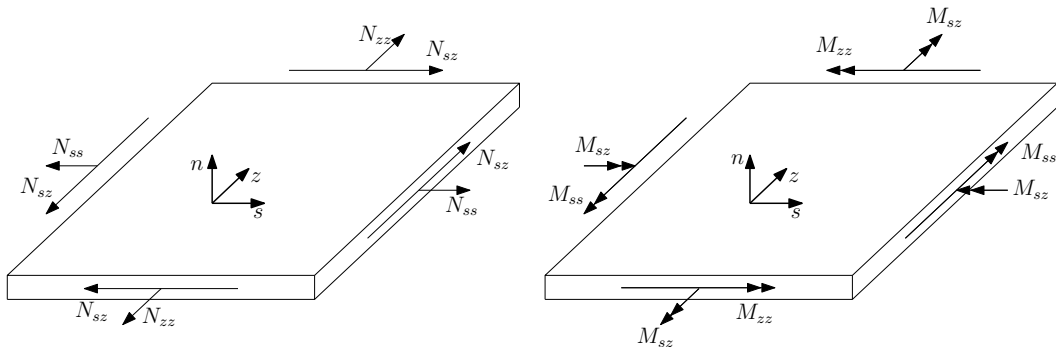


Figura 3.4.1 – Forças e momentos por unidade de comprimento na parede da viga

Estes são dados por:

$$N_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} dn, \quad (3.33a)$$

$$M_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} n dn, \quad (3.33b)$$

com $i, j = z, s$.

Assim como na Seção 2.3, usando as Eqs. (3.32) e (3.10) em conjunto com a Eq. (3.33) obtém-se a equação constitutiva no sistema de coordenadas local para o laminado que constitui a parede da viga. A primeira hipótese cinemática implica em $\bar{\varepsilon}_{ss} = 0 = \bar{\kappa}_{ss}$. Contudo, neste trabalho, considerar-se-à apenas $\bar{\kappa}_{ss} = 0$ em concordância com o realizado em [9]. Isto se deve pois, segundo resultados que podem ser verificados em [19,20], manter a deformação $\bar{\varepsilon}_{ss} \neq 0$ resulta em uma maior precisão dos resultados ao se comparar com o obtido através do Método dos Elementos Finitos.

Além disso, tem-se que a tensão circunferencial é desprezível, ou seja, $\sigma_{ss} \approx 0$ [9]. Isto implica em $N_{ss}, M_{ss} \approx 0$. Assim, a equação constitutiva é dada por:

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ M_{zz} \\ M_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\gamma}_{sz} \\ \bar{\kappa}_{zz} \\ \bar{\kappa}_{sz} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

onde k_{ij} é a matriz de rigidez no sistema local e seus termos estão explicitados no Anexo B. Além disso, esta matriz é simétrica.

Agora, objetivando-se escrever a deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$, rearranja-se a Eq. (3.34) como:

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ M_{zz} \\ M_{sz} \\ \bar{\gamma}_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\kappa}_{zz} \\ \bar{\kappa}_{sz} \\ N_{sz} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde H_{ij} é a matriz de rigidez em sua forma híbrida. Apesar da matriz k_{ij} ser simétrica isto não significa que a sua forma híbrida H_{ij} também será. De fato, ela não o é. Os termos da matriz de rigidez híbrida são explicitados no Anexo B.

Dessa maneira, é possível se escrever a deformação angular em função dos termos de H_{ij} . Logo,

$$\bar{\gamma}_{sz} = H_{41}\bar{\varepsilon}_{zz} + H_{42}\bar{\kappa}_{zz} + H_{43}\bar{\kappa}_{sz} + H_{44}N_{sz}. \quad (3.36)$$

Note que a deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$, em concordância com o tratamento dado por [18], reduz-se à N_{sz}/Gt para materiais isotrópicos. A Eq. (3.36) evidencia a interdependência da deformação angular com todas as outras deformações e curvaturas da superfície média envolvidas no problema. Tem-se assim o acoplamento de $\bar{\gamma}_{sz}$ devido ao

grau de anisotropia do material constituinte da viga. Substituir a Eq. (3.36) na Eq. (3.19) resulta:

$$\oint (H_{41}\bar{\epsilon}_{zz} + H_{42}\bar{\kappa}_{zz} + H_{43}\bar{\kappa}_{sz} + H_{44}N_{sz})ds = 2\Omega K_{XY}. \quad (3.37)$$

O esforço cisalhante resultante N_{sz} pode ser subdividido em duas parcelas:

- N_{szT} : fluxo de cisalhamento devido à torção uniforme de St. Venant;
- N_{szB} : fluxo de cisalhamento devido à flexão não-uniforme (ou variável).

Dessa forma, $N_{sz} = N_{szT} + N_{szB}$. Logo, tem-se:

$$\oint (H_{41}\bar{\epsilon}_{zz} + H_{42}\bar{\kappa}_{zz} + H_{43}\bar{\kappa}_{sz} + H_{44}N_{szT} + H_{44}N_{szB})ds = 2\Omega K_{XY}. \quad (3.38)$$

Como $\oint H_{44}N_{szB} = 0$ para seções transversais simétricas fechadas e é muito pequeno para a maior parte das seções transversais fechadas não-simétricas que são utilizadas como perfis de vigas, temos:

$$N_{szT} = \frac{2\Omega K_{XY} - \oint (H_{41}\bar{\epsilon}_{zz} + H_{42}\bar{\kappa}_{zz} + H_{43}\bar{\kappa}_{sz})ds}{\oint H_{44}ds}. \quad (3.39)$$

Assim, substituindo a Eq. (3.39) na Eq. (3.36) e desprezando N_{szB} , tem-se como resultando final a deformação angular do plano médio $\bar{\gamma}_{sz}$ da seção transversal da viga no sistema de coordenadas local em função das deformações e curvaturas globais ϵ_Z , K_X , K_Y , K_ω e K_{XY} .

Alguns comentários que envolvem a importância da Eq. (3.36) são relevantes de serem expostos. Os trabalhos desenvolvidos em [18–20] e o detalhado neste texto [9] utilizam as mesmas equações constitutivas (Eq. (3.34)). O grande diferencial está na determinação da deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$. Os trabalhos [18–20] determinam-a à partir da Eq. (3.21) enquanto no trabalho [9] determina-se a deformação angular à partir da Eq. (3.36). Assim, obtém-se $\bar{\gamma}_{sz}$ diretamente da equação constitutiva do laminado que constitui a parede da viga. Esta pequena mudança tem implicações grandiosas. Ao se fazer uso da Eq. (3.36) leva-se em conta toda a anisotropia do material constituinte da viga. Dessa forma, se faz desnecessária a definição de um módulo de cisalhamento equivalente $G(s, z)$ para o cálculo da função de torção como em [18] ou, ainda, a consideração de uma quantidade $\bar{\gamma}_{sz}t$ constante ao longo do perímetro da seção transversal da viga que não possui qualquer significado físico como é realizado em [19, 20]. Estes últimos três trabalhos citados não obtém êxito na consideração da anisotropia do material no cálculo da deformação angular da linha média. Por fim, conclui-se que os modelos desenvolvidos nestes trabalhos podem resultar em erros significativos no cálculo das variáveis de interesse.

No Capítulo 7, serão mostrados comparativos entre os modelos desenvolvidos em [9], as outras modelagens supracitadas e resultados obtidos via Método dos Elementos Finitos no *software* comercial ANSYS e os documentados em [9] utilizando-se o ABAQUS.

3.5 Equações Constitutivas no Sistema de Coordenadas Global

Para se determinar a equação constitutiva no sistema de coordenadas global que relaciona as forças e momentos F_Z , M_X , M_Y , M_ω e M_Z com as deformações e curvaturas ϵ_Z , K_X , K_Y , K_ω e K_{XY} , é conveniente que se trabalhe com a densidade de energia de deformação (ou energia de deformação por unidade de comprimento) da viga. A última é dada por [9]:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \oint \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{sz}\gamma_{sz}) dnds. \quad (3.40)$$

Substituindo as expressões para as tensões e deformações dadas pelas Eqs. (3.10), (3.30) e (3.31), tem-se:

$$\Gamma = \frac{1}{2} (F_Z \epsilon_Z + M_X K_X + M_Y K_Y + M_\omega K_\omega + M_Z K_{XY}). \quad (3.41)$$

O esforço normal F_Z , momentos fletores M_X , M_Y e o bi-momento M_ω resultam da tensão normal σ_{zz} e são dados por:

$$F_Z = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zz} dnds = \oint N_{zz} ds, \quad (3.42a)$$

$$M_X = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zz} (Y - n \cos \alpha) dnds = \oint (N_{zz} Y - M_{zz} \cos \alpha) ds, \quad (3.42b)$$

$$M_Y = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zz} (X + n \sin \alpha) dnds = \oint (N_{zz} X + M_{zz} \sin \alpha) ds, \quad (3.42c)$$

$$M_\omega = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zz} (\omega - nq) dnds = \oint (N_{zz} \omega - M_{zz} q) ds. \quad (3.42d)$$

O momento torsor M_Z resulta da ação da tensão de cisalhamento σ_{sz} . Note que, da Figura 3.5.1, o torque gerado devido à ação do cisalhamento em um ponto arbitrário da parede na seção transversal da viga é igual a $\sigma_{sz}(r+n)$. Dessa maneira, o torque total que é gerado no perímetro que passa por este mesmo ponto genérico é tal que:

$$T_Z = \oint \sigma_{sz}(r+n) dS, \quad (3.43)$$

onde $dS = (r+n)d\xi$ e $ds = rd\xi$ como mostrado na Figura 3.5.1.

Dessa forma, tem-se que $dS = (1+n/r)ds$ e, substituindo esta expressão na Eq. (3.43) e integrando o resultado através da espessura da parede, obtemos o momento torsor como:

$$M_Z = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{sz}(r+2n+n^2/r) dnds. \quad (3.44)$$

Como em geral $n \ll r$ segue que $n^2/r \approx 0$. Além disso, negligencia-se novamente o fluxo de cisalhamento N_{szB} devido à flexão não-uniforme. Então, a expressão final para o momento torsor é dada por:

$$M_Z = \oint \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{sz}(r+2n) dnds = \oint (N_{sz} r + 2M_{sz}) ds, \quad (3.45)$$

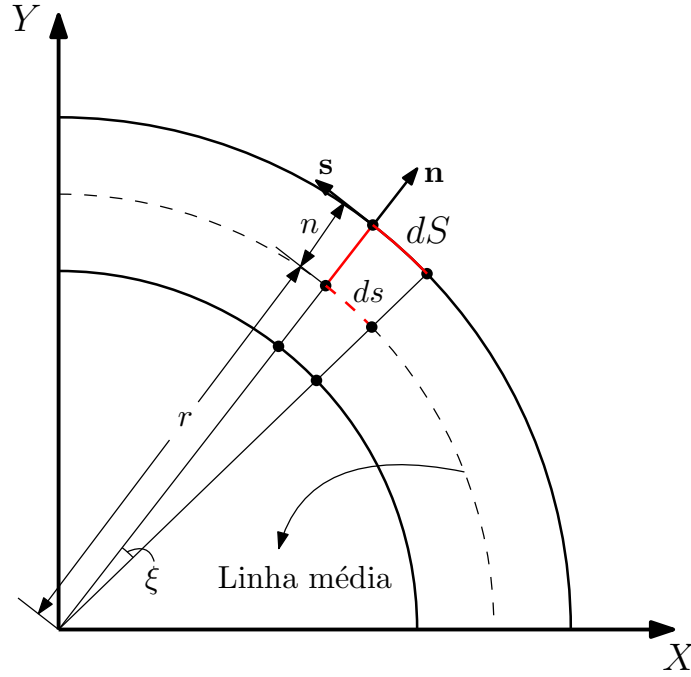


Figura 3.5.1 – Desenho esquemático para a determinação da tensão de cisalhamento σ_{sz} em um ponto genérico da seção transversal da viga

onde $N_{sz} = N_{szT}$.

Finalmente, ao substituir as Eqs. (3.34) e (3.35) nas Eqs. (3.42) e (3.45), resulta na correlação entre os esforços e momentos globais em termos das deformações e curvaturas locais da parede da viga. As últimas são dadas em termos das deformações e curvaturas globais através das equivalências expressas nas Eqs. (3.12), (3.29) e (3.36). Por fim, a equação constitutiva no sistema de coordenadas global é expressa como:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \\ M_\omega \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_Z \\ K_X \\ K_Y \\ K_{XY} \\ K_\omega \end{array} \right\}, \quad (3.46)$$

e a matriz de rigidez $E_{ij} = E_{ji}$ é simétrica. Os termos da matriz de rigidez estão explícitos no Anexo B. Além disso, no Apêndice A está descrito o funcionamento do algoritmo desenvolvido para os cálculos de vigas de paredes finas compósitas.

4 Critérios de Falha para Materiais Compósitos

4.1 Introdução

A definição de falha varia de uma aplicação para a outra. Não necessariamente ela significa que a estrutura não suporta aos carregamentos no sentido de que esta sofre danos catastróficos de maneira irreversível. Em determinados casos, por exemplo, a falha pode significar que a estrutura sofreu deslocamentos maiores do que os aceitáveis como parâmetros de um determinado projeto. Noutros casos, pode significar a completa separação e/ou fratura dos constituintes.

Para materiais compósitos, existem dois tipos principais de falha: o *First Ply Failure* (FPF) e o *Last Ply Failure* (LPF) e o dano geralmente inicia-se antes mesmo de qualquer mudança na aparência física e/ou no comportamento macroscópico da estrutura. Além disso, na maioria dos casos observados, o defeito não ocorre de maneira uniforme em toda a estrutura. Geralmente, tem-se a ruptura de algumas fibras e camadas anteriormente às outras. Dessa forma, pode-se considerar que a falha (no sentido de diminuição da capacidade de resposta mecânica) do compósito ocorre quando se tem o colapso de uma camada ou de todas elas. Assim, por muitas vezes, cabe ao analista definir quando que determinada estrutura não corresponde mais aos requisitos de projeto.

Várias teorias de falha para materiais compósitos foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas sendo a maioria destes critérios empíricos adaptados daqueles existentes para materiais metálicos. Tais critérios podem ser classificados em dois grandes grupos: os baseados em fenômenos físicos e os que não se baseiam. A maior diferença entre estes é que os baseados em fenômenos físicos são capazes de prever como a falha ocorre. Ou seja, as teorias baseadas em abordagens fenomenológicas são capazes de prever **como** e **quando** o dano ocorrerá e, além disso, qual será o comportamento a posteriori do material.

Os mecanismos que levam à falha de um material compósito ainda não são compreendidos em completude [43]. Isto torna-se ainda mais evidente nos casos em que o colapso ocorre devido à compressão tanto da matriz quanto das fibras que constituem uma lâmina. Devido às grandes dificuldades inerentes a estas caracterizações, foram re-

alizados até o momento do presente texto duas edições do *World-Wide Failure Exercise* (WWFE) [44, 45] que tem por objetivo comparar as várias existentes teorias de falha e colocá-las à prova ao analisar quais delas melhor se adequam aos dados experimentais levantados.

Neste capítulo, serão abordados três critérios: Hashin, LaRC03 e Tsai-Wu. Os dois primeiros baseiam-se em fenômenos físicos enquanto o último não. O foco da discussão mantém-se nas teorias de Tsai-Wu e LaRC03, que são comparadas ao final deste trabalho no Capítulo 7.

4.2 Modos de Falha

Os cinco principais modos de falha para materiais compósitos do tipo FRP são [46]:

- **Delaminação:** laminados cujas camadas estão orientadas de forma distinta tendem à delaminar. A rigidez à flexão de painéis delaminados têm uma redução significativa mesmo quando nenhum dano é visível.
- **Falha da matriz sob compressão:** comumente se é dito que a matriz falha devido ao cisalhamento da mesma. De fato, a falha ocorre nalgum ângulo da direção de carregamento, evidenciando a natureza cisalhante do processo de falha.
- **Falha da fibra sob compressão:** este modo de falha é altamente influenciado pelo comportamento cisalhante da matriz, pelos vazios e devido a desalinhamentos das fibras. Normalmente, regiões com dobras (*kink bands*) podem ser observadas em menor escala e são resultados de micro-flambagens, falha por cisalhamento da matriz e falha da fibra.
- **Falha da matriz sob tração:** a superfície de fratura resultante deste modo de falha é tipicamente normal à direção de carregamento. A separação de algumas fibras nesta superfície de fratura pode ser observada.
- **Falha da fibra sob tração:** este modo de falha é intenso. Caracteriza-se pela grande quantidade de energia liberada durante o processo e, em estruturas que não são capazes de redistribuir o carregamento, provocam falhas catastróficas.

4.3 Critério de Falha de Hashin

Os primeiros a idealizar que os critérios de falha para materiais compósitos, devido à sua natureza heterogênea, deveriam ser baseados em fenômenos físicos foram Hashin e Rotem [46]. Usando uma abordagem fenomenológica simples, em 1973, o critério de Hashin é um conjunto de dois índices de falha, um para a matriz e outro para as fibras

que constituem uma lâmina [47]. O critério assume uma interação de forma quadrática entre as trações que atuam no plano de falha [43].

Em 1980, o próprio Hashin fez modificações em seu critério de falha anterior. Desta vez, além dos modos de falha para a fibra e para a matriz carregadas sob tração, este passa a distinguir os modos de falha também para cargas compressivas. Ao encontrar grandes dificuldades em se determinar o plano de fratura para o modo de compressão da matriz [43], este usa uma interação quadrática entre invariantes do tensor de tensões.

Como observado pelo próprio Hashin, experimentos conduzidos por outros indicaram que o critério de falha proposto não era capaz de prever com precisão a falha para compressão tanto da fibra quanto da matriz. Tal critério não considera, por exemplo, o acréscimo na resistência aparente ao cisalhamento quando o composto está sujeito à compressão transversal. Além disso, este também não leva em consideração os efeitos do cisalhamento intraplanar que reduzem de forma significativa a resistência efetiva à compressão da lâmina [43]. Assim, melhorias foram propostas por vários pesquisadores, em especial, Sun et. al. [48] e Puck e Schürmann [49, 50].

4.3.1 Melhorias para o modo de compressão da matriz

A primeira melhoria se trata de uma modificação empírica no critério de Hashin de 1973 para falha da matriz sob compressão. Esta tem por objetivo considerar o aumento da resistência aparente ao cisalhamento devido à carga de compressão transversal $\sigma_{22} < 0$. O critério de Sun [48] é dado por:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y^C}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S^L - \eta\sigma_{22}}\right)^2 = 1 \quad (4.1)$$

onde η é uma constante determinada experimentalmente e é definida como um parâmetro de fricção interna do material. Assim, o denominador $S^L - \eta\sigma_{22}$ é tido como uma resistência efetiva ao cisalhamento longitudinal que aumenta com a carga de compressão transversal. Assim como nos critérios de Hashin, o critério de Sun não é capaz de prever a angulação do plano de fratura.

Outra melhoria foi dada por vias do Plano de Atuação de Puck [49]. Nesta proposta, a influência na resistência ao cisalhamento devido à carga de compressão transversal é dada pelo aumento na resistência por vias de um termo que é proporcional à tensão normal σ_n que atua no plano de fratura. O critério de falha de Puck para a matriz sob compressão transversal é:

$$\left(\frac{\tau^T}{S^T - \eta^T\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau^L}{S^L - \eta^L\sigma_n}\right)^2 = 1 \quad (4.2)$$

onde as tensões de cisalhamento τ^T e τ^L atuam no plano de fratura descrito conforme a Figura 4.3.1.

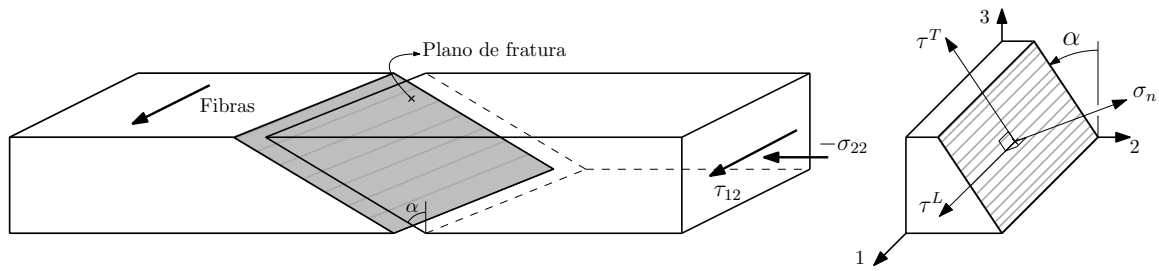


Figura 4.3.1 – Fratura de uma lâmina UD sujeita à compressão transversal e cisalhamento intraplano

A contribuição direta de σ_{22} é eliminada ao se assumir que o início da fratura é independente da resistência à compressão transversal. Novamente, as constantes η^T e η^L dizem respeito à fricção interna e são determinadas experimentalmente para a direção transversal e longitudinal às fibras, respectivamente.

O critério de Puck é capaz de calcular o ângulo α do plano de fratura. A falha da matriz, quando dominada pelo cisalhamento no plano principal, ocorre em um plano normal à lâmina e paralelo às fibras (i.e. $\alpha = 0^\circ$) [49]. Quando aplica-se a carga de compressão transversal, a angulação do plano de fratura passa a ser próxima de 40° e tem um salto com o aumento da compressão para o valor de $53^\circ \pm 2^\circ$ para o caso de compressão transversal pura.

4.4 Critério de Falha LaRC03

Desenvolvido em 2005, o critério de falha LaRC03 é oriundo do centro de pesquisas da NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) localizado em Hampton, Virginia, nos Estados Unidos da América (*Langley Research Center*) [51].

O critério LaRC03 pode ser resumido como um conjunto de seis critérios de falha distintos baseados em abordagens fenomenológicas para prever a falha de compósitos unidirecionais do tipo FRP [43]. Como os modos de falha são distintos, os índices de falha não relacionam-se entre si [51]. Em consequência, geralmente observam-se envelopes de falha que não são suaves onde os vértices destes indicam mudanças dos modos de falha [46]. Por fim, os seis modos correspondem ou à falha da matriz ou à falha da fibra sob estado plano de tensões [43].

4.4.1 Falha da matriz sob compressão transversal

O critério de falha de Mohr-Coulomb geralmente é utilizado em aplicações que o plano de fratura sob tração difere do plano que é observado sob compressão [43]. A representação geométrica do critério de Mohr-Coulomb (sob compressão uniaxial) é reproduzida pelo círculo de Mohr na Figura 4.4.1 para um ângulo do plano de fratura de 53° , típico de compósitos laminados sob compressão transversal [49].

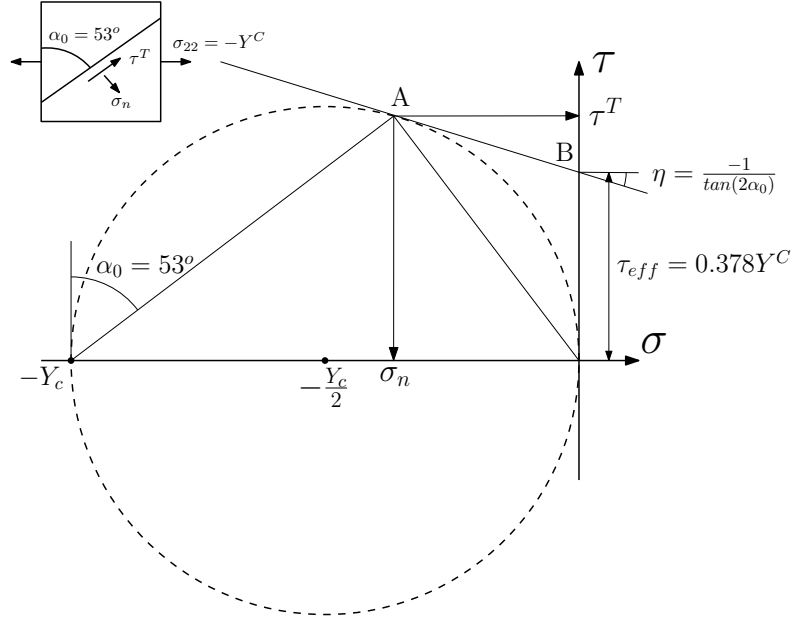


Figura 4.4.1 – Círculo de Mohr para compressão uniaxial e cisalhamento transversal efetivo

Da Figura 4.4.1, tem-se que a \overline{AB} , tangente ao círculo no ponto A , é a linha de fratura de Coulomb. O critério postula, para um estado biaxial de tensões, que a fratura ocorre para todo círculo de Mohr que for tangente à linha de fratura de Coulomb.

A tensão de cisalhamento efetiva relaciona-se com as tensões τ^T e σ_n através da expressão $\tau_{\text{eff}} = \tau^T + \eta\sigma_n$. Além disso, $\tan^{-1}(\eta)$ é chamado de ângulo de fricção interna e é assumido como uma constante do material. Por fim, quando $\eta = 0$, o critério de Mohr-Coulomb é equivalente ao de Tresca [43].

No caso geral, definem-se as tensões de cisalhamento efetivas, ortogonais entre si, como:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= \langle |\tau^T| + \eta^T \sigma_n \rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \langle |\tau^L| + \eta^L \sigma_n \rangle,\end{aligned}\quad (4.3)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ é o operador de Mc Cauley [43, 52] definido por:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Assim, a falha da matriz sob compressão é assumida como resultado de uma interação polinomial quadrática entre as tensões de cisalhamento efetivas que atuam no plano de fratura. O índice de falha é dado por:

$$\mathbf{LaRC03\#1} \quad FI_M = \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1, \quad (4.5)$$

onde S^T e S_{is}^L são as resistências ao cisalhamento transversal e longitudinal, respectivamente. O subscrito “is”, observado no termo S_{is}^L , indica que deve-se usar a resistência *in*

*situ*¹ da camada ao invés da resistência usual. Isto se deve ao efeito restritivo que camadas adjacentes à lâmina em análise possuem quando dispostas em um laminado. Este efeito traduz-se em um acréscimo da resistência efetiva de uma lâmina, ou seja, *in situ*. Note que a resistência ao cisalhamento transversal é tratada como independente de efeitos *in situ* [43].

As componentes de tensão atuantes no plano de fratura podem ser expressas em função das tensões no sistema local e do ângulo α como:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \alpha, \\ \tau^T &= -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau^L &= \tau_{12} \cos \alpha.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Portanto, combinando as Eqs. (4.3) e (4.6), obtém-se as tensões de cisalhamento efetivas para $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ como:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= \left\langle -\sigma_{22} \cos \alpha \left(\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \right\rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \left\langle \cos \alpha \left(|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha \right) \right\rangle.\end{aligned}\tag{4.7}$$

4.4.1.1 Cálculo dos coeficientes de influência e da resistência ao cisalhamento transversal

Os coeficientes de fricção interna do material (ou, simplesmente, coeficientes de influência) são obtidos à partir do caso de compressão transversal uniaxial. Na falha, tem-se que $\sigma_{22} = -Y^C$. Assim, a tensão de cisalhamento transversal efetiva é dada como:

$$\tau_{\text{eff}}^T = S^T = Y^C \cos \alpha \left(\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right).\tag{4.8}$$

Para este caso, a fratura ocorre em um ângulo α_0 que maximiza o cisalhamento transversal efetivo. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{\text{eff}}^T}{\partial \alpha} = 0 &= -\sin \alpha_0 (\sin \alpha_0 - \eta^T \cos \alpha_0) + \cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 + \eta^T \sin \alpha_0), \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0 + 2\eta^T \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 &= 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

E, resolvendo a Eq. (4.9) para η^T , obtém-se:

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0}.\tag{4.10}$$

Para a maioria dos compósitos UD de grafite-epóxi, a falha por cisalhamento transversal ocorre para $\alpha_0 = 53^\circ \pm 2^\circ$ [49]. Portanto, tem-se que $0.21 \leq \eta^T \leq 0.36$. Note que se $\alpha_0 = 45^\circ$, então $\eta^T = 0$.

¹ *In situ* vem do Latim e significa “no lugar”. No contexto, a expressão remete à posição da camada no laminado.

Substituindo a Eq. (4.10) na Eq. (4.8), obtém-se a expressão que define S^T como:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right). \quad (4.11)$$

Logo, para um ângulo de fratura típico de 53° , tem-se que $S^T = 0.378 Y^C$ como mostra a Figura 4.4.1. Em alguns casos, é comum aproximar-se $S^T = 0.5 Y^C$, o que implica em $\alpha_0 = 45^\circ$ e, conseqüentemente, $\eta^T = 0$. Ao fazer uso desta aproximação, o critério de Hashin de 1980 torna-se idêntico ao de 1973 [43].

Devido à dificuldade em se realizar ensaios biaxiais [43], o coeficiente de influência longitudinal η^L pode ser estimado [49] à partir de:

$$\frac{\eta^L}{S^L} = \frac{\eta^T}{S^T} \Rightarrow \eta^L = -\frac{S^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0}, \quad (4.12)$$

sendo assim escrito em termos das resistências ao cisalhamento longitudinal e à compressão transversal.

4.4.1.2 Determinação do ângulo do plano de fratura

O ângulo do plano de fratura é de fácil obtenção por vias experimentais para o caso de compressão transversal uniaxial [43]. Contudo, para carregamentos combinados, isto não é realidade. Para calculá-lo, deve-se maximizar o índice de falha na Eq. (4.5) para a faixa de ângulos possíveis $0^\circ \leq \alpha \leq \alpha_0$. A Figura 4.4.2 exibe vários envelopes de falha para alguns ângulos do plano de fratura para o caso de compressão transversal e cisalhamento intraplanar.

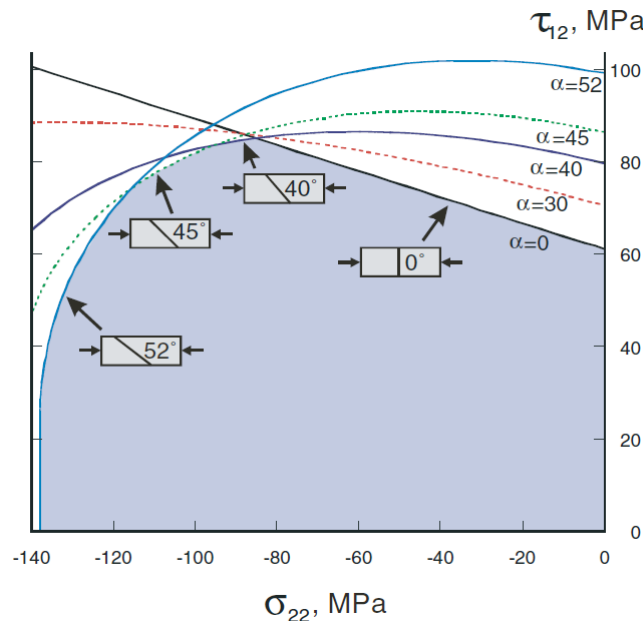


Figura 4.4.2 – Envelopes de falha da matriz para uma lâmina de fibra de vidro-epóxi típica sob compressão transversal e cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

Conforme observado na Figura 4.4.2, existem vários possíveis ângulos do plano de fratura que maximizam o índice de falha e eles dependem intimamente do valor da carga de compressão transversal à qual a lâmina está sujeita. Para valores pequenos de σ_{22} , tem-se $\alpha = 0^\circ$. Quando a tensão σ_{22} atinge valores de aproximadamente $2/3$ da resistência à compressão transversal Y^C , o ângulo de fratura muda para $\alpha = 40^\circ$ e, posteriormente, aumenta rapidamente para o valor de $\alpha = \alpha_0$ correspondente ao caso de compressão transversal uniaxial.

4.4.2 Falha da matriz sob tração transversal

4.4.2.1 Efeito *in situ*

O trincamento transversal da matriz normalmente é considerado um modo de falha menos catastrófico a curto prazo. Geralmente, isto implica em uma redução pouco expressiva da rigidez total da estrutura, o que não é de fácil identificação durante um ensaio. Contudo, as trincas transversais podem afetar no desenvolvimento do dano na matriz [43].

O efeito *in situ* foi primeiramente detectado por Parvizi [53] durante ensaios de tração em laminados cruzados de fibra de vidro [43]. O efeito caracteriza-se pela obtenção de maiores resistências à tração e ao cisalhamento transversais de uma lâmina pois esta tem deformação restringida pelas outras camadas com diferentes orientações em um laminado, quando comparada às resistências obtidas para a mesma lâmina em um laminado unidirecional [46]. A resistência *in situ* depende também do número de lâminas agrupadas e da orientação das fibras das camadas restritoras.

Portanto, para prever o trincamento da matriz de um laminado sujeito à cisalhamento intraplano e tração transversal, o critério de falha deve ser capaz de computar as resistências *in situ*. A Figura 4.4.3 ilustra o efeito *in situ* para a resistência à tração transversal em função da espessura total de lâminas com fibras orientadas à 90° empilhadas conjuntamente. Por fim, note que a Figura 4.4.3 indica maiores resistências para lâminas menos espessas.

4.4.2.2 Mecânica da fratura de uma lâmina trincada

As resistências *in situ* são calculadas utilizando soluções da mecânica da fratura para a propagação de trincas em uma lâmina restringida. A trinca representa um defeito de fabricação idealizado como estando presente no plano (1, 3) e possuindo comprimento $2a_0$ através da espessura t da lâmina conforme é mostrado na Figura 4.4.4.

Fisicamente, a trinca representa uma distribuição de descolamentos da interface fibra-matriz que podem estar presentes em uma lâmina como consequência dos defeitos provenientes da manufatura e/ou de tensões térmicas residuais resultantes dos diferentes

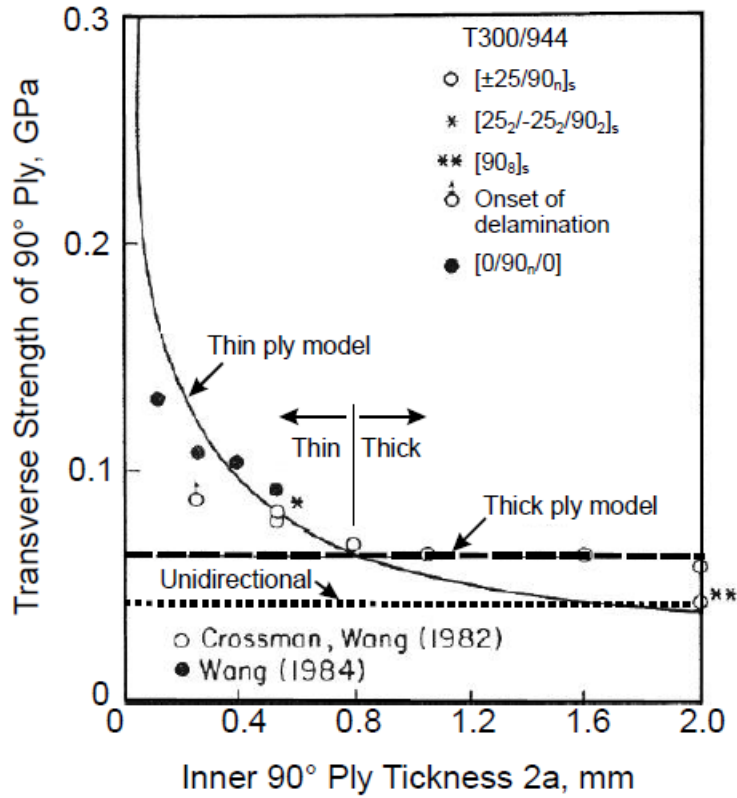


Figura 4.4.3 – Resistência à tração transversal como função do número de camadas empilhadas em um laminado utilizando os modelos de Dvorak [54] baseados nos dados experimentais coletados por Wang [55]. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

coeficientes de expansão térmica tanto da fibra quanto da matriz [46]. Portanto, a trinca representa o efeito macroscópico destes descolamentos entre fibras e matriz que ocorrem na escala micromecânica [55].

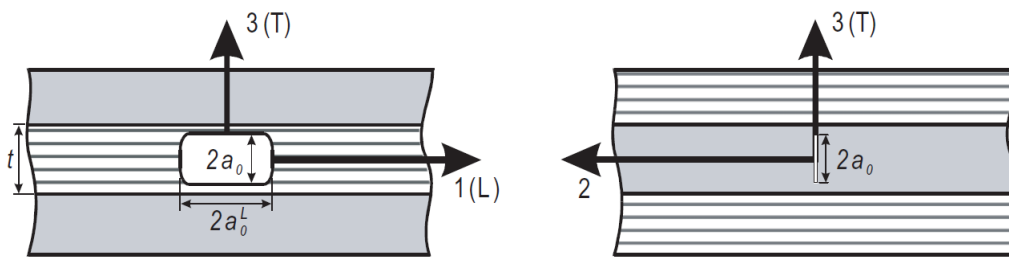


Figura 4.4.4 – Idealização da geometria da trinca proposta por Dvorak [54]. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

Assume-se estado plano de tensões. Dessa forma, a tensão de tração transversal $\sigma_{22} > 0$ é associada como o Modo I (abertura) de carregamento enquanto a tensão de cisalhamento τ_{12} é associada ao Modo II (cisalhamento). O Modo III de rasgamento surge na análise apenas nos casos de carregamentos combinados de materiais ortotrópicos com comportamento em cisalhamento não-linear [46]. Assim, no presente texto, considera-se que o material é ortotrópico linear [43]. A Figura 4.4.5 mostra os modos de deslocamento de uma trinca superficial.

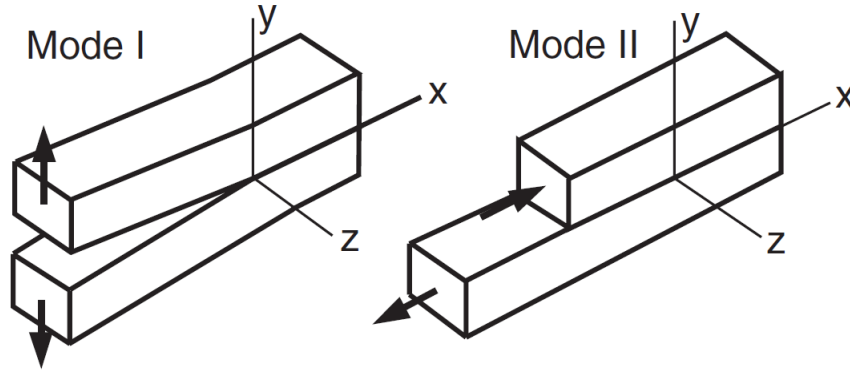


Figura 4.4.5 – Modos de deslocamento de uma trinca superficial. Fonte: adaptado de Narayanasamy, Prasad e Dowling [56]

Dessa forma, a trinca pode crescer em duas direções: longitudinal (L) e/ou transversal (T). Note que na presente análise a direção transversal é correspondente à direção 3 em conflito com a notação utilizada no Capítulo 2 quando desenvolveu-se a Teoria Clássica dos Laminados. Assim, faz-se necessário clarificar que doravante, na presente seção, a direção transversal (T) corresponde à direção 3.

A taxa de dissipação de energia para o crescimento da trinca na direção transversal para os Modos I e II de carregamento são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} G_I(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2, \\ G_{II}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde os parâmetros Λ_{jj}^0 são calculados como [54]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{22}^0 &= 2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right), \\ \Lambda_{44}^0 &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

As correspondentes tenacidades à fratura, relativas a cada um dos modos, são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 \left(Y_{is}^T \right)^2, \\ G_{IIc}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 \left(S_{is}^L \right)^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde Y_{is}^T e S_{is}^L são as resistências *in situ* à tração e ao cisalhamento transversais, respectivamente.

As taxas de dissipação de energia para a propagação da trinca na direção longitudinal nos modos I e II são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} G_I(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2, \\ G_{II}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observa-se que $G_i(L)$, com $i = I$ e II , é dependente do comprimento da trinca a_0 na direção transversal e não do comprimento a_0^L da mesma na direção longitudinal. As correspondentes tenacidades à fratura são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 \left(Y_{is}^T \right)^2, \\ G_{IIc}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 \left(S_{is}^L \right)^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Em posse das últimas expressões para as componentes da taxa de dissipação de energia e da tenacidade à fratura, se é capaz de compilar todas estas e formular um critério de falha para prever a propagação da trinca como idealizada na Figura 4.4.4. Sob carregamento combinado de tração e cisalhamento transversais, a taxa crítica de dissipação de energia G_c é função dos efeitos combinados de todos os mecanismos microscópicos de absorção de energia como, por exemplo, o de geração de uma nova superfície de fratura [43].

Observações em escala microscópica da superfície de fratura indicam que sua topografia depende fortemente do tipo de carregamento. Com o crescimento proporcional do fator de concentração de tensões K_{II} , mais *hackles* são observados na matriz, o que indica uma maior absorção de energia associada à extensão da trinca [43]. Portanto, propõe-se inicialmente um critério de falha que combina os dois modos de carregamento em termos dos fatores de concentração de tensões K_I e K_{II} relacionados por uma aproximação polinomial de primeira ordem. Este é conhecido como critério de Hahn e é a base para o LaRC03#2. Dessa forma,

$$(1 - g) \sqrt{\frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)}} + g \frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)} + \frac{G_{II}(i)}{G_{IIc}(i)} = 1, \text{ com } i = T, L, \quad (4.18)$$

onde g é definido como:

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y_{is}^T}{S_{is}^L} \right)^2. \quad (4.19)$$

Finalmente, pode-se definir um índice de falha em termos das tensões atuantes nas lâminas e das resistências *in situ* das mesmas. Substituindo na Eq. (4.18) as Equações (4.13), (4.15) ou (4.16) e (4.17), obtém-se:

$$\text{LaRC03\#2} \quad FI_M = (1 - g) \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1. \quad (4.20)$$

4.4.2.3 Falha de lâminas espessas empilhadas

Uma lâmina é dita espessa quando o comprimento da trinca é muito menor que a espessura da camada, ou seja, quando $2a_0 \ll t$. A Figura 4.4.6 mostra a geometria da lâmina descrita. Uma trinca que possua tais características pode se propagar tanto nas direções longitudinal quanto transversal. Ao comparar as Eqs. (4.13) e (4.16) é possível

perceber que uma trinca possui taxa de dissipação de energia duas vezes maior na direção transversal do que na longitudinal para um mesmo estado de tensões. Além disso, a Eq. (4.13) indica que a trinca cresce de forma instável na direção transversal tendo em vista que a taxa de liberação de energia é proporcional ao comprimento $2a_0$. Assim que a trinca alcança as camadas ditas restritoras, esta pode propagar na direção longitudinal e/ou induzir a delaminação [43].

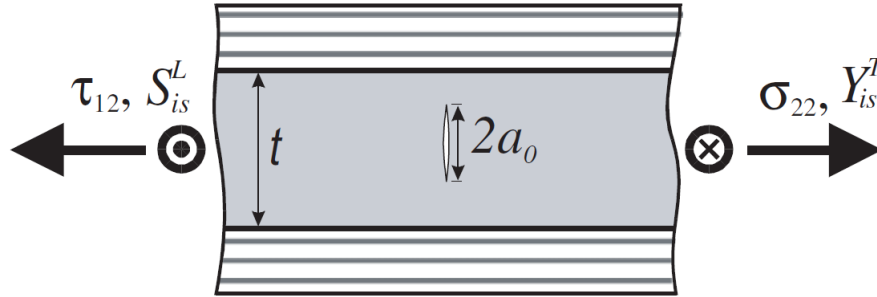


Figura 4.4.6 – Geometria de uma trinca contida em uma lâmina espessa sujeita à tração e ao cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

As resistências *in situ* para lâminas espessas empilhadas podem ser calculadas por:

$$Y_{is}^T = \sqrt{\frac{2G_{Ic}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{22}^0}},$$

$$S_{is}^L = \sqrt{\frac{2G_{IIc}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{44}^0}}. \quad (4.21)$$

Como consequência da Eq. (4.21), as resistências *in situ* são independentes da espessura da lâmina o que está em concordância com o comportamento evidenciado na Figura 4.4.3.

4.4.2.4 Falha de lâminas finas empilhadas

De forma análoga ao caso das lâminas espessas, define-se uma lâmina como fina quando esta possui espessura menor do que a trinca, ou seja, quando $t < 2a_0$. Desta forma, o defeito se estende através de toda a camada como mostra a Figura 4.4.7.

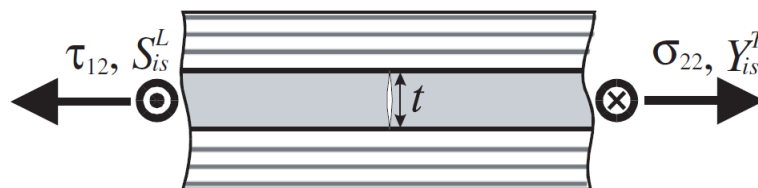


Figura 4.4.7 – Geometria de uma trinca através de uma lâmina fina sujeita à tração e ao cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

Neste caso, a trinca pode crescer apenas na direção longitudinal e/ou desencadear uma delaminação. Assim, as resistências *in situ* são dadas por:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{8G_{Ic}(L)}{\pi t \Lambda_{22}^0}}, \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{8G_{IIc}(L)}{\pi t \Lambda_{44}^0}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

que, desta vez, dependem da espessura t da lâmina decrescendo proporcionalmente à raiz quadrada da mesma. Novamente, este comportamento é evidenciado na Figura 4.4.3.

4.4.2.5 Falha de laminados unidirecionais

A fratura de laminados unidirecionais é tida como um caso especial de lâmina espessa [54]. Assim, todos os parâmetros são tomados como na análise de lâminas espessas. Contudo, como não existem camadas restritoras, a trinca inicial encontra-se na superfície do laminado. Para carregamentos de tração, a trinca é idealizada como localizada na borda do laminado e para o caso de cisalhamento intraplanar, a trinca localiza-se no centro (não há superfície livre na borda). Tais considerações implicam em um aumento da taxa de dissipação de energia. As geometrias das trincas para ambos os casos de carregamento são exibidas na Figura 4.4.8.

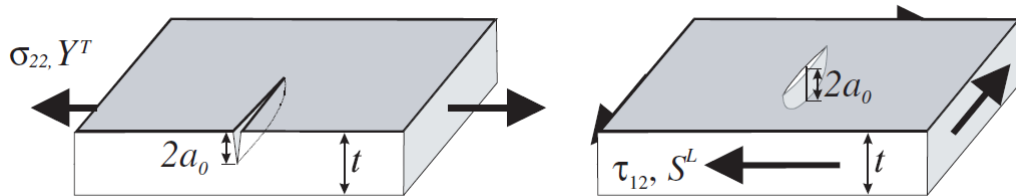


Figura 4.4.8 – Geometria das trincas nos laminados UD para carregamentos de tração transversal e cisalhamento intraplanar. Fonte: Davila, Camanho e Rose [43]

A propagação da trinca para os Modos I e II de carregamento é dada por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(T) &= 1.12^2 \pi a_0 \Lambda_{22}^0 (Y^T)^2, \\ G_{IIc}(T) &= \pi a_0 \Lambda_{44}^0 (S^L)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde as resistências são as usuais.

As resistências *in situ* para lâminas espessas podem ser obtidas a partir das resistências para laminados UD como:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= 1.12 \sqrt{2} Y^T, \\ S_{is}^L &= \sqrt{2} S^L. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Além disso, a razão g de tenacidades para uma lâmina espessa também pode ser calculada em termos das resistências para laminados UD. Substituindo as Equações (4.23) na Equação (4.19), obtém-se:

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = 1.12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y^T}{S^L} \right)^2. \quad (4.25)$$

4.4.3 Falha da fibra sob tração

Resultados experimentais indicam que a falha da fibra sob tração deve ser analisada por vias da deformação efetiva que atua nas fibras de uma lâmina unidirecional [49]. Contudo, a diferença entre se usar apenas a deformação em sua forma usual resulta em diferenças que não são significativas [50]. Consequentemente, o critério de falha LaRC03 para a falha das fibras sob tração é simplesmente o critério da máxima deformação. Então, o índice de falha para tração na direção longitudinal é:

$$\text{LaRC03\#3} \quad FI_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T} \leq 1 \quad (4.26)$$

onde ε_{11} é a deformação da lâmina na direção das fibras e ε_1^T é a deformação na direção longitudinal quando ocorre a falha devido aplicação de carga trativa na mesma direção. Este índice de falha é independente da fração volumétrica das fibras e dos módulos de Young da lâmina [43].

4.4.4 Falha da fibra sob compressão

A falha das fibras sob compressão ocorre com o colapso destas devido ao cisalhamento provocado pelas regiões com dobras onde há desalinhamento das fibras e, também, devido ao dano provocado na matriz que o suporta. O dobramento das fibras (*fiber kinking*) se expressa como uma deformação ao cisalhamento que leva à formação de uma região com dobra das fibras [43]. Este é o modo de falha mais comum para compósitos FRP sob compressão longitudinal [57].

O desalinhamento das fibras é idealizado como uma região da lâmina que possui ondulações, como mostra a Figura 4.4.9. As tensões no sistema de coordenadas local das fibras desalinhas são expressas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^m &= \cos^2 \phi \sigma_{11} + \sin^2 \phi \sigma_{22} + 2 \sin \phi \cos \phi |\tau_{12}|, \\ \sigma_{22}^m &= \sin^2 \phi \sigma_{11} + \cos^2 \phi \sigma_{22} - 2 \sin \phi \cos \phi |\tau_{12}|, \\ \tau_{12}^m &= -\sin \phi \cos \phi \sigma_{11} + \sin \phi \cos \phi \sigma_{22} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) |\tau_{12}|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na falha sob compressão uniaxial, tem-se $\sigma_{11} = -X^C$ e $\sigma_{22} = \tau_{12} = 0$. Substituindo na Eq. (4.28) resulta em $\sigma_{22}^m = -\sin^2 \phi^C X^C$ e $\tau_{12}^m = \sin \phi^C \cos \phi^C X^C$ onde ϕ^C é o ângulo total de desalinhamento **para o caso de compressão uniaxial pura**.

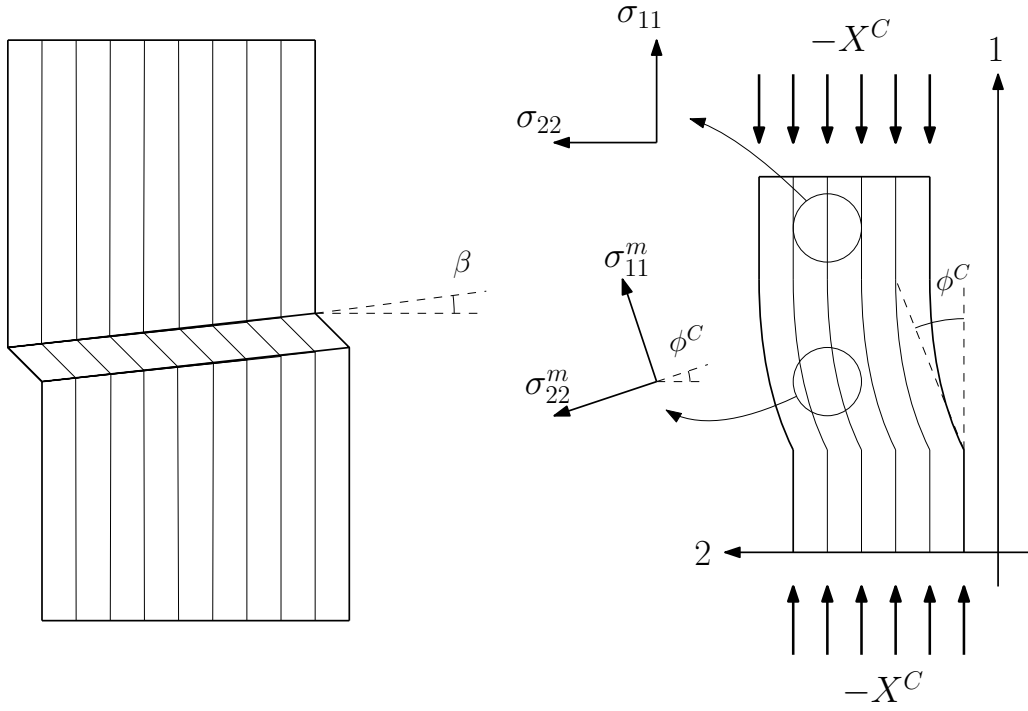


Figura 4.4.9 – Região com dobras conhecida como *kink band* (esq.) e ondulações locais representantes do desalinhamento das fibras (dir.)

Para calcular o índice de falha para o dobramento das fibras, substitui-se as tensões normal σ_{22}^m e de cisalhamento τ_{12}^m na Eq. (4.5) que é o índice de falha para compressão da matriz. O modo de falha de dobramento das fibras é dominado pela tensão de cisalhamento implicando que o ângulo do plano de fratura é igual a 0° quando se tem $\tau_{\text{eff}} = 0$. O critério de falha para a matriz torna-se:

$$\tau_{\text{eff}}^L = X^C \left(\sin \phi^C \cos \phi^C - \eta^L \sin^2 \phi^C \right) = S_{\text{is}}^L. \quad (4.28)$$

onde a resistência *in situ* ao cisalhamento longitudinal é definida como na Eq. (4.21) para lâminas espessas e como na Eq. (4.22) para lâminas finas.

Resolvendo para ϕ^C , obtém-se:

$$\tan^2 \phi^C \left(\frac{S_{\text{is}}^L}{X^C} + \eta^L \right) - \tan \phi^C + \left(\frac{S_{\text{is}}^L}{X^C} \right) = 0. \quad (4.29)$$

que é uma equação quadrática. A menor das duas raízes que são soluções da Eq. (4.29) é dada por:

$$\phi^C = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(S_{\text{is}}^L/X^C + \eta^L)(S_{\text{is}}^L/X^C)}}{2(S_{\text{is}}^L/X^C + \eta^L)} \right). \quad (4.30)$$

O ângulo total de desalinhamento ϕ pode ser decomposto em duas parcelas: uma referente a um desalinhamento inicial ϕ^0 , provocado por erros de fabricação, e outra referente ao desalinhamento rotacional ϕ^R provocado pelo cisalhamento. Note que, não necessariamente, $\phi = \phi^C$. Usando a Eq. (4.28) e considerando válida a aproximação de

pequenos ângulos, obtém-se:

$$\begin{aligned}\phi^R &= \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} = \frac{-\phi\sigma_{11} + \phi\sigma_{22} + |\tau_{12}|}{G_{12}}, \\ \phi^0 &= \phi^C - \phi^R|_{XC} = \phi^C - \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}}|_{XC} \Rightarrow \phi^0 = \left(1 - \frac{X^C}{G_{12}}\right) \phi^C,\end{aligned}\quad (4.31)$$

onde usa-se $|\tau_{12}|$ pois o sinal de ϕ é assumido como positivo independentemente da direção do cisalhamento. Como $\phi = \phi^0 + \phi^R$, a solução da Eq. (4.31) é dada por:

$$\phi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C) \phi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (4.32)$$

onde tem-se ϕ em função de ϕ^C .

A falha das fibras sob carregamento de compressão devido à formação de uma região com dobra das mesmas é prevista utilizando as tensões como na Eq. (4.28) e o critério para falha da matriz sob tração ou compressão.

Para carregamento compressivo da matriz na direção transversal ($\sigma_{22}^m < 0$), utiliza-se o índice baseado no critério de Mohr-Coulomb da Eq. (4.5) com $\alpha = 0^\circ$ e $\tau_{\text{eff}} = 0$. O critério de falha para o dobramento das fibras (*fiber kinking*) é dado como:

$$\text{LaRC03\#4} \quad FI_F = \left\langle \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{\text{is}}^L} \right\rangle \leq 1. \quad (4.33)$$

Para carregamento trativo da matriz na direção transversal ($\sigma_{22}^m > 0$), as tensões da Eq. (4.28) são substituídas no critério de falha da matriz sob tração transversal expresso na Eq. (4.20). Assim, o critério de falha para o dobramento das fibras (*fiber kinking*) nestas circunstâncias é dado como:

$$\text{LaRC03\#5} \quad FI_F = (1 - g) \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{\text{is}}^T} \right) + g \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{\text{is}}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^m}{S_{\text{is}}^L} \right)^2 \leq 1. \quad (4.34)$$

4.4.5 Falha da matriz sob compressão biaxial

Nos casos de compressão biaxial, onde se possuem alta carga transversal e moderada carga longitudinal, sendo a primeira destas suportada em maior escala pela matriz e a última pelas fibras, a falha da matriz pode ocorrer sem a formação de dobras e/ou sem qualquer dano causado às fibras. Este modo de falha da matriz é computado ao se substituir as tensões, como expressas no sistema local de desalinhamento da estrutura, no índice de falha dado pela Eq. (4.5). O resultado obtido é dado por:

$$\text{LaRC03\#6} \quad FI_M = \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mL}}{S_{\text{is}}^L} \right)^2 \leq 1, \quad (4.35)$$

onde as tensões de cisalhamento efetivas são definidas como na Eq. (4.7) para o caso do sistema de coordenadas local do desalinhamento das fibras. Dessa forma, é tido que as

tensões de cisalhamento efetivas no desalinhamento das fibras são dadas por:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^{mT} &= \left\langle -\sigma_{22}^m \cos \alpha \left(\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \right\rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^{mL} &= \left\langle \cos \alpha \left(|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m \cos \alpha \right) \right\rangle.\end{aligned}\quad (4.36)$$

4.4.6 Sumário do critério LaRC03

4.4.6.1 Falha da matriz

Para a matriz sob tração transversal ($\sigma_{22} \geq 0$):

$$FI_M = (1 - g) \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right) + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1. \quad (4.37)$$

Para a matriz sob compressão transversal ($\sigma_{22} < 0$):

$$\begin{aligned}\text{Se } \sigma_{11} < Y^C : FI_M &= \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mL}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1, \\ \text{Se } \sigma_{11} \geq Y^C : FI_M &= \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1.\end{aligned}\quad (4.38)$$

4.4.6.2 Falha das fibras

Para as fibras sob tração longitudinal ($\sigma_{11} \geq 0$):

$$FI_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T} \leq 1. \quad (4.39)$$

Para as fibras sob compressão longitudinal ($\sigma_{11} < 0$):

$$\begin{aligned}\text{Se } \sigma_{22}^m < 0 : FI_F &= \left\langle \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{is}^L} \right\rangle \leq 1, \\ \text{Se } \sigma_{22}^m \geq 0 : FI_F &= (1 - g) \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right) + g \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^m}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1.\end{aligned}\quad (4.40)$$

4.4.6.3 Parâmetros do critério

As propriedades necessárias de laminas UD para descrever completamente os envelopes de falha do LaRC03 estão descritas na Tabela 6.

As resistências *in situ* para lâminas finas empilhadas são:

$$\begin{aligned}Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{8G_{Ic}(L)}{\pi t \Lambda_{22}^0}}, \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{8G_{IIc}(L)}{\pi t \Lambda_{44}^0}},\end{aligned}\quad (4.41)$$

Tabela 6 – Propriedades caracterizadoras do critério LaRC03

Parâmetro	Descrição	Necessidade
E_1	Módulo de Young na direção longitudinal	Obrigatório
E_2	Módulo de Young na direção transversal	
G_{12}	Módulo de cisalhamento no plano principal	
ν_{12}	Coefficiente de Poisson principal	
X^T	Resistência à tração na direção longitudinal	
X^C	Resistência à compressão na direção longitudinal	
Y^T	Resistência à tração na direção transversal	
Y^C	Resistência à compressão na direção transversal	
S^L	Resistência ao cisalhamento longitudinal	
$G_{Ic}(L)$	Tenacidade à fratura longitudinal para o Modo I	
$G_{IIc}(L)$	Tenacidade à fratura longitudinal para o Modo II	
α_0	Ângulo do plano de fratura	Opcional
η^L	Coefficiente de fricção interna (ou influência) longitudinal	

onde:

$$\begin{aligned}\Lambda_{22}^0 &= 2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right), \\ \Lambda_{44}^0 &= \frac{1}{G_{12}}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

A razão de tenacidades g é obtida à partir de ensaios de mecânica da fratura ou em termos das propriedades de lâminas unidirecionais. Para lâminas finas:

$$g = \frac{G_{Ic}(L)}{G_{IIc}(L)} \quad (4.43)$$

e, nos outros casos, tem-se:

$$g = 1.12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y^T}{S^L} \right)^2. \quad (4.44)$$

As tensões de cisalhamento efetivas para o caso de compressão da matriz são dadas por:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= \left\langle -\sigma_{22} \cos \alpha \left(\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \right\rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \left\langle \cos \alpha \left(|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha \right) \right\rangle.\end{aligned}\quad (4.45)$$

A resistência ao cisalhamento transversal é tal que:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right) \quad (4.46)$$

e os coeficientes de influência são determinados como:

$$\begin{aligned}\eta^T &= \frac{-1}{\tan 2\alpha_0}, \\ \eta^L &\approx -\frac{S_{is}^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0}, \quad \text{ou de ensaios,} \\ \alpha_0 &= 53^\circ, \quad \text{ou de ensaios.}\end{aligned}\quad (4.47)$$

As tensões no desalinhamento das fibras são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^m &= \cos^2 \phi \sigma_{11} + \sin^2 \phi \sigma_{22} + 2 \sin \phi \cos \phi |\tau_{12}|, \\
\sigma_{22}^m &= \sin^2 \phi \sigma_{11} + \cos^2 \phi \sigma_{22} - 2 \sin \phi \cos \phi |\tau_{12}|, \\
\tau_{12}^m &= -\sin \phi \cos \phi \sigma_{11} + \sin \phi \cos \phi \sigma_{22} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) |\tau_{12}|.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C) \phi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \\
\phi^C &= \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(S_{is}^L/X^C + \eta^L)(S_{is}^L/X^C)}}{2(S_{is}^L/X^C + \eta^L)} \right).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

4.5 Critério de Falha de Tsai-Wu

O critério de falha de Tsai-Wu, datado de 1971, é um dos mais utilizados critérios pelos projetistas devido à simplicidade de sua implementação computacional e, também, por ter caracterização experimental relativamente fácil demandando ao máximo cinco ensaios para sua plena utilização (apenas um destes ensaios é biaxial). Trata-se de um critério de falha que não é baseado em fenômenos físicos e, desta forma, não distingue a falha entre os seus possíveis mecanismos. Tsai e Wu propuseram um critério baseado em uma expansão polinomial quadrática proveniente de uma equação tensorial [34]. A superfície de falha no espaço das tensões é dada por:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \tag{4.50}$$

onde f_i e f_{ij} são tensores de segunda e quarta ordem com índices $i, j = 1, 2, \dots, 6$ da notação tensorial contraída.

Para se prevenir a falha, o lado esquerdo da Eq. (4.50) deve ser menor do que a unidade. A Eq. (4.50) na forma expandida é dada por:

$$\begin{aligned}
&f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_3 \sigma_3 + f_4 \sigma_4 + f_5 \sigma_5 + f_6 \sigma_6 + f_{11} \sigma_1^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2f_{13} \sigma_1 \sigma_3 \\
&+ 2f_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2f_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2f_{16} \sigma_1 \sigma_6 + f_{22} \sigma_2^2 + 2f_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2f_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2f_{25} \sigma_2 \sigma_5 \\
&+ 2f_{26} \sigma_2 \sigma_6 + f_{33} \sigma_3^2 + 2f_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2f_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2f_{36} \sigma_3 \sigma_6 + f_{44} \sigma_4^2 + 2f_{45} \sigma_4 \sigma_5 \\
&+ 2f_{46} \sigma_4 \sigma_6 + f_{55} \sigma_5^2 + 2f_{56} \sigma_5 \sigma_6 + f_{66} \sigma_6^2 = 1.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Para o caso de estado plano de tensões, obtém-se após as simplificações:

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \sigma_6^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1. \tag{4.52}$$

onde os termo lineares na tensão de cisalhamento $\sigma_6 = \tau_{12}$ foram negligenciados por não dependerem do sinal da tensão no sistema de coordenadas principal. Os termos lineares

nas tensões normais são mantidos pois estes levam em conta as diferentes resistências à tração e compressão. Por fim, o termo cruzado f_{12} leva em consideração uma interação entre as tensões normais $\sigma_1 = \sigma_{11}$ e $\sigma_2 = \sigma_{22}$.

Com exceção do termo f_{12} , todos os outros coeficientes de resistência f_i e f_{ij} são determinados através de ensaios uniaxiais. Dessa forma, vários autores sugerem valores empíricos no intervalo $-0.5 < f_{12} < 0.5$. Munidos dos coeficientes cuja obtenção é amplamente documentada [2, 34, 36, 37, 58] e sob estado plano de tensões, o critério de falha de Tsai-Wu é dado por:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^T X^C} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^T Y^C} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{X^T X^C Y^T Y^C}} + \left(\frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C}\right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C}\right) \sigma_2 = 1. \quad (4.53)$$

5 Otimização Genética

5.1 Introdução

Otimização é um processo de busca e comparação de soluções verossímeis para um problema onde seleciona-se a melhor dentre todas as existentes em um universo de soluções possíveis [59] sendo, portanto, um procedimento de minimização (ou maximização) de uma função. Tal processo pode ser complexo devido ao potencial demasiado número de possíveis opções que devem ser testadas para se resolver um determinado tipo de problema. Dessa forma, várias técnicas foram e ainda são desenvolvidas com este intuito.

Em engenharia, cada vez mais busca-se por soluções ótimas para os problemas enfrentados. Estes podem ser das mais variadas naturezas, por exemplo: minimização da massa de uma estrutura [60–62]; maximização do aproveitamento espacial em fazendas eólicas [63, 64]; maximização da autonomia de um veículo qualquer [65, 66] etc. Desta forma, almeja-se um produto final que não tão somente atenda às restrições de um problema/projeto mas que o faça de maneira ótima, aliando as melhores características possíveis a sí.

Dentre a gama de métodos existentes estão os algoritmos genéticos. Estes se baseiam em uma analogia ao processo de evolução darwiniana por meios do mecanismo de seleção natural emponderando-se também da genética mendeliana para realização da otimização. Trata-se portanto de uma abstração da evolução biológica proposta inicialmente por Holland [67].

5.2 Otimização

Matematicamente, tem-se um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D \subset \Omega$, tal que deve-se encontrar um minimizador para f no conjunto D . À f dá-se o nome de **função objetivo** e a D refere-se como **conjunto viável** do problema. Os pontos que pertencem a D nomeiam-se **pontos viáveis**. Tal problema é escrito como [68, 69]:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D. \quad (5.1)$$

Dessa forma, um ponto $\bar{x} \in D$ é um **minimizador global** de f se:

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in D, \quad (5.2)$$

e um **minimizador local** de f se existe uma vizinhança U de \bar{x} tal que:

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in D \cap U. \quad (5.3)$$

Ou seja, $\bar{x} \in D$ é um minimizador local se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\{x \in D : \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$. Percebe-se então que o conceito de vizinhança é similar ao de limite. Este e alguns outros conceitos (e.g. supremo e ínfimo) não serão explorados pois fogem ao escopo deste texto. Para um estudo mais aprofundado da matemática por trás destes (e outros) conceitos recomenda-se as obras de Izmailov e Solodov [68, 69], Gonçalves [70] e Mendelson [71].

Falta então definir o que se conhece por **valor ótimo** de uma função. Tem-se que $\bar{v} \in [-\infty, +\infty]$ definido por:

$$\bar{v} = \inf \{f(x) : x \in D\}, \quad (5.4)$$

é o valor ótimo do problema definido pela Eq. (5.1). Desta maneira, percebe-se que uma função pode assumir vários minimizadores globais mas, o valor ótimo, é o mesmo para todos os minimizadores. Além disso, todo minimizador global é também um minimizador local mas a recíproca não se aplica. A Figura 5.2.1 ilustra bem o que ocorre.

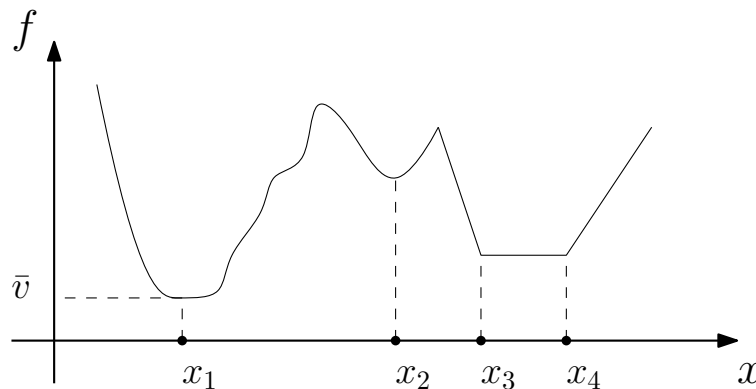


Figura 5.2.1 – Exemplo que ilustra o problema de minimização de f , onde x_1 é o minimizador global e \bar{v} é o valor ótimo. Fonte: adaptado de Izmailov e Solodov [68]

Existem duas formas distintas de lidar com a resolução deste tipo de problema que são os métodos determinísticos e os estocásticos [1]. O primeiro é o mais popularmente conhecido onde, em geral, avaliam-se as derivadas da função que se deseja otimizar para buscar por pontos críticos da mesma. Já o último baseia-se na avaliação do objetivo utilizando parâmetros puramente lógicos para se alcançar a solução. Ou seja, são métodos caracterizados por análises probabilísticas ao longo do processo de otimização.

Os métodos estocásticos levam vantagem com relação aos determinísticos quando se possui um espaço de busca extremamente grande e rico em soluções possíveis. Isto

geralmente ocorre quando se possui um problema com muitas variáveis envolvidas. Desta forma, é aceitável que se encontrem soluções que sejam ótimos locais para estes tipos de problemas. Ao dotar um método estocástico com características evolutivas culminamos nos Algoritmos Evolutivos, que nada mais são do que um tipo de Inteligência Artificial.

Estas características evolutivas são chamadas de **heurísticas**. Basicamente, trata-se de um processo de tomada de decisão baseado em experiências acumuladas. Segundo Colherinhas [1], uma heurística é definida como um conhecimento que não é capaz de ser verificado matematicamente. Não será dada profundidade ao assunto neste texto cabendo apenas mencionar que os algoritmos genéticos pertencem à classe de **meta-heurísticas**. Estas buscam explorar de forma mais eficiente o espaço de busca, sendo aplicadas estratégias baseadas em processos da natureza para fugir de confinamentos de mínimos (ou máximos) locais.

5.3 Algoritmos genéticos

Desenvolvidos nas décadas de 60 e 70 na Universidade de Michigan por John Henry Holland e seus colegas [72], os algoritmos genéticos objetivavam originalmente matematizar os fenômenos de adaptação que ocorrem na natureza para implementá-los em sistemas computacionais [1]. Foi Goldberg [73] quem introduziu os AGs como uma técnica de otimização através da simulação de sistemas genéticos. O sucesso da implementação realizada por Goldberg desencadeou a expansão e popularização dos algoritmos genéticos na comunidade científica que culminou, inclusive, no desenvolvimento de *softwares* comerciais como o modeFRONTIER, Evolve, OptiStruct e outros.

O mecanismo de seleção natural é popularmente conhecido como “a sobrevivência do mais forte” ou “do mais apto”. Entretanto, a evolução é um processo probabilístico. Assim, não existem garantias de que “o mais apto” realmente será aquele **indivíduo** que irá prosperar. **A seleção natural simplesmente presume que as características dos indivíduos mais aptos à pressão do ambiente possuem a tendência de se perpetuarem ao longo do tempo.** Dessa maneira, os AGs utilizam-se deste mecanismo para buscar por soluções mais adaptadas à algum tipo de “pressão do ambiente” devidamente escolhida pelo programador. Assim, são geradas **populações** de indivíduos (ou cromossomos) aleatoriamente e estes, por sua vez, são avaliados através de uma função objetivo (*fitness*) que os ranqueia de acordo com um ou mais critérios [65]. Por fim, os indivíduos são submetidos aos mecanismos de seleção e aos chamados **operadores genéticos** de cruzamento (ou *cross-over*) e mutação.

Nomenclatura. Resumidamente, listam-se:

- Cromossomo: são os indivíduos que serão avaliados, ou seja, são as soluções do problema;

- População: é um conjunto de indivíduos;
- Gene: é uma das variáveis que define as características de um indivíduo;
- Alelo: é um valor que um gene pode assumir;
- Geração: contador lógico que indica a evolução dos indivíduos nas populações ao longo do processo de otimização ou, em outras palavras, é o número da iteração do AG;

A Figura 5.3.1 ilustra bem como é a estrutura de um cromossomo.

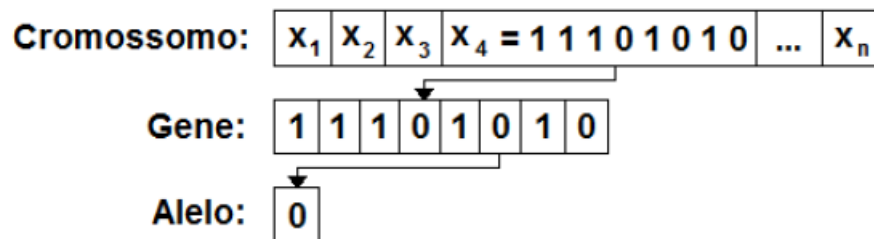


Figura 5.3.1 – Definição dos componentes de um cromossomo. Fonte: Colherinhas [1]

Codificação. Existem duas formas de se representar o genótipo de um indivíduo: codificação binária ou codificação por valor [74].

- Binário: utiliza-se um vetor binário para a representação. Assim, cada parâmetro é representado por um conjunto de bits como verifica-se na Fig. 5.3.1.
- Por valor: utilizam-se números de ponto flutuante para a representação. Estes possuem comprimento idêntico ao do vetor solução do problema.

A principal desvantagem da codificação binária está no armazenamento de dados. O aumento do grau de complexidade do problema de otimização implica no aumento do tamanho destes vetores, demandando mais memória do computador para processar e armazenar todos os dados. Dessa forma, tem-se cada vez mais utilizado a codificação por valor para a representação dos genótipos. Colherinhas [1] e Michalewicz [75] comparam o tempo computacional gasto para ambas as implementações e concluem que a representação por valor real é, de fato, menos custosa. Portanto, este será o tipo de codificação utilizada neste trabalho.

5.4 População inicial

Após definidos os parâmetros de inicialização (tipo de codificação, restrições do problema, número de gerações e indivíduos por geração e estratégias evolutivas), o algoritmo gera, de maneira aleatória, a população inicial. Esta corresponde ao primeiro conjunto de indivíduos que serão avaliados pela função objetivo da otimização. Em alguns

casos, a população inicial pode ser definida dentro de uma faixa de soluções aproximadas para o problema [65].

5.5 Função objetivo

Também conhecida como função de aptidão (ou *fitness*) carrega consigo a tarefa de avaliar o quão boa é uma solução candidata para a resolução do problema [74]. Ou seja, ela avalia, baseado no valor de *fitness* (i.e., uma pontuação) e na sua conjunção com as restrições do problema [1], o quão adaptada é a tal solução candidata. Esta pode ser multi-objetivo onde, geralmente, pretende-se minimizar e/ou maximizar duas ou mais características conflitantes (e.g. massa e fator de segurança). Além disso, a função objetivo é a única conexão verdadeira com o problema real [65, 74].

5.6 Operadores genéticos

Buscando melhorar a aptidão dos indivíduos, os operadores genéticos são os responsáveis por transformá-los ao passar das gerações. Estes são necessários para garantir que as características conquistadas pelos indivíduos da população sejam transmitidas para as próximas gerações.

Os operadores genéticos ocorrem de maneira probabilística. Assim, atribui-se uma probabilidade de ocorrência dos mesmos ao longo das iterações do AG e, dessa forma, selecionam-se dois indivíduos (denominados pais) de uma população para gerar um par de novos indivíduos a partir do cruzamento [65, 74]. Já a mutação ocorre como a mudança aleatória de material genético em um ou mais indivíduos de uma população.

5.6.1 Seleção

Após a população inicial ser gerada e seus indivíduos serem avaliados pela função objetivo, deve-se selecionar quais deles que irão perpetuar na próxima geração. Dessa forma, o mecanismo de seleção funciona como uma metáfora à seleção natural. Assim, a seleção dependerá da nota atribuída a cada cromossomo [1].

5.6.1.1 Seleção proporcional – roleta (*Roulette-Wheel*)

A roleta é uma estratégia de seleção estocástica onde atribui-se um pedaço de uma roleta imaginária a cada cromossomo. Essas fatias tem seu tamanho proporcional ao valor de aptidão de cada indivíduo. Gira-se a roleta N vezes, onde N é igual ao número de indivíduos na população e seleciona-se um indivíduo em cada uma dessas vezes. A Figura 5.6.1 ilustra o método.

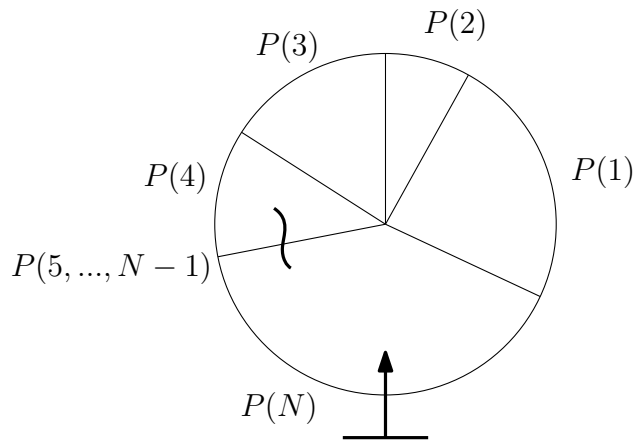


Figura 5.6.1 – Método da roleta. Fonte: adaptado de Colherinhas [1]

Os selecionados seguem para compor a população da próxima geração. A probabilidade de um indivíduo ser escolhido é dada por:

$$P_i = \frac{f(i)}{\sum_{i=1}^N f(i)}. \quad (5.5)$$

Assim, indivíduos com maiores valores de aptidão possuem mais chances de serem selecionados. Contudo, isto não exclui a possibilidade de se escolher indivíduos com valores baixos de aptidão, o que dá diversidade genética à próxima geração, diminuindo as chances da solução ficar presa em mínimos/máximos locais. A probabilidade acumulada q_i representa a soma das probabilidades P_k e é dada conforme a Eq. (5.6):

$$q_i = \sum_{k=1}^i P_k. \quad (5.6)$$

5.6.1.2 Seleção por torneio

O torneio é um método de seleção aleatório. Neste, escolhem-se indivíduos da população de maneira aleatória e estes competem entre si baseados em seus valores de aptidão; o vencedor é aquele que possui o maior *fitness*. A quantidade de indivíduos selecionados é definida por um parâmetro de tamanho de torneio k [1]. A Figura 5.6.2 ilustra o método.

Obviamente, o número mínimo de indivíduos que devem existir na população para que exista um torneio é igual a 2 (assim como também é o número mínimo de indivíduos que devem ser selecionados para um torneio).

5.6.2 Elitismo

O mecanismo de elitismo preserva os indivíduos com altos valores de aptidão para a próxima iteração do algoritmo genético. Estes, portanto, não são submetidos à qualquer tipo de operação para prosseguirem. Como é um método determinístico, deve possuir um valor pequeno para que a diversidade genética não seja perdida com o passar das gerações.

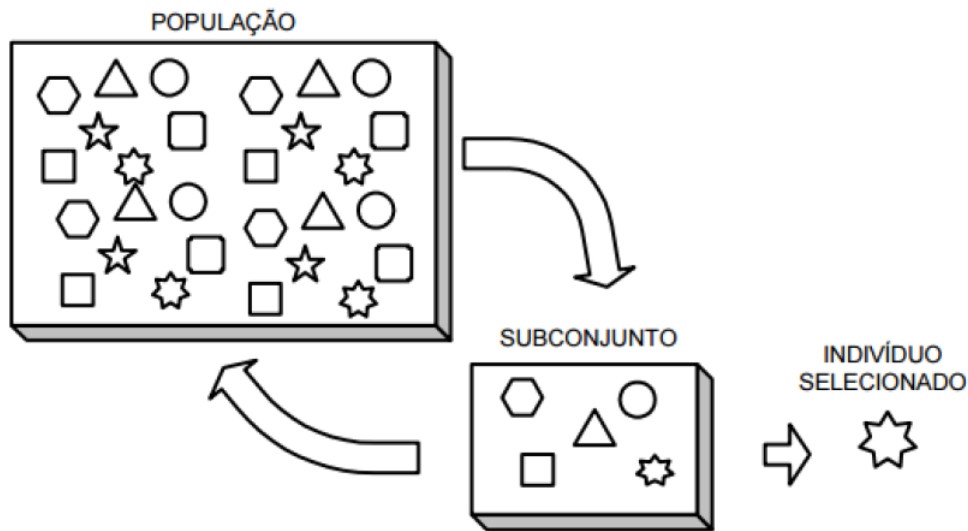


Figura 5.6.2 – Seleção por torneio. Fonte: Colherinhas [1]

5.6.3 Dizimação

Assim como o elitismo, a dizimação é um método determinístico. Nela remove-se um número fixo de indivíduos com baixa aptidão. Apesar de ser um método de extrema simplicidade, tem suas desvantagens assim como o elitismo: caso o número de indivíduos removidos seja grande, é perigoso que se elimine variabilidade genética da população fazendo com que a solução não convirja para o ótimo global.

5.6.4 Cruzamento

Também conhecido como *crossover* ou recombinação é caracterizado pela permutação de material genético entre dois cromossomos (estes denominados indivíduos pais) selecionados de uma mesma população para gerar, nesta operação, novos descendentes (conhecidos como indivíduos filhos) [1]. Segundo Goldberg [73], uma probabilidade de cruzamento $P_c = 60\%$ é adequada para simular a ocorrência natural na qual casais possuem filhos. A Figura 5.6.3 ilustra o fenômeno para um cromossomo com codificação binária.

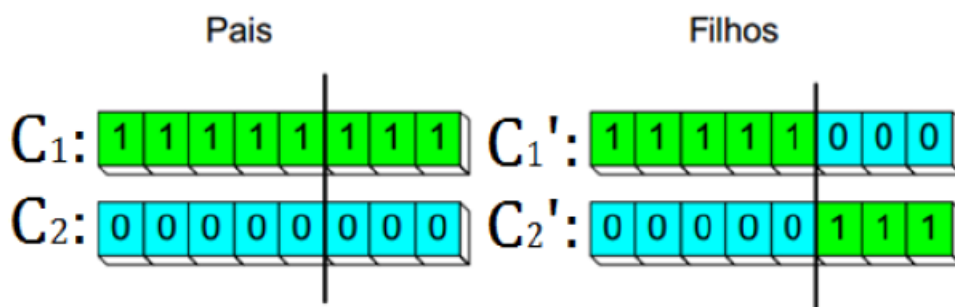


Figura 5.6.3 – Cruzamento em ponto único (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]

Existem outras formas de se realizar a operação de cruzamento. Exemplificá-las

como ocorrem em codificação binária é bastante útil para facilitar o entendimento. Além da recombinação em ponto único, esta pode se dar em dois pontos aleatórios como mostra a Figura 5.6.4.

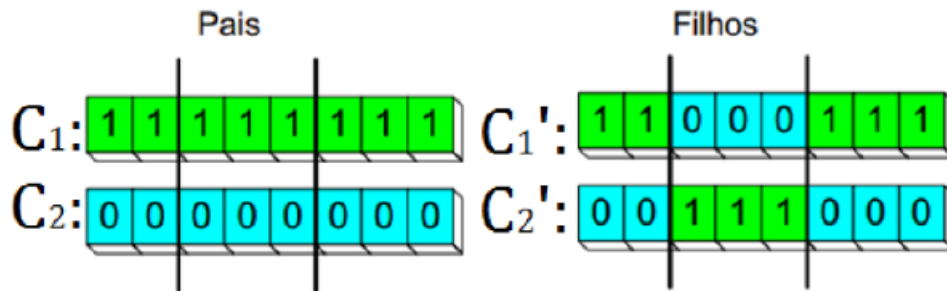


Figura 5.6.4 – Cruzamento em dois pontos (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]

Existe também a possibilidade de ocorrência em alelos aleatórios.

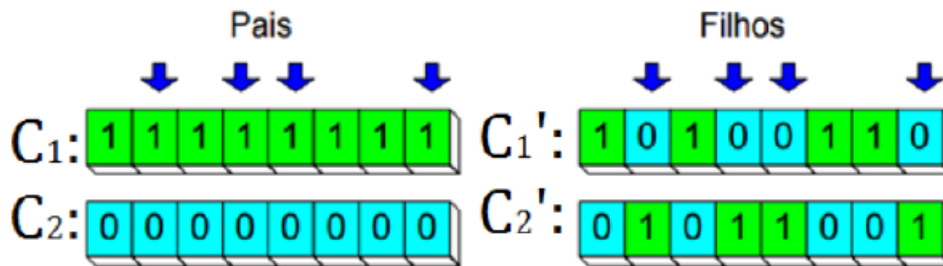


Figura 5.6.5 – Cruzamento em pontos aleatórios (codificação binária). Fonte: Colherinhas [1]

Dentre as outras formas de cruzamento existentes, vale à pena citar:

- Cruzamento aritmético;
- Cruzamento heurístico (HX);
- Cruzamento de Rayleigh (RX);
- *Blend crossover* (BLX- α).

Um estudo com mais profundidade acerca de todos estes métodos foge ao escopo deste trabalho e, portanto, não será abordado. Dar-se-á enfoque ao *blend crossover* por ser a metodologia de cruzamento implementada no algoritmo genético de Colherinhas [1], utilizado neste trabalho. Para o leitor que desejar se aprofundar no assunto recomendam-se os trabalhos de Colherinhas [1], Rodrigues [74], Machado [65], Michalewicz e Janikow [76], Deep e Thakur [77] e Lim *et. al.* [78].

5.6.4.1 *Blend crossover* (BLX- α)

O cruzamento de mistura (ou *blend crossover* – BLX- α) tem como principal característica a extrapolação da região de cruzamento dos indivíduos pais. Desta maneira,

atribui-se maior variabilidade genética ao longo das iterações do AG, tornando a convergência mais rápida. Dados dois cromossomos x e y , produz-se um terceiro cromossomo z como:

$$z = x + \beta(y - x) \quad (5.7)$$

onde $\beta \sim U(-\alpha, 1+\alpha)$ sendo U uma distribuição uniforme e α o parâmetro que extrapola o espaço de busca. Recomenda-se $\alpha = 0,25$ ou $0,5$ [1]. A Figura 5.6.6 mostra como funciona a extrapolação do espaço de busca considerando um intervalo de soluções I .

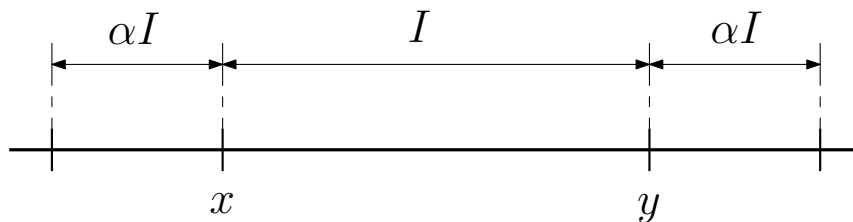


Figura 5.6.6 – *Blend crossover* (BLX- α). Fonte: adaptado de Colherinhas [1]

5.6.5 Mutação

O operador genético de mutação trabalha com intuito de resgatar variabilidade genética e/ou introduzir novas informações na população [1]. Isto é dado de forma aleatória através da modificação de um ou mais genes de um cromossomo ao se atribuir uma probabilidade P_m de ocorrência do fenômeno. Como é um evento completamente aleatório, que pode introduzir melhorias ou retrocessos aos indivíduos, sugerem-se pequenas taxas de probabilidade de ocorrência do mesmo. Assim, Goldberg [73] sugere uma taxa de 5% para a mutação.

Em codificação binária a mutação opera de maneira extremamente fácil. Simplesmente modifica-se um alelo de um cromossomo ao fazer a inversão do valor binário do mesmo como mostra a Figura 5.6.7.

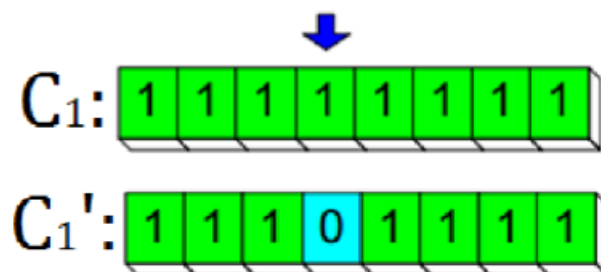


Figura 5.6.7 – Mutação em codificação binária (ponto único). Fonte: Colherinhas [1]

Assim como para o operador de cruzamento, a mutação pode ser realizada de diversas formas. Novamente, é dado enfoque apenas para aquele método que é utilizado neste trabalho. Dentre as várias metodologias, citam-se:

- Mutação uniforme;
- Mutação de contorno;
- Mutação gaussiana;
- Mutação *creep* uniforme;
- Mutação *creep* não-uniforme.

Para mais profundidade no assunto, recomenda-se o trabalho de Colherinhas [1].

5.6.5.1 Mutação *creep* uniforme

A mutação *creep* uniforme tem como objetivo explorar localmente o espaço de busca ao provocar pequenas perturbações nos genes de um cromossomo para que se atinja mais rapidamente a convergência. Para um cromossomo $C = [x_1, \dots, x_k, \dots, x_n]$, o operador adiciona um pequeno valor a um gene x_k aleatório ou o multiplica por um número próximo de 1 [1]. Este tipo de mutação admite valores maiores para sua taxa de probabilidade de ocorrência e, geralmente, usa-se $P_m \approx 10\%$.

6 Estudo de caso: longarina da asa de uma aeronave rádio-controlada

6.1 Introdução

A equipe Draco Volans participa anualmente da competição nacional de AeroDesign organizada pela SAE Brasil (*Society of Automotive Engineers*). Deve-se projetar, construir e fazer voar uma aeronave cargueira rádio-controlada capaz de completar uma missão pré-estabelecida pelo regulamento da competição de tal sorte que esta seja o mais leve possível e, em contrapartida, alce a maior quantidade de carga útil. Trata-se, portanto, de um avião que é levado ao limite de sua eficiência estrutural. Neste contexto, a otimização das estruturas da aeronave torna-se imprescindível para que se promova diminuição de seu peso vazio e, conseqüentemente, obtenção de sucesso durante a competição. Este trabalho visa realizar a otimização da longarina principal da asa do protótipo concebido pela equipe no ano de 2016 aliando a teoria de vigas compósitas de paredes finas compósitas em conjunto com o critério de falha LaRC03 objetivando-se a maior redução de massa possível. Para todas as análises subsequentes utiliza-se o sistema de coordenadas da Figura 6.1.1 de forma a compatibilizar com aquele definido para a teoria de vigas de paredes finas da Figura 3.3.1.

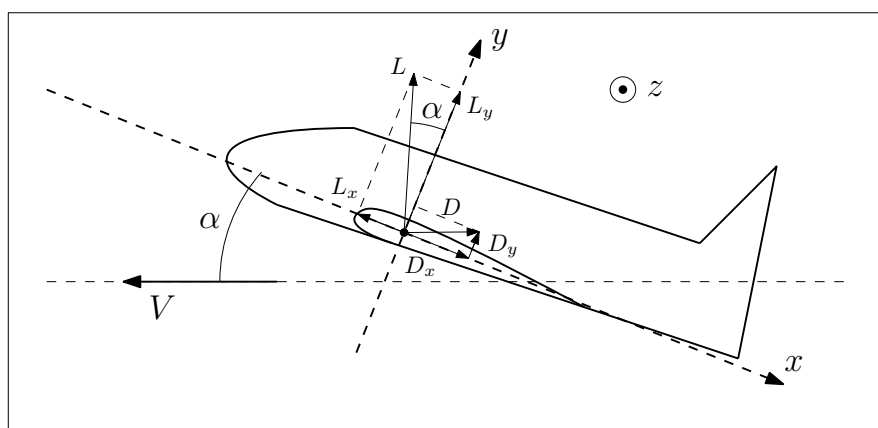


Figura 6.1.1 – Sistema de coordenadas adotado

6.2 Configuração da Aeronave

A aeronave projetada pela equipe para participação na competição da SAE no ano de 2016 é do tipo monoplano simples, com asa mista e perfil aerodinâmico DV-PR12 que é um perfil otimizado para a missão da aeronave a partir do SELIG 1223. O trem de pouso possui configuração triciclo simples com triquilha frontal e trem de pouso principal (TPP) acoplado diretamente na longarina primária da asa, transferindo os esforços provenientes do pouso diretamente para esta estrutura. A Figura 6.2.1 mostra a concepção final da aeronave nomeada de DV-GEVX 1.

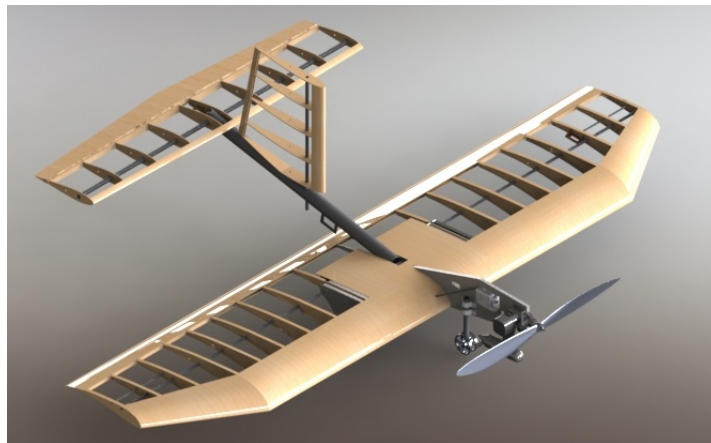


Figura 6.2.1 – Aeronave DV-GEVX 1

A asa do protótipo possui envergadura total de 1990 mm sendo 1394 mm da parte reta e 596 mm da parte trapezoidal. Além disso, a corda na raiz da asa é de 488 mm enquanto na ponta equivale a 293 mm fornecendo, portanto, uma razão de afilamento λ de 0.6. A Tabela 7 fornece a posição da roda trem de pouso principal relativa à longarina.

Tabela 7 – Posição da roda do TPP na semi-envergadura da asa

Descrição	Variável	Valor [mm]
Distância do centro da longarina até o centro da roda do TPP	x_{tpp}	135
Distância da raiz da asa até a posição do TPP na semi-envergadura	z_{tpp}	200
Distância do centro da longarina até o ponto em que a roda toca o solo	y_{tpp}	138

6.3 Fatores de Projeto

Objetivando-se a eficiência estrutural e tendo em vista o que recomenda a *Federal Aviation Regulations* (FAR) a equipe de 2016 optou pela utilização de um fator de segurança de projeto com valor igual a 1.5 [79]. Além disso, consideram-se fatores de impacto n_i e carga n_g iguais a 2.67 e 2.5, respectivamente, conforme recomendam Raymer [31] e a FAR 25 [80]. Desta maneira, constrói-se o diagrama combinado de manobra e rajada da aeronave mostrado na Figura 6.3.1.

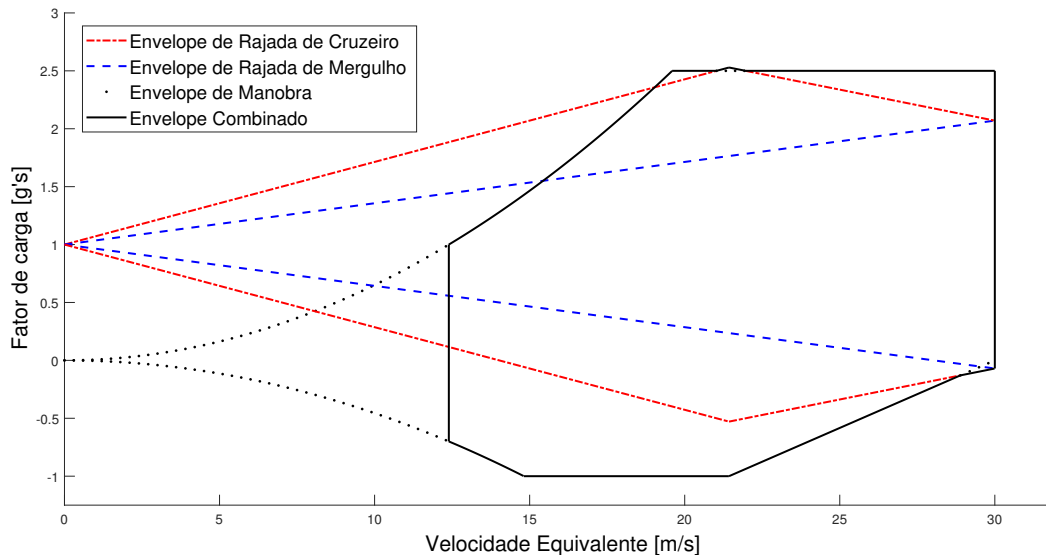


Figura 6.3.1 – Diagrama V-n de manobra e de rajada

Para tal, consideram-se as condições climáticas de São José dos Campos no mês de Novembro e velocidades de rajada para velocidade de cruzeiro e mergulho de 6.0 m/s e 3.0 m/s, respectivamente. Escolhem-se esta cidade e mês pois são nestes em que se verifica a realização da competição do AeroDesign. Por fim, para todas as subsequentes análises, considera-se como carga total (peso vazio + carga útil) alçada pela aeronave o valor de 16.0 kg.

6.4 Análise de Cargas na Asa e Esforços Internos

Para realizar o dimensionamento da longarina principal da aeronave deve-se considerar aquela situação que for a crítica. Esta é definida de acordo com os esforços aerodinâmicos atuantes em determinadas situações durante a missão do protótipo. Realiza-se então a análise de duas possíveis candidatas a situações críticas: durante o voo e durante o pouso do avião. Posteriormente, define-se qual destas é a limite à partir do comparativo entre os resultados obtidos pela otimização via AG da estrutura e seleciona-se aquela que for capaz de atender aos esforços provenientes de ambos os casos em estudo.

6.4.1 Situação crítica de voo

Uma estimativa dos esforços aerodinâmicos atuantes na asa da aeronave deve ser realizada para que seja possível o dimensionamento da longarina. Para a sustentação, utiliza-se o Método de Schrenk [30] que propõe que a distribuição de sustentação em uma asa de geometria qualquer pode ser aproximada pela média aritmética entre a distribuição deste esforço para a asa com geometria em análise e para uma asa elíptica de mesma área

e envergadura. Matematicamente, expressa-se como na Eq. (6.1).

$$L(z)_{\text{Schrenk}} = \frac{L(z)_{\text{mista}} + L(z)_{\text{elíptica}}}{2}, \quad (6.1)$$

onde $L(z)_{\text{mista}}$ e $L(z)_{\text{elíptica}}$ são as distribuições de sustentação ao longo das asas mista e elíptica correspondente e $L(z)_{\text{Schrenk}}$ é a aproximação para a distribuição de sustentação da asa mista [81]. Este carregamento nas parcelas reta e trapezoidal são dados como:

$$L(z)_{\text{reta}} = \frac{L_r}{b_r}, \quad (6.2)$$

$$L(z)_{\text{trap}} = \frac{2L_t}{(1 + \lambda)b_t} \left[1 + \left(\frac{2z}{b_t}(\lambda - 1) \right) \right], \quad (6.3)$$

sendo L_r e L_t as sustentações máximas e b_r e b_t as envergaduras das parcelas reta e trapezoidal, respectivamente. Note que a distribuição trapezoidal reduz-se à reta para o caso em que $\lambda = 1$.

Complementarmente, a distribuição de sustentação para a asa elíptica é dada por:

$$L(z)_{\text{elíptica}} = \frac{4L}{b\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{b} \right)^2}, \quad (6.4)$$

onde b é a envergadura total da asa e L a sustentação máxima atuante dada pela Eq. (6.5).

$$L = \frac{1}{2} \rho C_l S v^2, \quad (6.5)$$

em que S é a área da asa, C_l representa o coeficiente de sustentação, ρ é a massa específica do ar e v a velocidade da aeronave. Por fim, deve-se considerar a influência de rajadas. Isto se traduz como um aumento na sustentação atuante na asa por um fator multiplicativo (o fator de carga). Portanto, deve-se multiplicar a Eq. (6.5) pelo valor de $n_g = 2.5$.

O método de Schrenk apoia-se na Teoria da Linha Sustentadora de Prandtl e oferece aproximações aceitáveis a nível de projeto preliminar para a distribuição de sustentação em asas de pequeno enflechamento e razão de aspecto (AR) de moderados à altos valores ($AR > 4$). Além disso, Raymer [31] considera a deflexão do aileron e o incremento na sustentação devido ao seu acionamento na distribuição de Schrenk. Assim, calcula-se a sustentação máxima devido ao acionamento do aileron.

$$L = \frac{1}{2} \rho (C_l + \Delta C_l) S v^2, \quad (6.6)$$

onde ΔC_l é o incremento no coeficiente de sustentação C_l devido à atuação do aileron.

Finalmente, pode-se calcular a distribuição de sustentação na semi-envergadura alar do DV-GEVX 1 utilizando os parâmetros listados na Tabela 8.

Os valores de coeficiente de momento e arrasto utilizados são aqueles referentes ao ângulo de ataque máximo da asa obtido à partir das curvas C_m vs. α e C_d vs. α

Tabela 8 – Parâmetros do DV-GEVX 1 para cálculo dos esforços na asa

Variável	Valor	Unidade
Coefficiente de sustentação máximo	1.9	–
Variação no C_l provocada pelo aileron	0.14	–
Coefficiente de momento	-0.23	–
Coefficiente de arrasto	0.34	–
Razão de afilamento	0.6	–
Área da asa	0.913	m^2
Massa específica do ar	1.151	kg/m^3
Velocidade de estol	12.14	m/s

do perfil DV-PR12 traçadas pela equipe de aerodinâmica da Draco Volans no ano de 2016. O sinal negativo para C_m indica um momento de picada, ou seja, tende a baixar o nariz do avião. Considera-se a velocidade de decolagem do avião como sendo a máxima durante a situação de voo. Verifica-se que esta é, geralmente, a maior velocidade atingida pela aeronave em estudo durante as missões. Assim, estima-se a velocidade máxima como $V_{dec} = 1.2V_{estol}$ [79]. A Figura 6.4.1 mostra a distribuição de sustentação durante a situação crítica de voo para o DV-GEVX 1.

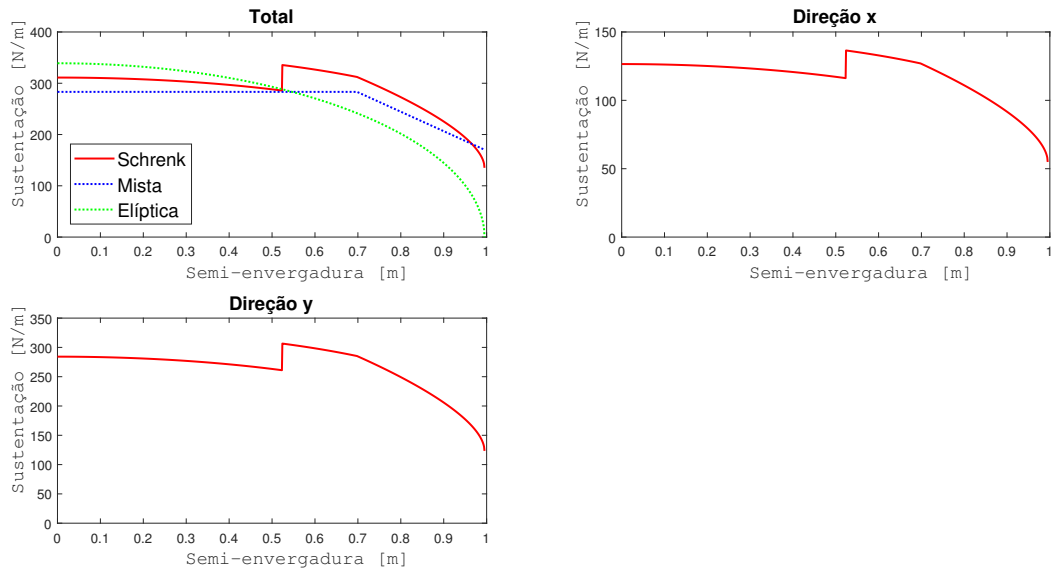


Figura 6.4.1 – Distribuição de sustentação na semi-envergadura alar na situação crítica de voo

Para o cálculo preliminar do arrasto, a metodologia de Raymer [31] considera em até 80% da semi-envergadura alar um carregamento constante equivalente a 95% do valor do arrasto máximo. Para o restante da asa, um carregamento constante com 120% do valor do arrasto máximo. Logo,

$$D = \frac{1}{2}\rho SC_a v^2, \quad (6.7)$$

sendo D a força de arrasto, ρ a massa específica do ar, S a área da asa, C_d o coeficiente de arrasto e v a velocidade da aeronave.

Assim como para a distribuição de sustentação, no arrasto já está contabilizada a influência do fator de carga. A Figura 6.4.2 mostra a distribuição do arrasto ao longo da semi-envergadura alar.

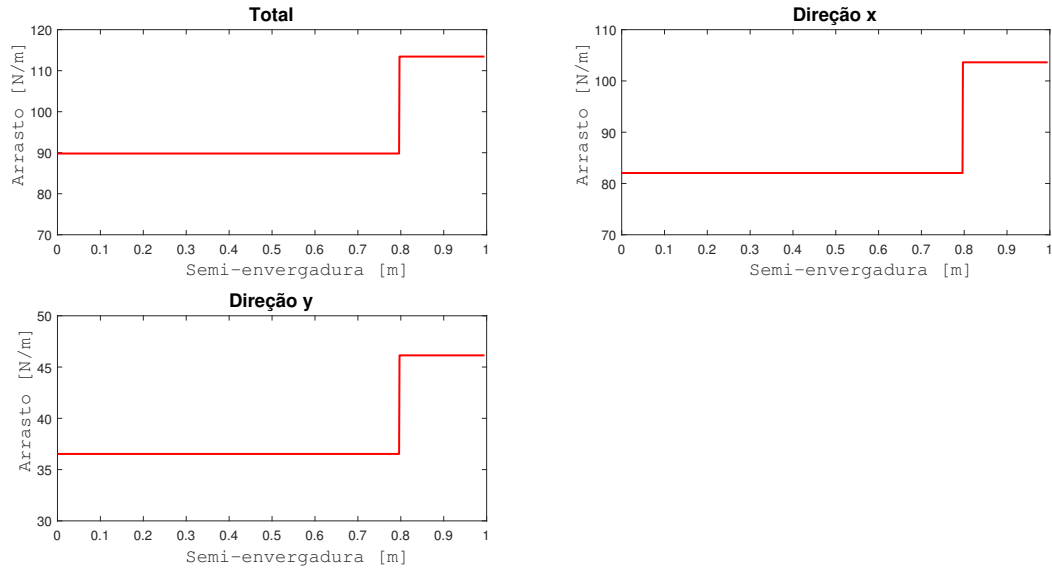


Figura 6.4.2 – Distribuição de arrasto na semi-envergadura alar na situação crítica de voo

Uma vez que os esforços aerodinâmicos estão definidos para a situação crítica de voo, pode-se construir os diagramas de esforços internos na longarina. As Figuras 6.4.3 e 6.4.4 mostram os diagramas de esforço cortante e momento fletor e torsor, respectivamente.

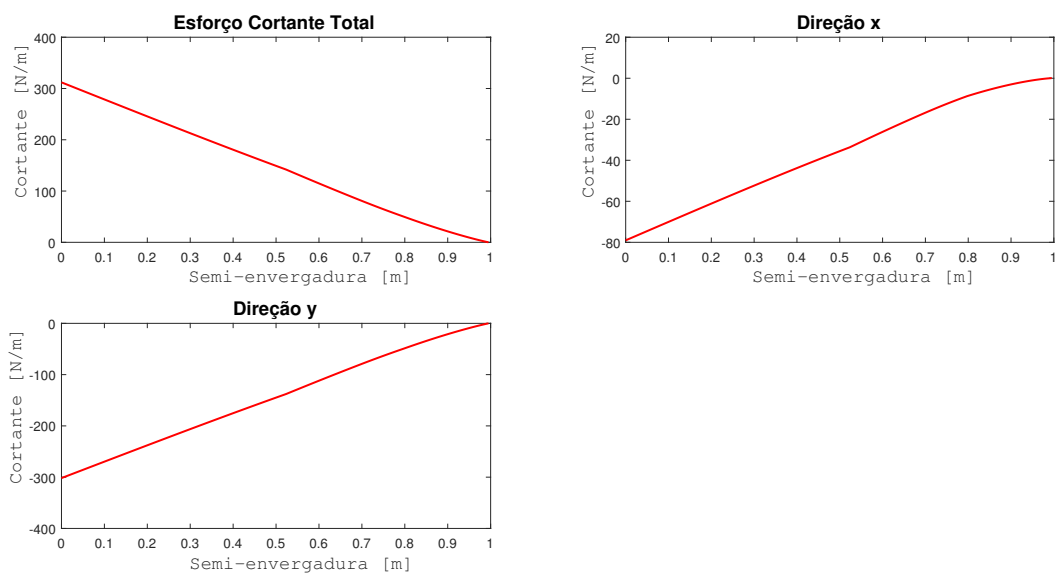


Figura 6.4.3 – Diagramas de esforço cortante para a situação crítica de voo

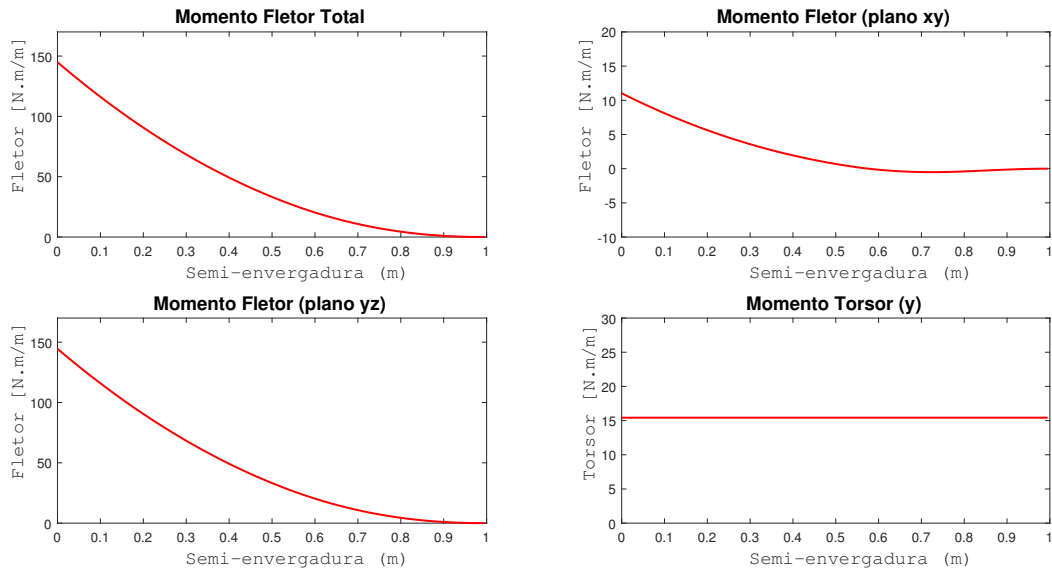


Figura 6.4.4 – Diagramas de momentos fletor e torsor para a situação crítica de voo

6.4.2 Situação crítica de pouso

Durante a aterrissagem do protótipo, além dos esforços aerodinâmicos atuantes, deve-se considerar as forças provenientes do pouso transferidas para a longarina através do trem de pouso principal no instante em que a aeronave toca o solo. Para tal, idealiza-se a situação de pouso com apenas uma das rodas tocando o solo como caso crítico. Além disso, leva-se em conta que a asa está inclinada, ou seja, a ponta está imediatamente próxima ao chão. Notando como β este ângulo de cambagem, tem-se que para o protótipo em estudo o mesmo vale 9.82° (Figura 6.4.5).

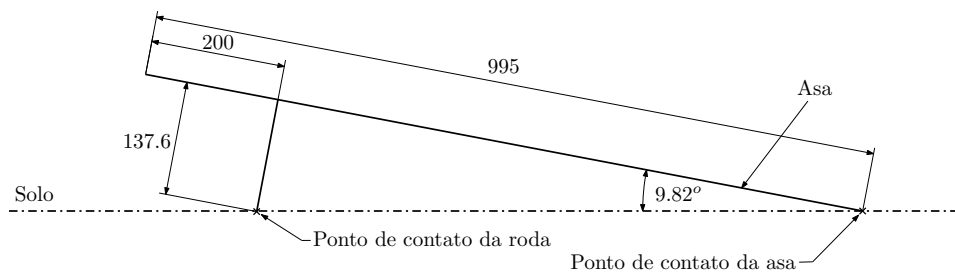


Figura 6.4.5 – Esquemático da meia-asa para o pouso 1 toque (dimensões em milímetros)

No momento de toque com o solo, as reações devem ser decompostas de forma a contabilizar suas influências nos esforços internos atuantes na longarina. Para o atrito, considera-se que a roda está na iminência do movimento (consideração de atrito estático). O valor para o coeficiente de atrito μ entre borracha-asfalto (seco) é de 0.5 [82]. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{vertical}} &= Wn_i \cos \beta, \\
 F_{\text{lateral}} &= Wn_i \tan \beta, \\
 F_{\text{atrito}} &= \mu F_{\text{vertical}},
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

como as forças atuantes no instante do pouso. Na Eq. (6.8), W é a força peso e n_i é o fator de impacto. Uma vez que, conforme definido pela equipe de 2016, a carga máxima total da aeronave é de 16 kg, tem-se que o peso W vale 156.96 N. A Tabela 9 mostra o valor das forças no TPP durante o pouso.

Tabela 9 – Esforços provenientes do pouso 1 toque

Esforço	Valor [N]
Força vertical	412.94
Força lateral	72.54
Força de atrito	206.47

Concomitantemente, consideram-se os esforços aerodinâmicos atuantes durante a aterrissagem (onde $n_g = 1.0$) com os coeficientes aerodinâmicos expostos na Tabela 10.

Tabela 10 – Coeficientes aerodinâmicos considerados durante o pouso

Variável	Valor
Coefficiente de sustentação	1.25
Coefficiente de momento	-0.2
Coefficiente de arrasto	0.05

Tais valores são provenientes da consideração de que, durante o pouso, a atitude da aeronave resulta em pequenos ângulos de ataque. Portanto, tem-se que $L = W$ durante o pouso. Obtém-se C_l utilizando a Eq. (6.5) com $v = v_{\text{pouso}} = 1.3v_{\text{estol}}$ [79]. Assim, isolando C_l e substituindo os valores, encontra-se que o mesmo vale 1.25. Por fim, analisa-se a curva C_l vs. α do DV-GEVX 1 e idealiza-se o ângulo de ataque no pouso como $\alpha = 5^\circ$. As Figuras 6.4.6 e 6.4.7 exibem as distribuições de sustentação e arrasto durante o pouso.

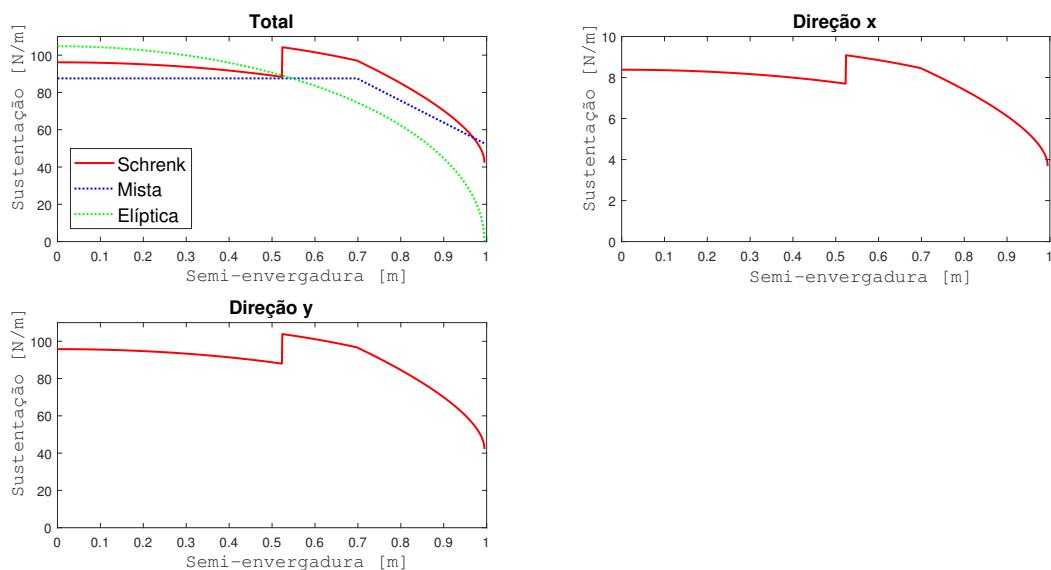


Figura 6.4.6 – Distribuição de sustentação na situação crítica de pouso

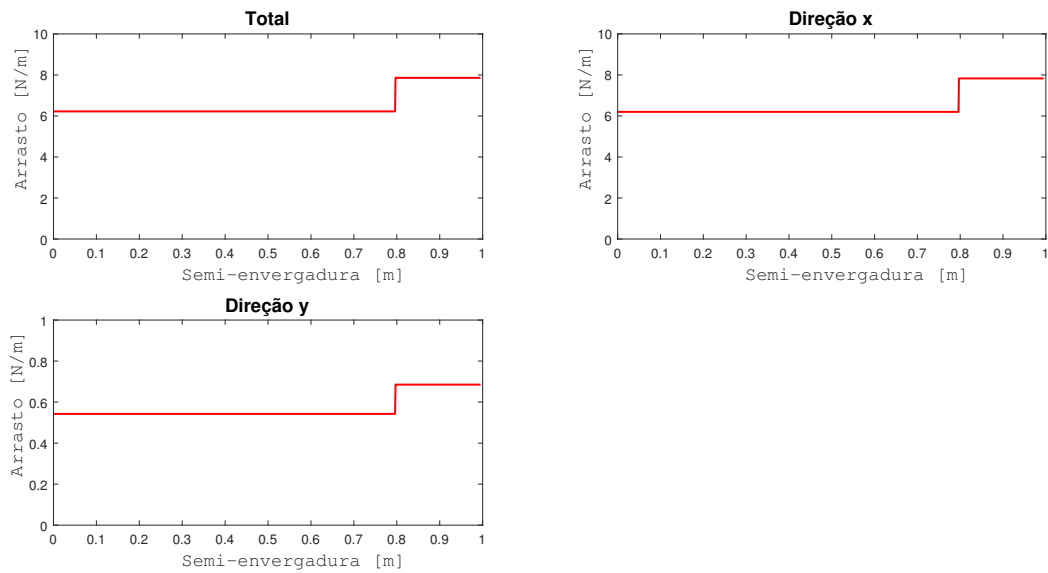


Figura 6.4.7 – Distribuição de arrasto na situação crítica de pouso

Ademais, as Figuras 6.4.8 e 6.4.9 mostram os diagramas de esforços internos durante o pouso da aeronave.

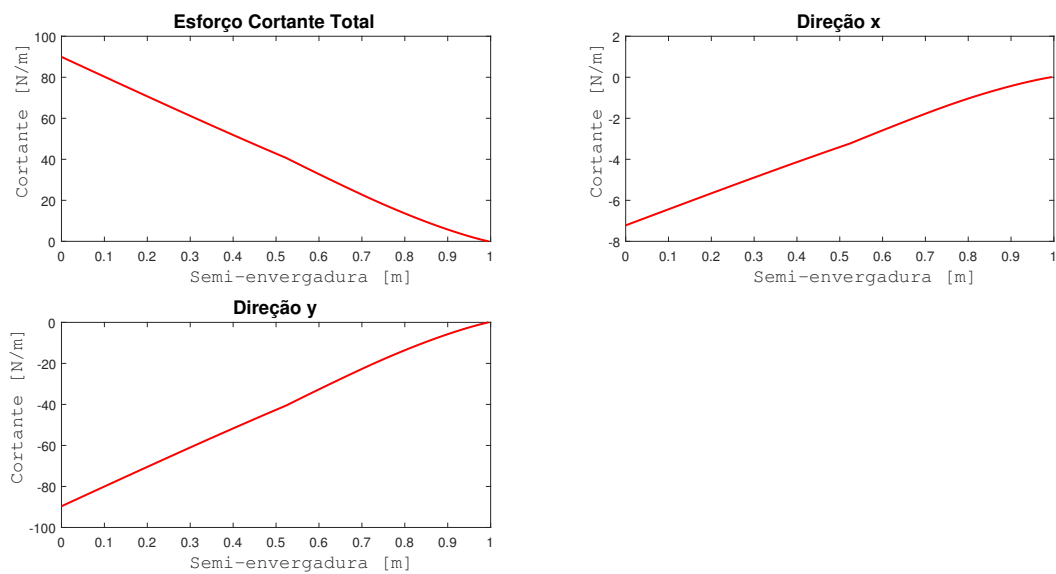


Figura 6.4.8 – Diagramas de esforço cortante para a situação crítica de pouso

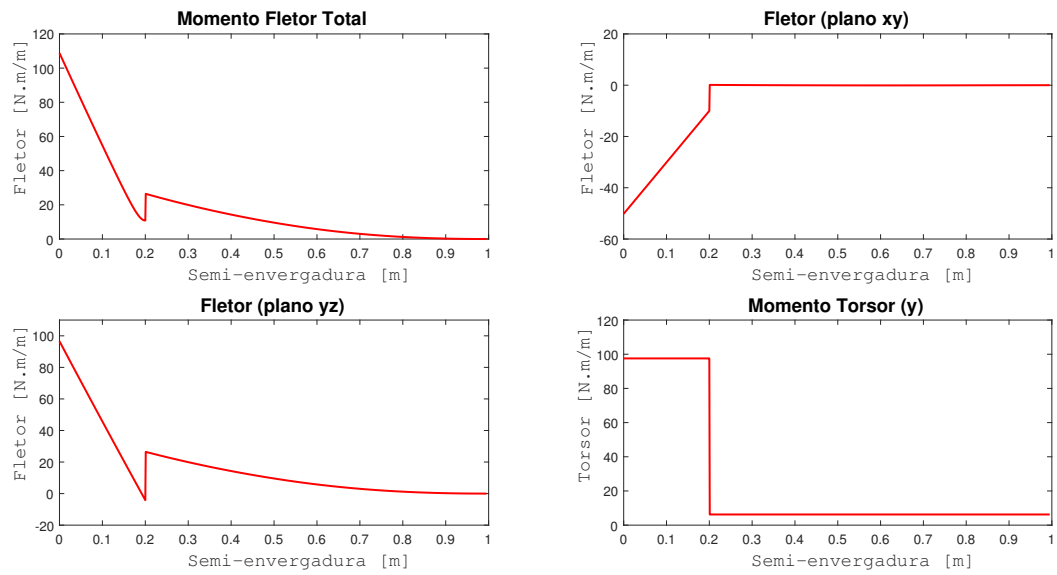


Figura 6.4.9 – Diagramas de momentos fletor e torsor para a situação crítica de pouso

Finalmente, definiram-se os esforços internos na longarina para ambas as situações críticas da missão do DV-GEVX 1 e, desta maneira, implementam-se os mesmos no algoritmo genético para que se otimize a estrutura.

7 Resultados e Discussão

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos no presente trabalho. Primeiro discutem-se os dados levantados acerca da modelagem das vigas de paredes finas, verificando se os resultados estão de acordo com Zhang e Wang [9]. Em seguida, compara-se a atual modelagem com as apresentadas por diversos pesquisadores e comenta-se a respeito de suas diferenças. Posteriormente, os critérios de falha de Tsai-Wu e LaRC03 são contrastados e suas discrepâncias devidamente documentadas. Por fim, apresentam-se os resultados obtidos para a longarina da asa do DV-GEVX 1 através da otimização via algoritmos genéticos e estes são comparados aos obtidos pela equipe Draco Volans de SAE AeroDesign no ano de 2016. Todos os resultados foram obtidos à partir de um *Notebook* Intel Core i7-4500U, 2.40 GHz, dispondo de 8 GB de RAM (DDR3) com sistema operacional *Windows* 8.

7.1 Viga Circular de Parede Fina

O primeiro estudo de caso faz referência à uma viga de seção transversal circular, engastada na base e livre na ponta, com envergadura de 1.0 m e raio do plano médio de 35.0 mm. São testadas várias sequências de empilhamento para uma espessura de parede de 2.0 mm. A Figura 7.1.1 apresenta a geometria da estrutura.

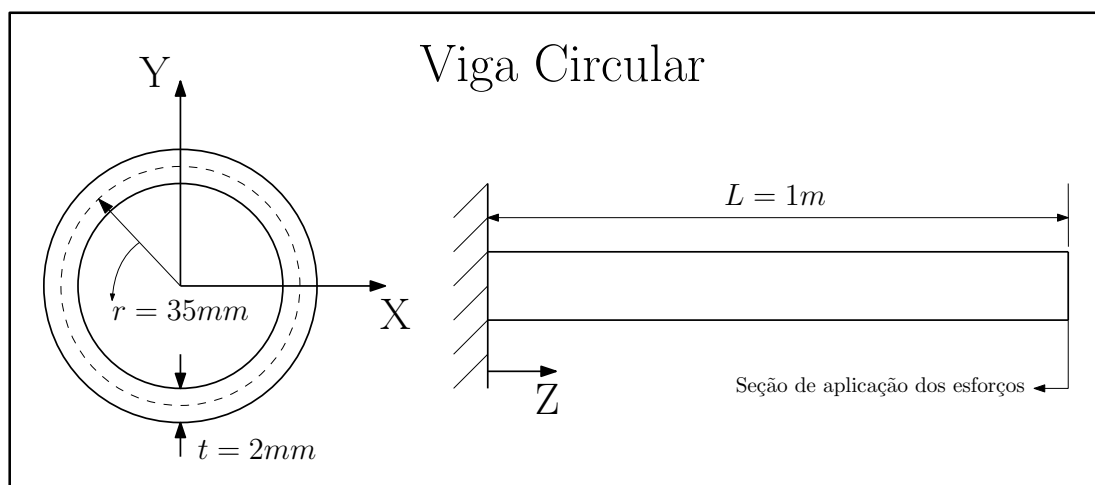


Figura 7.1.1 – Geometria da viga explorada no primeiro estudo de caso

O material do qual a parede da viga é constituída trata-se de um laminado com

reforço unidirecional de fibra de carbono T300 combinada com matriz epóxica e suas propriedades podem ser verificadas no trabalho de Kollar e Pluzsik [16] ou na Tabela 11.

Tabela 11 – Propriedades da lâmina de carbono-epóxi.

T300/CFRP			
E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
148	9.65	4.55	0.3

7.1.1 Validação inicial

Inicialmente, para validação do código escrito em linguagem MATLAB, comparam-se os resultados obtidos pelo autor do presente projeto com aqueles que podem ser observados no trabalho [9] para várias sequências de empilhamento e carregamentos distintos. Essas cargas são todas aplicadas na extremidade livre da viga, uma de cada vez. A Tabela 12 faz o comparativo supracitado onde “Modelo 1” refere-se aos resultados do trabalho [9] e “Sales” dizem respeito aos valores encontrados pelo autor do presente relatório.

Tabela 12 – Comparativo entre os resultados obtidos e os documentados em [9]

Carregamento	Deslocamento máximo	Modelos	Aleatórios		Simétrico [−75/75] _S	Anti-simétrico [70/−20] ₂	Quasi-isotrópico [75/90/−75]
			[45/90]	[60/70/80]			
$F_Z = 2.4$ kN	W (m)	Modelo 1	6.75E-04	1.14E-03	4.58E-04	1.76E-03	4.20E-04
		Sales	6.75E-05	1.14E-04	4.58E-05	8.94E-05	4.20E-05
$F_Y = 150$ N	V (m)	Modelo 1	2.24E-03	3.72E-03	1.56E-03	6.11E-03	1.43E-03
		Sales	2.29E-03	3.81E-03	1.56E-03	3.04E-03	1.43E-03
$M_Z = 100$ Nm	Φ (rad)	Modelo 1	1.89E-02	2.53E-02	1.43E-02	2.59E-02	1.83E-02
		Sales	1.89E-02	2.53E-02	1.43E-02	1.01E-02	1.83E-02

Os resultados apresentados na Tabela 12 foram reproduzidos exatamente como se verifica no trabalho [9]. À primeira vista, todos os dados levantados para os deslocamentos axiais máximos aparentam não estar em concordância. Contudo, após a realização de extensas buscas por erros de programação e modelagem concluiu-se que:

- O valor de F_Z reportado encontra-se, aparentemente, equivocado. Verificando-se que os resultados para um valor de 24.0 kN para a força axial implicam em uma grande concordância com os exibidos em [9], inferiu-se que o artigo apresenta, provavelmente, um erro tipográfico;
- O trabalho [9] referiu-se ao laminado [70/−20]₂ como “anti-simétrico” e ao laminado [75/90/−75] como “quasi-isotrópico” de maneira equívoca.

O primeiro ponto foi trabalhado da seguinte forma: ao verificar a discrepância entre os dados obtidos neste trabalho e os documentados por Zhang e Wang investigaram-se

os possíveis motivos para tal. Após a realização de um “*debugging*” no código, nada que pudesse justificar tamanha inconsistência foi encontrado. Observou-se também que as matrizes de rigidez possuíam excelente concordância com os valores reportados pelos autores em [9]. Além disso, para o deslocamento axial máximo W , foram encontrados valores numéricos extremamente parecidos à menos de uma ordem de grandeza. Infere-se, portanto, que o valor de F_Z está mal documentado (i.e. está 10 vezes menor). A Tabela 13 exhibe os resultados obtidos pelo autor ao se trocar o valor de *input* da força normal para 24.0 kN.

Tabela 13 – Comparativo entre os deslocamentos axiais obtidos e os documentados em [9] após correção

Carregamento	Deslocamento máximo	Modelos	Aleatórios		Simétrico [−75/75] _S	Anti-simétrico [70/−20] ₂	Quasi-isotrópico [75/90/−75]
			[45/90]	[60/70/80]			
$F_Z = 24.0$ kN	W (m)	Modelo 1	6.75E-04	1.14E-03	4.58E-04	1.76E-03	4.20E-04
		Sales	6.75E-04	1.14E-03	4.58E-04	8.94E-04	4.20E-04

Nota-se que os resultados, após a carga de 24.0 kN ser utilizada, possuem excelente concordância exceto para o laminado anti-simétrico. Dessa forma, foi investigado o relatado no segundo item das conclusões. O conceito de anti-simetria para um laminado afirma que, para cada lâmina com fibras anguladas à θ graus, deve-se possuir outra com angulação de $-\theta$ graus equidistante do plano médio, que sejam constituídas de um mesmo material e que apresentem a mesma espessura [2]. O subscrito 2 indica que a sequência apresentada entre colchetes se repete duas vezes até que se atinja o plano médio do laminado. Portanto, tem-se que $[70/−20]₂ = [70/−20/70/−20/20/−70/20/−70]$ para o caso em questão.

Assim sendo, iniciou-se um procedimento de “engenharia reversa” que buscou pelas possíveis combinações lógicas destes ângulos que pudessem estar em concordância com os dados reportados em [9] para o deslocamento axial máximo W . Foi verificado que para a sequência de empilhamento $[70/−20]$ os valores possuíam grande semelhança para todos os deslocamentos analisados. A Tabela 14 expõe o encontrado (já corrigido para $F_Z = 24.0$ kN).

Para fins de comparação, o presente texto trabalhará com a sequência $[70/−20]$. Além disso, ao se realizar tais ajustes, os dados referentes à rotação da viga sob carregamento axial F_Z de 24.0 kN como consequência dos efeitos de acoplamento também apresentaram considerável concordância como expõe a Tabela 15. Por fim, conforme Gibson [34], tem-se que um laminado é quasi-isotrópico quando a diferença entre os ângulos de camadas adjacentes na sequência de empilhamento é igual a π/n onde n é o número de camadas deste laminado. Como pode-se observar, isto não vale para o caso da sequência $[75/90/−75]$, invalidando-a como quasi-isotrópica. Apesar deste detalhe, não existiram discrepâncias entre os resultados obtidos neste trabalho e àqueles documentados em [9].

A Tabela 16 mostra os desvios relativos encontrados entre os dados colhidos no

Tabela 14 – Comparativo entre os deslocamentos máximos obtidos e os documentados em [9] para o laminado “anti-simétrico” após correção

Carregamento	Deslocamento máximo	Modelos	“Anti-simétrico” [70/ – 20]
$F_Z = 24.0$ kN	W (m)	Modelo 1	1.76E-03
		Sales	1.74E-03
$F_Y = 150$ N	V (m)	Modelo 1	6.11E-03
		Sales	6.05E-03
$M_Z = 100$ Nm	Φ (rad)	Modelo 1	2.59E-02
		Sales	2.59E-02

Tabela 15 – Comparativo entre os deslocamentos angulares provocados pela carga axial obtidos e os documentados em [9] após correção

Carregamento	Deslocamento máximo	Modelos	Aleatórios		Simétrico [-75/75] _S	“Anti-simétrico” [70/ – 20]	“Quasi-isotrópico” [75/90/ – 75]
			[45/90]	[60/70/80]			
$F_Z = 24.0$ kN	Φ (rad)	Modelo 1	-9.25E-03	-5.84E-02	0.00E+00	-7.33E-02	8.88E-04
		Sales	-9.25E-03	-5.84E-02	0.00E+00	-7.25E-02	8.88E-04

presente trabalho e os expostos em [9]. Para tal, usa-se $e = \frac{M_1 - S}{M_1} \times 100$ onde M_1 e S representam “Modelo 1” e “Sales”, respectivamente.

Tabela 16 – Desvio relativo entre os resultados do trabalho [9] e os reproduzidos neste texto

Deslocamento máximo	Desvio relativo (%)	Aleatórios		Simétrico [-75/75] _S	“Anti-simétrico” [70/ – 20]	“Quasi-isotrópico” [75/90/ – 75]
		[45/90]	[60/70/80]			
W (m)	e_W	0.00	0.00	0.00	1.14	0.00
Φ (rad)	e_{Φ_W}	0.00	0.00	0.00	1.09	0.00
V (m)	e_V	-2.23	-2.42	0.00	1.15	0.00
Φ (rad)	e_{Φ}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

onde e_{Φ_W} é o desvio relativo referente ao deslocamento angular devido ao carregamento axial entre os resultados do presente texto e os que são observados em [9].

Tendo em vista que o maior desvio relativo encontrado foi de 2.42%, considera-se como validado o código desenvolvido.

7.1.2 Comparação de modelos

Após serem realizadas as correções e validação da programação, finalmente pode-se realizar análise com maior profundidade do estudo de caso em foco. Com as devidas compatibilizações efetuadas, os modelos “Modelo 1” e “Sales” são chamados apenas de “Modelo 1”. Os resultados utilizados são aqueles obtidos em “Sales”. De fato, ambos representam a mesma formulação como descrita no trabalho [9] e sua distinção foi feita apenas a título de comparação entre os resultados documentados naquele trabalho e os

obtidos pelo autor deste texto. Além disso, é feito um comparativo entre o Modelo 1 e a formulação dos trabalhos [18–20] (Modelo 2).

Primeiramente, observa-se a diferença nas matrizes de rigidez globais de ambos os modelos. Nota-se também que as sequências de empilhamento que compõem a parede da viga em estudo, possuem lâminas com espessuras equivalentes. Desta maneira, os únicos elementos da matriz de rigidez global E_{ij} fora da diagonal principal que são não-nulos são $E_{14} = E_{41} \neq 0$ para todos os tipos de laminados com exceção dos simétricos para ambos os modelos como mostram as Eqs. (7.1) e (7.2).

$$E_{M_1} = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 & E_{14} \\ 0 & E_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} & 0 \\ E_{41} & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

e,

$$E_{M_2} = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 & E_{14} \\ 0 & (E_{22})_{M_1} - R_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (E_{33})_{M_1} - R_Y & 0 \\ E_{41} & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

onde $(E_{22})_{M_1}$ e $(E_{33})_{M_1}$ são os coeficientes E_{22} e E_{33} da matriz de rigidez global do Modelo 1 (M_1).

Acima, a linha e coluna 5 são negligenciadas pois a função de empenamento é nula devido à geometria da seção transversal em estudo. Nota-se que os coeficientes E_{22} e E_{33} de ambas as matrizes são iguais à menos dos fatores R_X e R_Y definidos como:

$$R_X = R_{X_1} + 2R_{X_2} + R_{X_3}, \quad (7.3)$$

onde:

$$\begin{aligned} R_{X_1} &= \oint -\frac{k_{12}^2}{k_{22}} Y^2 ds \\ R_{X_2} &= \oint \frac{k_{12}k_{23}}{k_{22}} Y \cos \alpha ds \\ R_{X_3} &= \oint -\frac{k_{23}^2}{k_{22}} \cos^2 \alpha ds. \end{aligned} \quad (7.4)$$

E, para R_Y ,

$$R_Y = R_{Y_1} + 2R_{Y_2} + R_{Y_3}, \quad (7.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} R_{Y_1} &= \oint -\frac{k_{12}^2}{k_{22}} X^2 ds \\ R_{Y_2} &= \oint \frac{k_{12}k_{23}}{k_{22}} X \sin \alpha ds \\ R_{Y_3} &= \oint -\frac{k_{23}^2}{k_{22}} \sin^2 \alpha ds. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Os termos R_X e R_Y representam as diferenças totais dos coeficientes E_{22} e E_{33} dos dois modelos, respectivamente. Assim, a variação percentual entre ambos é expressa como:

$$\begin{aligned}\Delta E_{22} &= \frac{R_X}{(E_{22})_{M_2}} \times 100 \\ \Delta E_{33} &= \frac{R_Y}{(E_{33})_{M_2}} \times 100.\end{aligned}\tag{7.7}$$

As Eqs. (7.4) e (7.6) revelam que R_X e R_Y dependem, exclusivamente, dos coeficientes k_{12} , k_{22} e k_{23} definidos na Eq. (B.1). Dessa forma, como k_{22} é função de A_{66} que é sempre não-nulo, a existência de k_{12} e k_{23} determinará a presença de ΔE_{22} e ΔE_{33} . Além disso, as duas formulações possuem valores iguais para os coeficientes E_{11} , E_{14} e E_{44} , conforme Eq. (7.2). A Tabela 17 mostra os parâmetros de rigidez associados ao problema para cada laminado.

Tabela 17 – Parâmetros de rigidez para a parede da viga circular com diferentes sequências de empilhamentos

Parâmetros de rigidez	Aleatórios		Simétrico [-75/75] _S	“Anti-simétrico” [70/ - 20]	“Quasi-isotrópico” [75/90/ - 75]
	[45/90]	[60/70/80]			
A_{16}	3.48E+07	1.50E+07	0.00E+00	-3.31E+07	0.00E+00
A_{26}	3.48E+07	7.09E+07	0.00E+00	3.31E+07	0.00E+00
B_{16}	-1.74E+04	-6.43E+03	0.00E+00	-2.24E+04	-2.52E+03
B_{26}	-1.74E+04	-9.77E+03	0.00E+00	-2.24E+04	-2.84E+04
k_{12}	9.99E+06	5.21E+07	0.00E+00	4.16E+07	0.00E+00
k_{22}	2.09E+07	2.97E+07	2.59E+07	2.85E+07	2.03E+07
k_{23}	-6.83E+03	-4.63E+03	0.00E+00	-2.24E+04	-2.84E+04
R_{X_1}	-6.44E+02	-1.23E+04	0.00E+00	-8.19E+03	0.00E+00
R_{X_2}	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
R_{X_3}	-2.45E-01	-7.94E-02	0.00E+00	-1.93E+00	-4.37E+00
R_{Y_1}	-6.44E+02	-1.23E+04	0.00E+00	-8.19E+03	0.00E+00
R_{Y_2}	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
R_{Y_3}	-2.45E-01	-1.23E-02	0.00E+00	-1.92E+00	-4.37E+00
R_X	-6.44E+02	-1.23E+04	0.00E+00	-8.20E+03	-4.37E+00
R_Y	-6.44E+02	-1.23E+04	0.00E+00	-8.20E+03	-4.37E+00
$(E_{22})_{M_2}$	2.24E+04	2.55E+04	3.21E+04	1.65E+04	3.50E+04
$(E_{33})_{M_2}$	2.24E+04	2.55E+04	3.21E+04	1.65E+04	3.50E+04
ΔE_{22}	-2.87%	-48.46%	0.00%	-49.81%	-0.01%
ΔE_{33}	-2.87%	-48.46%	0.00%	-49.81%	-0.01%

Observa-se o seguinte à partir da Tabela 17:

1. Como a seção transversal da viga é circular, tem-se que $R_X = R_Y$ para todos os casos;
2. As variações dos termos de rigidez à flexão E_{22} devido às contribuições de R_{X_2} e R_{X_3} são desprezíveis se comparadas à magnitude de $(E_{22})_{M_2}$ para todos os casos. Analogamente, tem-se argumento semelhante para E_{33} em função de R_{Y_2} e R_{Y_3} comparativamente à $(E_{33})_{M_2}$;

3. Para algumas sequências de empilhamento “não usuais”, os valores de R_{X_1} e R_{Y_1} podem ser relevantes como observa-se nos casos dos laminados [60/70/80] e [70/ – 20]. Verifica-se uma redução de aproximadamente 50% nas rigidezes à flexão do Modelo 2, levando a erros significativos nos deslocamentos transversais $V(Z)$. Isto ocorre pois k_{12} é maior que k_{22} ;
4. Para o laminado $[-75/75]_S$ simétrico, tem-se que $A_{16} = A_{26} = B_{26} = 0$. Consequentemente, é observado que $k_{12} = k_{23} = 0$. Dessa forma, as diferenças R_X e R_Y entre os modelos são nulas, implicando em resultados idênticos para os deslocamentos computados por ambas as formulações;
5. Para o laminado [75/90/ – 75], tem-se $A_{16} = A_{26} = 0$ o que implica em $k_{12} = 0$. Consequentemente, as diferenças R_X e R_Y entre os modelos são desprezíveis mesmo com R_{X_3} e R_{Y_3} não-nulos. Assim, observam-se diferenças percentuais muito próximas de zero entre os modelos.

7.1.3 Comparativo com MEF e análise de convergência de malha

Dando prosseguimento ao estudo de caso da viga circular, é feita análise das respostas da estrutura. A Tabela 18 mostra o comparativo entre os Modelos 1 e 2 para os deslocamentos lineares e angulares na extremidade livre da viga. Além disso, também são mostrados resultados obtidos no ANSYS para os deslocamentos máximos transversais $V(Z)$ e aqueles documentados por Zhang e Wang [9] através de simulações no ABAQUS.

Tabela 18 – Respostas lineares e angulares da extremidade livre da viga

Carregamento	Deslocamentos máximos	Modelos	Aleatórios		Simétrico [-75/75] _S	“Anti-simétrico” [70/ – 20]	“Quasi-isotrópico” [75/90/ – 75]
			[45/90]	[60/70/80]			
$F_Z = 24.0$ kN	W (m)	Modelo 1	6.75E-04	1.14E-03	4.58E-04	1.74E-03	4.20E-04
		Modelo 2	6.75E-04	1.14E-03	4.58E-04	1.74E-03	4.20E-04
	Φ (rad)	Modelo 1	-9.25E-03	-5.84E-02	0.00E+00	-7.25E-02	8.88E-04
		Modelo 2	-9.25E-03	-5.84E-02	0.00E+00	-7.25E-02	8.88E-04
$F_Y = 150$ N	V (m)	Modelo 1	2.29E-03	3.81E-03	1.56E-03	6.05E-03	1.43E-03
		Modelo 2	2.23E-03	1.96E-03	1.56E-03	3.04E-03	1.43E-03
		ANSYS	2.29E-03	3.74E-03	1.61E-03	6.33E-03	1.51E-03
		ABAQUS* [9]	2.32E-03	3.81E-03	1.62E-03	6.22E-03	1.50E-03
$M_Z = 100$ Nm	Φ (rad)	Modelo 1	1.89E-02	2.53E-02	1.43E-02	2.59E-02	1.83E-02
		Modelo 2	1.89E-02	2.53E-02	1.43E-02	2.59E-02	1.83E-02

*Elemento de casca linear quad-4 S4R5 com quatro nós

Como pode-se observar na Tabela 18, ambos os modelos apresentam valores idênticos para todos os deslocamentos da viga para todas as sequências de empilhamento em estudo, com exceção de $V(Z)$ nos casos [45/90], [60/70/80] e [70/ – 20]. Isto é consequência do discutido anteriormente para ΔE_{22} e ΔE_{33} . A diferença entre os resultados obtidos pelos Modelos 1 e 2 no caso [45/90] são consideravelmente menores do que aquelas verificadas para os casos [60/70/80] e [70/ – 20] conforme esperado.

Em virtude do verificado, optou-se por também serem levantados dados através do ANSYS na Tabela 18. Foram conduzidas 18 simulações para cada laminado totalizando um número de 90 análises. Utilizaram-se elementos de casca quad-8 parabólicos com 8 nós cada. Além disso, foram testados vários tamanhos de malha e, para uma tolerância de 1×10^{-3} , obteve-se convergência para um *sizing* de 5.0 mm totalizando uma malha com 8932 elementos e 26884 nós. A Figura 7.1.2 exibe os resultados obtidos para a análise de convergência de malha realizada.

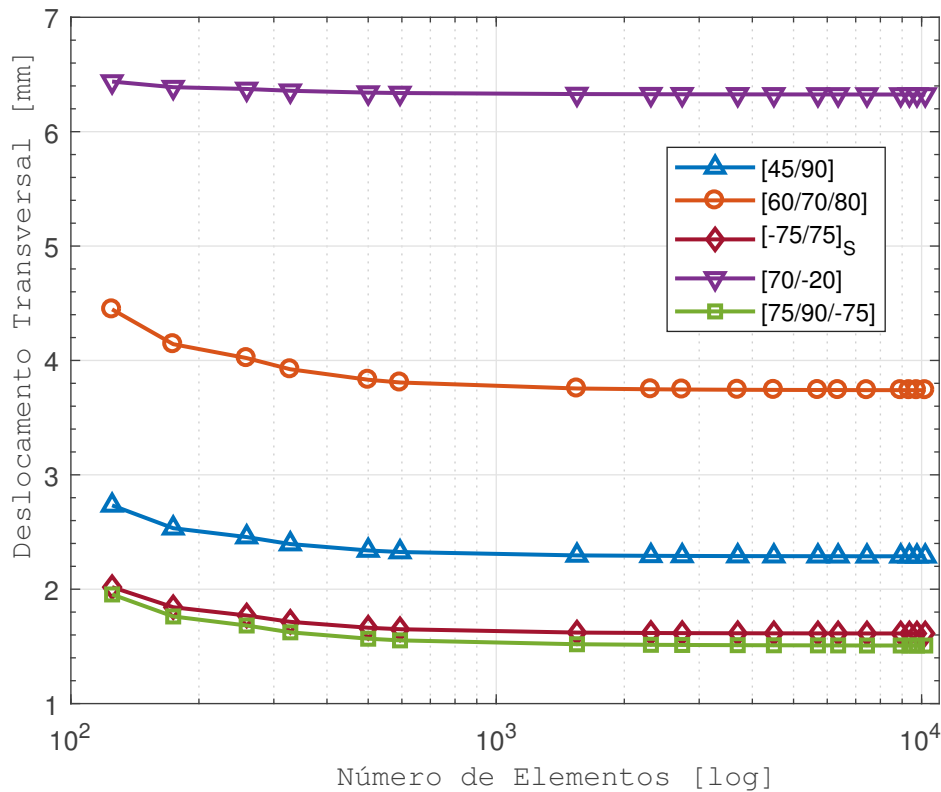


Figura 7.1.2 – Estudo de convergência da malha das simulações

Ao se contrastarem os dados, observa-se que o Modelo 1 apresenta grande concordância com os resultados das simulações conduzidas pelos *softwares* ANSYS e ABAQUS. Nos casos de interesse, o Modelo 2 apresenta valores que não condizem com estes resultados. Isto ocorre devido a utilização da Eq. (3.21) por esta formulação para o cálculo da deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$ do plano médio enquanto o Modelo 1 utiliza a Eq. (3.36). Logo, a deformação angular de uma casca compósita depende não tão somente do fluxo de cisalhamento N_{sz} quanto também da anisotropia do material que, acoplado a deformação axial $\bar{\epsilon}_{zz}$ e as curvaturas $\bar{\kappa}_{zz}$ e $\bar{\kappa}_{sz}$ do plano médio, influenciam drasticamente no resultado final.

7.1.4 Caso unicamada

O segundo estudo de caso é realizado para a mesma viga circular. Para tal, fixa-se a espessura da parede em 2.0 mm e considera-se que esta é composta por uma única camada

de carbono-epóxi. Aplica-se a carga transversal $F_Y = 150$ N do primeiro estudo de caso e verifica-se a dependência do deslocamento transversal $V(Z)$ máximo com a angulação das fibras. Os resultados obtidos utilizando os dois modelos e o ANSYS são mostrados na Figura 7.1.3.

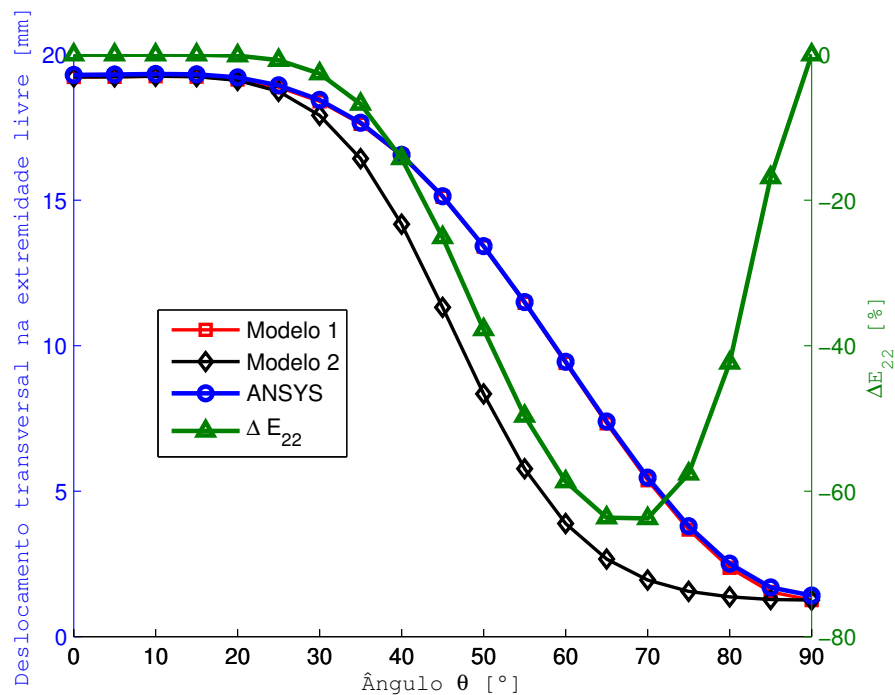


Figura 7.1.3 – Comparativos entre o deslocamento transversal na extremidade livre da viga para ângulo θ das fibras variável

Os resultados obtidos pelo Modelo 1 possuem enorme compatibilidade com aqueles acusados pelo ANSYS, conforme mostra a Figura 7.1.3. Em contraste, ambos os modelos apresentam valores muito próximos daqueles obtidos com o ANSYS até $\theta = 15^\circ$. À partir de então, os modelos começam a divergir entre si a medida que a diferença ΔE_{22} percentual entre ambos cresce até que atinge seu valor crítico em $\theta = 65^\circ$. A discrepância entre os dois modelos ultrapassa o valor de 60%. Em seguida, a disparidade diminui à medida que o ângulo θ aproxima-se de 90° tornando-se nula para este valor. Por fim, verifica-se que a utilização do Modelo 2 pode resultar em erros grosseiros pois este superestima a rigidez global da estrutura. As simulações no ANSYS foram realizadas de $\theta = 0^\circ$ até $\theta = 90^\circ$ aumentando-se a angulação gradativamente com um incremento de 5° .

7.1.5 Caso bicamada

Um terceiro estudo de caso foi realizado para a viga em análise. Neste, a espessura da parede é fixada em 2.0 mm e esta é constituída por um laminado $[45/-45]$; o carregamento aplicado é de $F_Y = 150$ N. Denota-se a espessura das camadas 45° e -45° por t_1 e t_2 , respectivamente. Assim como para o estudo em que se varia a angulação das fibras, agora os parâmetros que mudam são as espessuras das lâminas constituintes da parede

da viga. No caso, enquanto t_1 aumenta, a espessura t_2 diminui; ambas a um incremento de ± 0.05 mm. Dessa forma, levantam-se os dados do deslocamento transversal $V(Z)$ da extremidade livre com $1.0 \leq t_1 \leq 1.9$ e $0.1 \leq t_2 \leq 1.0$. Os resultados obtidos utilizando os dois modelos e o ANSYS são mostrados na Figura 7.1.4.

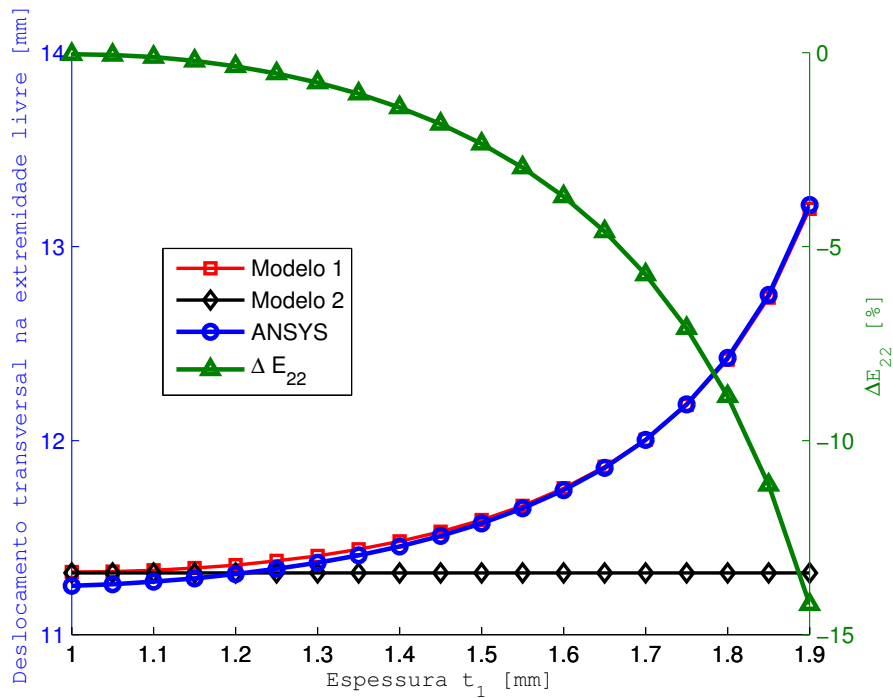


Figura 7.1.4 – Comparativos entre o deslocamento transversal na extremidade livre da viga para espessuras t_1 e t_2 das camadas variáveis

Novamente, os resultados obtidos pelo Modelo 1 apresentam significativa compatibilidade com aqueles levantados usando o ANSYS. Como esperado, os dois modelos comparados apresentam respostas próximas a medida que a diferença ΔE_{22} aproxima-se de zero. Na realidade, o Modelo 2 mostrou-se ligeiramente mais preciso para t_1 até 1.25mm. Todavia, o mesmo não captura os efeitos da variação da espessura pois se mantém constante para todos os valores de t_1 e, a partir deste valor, apresenta discordâncias grosseiras com a realidade. Isto ocorre pois as rigidezes à flexão $(E_{22})_{M_2}$ e $(E_{33})_{M_2}$ do Modelo 2 são definidas principalmente pela integração fechada dos termos $k_{11}Y^2$ e $k_{11}X^2$, respectivamente. Dessa maneira, como A_{11} , A_{12} e A_{22} são sempre constantes para laminados do tipo $[\theta / -\theta]$, obtém-se que o parâmetro k_{11} se mantém constante independentemente da variação das espessuras t_1 e t_2 das lâminas resultando no colapso deste modelo.

Por fim, comparam-se os tempos médios de processamento das simulações realizadas no ANSYS e da rotina MATLAB resultando em 8.1842 e 0.1267 segundos, respectivamente. Portanto, para a futura implementação do algoritmo de otimização, evidencia-se a importância da formulação unidimensional analítica implementada ao se verificar que a última consome 64.6 vezes menos tempo computacional obtendo valores precisos para uso de engenharia.

7.2 Critérios de Falha

Para avaliar e comparar os critérios de falha LaRC03 e Tsai-Wu, serão adotados procedimentos semelhantes àqueles sugeridos nos trabalhos de Hinton e Soden [83]. Dois envelopes de falha são descritos e avalia-se o comportamento da resistência à compressão de laminados cruzados angulados (*cross-ply*) assim como fizeram Dávila, Camanho e Rose [43] com a distinção de que aqui não se coloca o critério de Hashin como contraponto ao LaRC03. As propriedades dos materiais utilizados para as análises são aquelas que podem ser encontradas no trabalho [43]. Os algoritmos utilizados como base para os comparativos são aqueles desenvolvidos por Costa [51].

7.2.1 Compósito UD de E-glass/LY556 epóxi

A Figura 7.2.1 exibe os envelopes de falha no plano $\sigma_{22}-\tau_{12}$ obtidos utilizando os critérios de falha LaRC03 e Tsai-Wu. Os dados experimentais observados foram retirados do trabalho de Soden, Hinton e Kaddour [84].

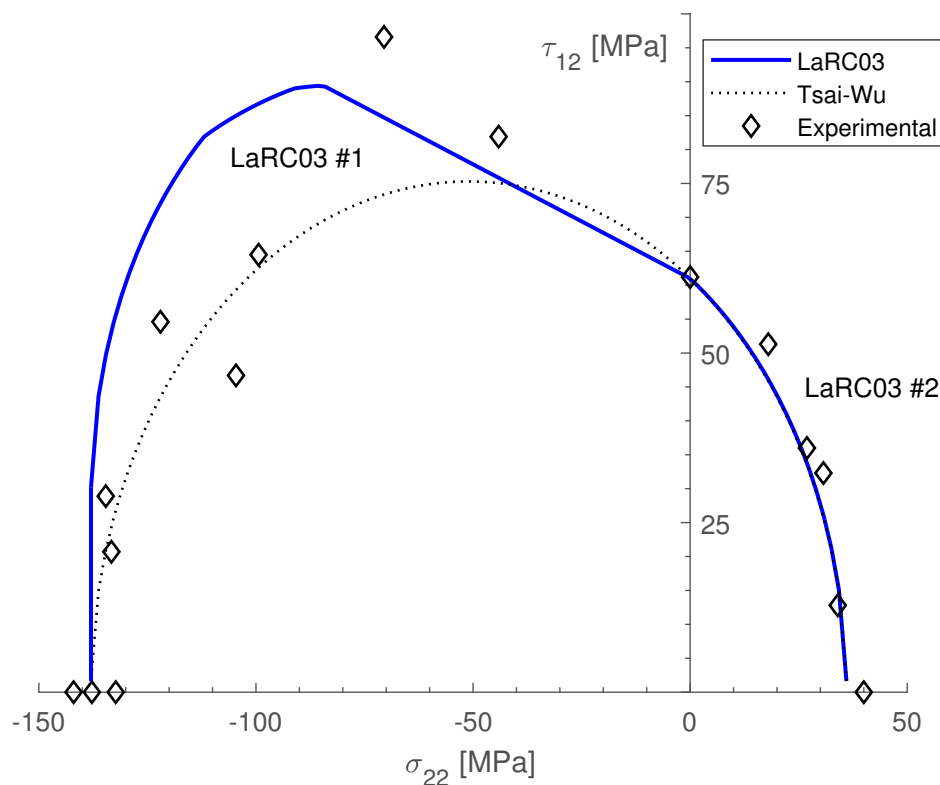


Figura 7.2.1 – Envelopes da falha e dados experimentais do WWFE para o compósito unidirecional de E-glass/LY556

Primeiramente, tem-se que os modos de falha neste envelope dizem respeito unicamente à matriz. Observa-se também que, os critérios de Tsai-Wu e LaRC03 apresentam previsões quase idênticas na região do primeiro quadrante da figura. Nesta, tem-se tração

da matriz com σ_{22} positivo e o índice de falha é dado pela Eq. (4.5). Além disso, ambos os critérios apresentam boa concordância com os dados experimentais.

No segundo quadrante da Figura 7.2.1, tem-se compressão da matriz com σ_{22} negativo. Nesta região, o índice de falha é dado pela Eq. (4.20). Os dados experimentais indicam um acréscimo na resistência ao cisalhamento com o aumento da compressão. O critério LaRC03 é capaz de capturar este aumento na resistência ao cisalhamento devido ao efeito *in situ*. Em contrapartida, a teoria de Tsai-Wu não prevê esta tendência.

7.2.2 Lâmina UD de E-glass/MY750 epóxi

Todos os seis modos de falha do critério LaRC03 podem ser representados por um envelope de falha no plano σ_{11} - σ_{22} como mostra a Figura 7.2.2.

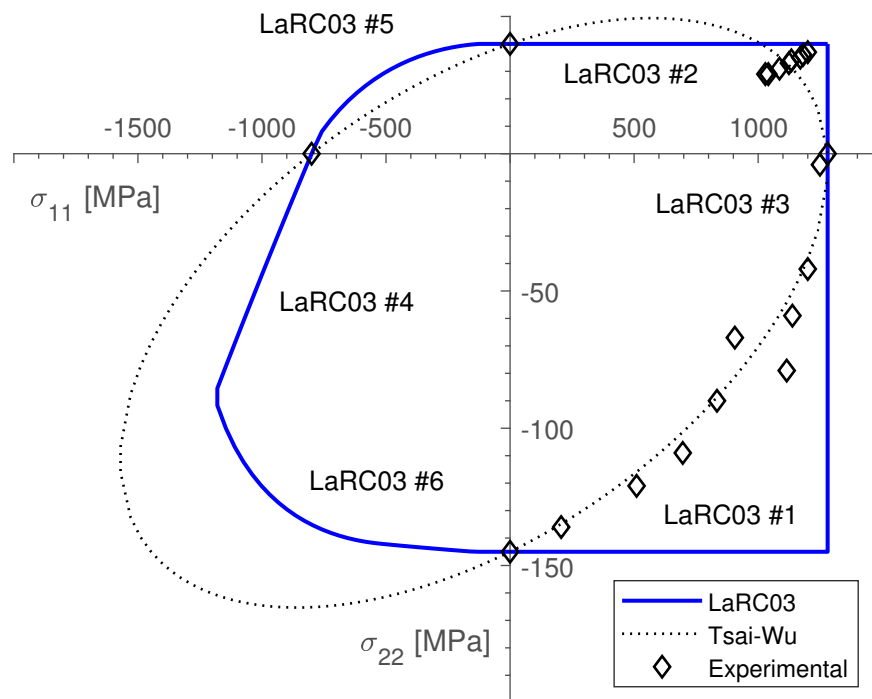


Figura 7.2.2 – Envelopes da falha e dados experimentais do WWFE para a lâmina unidirecional de E-glass/MY750 com fibras à $\theta = 0^\circ$ sob estado biaxial de tensão

Os dados experimentais coletados em Soden, Hinton e Kaddour [84] são escassos para o caso de compressão biaxial. No entanto, nas regiões onde existem dados, observa-se certa qualidade na predição de falha da lâmina por ambos os critérios. Contudo, existe considerável superioridade do critério de Tsai-Wu na região do quarto quadrante do gráfico. Além disso, nota-se que o critério de falha LaRC03 prevê aumento significativo na resistência a compressão longitudinal à medida que há o aumento da compressão transversal, conforme esperado. Por fim, para uma melhor avaliação da acurácia dos dois critérios,

devem-se realizar mais experimentos a fim de se “povoar” tanto o segundo quanto o terceiro quadrantes do gráfico.

7.2.3 Laminados cruzados angulados

Shuart [85] ao estudar a falha à compressão de laminados do tipo $[\pm\theta]_S$ (*cross-ply*) levantou uma série de dados experimentais que são utilizados aqui para comparar os critérios LaRC03 e Tsai-Wu. A Figura 7.2.3 mostra a resistência à compressão de laminados AS4-3502 do tipo $[\pm\theta]_S$ em função do ângulo θ das fibras como prevista pelas teorias de falha em estudo.

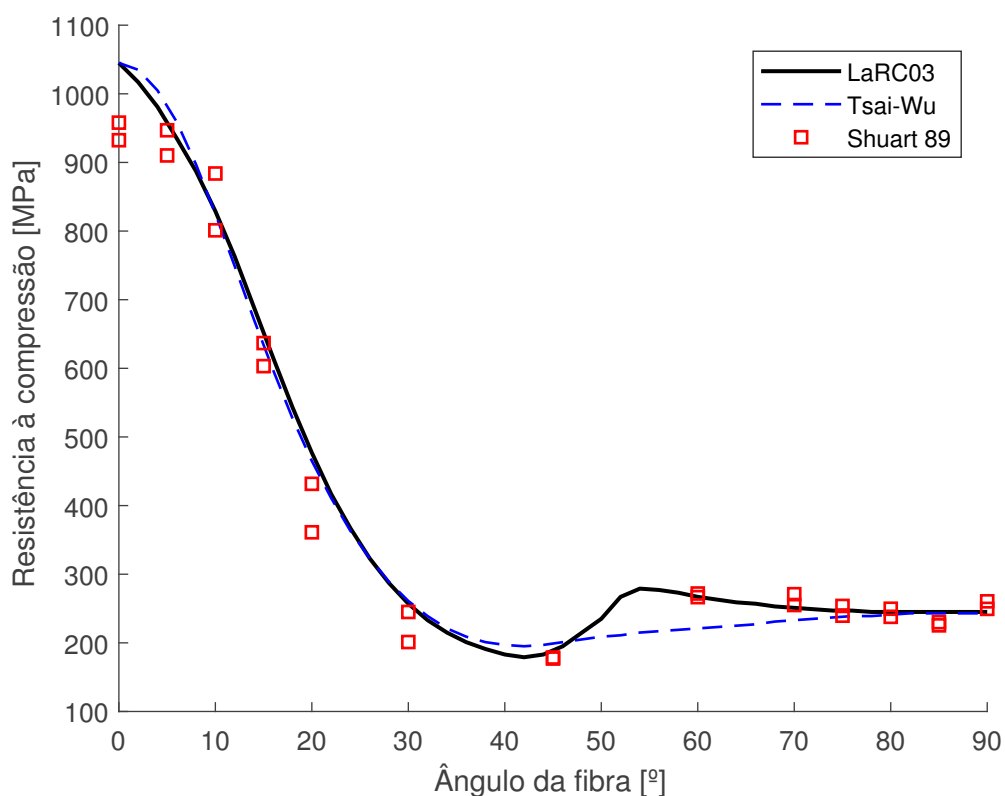


Figura 7.2.3 – Resistência à compressão como função do ângulo θ para laminados AS4-3502 cruzados angulados

O critério de Tsai-Wu sobre-estima a falha para θ até aproximadamente 10° enquanto o LaRC03 apresenta resultados melhores neste intervalo. À partir deste valor, ambas as teorias apresentam previsões similares até 35° e mostram deter qualidade para prever a falha. Para ângulos entre o intervalo de 45° até 70° , a utilização do critério de Tsai-Wu subestima a falha pois este não leva em consideração os efeitos *in situ* de aumento da resistência ao cisalhamento provocada pela compressão transversal. Em contrapartida, esta característica é capturada com considerável precisão pelo critério LaRC03, resultando em melhores previsões de falha dadas por este.

7.3 Otimização via Algoritmos Genéticos

Utiliza-se a ferramenta de algoritmos genéticos desenvolvida por Colherinhas [1] para a realização da otimização. Desta maneira, deve-se primeiramente realizá-la para um problema cuja resposta seja conhecida, a fim de validar o AG. Uma vez validado para este caso em específico, pode-se partir para a avaliação de problemas com maior grau de complexidade.

7.3.1 Validação do AG

Inicialmente, propõe-se o problema de otimizar uma viga de parede fina compósita utilizando a formulação desenvolvida por Zhang e Wang [9]. Assim, fixam-se alguns parâmetros para simplificação do problema, a saber:

- Comprimento da viga – $L = 1.0$ m;
- Número de camadas do laminado – $n_c = 2$;
- Espessura do laminado – $t = 2.0$ mm;
- Espessura das camadas – $t_i = t/n_c$.

Além disso, define-se como material para a viga o mesmo que fora adotado para os estudos de caso da Seção 7.1. As propriedades podem ser encontradas na Tabela 11.

Para a viga engastada-livre, aplica-se uma carga transversal $F_Y = 150$ N e variam-se dois parâmetros: o raio e a angulação das fibras unidirecionais que compõem a estrutura. Como restrições, definem-se valores mínimos e máximos dentro dos quais os parâmetros citados podem variar. Notando como θ_1 e θ_2 os ângulos das camadas 1 e 2 do laminado, tem-se que $\theta_i \in [0, 90]$ graus e $r \in [25, 40]$ milímetros.

Como objetivo da otimização, deve-se minimizar o deslocamento transversal V_{max} na ponta da viga. Portanto, define-se a função objetivo como o inverso do deslocamento transversal que é minimizado ao maximizar-se o *fitness*. Então,

$$f_{obj} = \max \left(\frac{1}{V_{i_{max}}} \right), \text{ com } i = 1, 2, \dots, N_{ind}, \quad (7.8)$$

onde i representa um indivíduo de uma população N_{ind} . De fato, este é um problema de simples resolução. Como o objetivo é minimizar o deslocamento, trata-se de um problema que deve buscar por uma viga que possua a máxima rigidez possível. Isto é alcançado através da estrutura que possua o maior raio disponível (i.e., $r = 40$ mm) e com fibras dispostas nas camadas 1 e 2 em 90 graus (desta maneira as fibras estão dispostas paralelamente à dimensão do comprimento da viga). Após definir o problema, a Tabela 19 exhibe os parâmetros de otimização adotados.

Tabela 19 – Parâmetros da otimização de validação do AG

Parâmetro	Metodologia	Valor
Número de gerações	–	200
Número de indivíduos por geração	–	200
Número de gerações até as dizimações	–	50
Percentual de dizimação	Simple	20%
Percentual de elitismo	Simple	2%
Probabilidade de mutação	<i>Creep</i> uniforme	2%
Probabilidade de <i>crossover</i>	BLX- α	60%

Seleção: *Roulette-Wheel*.

Para o problema em questão, os parâmetros adotados (Tabela 19) representam a combinação com menor tempo de convergência (obtidos por tentativa e erro). Além disso, o parâmetro α do cruzamento de mistura foi definido como 0.25. A Figura 7.3.1 mostra a evolução da função objetivo ao longo das gerações.

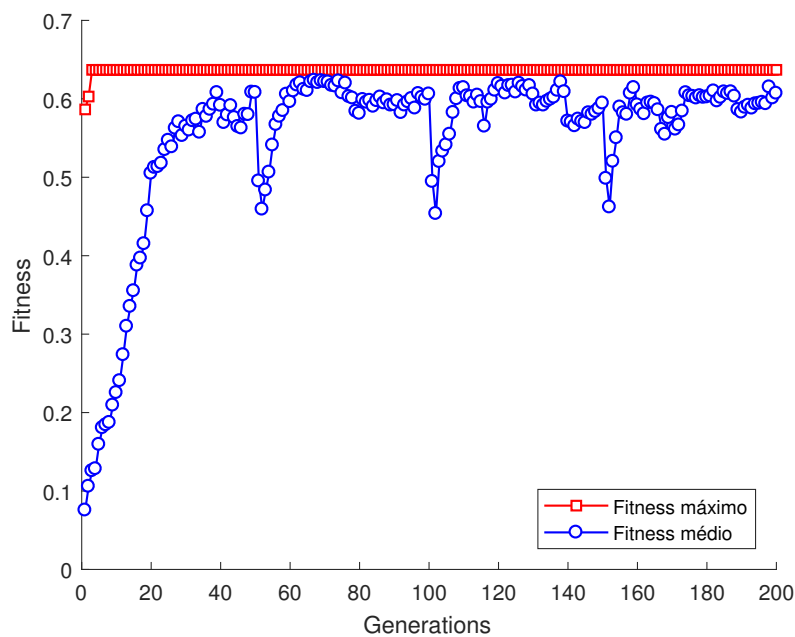


Figura 7.3.1 – Valor da função objetivo ao longo das iterações

Observa-se que a Figura 7.3.1 mostra uma convergência rápida para algumas poucas iterações do AG. O tempo gasto no processo foi de 18.51 segundos. A fim de verificar se o algoritmo converge para um máximo global ou local, repetiu-se o processo aumentando e diminuindo ambos o número de indivíduos por geração N_{ind} e o número de gerações N_{ger} para 1000 e 100. Os resultados obtidos foram idênticos e exatamente como o esperado para a solução ótima do problema, comprovando o funcionamento do AG e sua capacidade de levar à soluções com ótimos globais. A saber, os tempos médios gastos para o AG com N_{ger} e N_{ind} iguais a 1000 e 100 foram de 465.63 e 5.36 segundos, respectivamente. O resultado encontrado para a viga pela otimização é mostrado na Tabela 20.

Tabela 20 – Valores ótimos encontrados para a viga

Variável	Valor	Unidade
Raio médio	40	Milímetros
Ângulo da camada 1	90	Graus
Ângulo da camada 2	90	Graus
Deslocamento transversal	0.84	Milímetros

Uma vez que o resultado encontrado está de acordo com o esperado, basta apenas garantir que o deslocamento foi corretamente calculado. Portanto, utilizam-se como variáveis de entrada no algoritmo desenvolvido e validado para vigas de paredes finas compostas os resultados encontrados pela otimização. Como obteve-se exatamente o mesmo valor para $V(Z)$, conclui-se que o AG calcula corretamente o valor do deslocamento transversal e, conseqüentemente, da função objetivo.

7.3.2 Otimização da longarina da asa

Para realizar a otimização da longarina consideram-se os dois possíveis casos críticos estudados no Capítulo 6. Assim, o problema é inicialmente particionado em duas parcelas: uma para a situação crítica de voo e outra para o pouso. Portanto, após a obtenção dos indivíduos ótimos por vias do AG para ambos os casos comparam-se estes e seleciona-se aquele que possuir o maior raio médio, implicando que o mesmo é resultado do caso mais crítico.

Neste contexto, permite-se que o AG otimize os seguintes parâmetros: raio médio (r_m), número de camadas (N) e orientação das fibras (θ_i) nas mesmas. Cria-se a população inicial restringindo-se as variáveis nos seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
 16.2 &\leq r_m \leq 19.4 \text{ mm}, \\
 2 &\leq N \leq 5, \\
 0^\circ &\leq \theta_i \leq 90^\circ, \quad i = 1, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

Tais faixas foram escolhidas a partir de alguns critérios. Para o raio médio define-se o limite inferior devido à limitações no processo de fabricação da equipe Draco Volans e seleciona-se o limite superior à partir do valor da largura da nervura da asa na região por onde perpassa a longarina. O número de camadas é restringido baseado no conhecimento de que uma única camada formando a estrutura resultaria em uma longarina insuficientemente rígida e que a solução ótima do problema não deve ultrapassar o limite de 5 camadas para não resultar em estruturas demasiadamente pesadas. Já escolha do intervalo de variação do ângulo das fibras é trivial.

Além disso, para a otimização consideram-se as propriedades da Tabela 5 do reforço BD de fibra de carbono-epóxi com espessura de 0.35 mm (espessura do tecido utili-

zando pela Draco Volans). Para as resistências *in situ* utilizam-se as relações para lâminas espessas empilhadas e adota-se um ângulo $\alpha_0 = 53^\circ$ do plano de fratura.

7.3.2.1 Função objetivo

A proposta da otimização é minimizar o fator de segurança da viga até um valor limite, definido como 1.5 (FS_p) com uma tolerância de 0.05. Assim, consideram-se válidas soluções ótimas de longarinas com fatores de segurança mínimos de até 1.45. Isto é feito pois no dimensionamento é considerado que a mesma possui comprimento virtual equivalente ao da envergadura da asa do DV-GEVX 1. De fato, o comprimento real desta estrutura equivale apenas à envergadura da região reta da asa. Esta consideração é implementada em concordância com o realizado pela equipe Draco Volans no ano de 2016 de forma a se ter um dimensionamento ligeiramente mais conservador para esta estrutura.

Adicionalmente, para as situações de voo e pouso restringe-se o ângulo máximo de torção em 5° e 15° (aproximadamente o ângulo de ataque somado à cambagem), respectivamente. Estes foram os valores escolhidos pela equipe Draco Volans no ano de 2016 como restrições de projeto. Assim, para cumprir com a finalidade, a função objetivo maximiza os índices de falha FI do LaRC03 tanto para a fibra quanto para a matriz, minimizando o fator de segurança FS. Considera-se como falha o critério FPF (*First Ply Failure*). Por fim, maximiza-se f_{obj} pela seguinte relação:

$$f_{obj} = \frac{1}{\text{fit}_i + 1}, \text{ com } i = 1, \dots, N_{ind}, \quad (7.10)$$

onde $\text{fit}_i = |\min(FS_i) - FS_p|$, FS_p é o fator de segurança de projeto e i o indivíduo da população N_{ind} . Note que se $\min(FS_i) \rightarrow FS_p$, então $f_{obj} \rightarrow 1$ caracterizando uma “normalização” do AG.

Assim, buscam-se por longarinas que possuam $\min(FS_i) \approx 1.5$ e que atendam ao critério de $\max(\Phi_i) \leq 5^\circ$ ou 15° a depender do caso em análise. Por fim, para aqueles indivíduos que não atendam a nenhum dos critérios define-se que $\text{fit}_i = 10$, resultando em valores baixos para a função objetivo. Este valor foi escolhido após verificar que o mesmo proporcionara bons resultados de convergência para o AG.

7.3.2.2 Resultados

Uma vez que a função objetivo está definida, utiliza-se como parâmetros da otimização os mesmos que estão presentes na Tabela 19 pois esta foi, novamente, a combinação que demonstrou levar à convergência de maneira mais eficiente. Após avaliação dos resultados para os casos de voo e pouso críticos pode-se concluir que **o voo é a situação crítica no que diz respeito às tensões atuantes na estrutura** sendo, portanto, o caso em que encontra-se longarinas com maior raio médio. Assim, todas as longarinas dimensionadas à partir da situação de voo crítico são capazes de resistir aos esforços

provenientes do pouso. Contudo, não necessariamente os indivíduos ótimos provenientes do voo atendem ao critério de ângulo de torção máximo **quando estes são avaliados durante o pouso crítico**. Desta maneira, pôde-se realizar uma análise crítica acerca das restrições de torção máxima de ambos os casos e reuni-las em um único critério. Para tal, implementa-se o cálculo dos esforços atuantes para ambas as situações em uma única rotina de otimização onde avalia-se a função objetivo como fora definida na Eq. (7.10) e utiliza-se como critério para o ângulo de torção:

$$\sqrt{(\max\Phi_i^p)^2 - (\max\Phi_i^v)^2} \leq 14.142^\circ, \quad (7.11)$$

sendo $\max\Phi_i^p$ e $\max\Phi_i^v$ os ângulos de torção máximos calculados para um mesmo indivíduo i nas situações de pouso e voo crítico, respectivamente. O fator 14.142° foi escolhido pois este resulta de $\sqrt{15^2 - 5^2}$. Desta maneira, o AG é forçado a encontrar soluções que: (a) suportem os esforços do voo crítico; (b) sejam capazes de produzir ângulos de torção máximos inferiores àqueles definidos em cada um dos casos em análise.

Após a definição completa do problema e de se efetuar a otimização diversas vezes (tempo médio gasto de 35 minutos), conclui-se que a solução ótima do problema é uma longarina com sequência de empilhamento [65/90] com raio médio de 19.4 mm e massa de 166.52 gramas. A Figura 7.3.2 mostra a curva de convergência do AG para o problema em estudo.

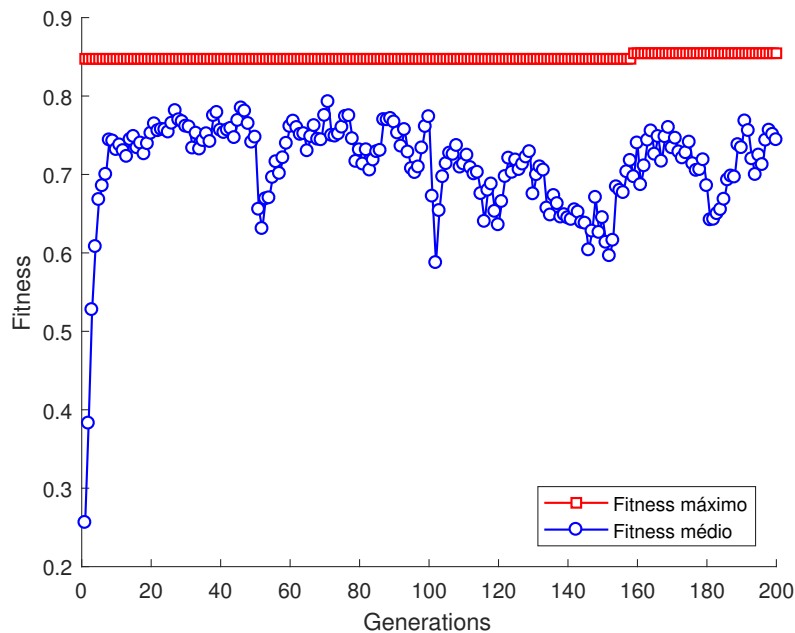


Figura 7.3.2 – Valor da função objetivo ao longo das iterações do AG

Primeiramente, ao se analisar a curva, percebe-se que o valor do *fitness* máximo não é igual a 1. Portanto, sabe-se que o mínimo fator de segurança da solução ótima é diferente de 1.5. Contudo, isto não significa dizer que o AG foi incapaz de levar à uma solução ótima do problema. Ao se realizar a verificação por vias do algoritmo de vigas (que já fora validado) obtém-se os resultados da Tabela 21, validando a solução encontrada.

Tabela 21 – Fator de segurança mínimo e ângulo de torção máximo da longarina ótima

Variável	Condição	Valor
Fator de segurança mínimo	Voo	1.47
Ângulo de torção máximo		2.36
Fator de segurança mínimo	Pouso	2.69
Ângulo de torção máximo		14.94

7.3.2.3 Análise dos resultados

A longarina encontrada é resultado da consideração da tolerância de 0.05 no fator de segurança. Caso contrário, o AG não seria capaz de encontrar uma solução com apenas 2 camadas no laminado. Isto resultou de uma análise crítica acerca dos resultados ótimos que eram obtidos quando se limitava o fator de segurança em 1.5 sem o uso de qualquer tolerância. A saber, todos possuíam sequência de empilhamento com 3 camadas com fator de segurança mais elevado. De fato, vários indivíduos eram capazes de atender à restrição de torção e FS caracterizando um *locus* de soluções possíveis. Neste contexto, de forma a compensar o conservadorismo de se considerar a longarina possuindo o comprimento total da envergadura da asa, foi proposta a tolerância e isto conduziu o AG à solução com 2 camadas, reduzindo a massa da estrutura e culminando em uma eficiência estrutural mais elevada. Vale salientar que a solução encontrada é manufaturável pelo atual método de fabricação de laminação manual desenvolvido pela equipe Draco Volans. A Figura 7.3.3 mostra a distribuição de deslocamentos lineares e angulares ao longo da semi-envergadura alar da longarina ótima durante a situação crítica de voo.

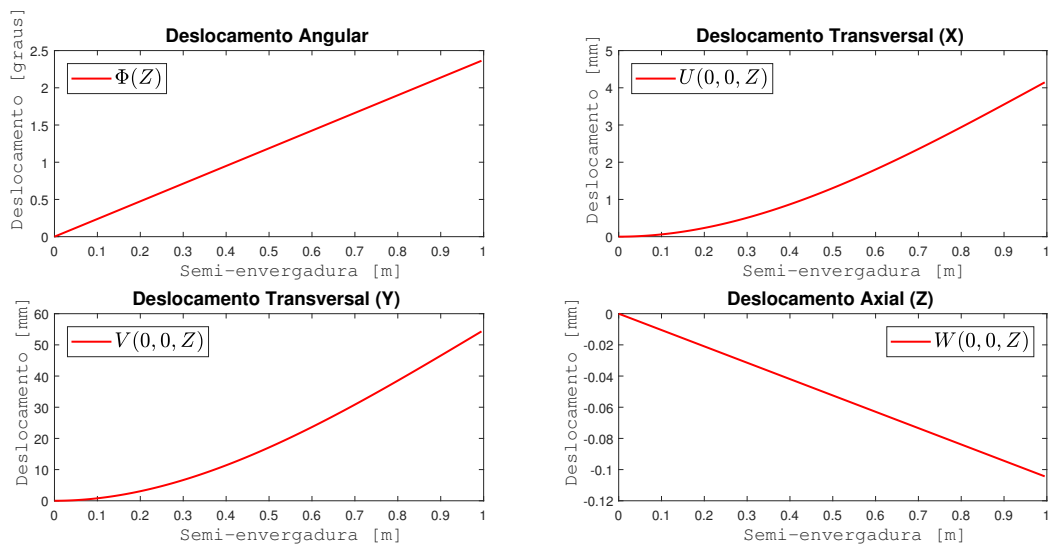


Figura 7.3.3 – Deslocamentos na longarina ótima durante o voo crítico

Analisando os resultados é possível perceber a existência de um deslocamento axial devido aos acoplamentos existentes no laminado. Contudo, este não é prejudicial ao desempenho da estrutura. Além disso, os deslocamentos transversais nas direções x e y produzem ângulos de enflechamento máximos de 0.24° e 3.12° , respectivamente. Ambos não são sig-

nificativos no que tange ao projeto da longarina pois a condição de flexão da asa é menos nociva ao desempenho da aeronave do que a torção excessiva. Contudo, para asas com maior razão de aspecto, a flexão pode ser um fator limitante do projeto. Historicamente a equipe utiliza como restrições flexurais ângulos da ordem de 10° , valor consideravelmente acima dos verificados para a longarina em estudo. Por fim, documenta-se que ao utilizar o Modelo 2 encontram-se deslocamentos transversais 8.19% vezes inferiores aos encontrados utilizando o Modelo 1. Já o ângulo de torção é o mesmo.

A Figura 7.3.4 mostra a distribuição de tensões nas direções principais e o fator de segurança ao longo da espessura da parede da viga na seção crítica para os critérios de falha de Tsai-Wu e LaRC03.

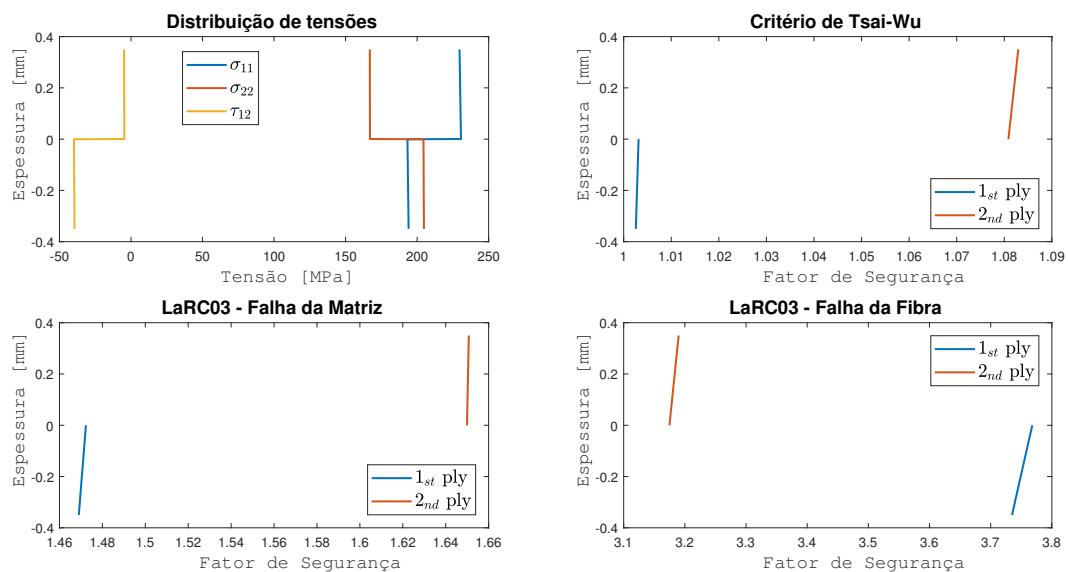


Figura 7.3.4 – Distribuição de tensões e fator de segurança ao longo da espessura na seção crítica da longarina ótima durante a situação de voo crítico

Ao analisar a distribuição de tensões percebe-se que os modos de falha da fibra e matriz são devido à tração transversal, caracterizando o uso dos critérios LaRC03 #2 e #3 descritos na Eqs. (4.20) e (4.26), respectivamente. Este é um resultado importante significando que, para o problema estudado, nos encontramos em uma região do envelope de falha altamente preenchida por dados experimentais. Vale salientar que o critério de falha de Tsai-Wu foi mais conservador, fornecendo fatores de segurança menores quando comparado com o LaRC03. Assim, a otimização não levaria a resultados com 2 camadas para a longarina no caso de se utilizar o critério de Tsai-Wu se consideradas as restrições impostas. Portanto, é notável o ganho de eficiência estrutural ao se utilizar o LaRC03 em detrimento do último. Percebe-se que isto é, em parte, proveniente das resistências *in situ*. Ao se analisar uma lâmina que encontra-se em um laminado, o posicionamento da mesma no empilhamento é relevante para a resposta final. No caso, considerou-se que as lâminas são espessas (quando comparadas com a ordem de grandeza das trincas). Assim, suas resistências *in situ* à tração transversal e ao cisalhamento longitudinal são constantes

e superiores às suas respectivas resistências quando vistas na lâmina isolada. A Tabela 22 mostra um compilado dos parâmetros obtidos/utilizados para aplicação do LaRC03.

Tabela 22 – Parâmetros do LaRC03 para o material da longarina

Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Ângulo do plano de fratura	α_0	53	graus
Razão de tenacidades	g	6.77	–
Resistência <i>in situ</i> à tração transversal	Y_{is}^T	1362.2	MPa
Resistência <i>in situ</i> ao cisalhamento longitudinal	S_{is}^L	212.1	MPa
Resistência ao cisalhamento transversal	S^T	211.0	MPa
Coefficiente de fricção interna transversal	η_T	0.287	–
Coefficiente de fricção interna longitudinal	η_L	-0.288	–

Ademais, analisam-se também os deslocamentos da longarina durante o pouso. Os resultados podem ser observados na Figura 7.3.5.

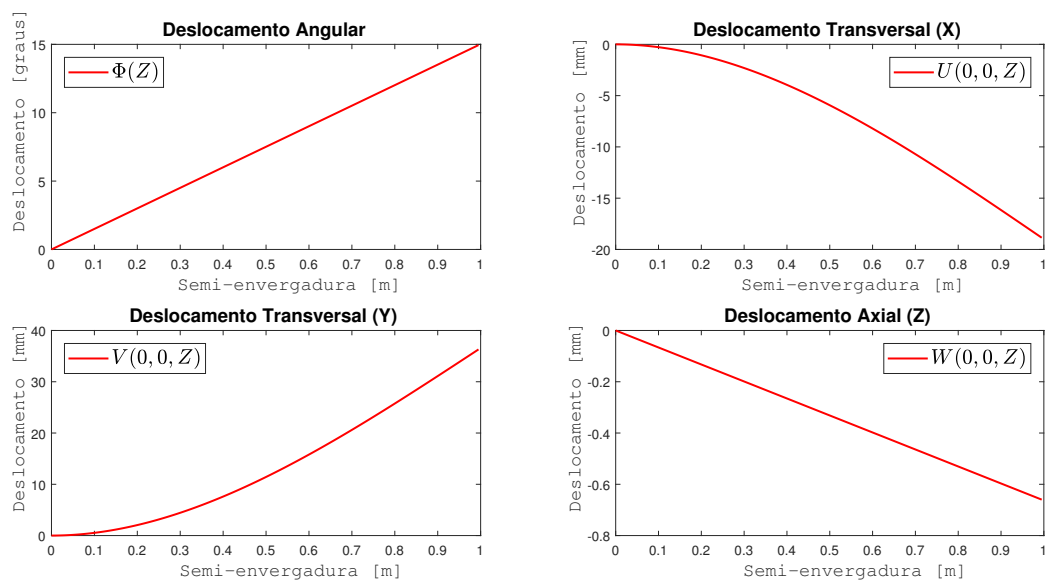


Figura 7.3.5 – Deslocamentos na longarina ótima durante o pouso crítico

Assim como para a situação de voo verifica-se um pequeno deslocamento axial na viga. Novamente, este não se demonstra nocivo. Já para o deslocamento angular, é possível perceber que, apesar de maior, atende aos critérios estabelecidos. Verifica-se deslocamentos transversais nas direções x e y com ordens de grandeza semelhantes. A saber, os máximos equivalem -18.86 e 36.30 milímetros resultando em ângulos de enflechamento de 1.1° e 2.1° , respectivamente. As diferenças para estes deslocamentos usando os Modelos 1 e 2 é a mesma do caso de voo por se tratar da mesma longarina.

Novamente, analisa-se a distribuição de tensões e o fator de segurança pelos dois critérios de falha em contraste na seção crítica para a longarina ótima durante o pouso através da Figura 7.3.6.

Percebe-se que para o pouso os modos de falha do LaRC03 são os mesmos do voo tanto para a fibra quanto para a matriz. Além disso, nota-se que, de fato, os fatores

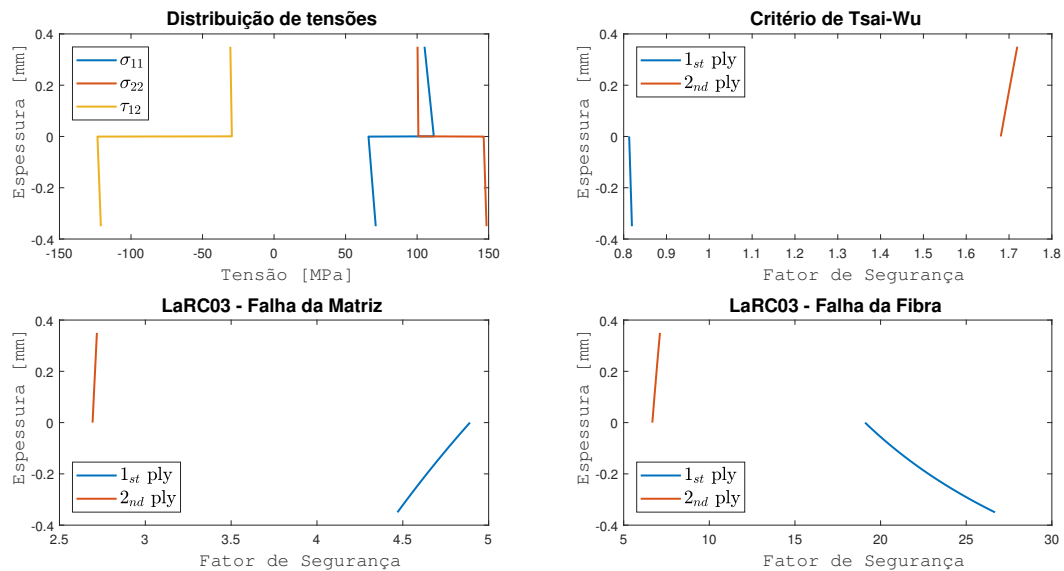


Figura 7.3.6 – Distribuição de tensões e fator de segurança ao longo da espessura na seção crítica da longarina ótima durante a situação de pouso

de segurança na seção crítica ao longo da espessura da parede da longarina são maiores. Verificam-se dois fatos interessantes: (a) quando avaliadas pelo critério de Tsai-Wu, ocorre falha da primeira camada enquanto a segunda está segura (para a situação de voo ambas as lâminas falhariam); (b) tanto para falha da matriz quanto da fibra, o critério LaRC03 prevê fatores de segurança maiores para a primeira camada em contradição à previsão dada pela teoria de Tsai-Wu. Adicionalmente, note que para a primeira camada encontram-se fatores de segurança menores na seção crítica para o pouso quando comparado com a mesma camada para o voo. De fato, verifica-se que as tensões normais são menores enquanto o cisalhamento é mais elevado. Conclui-se que o critério de Tsai-Wu pode ser demasiadamente sensível à tensões cisalhantes (quando estas possuem ordem de grandeza semelhantes às das tensões normais) próximas a resistência ao cisalhamento longitudinal no caso de lâminas com reforço bidirecional.

8 Considerações Finais

8.1 Conclusões

Este trabalho surgiu como uma proposta de melhoria da atual metodologia de dimensionamento das longarinas da equipe Draco Volans de AeroDesign. Foi utilizada com sucesso a ferramenta de otimização por algoritmos genéticos desenvolvida por Colherinhas [1] aliada ao critério de falha LaRC03 [43] e à teoria de vigas de paredes finas compósitas elaborada por Zhang & Wang [9].

Dessa forma, tiram-se algumas conclusões dos estudos de casos realizados durante este trabalho. Primeiramente, percebe-se que o Modelo 1 [9], apresenta melhorias significativas sob o Modelo 2. Ambos tratam-se de teorias unidimensionais para vigas de paredes finas compósitas. Contudo, o segundo modelo não leva em consideração as anisotropias intrínsecas aos materiais compósitos no que diz respeito ao cálculo da deformação angular $\bar{\gamma}_{sz}$ do plano médio enquanto o primeiro, ao ajustar este detalhe fazendo uso direto da equação constitutiva, é capaz de obter com precisão as respostas destas vigas quando solicitadas por carregamentos simples para todas as sequências de empilhamento analisadas. Além disso, os modelos em contraste foram comparados com os resultados obtidos utilizando o *software* de elementos finitos ANSYS e aqueles documentados em [9] fazendo-se uso do ABAQUS. Novamente, o Modelo 1 mostrou-se extremamente mais preciso e eficiente do que o Modelo 2 para todos os estudos de caso realizados neste trabalho. Verifica-se que as discrepâncias entre as rigidezes à flexão dos Modelos 1 e 2 ultrapassam os 60% no caso unicamada e são próximas de 15% para o caso bicamada. Por fim, a formulação do Modelo 1 é útil e precisa para fins de engenharia.

No que tange às teorias de falha, pôde-se aprender que ainda são necessários desenvolvimentos para sermos capazes de prever com qualidade quando e como uma estrutura constituída por materiais compósitos colapsa. Ademais, ressaltou-se a importância de uma abordagem fenomenológica da falha ao se comparar os critérios de Tsai-Wu e LaRC03. Envelopes de falha para laminados unidirecionais nos planos σ_{11} - σ_{22} e σ_{22} - τ_{12} foram descritos e analisou-se a dependência da resistência à compressão de laminados *cross-ply* com a angulação das fibras. Para todos os estudos realizados, resultados experimentais foram inseridos a fim de se possuir um parâmetro para comparação. Percebe-se que o critério LaRC03 possui maior capacidade de prever a falha, principalmente para os casos de falha

da fibra ou matriz sob compressão. Ressalta-se ainda que, apesar de possuir seis índices distintos para se analisar a falha de uma estrutura, o critério LaRC03 é de simples implementação e caracterização, necessitando apenas de dois experimentos adicionais quando comparado ao de Tsai-Wu. Além disso, o critério LaRC03 mostra-se capaz de capturar os efeitos *in situ* que são inerentes à análise de laminados.

Ao final do trabalho, cumpriu-se com o objetivo que lhe foi posto. Assim, obteve-se uma nova metodologia de dimensionamento e otimização para as longarinas da asa de aviões experimentais reunindo a formulação proposta no Modelo 1 e a utilização do critério de falha LaRC03. Em especial, dimensionou-se a longarina da asa do DV-GEVX 1, protótipo da equipe Draco Volans. Esta possui sequência de empilhamento [65/90], raio médio de 19.4 mm, massa final de 166.52 gramas e é confeccionada com reforço bidirecional de carbono com matriz epóxi. Isto representa uma evolução significativa se comparada ao projeto desenvolvido pela equipe no ano de 2016 que culminou em um estrutura com empilhamento [90/90/90], raio médio de 19.4 mm e massa final de 249.78 gramas confeccionada com o mesmo material. Obteve-se, portanto, uma redução de massa de aproximadamente 33% para esta estrutura, aumentando a eficiência estrutural da aeronave fator este de extrema importância para a equipe.

8.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Diversas linhas de pesquisa podem ser exploradas à partir dos estudos realizados neste trabalho. Pode-se, por exemplo, estender a formulação de vigas de paredes finas compósitas de Zhang & Wang [9] (Capítulo 3). Algumas possibilidades seriam as de inclusão da deformação devido ao cisalhamento transversal, teoria de grandes deformações e a consideração de uma seção transversal variável ao longo do comprimento da viga. Além disso, pode-se também realizar um estudo acerca dos efeitos de se variar o comprimento das várias camadas de reforço ao longo da envergadura dessas vigas. Isto pode acarretar, provavelmente, em regiões com concentradores de tensões que estariam localizadas na transição destas camadas. No entanto, é possível que vigas com massa reduzidas possam ser encontradas ao se efetuar uma otimização.

Sugerem-se como linhas para trabalhos futuros a migração das rotinas para linguagens de programação de alta performance como por exemplo Julia, C ou Python. Caso deseje-se estudar problemas com maior grau de complexidade esta seria uma excelente maneira de se reduzir o tempo de processamento da otimização via algoritmos genéticos. Além disso, sugere-se realizar um estudo experimental das vigas de paredes finas compósitas. Neste devem ser levantadas as curvas tensão-deformação do material que compõe a parede da estrutura para que seja possível projetar-se sob medida uma determinada viga. Finalmente, deve-se realimentar o AG com distribuições de sustentação/arrasto mais realistas, obtidas através da utilização do Método dos Painéis e ensaios em túnel de vento,

por exemplo. É sabido que o Método de Schrenk, apesar de extremamente útil para um projeto preliminar, costuma ser conservador o que possivelmente acarreta em longarinas com massa mais elevada.

Adicionalmente, é de particular importância o estudo de Falha Progressiva para que se elabore um comparativo entre os indivíduos ótimos obtidos ao se utilizar como situação de falha aquela definida tanto com FPF (*First Ply Failure*) quanto com LPF (*Last Ply Failure*). Estudos conduzidos por Almeida et. al. [86] sugerem que, ao se considerar a abordagem de LPF, obtém-se indivíduos ótimos com sequência de empilhamento anti-simétrica para o caso do estudo realizado pelos autores.

Quanto ao desempenho do algoritmo genético, sugere-se que um comparativo entre os resultados obtidos por uma otimização realizada utilizando o *software* modeFRONTIER conjuntamente com o ANSYS ou outro pacote comercial de elementos finitos e os resultados obtidos neste trabalho seja realizado. Pode-se também otimizar a longarina utilizando o AG desenvolvido por Colherinhas [1] em conjunto com um pacote de MEF e comparar os resultados.

Além disso, é de grande importância que seja realizado um estudo do comportamento dinâmico das vigas abordadas neste trabalho. Por fim, para o estudo de caso da longarina, é deixado como sugestão de pesquisa a inclusão do comportamento aeroelástico da estrutura durante o projeto da mesma.

Referências

- 1 COLHERINHAS, G. B. *Ferramenta de Otimização via Algoritmos Genéticos com Aplicações em Engenharia*. Dissertação de Mestrado — Universidade de Brasília, 2016. Citado 15 vezes nas páginas [x](#), [xi](#), [1](#), [68](#), [69](#), [70](#), [71](#), [72](#), [73](#), [74](#), [75](#), [76](#), [100](#), [109](#) e [111](#).
- 2 JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 1999. (Materials Science & Engineering Series). Citado 20 vezes nas páginas [ix](#), [xiii](#), [1](#), [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#), [12](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [22](#), [24](#), [28](#), [66](#) e [89](#).
- 3 NETO, F. L.; PARDINI, L. C. *Compósitos Estruturais: Ciência e Tecnologia*. 1. ed. [S.l.]: Edgard Blücher, 2006. v. 1. Citado 5 vezes nas páginas [ix](#), [2](#), [3](#), [5](#) e [6](#).
- 4 COMPANY, T. B. *Boeing 787*. Disponível em: [<http://www.boeing.com/commercial/787>](http://www.boeing.com/commercial/787). Citado 2 vezes nas páginas [ix](#) e [6](#).
- 5 WIKIPEDIA. *Northrop Grumman B-2 Spirit*. Disponível em: [<https://pt.wikipedia.org/wiki/Northrop_Grumman_B-2_Spirit>](https://pt.wikipedia.org/wiki/Northrop_Grumman_B-2_Spirit). Citado 2 vezes nas páginas [ix](#) e [7](#).
- 6 PINTEREST. *Visby Class Corvette*. Disponível em: [<https://br.pinterest.com/pin/65724475781749997>](https://br.pinterest.com/pin/65724475781749997). Citado 2 vezes nas páginas [ix](#) e [7](#).
- 7 LIVEYACHTING. *News: Remodelled mega yacht M5 (ex Mirabella V) leaves Pendennis*. Disponível em: [<http://www.liveyachting.com/remodelled-mega-yacht-m5-ex-mirabella-v-leaves-pendennis>](http://www.liveyachting.com/remodelled-mega-yacht-m5-ex-mirabella-v-leaves-pendennis). Citado 2 vezes nas páginas [ix](#) e [8](#).
- 8 SAPODESPORTO. *Pistorius eleito atleta do ano por associação sul-africana*. Disponível em: [<http://desporto.sapo.pt/atletismo/artigo/2013/02/18/pistorius-eleito-atleta-do-ano-por-associacao-sul-africana>](http://desporto.sapo.pt/atletismo/artigo/2013/02/18/pistorius-eleito-atleta-do-ano-por-associacao-sul-africana). Citado 2 vezes nas páginas [ix](#) e [8](#).
- 9 ZHANG, C.; WANG, S. Structure mechanical modeling of thin-walled closed-section composite beams, part 1: Single-cell cross section. *Composite Structures*, v. 113, p. 12 – 22, 2014. ISSN 0263-8223. Disponível em: [<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314000968>](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314000968). Citado 19 vezes nas páginas [x](#), [xiii](#), [9](#), [10](#), [11](#), [34](#), [42](#), [43](#), [44](#), [45](#), [87](#), [88](#), [89](#), [90](#), [93](#), [100](#), [109](#), [110](#) e [124](#).
- 10 VLASOV, V. Z. *Thin-Walled Elastic Beams*. 2. ed. [S.l.]: Israel Program for Scientific Translations, 1961. Citado 3 vezes nas páginas [9](#), [11](#) e [33](#).
- 11 VLASOV, V. Z.; LEONTIEV, N. N. Beams, plates, and shells on elastic foundations (translated from russian). *N67-14238*, NTIS Accession, 1966. Citado na página [9](#).
- 12 GJELSVIK, A. *The theory of thin walled bars*. [S.l.]: Krieger Pub Co, 1981. Citado na página [9](#).

- 13 MURRAY, N. W. Introduction to the theory of thin-walled structures. *Clarendon Press, Oxford University Press, 200 Madison Ave, New York, N. Y. 10016, U. S. A, 1984. 447*, 1984. Citado na página 9.
- 14 MANSFIELD, E. The stiffness of a two-cell anisotropic tube. *Aeronautical Quarterly*, Cambridge Univ Press, v. 32, n. 04, p. 338–353, 1981. Citado na página 9.
- 15 MANSFIELD, E.; SOBEY, A. The fibre composite helicopter blade. *Aeronautical Quarterly*, Cambridge Univ Press, v. 30, n. 02, p. 413–449, 1979. Citado na página 9.
- 16 KOLLAR, L. P.; PLUZSIK, A. Analysis of thin-walled composite beams with arbitrary layup. *Journal of reinforced plastics and composites*, Sage Publications, v. 21, n. 16, p. 1423–1465, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 88.
- 17 PLUZSIK, A.; KOLLAR, L. P. Effects of shear deformation and restrained warping on the displacements of composite beams. *Journal of reinforced plastics and composites*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 21, n. 17, p. 1517–1541, 2002. Citado na página 9.
- 18 LIBRESCU, L.; SONG, O. *Thin-Walled Composite Beams. Theory and Application*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2006. v. 131. (Solid Mechanics and It's Applications, v. 131). Citado 10 vezes nas páginas 9, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 91 e 122.
- 19 LEE, J.; LEE, S. hye. Flexural–torsional behavior of thin-walled composite beams. *Thin-Walled Structures*, v. 42, n. 9, p. 1293 – 1305, 2004. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823104000576>>. Citado 6 vezes nas páginas 9, 41, 42, 43, 44 e 91.
- 20 VO, T. P.; LEE, J. Flexural–torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams. *Engineering Structures*, v. 29, n. 8, p. 1774 – 1782, 2007. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029606004172>>. Citado 4 vezes nas páginas 9, 43, 44 e 91.
- 21 VO, T. P.; LEE, J. Free vibration of thin-walled composite box beams. *Composite Structures*, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 11–20, 2008. Citado na página 9.
- 22 VO, T. P.; LEE, J. Flexural-torsional behavior of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 30, n. 7, p. 1958–1968, 2008. Citado na página 9.
- 23 VO, T. P.; LEE, J. Geometrically nonlinear theory of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 52, n. 1, p. 65–74, 2010. Citado na página 9.
- 24 CÁRDENAS, D. et al. Numerical validation of a finite element thin-walled beam model of a composite wind turbine blade. *Wind Energy*, Wiley Online Library, v. 15, n. 2, p. 203–223, 2012. Citado na página 9.
- 25 EKEN, S.; KAYA, M. O. Flexural-torsional coupled vibration of anisotropic thin-walled beams with biconvex cross-section. *Thin-Walled Structures*, Elsevier, v. 94, p. 372–383, 2015. Citado na página 10.
- 26 FOCACCI, F.; FORABOSCHI, P.; DE STEFANO, M. Composite beam generally connected: Analytical model. *Composite Structures*, Elsevier, v. 133, p. 1237–1248, 2015. Citado na página 10.

- 27 CÁRDENAS, D. et al. Computationally efficient reduction of modal data from finite element models by nested sets of b-splines. *Composite Structures*, Elsevier, v. 134, p. 549–564, 2015. Citado na página 10.
- 28 RIVERA, J. A. et al. Progressive failure analysis for thin-walled composite beams under fatigue loads. *Composite Structures*, Elsevier, v. 154, p. 79–91, 2016. Citado na página 10.
- 29 VICTORAZZO, D. S.; JESUS, A. D. A kollár and pluzsik anisotropic composite beam theory for arbitrary multicelled cross sections. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 35, n. 23, p. 1696–1711, 2016. Citado na página 10.
- 30 SCHRENK, O. A simple approximation method for obtaining the spanwise lift distribution. *The Aeronautical Journal*, Cambridge University Press, v. 45, n. 370, p. 331–336, 1941. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 79.
- 31 RAYMER, D. P. Aircraft design. *A Conceptual Approach*, AIAA, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 11, 78, 80 e 81.
- 32 LEKHNITSKII, S. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. *Hoden-Day, San Francisco*, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- 33 SPIVAK, M. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. [S.l.]: Westview Press, 1971. Citado na página 14.
- 34 GIBSON, R. F. *Principles of composite material mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, CRC Press, 2012. (Mechanical Engineering: A Series of Textbooks and Reference Books). Citado 4 vezes nas páginas 15, 65, 66 e 89.
- 35 KOLLÁR, L. P.; SPRINGER, G. S. *Mechanics of composite Structures*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 17.
- 36 VASILIEV, V.; MOROZOV, E. *Advanced Mechanics of Composite Materials*. 3. ed. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado 10 vezes nas páginas x, xiii, 20, 22, 28, 30, 31, 34, 35 e 66.
- 37 DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 4 vezes nas páginas ix, 20, 21 e 66.
- 38 PRICE, T. L. et al. *Manufacturing Advanced Composite Components for Airframes Handbook: FAA/AR-96/75*. 1. ed. [S.l.]: Federal Aviation Administration, 1997. v. 1. (FAA Handbooks 1997, v. 1). Citado 2 vezes nas páginas ix e 29.
- 39 MORI, D. D.; NETO, J. M. *Flexo Torção: Barras de Seção Delgada Aberta*. 1. ed. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/livros/358-flexo-torca-barras-de-secao-delgada-aberta>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 39.
- 40 LOVE, A. E. H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, Royal Society, v. 179, p. 491–546, 1888. ISSN 02643820. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/90527>>. Citado na página 37.

- 41 SANDERS, J. J. L. An improved first-approximation theory for thin shells. *NASA Technical Reports*, NASA, n. R-24, 1959. Disponível em: <https://archive.org/details/nasa_techdoc_19980227978>. Citado na página 38.
- 42 KOITER, W. T. General equations of elastic stability for thin shells. *Proceedings of the University of Houston - Symposium on Theory of Shells*, p. 185 – 227, 1967. Citado na página 38.
- 43 DAVILA, C. G.; CAMANHO, P. P.; ROSE, C. A. Failure criteria for FRP laminates. *Journal of Composite Materials*, v. 39, n. 4, p. 323–345, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/0021998305046452>>. Citado 15 vezes nas páginas x, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 97 e 109.
- 44 HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. *Failure criteria in fibre reinforced polymer composites: the world-wide failure exercise*. [S.l.]: Elsevier, 2004. Citado na página 48.
- 45 KADDOUR, A.; HINTON, M. Maturity of 3d failure criteria for fibre-reinforced composites: Comparison between theories and experiments: Part b of wwfe-ii. *Journal of Composite Materials*, v. 47, n. 6-7, p. 925–966, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/0021998313478710>>. Citado na página 48.
- 46 PINHO, S. T. *Modelling Failure of Laminated Composites under Physically-based Failure Models*. PhD Thesis — Imperial College London, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 48, 50, 54 e 55.
- 47 HASHIN, Z.; ROTEM, A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of composite materials*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 7, n. 4, p. 448–464, 1973. Citado na página 49.
- 48 SUN, C. T. et al. Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates. n. DOT/FAA/AR-95/109, 1996. Disponível em: <<http://handle.dtic.mil/100.2/ADA310352>>. Citado na página 49.
- 49 PUCK, A.; SCHÜRMAN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, v. 58, n. 7, p. 1045 – 1067, 1998. ISSN 0266-3538. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353896001406>>. Citado 5 vezes nas páginas 49, 50, 52, 53 e 60.
- 50 PUCK, A.; SCHÜRMAN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, v. 62, n. 12–13, p. 1633 – 1662, 2002. ISSN 0266-3538. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353801002081>>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 60.
- 51 COSTA, D. I. G. *Análise Numérica de Falhas em Materiais Compósitos Laminados Usando um Critério Baseado em Fenômenos Físicos*. Dissertação de Mestrado — Universidade Estadual de Campinas, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 97.
- 52 PINHO, S. T. et al. *Failure Models and Criteria for FRP Under In-Plane or Three-Dimensional Stress States Including Shear Non-Linearity*. [S.l.], 2005. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20050110223>>. Citado na página 51.

- 53 PARVIZI, A.; GARRETT, K.; BAILEY, J. Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*, Springer, v. 13, n. 1, p. 195–201, 1978. Citado na página 54.
- 54 DVORAK, G. J.; LAWS, N. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates ii. first ply failure. *Journal of Composite Materials*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 21, n. 4, p. 309–329, 1987. Citado 4 vezes nas páginas x, 55, 56 e 59.
- 55 WANG, A. Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials. *Journal of Composites, Technology and Research*, ASTM International, v. 6, n. 2, p. 45–62, 1984. Citado 2 vezes nas páginas x e 55.
- 56 NARAYANASAMY, R.; PRASAD, K. S.; DOWLING, N. E. *Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue*. 4. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2013. Citado 2 vezes nas páginas x e 56.
- 57 PIMENTA, S. et al. A micromechanical model for kink-band formation: Part I — experimental study and numerical modelling. *Composites Science and Technology*, v. 69, n. 7–8, p. 948 – 955, 2009. ISSN 0266-3538. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026635380900061X>>. Citado na página 60.
- 58 VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 5. Citado na página 66.
- 59 DEB, K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2001. Citado na página 67.
- 60 PARK, C. H. et al. Improved genetic algorithm for multidisciplinary optimization of composite laminates. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 86, n. 19, p. 1894–1903, 2008. Citado na página 67.
- 61 LOPEZ, R. H.; LUERSEN, M. A.; CURSI, J. E. S. d. Optimization of hybrid laminated composites using a genetic algorithm. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 31, n. 3, p. 269–278, 2009. Citado na página 67.
- 62 HAFTKA, R. Genetic algorithms for optimization of composite laminates. In: *Mechanics of Composite Materials and Structures*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 431–442. Citado na página 67.
- 63 SAMORANI, M. The wind farm layout optimization problem. In: *Handbook of wind power systems*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 21–38. Citado na página 67.
- 64 CHEN, Y. et al. Wind farm layout optimization using genetic algorithm with different hub height wind turbines. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 70, p. 56–65, 2013. Citado na página 67.
- 65 MACHADO, T. G. de P. *Análise e otimização de parâmetros de desempenho de ônibus urbanos*. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade de Brasília, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 67, 69, 71 e 74.

- 66 COLHERINHAS, G. B.; DIAS, P. H. C. *Otimização das razões de transmissão de cadeias cinemáticas de automóveis via algoritmo genético*. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade de Brasília, 2014. Citado na página 67.
- 67 HOLLAND, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Oxford, England: U Michigan Press, 1975. Citado na página 67.
- 68 IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização volume 1. Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. 3. ed. [S.l.]: IMPA, 2014. Citado 3 vezes nas páginas x, 67 e 68.
- 69 IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização volume 2. Métodos computacionais*. 2. ed. [S.l.]: IMPA, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.
- 70 GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. 5. ed. [S.l.]: IMPA, 2015. Citado na página 68.
- 71 MENDELSON, B. *Introduction to Topology*. 3. ed. [S.l.]: Dover, 1990. Citado na página 68.
- 72 MITCHELL, M. *An introduction to genetic algorithms*. [S.l.]: MIT press, 1998. Citado na página 69.
- 73 GOLDBERG, D. E. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, 1989. *Reading: Addison-Wesley*, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 69, 73 e 75.
- 74 RODRIGUES, A. P. de S. P. *Parametrização e simulação numérica da turbina hidrocínética - otimização via algoritmos genéticos*. Dissertação de Mestrado — Universidade de Brasília, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 70, 71 e 74.
- 75 MICHALEWICZ, Z. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 70.
- 76 MICHALEWICZ, Z.; JANIKOW, C. Z. Handling constraints in genetic algorithms. In: *ICGA*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 151–157. Citado na página 74.
- 77 DEEP, K.; THAKUR, M. A new crossover operator for real coded genetic algorithms. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 188, n. 1, p. 895–911, 2007. Citado na página 74.
- 78 LIM, S. M. et al. A new real coded genetic algorithm crossover: Rayleigh crossover. *Journal of Theoretical & Applied Information Technology*, v. 62, n. 1, 2014. Citado na página 74.
- 79 REGULATIONS, F. A. *Part 23 - Airworthiness Standards: Normal, Utility, Acrobatic and Commuter Category Airplanes*. [S.l.]: USA, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 78, 81 e 84.
- 80 REGULATIONS, F. A. *Part 25 - Airworthiness standards: Transport category airplanes*. 1970. Citado na página 78.
- 81 RODRIGUES, L. E. M. J. *Fundamentos da engenharia aeronáutica*. [S.l.]: Cengage learning, 2013. Citado na página 80.
- 82 GIECK, K. *Manual de fórmulas técnicas: ciencia, ingeniería, tecnología*. [S.l.]: México, MX: Alfaomega, 2000. Citado na página 83.

- 83 HINTON, M.; SODEN, P. Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise. *Composites Science and Technology*, Elsevier, v. 58, n. 7, p. 1001–1010, 1998. Citado na página 97.
- 84 SODEN, P.; HINTON, M.; KADDOUR, A. Biaxial test results for strength and deformation of a range of e-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data. *Composites Science and Technology*, Elsevier, v. 62, n. 12, p. 1489–1514, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 98.
- 85 SHUART, M. J. Failure of compression-loaded multidirectional composite laminates. *AIAA journal*, v. 27, n. 9, p. 1274–1279, 1989. Citado na página 99.
- 86 ALMEIDA, J. H. S. et al. Stacking sequence optimization in composite tubes under internal pressure based on genetic algorithm accounting for progressive damage. *Composite Structures*, Elsevier, v. 178, p. 20–26, 2017. Citado na página 111.

Apêndices

A Funcionamento do Algoritmo de Vigas Desenvolvido

A Figura A.0.1 exibe com detalhes os procedimentos adotados ao longo do algoritmo de cálculo das vigas de paredes finas compósitas estudadas neste trabalho.

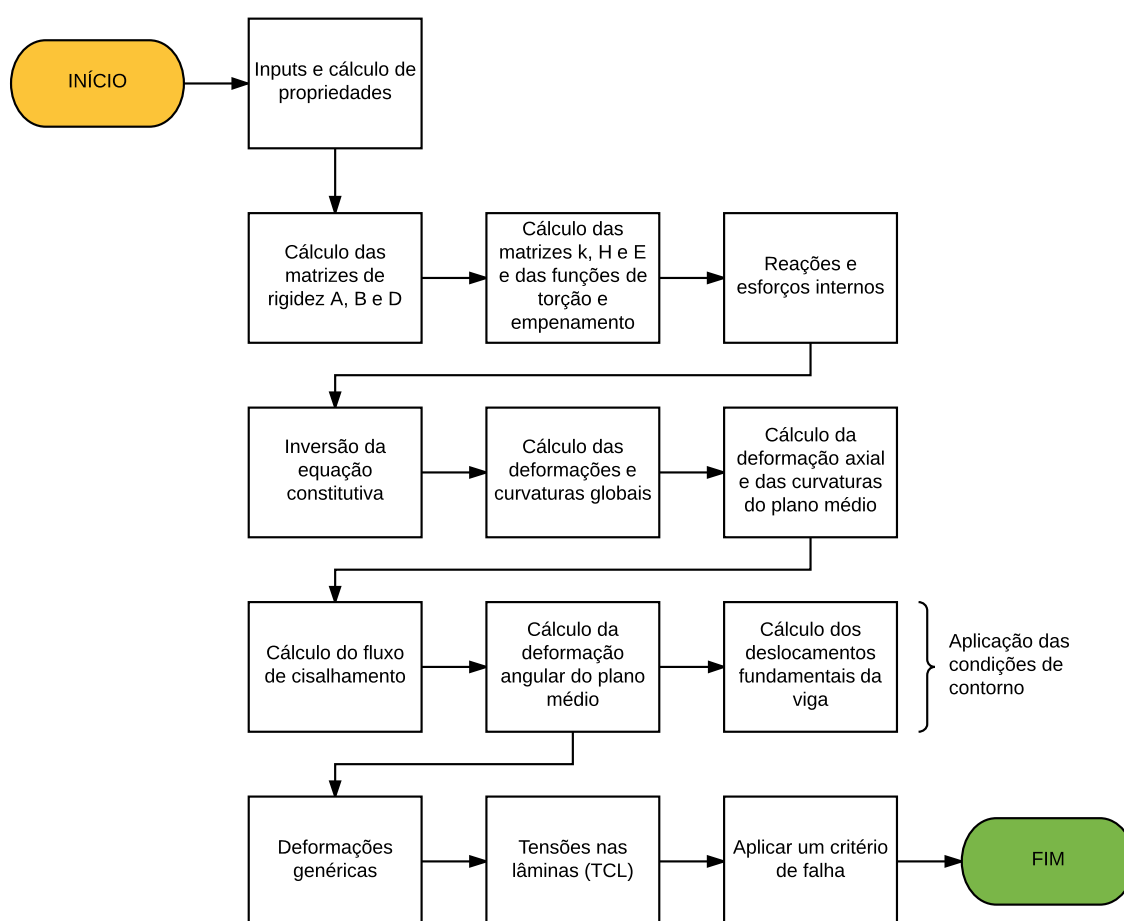


Figura A.0.1 – Fluxograma representativo do algoritmo desenvolvido

Anexos

A Campo de Deslocamentos

Aqui demonstramos o campo de deslocamentos dos pontos da seção transversal da viga de parede fina conforme abordagem que pode ser vista em [18]. Como a seção transversal da viga age como um corpo rígido conforme a Figura (A.0.1), os deslocamentos u e v de qualquer ponto da linha média podem ser descritos em termos de um ponto arbitrário $P(x_p, y_p)$, chamado de pólo, e em termos do ângulo de rotação $\Phi(z, t)$ da seção em torno de P .

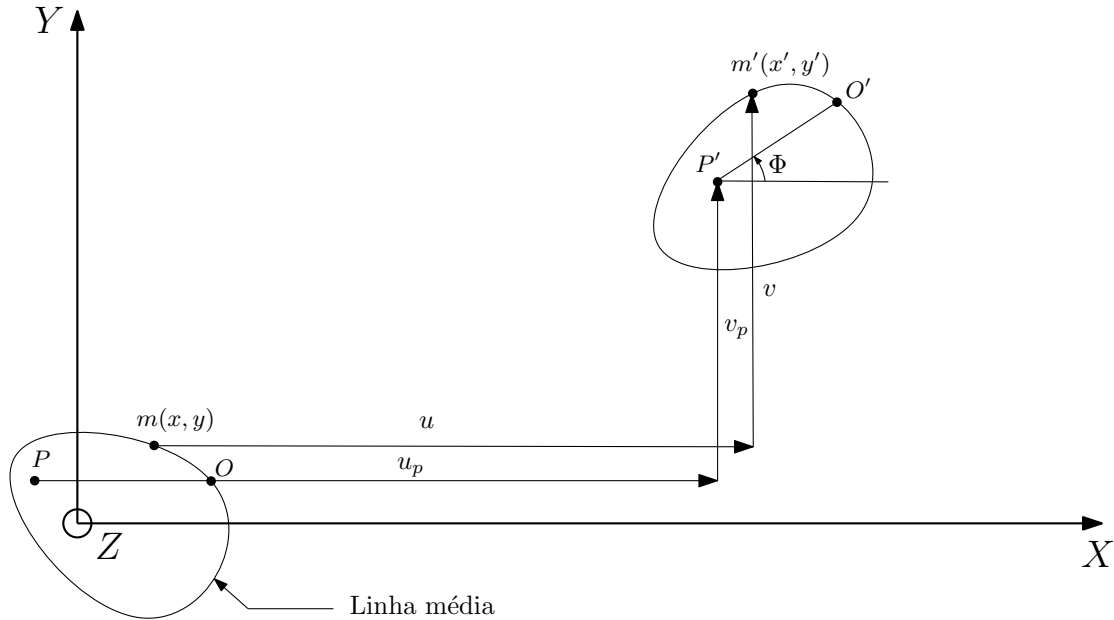


Figura A.0.1 – Deslocamento da seção como um corpo rígido

Para pequenos ângulos, esses deslocamentos são:

$$u(x, y, z, t) = u_p(z, t) - (y - y_p)\Phi(z, t) \quad (\text{A.1a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_p(z, t) + (x - x_p)\Phi(z, t) \quad (\text{A.1b})$$

onde t é o tempo. A rotação em torno do ponto P é dada por:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x=x_p, y=y_p)} \quad (\text{A.2})$$

Enquanto a Eq. (A.1) relaciona os deslocamentos da seção transversal da viga com os deslocamentos do pólo P e a rotação em torno do eixo que passa por ele e é paralelo ao eixo Z , a Eq. (A.2) revela que Φ é constante ao longo da seção transversal.

O vetor de deslocamento \mathbf{u} de um ponto da linha média no pode ser representado nos sistemas global e local como:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{u}(s, z, t) = u_n\mathbf{e}_n + u_t\mathbf{e}_t + w\mathbf{k} \quad (\text{A.3b})$$

respectivamente. Nas equações, os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os vetores unitários cartesianos usuais. A Figura (A.0.2) define os vetores unitários locais.

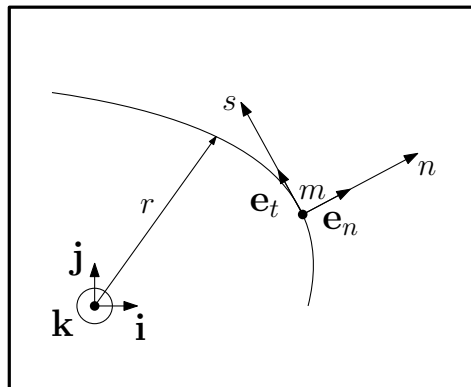


Figura A.0.2 – Vetores unitários associados aos sistemas global e local de coordenadas

Dessa forma, fica claro que:

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx(s)}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds}\mathbf{j} \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_t \times \mathbf{k} = \frac{dy(s)}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx(s)}{ds}\mathbf{j} \quad (\text{A.4b})$$

onde $\mathbf{r}(s, z) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Da definição dos vetores unitários \mathbf{e}_t e \mathbf{e}_n , temos que as componentes normal e tangencial do vetor \mathbf{u} são:

$$u_n(s, z, t) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_n = u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} \quad (\text{A.5a})$$

$$u_t(s, z, t) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_t = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \quad (\text{A.5b})$$

Em vista das Eqs. (A.1) podemos reescrever a última equação como:

$$u_n(s, z, t) = u_P \frac{dy}{ds} - v_P \frac{dx}{ds} - r_t \Phi \quad (\text{A.6a})$$

$$u_t(s, z, t) = u_P \frac{dx}{ds} + v_P \frac{dy}{ds} + r_n \Phi \quad (\text{A.6b})$$

Na última, os vetores r_n e r_t são tais que:

$$r_n(s) = (x - x_P) \frac{dy}{ds} - (y - y_P) \frac{dx}{ds} \quad (\text{A.7a})$$

$$r_t(s) = (x - x_P) \frac{dx}{ds} + (y - y_P) \frac{dy}{ds} \quad (\text{A.7b})$$

B Matrizes de Rigidez

Neste, serão explicitados os termos das matrizes de rigidez no sistema de coordenadas local k_{ij} (e de sua forma híbrida H_{ij}) e global E_{ij} que foram introduzidas no Capítulo 3 e podem ser consultadas em [9].

A matriz de rigidez no sistema de coordenadas local $k_{ij} = k_{ji}$ presente na Eq. (3.34) é dada por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} A_{22} - A_{12}^2/A_{11} & A_{26} - A_{12}A_{16}/A_{11} & B_{22} - A_{12}B_{12}/A_{11} & B_{26} - A_{12}B_{16}/A_{11} \\ & A_{66} - A_{16}^2/A_{11} & B_{26} - A_{16}B_{12}/A_{11} & B_{66} - A_{16}B_{16}/A_{11} \\ & & D_{22} - B_{12}^2/A_{11} & D_{26} - B_{12}B_{16}/A_{11} \\ \text{simétrica} & & & D_{66} - B_{16}^2/A_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde os termos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são referentes às matrizes de rigidez de extensão, acoplamento e flexão da TCL. A mesma em sua forma híbrida, introduzida na Eq. (3.35), é tal que:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} k_{11} - k_{12}^2/k_{22} & k_{13} - k_{12}k_{23}/k_{22} & k_{14} - k_{12}k_{24}/k_{22} & k_{12}/k_{22} \\ S_{12} & k_{33} - k_{23}^2/k_{22} & k_{34} - k_{23}k_{24}/k_{22} & k_{23}/k_{22} \\ S_{13} & S_{23} & k_{44} - k_{24}^2/k_{22} & k_{24}/k_{22} \\ -S_{14} & -S_{24} & -S_{34} & 1/k_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Finalmente, os elementos da matriz de rigidez no sistema de coordenadas global E_{ij} (simétrica) presentes na Eq. (3.46) são dados por:

$$E_{11} = \oint H_{11}ds + \frac{[\oint H_{14}ds]^2}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3a})$$

$$E_{12} = \oint (H_{11}Y - H_{12} \cos \alpha)ds + \frac{\oint H_{14}ds \oint (H_{14}Y - H_{24} \cos \alpha)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3b})$$

$$E_{13} = \oint (H_{11}X + H_{12} \sin \alpha)ds + \frac{\oint H_{14}ds \oint (H_{14}X + H_{24} \sin \alpha)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3c})$$

$$E_{14} = 2 \oint H_{13}ds + \frac{\oint H_{14}ds(2 \oint H_{34}ds + 2\Omega)}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3d})$$

$$E_{15} = \oint (H_{11}\omega - H_{12}q)ds + \frac{\oint H_{14}ds \oint (H_{14}\omega - H_{24}q)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3e})$$

$$E_{22} = \oint (H_{11}Y^2 - 2H_{12}Y \cos \alpha + H_{22} \cos^2 \alpha)ds + \frac{[\oint (H_{14}Y - H_{24} \cos \alpha)ds]^2}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3f})$$

$$E_{23} = \oint (H_{11}XY + H_{12}Y \sin \alpha - H_{12}X \cos \alpha - H_{22} \sin \alpha \cos \alpha)ds + \frac{\oint (H_{14}X + H_{24} \sin \alpha)ds \oint (H_{14}Y - H_{24} \cos \alpha)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3g})$$

$$E_{24} = 2 \oint (H_{13}Y - H_{23} \cos \alpha)ds + \frac{\oint (H_{14}Y - H_{24} \cos \alpha)ds [2 \oint H_{34}ds + 2\Omega]}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3h})$$

$$E_{25} = \oint (H_{11}\omega Y - H_{12}Yq - H_{12}\omega \cos \alpha + H_{22}q \cos \alpha)ds + \frac{\oint (H_{14}\omega - H_{24}q)ds \oint (H_{14}Y - H_{24} \cos \alpha)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3i})$$

$$E_{33} = \oint (H_{11}X^2 + 2H_{12}X \sin \alpha + H_{22} \sin^2 \alpha)ds + \frac{[\oint (H_{14}X + H_{24} \sin \alpha)ds]^2}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3j})$$

$$E_{34} = 2 \oint (H_{13}X + H_{23} \sin \alpha)ds + \frac{\oint (H_{14}X + H_{24} \sin \alpha)ds (2 \oint H_{34}ds + 2\Omega)}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3k})$$

$$E_{35} = \oint (H_{11}\omega X - H_{12}Xq + H_{12}\omega \sin \alpha + H_{22}q \sin \alpha)ds + \frac{\oint (H_{14}\omega - H_{24}q)ds \oint (H_{14}X + H_{24} \sin \alpha)ds}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3l})$$

$$E_{44} = \frac{[2\Omega + 2 \oint H_{34}ds]^2}{\oint H_{44}ds} + 4 \oint H_{33}ds \quad (\text{B.3m})$$

$$E_{45} = 2 \oint (H_{13}\omega - H_{23}q)ds + \frac{\oint (H_{14}\omega - H_{24}q)ds (2 \oint H_{34}ds + 2\Omega)}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3n})$$

$$E_{55} = \oint (H_{11}\omega^2 - 2H_{12}\omega q + H_{22}q^2)ds + \frac{[\oint (H_{14}\omega - H_{24}q)ds]^2}{\oint H_{44}ds} \quad (\text{B.3o})$$