

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE VIA PLANICIDADE DIFERENCIAL
E REDUÇÃO MODAL PARA
SISTEMAS DE ORDEM INFINITA
COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS**

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

Brasília, dezembro de 2017



**ENGENHARIA
MECATRÔNICA**
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE VIA PLANICIDADE DIFERENCIAL
E REDUÇÃO MODAL PARA
SISTEMAS DE ORDEM INFINITA
COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS**

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

*Relatório submetido como requisito parcial de obtenção
de grau de Engenheiro de Controle e Automação*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza, _____
ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB _____
Examinador externo

MSc. José Oniram de Aquino Limaverde Filho, _____
PPMEC/UnB
Examinador

Brasília, dezembro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

PAIVA, EDUARDO BEZERRA RUFINO FERREIRA

Controle Via Planicidade Diferencial e Redução Modal para Sistemas de Ordem Infinita com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas,

[Distrito Federal] 2017.

vii, 42p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2017). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1. Controle Multivariável

2. Planicidade Diferencial

3. Redução Modal

I. Mecatrônica/FT/UnB

II. Controle e Automação

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PAIVA, EDUARDO BEZERRA RUFINO FERREIRA, (2017). Controle Via Planicidade Diferencial e Redução Modal para Sistemas de Ordem Infinita com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-nº 24, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 101p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

TÍTULO DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO: Controle Via Planicidade Diferencial e Redução Modal para Sistemas de Ordem Infinita com Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas.

GRAU: Engenheiro

ANO: 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

SRES Quadra 12 Bloco F, nº 50, Cruzeiro Velho.

70645-065 Brasília – DF – Brasil.

Dedicatória

A todos que me ajudaram a chegar aqui.

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

Agradecimentos

Agradeço à minha família pelo apoio e confiança, aos meus colegas de curso que me acompanharam nessa jornada e ao prof. Eugênio Fortaleza que me orientou neste trabalho.

Eduardo Bezerra Rufino Ferreira Paiva

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um método de controle para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas com ordem infinita, por uso de técnicas de redução modal e planicidade diferencial. O método desenvolvido é testado em um problema de difusão que modela a difusão de calor em uma placa metálica bidimensional homogênea e isotrópica com as extremidades isoladas.

Palavras Chave: Controle multivariável, planicidade diferencial, redução modal, sistema de ordem infinita

ABSTRACT

This work aims to develop a control method for multiple input and multiple output infinite order systems by means of differential flatness and modal reduction techniques. The developed method is tested in a diffusion problem that models the heat diffusion in a homogeneous and isotropic bidimensional metal plate with isolated boundaries.

Keywords: Multivariable control, differential flatness, modal reduction, infinite order system

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2	OBJETIVOS DO PROJETO	1
1.3	RESULTADOS OBTIDOS	1
1.4	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	1
2	Fundamentos	3
2.1	SUPOSIÇÕES	3
2.2	EQUAÇÃO DO CALOR	3
2.3	DIFERENÇAS FINITAS	3
2.4	PLANICIDADE DIFERENCIAL	4
2.4.1	SISTEMAS NÃO-LINEARES	6
2.5	SISTEMAS NÃO-PLANOS	6
2.6	REPRESENTAÇÃO EM OUTRA BASE	7
2.6.1	EXEMPLO	7
2.7	REDUÇÃO MODAL E ATRASO	9
2.7.1	EXEMPLO REDUÇÃO E ATRASO	11
2.8	CONTROLE DE SISTEMAS SISO COM ATRASO	11
2.9	ESTIMADOR DE SAÍDAS PLANAS	13
2.10	OBTER AÇÃO DE CONTROLE PARA O SISTEMA COMPLETO	15
3	Desenvolvimento	16
3.1	PASSOS PARA A OBTENÇÃO DO CONTROLE	16
3.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO	17
3.3	OBTENÇÃO DAS SAÍDAS PLANAS	19
3.4	REDUÇÃO MODAL E ATRASO	19
3.5	CONTROLE DOS SISTEMAS SISO	20
3.6	ESTIMADOR DE SAÍDAS PLANAS	20
3.7	CONTROLE DO SISTEMA COMPLETO	22
3.8	SIMULAÇÕES	22
4	Conclusões	27

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	28
Anexos.....	29
I Descrição do conteúdo do CD.....	30

LISTA DE FIGURAS

2.1	Resposta ao degrau do sistema original e dos modelos	12
2.2	Preditor de Smith	12
2.3	Controlador por realimentação de estados com integrador.....	13
3.1	Placa Discretizada.....	18
3.2	Diagrama do Sistema Completo	23
3.3	Saída Real do Sistema (caso com 4 entradas)	23
3.4	Saída Plana Real (caso com 4 entradas).....	24
3.5	Erro de Acompanhamento (caso com 4 entradas)	24
3.6	Erro de Estimação (caso com 4 entradas)	25
3.7	Saída Real do Sistema (caso com 15 entradas)	25
3.8	Saída Plana Estimada (caso com 15 entradas).....	26
3.9	Erro de Acompanhamento (caso com 15 entradas)	26

LISTA DE TABELAS

3.1	Modelos reduzidos com atraso, sistema com 4 entradas	20
3.2	Modelos reduzidos com atraso, sistema com 15 entradas.....	21
3.3	Ganhos dos Controladores, sistema com 4 entradas	21
3.4	Ganhos dos Controladores, sistema com 15 entradas.....	22

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Matriz de estado	
B	Matriz de entradas	
C	Matriz de saídas	
C_k	Matriz de controlabilidade	
C_{kr}	Matriz de controlabilidade reduzida	
D	Transferência direta	
e	Vetor de erros de acompanhamento de trajetória	
f	Vetor de saídas planas	
i	Unidade imaginária	
I	Matriz identidade (dimensão implícita)	
I_n	Matriz identidade com n linhas	
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais	
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores coluna com n elementos, todos reais	
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes com n linhas e m colunas com todos os elementos reais	
t	Tempo	[s]
u	Ação de controle	
x	Vetor de estados	
y	Vetor de saídas	
z	Vetor de saída plana e suas derivadas	

Símbolos Gregos

Δ	Variação	
ϵ	Atraso	[s]
η	Difusividade	[m ² /s]
Φ	Matriz que indica os índices de controlabilidade	
κ	Índice de controlabilidade	
λ	Autovalor	
χ_1, χ_2	Coordenadas	[m]

Outros

$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz nula com m linhas e n colunas
∇^2	Operador Laplaciano

Subscritos

D	atraso
R	reduzido
M	modal

Sobrescritos

\cdot	Derivada em relação ao tempo
$\ddot{\cdot}$	Derivada segunda em relação ao tempo
\dots	Derivada terceira em relação ao tempo
(k)	Derivada k -ésima em relação ao tempo
$*$	Valor desejado
T	Matriz transposta
-1	Matriz inversa
\dagger	Matriz pseudoinversa

Siglas

SISO	Entrada Única Saída Única - <i>Single Input Single Output</i>
MIMO	Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas - <i>Multiple Input Multiple Output</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição do problema

O problema a ser enfrentado neste trabalho é controlar um sistema multivariável (MIMO) de ordem infinita representado por uma equação diferencial parcial discretizada. Como estudo de caso, foi escolhido o problema da difusão de calor em uma placa metálica bidimensional isotrópica e homogênea atuada por múltiplas fontes de calor. O objetivo é controlar a temperatura da placa em certos pontos de interesse.

1.2 Objetivos do projeto

Os objetivos deste trabalho são criar uma estratégia que possa ser utilizada para controlar sistemas MIMO a partir de modelos reduzidos para simplificar a obtenção da ação de controle, de forma a generalizar a estratégia usada em [1] para sistemas SISO, e aplicar esta estratégia a um sistema hipotético para verificar sua eficácia.

1.3 Resultados obtidos

Foi criado um método para controlar sistemas MIMO representados por uma EDP discretizada com uso de planicidade diferencial e redução modal. O método foi aplicado com sucesso no sistema descrito na seção 1.1. No entanto, esta é uma nova abordagem para sistemas deste tipo e ainda há vários obstáculos a serem superados, o principal é provar formalmente que os erros devido às simplificações não impedem o controle do sistema, pelo menos sobre certas suposições.

1.4 Apresentação do manuscrito

O capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos utilizados neste trabalho, mostrando o procedimento para obtenção do controlador e do estimador de estados utilizado. O capítulo 3 mostra a

aplicação da estratégia de controle para dois sistemas, apresentando os passos na obtenção do controle e alguns resultados numéricos relevantes para o caso apresentado. O capítulo 4 é a conclusão com algumas discussões acerca dos resultados.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Suposições

As suposições que serão feitas neste trabalho em relação ao sistema controlado e aos objetivos do controle:

- o sistema tem propriedades homogêneas e isotrópicas;
- o sistema é linear;
- o sistema é lento, ou pelo menos a trajetória desejada para o estado do mesmo é lenta;
- deseja-se levar o sistema para uma condição em que a derivada do vetor de estados é nula.

2.2 Equação do Calor

O sistema que será utilizado como estudo de caso segue à equação do calor isotrópica e homogênea como em [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta \nabla^2 T + u, \quad (2.1)$$

onde u são fontes de calor pontuais, T é a temperatura, t é o tempo, $\eta > 0$ é a difusividade e ∇^2 é o operador Laplaciano.

2.3 Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é usado para discretizar equações diferenciais, substituindo as derivadas por diferenças. Nesse trabalho, o resultado importante da teoria de diferenças finitas é que podemos aproximar a derivada segunda de uma função $f(x)$ em relação à variável x da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}. \quad (2.2)$$

O erro dessa aproximação é $O(\Delta x^2)$ com $\Delta x \rightarrow 0$, ou seja, o erro vai para zero com o quadrado de Δx .

A demonstração de (2.2) e mais detalhes sobre diferenças finitas e seu uso para resolução de equações diferenciais podem ser encontradas em [3] e [4].

2.4 Planicidade Diferencial

A planicidade diferencial é uma característica dos sistemas dito planos. Segundo [5] p. 48, um sistema $\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, onde g é um campo vetorial suave, com vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e vetor de entradas $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ é plano se existe $\mathbf{f} = [f_1 \ \dots \ f_m]^T \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \alpha\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \frac{\partial^r \mathbf{u}}{\partial t^r}\right) \\ \mathbf{x} &= \beta\left(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}, \dots, \frac{\partial^q \mathbf{f}}{\partial t^q}\right) \\ \mathbf{u} &= \gamma\left(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}, \dots, \frac{\partial^q \mathbf{f}}{\partial t^q}\right),\end{aligned}$$

com r e q naturais e α , β e γ funções suaves. As componentes de \mathbf{f} são chamadas de saídas planas do sistema.

Considere um sistema linear invariante no tempo, com equação de estado (2.3):

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (2.3)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e A e B matrizes constantes de tamanho adequado. Conforme provado em [6] p. 142, este sistema é plano se e somente se é completamente controlável, i.e., se a matriz de controlabilidade de Kalman deste sistema,

$$C_k = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B],$$

tiver posto completo.

Chamando de \mathbf{b}_i a i -ésima coluna de B , $i = 1, \dots, m$, a matriz de controlabilidade de Kalman pode ser expressa da seguinte forma:

$$C_k = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_m & A\mathbf{b}_1 & \dots & A\mathbf{b}_m & \dots & A^{n-1}\mathbf{b}_1 & \dots & A^{n-1}\mathbf{b}_m \end{bmatrix}$$

A partir daí, é definida a matriz de controlabilidade reduzida:

$$C_{kr} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_1 & \dots & A^{\kappa_1-1}\mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_m & \dots & A^{\kappa_m-1}\mathbf{b}_m \end{bmatrix},$$

onde $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ são chamados de índices de controlabilidade, e são tais que $\kappa_1 + \dots + \kappa_m = n$, assim, C_{kr} é uma matriz quadrada, e os índices de controlabilidade são escolhidos de maneira que C_{kr} tenha posto completo (isso é possível se o sistema for controlável, pois o posto de C_k será n).

Note que, seja M_i a linha de M associada à primeira componente de \mathbf{z}_i , i.e., f_i , pode-se escrever

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

de (2.4):

$$\Phi C_{kr}^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

para qualquer \mathbf{u} . Com isso, conclui-se que

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi C_{kr}^{-1} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

A partir daí, as demais linhas de M podem ser obtidas derivando as expressões para cada saída plana.

2.4.1 Sistemas Não-Lineares

Para o caso não-linear, se o sistema for plano ele também é equivalente a um sistema linear via realimentação endógena, ou seja, pode ser escrito na forma (2.5) [6]. Com isso, o método apresentado aqui pode ser estendido para sistemas não lineares planos, desde que suas saídas planas sejam conhecidas, pois não há uma fórmula para \mathbf{f} no caso não-linear.

2.5 Sistemas Não-Planos

A matriz de controlabilidade do sistema que será apresentado no capítulo 3 não tem posto completo, logo, não é plano. Nesse caso, a matriz C_{kr} passou a ser não uma matriz quadrada, mas uma matriz com o mesmo número de linhas de C_k e o número de colunas igual ao posto de C_k . Assim, a expressão usada para \mathbf{f} foi

$$\mathbf{f} = \Phi C_{kr}^\dagger \mathbf{x},$$

onde C_{kr}^\dagger é pseudoinversa de Moore-Penrose de C_k [8]. No caso de uma matriz quadrada de posto completo, a pseudoinversa de Moore-Penrose é igual à inversa [8].

Com essa abordagem, será possível levar \mathbf{f} para qualquer valor embora não seja possível levar o vetor \mathbf{x} para qualquer valor, assim, espera-se estabilizar \mathbf{x} ao se estabilizar \mathbf{f} . Nesse caso, o sistema na forma (2.5) obtido terá ordem menor que o sistema original e a matriz M também será retangular, de forma que, neste trabalho, a inversa de M será substituída pela pseudoinversa quando couber.

2.6 Representação em outra base

Note que a matriz de estado de (2.6) tem uma linha de zeros, de forma que seus autovalores serão todos nulos e não é possível fazer a redução do sistema como será explicado posteriormente. Para resolver isso, o sistema foi escrito de outra forma.

Para que não haja mais uma linha e uma coluna de zeros na matriz, a expressão para $v_i = f_i^{(\kappa_i)}$ foi colocada em função de \mathbf{x} e \mathbf{u} utilizando a matriz M . Então, os termos de \mathbf{x} são colocados em função das saídas planas e suas derivadas, usando a matriz M^{-1} . Com isso, os coeficientes que surgem multiplicando f_i e suas derivadas são colocados na matriz de estado e os demais são expressos novamente em termos de \mathbf{x} e agrupados com \mathbf{u} como uma nova entrada chamada w_i . Dessa forma, a matriz de estado associada à i -ésima saída plana passa a ser

$$A_{C_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_{i,0} & a_{i,1} & \dots & a_{i,\kappa_i-1} \end{bmatrix}$$

e existem matrizes $\Theta_{xi} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $\Theta_{ui} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, com $n = \dim(\mathbf{x})$ e $m = \dim(\mathbf{u})$, tais que

$$w_i = \Theta_{xi}\mathbf{x} + \Theta_{ui}\mathbf{u},$$

na forma matricial,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{x1} \\ \vdots \\ \Theta_{xm} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \Theta_{u1} \\ \vdots \\ \Theta_{um} \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Note que o sistema (2.6) fica então na forma canônica controlável com entrada w_i e saída f_i .

2.6.1 Exemplo

Suponha o sistema (2.3) com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo $\kappa_1 = 1$ e $\kappa_2 = 3$, temos a matriz C_{kr} :

$$\begin{aligned} C_{kr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_2 & A^2\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\mathbf{f} = \Phi C_{kr}^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2/2 \end{bmatrix},$$

e os sistemas SISO equivalentes são

$$\dot{f}_1 = v_1$$

e

$$\ddot{f}_2 = v_2.$$

A matriz M associada é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se reescrever a derivada de ordem mais alta de f_1 como

$$\dot{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + u_1,$$

a partir daí, os termos que contém elementos de \mathbf{x} podem ser expressos como

$$x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ \dot{f}_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \ddot{f}_2 \end{bmatrix} = f_1 + 2f_2,$$

assim, o termo que não está relacionado a f_1 é reescrito em função de \mathbf{x} :

$$f_1 + 2f_2 = f_1 + x_2,$$

e finalmente

$$\dot{f}_1 = f_1 + x_2 + u_1 = f_1 + w_1,$$

com $w_1 = x_2 + u_1$.

Similarmente, para f_2 , obtém-se

$$\ddot{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 + u_2,$$

daí

$$\begin{aligned}
 x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ \dot{f}_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \ddot{f}_2 \end{bmatrix} \\
 &= f_1 + \ddot{f}_2 \\
 &= x_1 + \ddot{f}_2,
 \end{aligned}$$

assim:

$$\ddot{f}_2 = x_1 + \ddot{f}_2 + u_2 = \ddot{f}_2 + w_2,$$

com $w_2 = x_1 + u_2$.

2.7 Redução Modal e Atraso

Para cada sistema SISO, será obtido um modelo reduzido conforme proposto por [9].

Dado o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad (2.9)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e A , B e C matrizes constantes de dimensões adequadas, o ganho estático do sistema é definido como o valor final de y para uma entrada u constante igual a 1. Note que nesse caso, a equação de estado se torna

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B,$$

cujas solução é

$$\mathbf{x} = e^{At} \left(\mathbf{x}(0) + A^{-1}B \right) - A^{-1}B,$$

onde t é o tempo. Assim, se todos os autovalores de A são negativos, obtém-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = -A^{-1}B,$$

logo, o valor final de y , e o ganho estático, será:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} C\mathbf{x} = -CA^{-1}B.$$

Seja V a matriz cuja i -ésima coluna é o i -ésimo autovetor de A , de forma que autovetores complexos são colocados na coluna imediatamente ao lado de seus conjugados. Define-se a matriz \tilde{V} , cuja i -ésima coluna será igual à de V se for real e no caso de pares complexos conjugados, em

uma coluna o valor será trocado pela sua parte real e em outro pela sua parte imaginária. Por exemplo, usando i para representar a unidade imaginária:

$$V = \begin{bmatrix} 1 - 2i & 1 + 2i & 2 & 3 \\ 2 + 3i & 2 - 3i & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & 12 & 13 \end{bmatrix} \implies \tilde{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Definindo \mathbf{x}_M tal que $\mathbf{x} = \tilde{V}\mathbf{x}_M$ e substituindo em (2.9), obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_M = A_M \mathbf{x}_M + B_M u \\ y = C_M \mathbf{x}_M, \end{cases} \quad (2.10)$$

com

$$A_M = \tilde{V}^{-1} A \tilde{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \text{Re}(\lambda_k) & \text{Im}(\lambda_k) & & \\ & & -\text{Im}(\lambda_k) & \text{Re}(\lambda_k) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$B_M = \tilde{V}^{-1} B$$

$$C_M = C \tilde{V},$$

onde λ_i é i -ésimo autovalor de A . A eq. (2.10) é chamada de representação modal do sistema (2.9). Com essa representação, é fácil obter o ganho estático associado a cada autovalor. A redução é feita mantendo apenas os $n_r < n$ autovalores com maior ganho estático associado. Para compensar a perda de ganho estático, é inserido uma transferência direta na equação de saída, de forma que o modelo reduzido é dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_R = A_R \mathbf{x}_R + B_R u \\ y_R = C_R \mathbf{x}_R + D_R u \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde $A_R \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $B_R \in \mathbb{R}^{n_r}$ e $C_R \in \mathbb{R}^{1 \times n_r}$ são as matrizes obtidas a partir de A , B e C mantendo apenas os valores associados aos autovalores mantidos e $D_R \in \mathbb{R}$ é a soma dos ganhos estáticos associados a todos os autovalores que foram removidos.

Para melhor representar o sistema original, (2.9), [9] propõe a inserção de um atraso ϵ na entrada do sistema reduzido, (2.11), com tal atraso dado pelo tempo em que a resposta ao degrau do sistema reduzido está mais próxima do valor inicial da resposta do sistema original, de forma a minimizar a transferência direta. Com isso, o novo modelo é dado por [9]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_D = A_R \mathbf{x}_D + B_D u(t - \epsilon) \\ y_D = C_R \mathbf{x}_D + D_D u(t - \epsilon), \end{cases} \quad (2.12)$$

com

$$B_D = A_R (e^{\epsilon A_R} - I) A_R^{-1} B_R + B_R$$

$$D_D = C_R (e^{\epsilon A_R} - I) A_R^{-1} B_R + D_R,$$

onde I é a matriz identidade de dimensão adequada.

2.7.1 Exemplo Redução e Atraso

Suponha o sistema (2.9) com

$$A = \begin{bmatrix} -7,9472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,2814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2714 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,8953 & 1,2152 & -1,1250 & 0,5029 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} -0,2455 & 0,5209 & 0,6667 & 0,6697 \end{bmatrix},$$

e que é desejado um modelo de ordem 2. Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -7,9470, \dots, \lambda_4 = -0,2714$. Os ganhos $g_i, i = 1, \dots, 4$, associados a cada autovetor são

$$g_1 = -0,0277$$

$$g_2 = 0,1199$$

$$g_3 = -0,3333$$

$$g_4 = 1,2411,$$

assim, a combinação que deixa o menor ganho, em módulo, para ser inserido via transferência é de g_3 com g_4 , portanto:

$$A_R = \begin{bmatrix} -2,2500 & 0 \\ 0 & -0,2714 \end{bmatrix}$$

$$B_R = \begin{bmatrix} -1,1250 & 0,5029 \end{bmatrix}^T$$

$$C_R = \begin{bmatrix} 0,6667 & 0,6697 \end{bmatrix}$$

$$D_R = g_1 + g_2 = 0,0921.$$

A resposta ao degrau unitário deste sistema reduzido chega mais próxima à condição inicial do sistema original no tempo 0,4, aproximadamente, assim, fazendo $\epsilon = 0,4$ obtém-se:

$$B_D = A_R (e^{\epsilon A_R} - I) A_R^{-1} B_R + B_R = \begin{bmatrix} -0,4574 & 0,4512 \end{bmatrix}^T$$

$$D_D = C_R (e^{\epsilon A_R} - I) A_R^{-1} B_R + D_R = 0,0221.$$

A figura 2.1 mostra a comparação das respostas ao degrau unitário dos três sistemas.

2.8 Controle De Sistemas SISO com Atraso

Para controlar os sistemas da forma (2.12), será usada a mesma estratégia que em [1]: o preditor de Smith, veja [10] para detalhes do preditor. A figura 2.2 mostra o esquema do preditor de Smith.

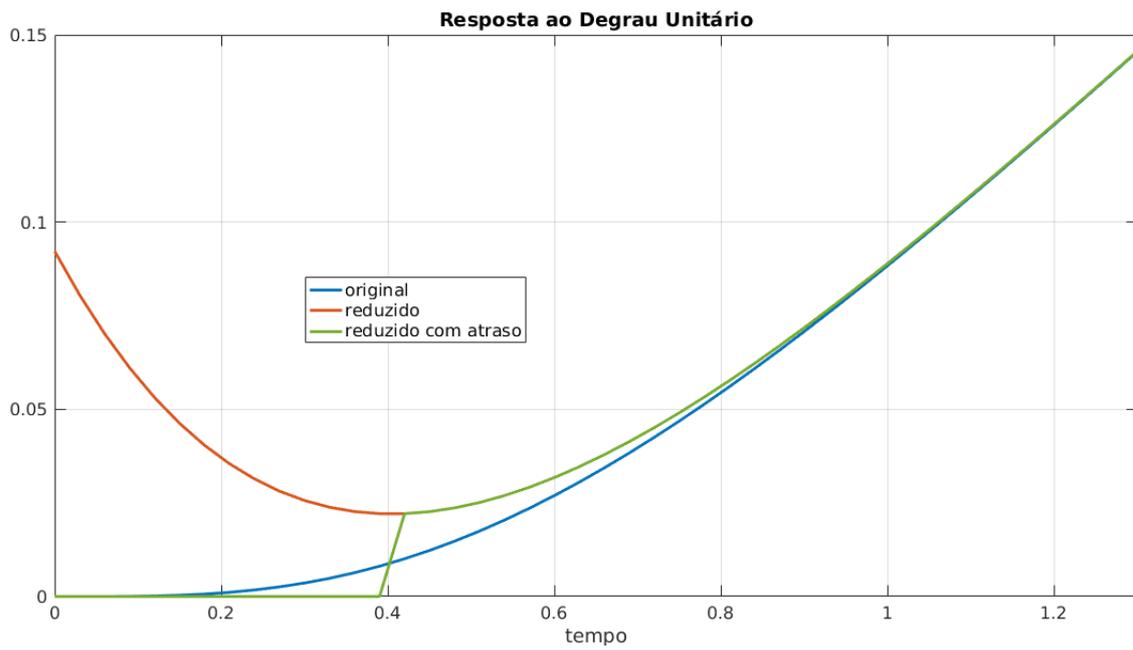


Figura 2.1: Resposta ao degrau do sistema original e dos modelos

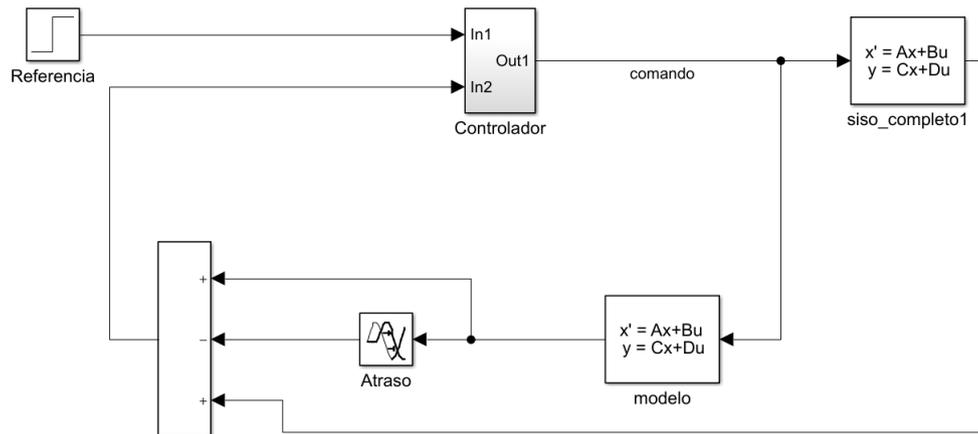


Figura 2.2: Preditor de Smith

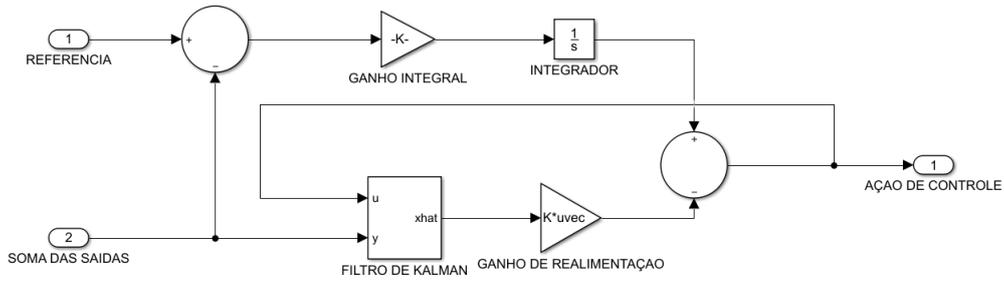


Figura 2.3: Controlador por realimentação de estados com integrador

O preditor de Smith permite que o controle seja projetado para o modelo como se o mesmo não tivesse atraso. O controle neste trabalho foi feito com realimentação de estados com uma ação integral para que o sistema tenha erro estacionário zero para uma referência degrau. Técnicas para realizar tal tipo de controle podem ser encontradas em livros padrão de controle tais como [11] e [12]. A figura 2.3 mostra o bloco “Controlador” da figura 2.2, as variáveis de estado são obtidas observando a saída com um filtro de Kalman [13], mas como não há nenhum ruído inserido no sistema o filtro está funcionando apenas como um observador linear.

2.9 Estimador de Saídas Planas

Na prática, não possível medir \mathbf{x} , apenas \mathbf{y} , sendo possível utilizar um estimador de estados para obter aproximações de \mathbf{x} a partir de \mathbf{y} . Nesse trabalho foi preferível usar um estimador para obter aproximações das saídas planas diretamente, pois elas é que são usadas nos preditores de Smith como “saída do sistema completo”.

Multiplicando a eq. (2.7) por M^{-1} , obtém-se

$$M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ f_1^{(\kappa_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m \\ f_m^{(\kappa_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Assumindo lentidão na evolução do sistema, de forma que as derivadas de f_1, \dots, f_m sejam desprezíveis, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \approx M_R \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

com $M_R \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ uma matriz que contém as colunas de M^{-1} que multiplicam f_1, \dots, f_m na eq. (2.13). Assim, M_R pode ser particionada como

$$M_R = \begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix},$$

onde $M_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ contém as linhas referentes a \mathbf{x} e $M_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ contém as linhas referentes a \mathbf{u} .
Dessa forma,

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \implies \mathbf{y} \approx CM_x\mathbf{f}.$$

Seja o i -ésimo modelo, $i = 1, \dots, m$, dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_{Di} = A_{Ri}\mathbf{z}_{Di} + B_{Di}w_i(t - \epsilon_i) \\ f_{Di} = C_{Ri}\mathbf{z}_{Di} + D_{Di}w_i(t - \epsilon_i), \end{cases}$$

com f_{Di} uma aproximação da i -ésima saída plana. Assim,

$$\mathbf{f} \approx \begin{bmatrix} C_{R1}\mathbf{z}_{D1} + D_{D1}w_1(t - \epsilon_1) \\ \vdots \\ C_{Rm}\mathbf{z}_{Dm} + D_{Dm}w_m(t - \epsilon_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} \approx CM_x \begin{bmatrix} C_{R1}\mathbf{z}_{D1} + D_{D1}w_1(t - \epsilon_1) \\ \vdots \\ C_{Rm}\mathbf{z}_{Dm} + D_{Dm}w_m(t - \epsilon_m) \end{bmatrix},$$

assim, possuindo $\mathbf{w} = [w_1 \ \dots \ w_m]^T$ e \mathbf{y} , pode-se montar o estimador (ou observador) de estados assintótico

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{D1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{Dm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{Rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{D1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{Dm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{D1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{Dm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t - \epsilon_1) \\ \vdots \\ w_1(t - \epsilon_1) \end{bmatrix} + L(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} = CM_x \begin{bmatrix} C_{R1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{D1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{Dm} \end{bmatrix} + CM_x \begin{bmatrix} D_{D1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{Dm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t - \epsilon_1) \\ \vdots \\ w_1(t - \epsilon_1) \end{bmatrix}, \end{cases}$$

onde L é uma matriz escolhida de tal maneira que o sistema seja estável, veja livros padrão de controle [11] e [12] para a metodologia da obtenção de L . A partir daí, obtém-se a estimativa do vetor de saídas planas:

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} C_{R1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{D1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{Dm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{D1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{Dm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t - \epsilon_1) \\ \vdots \\ w_1(t - \epsilon_1) \end{bmatrix}$$

Note que todas essas aproximações preservam o ganho estático do sistema, portanto $\hat{\mathbf{f}}$ converge para \mathbf{f} numa condição de entrada constante.

2.10 Obter Ação de Controle para o Sistema Completo

Isolando \mathbf{u} na eq. (2.8), obtém-se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Theta_{ui} \\ \vdots \\ \Theta_{um} \end{bmatrix}^{-1} \left[\mathbf{w} - \begin{bmatrix} \Theta_{xi} \\ \vdots \\ \Theta_{xm} \end{bmatrix} \mathbf{x} \right],$$

se \mathbf{x} não pode ser medido, utiliza-se

$$\mathbf{x} \approx M_x \hat{\mathbf{f}},$$

onde $\hat{\mathbf{f}}$ é a estimativa de \mathbf{f} obtida com o estimador descrito na seção 2.9.

Capítulo 3

Desenvolvimento

3.1 Passos para a obtenção do controle

Para obter o controle, serão usados todos os conceitos vistos no capítulo 2, usando um procedimento similar ao apresentado em [1], em que é controlado um sistema de ordem infinita a partir de um modelo reduzido criado utilizando o procedimento de redução modal e inserção de um atraso conforme apresentado em [9]. No entanto, não será possível utilizar exatamente o procedimento de [1], pois o sistema em estudo aqui possui múltiplas entradas e múltiplas saídas, de forma que o modelo reduzido proposto por [9] não pode ser utilizado diretamente.

Antes que o sistema possa ser controlado, com o uso da técnica aqui apresentada, é necessário que ele seja representado por um sistema de ordem finita. Isso foi feito discretizando o espaço na equação do sistema, de forma que a temperatura em cada ponto da barra, exceto as extremidades, se tornou uma variável de estado do sistema.

Para o controle, o primeiro passo é usar a planicidade diferencial para fazer o desacoplamento das entradas e saídas, de forma que o sistema MIMO possa ser visto como um conjunto de sistemas SISO. Foi usado o procedimento explicado no capítulo 2 para obter múltiplos sistemas SISO na forma de Brunovský a partir do sistema MIMO original.

O segundo passo é reduzir os modelos e inserir um atraso adequado na entrada. Note que isso não é possível na forma de Brunovský, pois a matriz de estado dessa forma não possui inversa, assim foi adotado o procedimento explicado na subseção 2.6.

O terceiro passo é fazer controladores para cada um destes sistemas SISO reduzidos e com entradas atrasadas, usando preditores de Smith.

Finalmente, é preciso reconstruir o valor da ação de controle do sistema original a partir das encontradas para os modelos.

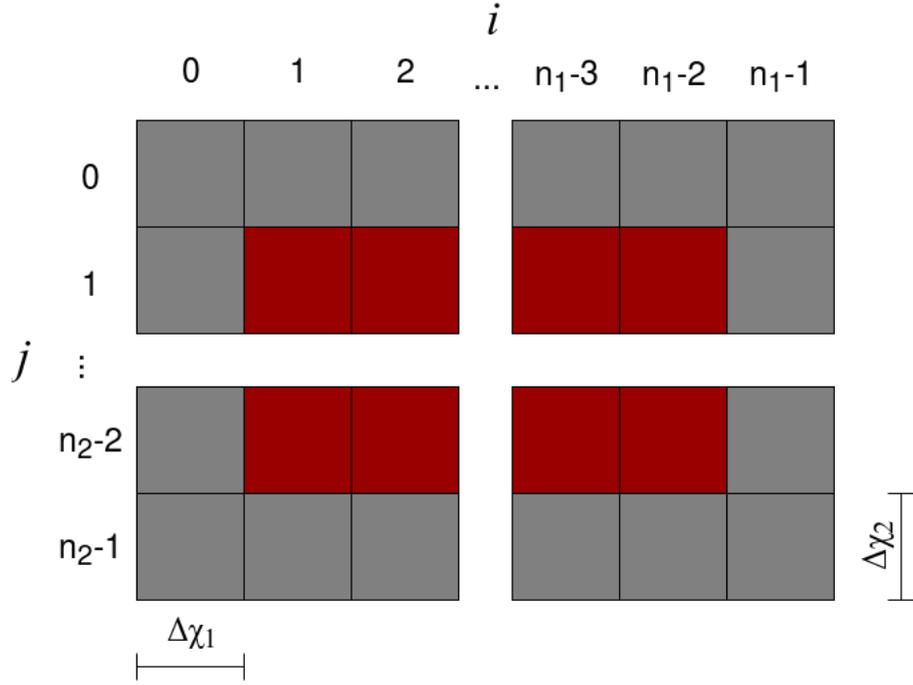


Figura 3.1: Placa Discretizada

com

$$a_k = \begin{cases} 2, & \text{se } x_k \text{ está associado à posição } (1, 1), (1, n_2 - 2), (n_1 - 2, 1) \text{ ou } (n_1 - 2, n_2 - 2) \\ 3, & \text{se } x_k \text{ está associado a uma posição } (i, j) \text{ tal que } i = 1, n_1 - 2 \text{ e } 1 < j < n_2 - 1, \\ & \text{ou } j = 1, n_2 - 2 \text{ e } 1 < i < n_1 - 1 \\ 4, & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

A figura 3.1 mostra uma representação esquemática da placa discretizada, os elementos da malha em cinza indicam os elementos da fronteira que não fazem parte do vetor de estados.

São apresentados dois casos, no primeiro, mais simples, são utilizados os valores

$$n_1 = n_2 = 7$$

$$\Delta\chi_1 = \Delta\chi_2 = 1$$

$$\eta = 1.$$

Com 4 entradas nos vértices da área não isolada da placa, posições (1, 1), (1, 5), (5, 1) e (5, 5), conforme figura 3.1, e as saídas são as temperaturas nos mesmos locais, i.e, $C = B^T$. Assim, o sistema tem 25 estados, 4 entradas e 4 saídas.

No segundo caso em estudo foram usados

$$n_1 = n_2 = 32$$

$$\Delta\chi_1 = \Delta\chi_2 = 1$$

$$\eta = 0, 1.$$

Foram usadas 15 fontes pontuais, colocadas arbitrariamente pela malha. Com isso, a matriz B tem os elementos e a matriz C foi escolhida como transposta de B , i.e, as temperaturas são lidas nos mesmos pontos da malha onde há fontes de calor. Assim, o sistema tem 900 estados, 15 entradas e 15 saídas. Os elementos da matriz B não nulos são os referentes às posições (3, 14), (3, 29), (7, 12), (7, 27), (11, 10), (11, 25), (15, 8), (13, 23), (18, 6), (18, 21), (22, 4), (22, 19), (26, 2), (26, 17) e (30, 15).

3.3 Obtenção das saídas planas

No primeiro caso, com 4 entradas, os índices de controlabilidade são

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= 6 \\ \kappa_2 &= \kappa_3 = 5 \\ \kappa_4 &= 3.\end{aligned}$$

Já o segundo sistema, com 900 estados, tem o posto de sua matriz de controlabilidade de Kalman de 105, os índices de controlabilidade nesse caso são todos iguais a 7.

Em ambos os casos, o sistema não é plano, assim foi feito como explicado na seção 2.5 para obter sistemas SISO na forma de Brunovský.

3.4 Redução modal e atraso

Uma vez obtidas as saídas planas, o sistema original é agora representado por sistemas SISO dados por

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\kappa_i-1) \times 1} & I_{\kappa_i-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times (\kappa_i-1)} \end{bmatrix} \mathbf{z}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\kappa_i-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} v_i$$

onde $\mathbf{z}_i = [f_i \ \dot{f}_i \ \dots \ f_i^{(\kappa_i-1)}]^T$ e v_i é uma nova entrada. A saída do i -ésimo sistema é f_i . Porém, esta forma não é adequada para a obtenção dos modelos reduzidos, assim, o sistema foi transformado para

$$\dot{\mathbf{z}}_i = A_{C_i} \mathbf{z}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\kappa_i-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} w_i,$$

com A_{C_i} e w_i obtidos como explicado no capítulo (2). As saídas dos sistemas continuam sendo as saídas planas. A partir daí, os sistemas foram colocados na forma modal:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{M_i} &= A_{M_i} \mathbf{z}_{M_i} + B_{M_i} w_i \\ f_i &= C_{M_i} \mathbf{z}_{M_i}\end{aligned}$$

Por fim, os sistemas foram reduzidos para ordem 2 e foram inseridos atrasos nas entradas dos sistemas reduzidos, de forma que eles melhor representem os sistemas de maior ordem a partir dos

Tabela 3.1: Modelos reduzidos com atraso, sistema com 4 entradas

i	A_{Ri}	B_{Di}	C_{Ri}^T	D_{Di}	ϵ_i (s)
1	$\begin{bmatrix} -7,2361 & 0 \\ 0 & (-3,7)10^{-11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0001 \\ -0,0020 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (-4,9923)10^{-5} \\ -1,0000 \end{bmatrix}$	$[4,1533]10^{-10}$	1,70
2	$\begin{bmatrix} -4,0000 & 0 \\ 0 & -0,3820 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0284 \\ 0,0094 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0038 \\ 0,9242 \end{bmatrix}$	$[2,6759]10^{-5}$	1,48
3	$\begin{bmatrix} -4,0000 & 0 \\ 0 & -0,3820 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0284 \\ 0,0094 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0038 \\ 0,9242 \end{bmatrix}$	$[2,6759]10^{-5}$	1,48
4	$\begin{bmatrix} -3,0000 & 0 \\ 0 & -0,7639 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,7528 \\ 0,1095 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,1048 \\ 0,7209 \end{bmatrix}$	$[0,0063]$	0,31

quais foram gerados. Os modelos finais são dados por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_{Di} &= A_{Ri}\mathbf{z}_{Di} + B_{Di}w_i(t - \epsilon_i) \\ f_{Di} &= C_{Ri}\mathbf{z}_{Di} + D_{Di}w_i(t - \epsilon_i), \end{cases}$$

onde f_{Di} é uma aproximação para f_i . As tabelas 3.1 e 3.2 mostram as matrizes destes modelos e os atrasos para os casos com 4 entradas e 15 entradas respectivamente.

3.5 Controle dos Sistemas SISO

Para controlar cada um dos sistemas SISO com atraso, foi usado controle por realimentação de estados e preditores de Smith. Para conseguir erro nulo para uma entrada degrau, foi inserido um integrador em cada malha para aumentar o tipo dos sistemas.

O controle foi feito de modo os polos de todos os sistemas SISO reduzidos e atrasados em $-0,01$ rad/s, $-0,055$ rad/s e $-0,1$ rad/s (note que os sistemas passaram a ser de ordem 3 devido aos integradores). Os valores de ganho integral, k_{Ii} , e ganhos de realimentação, K_i , estão mostrados nas tabelas 3.3 e 3.4 para os casos com 4 entradas e 15 entradas respectivamente.

3.6 Estimador de Saídas Planas

Foi obtido um estimador de saídas planas conforme explicado na subseção 2.9, porém como no segundo caso o sistema não é completamente controlável, há um erro estacionário no valor estimado. Porém, ainda é possível fazer um controle utilizando como referência o valor desejado para a estimativa da saída plana a partir da relação:

$$\hat{\mathbf{f}} = (CM_x)^{-1} \mathbf{y},$$

que vale para $\hat{\mathbf{f}}$ constante, assim, estabilizando $\hat{\mathbf{f}}$ em um certo valor, também estabiliza-se \mathbf{y} em um valor correspondente.

No caso com 4 entradas o erro estacionário da estimativa das saídas planas é desprezível, assim, a trajetória foi gerada para o próprio \mathbf{f} .

Tabela 3.2: Modelos reduzidos com atraso, sistema com 15 entradas

i	A_{Ri}	B_{Di}	C_{Ri}^T	D_{Di}	ϵ_i (s)
1	$\begin{bmatrix} -0,0076 & 0 \\ 0 & -0,0005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,4521 \\ 5,4521 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[8,2380] 10^9$	133,36
2	$\begin{bmatrix} -0,0084 & 0 \\ 0 & -0,0019 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,3309 \\ 5,3307 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,5269] 10^9$	134,97
3	$\begin{bmatrix} -0,0401 & 0 \\ 0 & -0,0022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0014 \\ 3,8989 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -0,9992 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[3,5444] 10^5$	244,85
4	$\begin{bmatrix} -0,0087 & 0 \\ 0 & -0,0024 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,2470 \\ 5,2468 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,2391] 10^9$	135,55
5	$\begin{bmatrix} -0,0086 & 0 \\ 0 & -0,0021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,0950 \\ 5,0948 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,2059] 10^9$	134,90
6	$\begin{bmatrix} -0,0086 & 0 \\ 0 & -0,0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,0011 \\ 5,0008 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,3245] 10^9$	134,79
7	$\begin{bmatrix} -0,0081 & 0 \\ 0 & -0,0011 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,2597 \\ 5,2597 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[8,1273] 10^9$	135,24
8	$\begin{bmatrix} -0,0081 & 0 \\ 0 & -0,0014 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,9626 \\ 5,9626 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[9,4082] 10^9$	139,04
9	$\begin{bmatrix} -0,0083 & 0 \\ 0 & -0,0017 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,2441 \\ 5,2440 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,4824] 10^9$	134,36
10	$\begin{bmatrix} -0,0087 & 0 \\ 0 & -0,0021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,1002 \\ 5,1001 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,3268] 10^9$	135,40
11	$\begin{bmatrix} -0,0088 & 0 \\ 0 & -0,0025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,2021 \\ 5,2021 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,2098] 10^9$	135,73
12	$\begin{bmatrix} -0,0085 & 0 \\ 0 & -0,0023 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,4175 \\ 5,4172 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,2454] 10^9$	135,01
13	$\begin{bmatrix} -0,0088 & 0 \\ 0 & -0,0020 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,8072 \\ 4,8069 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,0037] 10^9$	134,21
14	$\begin{bmatrix} -0,0083 & 0 \\ 0 & -0,0020 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5,5754 \\ 5,5751 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[7,5641] 10^9$	135,15
15	$\begin{bmatrix} -0,0083 & 0 \\ 0 & -0,0015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6,0725 \\ 6,0721 \end{bmatrix} 10^8$	$\begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$	$[9,6341] 10^9$	140,17

Tabela 3.3: Ganhos dos Controladores, sistema com 4 entradas

i	K_i	k_{Ii}
1	$[(-1,2054)10^5 \quad -0,1139]$	$[6,9098]10^{-4}$
2	$[152,8206 \quad 3,4986]$	$[2,8832]10^{-4}$
3	$[152,8206 \quad 3,4986]$	$[2,8832]10^{-4}$
4	$[-5,2142 \quad 2,1569]$	$[5,6671]10^{-5}$

Tabela 3.4: Ganhos dos Controladores, sistema com 15 entradas

i	K_i	k_{Ii}
1	$[0, 1526 \ 0, 1814]10^{-8}$	$[0, 1433]10^{-10}$
2	$[-0, 1655 \ 0, 1945]10^{-8}$	$[0, 1587]10^{-10}$
3	$[-0, 1232 \ 0, 0040]10^{-6}$	$[0, 0351]10^{-10}$
4	$[0, 1716 \ 0, 2010]10^{-8}$	$[0, 1659]10^{-10}$
5	$[-0, 1714 \ 0, 2017]10^{-8}$	$[0, 1654]10^{-10}$
6	$[-0, 1690 \ 0, 1999]10^{-8}$	$[0, 1629]10^{-10}$
7	$[-0, 15274 \ 0, 1871]10^{-8}$	$[0, 1497]10^{-10}$
8	$[0, 1434 \ 0, 1695]10^{-8}$	$[0, 1366]10^{-10}$
9	$[0, 1664 \ 0, 1960]10^{-8}$	$[0, 1590]10^{-10}$
10	$[0, 1698 \ 0, 2001]10^{-8}$	$[0, 1640]10^{-10}$
11	$[0, 1723 \ 0, 2018]10^{-8}$	$[0, 1669]10^{-10}$
12	$[0, 1712 \ 0, 1997]10^{-8}$	$[0, 1646]10^{-10}$
13	$[0, 1728 \ 0, 2049]10^{-8}$	$[0, 1676]10^{-10}$
14	$[0, 1656 \ 0, 1933]10^{-8}$	$[0, 1583]10^{-10}$
15	$[0, 1413 \ 0, 1668]10^{-8}$	$[0, 1350]10^{-10}$

3.7 Controle do Sistema Completo

Por fim, o sistema completo foi conectado aos três preditores de Smith para ser controlado. As saídas planas estimadas do sistema completo são calculadas e então fazem papel de “saída do sistema original” em cada um dos preditores de Smith. A ação de controle \mathbf{u} foi aproximada por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Theta_{ui} \\ \vdots \\ \Theta_{um} \end{bmatrix}^{-1} \left[\mathbf{w} - \begin{bmatrix} \Theta_{xi} \\ \vdots \\ \Theta_{xm} \end{bmatrix} M_x \hat{\mathbf{f}} \right].$$

Em cada preditor de Smith a referência, é uma trajetória cúbica do instante $t = 0$ até o instante $t = t_f$, onde t_f é um valor fixo, e constante para $t \geq t_f$. A trajetória cúbica é construída de forma que inicie e termine nos valores desejados e tenha derivada nula em $t = 0$ e em $t = t_f$. A figura 3.2 mostra as conexões entre os blocos para o controle do sistema completo.

3.8 Simulações

Para as simulações dos sistemas foi usada a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_{n \times 1}$, e o valor final desejado é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \left[100 \ 100 \ \dots \ 100 \right]^T.$$

No caso com 4 entradas, foi usado $t_f = 1500$ s. As figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 mostram as saídas reais do sistema, as saídas plana, o erro de acompanhamento $\mathbf{e} = \left[e_1 \ \dots \ e_m \right]^T = \mathbf{f} - \mathbf{f}^*$, onde

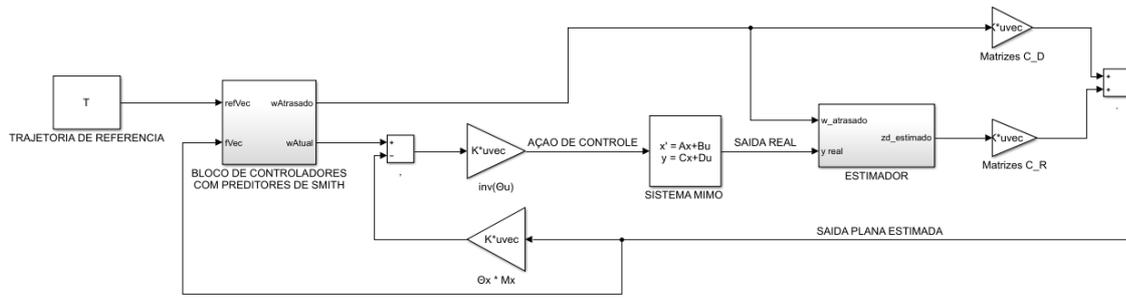


Figura 3.2: Diagrama do Sistema Completo

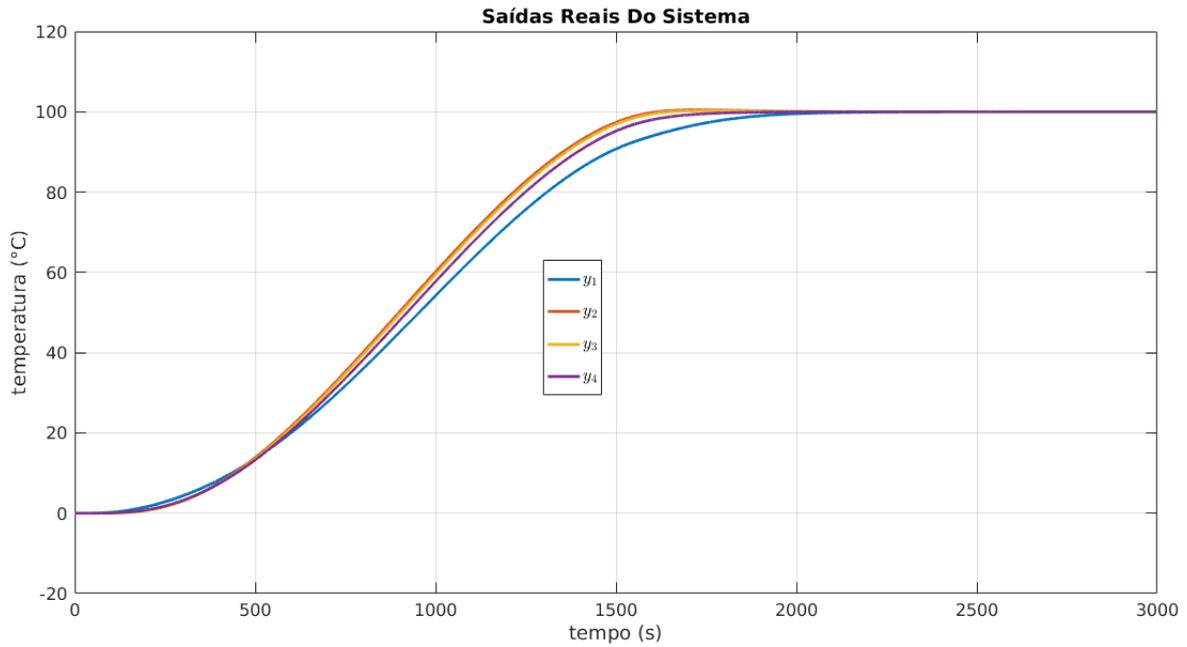


Figura 3.3: Saída Real do Sistema (caso com 4 entradas)

\mathbf{f}^* é o valor desejado (referência), e o erro de estimação, respectivamente. Na figura 3.4, o valor de f_4 é multiplicado por 100 para melhor visualização.

Para o caso com 15 entradas foi usado $t_f = 15000$ s. As figuras 3.7, 3.8 e 3.9, mostram a saída real do sistema, a saída plana estimada, e a diferença entra a saída plana estimada e a referência, respectivamente. Lembre que nesse caso a saída plana estimada e a saída plana real não convergem para o mesmo valor e há uma diferença considerável em seus valores finais, de forma que a trajetória é feita para $\hat{\mathbf{f}}$ e o erro de acompanhamento é redefinido como $\mathbf{e} = [e_1 \dots e_m]^T = \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^*$. Como no caso prático o vetor \mathbf{u} não pode assumir valores arbitrários nem variar bruscamente, foram impostas as restrições

$$\begin{aligned} |u_i| &< 1 \\ |\dot{u}_i| &< 1, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$.

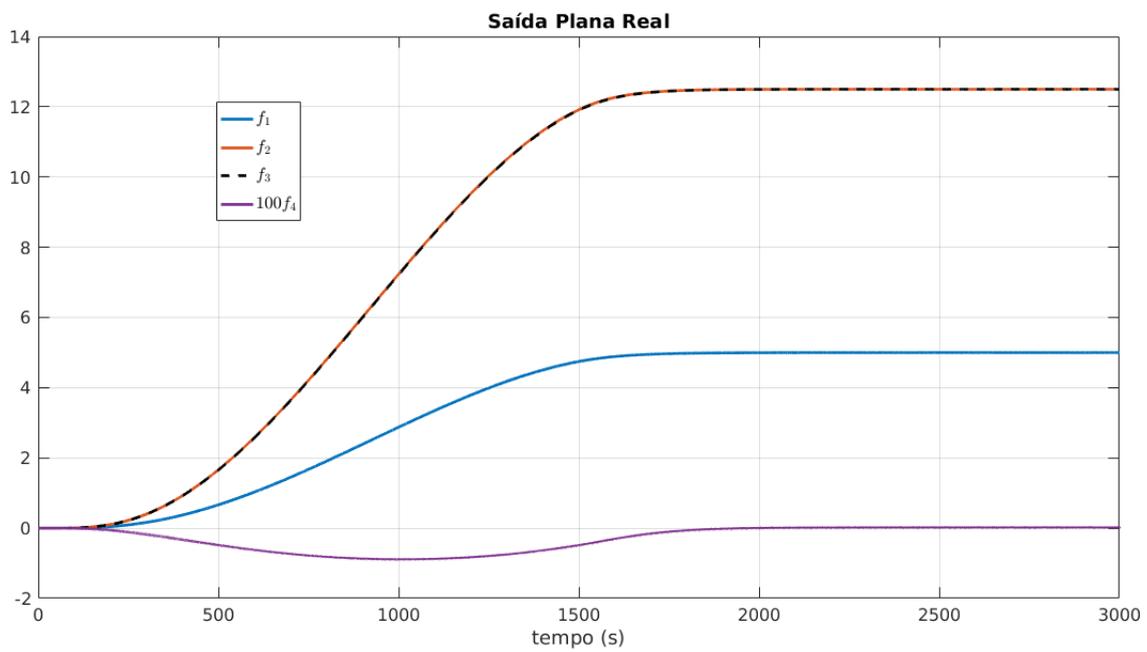


Figura 3.4: Saída Plana Real (caso com 4 entradas)

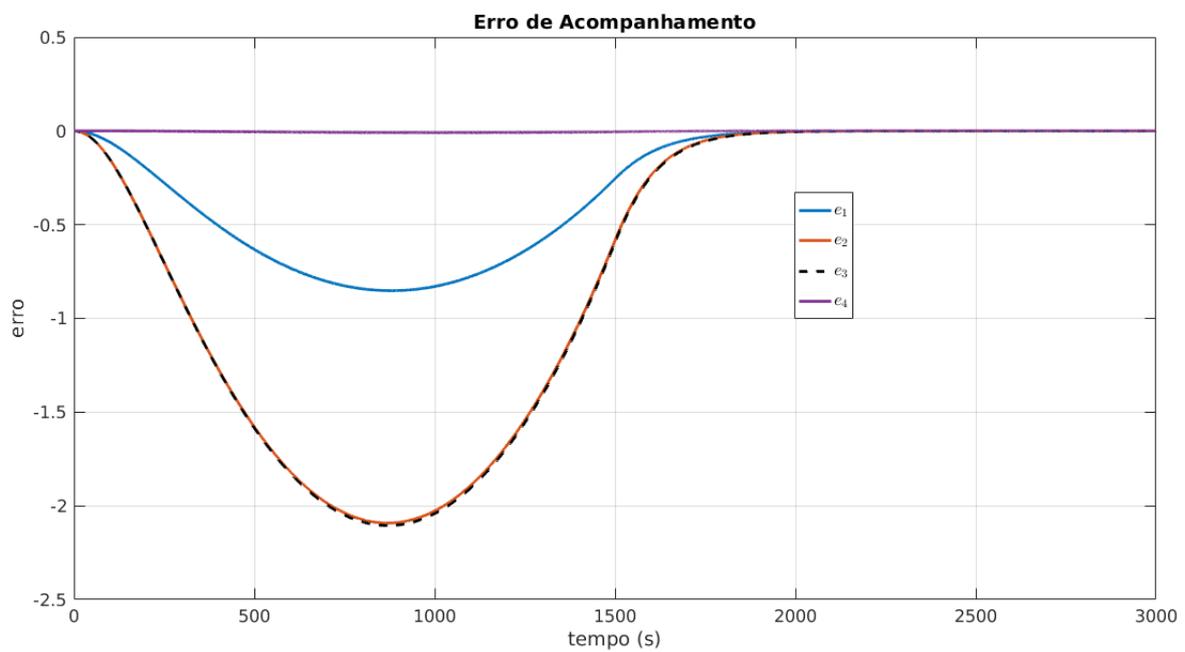


Figura 3.5: Erro de Acompanhamento (caso com 4 entradas)

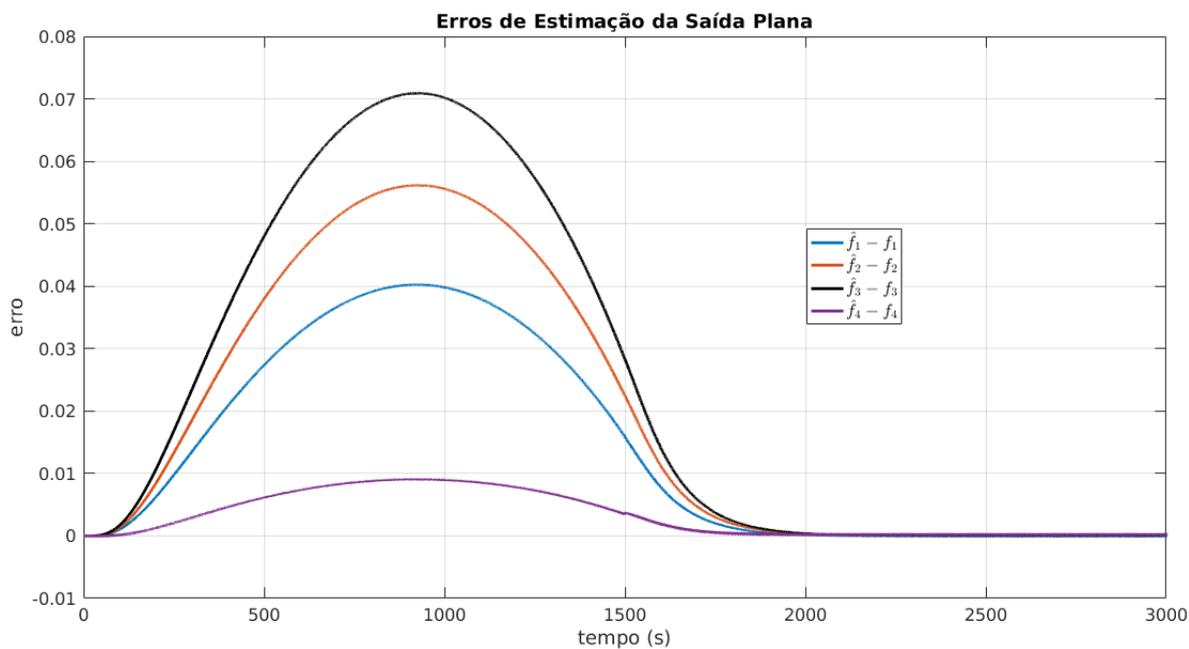


Figura 3.6: Erro de Estimação (caso com 4 entradas)

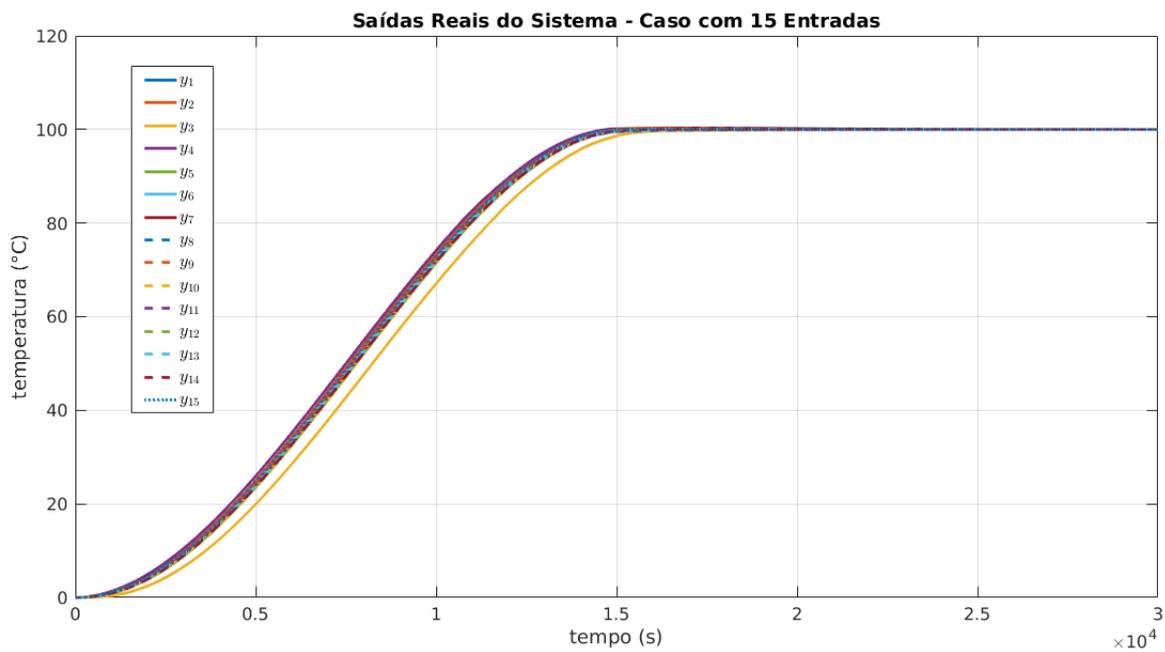


Figura 3.7: Saída Real do Sistema (caso com 15 entradas)

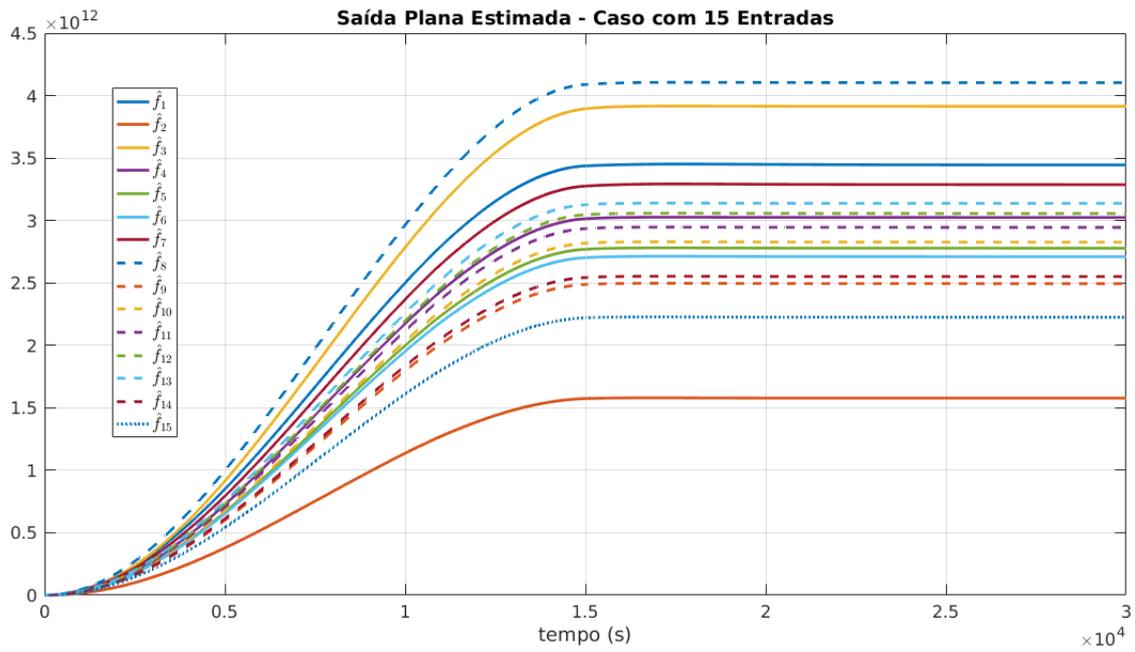


Figura 3.8: Saída Plana Estimada (caso com 15 entradas)

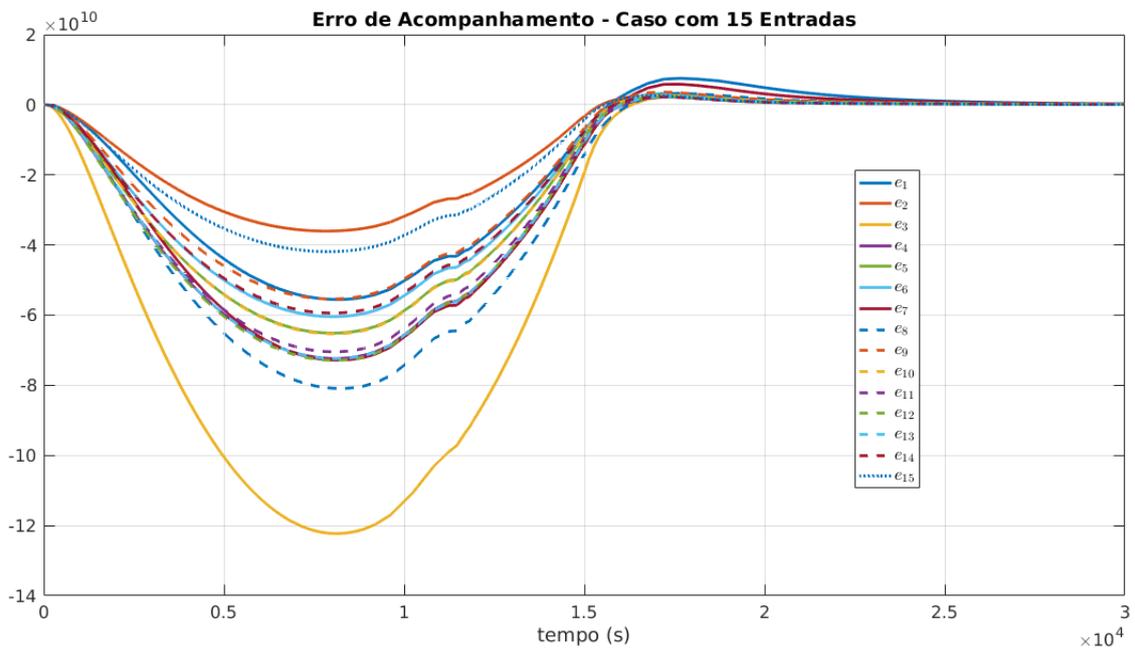


Figura 3.9: Erro de Acompanhamento (caso com 15 entradas)

Capítulo 4

Conclusões

Este manuscrito apresentou o que pretende ser o início do desenvolvimento de uma teoria de controle para sistemas de ordem infinita com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Os resultados obtidos para o estudo de caso proposto mostra que é possível controlar uma planta complexa utilizando as simplificações de modelo e as técnicas de controle aqui apresentadas.

Os principais pontos neste trabalho são o uso de planicidade diferencial para transformar o sistema MIMO em um grupo de sistemas SISO e o uso de redução modal em conjunto com a inserção do atraso para representar sistemas de maior ordem por sistemas pequenos. Com esses dois procedimentos, o problema de encontrar os ganhos de realimentação se torna mais simples e viável para sistemas de alta ordem.

Nos dois exemplos mostrados, a estratégia de controle foi bem sucedida em levar o sistema para o estado desejado, ainda que não tenha seguido as trajetórias perfeitamente. Outro resultado positivo é a possibilidade de aplicar o método a sistemas não completamente controláveis, como foi no caso com 15 entradas.

As perspectivas futuras para este trabalho são o uso de técnicas de controle robusto para garantir que os erros inseridos pelas reduções modais não impeçam o controle do sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MONTEIRO, F. R.; FILHO, J. O. de A. L.; FORTALEZA, E. *Modal Reduction Based Tracking Control for Installation of Subsea Equipments*★. [S.l.]: IFAC-PapersOnLine, 2015.
- [2] LI, J.-R.; GREENGARD, L. On the numerical solution of the heat equation i: Fast solvers in free space. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 226, n. 2, p. 1891–1901, 2007.
- [3] LEVEQUE, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. [S.l.]: SIAM, 2007.
- [4] SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. [S.l.]: Oxford university press, 1985.
- [5] RIGATOS, G. G. *Nonlinear Control and Filtering Using Differential Flatness Approaches: Applications to Electromechanical Systems*. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. (Studies in Systems, Decision and Control 25). ISBN 978-3-319-16419-9,978-3-319-16420-5.
- [6] LEVINE, J. *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] SIRA-RAMIREZ, H.; AGRAWAL, S. K. *Differentially flat systems*. [S.l.]: Crc Press, 2004.
- [8] BARATA, J. C. A.; HUSSEIN, M. S. The moore–penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 42, n. 1-2, p. 146–165, 2012.
- [9] FORTALEZA, E. *Active control applied to offshore structures: positioning and attenuation of vortex induced vibrations*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009.
- [10] BAHILL, A. A simple adaptive smith-predictor for controlling time-delay systems: A tutorial. *IEEE Control systems magazine*, IEEE, v. 3, n. 2, p. 16–22, 1983.
- [11] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5th. ed. [S.l.]: Pearson, 2009.
- [12] NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 6th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- [13] GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2008. ISBN 0470173661.

ANEXOS

I. DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DO CD

O CD contém:

- uma pasta com o nome “figuras” que contém todas as figuras utilizadas neste trabalho numeradas da mesma forma que no manuscrito;
- um arquivo “manuscrito.pdf” que contém a versão digital deste manuscrito.