TRABALHO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DE FILTROS DE KALMAN APLICADOS À ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM UM PROCESSO DE QUATRO TANQUES

Alexandre Willik Neto

Brasília, julho de 2017

ENGENHARIA MECATRÔNICA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASILIA
Faculdade de Tecnologia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DE FILTROS DE KALMAN APLICADOS À ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM UM PROCESSO DE QUATRO TANQUES

Alexandre Willik Neto

Relatório submetido como requisito parcial de obtenção de grau de Engenheiro de Controle e Automação

Banca Examinadora

Prof. Eduardo Stockler Tognetti, ENE/UnB ____________________
Orientador

Prof. Henrique Marra Taira Menegaz, FGA/UnB ____________________
Examinador interno

Brasília, julho de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

ALEXANDRE, WILLIK NETO
Estudo de Filtros de Kalman Aplicados à Estimação de Estados em um Processo de Quatro Tanques,

[Distrito Federal] 2017.

xiv, 98p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2017). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1. Estimação de Estados 2.Processo de Quatro Tanques
3. Filtro de Kalman 4.Filtro de Kalman Estendido
5.Filtro de Kalman Fuzzy

I. Mecatrônica/FT/UnB

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

WILLIK NETO, A., (2017). Estudo de Filtros de Kalman Aplicados à Estimação de Estados em um Processo de Quatro Tanques. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-n°006/2017, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 98p.

CESSÃO DE DIREITOS

Alexandre Willik Neto

Universidade de Brasília – Campus Darcy Ribeiro

Faculdade de Tecnologia – FT

70910-000 Brasília – DF – Brasil.

Dedicatória

A Gilmar Santos e Susy Willik, pais dedicados e amigos fiéis, nos quais me espelho. A Endel Willik, melhor irmão possível e ótimo revisor de dedicatórias.

Alexandre Willik Neto

Agradecimentos

Sou grato a Deus por Seu amor, misericórida e graça.
Agradeço a meus pais, Gilmar e Susy, por me ensinarem o caminho pelo qual se deve andar e por trilharem este percurso junto a mim.
Agradeço aos professores Eduardo Stockler e Eugênio Fortaleza pela disposição em ajudar e orientar, demonstrada durante o desenvolvimento deste trabalho.

Alexandre Willik Neto

RESUMO

Aplicação de filtros de Kalman - a saber, o filtro de Kalman tradicional, em suas formas recursiva e estacionária, o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *fuzzy* - na estimação de estados de um processo não-linear de quatro tanques de líquido. Comparação do desempenho dos filtros, tomando a acurácia de estimação como critério de qualidade. Análise de robustez dos filtros diante de incertezas relacionadas aos ruídos de processo e de medição.

Palavras Chave: Estimação de estados, Processo de quatro tanques, Filtro de Kalman, Filtro de Kalman Estendido, Filtro de Kalman Fuzzy

ABSTRACT

Application of Kalman Filters - continuous and discrete Kalman filter, extended Kalman filter and fuzzy Kalman filter - on state estimation for a nonlinear four tank process. Performance comparison of the filters, considering the estimation accuracy as the quality criterion. Robustness analysis of the filters regarding uncertainties related to the process and sensor noises.

Keywords: State estimation, Four tank process, Kalman Filter, Extended Kalman filter, Fuzzy Kalman filter

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

V_i	Volume de líquido no tanque i	$[m^3/s]$
t	Tempo	
a_i	Área da base do tanque i	$[m^2]$
h_i	Altura do tanque i	$[m]$
$f_{in,i}$	Fluxo de entrada de líquido no tanque i	$[m^3/s]$
$f_{out,i}$	Fluxo de saída de líquido no tanque i	$[m^3/s]$
P_{liq}	Pressão em determinado ponto do tanque i	
g	Aceleração da gravidade i	$[m/s^2]$
v_{esc}	Velocidade de escoamento do líquido no tanque i	$[m/s]$
o_i	Área da abertura de saída no tanque i	$[m^2]$
v_j	Tensão aplicada à bomba j i	$[V]$
$f_{bomba,j,i}$	Fluxo volumétrico de líquido que flui da bomba j para o tanque i	$[m^3/s]$
A, B, C	Matrizes da representação em espaço de estados do processo de quatro tanques	
$\mathbf{x}$	Vetor de estados do sistema de quatro tanques	
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas do sistema de quatro tanques	
$\mathbf{y}$	Vetor de leituras de estados do sistema de quatro tanques	
$\mathbf{v}$	Vetor de tensões aplicadas às bombas	
f_i	Função que descreve a dinâmica do nível no tanque i	
$\bar{\mathbf{h}}$	Vetor de níveis em regime permanente	
$\bar{\mathbf{v}}$	Vetor de tensões em regime permanente	
Ts	Tempo de amostragem	
z_i	Variável premissa da representação *fuzzy* do sistema de quatro tanques, relativa à não-linearidade da dinâmica do nível do tanque i	
M_{i1}, M_{i2}	Funções de pertinência da representação *fuzzy* relativa à variável premissa z_i	

$\overline{z_i}$	Máximo valor assumido pela variável premissa z_i
$\underline{z_i}$	Mínimo valor assumido pela variável premissa z_i
A_n, B_n, C_n	Matrizes da representação em espaço de estados dos n subsistemas *fuzzy*
$B_{w,n}, D_{w,n}$	Matrizes da representação em espaço de estados dos n subsistemas *fuzzy*
$\mathbf{w}$	Ruído de processo
$\mathbf{v}$	Ruído de medição
Q	Matriz de covariâncias do ruído de processo
R	Matriz de covariâncias do ruído de medição
P	Matriz de covariâncias do erro de estimação dos estados $\mathbf{x}$
B_w	Matriz da representação em espaço de estados do processo de quatro tanques
A_d, B_d, C_d	Equivalentes discretos das matrizes da representação em espaço de estados do processo de quatro tanques
$B_{w,d}$	Equivalente discreto da matriz B_w
$\mathbf{w}_d$	Equivalente discreto do ruído de processo
$\mathbf{v}_d$	Equivalente discreto do ruído de medição
Q_d, R_d	Equivalentes discretos das matrizes Q e R
$\hat{\mathbf{x}}_k$	Estimação do vetor de estados $\mathbf{x}$ do sistema para o instante de amostragem k
$\mathbf{x}_k^{pred}$	Predição inicial do vetor de estados $\mathbf{x}$ do sistema para o instante de amostragem k
P_k^{pred}	Predição inicial da matriz de covariâncias do erro de estimação dos estados x do sistema para o instante de amostragem k
K_k	Ganho de Kalman para o instante de amostragem k
I	Matriz identidade
P_∞	Matriz de covariâncias do erro de estimação dos estados x do sistema (regime permanente)
K_∞	Ganho de Kalman (regime permanente)
$f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	Função que descreve a dinâmica dos estados do sistema (filtro de Kalman estendido)
$m(\mathbf{x})$	Função de leitura dos estados do sistema (filtro de Kalman estendido)
$J(\hat{\mathbf{x}}_k)$	Matriz jacobiana da função $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, calculada para o ponto $\hat{\mathbf{x}}_k$ (filtro de Kalman estendido)
$\bar{A}$	Forma alternativa da matriz A_d (filtro de Kalman estendido)
$J(\hat{\mathbf{x}}_k)$	Matriz jacobiana da função $m(\mathbf{x})$, calculada para o ponto $\hat{\mathbf{x}}_k$ (filtro de Kalman estendido)

$\tilde{\mathbf{w}}$	Ruído de processo com covariância unitária (filtro de Kalman *fuzzy*)	
$\tilde{\mathbf{v}}$	Ruído de medição com covariância unitária (filtro de Kalman *fuzzy*)	
$\tilde{B_{w,n}}, \tilde{D_{w,n}}$	Equivalentes às matrizes $B_{w,n}$ e $D_{w,n}$ no cenário com ruídos com covariâncias unitárias (filtro de Kalman *fuzzy*)	
X, Z_n, G	Variáveis da desigualdade matricial linear (filtro de Kalman *fuzzy*)	
K_n	Ganho de Kalman local (filtro de Kalman *fuzzy*)	
K_{fuzzy}	Ganho de Kalman global (filtro de Kalman *fuzzy*)	

Símbolos Gregos

ρ	Densidade volumétrica do líquido no tanques	$[kg/m^3]$
κ_j	Ganho de tensão da bomba j	$[m^3/V]$
Γ_i	Percentual do fluxo gerado pelas bombas que será direcionado ao tanque i	[%]
γ_1	Abertura percentual da válvula intermediária 1	[%]
γ_2	Abertura percentual da válvula intermediária 2	[%]
Δ	Variação (diferença) entre duas variáveis	
μ_n	Peso da representação *defuzzificada* das regras SE-ENTÃO do n-ésimo subsistema *fuzzy*	
σ	Medições dos estados $\mathbf{x}$ do sistema (sem a inteferência de ruídos de medição)	
$C_{\sigma,n}$	Matriz de medição dos estados $\mathbf{x}$ do sistema (sem a inteferência de ruídos de medição)	

Grupos Adimensionais

i	Índice dos tanques
j	Índice das bombas
n	índice dos subsistemas *fuzzy*
k	Instante de amostragem

Subscritos

d	equivalente discreto
∞	regime permanente
esc	escoamento
in	entrada
out	saída
$filtro$	relativo ao filtro
$leitura$	relativo às leituras dos sensores de nível
$real$	relativo aos valores reais dos níveis dos tanques
$tabela$	referente à tabela

Sobrescritos

$\dot{}$	Variação temporal
$\hat{}$	Estimação
$pred$	Predição
$\tilde{}$	Relativo ao sistema equivalente com ruídos com covariâncias unitárias

Siglas

PROX.MAX	Próximo ao valor máximo
PROX.MIN	Próximo ao valor mínimo
KFRec	Filtro de Kalman discreto recursivo
KFRper	Filtro de Kalman contínuo (regime permanente)
EKF	Filtro de Kalman estendido
KFFuzzy	Filtro de Kalman Fuzzy
NF	Sem filtro

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

1.1.1 Estimação e filtros de Kalman

O desempenho de sistemas de controle depende da acurácia do modelo matemático e da obtenção de informações sobre a dinâmica do processo controlado e sobre as variáveis envolvidas. Contudo, como nenhum modelo matemático consegue envolver todas as dinâmicas envolvidas em um processo real, sempre haverá erros na modelagem de um sistema físico. Além disso, os elementos sensores, responsáveis por informar ao sistema de controle a situação das variáveis de interesse, possuem ruídos em sua medição. Deste modo, os valores transmitidos pelos sensores não são uma representação exata das variáveis medidas.

Estimação de estados é o processo de determinação das variáveis de um sistema a partir de suas entradas e saídas. Por vezes, os valores de determinados estados de um sistema, por não poderem ser lidos diretamente por sensores, precisam ser estimados [1]. Em outros cenários, faz-se necessário estimar os estados de um sistema devido à existência de ruídos nas leituras dos sensores.

Na literatura, podem ser encontrados métodos de estimação que procuram contornar os efeitos de ruídos e de erros de modelagem em um sistema. Entre estes métodos, incluem-se os filtros de Kalman. Proposto em 1960 por Rudolph Kalman [2], o filtro de Kalman fornece um método de estimar os estados (isto é, os valores das variáveis envolvidas) de um sistema linear, tomando como base a leitura dos estados, corrompida por ruídos gaussianos, e o modelo matemático do processo, que também sofre interferência de ruídos gaussianos.

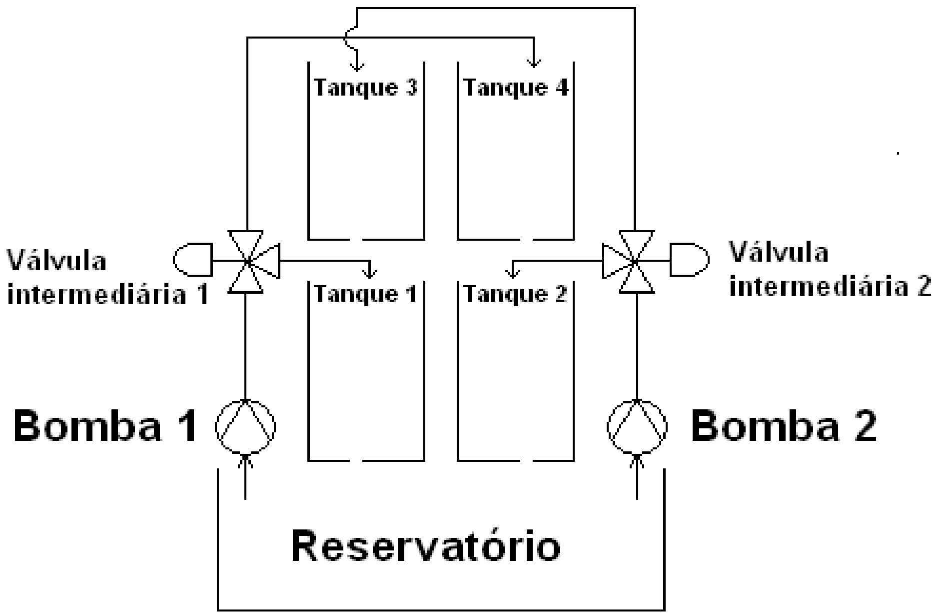
Baseados no método proposto por Kalman, outros estimadores de estados foram desenvolvidos, como o filtro de Kalman estendido, o filtro de Kalman *fuzzy* [3] e o filtro de Kalman *unscented* [4].

Diversos estudos sobre a aplicação dos filtros de Kalman em contextos de engenharia e sistemas de controle são realizadas. Em [5], é realizado um estudo da aplicação do filtro de Kalman para a estimação do nível de combustível do tanque de um caminhão. Em [6], compara-se o desempenho de diferentes filtros de Kalman na estimação de estados e parâmetros desconhecidos de um sistema de dois tanques de líquido. No estudo [7], os filtros de Kalman *Unscented* e estendido são utilizados na estimação do estado de carga de uma bateria selada.

1.1.2 Processo de quatro tanques

O processo de quatro tanques [8, 9] é utilizado como *benchmark* para o estudo de sistemas de controle [10, 11]. A figura (1.1) mostra um diagrama esquemático do processo.

Figura 1.1: Diagrama esquemático do processo de quatro tanques



Duas bombas retiram água do reservatório. O líquido proveniente da bomba 1 é transportado para os tanques 1 e 4, enquanto a bomba 2 bombeia líquido para os tanques 2 e 3. Aberturas na parte inferior dos tanques superiores 3 e 4 permitem a passagem de líquido para os tanques inferiores 1 e 2, respectivamente. De modo semelhante, aberturas no fundo dos tanques 1 e 2 permitem o retorno do líquido até o reservatório.

A proporção de líquido bombeado entre os tanques pode ser alterada com a modificação da abertura das válvulas intermediárias. Uma das características de destaque do processo está na possibilidade de alteração da fase - mínima ou não-mínima - do sistema a partir da manipulação das válvulas intermediárias [8].

Em [12], o filtro de Kalman é utilizado na estimação de estados de um processo baseado em uma modificação do sistema de quatro tanques de Johansson. No artigo [13], utiliza-se um estimador de janela móvel e uma variação do filtro de Kalman estendido na detecção de vazamentos no sistema de quatro tanques.

1.2 Objetivos

Este estudo visa realizar uma comparação do desempenho de diferentes filtros de Kalman na estimação de estados do processo não-linear de quatro tanques. Em ambiente computacional, quatro filtros serão simulados: o filtro de Kalman tradicional (em suas variações *recursiva* e *estacionária*), o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *fuzzy*.

O desempenho dos filtros será avaliado, em diversas faixas de operação, quanto à fidelidade da estimação e quanto à robustez em relação a modelagem dos ruídos. O primeiro critério diz respeito à comparação entre os valores estimados pelos filtros e os valores reais do sistema. Quanto melhor o filtro, mais próximos dos valores reais serão os valores estimados. O último critério se refere à qualidade de estimação dos filtros diante de informações incompletas sobre os ruídos. Tal critério é importante pois, por vezes, não há informações precisas sobre a natureza dos ruídos que perturbam um sistema dinâmico. Também será comparado o desempenho dos filtros quando o sistema opera em fase mínima e não-mínima.

1.3 Materiais utilizados

Os programas *MATLAB*®[14] e *Simulink*®[15] foram utilizados para a realização das simulações computacionais deste estudo. Os códigos dos testes estão gravados no CD anexo a este trabalho.

1.4 Organização do trabalho

No capítulo 2, realiza-se a modelagem matemática do processo, a partir das equações de balanço volumétrico dos tanques, assim como a linearização e a discretização do sistema. Em seguida, no capítulo 3, uma modelagem *fuzzy* do processo é realizada, baseando-se nos princípios de modelagem *fuzzy* descrita por Takagi e Sugeno [16, 17]. A descrição detalhada dos algoritmos dos filtros de Kalman utilizados é feita no capítulo 4. No capítulo 5, as simulações dos filtros, realizadas em ambiente computacional, são apresentadas e discutidas. A conclusão deste estudo é feita no capítulo 6, no qual são realizadas considerações finais sobre o trabalho e sugestões para a continuação dos estudos realizados.

Capítulo 2

Modelagem matemática do processo

Este capítulo apresenta o modelo matemático do processo de quatro tanques, assim como as equações e premissas utilizadas para sua obtenção [8, 9, 18]. Também são mostradas as etapas de obtenção dos modelos linearizado contínuo, linearizado discretizado e não-linear discretizado do processo.

2.1 Modelo não-linear

O desenvolvimento de um modelo matemático para o processo de quatro tanques se inicia a partir das equações de balanço volumétrico para os tanques:

$$\dot{V}_i = \frac{dV_i}{dt} = a_i \frac{dh_i}{dt} = f_{in,i} - f_{out,i} \tag{2.1}$$

O subíndice $i = 1, 2, 3, 4$ se refere à numeração dos tanques. V_i é o volume de líquido no tanque, a_i é a área do tanque, h_i é a altura do nível do volume de líquido, $f_{in,i}$ é o fluxo de entrada de líquido e $f_{out,i}$ é o fluxo de saída de líquido no tanque.

De acordo com a equação de Bernoulli para líquidos incompressíveis, é valida a seguinte relação para todos os pontos dos volumes de líquido nos tanques:

$$P_{liq} + \rho g h + \frac{\rho v_{esc}^2}{2} = constante \tag{2.2}$$

em que P_{liq} é a pressão, ρ é a densidade do líquido, g é a aceleração da gravidade e v_{esc} é a velocidade de escoamento do líquido.

Em cada tanque, no nível da superfície do volume de líquido, pode-se assumir que a velocidade de escoamento é igual a zero ($v_{esc} = 0$). A partir desta restrição e da equação (2.2), tem-se que:

$$\rho g h + P_{liq} = constante \tag{2.3}$$

De modo semelhante, no nível do fundo do volume de líquido em cada tanque ($h = 0$), a equação (2.2) torna-se:

$$P_{liq} + \frac{\rho v_{esc}^2}{2} = cte \tag{2.4}$$

Igualando as equações (2.3) e (2.4), é possível determinar a expressão que relaciona a velocidade de escoamento do líquido para cada nível:

$$\rho gh + P_{liq} = P_{liq} + \frac{\rho v_{esc}^2}{2} = cte$$
$$v_{esc}^2 = 2gh$$
$$v_{esc} = \sqrt{2gh} \tag{2.5}$$

Esta equação é válida partindo-se do pressuposto de que o escoamento do volume de líquido nos tanques é laminar.

A partir da equação (2.5), sendo o_i a área da saída de líquido em cada tanque, é possível calcular o fluxo de saída f_{out}:

$$f_{out,i} = o_i v_{esc,i} = o_i\sqrt{2gh_i} \tag{2.6}$$

O fluxo de entrada de líquido f_{in} nos tanques provém do bombeamento de líquido do reservatório. Neste modelo, é assumido que a vazão de saída das bombas 1 e 2 varia linearmente com a tensão nelas aplicada:

$$f_{bomba,j,i} = \kappa_j v_j \Gamma_i \tag{2.7}$$

Na equação acima, $f_{bomba,j,i}$ é o fluxo volumétrico de líquido que flui da bomba $j = 1,2$ para o tanque $i = 1,2,3,4$; v é a tensão aplicada na bomba e κ é o ganho de vazão da bomba. O coeficiente Γ indica o percentual do fluxo gerado pelas bombas que será direcionado para cada tanque, de acordo com as aberturas γ_1 e γ_2 das válvulas intermediárias. Os valores de Γ para cada tanque são mostrados na tabela (2.1).

Tabela 2.1: Aberturas percentuais das válvulas intermediárias

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
γ_1	γ_2	$(1-\gamma_2)$	$(1-\gamma_1)$

A partir do posicionamento espacial dos tanques, derivam-se as expressões para o fluxo de entrada em cada tanque:

$$\begin{aligned} f_{in,1} &= f_{out,3} + f_{bomba,1,1} \\ f_{in,2} &= f_{out,4} + f_{bomba,2,2} \\ f_{in,3} &= f_{bomba,2,3} \\ f_{in,2} &= f_{bomba,1,4} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Das equações (2.1), (2.6) e (2.7) e das relações mostradas em (2.8), derivam-se as equações que relacionam os níveis de líquido em cada tanque com as tensões de entrada aplicadas às bombas:

$$\dot{h_1} = \frac{1}{a_1}(f_{in,1} - f_{out,1})$$
$$\dot{h_1} = \frac{1}{a_1}(f_{out,3} + f_{bomba,1,1} - f_{out,1})$$
$$f_{out,3} = o_3\sqrt{2gh_3}$$
$$f_{bomba,1,1} = \gamma_1\kappa_1 v_1$$
$$f_{out,1} = o_1\sqrt{2gh_1}$$

$$\dot{h_1} = \frac{1}{a_1}(o_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1\kappa_1 v_1 - o_1\sqrt{2gh_1}) \tag{2.9}$$

$$\dot{h_2} = \frac{1}{a_2}(f_{in,2} - f_{out,2})$$
$$\dot{h_2} = \frac{1}{a_2}(f_{out,4} + f_{bomba,2,2} - f_{out,2})$$
$$f_{out,4} = o_4\sqrt{2gh_4}$$
$$f_{bomba,2,2} = \gamma_2\kappa_2 v_2$$
$$f_{out,2} = o_2\sqrt{2gh_2}$$

$$\dot{h_2} = \frac{1}{a_2}(o_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2\kappa_2 v_2 - o_2\sqrt{2gh_2}) \tag{2.10}$$

$$\dot{h_3} = \frac{1}{a_3}(f_{in,3} - f_{out,3})$$
$$\dot{h_3} = \frac{1}{a_3}(f_{bomba,2,3} - f_{out,3})$$
$$f_{bomba,2,3} = (1-\gamma_2)\kappa_2 v_2$$
$$f_{out,3} = o_3\sqrt{2gh_3}$$

$$\dot{h_3} = \frac{1}{a_3}((1-\gamma_2)\kappa_2 v_2 - o_3\sqrt{2gh_3}) \tag{2.11}$$

$$\dot{h_4} = \frac{1}{a_4}(f_{in,4} - f_{out,4})$$
$$\dot{h_4} = \frac{1}{a_4}(f_{bomba,1,4} - f_{out,4})$$
$$f_{bomba,1,4} = (1-\gamma_1)\kappa_1 v_1$$
$$f_{out,4} = o_4\sqrt{2gh_4}$$

$$\dot{h_4} = \frac{1}{a_4}((1-\gamma_1)\kappa_1 v_1 - o_4\sqrt{2gh_4}) \tag{2.12}$$

Agrupando as equações (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), obtêm-se, por fim, o modelo não-linear do processo de quatro tanques, mostrado no sistema (2.13):

$$\begin{cases} \dot{h_1} = \frac{1}{a_1}(o_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1\kappa_1 v_1 - o_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h_2} = \frac{1}{a_2}(o_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2\kappa_2 v_2 - o_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h_3} = \frac{1}{a_3}((1-\gamma_2)\kappa_2 v_2 - o_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h_4} = \frac{1}{a_4}((1-\gamma_1)\kappa_1 v_1 - o_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \tag{2.13}$$

O sistema (2.13) também pode ser representado na forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A(x)\mathbf{x} + B(x)\mathbf{u}$, em que $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{h_1}\ \dot{h_2}\ \dot{h_3}\ \dot{h_4}]^T$, $\mathbf{x} = [h_1\ h_2\ h_3\ h_4]^T$, $\mathbf{u} = [v_1\ v_2]^T$ e as matrizes A e B são dadas pelas seguintes equações:

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{-o_1\sqrt{2gh_1}}{a_1h_1} & 0 & \frac{o_3\sqrt{2gh_3}}{a_1h_3} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2\sqrt{2gh_2}}{a_2h_2} & 0 & \frac{o_4\sqrt{2gh_4}}{a_2h_4} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3\sqrt{2gh_3}}{a_3h_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4\sqrt{2gh_4}}{a_4h_4} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1\kappa_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2\kappa_2}{a_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)\kappa_2}{a_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)\kappa_1}{a_4} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

A seguinte notação será adotada:

$$\dot{h_1} = f_1(h_1, h_3, v_1)$$
$$\dot{h_2} = f_2(h_2, h_4, v_2)$$
$$\dot{h_3} = f_3(h_3, v_2)$$
$$\dot{h_4} = f_4(h_4, v_1)$$

em que $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ são funções dos níveis dos tanques e das tensões aplicadas às bombas.

2.2 Modelo linearizado

A linearização de um sistema não-linear se dá pela aproximação das dinâmicas não-lineares do sistema por equivalentes lineares, válidas para uma determinada faixa de operação. A obtenção do modelo linearizado do processo de quatro tanques mostrado no sistema (2.13) - mais especificamente, da representação em espaço de estados do processo de quatro tanques - faz-se necessária, neste estudo, para a implementação dos filtros de Kalman estacionário contínuo e recursivo discreto, descritos no capítulo 4.

No modelo linearizado do sistema de quatro tanques, em vez de se relacionar diretamente os níveis $\mathbf{h} = [h_1\ h_2\ h_3\ h_4]^T$ dos tanques às tensões $\mathbf{v} = [v_1\ v_2]^T$ aplicadas às bombas, relaciona-se a *variação* $\Delta\mathbf{h}$ dos níveis dos tanques, relativa a um determinado nível $\overline{\mathbf{h}}$, à *variação* $\Delta\mathbf{v}$ das tensões aplicadas às bombas, em relação a uma determinada tensão $\overline{\mathbf{v}}$.

$$\Delta\mathbf{h} = \mathbf{h} - \overline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} h_1 - \overline{h_1} \\ h_2 - \overline{h_2} \\ h_3 - \overline{h_3} \\ h_4 - \overline{h_4} \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 - \overline{v_1} \\ v_2 - \overline{v_2} \end{bmatrix}$$

Os termos $\overline{\mathbf{h}}$ e $\overline{\mathbf{v}}$ também são denominados *pontos de linearização*. Neste estudo, os níveis e tensões iniciais (isto é, relativos ao instante inicial $t = 0$) foram tomados como pontos de linearização do sistema. Nos testes realizados, para os níveis e tensões iniciais, assume-se que o sistema funciona em *regime estacionário* - isto é, nos níveis e tensões iniciais, os estados do sistema não variam com o tempo:

$$\left.\frac{d\mathbf{h}}{dt}\right|_{\mathbf{h}=\overline{\mathbf{h}},\mathbf{v}=\overline{\mathbf{v}}} = f(\overline{\mathbf{h}}, \overline{\mathbf{v}}) = 0$$

Assim, o modelo linearizado do processo de quatro tanques possui a seguinte forma:

$$\Delta\dot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{h}_1 \\ \Delta\dot{h}_2 \\ \Delta\dot{h}_3 \\ \Delta\dot{h}_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

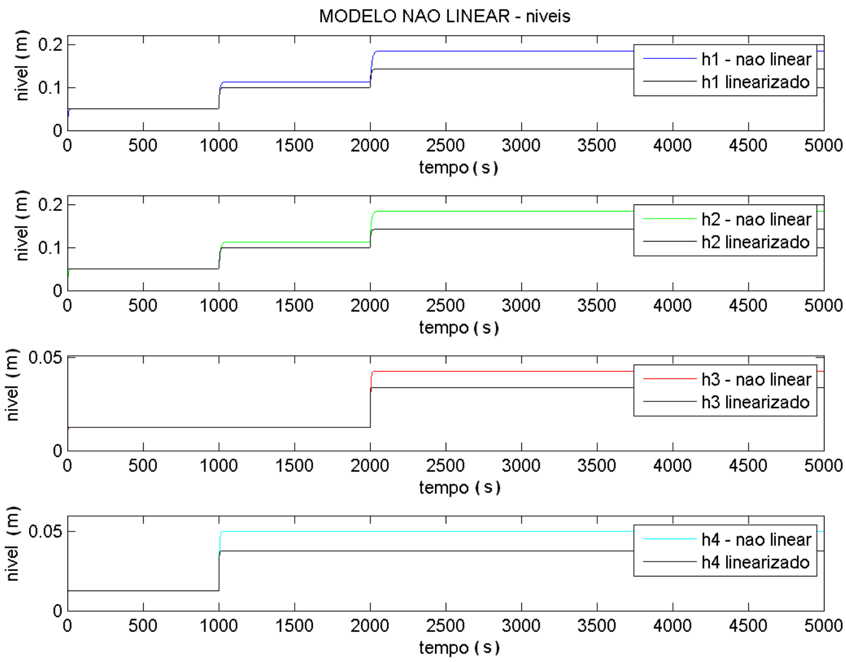
em que $A_{[4\times4]}$ e $B_{[4\times2]}$ são matrizes jacobianas, mostradas nas equações (2.17) e (2.18):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-o_1\sqrt{2g}}{2a_1\sqrt{\overline{h_1}}} & 0 & \frac{o_3\sqrt{2g}}{2a_1\sqrt{\overline{h_3}}} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2\sqrt{2g}}{2a_2\sqrt{\overline{h_2}}} & 0 & \frac{o_4\sqrt{2g}}{2a_2\sqrt{\overline{h_4}}} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3\sqrt{2g}}{2a_3\sqrt{\overline{h_3}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4\sqrt{2g}}{2a_4\sqrt{\overline{h_4}}} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1\kappa_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2\kappa_2}{a_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)\kappa_2}{a_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)\kappa_1}{a_4} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

A representação do processo de quatro tanques pelo modelo linearizado é válida para faixas de operação próximas aos pontos de linearização escolhidos. Entretanto, para valores mais afastados dos pontos de linearização, o modelo linearizado apresenta erros de aproximação em relação ao sistema não-linear. Na figura (2.1), que mostra uma comparação entre os modelos não-linear e linearizado, pode-se observar a ocorrência destes erros.

Figura 2.1: Comparação entre os modelos linear e não-linear do processo de quatro tanques



2.3 Modelo linearizado discretizado

O sistema linear (2.16), contínuo, pode ser representado de forma discreta, para um tempo de amostragem Ts constante, da seguinte forma [19]:

$$\dot{\Delta \mathbf{h}} = A_d \Delta \mathbf{h} + B_d \Delta \mathbf{v} \tag{2.19}$$

em que A_d e B_d, os equivalentes discretos das matrizes A e B, respectivamente, são dados por:

$$A_d = e^{ATs} \tag{2.20}$$

$$B_d = B \int_0^{Ts} e^{As} ds \tag{2.21}$$

Nas simulações computacionais, o procedimento de discretização do sistema linearizado foi realizado por meio da função *c2d*(), própria do *MATLAB*®, utilizando-se o método do segurador de ordem zero (em inglês, *zero-order hold*) [20].

2.4 Modelo não-linear discretizado

É possível obter uma aproximação discreta do sistema não-linear (2.13) por meio do método de Euler para resolução de equações diferenciais [21]. Esta aproximação será utilizada no filtro de Kalman estendido, descrito no capítulo 4.

Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dt} = g(y, t)$$

com condição incial $y(t_0) = t_0$ conhecida.

Pelo método de Euler, para um determinado valor Δt, o valor de $y(t_0 + \Delta t)$ é aproximado pela expressão

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + g(y(t_0), t_0)\Delta t$$

Sendo Δt constante, a função y é aproximada por

$$y_{k+1} = y_k + g(y_k, t_k)\Delta t, \quad k \geq 0$$

em que $y_k = y(t_0 + k\Delta t)$ e $t_k = t_0 + k\Delta t$.

Assim, a representação não-linear discreta do sistema (2.13), dado um determinado tempo de amostragem Ts e sendo conhecidos os valores iniciais dos níveis dos tanques, é dada a seguir:

$$\begin{cases} h_{1,k+1} = \frac{Ts}{a_1}(o_3\sqrt{2gh_{3,k}} + \gamma_1\kappa_1 v_{1,k} - o_1\sqrt{2gh_{1,k}}) + h_{1,k} \\ h_{2,k+1} = \frac{Ts}{a_2}(o_4\sqrt{2gh_{4,k}} + \gamma_2\kappa_2 v_{2,k} - o_2\sqrt{2gh_{2,k}}) + h_{2,k} \\ h_{3,k+1} = \frac{Ts}{a_3}((1-\gamma_2)\kappa_2 v_{2,k} - o_3\sqrt{2gh_{3,k}}) + h_{3,k} \\ h_{4,k+1} = \frac{Ts}{a_3}((1-\gamma_1)\kappa_1 v_{1,k} - o_4\sqrt{2gh_{4,k}}) + h_{4,k} \end{cases} , \quad k \geq 0 \tag{2.22}$$

em que $h_{i,k}$ é o nível do tanque $i = 1, 2, 3, 4$ no instante de tempo kTs e $v_{j,k}$ é a tensão da bomba $j = 1, 2$ no mesmo instante.

O modelo do processo discretizado pelo método de Euler será utilizado no algoritmo do filtro de Kalman estendido, descrito no capítulo 4.

Capítulo 3

Modelagem Fuzzy do processo

Esta seção apresenta o desenvolvimento de um modelo nebuloso (*fuzzy*, em inglês) do processo de quatro tanques. A lógica *fuzzy* é utilizada para modelar sistemas cujas variáveis e características são definidas de modo ambíguo ou vago [22]. Em [23], é utilizada a seguinte definição para conjuntos *fuzzy*:

> "Um conjunto *fuzzy* **A** em **X** é caracterizado por uma função de pertinência $f_A(x)$ que associa, a cada ponto em **X**, um número real no intervalo $[0, 1]$, sendo o valor de $f_A(x)$ a representação do 'grau de pertencimento' de x em A."

Pode-se utilizar a lógica difusa para criar modelos *fuzzy* que aproximam a dinâmica de sistemas lineares e não-lineares [16, 17]. Este princípio será aqui utilizado na obtenção de um modelo *fuzzy* do processo de quatro tanques, partindo-se das equações não-lineares que regem o comportamento do sistema.

3.1 Modelagem fuzzy do processo

Considere a representação matricial do modelo não-linear do processo de quatro tanques:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x})\mathbf{x} + B(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\mathbf{x} = [h_1\ h_2\ h_3\ h_4]^T$ é o vetor de estados do sistema, correspondente aos níveis dos tanques, $\mathbf{u} = [v_1\ v_2]^T$ é o vetor de entradas do sistemas, correspondente às tensões aplicadas às bombas, $\mathbf{y}$ é o vetor de leituras dos sensores de nível dos tanques e as matrizes $A(x)$, $B(x)$ (equações (2.17) e (2.18)) e C são mostradas abaixo:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{-o_1\sqrt{2gh_1}}{a_1h_1} & 0 & \frac{o_3\sqrt{2gh_3}}{a_1h_3} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2\sqrt{2gh_2}}{a_2h_2} & 0 & \frac{o_4\sqrt{2gh_4}}{a_2h_4} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3\sqrt{2gh_3}}{a_3h_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4\sqrt{2gh_4}}{a_4h_4} \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 \kappa_1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 \kappa_2}{a_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)\kappa_2}{a_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)\kappa_1}{a_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denomina-se *modelagem fuzzy por não-linearidade setorial local* a técnica de obtenção de um modelo *fuzzy* para um sistema não-linear a partir da divisão do sistema em setores locais, seguida do cálculo de modelos lineares que aproximam o sistema em cada setor e, por fim, da ponderação dos subsistemas calculados por meio de regras *fuzzy*. A vantagem deste procedimento está na representação exata do sistema não-linear dentro dos intervalos de valores definidos para as variáveis premissas [17]. Em contrapartida, tal método exige a divisão do sistema em número elevado de vértices em comparação com outras técnicas, como o aproximador universal [24].

A modelagem *fuzzy* por não-linearidade setorial local inicia-se com a identificação dos termos não-lineares. No sistema (3.1), há quatro termos não-lineares: $z_1 = \frac{\sqrt{h_1}}{h_1}$, $z_2 = \frac{\sqrt{h_2}}{h_2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{h_3}}{h_3}$ e $z_4 = \frac{\sqrt{h_4}}{h_4}$. Os termos z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, denominam-se variáveis premissas do sistema.

Utilizando a notação das variáveis premissas, a matriz $A(x)$ pode ser reescrita do seguinte modo:

$$A(z) = \begin{bmatrix} \frac{-o_1 z_1 \sqrt{2g}}{a_1} & 0 & \frac{o_3 z_3 \sqrt{2g}}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2 z_2 \sqrt{2g}}{a_2} & 0 & \frac{o_4 z_4 \sqrt{2g}}{a_2} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3 z_3 \sqrt{2g}}{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4 z_4 \sqrt{2g}}{a_4} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

3.1.1 Funções de pertinência

Após a escolha das variáveis premissas z_i, determinam-se as funções de pertinência do sistema. O papel das funções de pertinência será ilustrado mais adiante. A cada variável premissa z_i serão associadas duas funções de pertinência, $M_{i1}(z_i)$ e $M_{i2}(z_i)$. Definindo $\underline{z_i} = \min z_i$ e $\overline{z_i} = \max z_i$,

$$M_{i1} = \frac{z_i - \underline{z_i}}{\overline{z_i} - \underline{z_i}} \quad M_{i2} = \frac{\overline{z_i} - zi}{\overline{z_i} - \underline{z_i}} \tag{3.3}$$

É valida a seguinte propriedade:

$$M_{i1}(z_i) + M_{i2}(z_i) = 1, \ \forall z_i \in [\underline{z_i}, \overline{z_i}]$$

Os valores máximos e mínimos dos níveis de líquido em cada tanque, são, respectivamente, 23 *cm* e 0 *cm*. Para evitar indeterminações no cálculo das variáveis premissas, será utilizado o valor de 0.1 *cm* para o nível mínimo dos tanques.

$$\begin{array}{llll} \underline{z_1} = \dfrac{\sqrt{0.23}}{0.23} = 2.085 & \overline{z_1} = \dfrac{\sqrt{0.001}}{0.001} = 31.622 & \underline{z_2} = \dfrac{\sqrt{0.23}}{0.23} = 2.085 & \overline{z_2} = \dfrac{\sqrt{0.001}}{0.001} = 31.622 \\ \underline{z_3} = \dfrac{\sqrt{0.23}}{0.23} = 2.085 & \overline{z_3} = \dfrac{\sqrt{0.001}}{0.001} = 31.622 & \underline{z_4} = \dfrac{\sqrt{0.23}}{0.23} = 2.085 & \overline{z_4} = \dfrac{\sqrt{0.001}}{0.001} = 31.622 \end{array} \tag{3.4}$$

A partir dos valores mostrados em (3.4), as funções de pertinência mostradas em (3.3) são calculadas:

$$\begin{array}{ll} M_{11}(z_1) = \dfrac{z_1 - 2.085}{31.622 - 2.085} & M_{12}(z_1) = \dfrac{31.622 - z1}{31.622 - 2.085} \\ M_{21}(z_2) = \dfrac{z_2 - 2.085}{31.622 - 2.085} & M_{22}(z_2) = \dfrac{31.622 - z2}{31.622 - 2.085} \\ M_{31}(z_3) = \dfrac{z_3 - 2.085}{31.622 - 2.085} & M_{32}(z_3) = \dfrac{31.622 - z3}{31.622 - 2.085} \\ M_{41}(z_4) = \dfrac{z_4 - 2.085}{31.622 - 2.085} & M_{42}(z_4) = \dfrac{31.622 - z4}{31.622 - 2.085} \end{array} \tag{3.5}$$

É importante ressaltar que, para alguns testes deste estudo, será assumido o nível máximo 60 cm para cada tanque. Nestes casos, as equações mostradas em (3.4) e (3.5) serão devidamente alteradas.

Para ilustrar a atuação das funções de pertinência na modelagem *fuzzy*, considere que as variáveis premissas z_i possuem duas *"características"*: proximidade ao valor máximo $\overline{z_i}$ (**PROX.MAX**) e proximidade ao valor mínimo $\underline{z_i}$ (**PROX.MIN**). Como é comum em sistemas *fuzzy*, as características das variáveis premissas não são mutuamente excludentes: a variável premissa pode estar, simultaneamente e com proporções diferentes, próximo ao valor máximo e próximo ao valor mínimo.

A função de pertinência $M_{i1}(z_i)$ indica o quão próximo do valor máximo $\overline{z_i}$ a variável z_i se encontra. A função $M_{i2}(z_i)$, por sua vez, indica o quão próximo do valor mínimo $\underline{z_i}$ a variável z_i se encontra. Pode-se dizer, então, que as funções de pertinência indicam os graus de **PROX.MAX** e **PROX.MIN** de cada variável premissa.

Quando os valores de z_i estão mais próximos do valor máximo, $M_{i1}(z_i) > 0.5$.

$$z_i > \underline{z_i} + \frac{\overline{z_i} - \underline{z_i}}{2} \;\Rightarrow\; M_{i1}(z_i) > 0.5$$

Neste contexto, o grau de **PROX.MAX** de z_i é maior do que seu grau de **PROX.MIN**.

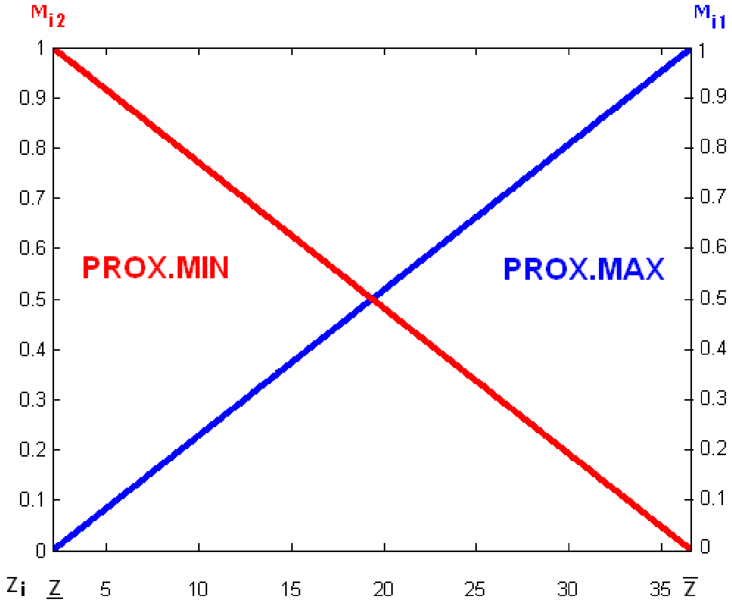
De modo semelhante, quando os valores de z_i estão mais próximos do valor mínimo, $M_{i2}(z_i) > 0.5$.

$$z_i < \underline{z_i} + \frac{\overline{z_i} - \underline{z_i}}{2} \;\Rightarrow\; M_{i2}(z_i) > 0.5$$

Neste contexto, o grau de **PROX.MIN** de z_i é maior do que seu grau de **PROX.MAX**.

A figura (3.1) mostra a relação entre as variáveis premissas, as funções de pertinência e as características **PROX.MAX** e **PROX.MIN**.

Figura 3.1: Funções de pertinência M_{i1} e M_{i2} em função das variáveis premissas z_i



3.1.2 Subsistemas fuzzy

Por existirem 4 variáveis premissas, o sistema não-linear (3.1) será aproximado por $2^4 = 16$ subsistemas *fuzzy*. Cada subsistema linear terá a seguinte forma:

SUBSISTEMA n

SE z_1 é $M_{1,m}$ **E** ... **E** z_4 é $M_{4,m}$, $\quad m = 1, 2$

$$\textbf{ENTÃO} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_n \mathbf{x} + B_n \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C_n \mathbf{x} \end{cases} \tag{3.6}$$

As matrizes A_n serão representadas da seguinte forma:

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{-o_1 z_1 \sqrt{2g}}{a_1} & 0 & \frac{o_3 z_3 \sqrt{2g}}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{-o_2 z_2 \sqrt{2g}}{a_2} & 0 & \frac{o_4 z_4 \sqrt{2g}}{a_2} \\ 0 & 0 & \frac{-o_3 z_3 \sqrt{2g}}{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-o_4 z_4 \sqrt{2g}}{a_4} \end{bmatrix}$$

Os dezesseis subsistemas são formados pela substituição dos termos z_1, z_2, z_3 e z_4 pelos termos $\underline{z_i}$ e $\overline{z_i}$, conforme mostra a tabela (3.1). As matrizes $B_n = B$ e $C_n = C$, por não possuírem termos não-lineares, serão as mesmas para todos os subsistemas.

Tabela 3.1: Subsistemas da representação fuzzy

	substitua z_1 por	substitua z_2 por	substitua z_3 por	substitua z_4 por
$\dot{x} = A_1x + B_1u$	$\underline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_2x + B_2u$	$\underline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_3x + B_3u$	$\underline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_4x + B_4u$	$\underline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_5x + B_5u$	$\underline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_6x + B_6u$	$\underline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_7x + B_7u$	$\underline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_8x + B_8u$	$\underline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_9x + B_9u$	$\overline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_{10}x + B_{10}u$	$\overline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_{11}x + B_{11}u$	$\overline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_{12}x + B_{12}u$	$\overline{z_1}$	$\underline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_{13}x + B_{13}u$	$\overline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_{14}x + B_{14}u$	$\overline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\underline{z_3}$	$\overline{z_4}$
$\dot{x} = A_{15}x + B_{15}u$	$\overline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\underline{z_4}$
$\dot{x} = A_{16}x + B_{16}u$	$\overline{z_1}$	$\overline{z_2}$	$\overline{z_3}$	$\overline{z_4}$

Utilizando os subsistemas mostrados na tabela (3.1) em conjunto com a estrutura mostrada no sistema (3.6), constrói-se o conjunto de regras *fuzzy* SE-ENTÃO que descrevem o comportamento global do sistema, conforme mostra a tabela (3.2). O comportamento de regras *fuzzy* SE-ENTÃO é descrito em [25]. Observa-se que cada regra *fuzzy* utiliza os valores das funções de pertinência, que indicam os graus de **PROX.MAX** e **PROX.MIN** das variáveis premissas.

Tabela 3.2: Subsistemas e regras fuzzy

SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_1x + B_1u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_2x + B_2u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_3x + B_3u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_4x + B_4u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_5x + B_5u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_6x + B_6u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_7x + B_7u$
SE z_1 é PROX.MIN E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_8x + B_8u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_9x + B_9u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_{10}x + B_{10}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_{11}x + B_{11}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MIN E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_{12}x + B_{12}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_{13}x + B_{13}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MIN E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_{14}x + B_{14}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MIN então $\dot{x} = A_{15}x + B_{15}u$
SE z_1 é PROX.MAX E z_2 é PROX.MAX E z_3 é PROX.MAX E z_4 é PROX.MAX então $\dot{x} = A_{16}x + B_{16}u$

3.1.3 Modelo final

Os subsistemas mostrados na tabela (3.2) podem ser agrupados em um sistema global:

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{16} \mu_n(z)(A_nx + B_nu) \tag{3.7}$$

A equação (3.7) é a representação *defuzzificada* das regras SE-ENTÃO mostradas em (3.2).

Métodos de *defuzzificação* são descritos com mais detalhes em [17, 25]. Os pesos $\mu_n(z)$, que realizam a ponderação entre os dezesseis subsistemas *fuzzy*, são calculados da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mu_1(z) &= M_{12}(z_1)M_{22}(z_2)M_{32}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_2(z) &= M_{12}(z_1)M_{22}(z_2)M_{32}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_3(z) &= M_{12}(z_1)M_{22}(z_2)M_{31}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_4(z) &= M_{12}(z_1)M_{22}(z_2)M_{31}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_5(z) &= M_{12}(z_1)M_{21}(z_2)M_{32}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_6(z) &= M_{12}(z_1)M_{21}(z_2)M_{32}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_7(z) &= M_{12}(z_1)M_{21}(z_2)M_{31}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_8(z) &= M_{12}(z_1)M_{21}(z_2)M_{31}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_9(z) &= M_{11}(z_1)M_{22}(z_2)M_{32}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_{10}(z) &= M_{11}(z_1)M_{22}(z_2)M_{32}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_{11}(z) &= M_{11}(z_1)M_{22}(z_2)M_{31}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_{21}(z) &= M_{11}(z_1)M_{22}(z_2)M_{31}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_{31}(z) &= M_{11}(z_1)M_{21}(z_2)M_{32}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_{41}(z) &= M_{11}(z_1)M_{21}(z_2)M_{32}(z_3)M_{41}(z_4)\\
\mu_{15}(z) &= M_{11}(z_1)M_{21}(z_2)M_{31}(z_3)M_{42}(z_4)\\
\mu_{16}(z) &= M_{11}(z_1)M_{21}(z_2)M_{31}(z_3)M_{41}(z_4)
\end{aligned}
$$

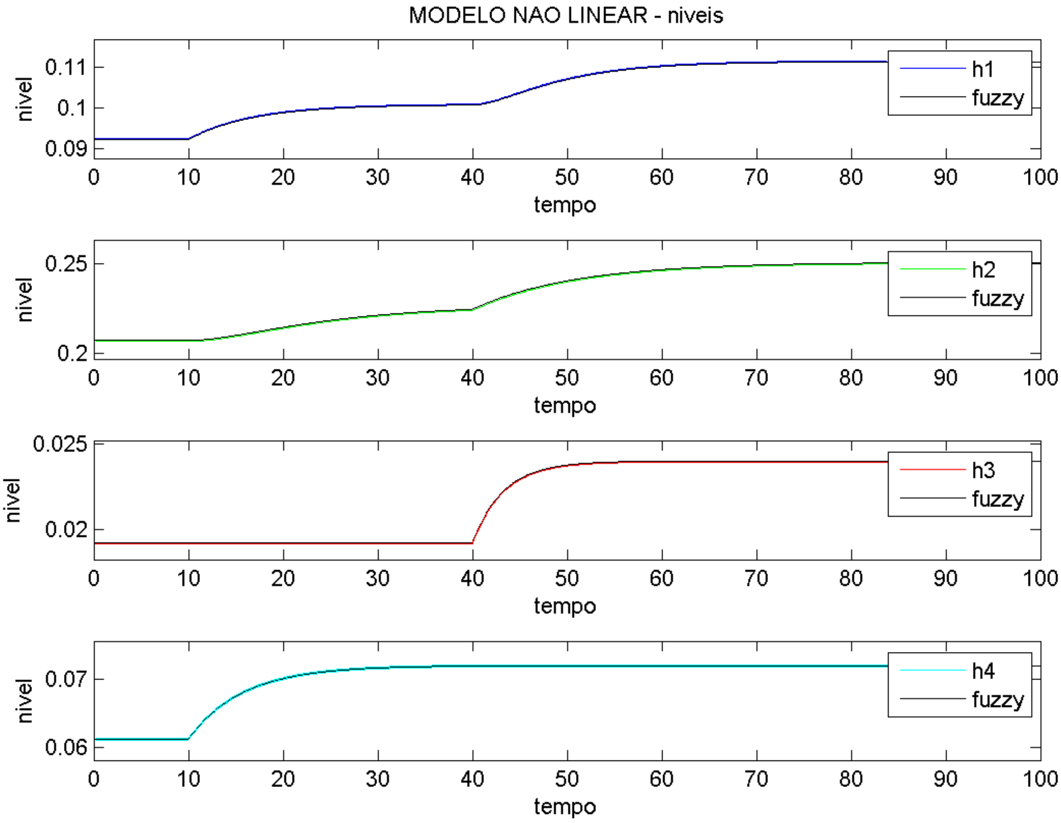
A soma das dezesseis variáveis $\mu_n(z)$ é igual a um.

$$\sum_{n=1}^{16} \mu_n(z) = 1 \tag{3.8}$$

3.2 Comparação entre os modelos não-linear e fuzzy

A figura (3.2) mostra as respostas dos modelos não-linear (2.13) e *fuzzy* (3.7) ao mesmo degrau de entrada. Pode-se observar que a modelagem *fuzzy* do processo de quatro tanques é exata em relação à dinâmica do modelo não-linear.

Figura 3.2: Comparação entre o sistema não-linear contínuo e o sistema fuzzy



Capítulo 4

Descrição dos Filtros de Kalman

A seguir, serão apresentadas as descrições matemáticas dos filtros de Kalman em estudo, a saber, o filtro de Kalman-Bucy (estacionário ou de regime permanente), o filtro de Kalman recursivo, o filtro de Kalman estendido e o filtro de Kalman *fuzzy*.

O filtro de Kalman é um método matemático utilizado na estimação de estados de processos lineares [2]. Pode-se provar que, entre os estimadores lineares, a estimação de estados realizada pelo filtro de Kalman possui o menor erro quadrático médio de estimação.

Uma das implementações do filtro de Kalman pressupõe que o sistema a ser estimado é linear e assume a existência de ruídos de processo e de medição gaussianos, conforme mostra o sistema (4.1). O *ruído de processo* é o termo dado às dinâmicas do sistema não previstas em seu modelo matemático. Define-se *ruído de medição* como perturbações nos elementos sensores do sistema que alteram suas leituras.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + B_w\mathbf{w} \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \mathbf{v} \end{cases} \tag{4.1}$$

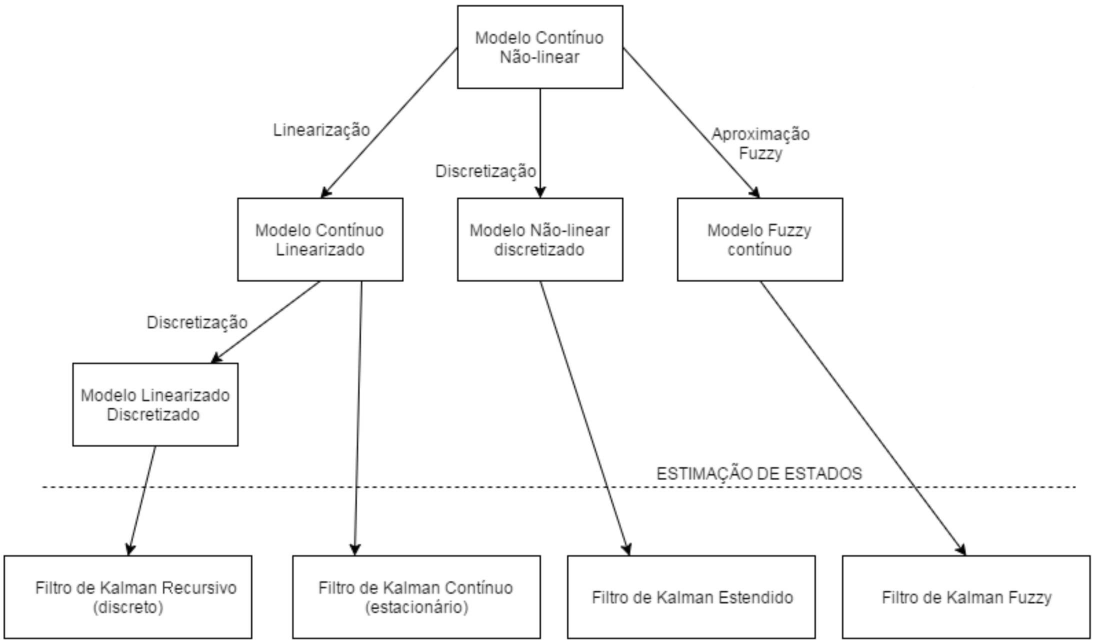
Os termos $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ referem-se, respectivamente, aos ruídos de processo e ruídos de medição, ambos gaussianos, cujas covariâncias são dadas pelas matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$. Neste estudo, à matriz B_w, que relaciona o ruído de processo ao estado $\dot{x}$, será atribuída o valor da matriz identidade. A matriz $\mathbf{P}$ representa a matriz de covariâncias do erro de estimação dos estados.

Em linhas gerais, o filtro de Kalman realiza uma ponderação entre os valores lidos pelos sensores e os valores calculados pela dinâmica do processo. Esta ponderação é realizada por uma matriz de ganhos denominada *ganho de Kalman*. Quanto maior o ruído de medição em relação ao ruído de processo, os estados estimados estarão mais próximos aos valores previstos pelo modelo matemático do processo. Em contrapartida, quanto menor o ruído de medição em relação ao ruído de processo - isto é, quanto mais confiáveis são as leituras de estados do sistema - os valores estimados se aproximarão mais dos valores lidos pelos sensores [26].

A utilização de filtros de Kalman não se restringe a sistemas lineares, sendo possível, por exemplo, utilizar o filtro de Kalman estendido para a estimação de estados de sistemas não-lineares perturbados por ruídos gaussianos de processo e de medição.

A figura (4.1) mostra um diagrama esquemático contendo os filtros de Kalman a serem estudados. Os filtros estão separados de acordo com a natureza do sistema (linear, não-linear, fuzzy, contínuo, discreto) relacionado a cada algoritmo [27].

Figura 4.1: Filtros de Kalman em estudo - Diagrama esquemático



No filtro de Kalman contínuo estacionário (ou filtro de Kalman de regime permanente), um único ganho de Kalman é calculado *a priori*, isto é, antes da execução do processo, sem realizar medições dos estados. No filtro de Kalman recursivo discreto e no filtro de Kalman estendido discreto, por sua vez, para cada leitura dos sensores (i.e. a cada período de amostragem), uma matriz de ganhos é calculada.

O filtro de Kalman *fuzzy* contínuo, utilizando a representação *fuzzy* do sistema, calcula uma matriz de ganhos para cada subsistema *fuzzy* por meio da resolução de desigualdades matriciais lineares. A ponderação destas matrizes de ganhos a partir das funções de pertinência *fuzzy* do sistema resulta em um ganho de Kalman global, utilizada na estimação dos estados do sistema [3, 28].

4.1 Filtro de Kalman tradicional

4.1.1 Filtro de Kalman recursivo

O filtro de Kalman recursivo se baseia no sistema (4.2), que corresponde ao modelo discretizado do sistema (4.1). É assumido que as leituras dos estados do sistema são realizadas a cada intervalo de amostragem Ts.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A_d\mathbf{x}_k + B_d\mathbf{u}_k + B_{w,d}\mathbf{w}_d \\ \mathbf{y}_k = C_d\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_d \end{cases} \tag{4.2}$$

No sistema (4.2), as matrizes A_d, B_d, C_d e $B_{w,d}$ são as versões discretas das matrizes A, B, C e B_w do sistema (4.1). Métodos de discretização de sistemas lineares são descritos em [29]. Neste estudo, a discretização das matrizes foi realizada por meio da função *c2d*(), própria do *MATLAB*®, utilizando o método do segurador de ordem zero [20]. À matriz $B_{w,d}$, que relaciona o ruído de processo às equações do sistema, atribuiu-se o valor da matriz identidade.

Assume-se que o sistema é perturbado por ruídos de processo $\mathbf{w}$ e de medição $\mathbf{v}$, ambos gaussianos, com covariâncias Q e R, respectivamente. Faz-se necessário o cálculo dos equivalentes discretos $\mathbf{w}_d$ e $\mathbf{v}_d$ dos ruídos, com covariâncias Q_d e R_d, respectivamente. A correção das matrizes é feita conforme mostram as equações (4.3) e (4.4) [19].

$$Q_d = \int_0^{Ts} e^{A\tau} Q e^{A^T\tau} d\tau \tag{4.3}$$

$$R_d = \frac{R}{Ts} \tag{4.4}$$

Pode-se calcular a integral da equação (4.3) pelas sequintes expressões [30]:

$$S = \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ 0 & A \end{bmatrix} Ts \tag{4.5}$$

$$\exp(S) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$Q_d = G_{22}^T G_{12} \tag{4.7}$$

O filtro de Kalman recursivo inicia-se pela etapa de predição dos estados. Nesta etapa, os estados do instante posterior, $k+1$, são calculados a partir das matrizes A e B, que descrevem a dinâmica do processo, e a partir dos estados e entradas do sistema no instante atual, k.

$$\mathbf{x}_k^{pred} = A_d \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + B_d \mathbf{u}_k \tag{4.8}$$

Em seguida, a predição da matriz de covariâncias do erro de estimação para o instante k, P_k^{pred}, é calculada.

$$P_k^{pred} = A_d P_{k-1} A_d^T + Q_d \tag{4.9}$$

Neste estudo, o valor inicial dos estados $\mathbf{x}$ corresponde aos valores iniciais dos níveis dos tanques. Além disso, atribuiu-se ao valor inicial da matriz P a matriz identidade. Para os filtros de Kalman recursivo e estendido, o valor inicial desta matriz corresponde às covariâncias dos estados iniciais do sistema [26].

Após a etapa de predição, executa-se a etapa de correção, onde é realizada uma ponderação dos estados preditos na etapa anterior com os valores lidos pelos sensores. Esta ponderação é realizada pela matriz do ganho de Kalman, calculado da seguinte forma:

$$K_k = P_k^{pred} C_d^T (C_d P_k^{pred} C_d^T + R_d)^{-1} \tag{4.10}$$

Em seguida, a estimação dos estados do sistema é realizada:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^{pred} + K_k(\mathbf{y}_k - C_d\mathbf{x}_k^{pred}) \tag{4.11}$$

Por fim, a matriz de covariâncias do erro de estimação também é corrigida:

$$P_k = (I - K_kC_d)P_k^{pred} \tag{4.12}$$

4.1.2 Filtro de Kalman-Bucy

A seguir, será descrito o filtro de Kalman-Bucy, também referido como filtro de Kalman de regime permanente ou filtro de Kalman estacionário. Considere o sistema (4.1). A matriz P de covariâncias do erro de estimação apresenta a seguinte dinâmica temporal [26]:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + Q - P(t)C^TR^{-1}CP(t) \tag{4.13}$$

No limite, quando $t \to \infty$, a matriz P converge para uma determinada matriz P_∞:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{P}(t) = 0 \tag{4.14}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_\infty \tag{4.15}$$

Aplicando as equações (4.14) e (4.15) na equação (4.13), obtêm-se a seguinte equação algébrica de Riccati:

$$AP_\infty + P_\infty A^T - P_\infty C^TR^{-1}CP_\infty + Q = 0 \tag{4.16}$$

A matriz P_∞ pode ser utilizada para o cálculo do ganho de Kalman estacionário:

$$K_\infty = P_\infty C^TR^{-1} \tag{4.17}$$

O ganho de Kalman estacionário K_∞ é utilizado para a estimação contínua dos estados do sistema (4.1), conforme mostrado a seguir:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + K_\infty(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}) \tag{4.18}$$

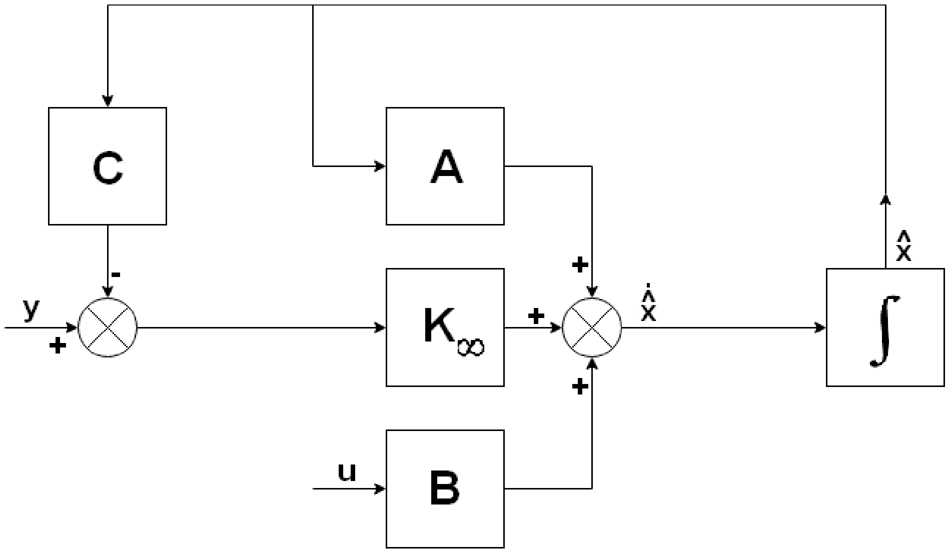
A figura (4.2) mostra um diagrama de blocos que representa o estimador de estados descrito pela equação (4.18).

Nas simulações computacionais desde estudo, a matriz K_∞ foi obtida a partir da utilização da função $kalman()$, própria do $MATLAB$®[31].

4.2 Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman estendido, diferentemente dos filtros de Kalman estacionário contínuo e recursivo discreto, se baseia no modelo não-linear do processo para realizar a estimação de estados.

Figura 4.2: Estimador de estados - Filtro de Kalman estacionário



No contexto deste estudo, considere que a dinâmica do processo de quatro tanques seja descrita pela função não-linear f($\mathbf{x}$,$\mathbf{u}$) mostrada no sistema (4.19):

$$f(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f(\mathbf{h},\mathbf{v}) \begin{cases} \dot{h_1} = \frac{1}{a_1}(o_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1\kappa_1 v_1 - o_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h_2} = \frac{1}{a_2}(o_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2\kappa_2 v_2 - o_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h_3} = \frac{1}{a_3}((1-\gamma_2)\kappa_2 v_2 - o_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h_4} = \frac{1}{a_4}((1-\gamma_1)\kappa_1 v_1 - o_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \tag{4.19}$$

Como nos filtros anteriores, é assumido que o sistema é perturbado por ruídos de processo $\mathbf{w}$ e de medição $\mathbf{v}$, ambos gaussianos, com covariâncias Q e R, respectivamente. Os equivalentes discretos $\mathbf{w}_d$ e $\mathbf{v}_d$ dos ruídos, com covariâncias Q_d e R_d, também podem ser calculadas pelas equações (4.3) e (4.4).

O modelo discretizado das equações não-lineares do sistema de quatro tanques (4.19), obtido a partir do método de discretização de Euler, é mostrado a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_d \\ \mathbf{y}_{k+1} = m(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_d \end{cases} \tag{4.20}$$

Sendo $\mathbf{x}$ o vetor de níveis dos tanques e $\mathbf{u}$ o vetor de tensões nas bombas, a função $f_d(\mathbf{x},\mathbf{u})$, que descreve a dinâmica do sistema para um tempo de amostragem Ts, é dada por:

$$f_d(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_d(\mathbf{h},\mathbf{v}) = \begin{cases} h_{1,k+1} = \frac{Ts}{a_1}(o_3\sqrt{2gh_{3,k}} + \gamma_1\kappa_1 v_{1,k} - o_1\sqrt{2gh_{1,k}}) + h_{1,k} \\ h_{2,k+1} = \frac{Ts}{a_2}(o_4\sqrt{2gh_{4,k}} + \gamma_2\kappa_2 v_{2,k} - o_2\sqrt{2gh_{2,k}}) + h_{2,k} \\ h_{3,k+1} = \frac{Ts}{a_3}((1-\gamma_2)\kappa_2 v_{2,k} - o_3\sqrt{2gh_{3,k}}) + h_{3,k} \\ h_{4,k+1} = \frac{Ts}{a_3}((1-\gamma_1)\kappa_1 v_{1,k} - o_4\sqrt{2gh_{4,k}}) + h_{4,k} \end{cases} \tag{4.21}$$

O vetor $\mathbf{y}$ corresponde às leituras dos estados do sistema, realizadas pela função $m(\mathbf{x})$ e perturbadas pelo ruído de medição. Nas simulações computacionais deste estudo, duas funções de leituras de estados serão utilizadas: nos testes em que todas as leituras dos níveis dos tanques estão disponíveis, $m(\mathbf{x}) = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$; nos cenários em que somente as leituras dos níveis inferiores estão disponíveis, $m(\mathbf{x}) = [x_1\ x_2\ 0\ 0]^T$.

O algoritmo do filtro de Kalman estendido opera de modo análogo ao filtro de Kalman recursivo, com uma etapa de predição e uma etapa de correção. A etapa de predição inicia com uma estimativa inicial dos estados $\mathbf{x}_k^{pred}$do sistema a partir dos estados $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ do instante anterior, $k-1$, e das entradas $\mathbf{u}_k$ do sistema.

$$\mathbf{x}_k^{pred} = f_d(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \tag{4.22}$$

Em seguida, é realizada estimativa da matriz de covariâncias do erro de estimação, P_k^{pred}.

$$P_k^{pred} = (I + TsJ(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))P_{k-1}(I + TsJ(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T + Q_d \tag{4.23}$$

em que P_{k-1} é a matriz de covariâncias do erro de estimação relativa ao instante anterior, $k-1$ e $J(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ é a matriz jacobiana da função $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ do sistema (4.19), calculada para o ponto $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$.

$$J(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \tag{4.24}$$

No contexto do processo de quatro tanques em estudo, a matriz jacobiana da função (4.21) é dada a seguir:

$$J(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \frac{o_1\sqrt{2g}}{2a_1\sqrt{\hat{x}_{1,k-1}}} & 0 & \frac{-o_3\sqrt{2g}}{2a_1\sqrt{\hat{x}_{3,k-1}}} & 0 \\ 0 & \frac{o_2\sqrt{2g}}{2a_2\sqrt{\hat{x}_{2,k-1}}}) & 0 & \frac{-o_4\sqrt{2g}}{2a_2\sqrt{\hat{x}_{4,k-1}}} \\ 0 & 0 & \frac{o_3\sqrt{2g}}{2a_3\sqrt{\hat{x}_{3,k-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{o_4\sqrt{2g}}{2a_4\sqrt{\hat{x}_{4,k-1}}} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Alternativamente, matriz P pode ser calculada da seguinte maneira [27]:

$$P_k^{pred} = \bar{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})P_{k-1}\bar{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T + Q_d \tag{4.26}$$

em que a matriz $\bar{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ é dada por

$$\bar{A}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = e^{TsJ(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})} \tag{4.27}$$

O primeiro método de predição da matriz P_k^{pred}, mostrado na equação (4.23), é utilizado, neste estudo, nas simulações em que as leituras dos níveis dos quatro tanques estão disponíveis. Nas simulações em que somente os níveis dos tanques inferiores, 1 e 2, são fornecidas aos sensores, a matriz P_k^{pred} é obtida conforme mostrado na equação (4.26).

Na segunda etapa do filtro de Kalman estendido, realiza-se uma correção dos valores obtidos na etapa de predição. Para isto, calcula-se a matriz K_k, denominada ganho de Kalman:

$$K_k = P_k^{pred}H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T(H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})P_k^{pred}H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T + R_d)^{-1} \tag{4.28}$$

A matriz $H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ é a matriz jacobiana da função $m(\mathbf{x})$, calculada no ponto $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$.

$$H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \frac{\partial m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \tag{4.29}$$

Nas simulações computacionais desde estudo, foram utilizadas duas alternativas para a matriz $H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$: para as situações onde as leituras dos níveis dos quatro tanques estão disponíveis, a matriz $H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ equivale à matriz identidade. Nas situações onde apenas as leituras dos níveis dos tanques inferiores estão disponíveis, a matriz $H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ é dada por:

$$H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

A partir do ganho de Kalman, são corrigidas as estimações dos estados do sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^{pred} + K_k \left(y_k - H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{x}_k^{pred} \right) \tag{4.31}$$

Por fim, corrige-se a matriz de covariâncias do erro de estimação:

$$P_k = (I - K_k H(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))P_k^{pred} \tag{4.32}$$

4.3 Filtro de Kalman Fuzzy

O filtro de Kalman *fuzzy* implementado neste estudo baseia-se na representação *fuzzy* do sistema (3.1), com o acréscimo de ruídos gaussianos de medição ($\mathbf{w}$) e de processo ($\mathbf{v}$):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^{16} \mu_n (A_n \mathbf{x} + B_n \mathbf{u} + B_{w,n} \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{16} \mu_n (C_n \mathbf{x} + D_{w,n} \mathbf{v}) \end{cases} \tag{4.33}$$

Os termos μ_n, $i = 1...16$, são os pesos *fuzzy* do sistema, que realizam a ponderação dos dezesseis subsistemas *fuzzy* por meio das funções de pertinência e das variáveis premissas.

Neste estudo, as matrizes $B_{w,n}$ e $D_{w,n}$, relacionadas, respectivamente, aos ruídos de processo e de medição, são iguais à matriz identidade.

Considere que o sistema (4.33) é formado por dezesseis subsistemas *fuzzy*, mostrados a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_n \mathbf{x} + B_n \mathbf{u} + B_{w,n} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} = C_n \mathbf{x} + D_{w,n} \mathbf{v} & \qquad n = 1...16 \\ \sigma = C_{\sigma,n} \mathbf{x} \end{cases} \tag{4.34}$$

O vetor σ representa as medições dos estados $\mathbf{x}$ sem ruídos de medição. A matriz C_σ, neste estudo, equivale à matriz identidade.

A partir das transformações

$$
\begin{aligned}
\tilde{B_{w,n}} &= [B_{w,n}Q^{1/2} \;\; 0] \\
\tilde{D_{w,n}} &= [0 \;\; D_{w,n}R^{1/2}] \\
\tilde{\mathbf{w}}^T &= [\hat{\mathbf{w}} \; \hat{\mathbf{v}}]^T \\
\hat{\mathbf{w}} &= Q^{-1/2} \\
\hat{\mathbf{v}} &= R^{-1/2}
\end{aligned}
$$

pode-se modificar o sistema (4.34) para se obter um sistema perturbado por ruídos gaussianos de covariâncias unitária [32]:

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}} = A_n\mathbf{x} + B_n\mathbf{u} + \tilde{B_{w,n}}\tilde{\mathbf{w}} \\
y = C_n\mathbf{x} + \tilde{D_{w,n}}\tilde{\mathbf{w}} \\
\sigma_n = C_{\sigma,n}\mathbf{x}
\end{cases}
\tag{4.35}
$$

Considere, então, o seguinte problema de otimização [33]:

$$
\begin{aligned}
&\min Tr(X) \\
&\begin{bmatrix} X & \tilde{B_{w,n}}^T G - \tilde{D_{w,n}}^T Z_n^T \\ G\tilde{B_{w,n}} - Z_n\tilde{D_{w,n}} & G \end{bmatrix} > 0 \\
&A_n^T G + GA_n - C_n^T Z_n^T - Z_n C_n + C_{\sigma,n}^T C_{\sigma,n} < 0
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Caso existam matrizes X, $G = G^T > 0$ e $Z_n, i = 1...16$ que satisfaçam as desigualdades matriciais lineares (4.36), pode-se determinar, para cada um dos 16 subsistemas *fuzzy*, um ganho de um filtro de Kalman, a partir da relação (4.37):

$$
K_n = G^{-1}Z_n \tag{4.37}
$$

O filtro de Kalman global, referente a todo o sistema, pode ser obtido a partir da ponderação dos ganhos locais com a função de pertinência do sistema Fuzzy Takagi-Sugeno:

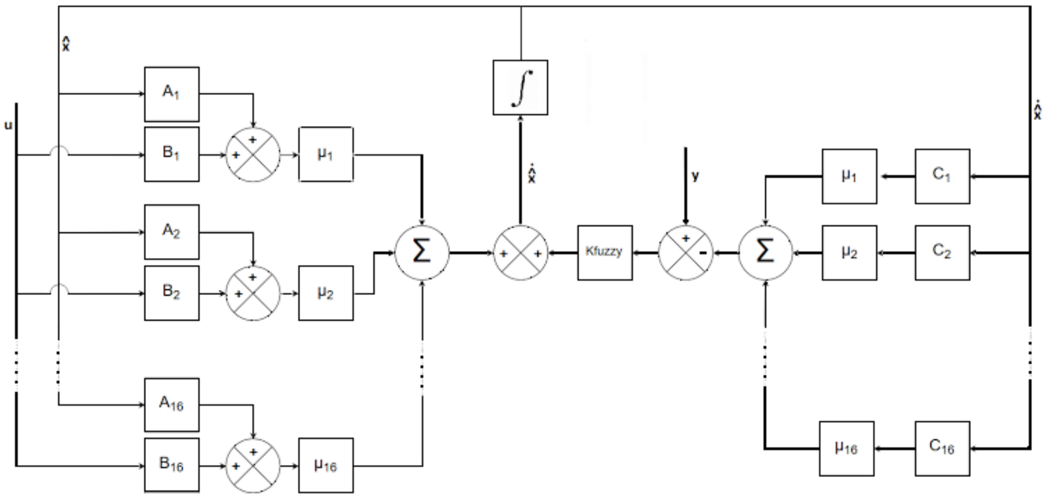
$$
K_{fuzzy} = \sum_{n=1}^{16} \mu_n K_n \tag{4.38}
$$

A estimação dos estados é realizada aplicando-se o ganho de Kalman na seguinte equação:

$$
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{n=1}^{16} \mu_n(A_n\hat{\mathbf{x}}(t) + B_n\mathbf{u}(t)) + K_{fuzzy}\left(\mathbf{y}(t) - \sum_{n=1}^{16} \mu_n C_n \hat{\mathbf{x}(t)}\right) \tag{4.39}
$$

A figura (4.3) mostra o diagrama de blocos do estimador descrito na equação (4.39).

Figura 4.3: Diagrama de Blocos - Filtro de Kalman Fuzzy



O filtro de Kalman *fuzzy* garante, para cada subsistema, as mesmas propriedades estocásticas (*unbiased*) e de otimalidade (mínima variância) do filtro de Kalman convencional, em contextos em que as variáveis premissas não dependem das leituras dos estados do sistema. Esta otimalidade nem sempre se estende ao sistema global não-linear [28]. Contudo, conforme mostrado no capítulo 5, as simulações computacionais apresentaram um bom desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* para os casos em estudo, em que as variáveis premissas z_i dependem dos estados h_i do sistema. Isto é explicado pelo fato de ser o modelo *fuzzy* uma descrição exata da dinâmica não-linear do sistema [17].

Em relação ao filtro de Kalman estendido, o filtro de Kalman *fuzzy* apresenta a vantagem de não exigir o cálculo em tempo real de uma matriz jacobiana [34].

Nas simulações computacionais do filtro de Kalman *fuzzy*, as desigualdades matriciais lineares foram solucionadas com o auxílio da biblioteca *YALMIP*[35], utilizada no *MATLAB*®.

Faz-se necessária, para o cálculo do ganho do filtro de Kalman K_{fuzzy}, a leitura das variáveis premissas z_i, que dependem, neste caso, de todos os estados do sistema. Dessa forma, nos testes em que são utilizadas apenas as leituras dos sensores de nível dos tanques inferiores, o procedimento para a implementação do filtro de Kalman *fuzzy* torna-se inviável, por serem necessários os valores das variáveis premissas relativas a todos os tanques. Neste contexto, para a determinação das variáveis premissas z_3 e z_4, foram utilizados os valores *estimados* dos níveis dos tanques superiores pelo filtro de Kalman *fuzzy* em vez das leituras dos sensores de nível.

Capítulo 5

Simulações computacionais

São apresentados, neste capítulo, as descrições e os resultados das simulações computacionais da aplicação dos filtros de Kalman descritos nas seções anteriores na estimação de estados do processo de quatro tanques.

5.1 Descrição dos testes

Ao todo, 24 cenários foram simulados realizados em ambiente computacional. Em cada teste, simulou-se a aplicação de entradas do tipo degrau nas bombas, a leitura dos sensores de nível e a estimação dos níveis dos tanques pelos filtros de Kalman estacionário, recursivo, estendido e *fuzzy*.

Variaram-se, entre os ensaios, as aberturas das válvulas intermediárias, γ_1 e γ_2, as amplitudes dos degraus de entrada nas bombas e as matrizes de covariância dos ruídos de processo Q e de medição R fornecidas aos filtros. Nos testes de 1 a 7, assumiu-se a presença de um sensor de nível em cada tanque. Para os ensaios de 8 a 14, por sua vez, simulou-se a estimação dos níveis dos tanques para o cenário em apenas os tanques inferiores, 1 e 2, possuem sensores de nível. As tabelas (5.1) e (5.2) apresentam, respectivamente, os parâmetros quantitativos e qualitativos dos testes 1 a 14.

Tabela 5.1: Parâmetros quantitativos dos testes de 1 a 14

Testes	γ_1	γ_2	Bomba 1 (v_1)	Bomba 2 (v_2)	Q fornecido ao filtro	R fornecido ao filtro
1 e 8	0.7577	0.7363	de 1.8792V a 2.0298V	de 1.6573V a 1.7717V	Q	R
2 e 9	0.1446	0.1330	de 1.8792V a 2.0298V	de 1.6573V a 1.7717V	Q	R
3 e 10	0.1446	0.1330	de 1.8792V a 2.0298V	de 1.6573V a 1.7717V	Q_*	R_*
4 e 11	0.1446	0.1330	de 2.0298V a 1.8792V	de 1.7717V a 1.5970V	Q	R
5 e 12	0.1446	0.1330	de 2.0298V a 1.8792V	de 1.7717V a 1.5970V	Q_*	R_*
6 e 13	0.1446	0.1330	de 0.8858V a 3.1941V	de 1.1719V a 3.2849V	Q	R
7 e 14	0.1446	0.1330	de 0.8858V a 3.1941V	de 1.1719V a 3.2849V	Q_*	R_*

Tabela 5.2: Parâmetros qualitativos dos testes de 1 a 14

Testes	Fase do sistema	Degrau	Região de operação	Covariâncias Q e R fornecidas ao filtro
1 e 8	Mínima	Subida	Próximo ao ponto de linearização	Iguais às reais
2 e 9	Não-mínima	Subida	Próximo ao ponto de linearização	Iguais às reais
3 e 10	Não-mínima	Subida	Próximo ao ponto de linearização	Diferentes das reais
4 e 11	Não-mínima	Descida	Próximo ao ponto de linearização	Iguais às reais
5 e 12	Não-mínima	Descida	Próximo ao ponto de linearização	Diferentes das reais
6 e 13	Não-mínima	Subida	Afastado do ponto de linearização	Iguais às reais
7 e 14	Não-mínima	Subida	Afastado do ponto de linearização	Diferentes das reais
1 a 7	Utilização de todos os sensores			
8 a 14	Utilização apenas dos sensores dos tanques inferiores			

Uma comparação entre os ensaios 1 e 2 permite analisar o desempenho dos filtros de Kalman para diferentes fases do sistema, mínima e não-mínima. No teste 1, os valores das aberturas γ_1 e γ_2 das válvulas intermediárias foram ajustados para que o sistema opere em fase mínima. Para os ensaios de 2 a 7, por sua vez, tais valores foram escolhidos para que o sistema opere em fase não-mínima - isto é, com a existência, em sua função de transferência, de zeros no semiplano direito [18]. Optou-se pela realização de menos testes na fase mínima para que os valores dos níveis dos tanques superiores não fossem muito baixos.

Nos ensaios de 1 a 3 e de 8 a 10, degraus de subida foram aplicados ao sistema. Para verificar o desempenho de estimação ao variar-se o tipo de entrada, degraus de descida foram aplicados nos testes 4, 5, 11 e 12.

Para os filtros de Kalman estacionário e recursivo, os níveis iniciais dos tanques e as tensões iniciais das bombas foram tomados como pontos de linearização do sistema. Nos testes de 1 a 5 e de 8 a 12, foram aplicados degraus de baixa amplitude, de modo a não afastar o sistema do ponto de linearização. Para verificar o desempenho da estimação dos filtros para contextos em que o sistema opera em valores afastados do ponto de linearização, degraus de maiores amplitudes foram aplicados nos ensaios 6, 7, 13 e 14.

Para os testes de 8 a 14, simulou-se a estimação dos níveis dos tanques para o cenário em que apenas as leituras dos níveis dos tanques inferiores estão disponíveis. Neste contexto, a matriz/função equivalente de leitura dos estados) dos sistemas (4.1), (4.2), (4.20) e (4.35) desconsidera os níveis $h3$ e $h4$. Os parâmetros dos ensaios de 8 a 14, com exceção da matriz $\mathbf{C}$, são análogos aos parâmetros dos testes de 1 a 7, conforme mostrado na tabela (5.1).

Valores precisos das matrizes de covariâncias dos ruídos de processo ($\mathbf{Q}$) e de medição ($\mathbf{R}$) nem sempre estão disponíveis na etapa de projeto dos filtros de Kalman. Para verificar a robustez dos filtros em relação a imprecisões nos valores das covariâncias dos ruídos, foram fornecidas aos filtros, nos testes 3, 5, 7, 10, 12 e 14, matrizes de covariâncias $\mathbf{Q}*$ e $\mathbf{R}*$ diferentes das covariâncias reais dos ruídos de processo e de medição.

$$Q = 5 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.9355 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9355 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9355 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9355 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$R = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.615 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.615 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.615 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.615 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$$Q_* = \frac{Q}{2} \tag{5.3}$$

$$R_* = \frac{R}{2} \tag{5.4}$$

Também foi avaliado o desempenho das estimações para mais matrizes de covariâncias Q_{filtro} e R_{filtro} fornecidas aos filtros, conforme mostra a tabela (5.3). Para tais cenários, os parâmetros de entradas nas bombas e de aberturas das válvulas intermediárias foram iguais aos utilizados nos testes 2 e 9.

Tabela 5.3: Parâmetros dos testes de robustez dos filtros

Teste	$\mathbf{Q}_{filtro}$	$\mathbf{R}_{filtro}$
r-eq (testes 2 e 9)	Q	R
r1 (testes 3 e 10)	0.5Q	0.5R
r2	0.05Q	0.05R
r3	0.005Q	0.005R
r4	10Q	10R
r5	50Q	50R
r6	100Q	100R

Os testes mostrados na tabela (5.3) foram aplicados em dois cenários: no primeiro cenário, todos os sensores de nível foram utilizados. No segundo cenário, apenas as leituras dos níveis dos tanques inferiores foram fornecidos aos filtros.

5.2 Resultados

5.2.1 Comparação entre os filtros

As figuras que mostram as respostas temporais dos filtros estão presentes na seção de anexos.

Para cada teste, calculou-se o erro de estimação $\mathbf{E}_{filtro}$, dado pela diferença entre os níveis reais $\mathbf{h}_{real}$ (i.e. sem ruído) e os níveis $\hat{\mathbf{h}}$ estimados pelos filtros.

$$\mathbf{E}_{filtro} = \mathbf{h}_{real} - \hat{\mathbf{h}} \tag{5.5}$$

O desempenho dos filtros nos testes foi determinado por meio de dois indicadores quantitativos. O primeiro indicador, integral do quadrado do erro (ISE), é calculado conforme mostra a equação (5.6):

$$ISE_{filtro} = \int (\mathbf{E}_{filtro})^2 dt \tag{5.6}$$

O segundo indicador utilizado é a integral do módulo do erro, assim calculado:

$$IME_{filtro} = \int (|\mathbf{E}_{filtro}|) dt \tag{5.7}$$

As tabelas (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7) mostram os indicadores IME e ISE dos ensaios 1 a 14. As siglas *KFRper*, *KFRec*, *EKF* e *KFFuzzy* referem-se, respectivamente, aos filtros de Kalman estacionário, recursivo, estendido e *fuzzy*. A sigla *NF* refere-se aos indicadores relativos ao erro de leitura dos sensores:

$$\mathbf{E}_{leitura} = \mathbf{h}_{real} - \mathbf{h}_{leitura} \tag{5.8}$$

O cálculo da integral do quadrado do erro de leitura é dado por:

$$ISE_{leitura} = \int (\mathbf{E}_{leitura})^2 dt \tag{5.9}$$

Semelhantemente, calcula-se a integral do módulo do erro de leitura do seguinte modo:

$$IME_{leitura} = \int (|\mathbf{E}_{leitura}|) dt \tag{5.10}$$

Nas tabelas, os valores das referentes aos filtros mostram a relação percentual entre os indicadores de estimação, IME_{filtro} e ISE_{filtro}, e os indicadores de desempenho da leitura dos sensores, $IME_{leitura}$ e $ISE_{leitura}$, conforme mostram as equações a seguir:

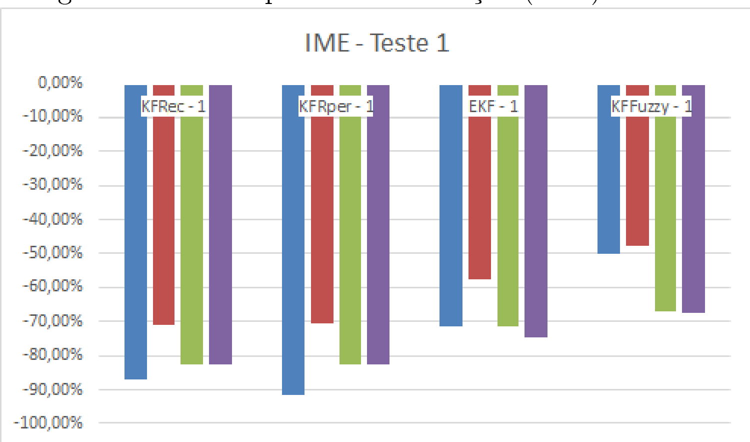
$$NF_{IME} = IME_{leitura} \qquad IME_{filtro,tabela} = \frac{IME_{filtro}}{NF_{IME}} - 1$$

$$NF_{ISE} = ISE_{leitura} \qquad ISE_{filtro,tabela} = \frac{ISE_{filtro}}{NF_{ISE}} - 1$$

Deste modo, valores percentuais *negativos* dos indicadores dos filtros apontam que os erros de estimação foram menores do que os erros de leitura dos sensores. Por outro lado, valores percentuais *positivos* indicam que o erro dos estados estimados pelos filtros é maior do que o erro das leituras dos sensores.

No contexto do teste 1, em que o sistema operou em fase mínima, os filtros de Kalman recursivo e de regime permanente apresentaram o melhor desempenho para ambos os indicadores.

Figura 5.1: Desempenho de estimação (IME) - Teste 1



Para o ensaio 2, com a mudança na abertura das válvulas intermediárias, o sistema passou a operar em fase não-mínima. Neste contexto, os filtros de Kalman recursivo e de regime permanente também obtiveram o melhor desempenho de estimação. No ensaio 3, em que as covariâncias dos ruídos fornecidas ao algoritmo, Q_* e R_*, diferem das covariâncias reais dos ruídos, o desempenho dos filtros foi semelhante ao apresentado no teste 2.

Tabela 5.4: Desempenho dos filtros - Testes 1 a 7 - Integral do Módulo do Erro (IME)

Teste	**%H1**	**%H2**	**%H3**	**%H4**
RFRec - 1	-87,30%	-70,88%	-82,55%	-82,68%
KFRper - 1	-91,63%	-70,37%	-82,75%	-82,58%
EKF - 1	-71,56%	-57,58%	-71,34%	-74,42%
KFFuzzy - 1	-49,93%	-47,96%	-66,96%	-67,44%
NF - 1	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 2	-89,76%	-72,75%	-77,99%	-78,64%
KFRper - 2	-95,25%	-72,39%	-77,91%	-78,48%
EKF - 2	-78,50%	-60,92%	-68,86%	-75,11%
KFFuzzy - 2	-69,15%	-61,98%	-75,72%	-75,94%
NF - 2	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 3	-89,76%	-72,75%	-77,99%	-78,64%
KFRper - 3	-95,25%	-72,39%	-77,91%	-78,48%
EKF - 3	-78,50%	-60,92%	-68,86%	-75,11%
KFFuzzy - 3	-68,22%	-61,38%	-75,42%	-75,67%
NF - 3	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 4	-89,86%	-72,81%	-77,88%	-78,75%
KFRper - 4	-95,60%	-72,45%	-77,79%	-78,58%
EKF - 4	-78,54%	-61,31%	-68,96%	-75,14%
KFFuzzy - 4	-69,25%	-62,09%	-75,76%	-76,17%
NF - 4	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 5	-89,86%	-72,81%	-77,88%	-78,75%
KFRper - 5	-95,60%	-72,45%	-77,79%	-78,58%
EKF - 5	-78,54%	-61,31%	-68,96%	-75,14%
KFFuzzy - 5	-68,35%	-61,53%	-75,48%	-75,91%
NF - 5	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 6	40,05%	119,67%	309,33%	634,92%
KFRper - 6	14,92%	48,10%	156,28%	539,53%
EKF - 6	-77,26%	-58,26%	-67,58%	-74,92%
KFFuzzy - 6	-72,39%	-63,65%	-75,75%	-75,54%
NF - 6	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 7	11,25%	42,10%	147,74%	519,17%
KFRper - 7	14,92%	48,10%	156,28%	539,53%
EKF - 7	-77,26%	-58,26%	-67,58%	-74,92%
KFFuzzy - 7	-70,88%	-62,82%	-75,53%	-75,22%
NF - 7	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**

Tabela 5.5: Desempenho dos filtros - Testes 1 a 7 - Integral do Quadrado do Erro (ISE)

Teste	**%H1**	**%H2**	**%H3**	**%H4**
RFRec - 1	-98,38%	-91,39%	-96,91%	-96,97%
KFRper - 1	-99,30%	-91,05%	-96,95%	-96,91%
EKF - 1	-91,89%	-81,88%	-91,67%	-93,58%
KFFuzzy - 1	-75,89%	-72,96%	-89,92%	-90,35%
NF - 1	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 2	-98,94%	-92,53%	-95,08%	-95,44%
KFRper - 2	-99,77%	-92,30%	-95,00%	-95,32%
EKF - 2	-95,38%	-84,66%	-90,19%	-93,86%
KFFuzzy - 2	-90,55%	-85,33%	-93,91%	-94,08%
NF - 2	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 3	-98,94%	-92,53%	-95,08%	-95,44%
KFRper - 3	-99,77%	-92,30%	-95,00%	-95,32%
EKF - 3	-95,38%	-84,66%	-90,19%	-93,86%
KFFuzzy - 3	-89,98%	-84,87%	-93,77%	-93,95%
NF - 3	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 4	-98,97%	-92,55%	-95,03%	-95,49%
KFRper - 4	-99,80%	-92,32%	-94,96%	-95,37%
EKF - 4	-95,42%	-84,98%	-90,28%	-93,88%
KFFuzzy - 4	-90,64%	-85,42%	-93,95%	-94,20%
NF - 4	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 5	-98,97%	-92,55%	-95,03%	-95,49%
KFRper - 5	-99,80%	-92,32%	-94,96%	-95,37%
EKF - 5	-95,42%	-84,98%	-90,28%	-93,88%
KFFuzzy - 5	-90,09%	-85,00%	-93,81%	-94,07%
NF - 5	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 6	147,87%	397,17%	2020,31%	3880,69%
KFRper - 6	70,00%	114,68%	714,06%	2916,15%
EKF - 6	-94,78%	-82,27%	-89,02%	-93,73%
KFFuzzy - 6	-92,35%	-86,48%	-93,86%	-93,86%
NF - 6	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 7	55,88%	95,47%	658,03%	2725,68%
KFRper - 7	70,00%	114,68%	714,06%	2916,15%
EKF - 7	-94,78%	-82,27%	-89,02%	-93,73%
KFFuzzy - 7	-91,49%	-85,87%	-93,74%	-93,69%
NF - 7	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**

Figura 5.2: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 2

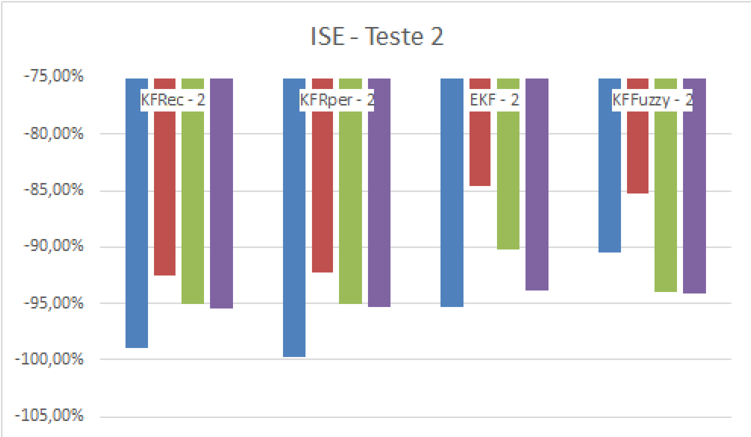
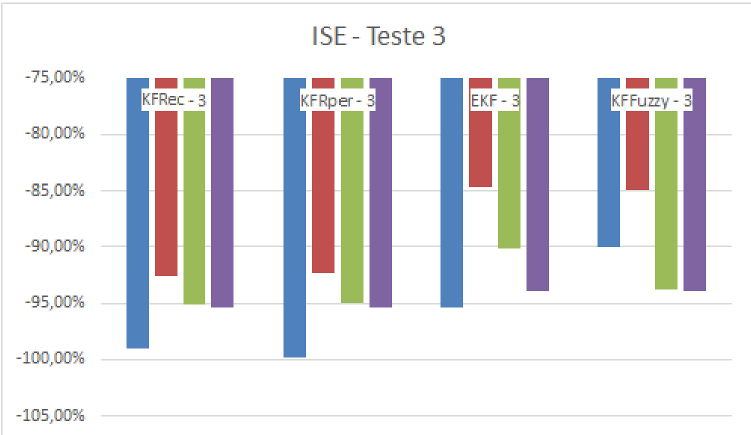


Figura 5.3: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 3



A aplicação de degraus de descida nas entradas das bombas, nos testes 4 e 5, não afetou significativamente o desempenho dos filtros. Para tais ensaios, os filtros de Kalman estacionário e recursivo apresentaram desempenhos de estimação melhores do que os filtros de Kalman estendido e *fuzzy*. Ademais, para teste 5, a diferença entre os valores das covariâncias reais dos ruídos e os valores fornecidos aos filtros não alterou significativamente o desempenho de estimação dos filtros em comparação com o teste 4, conforme mostram as figuras (5.4) e (5.5).

Figura 5.4: Desempenho de estimação (IME) - Teste 4

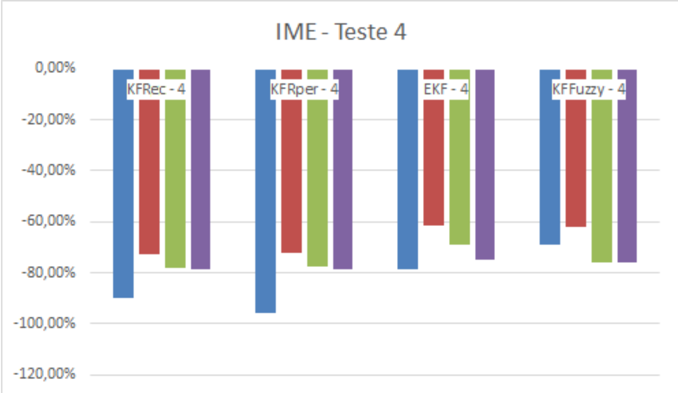
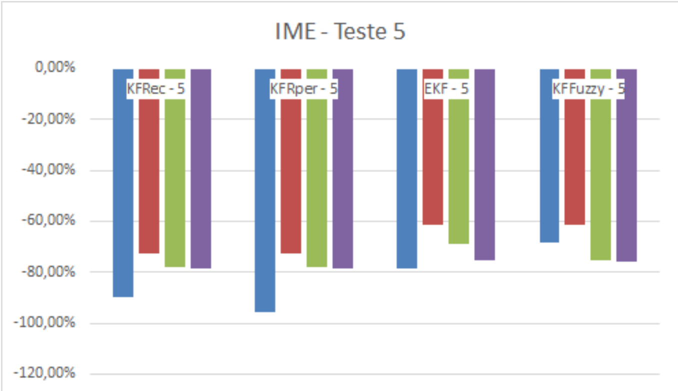


Figura 5.5: Desempenho de estimação (IME) - Teste 5



Nos testes 6 e 7, o sistema opera em pontos afastados dos pontos de linearização do modelo linearizado. O baixo desempenho de estimação dos filtros de Kalman estacionário e recursivo em tais ensaios é consequência do erro de linearização do modelo do processo.

Figura 5.6: Filtro de Kalman recursivo - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (com ruído)

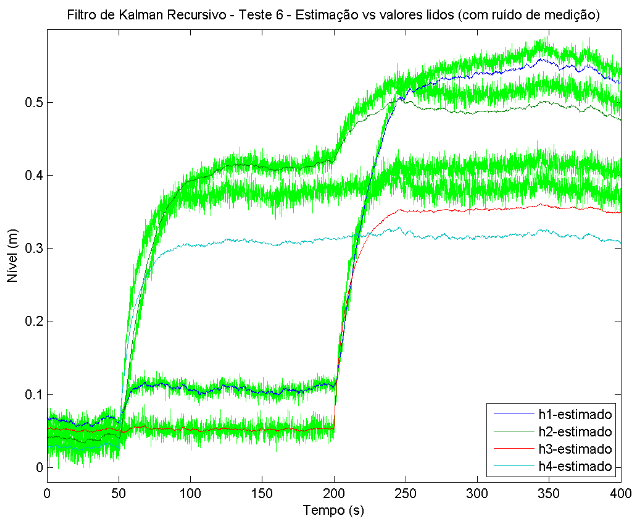
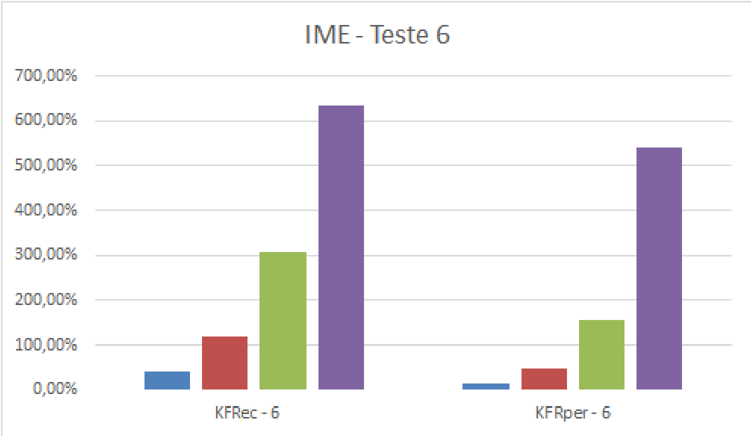


Figura 5.7: Desempenho de estimação (IME) - Teste 6 - Filtros de Kalman Recursivo e de Regime Permanente



Por sua vez, o filtro de Kalman *fuzzy*, que utiliza a representação *fuzzy* do modelo não-linear do processo, apresentou o melhor desempenho para os testes 6 e 7, seguido do filtro de Kalman estendido, cujo algoritmo baseia-se no modelo não-linear do processo.

Figura 5.8: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

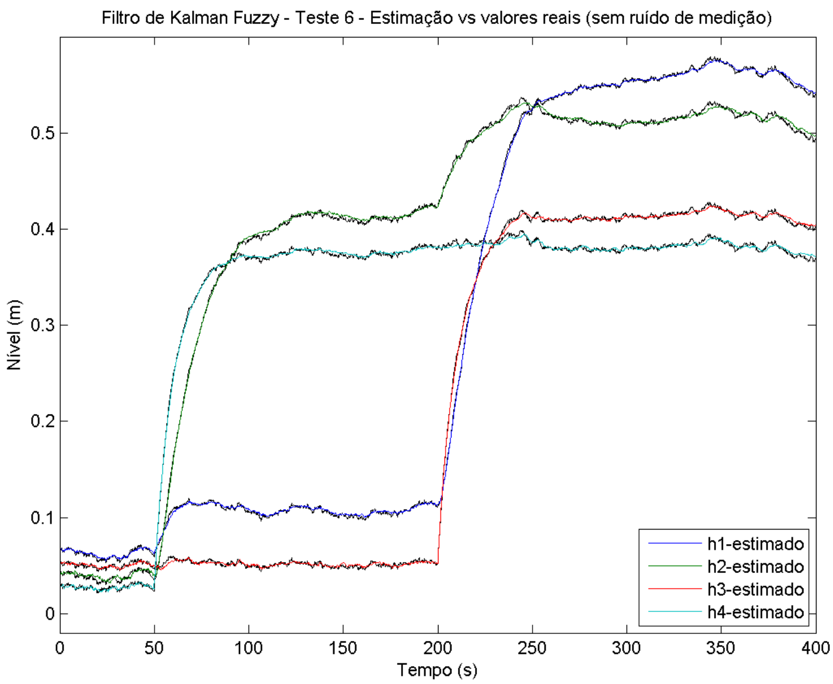
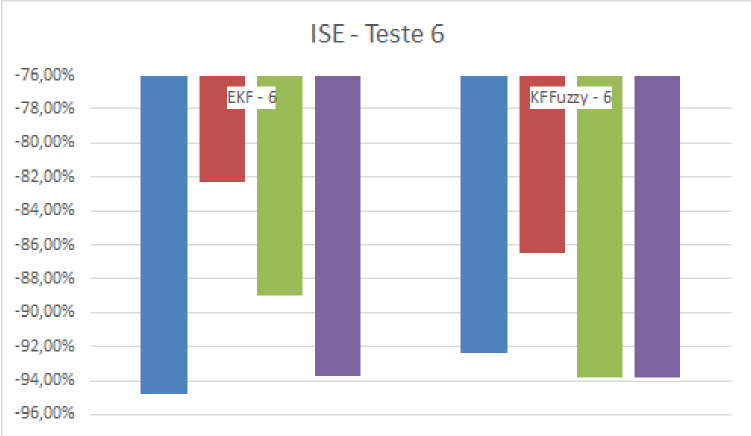


Figura 5.9: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 6 - Filtros de Kalman Estendido e Fuzzy



Para o teste 7, foram utilizadas nos cálculos dos filtros as matrizes de covariâncias Q_* e R_*, diferentes das covariâncias dos ruídos reais, Q e R. Semelhantemente ao ocorrido no teste 6, o desempenho dos filtros de Kalman recursivo e de regime permanente foi comprometido pelo erro de linearização, inerente ao modelo linear utilizado pelos filtros.

Figura 5.10: Filtro de Kalman estacionário - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

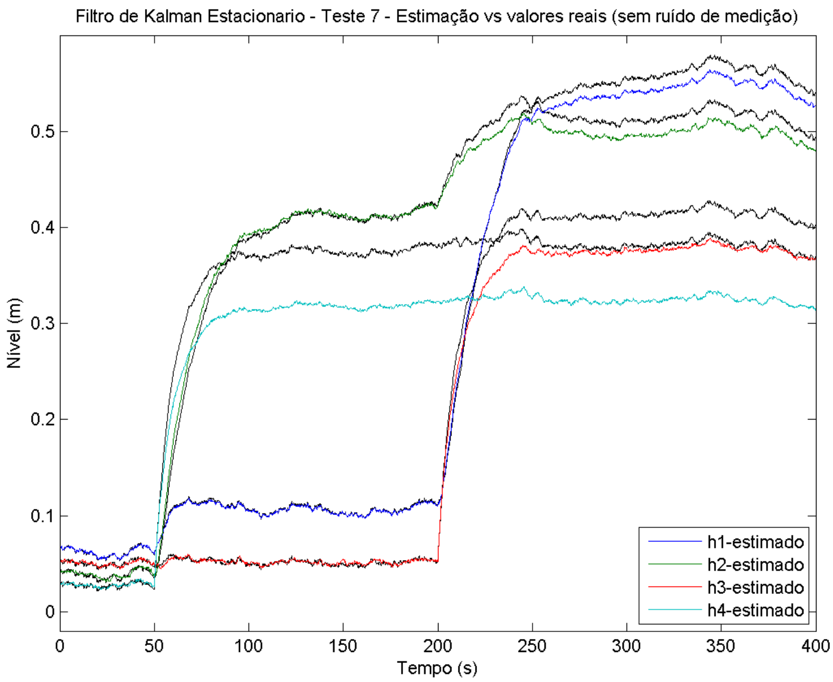


Figura 5.11: Filtro de Kalman estendido - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

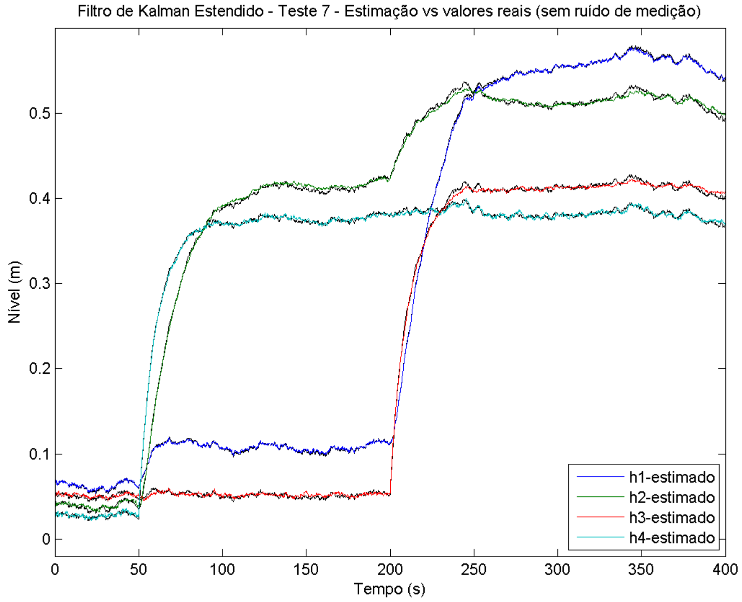


Figura 5.12: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 7 - Filtros de Kalman Recursivo e de Regime Permanente

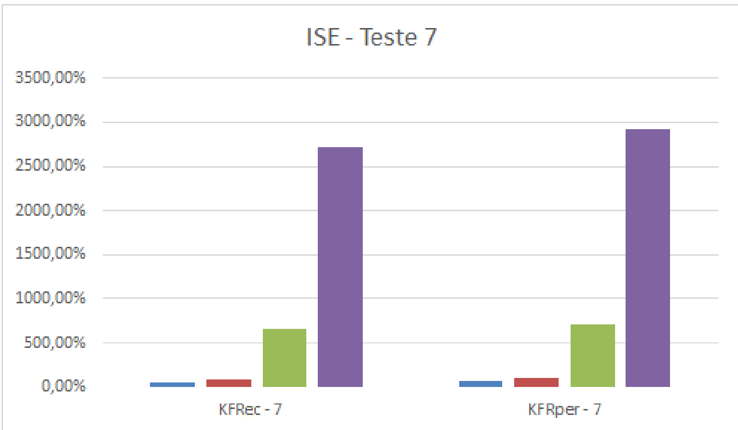
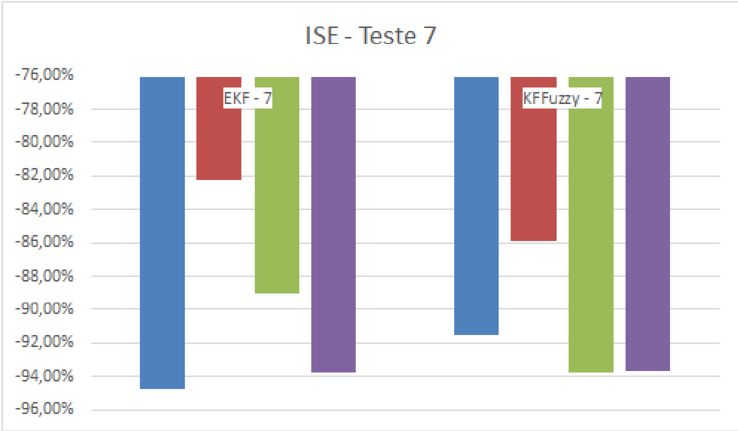


Figura 5.13: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 7 - Filtros de Kalman Estendido e Fuzzy



Os valores dos indicadores relativos IME e ISE, referentes aos testes de 8 a 14, são mostrados nas tabelas (5.6) e (5.7).

O filtro de Kalman de regime permanente apresentou o melhor desempenho de estimação para os testes de 8 a 12, seguidos dos filtros de Kalman *fuzzy* e recursivo. Contudo, as estimações do filtro de Kalman *fuzzy* para os níveis superiores dos tanques parece ter desconsiderado a influência do ruído de processo na dinâmica do sistema, conforme mostram as figuras (5.14) e (5.15).

Figura 5.14: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

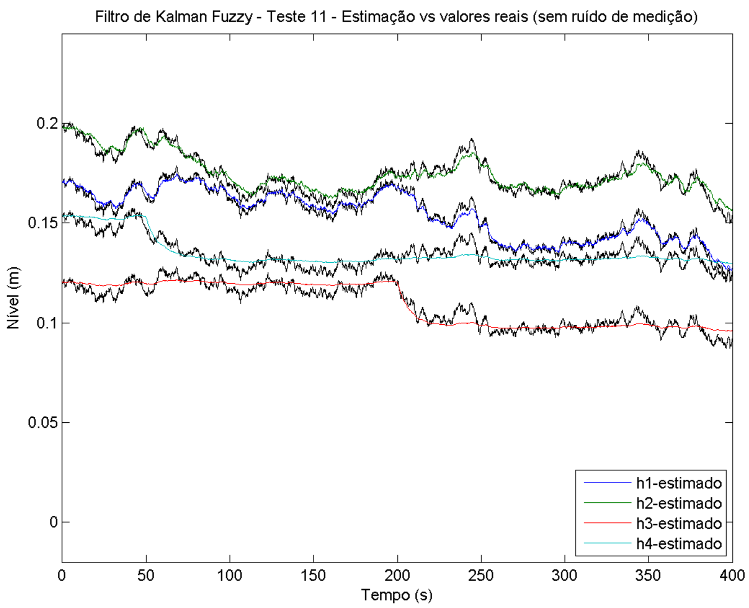


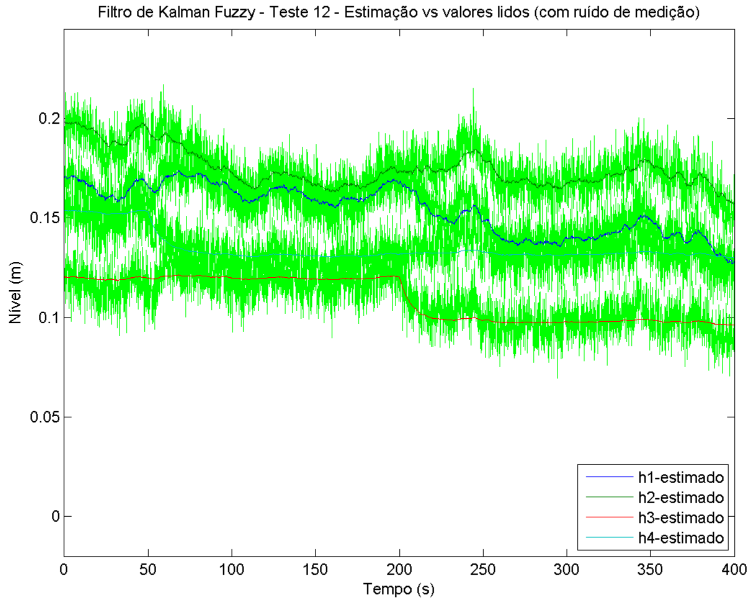
Tabela 5.6: Desempenho dos filtros - Testes 8 a 14 - Integral do Módulo do Erro (IME)

Teste	**%H1**	**%H2**	**%H3**	**%H4**
RFRec - 8	-70,47%	-56,76%	-78,34%	-64,28%
KFRper - 8	-91,69%	-68,28%	-83,15%	-73,80%
EKF - 8	-19,90%	-33,06%	-32,98%	-44,71%
KFFuzzy - 8	-62,34%	-57,37%	-77,74%	-64,79%
NF - 8	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 9	-76,43%	-58,88%	-59,99%	-67,87%
KFRper - 9	-94,04%	-70,78%	-73,60%	-69,37%
EKF - 9	-20,81%	-33,43%	-40,43%	-44,83%
KFFuzzy - 9	-70,24%	-61,97%	-61,05%	-59,97%
NF - 9	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 10	-76,17%	-58,47%	-59,73%	-66,85%
KFRper - 10	-94,04%	-70,78%	-73,60%	-69,37%
EKF - 10	-20,79%	-33,42%	-40,42%	-44,83%
KFFuzzy - 10	-65,28%	-59,05%	-59,57%	-58,74%
NF - 10	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 11	-76,74%	-59,37%	-59,26%	-68,70%
KFRper - 11	-94,63%	-71,04%	-73,16%	-70,57%
EKF - 11	96,54%	56,58%	10,27%	0,67%
KFFuzzy - 11	-70,32%	-62,20%	-61,33%	-60,95%
NF - 11	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 12	-76,73%	-59,36%	-58,88%	-67,84%
KFRper - 12	-94,63%	-71,04%	-73,16%	-70,57%
EKF - 12	-20,80%	-33,43%	-40,43%	-44,82%
KFFuzzy - 12	-65,46%	-59,41%	-59,87%	-59,77%
NF - 12	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 13	183,12%	511,39%	846,23%	1461,06%
KFRper - 13	181,94%	429,33%	719,85%	1632,62%
EKF - 13	-20,72%	-33,38%	-40,13%	-44,66%
KFFuzzy - 13	-73,32%	-63,18%	-59,20%	-54,96%
NF - 13	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**
RFRec - 14	331,86%	285,70%	849,77%	2128,80%
KFRper - 14	181,94%	429,33%	719,85%	1632,62%
EKF - 14	-20,70%	-33,37%	-40,12%	-44,65%
KFFuzzy - 14	-71,52%	-62,22%	-58,61%	-54,36%
NF - 14	**21,1313**	**25,1569**	**28,2466**	**30,4601**

Tabela 5.7: Desempenho dos filtros - Testes 8 a 14 - Integral do Quadrado do Erro (ISE)

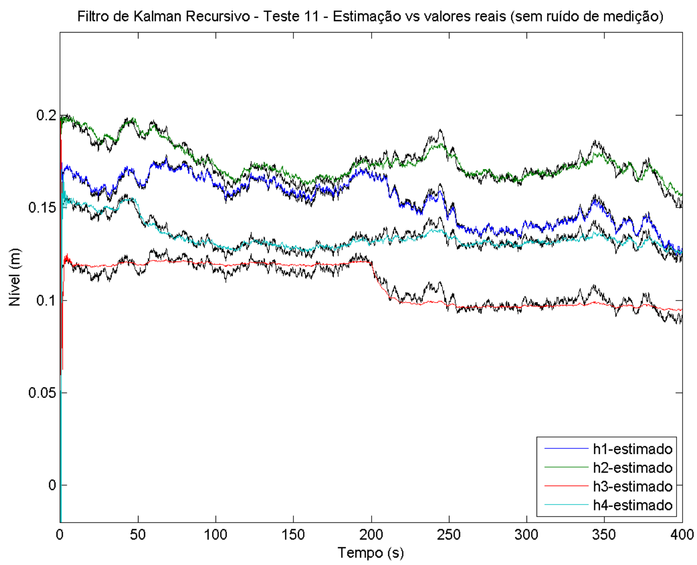
Teste	**%H1**	**%H2**	**%H3**	**%H4**
RFRec - 8	-91,29%	-81,07%	-92,11%	-87,21%
KFRper - 8	-99,29%	-89,90%	-97,04%	-93,18%
EKF - 8	-36,74%	-54,95%	-54,54%	-69,56%
KFFuzzy - 8	-85,94%	-81,56%	-94,87%	-87,54%
NF - 8	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 9	-94,46%	-82,92%	-74,60%	-56,11%
KFRper - 9	-99,64%	-91,46%	-92,98%	-90,58%
EKF - 9	-37,93%	-55,69%	-64,40%	-69,84%
KFFuzzy - 9	-91,24%	-85,41%	-84,78%	-84,16%
NF - 9	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 10	-94,33%	-82,55%	-69,06%	-34,60%
KFRper - 10	-99,64%	-91,46%	-92,98%	-90,58%
EKF - 10	-37,89%	-55,68%	-64,39%	-69,83%
KFFuzzy - 10	-88,07%	-83,12%	-83,60%	-83,18%
NF - 10	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 11	-94,65%	-83,34%	-73,49%	-54,89%
KFRper - 11	-99,72%	-91,61%	-92,84%	-91,28%
EKF - 11	202,93%	97,63%	6,94%	-11,63%
KFFuzzy - 11	-91,32%	-85,59%	-85,12%	-84,89%
NF - 11	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 12	-94,64%	-83,33%	-67,69%	-31,77%
KFRper - 12	-99,72%	-91,61%	-92,84%	-91,28%
EKF - 12	-37,90%	-55,69%	-64,40%	-69,82%
KFFuzzy - 12	-88,26%	-83,43%	-83,98%	-83,98%
NF - 12	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 13	940,67%	2862,53%	11634,05%	17910,35%
KFRper - 13	973,51%	2113,10%	8710,09%	22157,71%
EKF - 13	-37,80%	-55,60%	-64,05%	-69,56%
KFFuzzy - 13	-92,80%	-86,26%	-81,35%	-79,44%
NF - 13	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**
RFRec - 14	1126,84%	915,67%	9754,29%	35899,44%
KFRper - 14	973,51%	2113,10%	8710,09%	22157,71%
EKF - 14	-37,77%	-55,59%	-64,05%	-69,54%
KFFuzzy - 14	-91,73%	-85,50%	-80,71%	-78,84%
NF - 14	**0,1758**	**0,2465**	**0,3095**	**0,3648**

Figura 5.15: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (com ruído)



Além disso, o filtro de Kalman recursivo apresentou oscilações bruscas no início das estimações dos testes (figura (5.16)). Na aplicação do filtro em sistemas de controle, tal comportamento seria indesejável.

Figura 5.16: Filtro de Kalman recursivo - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)



Para os ensaios de 8 a 14, realizou-se, no algoritmo do filtro de Kalman estendido, uma modificação relacionada à predição da matriz de covariância dos erros de estimação, conforme mostrado nas equações (4.26) e (4.27). Esta alteração foi realizada pois, nas simulações computacionais, o algoritmo principal, que utiliza a equação (4.23), mostrou-se instável no cenário em que apenas os sensores inferiores estavam disponíveis.

Os efeitos da alteração do algoritmo do filtro de Kalman estendido são mais evidentes no teste 11. A estimação dos níveis dos tanques 1, 2 e 3 apresentou um erro maior do que o erro das leituras dos sensores. Para o tanque 4, o nível estimado em pouco diferiu do sinal lido pelo sensor.

Figura 5.17: Filtro de Kalman estendido - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques - sem ruído de medição

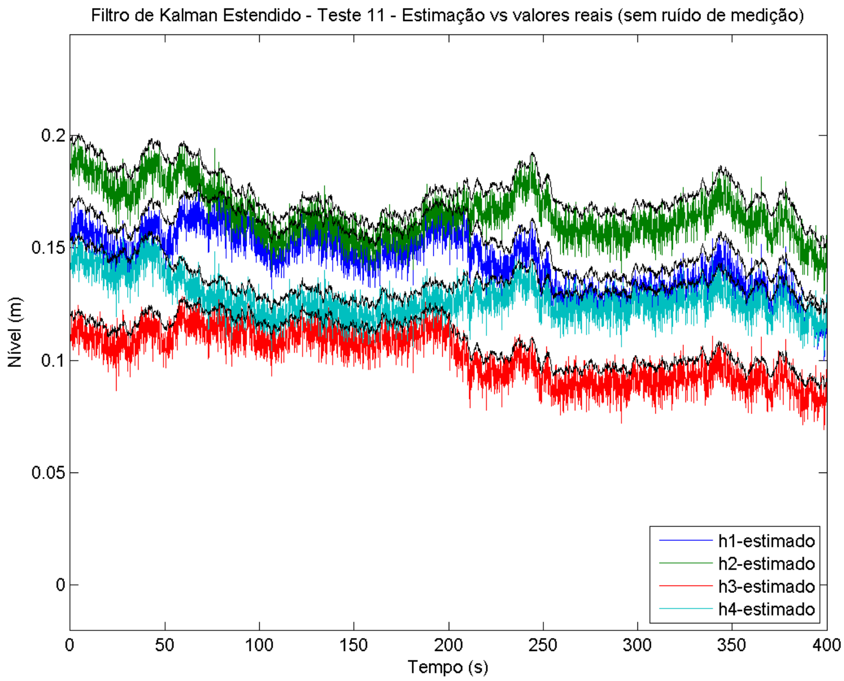
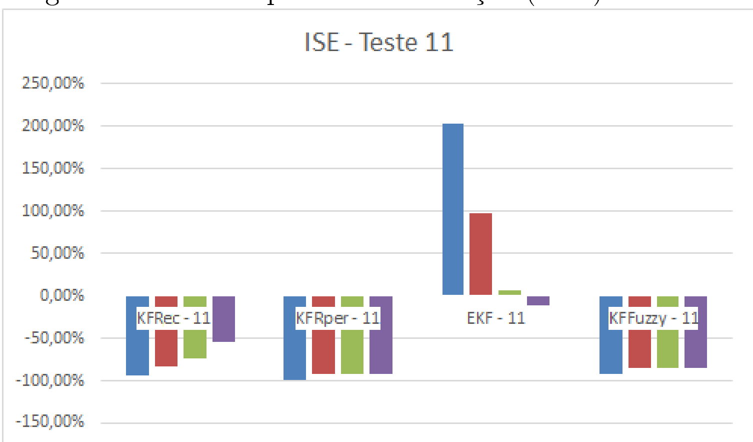
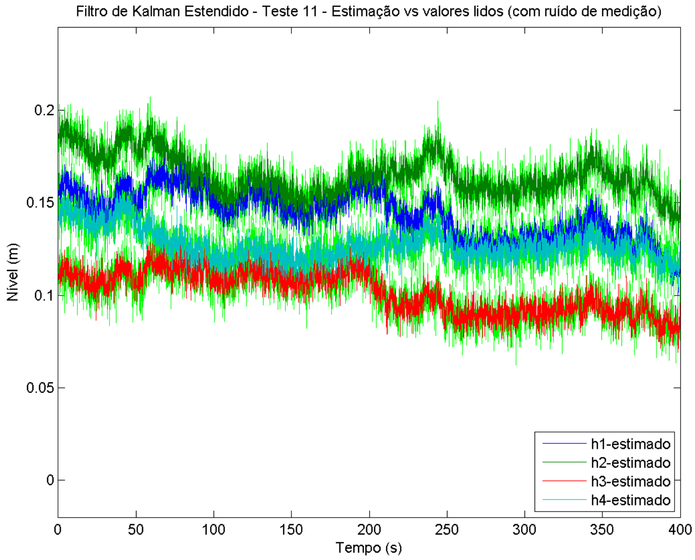


Figura 5.19: Desempenho de estimação (IME) - Teste 11



Por fim, o desempenho dos filtros para os testes 13 e 14, em que o sistema opera fora dos pontos de linearização do modelo linearizado, é mostrado nas figuras de (5.20) a (5.23). Assim

Figura 5.18: Filtro de Kalman estendido - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques - com ruído de medição



como ocorreu nos ensaios 6 e 7, a estimação de estados realizada pelos filtros de Kalman recursivo e de regime permanente apresentou um baixo desempenho devido ao erro de linearização do modelo do processo.

Figura 5.20: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 13 - Filtros de Kalman Recursivo e de Regime Permanente

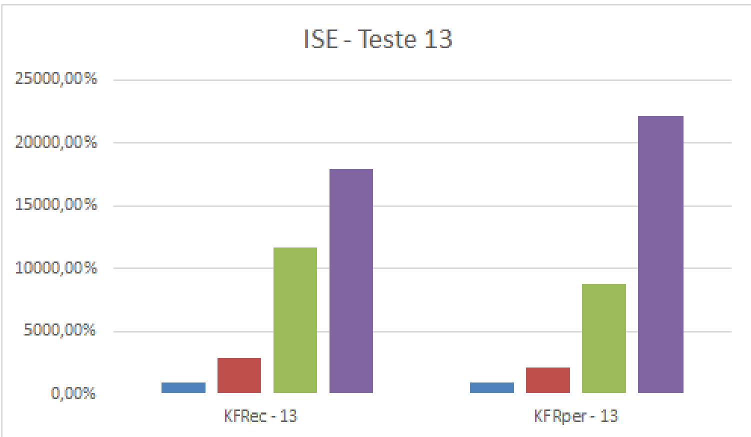


Figura 5.21: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 14 - Filtros de Kalman Recursivo e de Regime Permanente

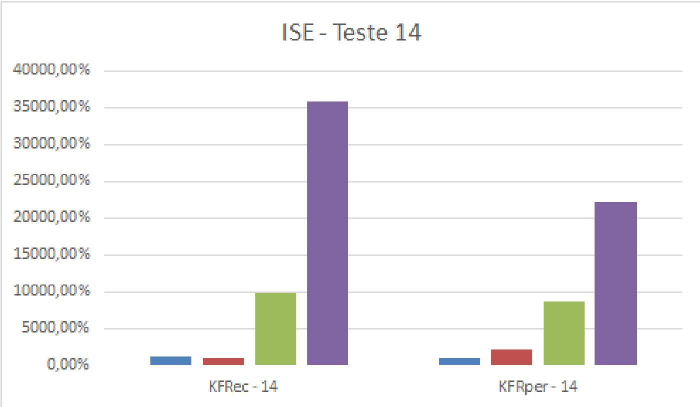


Figura 5.22: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 13 - Filtros de Kalman Estendido e Fuzzy

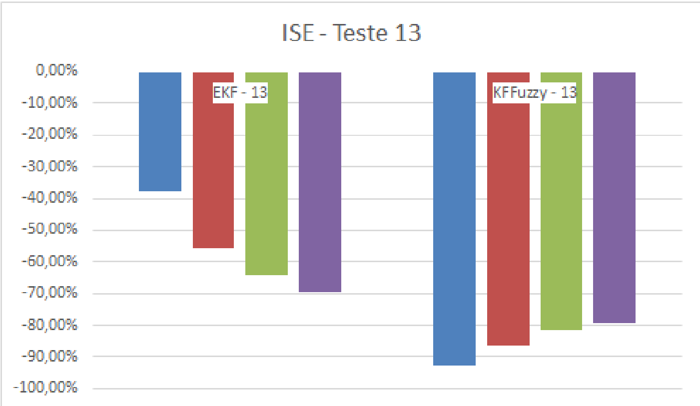
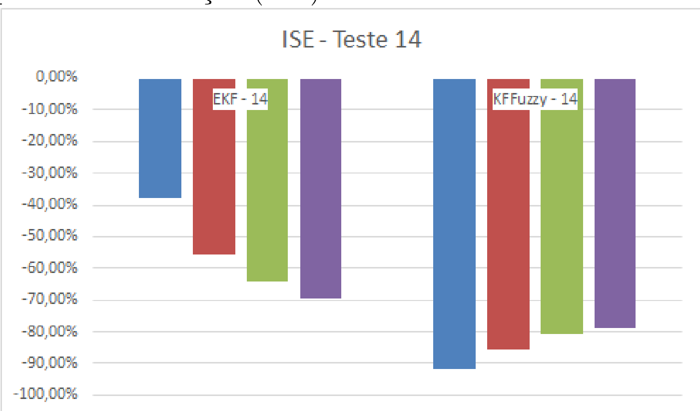


Figura 5.23: Desempenho de estimação (ISE) - Teste 14 - Filtros de Kalman Estendido e Fuzzy



Os filtros que obtiveram os melhores desempenhos de estimação para cada ensaio, de acordo com os indicadores IME e ISE, são mostrados na tabela (5.8).

Tabela 5.8: Melhores estimadores - Testes 1 a 14

Teste	Níveis (IME)				Níveis (ISE)			
-	h1	h2	h3	h4	h1	h2	h3	h4
1	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec
2	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	RFRec	RFRec
3	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	RFRec	RFRec
4	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	RFRec	RFRec
5	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	KFRper	RFRec	RFRec	RFRec
6	EKF	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	EKF	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy
7	EKF	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	EKF	KFFuzzy	KFFuzzy	EKF
8	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper
9	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper
10	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper
11	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper
12	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper	KFRper
13	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy
14	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy	KFFuzzy

Observa-se que, nos testes de 1 a 5, os filtros de Kalman estacionário e recursivo apresentaram o melhor desempenho. Nos ensaios de 8 a 12, por sua vez, desempenho do filtro de Kalman estacionário foi superior para todos os níveis.

Para os testes 6, 7, 13 e 14, o filtro de Kalman *fuzzy* obteve o melhor desempenho no maior número de casos, seguido do filtro de Kalman estendido. Mais além, para os demais ensaios, o filtro de Kalman *fuzzy* obteve um desempenho superior ao filtro de Kalman estendido para a maioria dos níveis. Tal resultado é esperado, dado que o filtro de Kalman estendido não garante otimalidade em sua estimação, enquanto o filtro de Kalman *fuzzy* estudado realiza o cálculo de ganhos de Kalman *ótimos* para cada subsistema *fuzzy*. A exceção foi o teste 1, em que o sistema operou em fase mínima e em que as leituras de todos os sensores de nível estavam disponíveis. Neste contexto, o desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* foi inferior ao filtro de Kalman estendido.

Ainda em relação ao filtro de Kalman *fuzzy*, é importante ressaltar que, para os testes de 8 a 14, a estimação dos níveis superiores aparentou não ter considerado a influência do ruído de processo na dinâmica do sistema. A explicação deste comportamento reside na construção do algoritmo do filtro de Kalman *fuzzy* para este cenário: em lugar das leituras dos níveis $h3$ e $h4$, indisponíveis, o filtro utilizou os valores estimados $\hat{h_3}$ e $\hat{h_4}$.

Quanto ao fitro de Kalman estendido, foi evidente a piora no desempenho das estimações nos testes de 8 a 14 em relação aos ensaios de 1 a 7, resultante da modificação do algoritmo mostrada nas equações (4.26) e (4.27).

A partir desta análise, pode-se indicar os filtros mais recomendados para os cenários apresentados, a saber: fase mínima ou não-mínima, operação próxima ou distante do ponto de linearização e quantidade de sensores utilizados. Os estimadores escolhidos são apresentados na tabela (5.9). Também foram escolhidos como estimadores alternativos os filtros com o segundo melhor desempenho em cada cenário.

Tabela 5.9: Recomendação de Filtros de Kalman para cada cenário estudado

Cenários			Estimador	
Sensores utilizados	Região de operação do sistema	Fase do sistema	Estimador recomendado	Estimador alternativo recomendado
Todos	Próximo ao ponto de linearização	Mínima	Filtro de Kalman Estacionário	Filtro de Kalman Recursivo
h1 e h2	Próximo ao ponto de linearização	Mínima	Filtro de Kalman Estacionário	Filtro de Kalman Fuzzy
Todos	Próximo ao ponto de linearização	Não-mínima	Filtro de Kalman Recursivo	Filtro de Kalman Estacionário
h1 e h2	Próximo ao ponto de linearização	Não-mínima	Filtro de Kalman Estacionário	Filtro de Kalman Fuzzy
Todos	Afastado do ponto de linearização	Não-mínima	Filtro de Kalman Fuzzy	Filtro de Kalman Estendido
h1 e h2	Afastado do ponto de linearização	Não-mínima	Filtro de Kalman Fuzzy	Filtro de Kalman Estendido

5.2.2 Análise da robustez dos filtros - Incertezas nos ruídos

Os resultados dos testes de robustez *r-eq* a r6 são mostrados nas tabelas (5.10), relativa ao cenário 1, em que todos os sensores são utilizados, e (5.11), relativa ao cenário 2, em que apenas as leituras dos sensores inferiores são utilizadas. Os gráficos referentes a essas tabelas são mostrados nas figuras de (5.24) a (5.31).

O desempenho do filtro de Kalman estacionário foi idêntico para todos os valores Q_{filtro} e R_{filtro}. Pode-se concluir que as modificações em tais matrizes pouco influenciaram no cálculo do ganho de Kalman. Pela robustez apresentada pelo filtro de Kalman de regime permanente, conclui-se que o algoritmo é recomendado para cenários onde não se conhece com precisão a natureza quantitativa dos ruídos de medição e de processo.

Tabela 5.10: Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Cenário 1 - Desempenho de estimação (ISE)

Teste	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**
NF	0,2432	0,2466	0,2404	0,2434
KFRper-r-eq	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r1	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r2	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r3	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r4	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r5	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFRper-r6	0,0004	0,0190	0,0155	0,0171
KFTRec-r-eq	0,0019	0,0184	0,0152	0,0166
KFTRec-r1	0,0019	0,0184	0,0152	0,0166
KFTRec-r2	0,0018	0,0184	0,0154	0,0167
KFTRec-r3	0,0018	0,0184	0,0154	0,0167
KFTRec-r4	0,0018	0,0184	0,0154	0,0167
KFTRec-r5	0,0018	0,0184	0,0154	0,0167
KFTRec-r6	0,0018	0,0184	0,0154	0,0167
KFExt-r-eq	0,0081	0,0378	0,0304	0,0224
KFExt-r1	0,0081	0,0378	0,0304	0,0224
KFExt-r2	0,0023	0,0195	0,0182	0,0181
KFExt-r3	0,0025	0,0196	0,0184	0,0183
KFExt-r4	0,0026	0,0196	0,0185	0,0183
KFExt-r5	0,0026	0,0196	0,0185	0,0183
KFExt-r6	0,0026	0,0196	0,0185	0,0183
KFFuzzy -r-eq	0,0166	0,0362	0,0188	0,0216
KFFuzzy -r1	0,0176	0,0373	0,0193	0,0221
KFFuzzy-r2	0,0181	0,0376	0,0192	0,0220
KFFuzzy-r3	0,0168	0,0364	0,0189	0,0217
KFFuzzy-r4	0,0150	0,0345	0,0182	0,0210
KFFuzzy-r5	0,0220	0,0420	0,0210	0,0239
KFFuzzy-r6	0,0190	0,0388	0,0199	0,0227

Tabela 5.11: Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Cenário 2 - Desempenho de estimação (ISE)

Teste	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**
NF	0,2432	0,2466	0,2404	0,2434
KFRper(2)-r-eq	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper(2)-r1	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper(2)-r2	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper(2)-r3	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper(2)-r4	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper-(2)r5	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFRper-(2)r6	0,0006	0,0211	0,0217	0,0344
KFTRec(2)-r-eq	0,0097	0,0421	0,0786	0,1601
KFTRec(2)-r1	0,0100	0,0430	0,0958	0,2386
KFTRec(2)-r2	0,0024	0,0205	0,2303	0,7013
KFTRec(2)-r3	0,0024	0,0206	0,3244	0,9985
KFTRec(2)-r4	0,0023	0,0203	0,0350	0,0476
KFTRec(2)-r5	0,0022	0,0202	0,0255	0,0351
KFTRec(2)-r6	0,0022	0,0202	0,0234	0,0341
KFExt(2)-r-eq	0,1092	0,1093	0,1102	0,1100
KFExt(2)-r1	0,1092	0,1093	0,1102	0,1101
KFExt(2)-r2	0,1095	0,1095	0,1104	0,1103
KFExt(2)-r3	0,1096	0,1096	0,1103	0,1106
KFExt(2)-r4	0,1091	0,1093	0,1102	0,1100
KFExt(2)-r5	0,1091	0,1093	0,1102	0,1100
KFExt(2)-r6	0,1091	0,1093	0,1102	0,1100
KFFuzzy(2)-r-eq	0,0154	0,0360	0,0471	0,0578
KFFuzzy(2)-r1	0,0210	0,0416	0,0508	0,0614
KFFuzzy(2)-r2	0,0174	0,0379	0,0475	0,0582
KFFuzzy(2)-r3	0,0153	0,0358	0,0448	0,0554
KFFuzzy(2)-r4	0,0161	0,0365	0,0449	0,0556
KFFuzzy(2)-r5	0,0138	0,0345	0,0439	0,0545
KFFuzzy(2)-r6	0,0158	0,0364	0,0456	0,0561

Figura 5.24: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Estacionário - Cenário 1

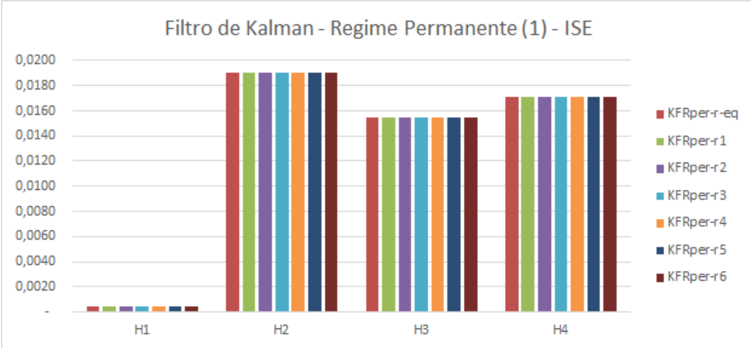
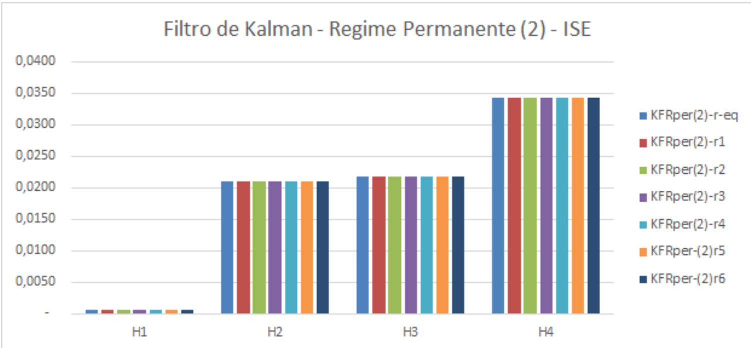


Figura 5.25: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Estacionário - Cenário 2



Para o cenário 1, em que todos os sensores foram utilizados, o filtro de Kalman recursivo também apresentou robustez em relação a variações das matrizes dos ruídos. Conclui-se que, mesmo ao variarem-se os valores das matrizes dos ruídos, o ganho de Kalman convergiu para valores iguais ou semelhantes. Isto não ocorreu no segundo cenário, em que, com a diminuição dos valores das matrizes Q_{filtro} e R_{filtro} (testes r1, r2 e r3), houve um aumento do erro de estimação, conforme mostra a figura (5.27). Em contrapartida, o aumento dos valores das matrizes Q_{filtro} e R_{filtro} (testes r4, r5 e r6) melhorou o desempenho da estimação do filtro de Kalman recursivo.

Figura 5.26: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Recursivo - Cenário 1

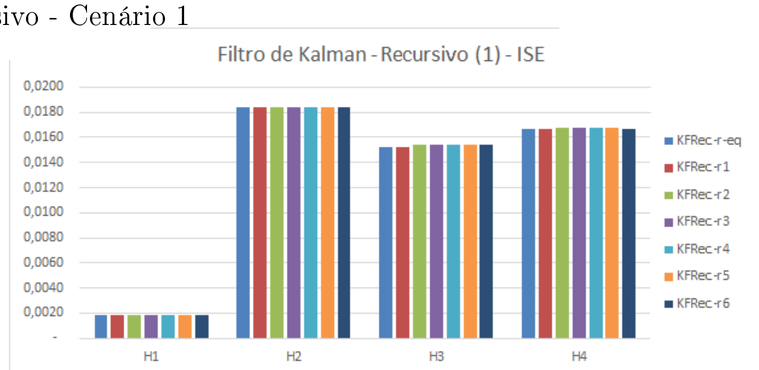
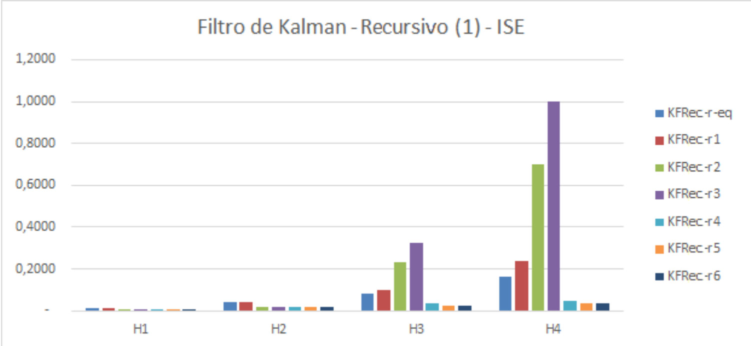
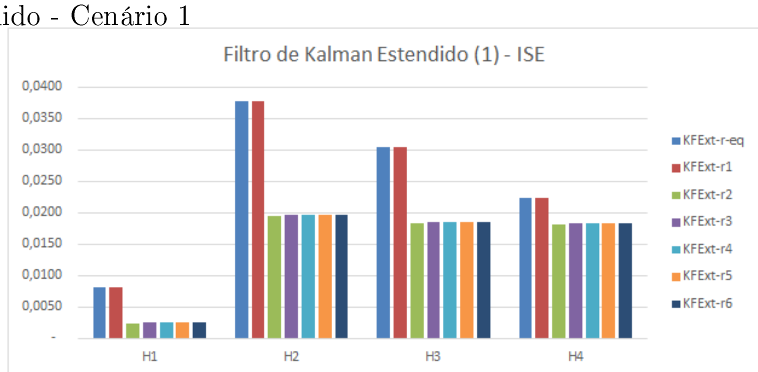


Figura 5.27: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Recursivo - Cenário 2



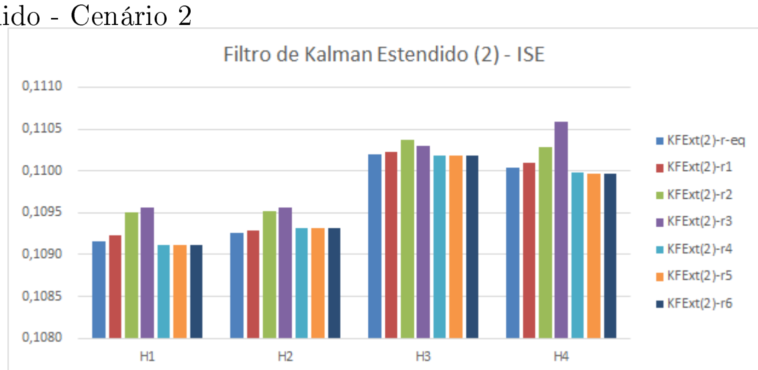
Para o filtro de Kalman estendido, no cenário 1, tanto a diminuição quanto o aumento das matrizes Q_{filtro} e R_{filtro} melhoraram a estimação, conforme mostra a figura (5.28). Esta melhora, contudo, não foi progressiva: para os testes r2 a r6, o desempenho de estimação foi semelhante.

Figura 5.28: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Estendido - Cenário 1



Para o cenário 2, de modo semelhante ao ocorrido para o filtro de Kalman recursivo, a diminuição dos valores de Q_{filtro} e R_{filtro} fornecidas ao filtro aumentou o erro de estimação do filtro de Kalman estendido.

Figura 5.29: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Estendido - Cenário 2



As variações de desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* causadas pela variação das matrizes de covariâncias dos ruídos fornecidas ao algoritmo são mostradas nas figuras (5.30) e (5.31). Para o primeiro cenário, aumentos nas matrizes Q_{filtro} e R_{filtro} resultaram tanto na diminuição do erro de estimação (teste r4) quanto no aumento deste erro (testes r5 e r6).

Figura 5.30: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Fuzzy - Cenário 1

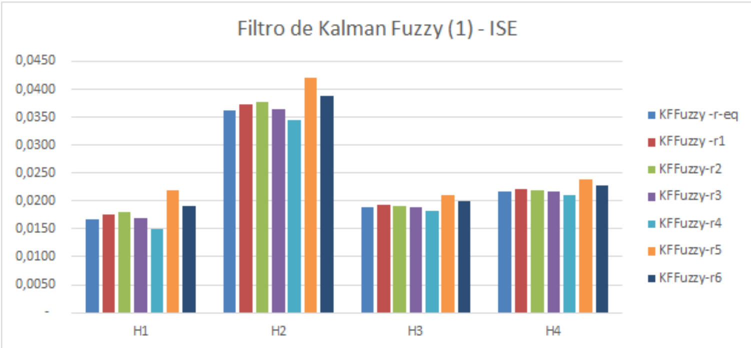
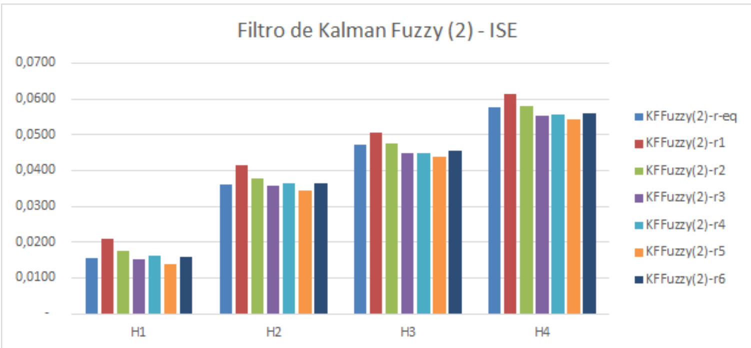


Figura 5.31: Desempenho de estimação (ISE) - Variação dos ruídos fornecidos aos filtros - Filtro de Kalman Fuzzy - Cenário 2



Capítulo 6

Conclusões

Este estudo apresenta a aplicação de quatro variações do filtro de Kalman - estacionário contínuo, recursivo discreto, estendido e *fuzzy* - na estimação de estados de um processo não-linear de quatro tanques. A aplicação dos filtros em diferentes cenários foi simulada em ambiente computacional, utilizando os programas *MATLAB*®e *SIMULINK*®. O desempenho dos algoritmos foi comparado, tomando como métrica o erro de estimação, calculado pelos indicadores de integral do módulo do erro (IME) e de integral do quadrado do erro (ISE).

6.1 Desempenho dos filtros de Kalman

A análise dos indicadores mostrados nas tabelas (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7) possibilitam a seleção, para cada cenário estudado, dos tipos de filtro de Kalman mais recomendados para a estimação dos níveis do processo de quatro tanques. A tabela (5.9) sintetiza a análise realizada.

Um fator que dificultou a comparação entre os filtros de Kalman consistiu na existência de variações no desempenho relativo dos filtros para os níveis h_1 a h_4. Por exemplo, para o teste 1, o filtro de Kalman recursivo apresentou o melhor desempenho de estimação entre os filtros para os níveis h_1 e h_3, enquanto o filtro de Kalman de regime permanente realizou a melhor estimação para os níveis h_2 e h_4. É possível que tal desuniformidade tenha sido causada por diferenças na influência dos ruídos nos níveis de cada tanque. Apesar disso, em geral, ainda foi possível selecionar os filtros mais indicados para cada cenário.

Nos testes em que os níveis dos tanques e tensões nas bombas estavam próximos ao pontos de linearização do sistema, tanto para a fase mínima quanto para a fase não-mínima, os filtros de Kalman recursivo e estacionário apresentaram a melhor estimação entre os filtros. Nos cenários em que todos os sensores de nível estavam disponíveis aos estimadores, o filtro de Kalman recursivo apresentou um desempenho melhor para o maior número de casos. O filtro de Kalman estacionário, por sua vez, foi superior nos testes em que somente se dispôs das leituras de nível dos tanques inferiores, seguido dos filtros de Kalman *fuzzy* e recursivo.

Por outro lado, para cenários afastados do ponto de linearização, os filtros de Kalman estacionário contínuo e recursivo discreto, por utilizarem o modelo linearizado do processo de quatro tanques, apresentaram um erro de estimação considerável, o que muito prejudicou o desempenho dos filtros. Para tais faixas, o filtro de Kalman estendido discreto estudado, que utiliza a aproximação pelo método de Euler do modelo não-linear do processo, e o filtro de Kalman *fuzzy*, que se baseia no modelo *fuzzy* do processo, mostraram um desempenho de estimação superior.

Quanto à robustez dos filtros em relação a variações nas matrizes de covariâncias fornecidas aos filtros, o filtro de Kalman Estacionário apresentou a maior robustez, sendo o mais recomendado para situações onde os ruídos de medição e de processo não podem ser medidos com precisão. Ademais, observou-se que, para os filtros de Kalman estacionário, recursivo e estendido, a utilização de matrizes de covariâncias com valores maiores do que as matrizes de covariâncias reais dos ruídos aumentou o desempenho de estimação. Assim, de acordo com os resultados, para estes estimadores de estados, um palpite inicial mais elevado para os ruídos de medição e de processo aumenta as chances de um bom desempenho de estimação.

A análise da complexidade das operações matemáticas envolvidas nos algoritmos dos filtros é relevante na implementação dos estimadores Kalman em sistemas computacionais. As linguagens de programação de certos controladores lógico programáveis utilizados na indústria não possuem suporte para operações matriciais. O filtro de Kalman de regime permanente, assim como o filtro de Kalman *fuzzy*, permitem o cálculo dos ganhos de estimação *a priori*, isto é, antes da execução do processo. No primeiro algoritmo, o ganho de Kalman é calculado pela resolução de equações algébricas de Riccati; no segundo filtro, as matrizes de ganhos para cada subsistema *fuzzy* são determinadas por meio da resolução de desigualdades matriciais lineares. Após o cálculo dos ganhos de Kalman, a estimação pode ser realizada por somas, subtrações e multiplicações matriciais, não envolvendo operações de inversão de matrizes. Por sua vez, nos filtros de Kalman recursivo discreto e estendido discreto, o cálculo de uma matriz de ganhos de Kalman, que envolve a operação de inversão matricial, é realizado a cada iteração do algoritmo, o que dificulta a implementação de tais algoritmos em controladores lógicos programáveis.

A tabela (6.1) resume as características qualitativas dos filtros de Kalman estudados:

Tabela 6.1: Comparação entre os filtros de Kalman estudados

	Filtro de Kalman			
	Regime Permanente	Recursivo	Estendido	Fuzzy
Tipo de sistema	Contínuo	Discreto	Discreto	Contínuo
	Linearizado	Linearizado	Não-linear	Não-linear (*fuzzy*)
Erro de linearização?	Sim	Sim	Não	Não
Cálculo do Ganho de Kalman	*a priori*	a cada iteração	a cada iteração	*a priori*
Exige inversão matricial durante a estimação?	Não	Sim	Sim	Não

6.2 Perspectivas Futuras

Uma limitação deste estudo está na ausência de testes empíricos dos filtros de Kalman apresentados. A comparação entre o desempenho de estimação dos filtros limitou-se a contextos de simulações computacionais. Este trabalho poderá ser continuado com a aplicação dos algoritmos apresentados em processos de quatro tanques reais, com a realização de testes comparativos entre os níveis medidos pelos sensores, os níveis teóricos e os valores estimados pelos filtros, em cenários de operação em malha aberta. Mais além, é possível aprofundar o estudo da utilização de filtros de Kalman na melhoria de desempenho do controle em malha fechada do processo de quatro tanques.

O número de testes em que o sistema operou em fase mínima foi reduzido, o que limita a validade da escolha do filtro mais recomendado para este cenário. Sugere-se que, na continuação deste estudo, sejam realizados mais ensaios para a fase mínima.

As restrições assumidas na modelagem matemática do processo de quatro tanques (e.g. ruídos de medição e processo gaussianos, bombas de líquido lineares e invariantes no tempo, escoamento laminar nos tanques) restringem a aplicação dos algoritmos propostos na estimação de estados para sistemas reais. Propõe-se, como possibilidade de continuação deste estudo, a implementação de filtros de Kalman para modelos matemáticos mais complexos do processo de quatro tanques.

Também é possível estudar maneiras de aprimorar os algoritmos dos filtros apresentados. Devido a uma modificação no algoritmo, o desempenho do filtro de Kalman estendido no contexto em que apenas os sensores dos níveis inferiores estavam presentes foi muito inferior ao contexto em que todas as leituras dos níveis foram utilizadas. Pode-se desenvolver métodos que contornem este problema. Ademais, para o mesmo contexto de limitação do número de sensores, é possível investigar outros métodos de implementação do filtro de Kalman *fuzzy* que não necessitem da leitura de todas as variáveis premissas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] NISE, N. S. Engenharia de sistemas de controle. In: _____. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. cap. 12, p. 527–528.

[2] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, v. 82.

[3] CHEN, G.; XIE, Q.; SHIEH, L. Fuzzy kalman filtering. *Information Sciences*, v. 109, n. 1–4, p. 197–209, 1998.

[4] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*, v. 3068, 1997.

[5] WALLEBÄCK, P. *Fuel Level Estimation for Heavy Vehicles Using a Kalman Filter.* Dissertação (Mestrado) — Linköping University, 2008.

[6] SEUNG, J.-H. et al. Identification of unknown parameter value for precise flow control of coupled tank using robust unscented kalman filter. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, v. 18, n. 1, p. 31–36, 2017.

[7] ZHANG, J.; XIA, C. State-of-charge estimation of valve regulated lead acid battery based on multi-state unscented kalman filter. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 33, n. 3, p. 472–476, 2011.

[8] JOHANSSON, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000.

[9] ROINILA, T.; VILKKO, M.; JAATINEN, A. Corrected mathematical model of quadruple tank process. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 41, n. 2, 2008.

[10] JOHANSSON, K. H. et al. Teaching multivariable control using the quadruple-tank process. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999.

[11] DORMIDO, S.; ESQUEMBRE, F. The quadruple-tank process: An interactive tool for control education. *Proc. European Control Conference*, 2003.

[12] AZAM, S. N. M. Linear discrete-time state space realization of a modified quadruple tank system with state estimation using kalman filter. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 783, 2017.

[13] LAKHAMI, P. et al. Application of a moving window parameter estimator for leak identification in the quadruple tank system. *IFAC-PapersOnLine*, v. 49, n. 1, p. 629–634.

[14] MATHWORKS. *MATLAB*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/product/ltc/matlab.html>. Acesso em: 19-07-2017.

[15] MATHWORKS. *Simulink*. Disponível em: <www.mathworks.com/products/simulink.html>. Acesso em: 19-07-2017.

[16] TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, 1985.

[17] TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis - A Linear Matrix Inequality Approach*. Nova York, NY, EUA: John Wiley and Sons, 2001.

[18] MACÊDO, A. M.; WIIRA, M. C. de F. *Estudo de Técnicas de Controle Aplicadas a uma Bancada Didática de Quatro Tanques*. Monografia (Trabalho de Graduação) — Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2015.

[19] ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled systems*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ, EUA: Prentice-Hall, 1997.

[20] MATHWORKS. *Convert model from continuous to discrete time*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/c2d.html>. Acesso em: 19-07-2017.

[21] DAVIS, M. E. *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers*. Nova York, NY, EUA: John Wiley and Sons, 1984.

[22] NOVAK, V.; PERFILIEVA, I.; MOCKOR, J. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Boston, MA, EUA: Springer-Science+Business Media, 1999.

[23] ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

[24] WANG, H. O. et al. T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller: A universal framework for nonlinear control systems. *Proc. Ninth International Conference on Fuzzy Systems*, p. 549–554, 2000.

[25] ROSS, T. J. *Fuzzy logic with engineering applications*. Hoboken, NJ, EUA: John Wiley and Sons, 2010.

[26] LEWIS, F. L.; XIE, L.; POPA, D. *Optimal and Robust Estimation: with an Introduction to Stochastic Control Theory*. Boca Ratón, FL, EUA: CRC Press, 2008.

[27] QU, C. *Nonlinear Estimation for Model Based Fault Diagnosis of Nonlinear Chemical Systems*. Tese (Doutorado) — Texas A&M University, College Station, TX, EUA, 2009.

[28] SIMON, D. Kalman filtering for fuzzy discrete time dynamic systems. *Applied Soft Computing*, v. 3, n. 3.

[29] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. Menlo Park, CA, EUA: Addison-Wesley, 1997.

[30] LOAN, C. F. V. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23, n. 3, p. 395–404, 1978.

[31] MATHWORKS. *Kalman filter design, Kalman estimator*. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/kalman.html>. Acesso em: 14-04-2017.

[32] MACKENROTH, U. Robust control systems. In: ______. Berlim, Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 226.

[33] TOGNETTI, E. S. *Controle Robusto - Tema: Análise e Controle via LMI's - Observadores de Estado e Filtragem*. 2014. Disponível em: <www.ene.unb.br/estognetti/files/observer.pdf>. Acesso em: 18-07-2017.

[34] PÁRAMO-CARRANZA, L. et al. Discrete-time kalman filter for takagi-sugeno fuzzy models. *Evolving Systems*, 2017.

[35] LÖFBERG, J. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.

ANEXOS

I. FIGURAS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Figura I.1: Filtro de Kalman estacionário - Teste 1 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

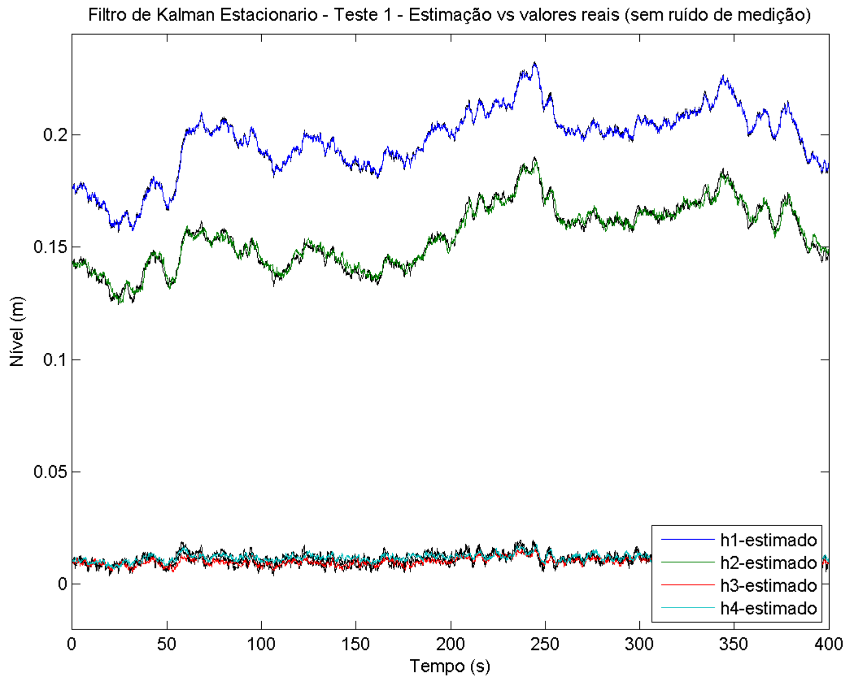


Figura I.2: Filtro de Kalman estacionário - Teste 1 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

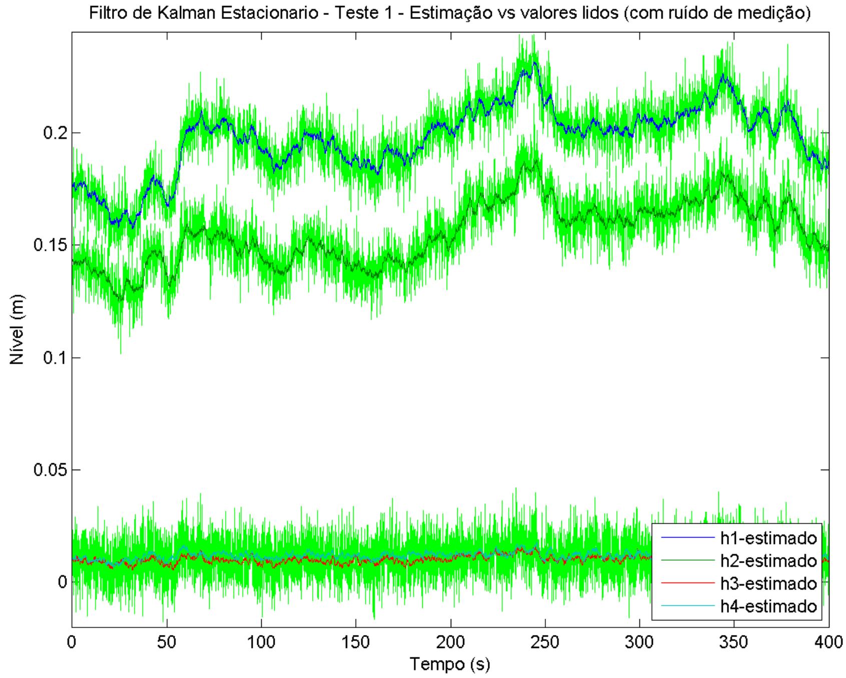


Figura I.3: Filtro de Kalman recursivo - Teste 1 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

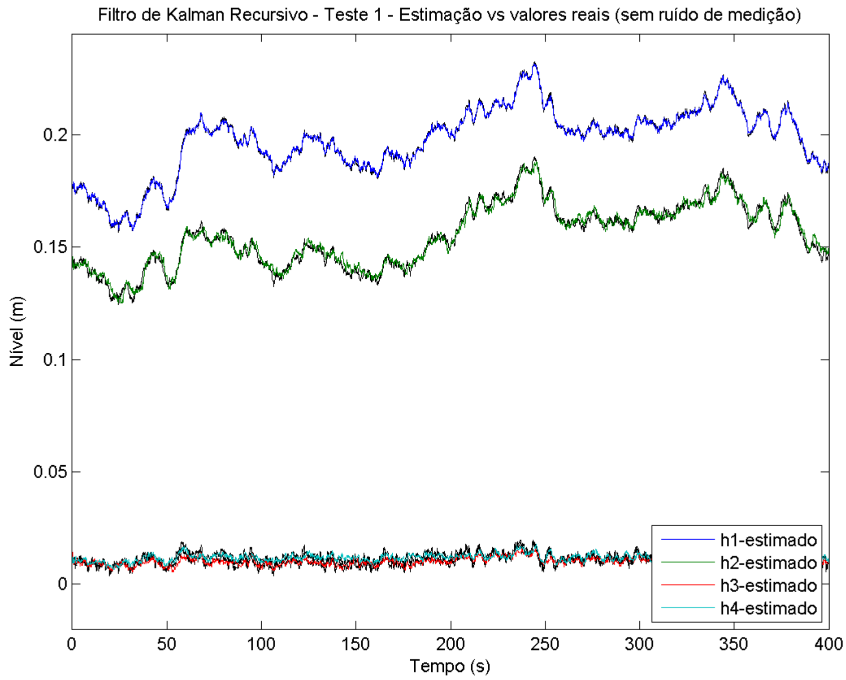


Figura I.4: Filtro de Kalman estendido - Teste 1 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

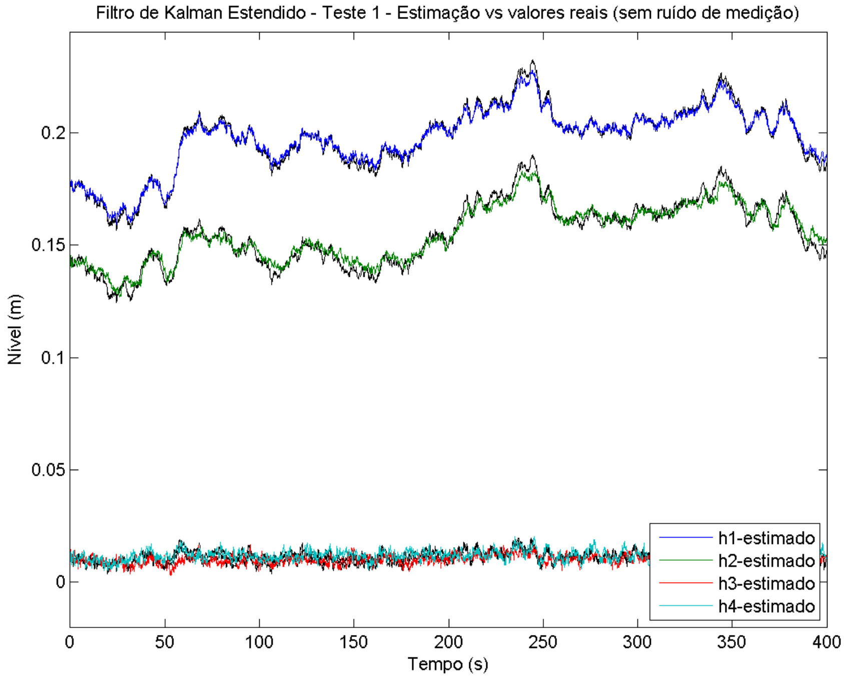


Figura I.5: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 1 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

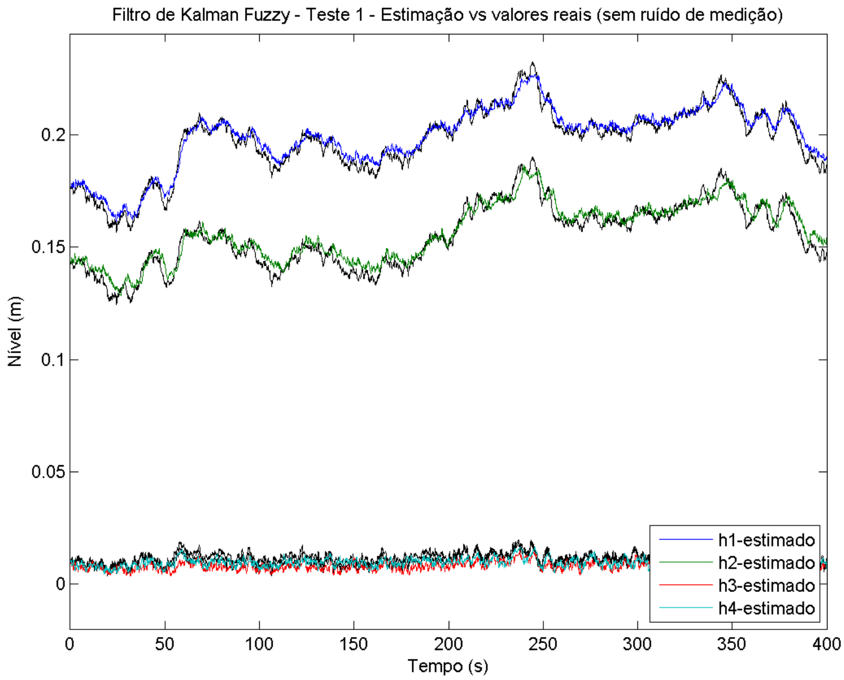


Figura I.6: Filtro de Kalman estacionário - Teste 2 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

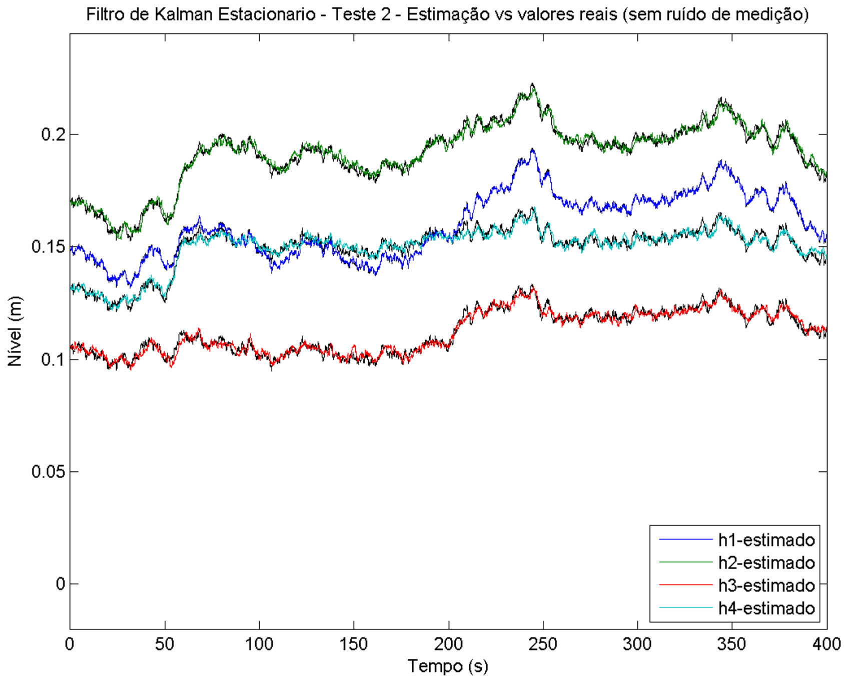


Figura I.7: Filtro de Kalman recursivo - Teste 2 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

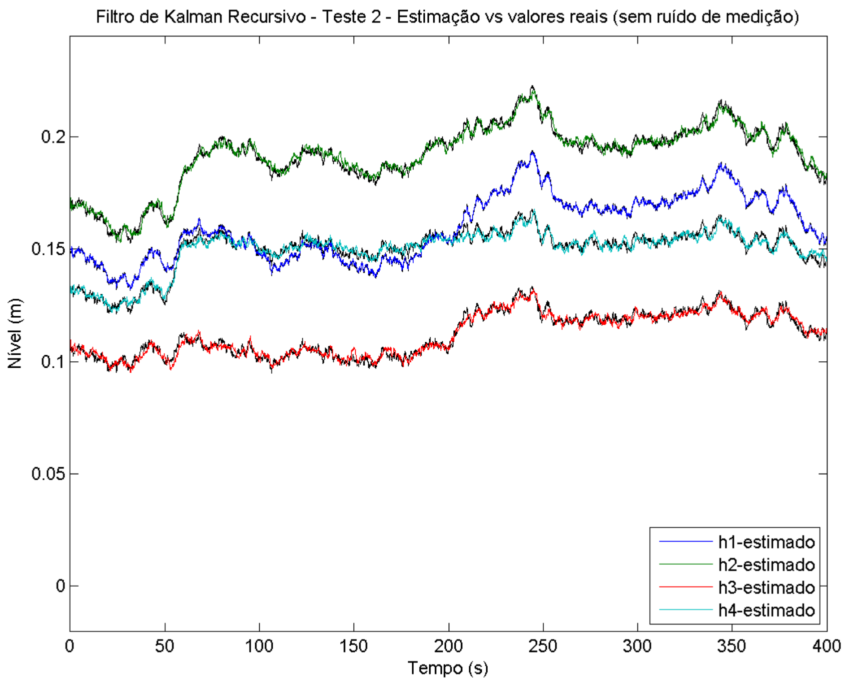


Figura I.8: Filtro de Kalman recursivo - Teste 2 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

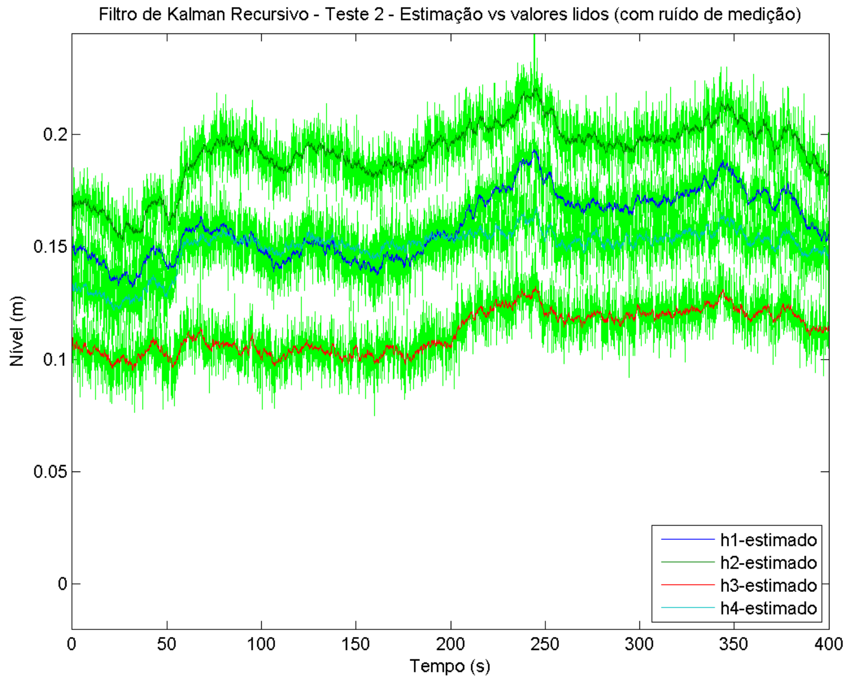


Figura I.9: Filtro de Kalman estendido - Teste 2 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

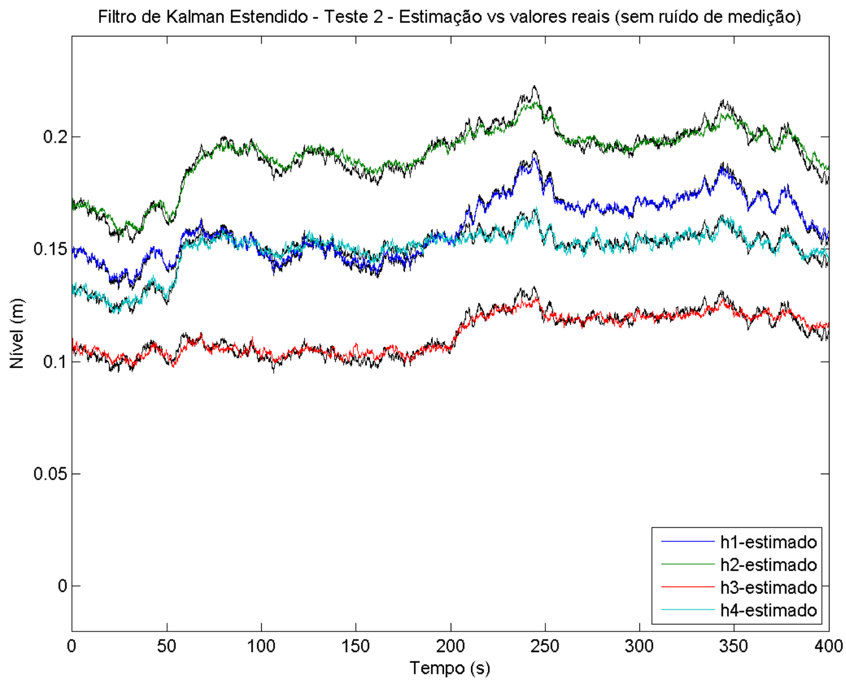


Figura I.10: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 2 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

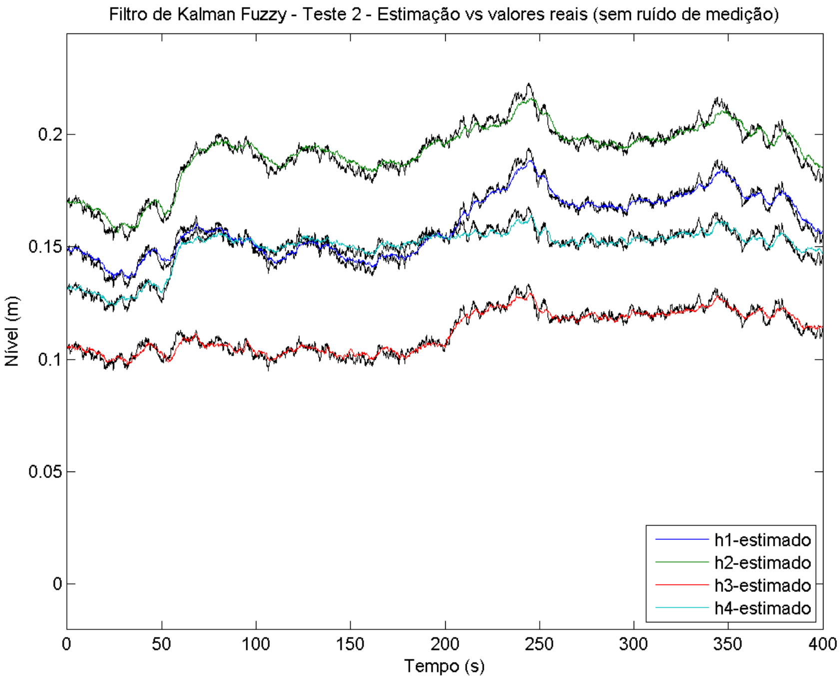


Figura I.11: Filtro de Kalman estacionário - Teste 3 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

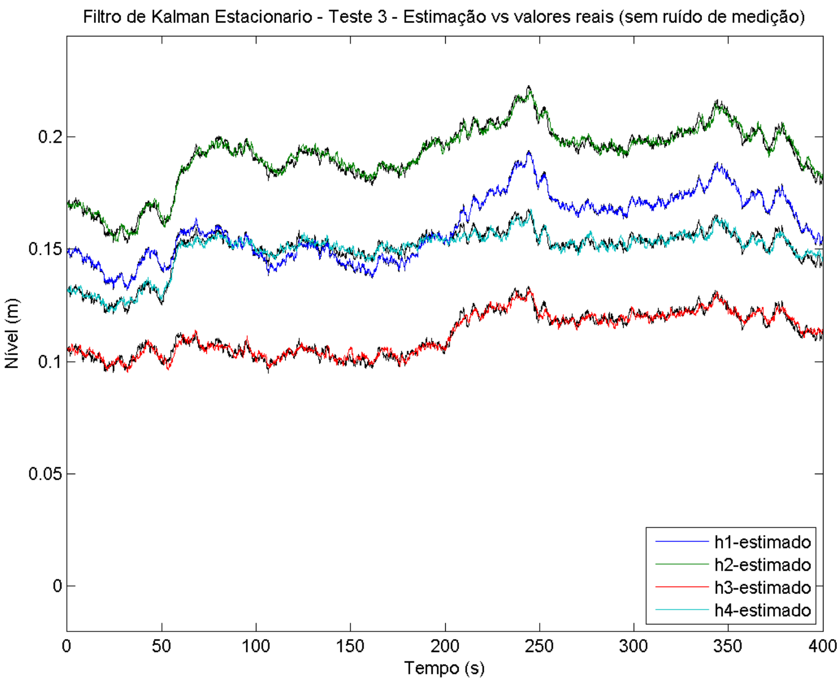


Figura I.12: Filtro de Kalman recursivo - Teste 3 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

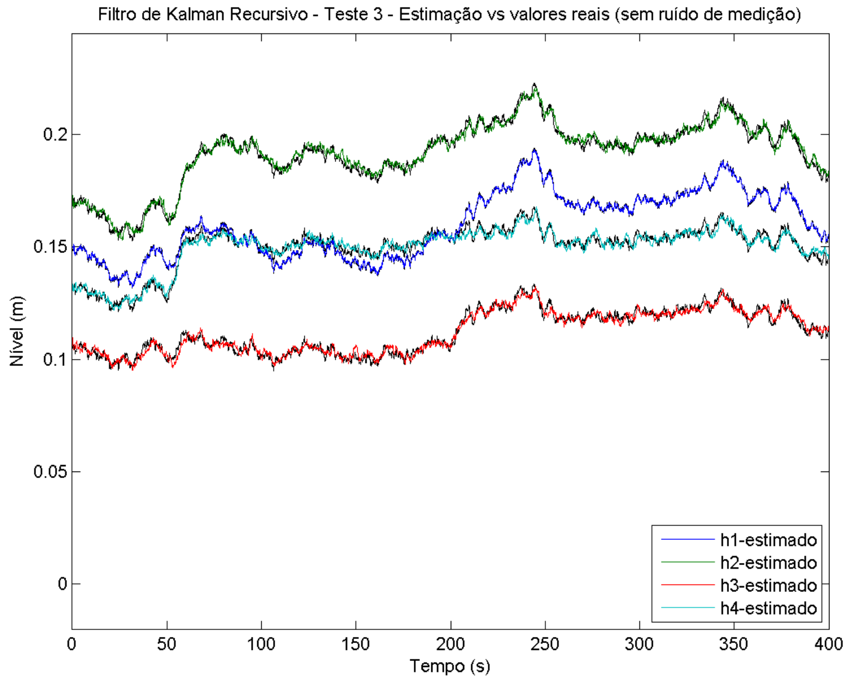


Figura I.13: Filtro de Kalman estendido - Teste 3 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

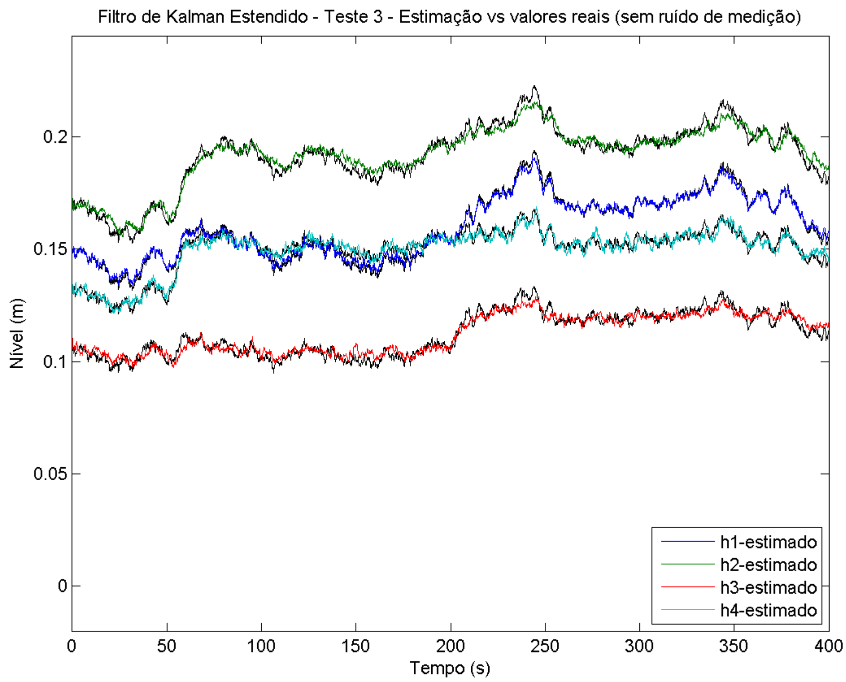


Figura I.14: Filtro de Kalman estendido - Teste 3 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

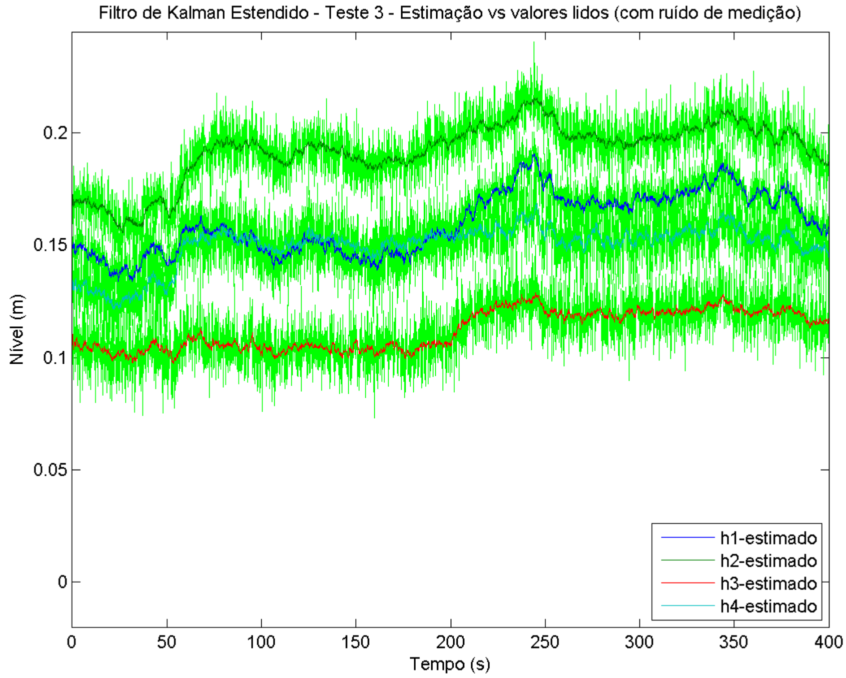


Figura I.15: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 3 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

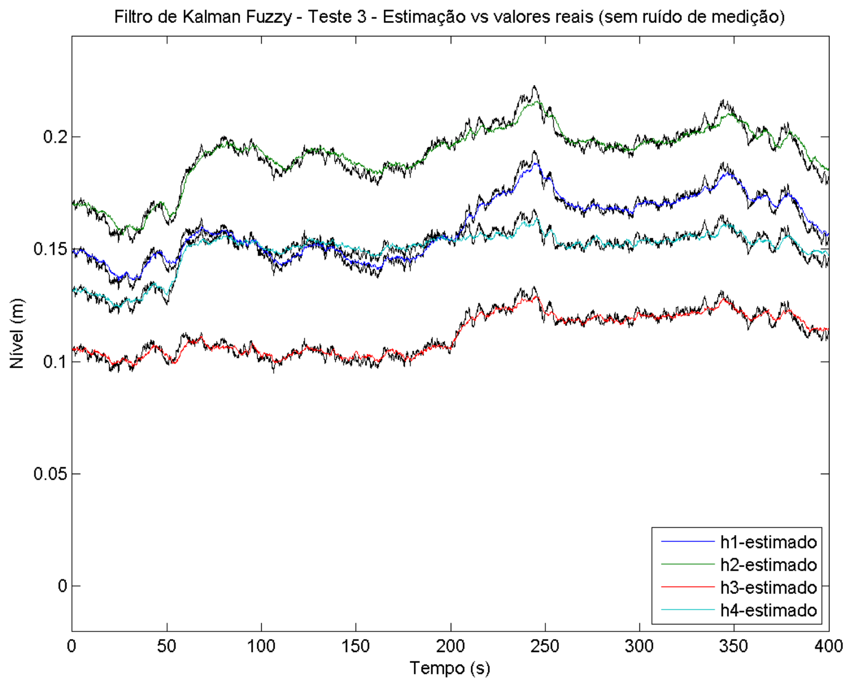


Figura I.16: Filtro de Kalman estacionário - Teste 4 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

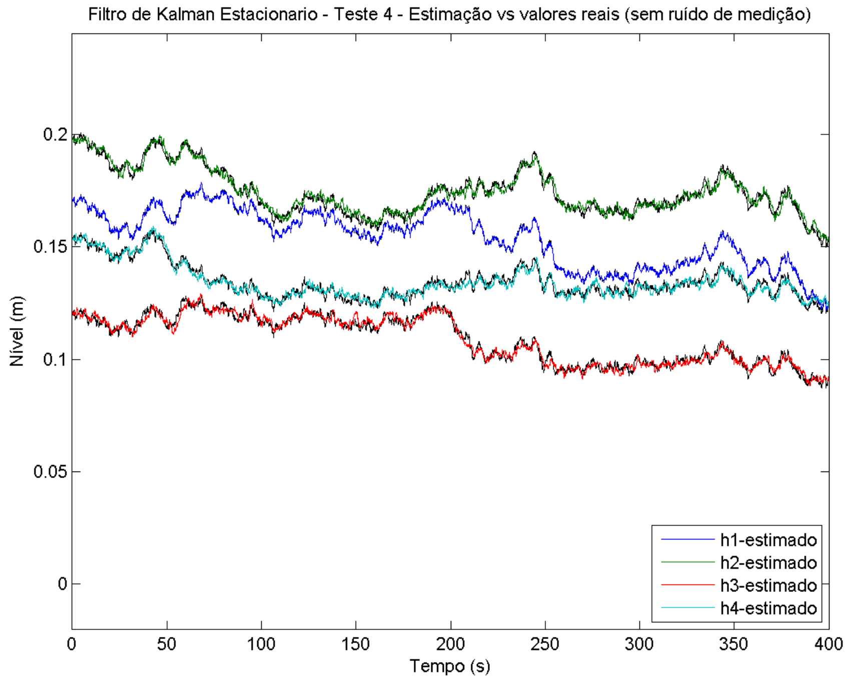


Figura I.17: Filtro de Kalman recursivo - Teste 4 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

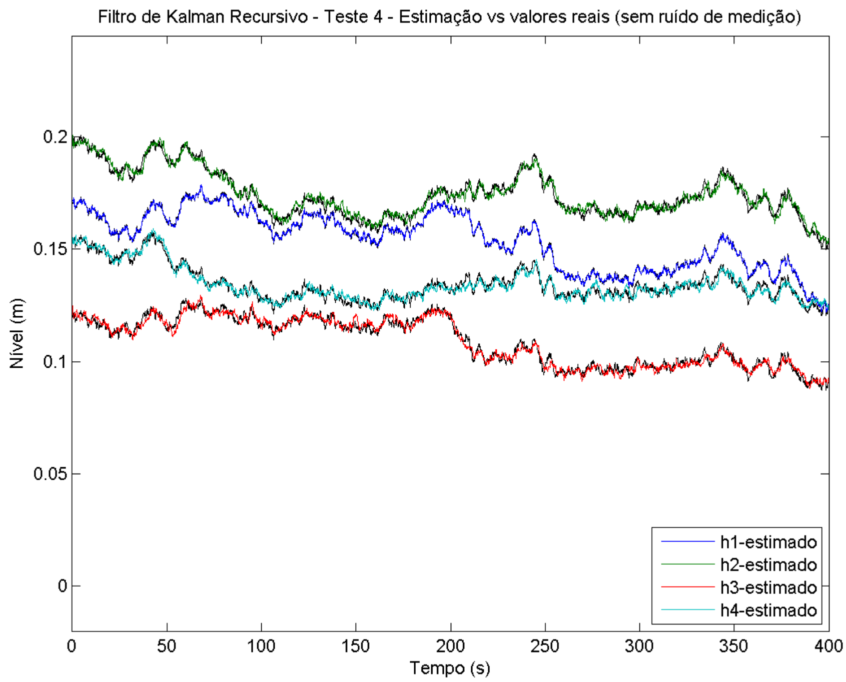


Figura I.18: Filtro de Kalman estendido - Teste 4 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

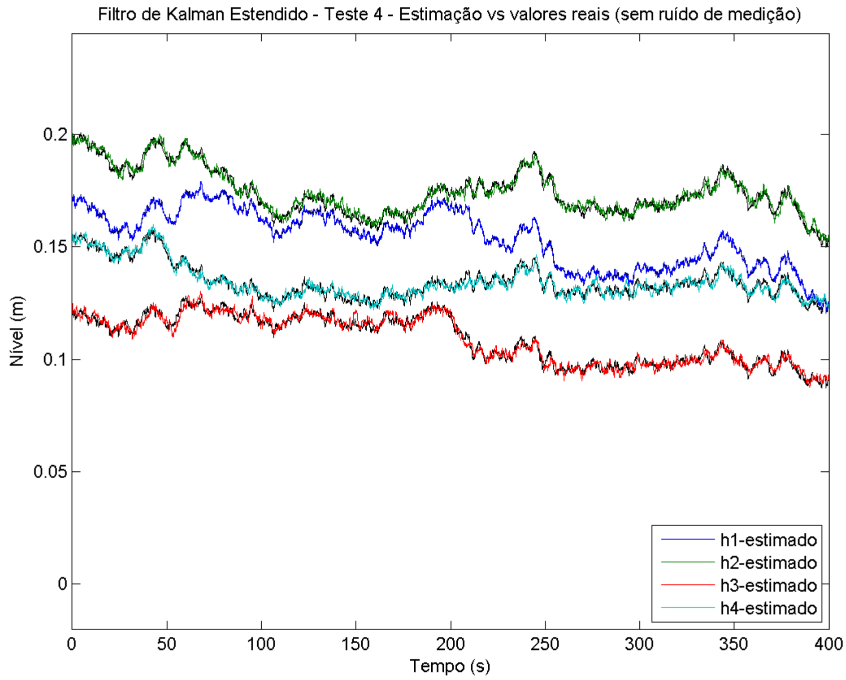


Figura I.19: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 4 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

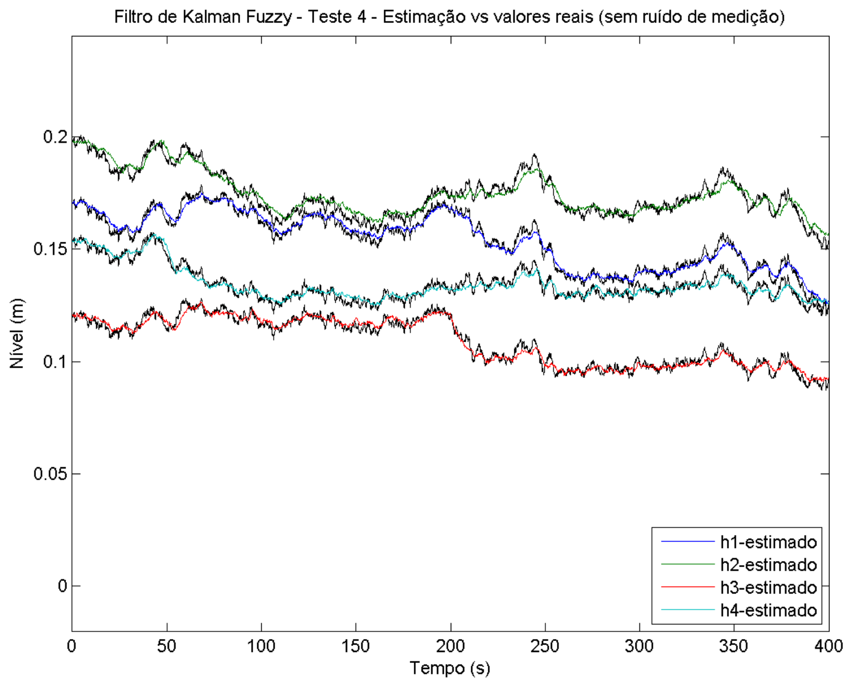


Figura I.20: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 4 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

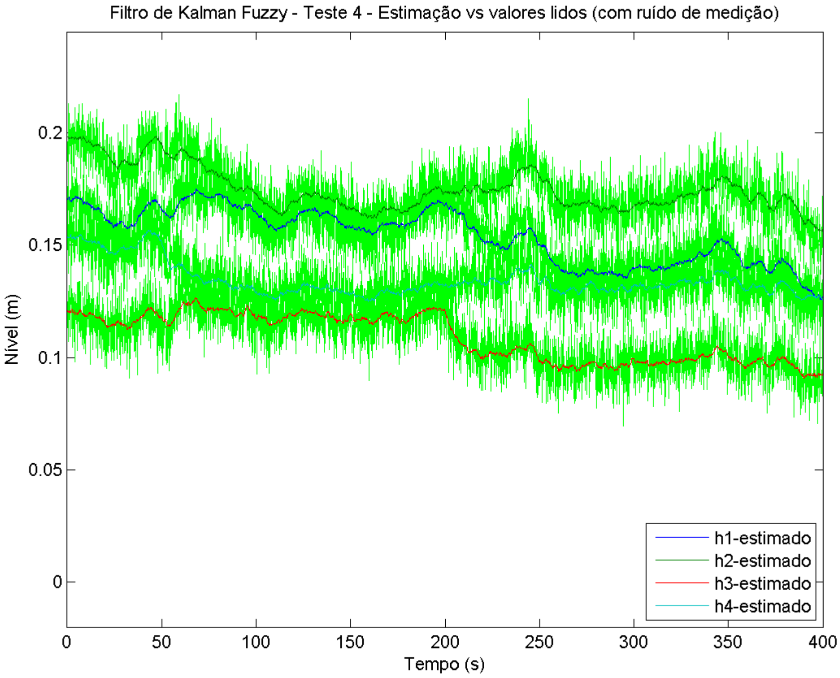


Figura I.21: Filtro de Kalman estacionário - Teste 5 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

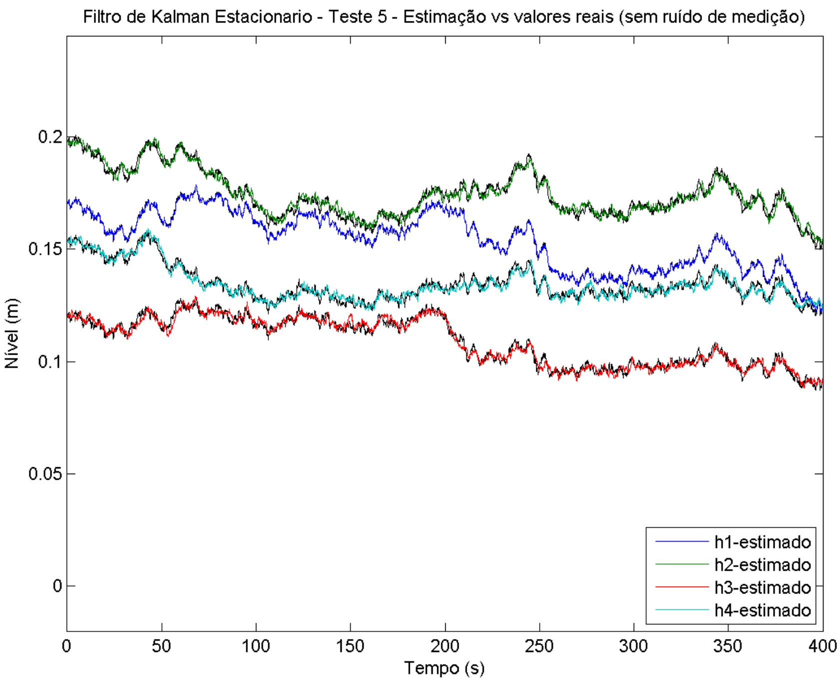


Figura I.22: Filtro de Kalman estacionário - Teste 5 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

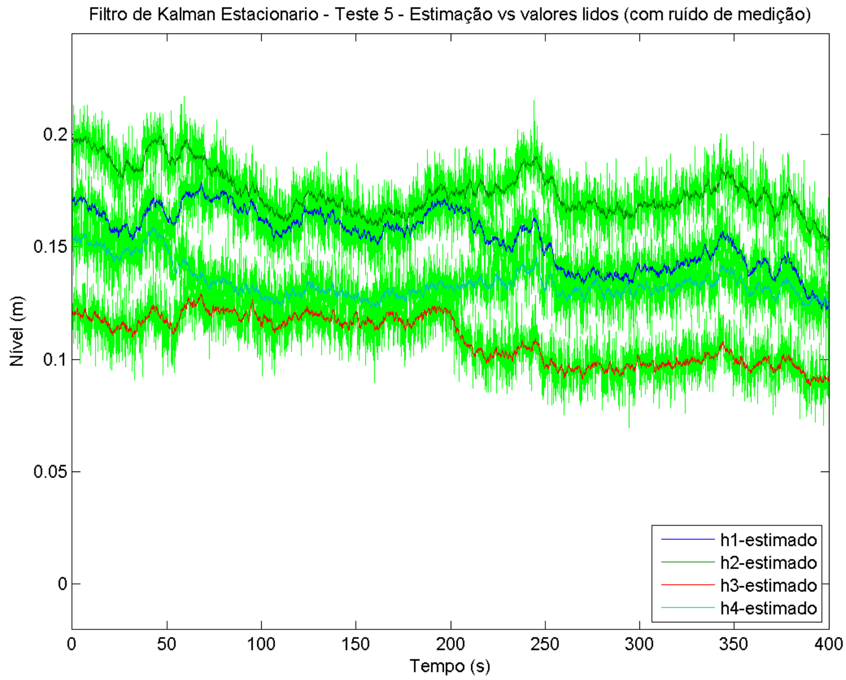


Figura I.23: Filtro de Kalman recursivo - Teste 5 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

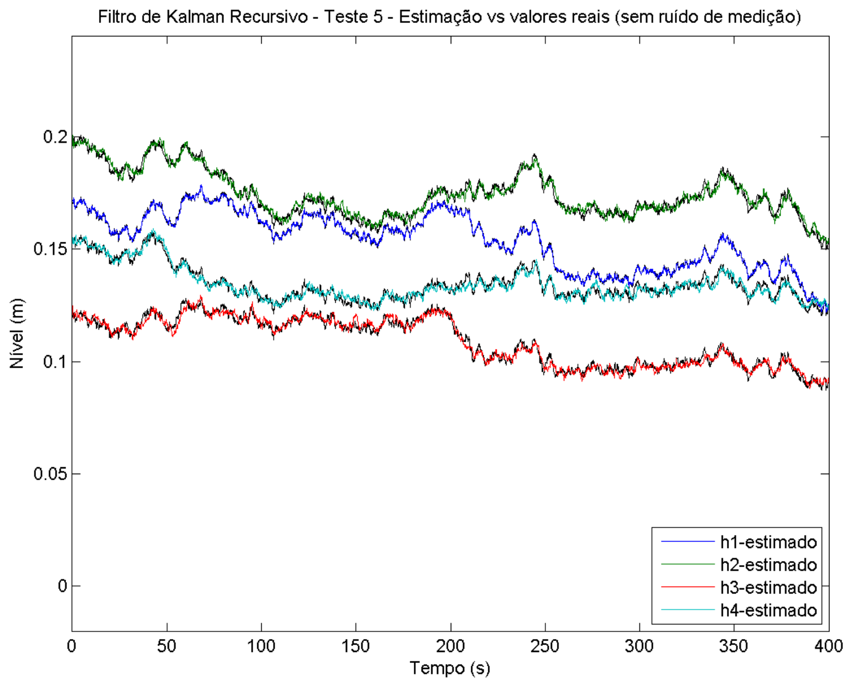


Figura I.24: Filtro de Kalman estendido - Teste 5 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

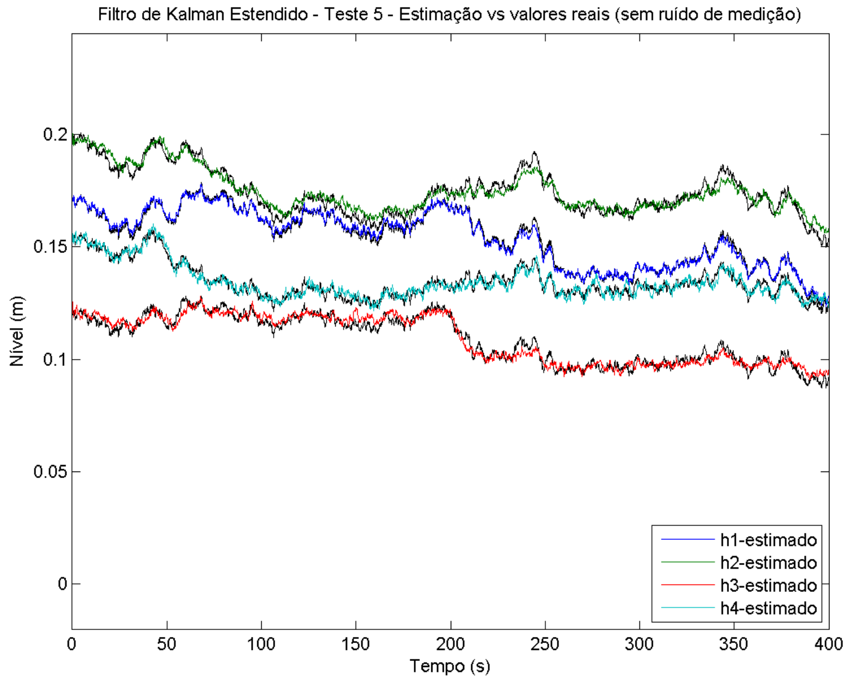


Figura I.25: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 5 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

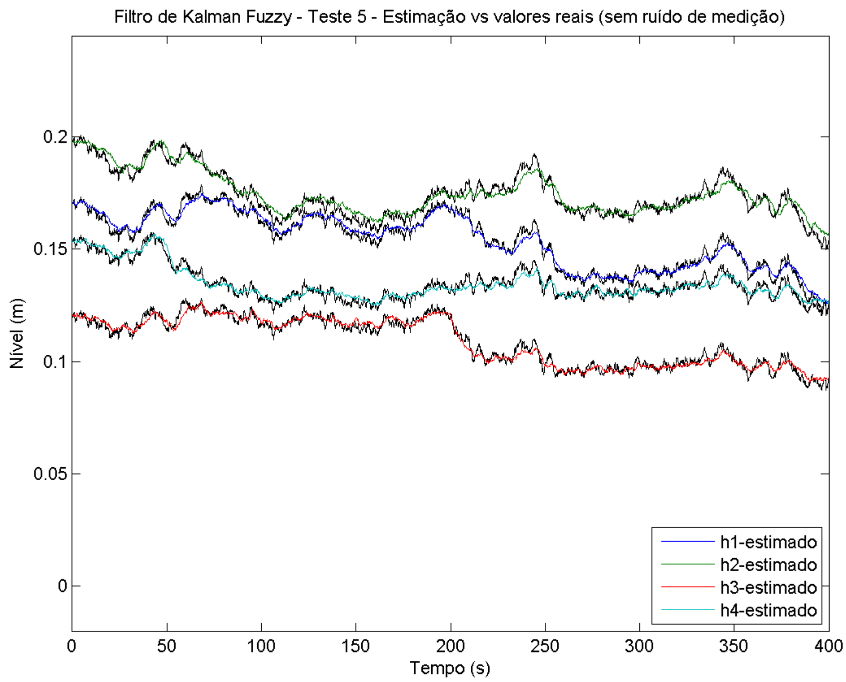


Figura I.26: Filtro de Kalman estacionário - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

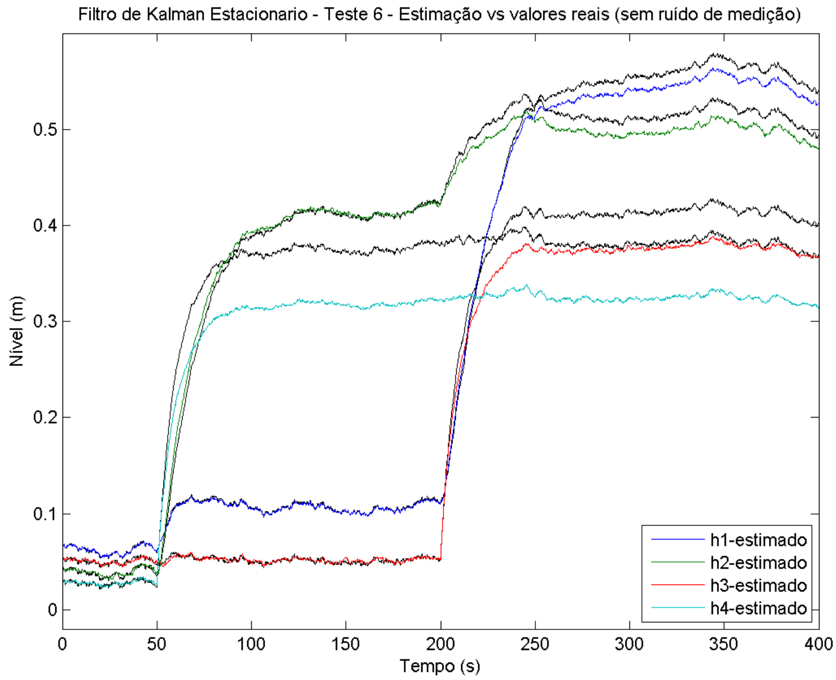


Figura I.27: Filtro de Kalman recursivo - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

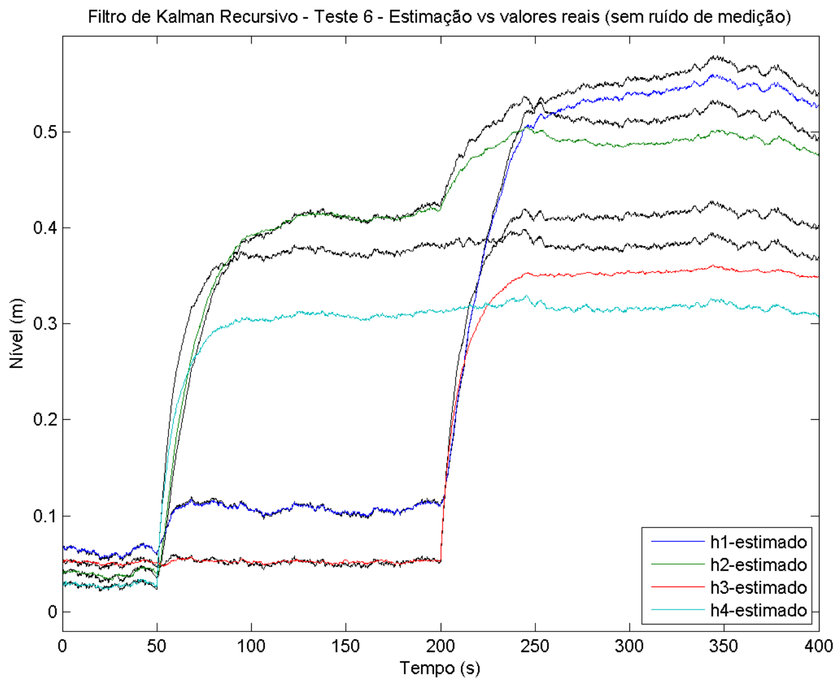


Figura I.28: Filtro de Kalman recursivo - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

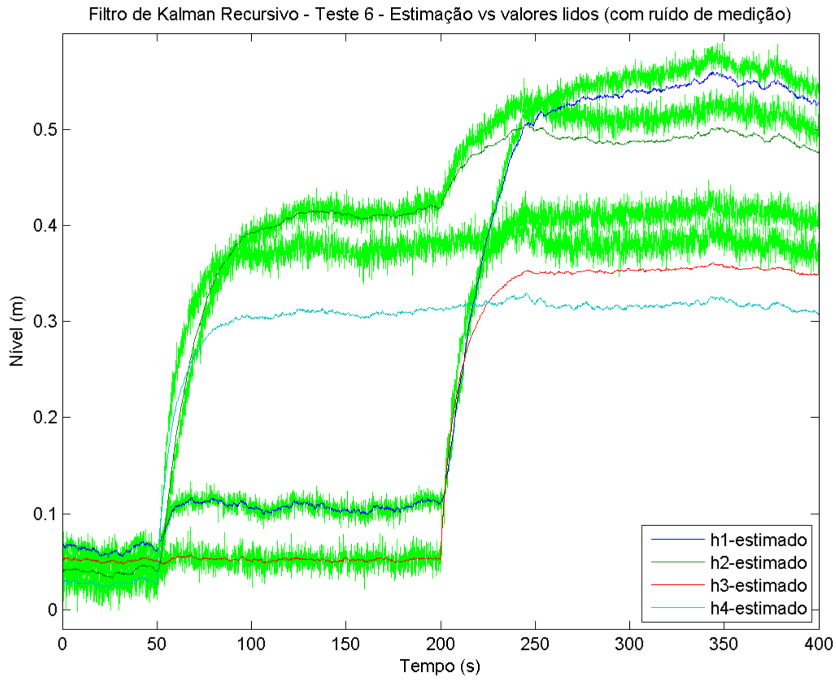


Figura I.29: Filtro de Kalman estendido - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

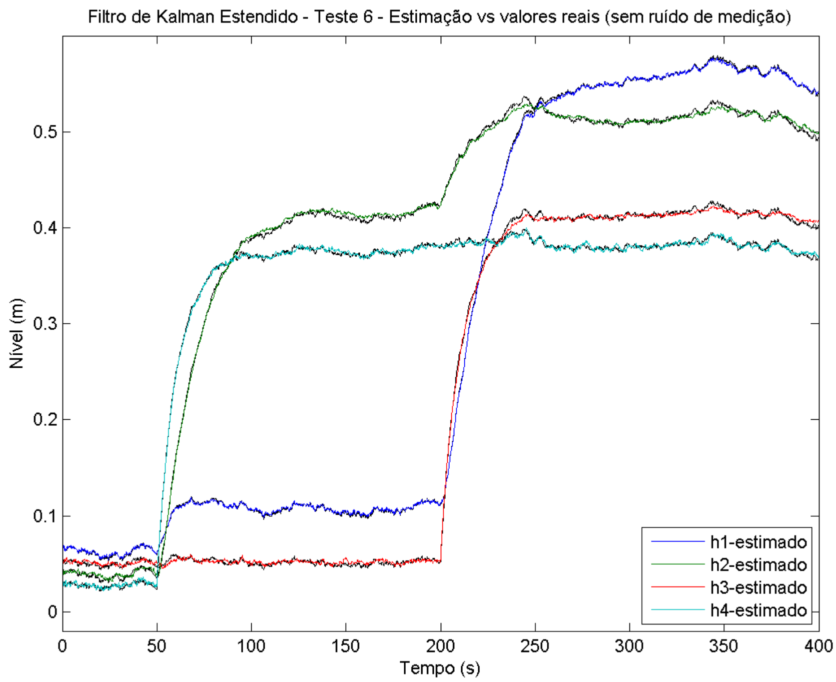


Figura I.30: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 6 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

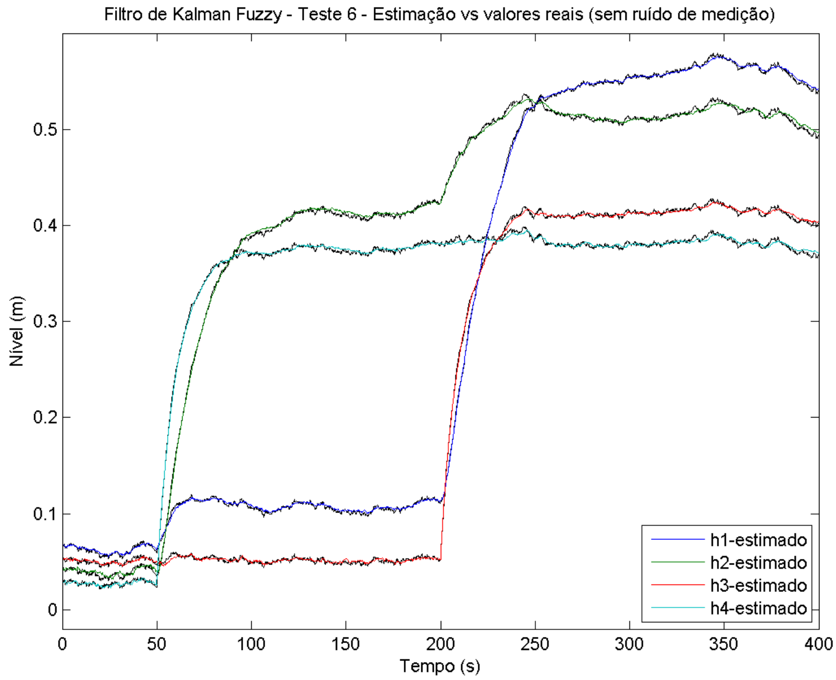


Figura I.31: Filtro de Kalman estacionário - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

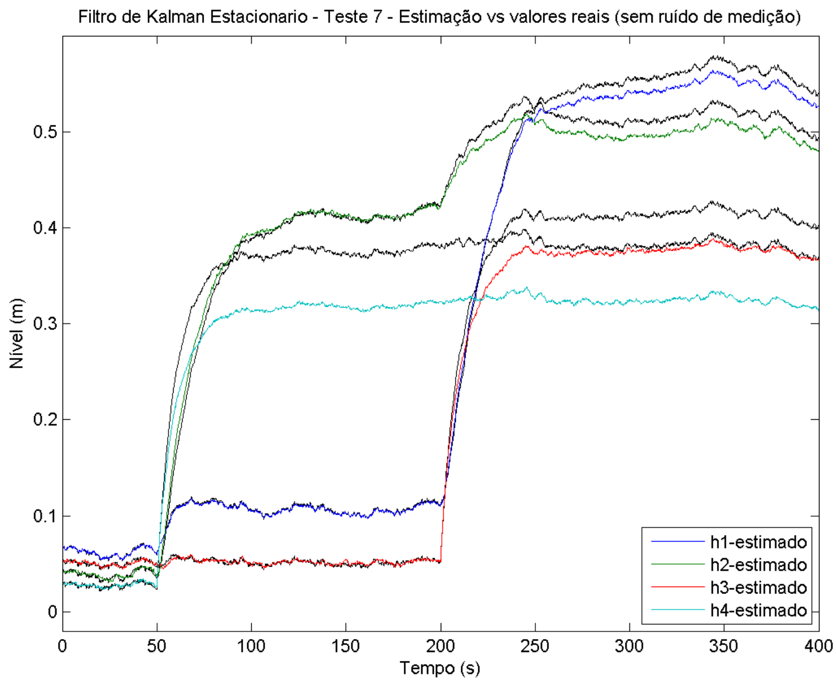


Figura I.32: Filtro de Kalman recursivo - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

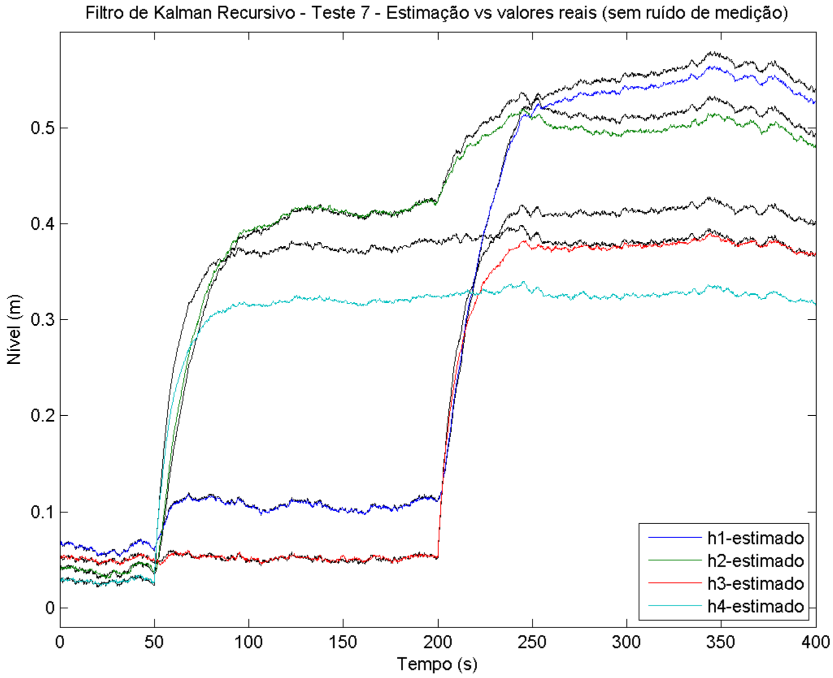


Figura I.33: Filtro de Kalman estendido - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

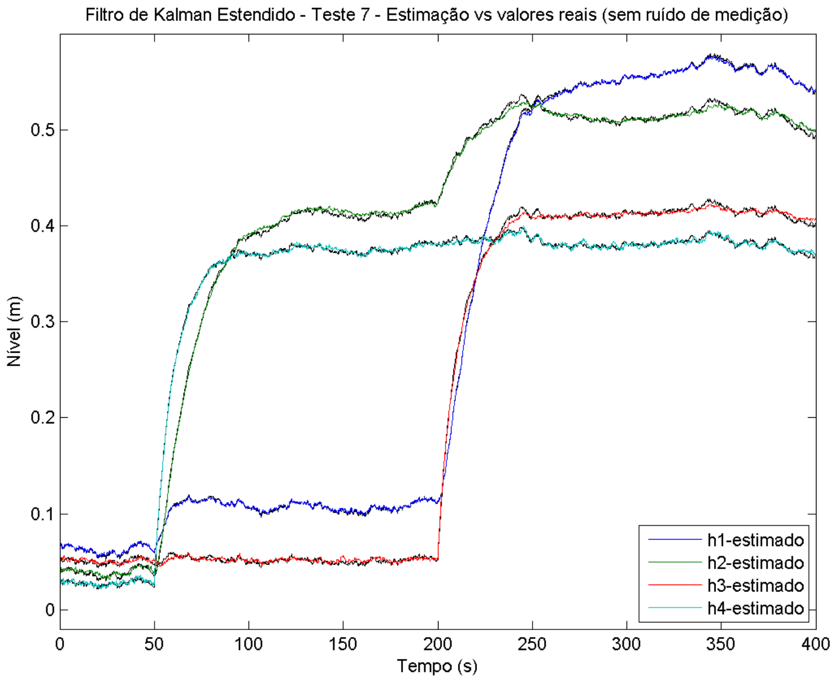


Figura I.34: Filtro de Kalman estendido - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

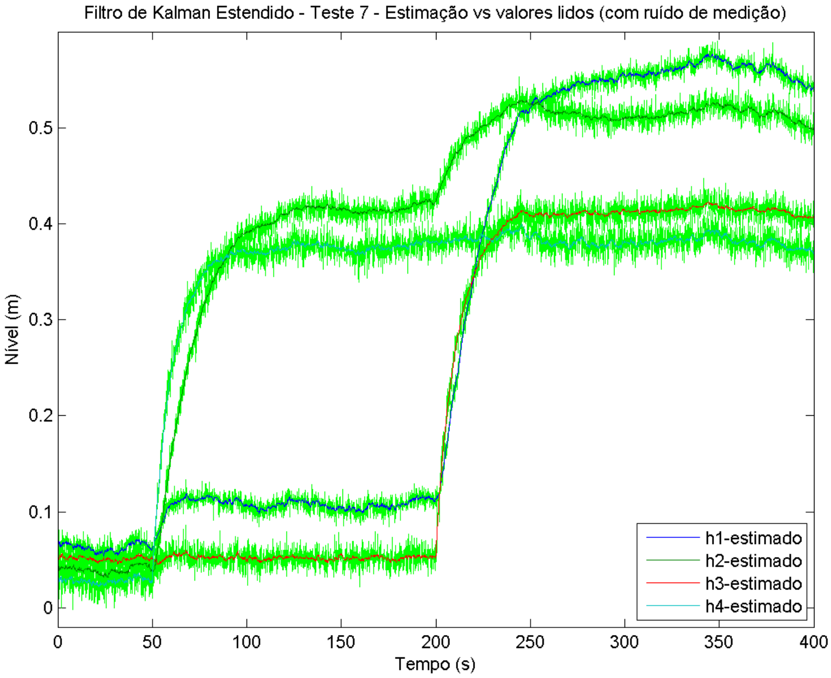


Figura I.35: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 7 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

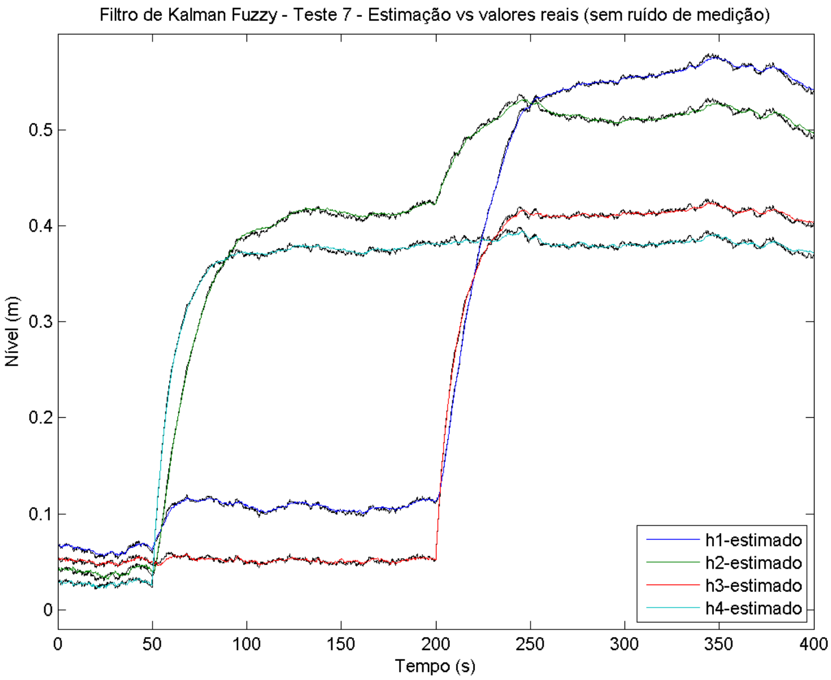


Figura I.36: Filtro de Kalman estacionário - Teste 8 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

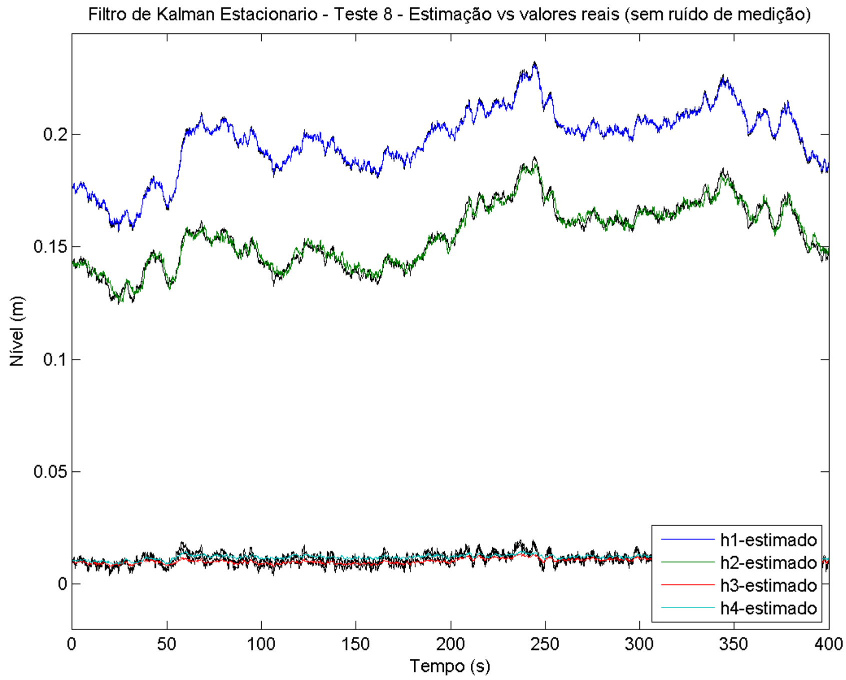


Figura I.37: Filtro de Kalman recursivo - Teste 8 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

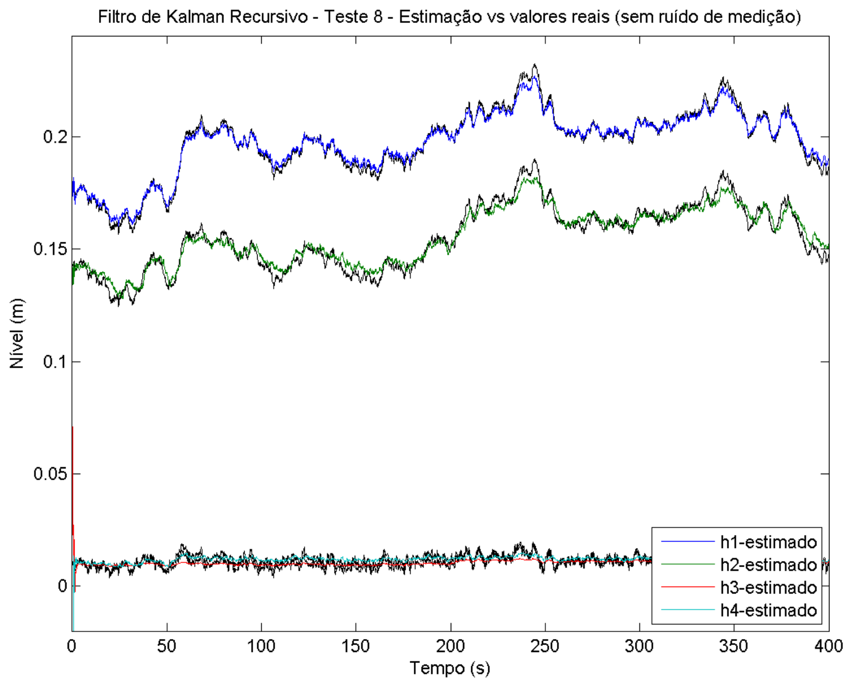


Figura I.38: Filtro de Kalman estendido - Teste 8 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

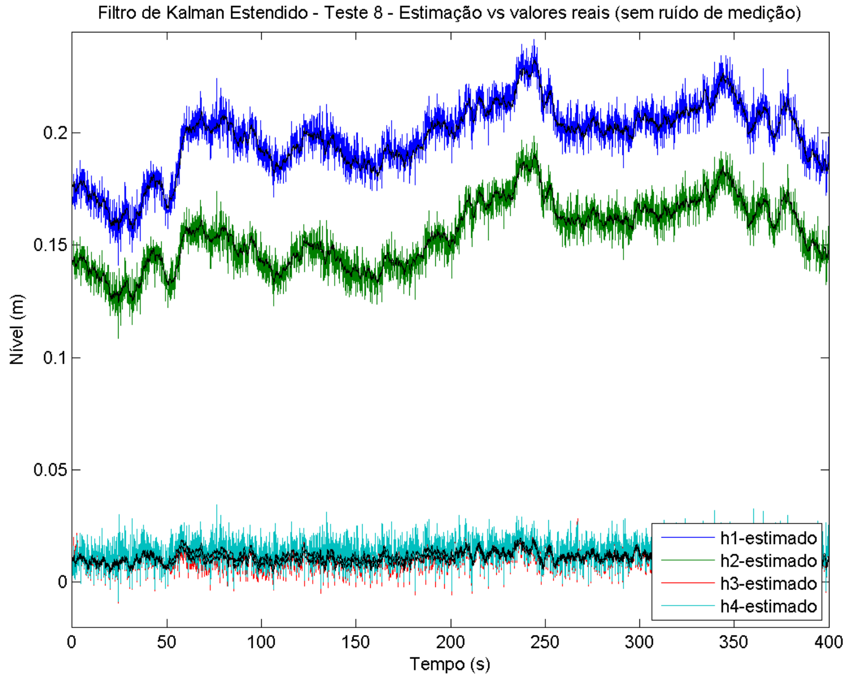


Figura I.39: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 8 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

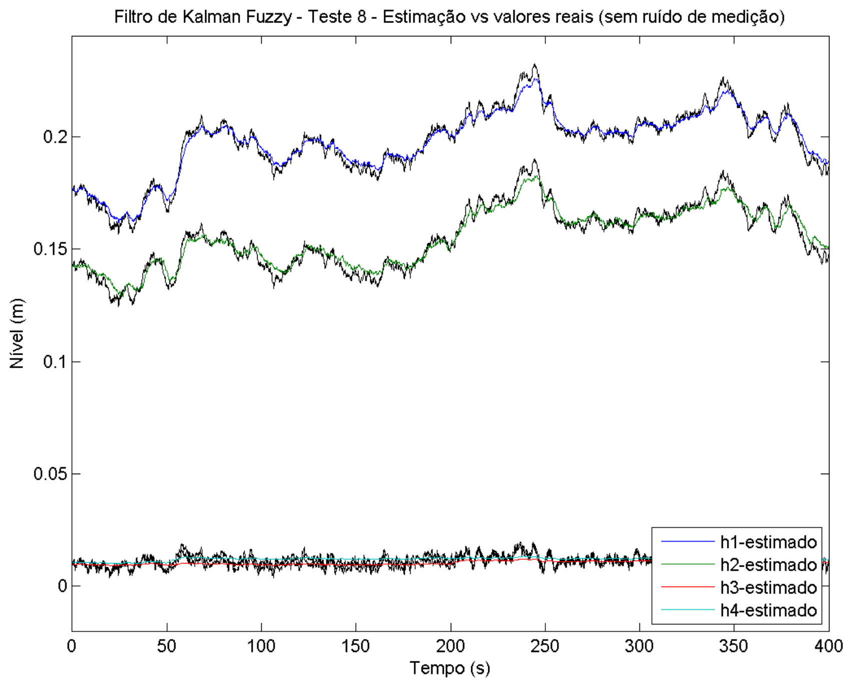


Figura I.40: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 8 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

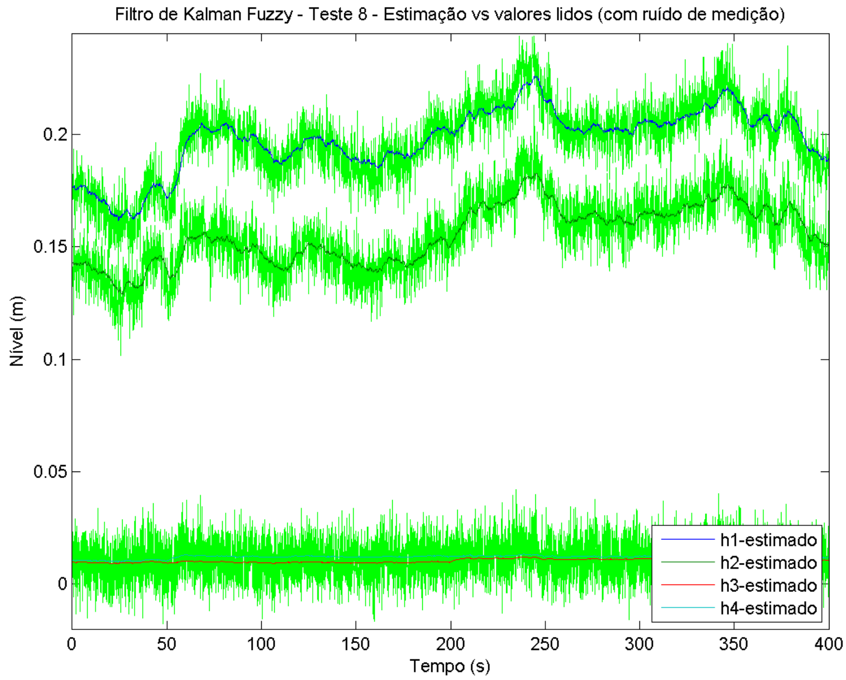


Figura I.41: Filtro de Kalman estacionário - Teste 9 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

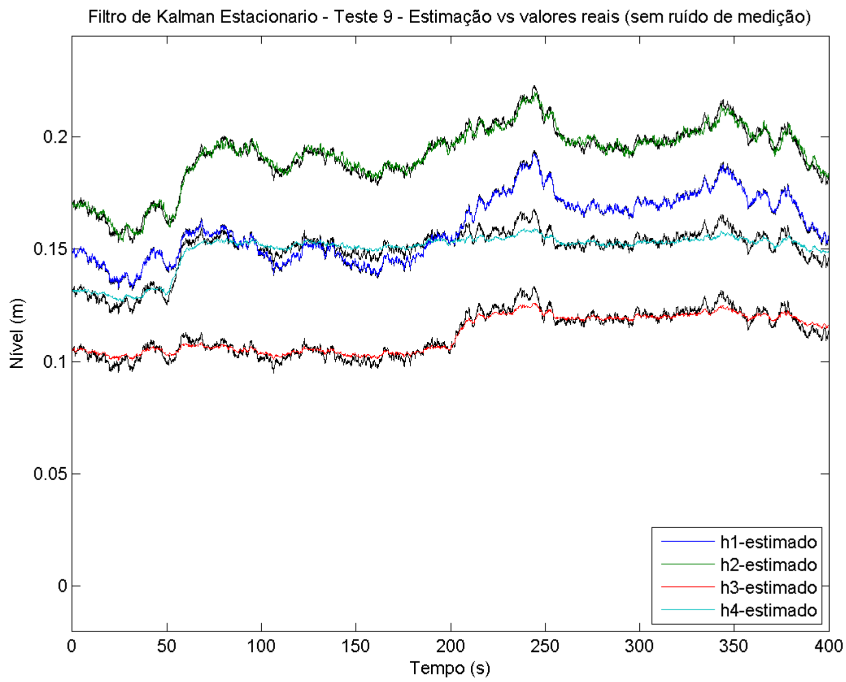


Figura I.42: Filtro de Kalman estacionário - Teste 9 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

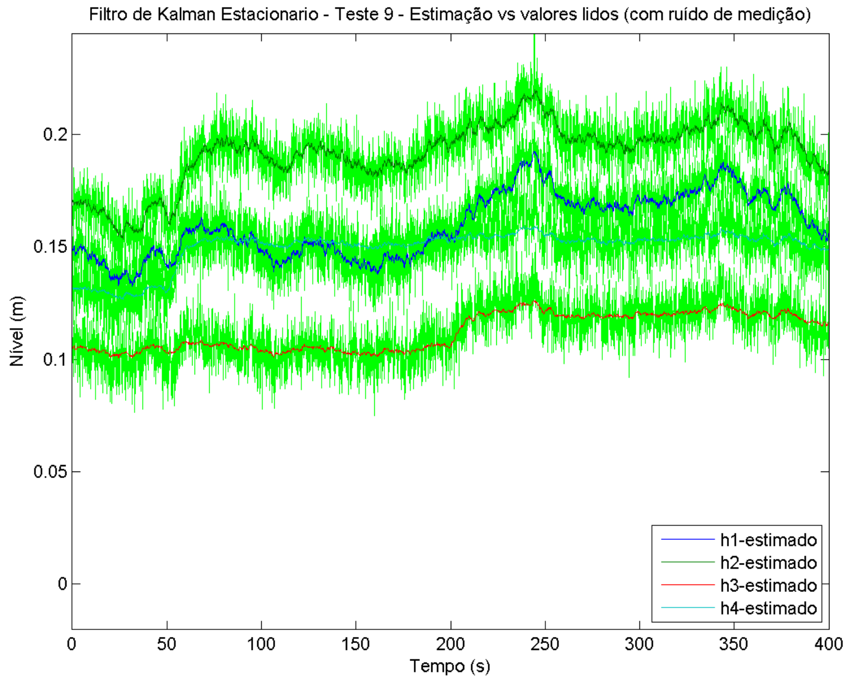


Figura I.43: Filtro de Kalman recursivo - Teste 9 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

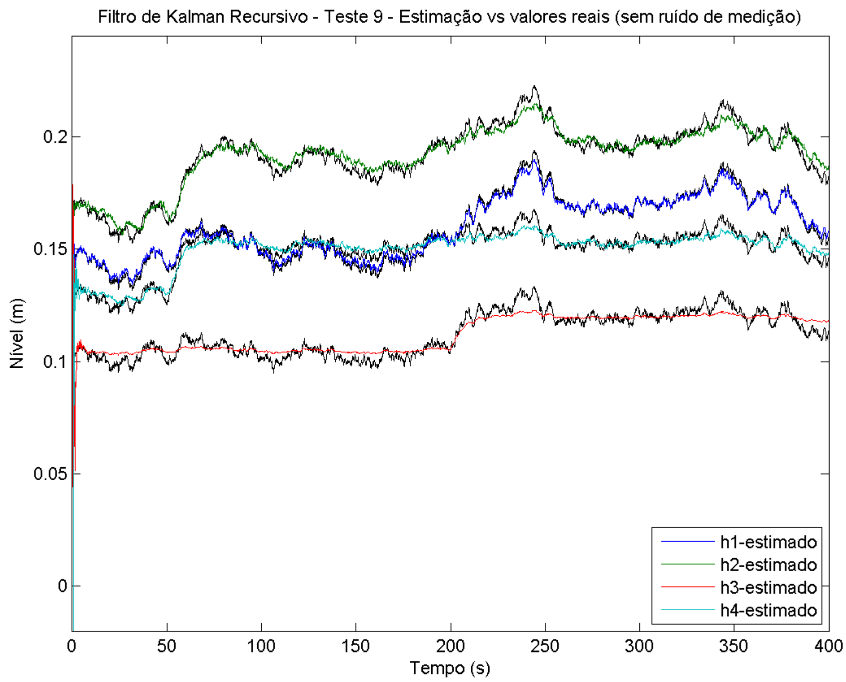


Figura I.44: Filtro de Kalman estendido - Teste 9 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

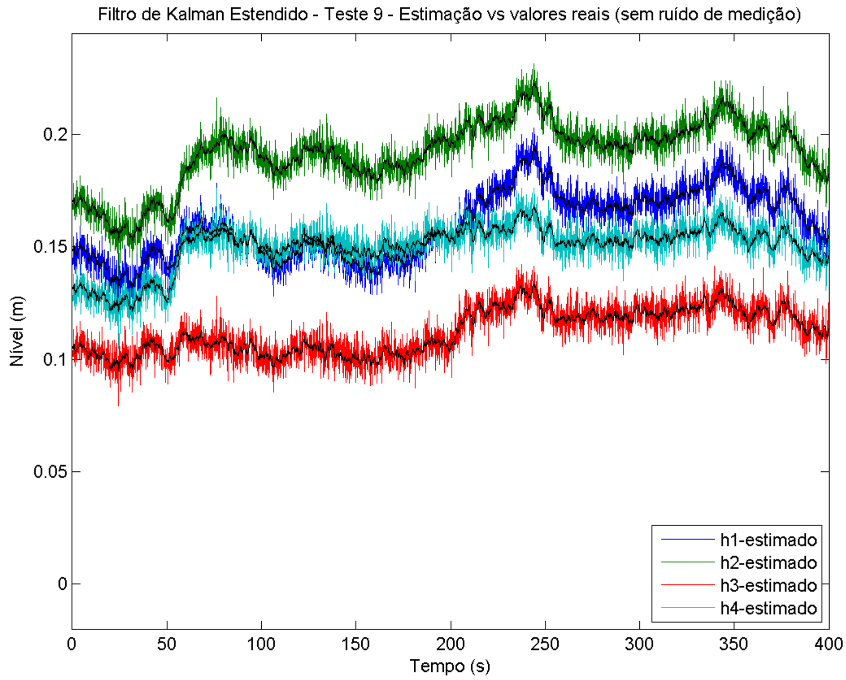


Figura I.45: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 9 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

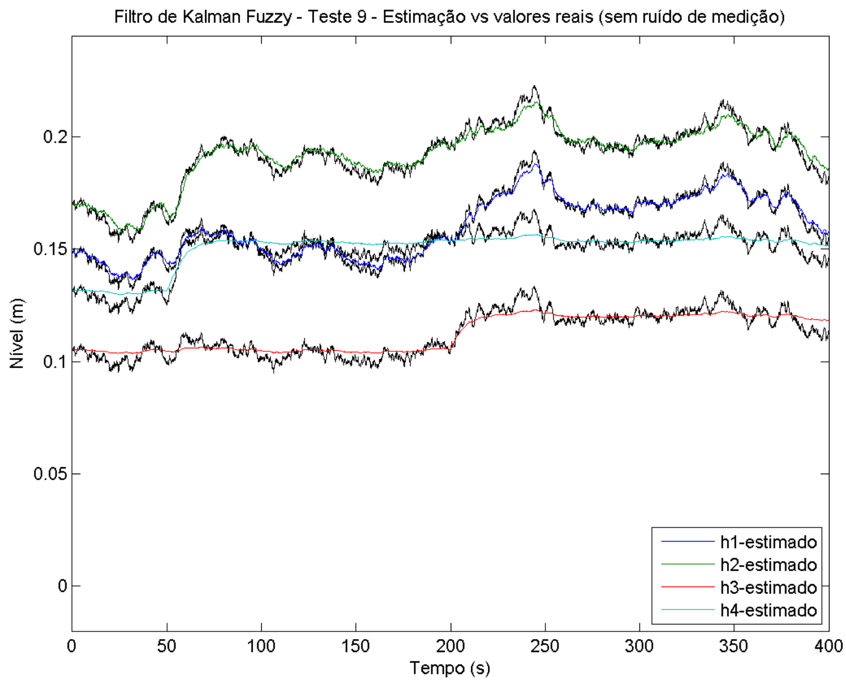


Figura I.46: Filtro de Kalman estacionário - Teste 10 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

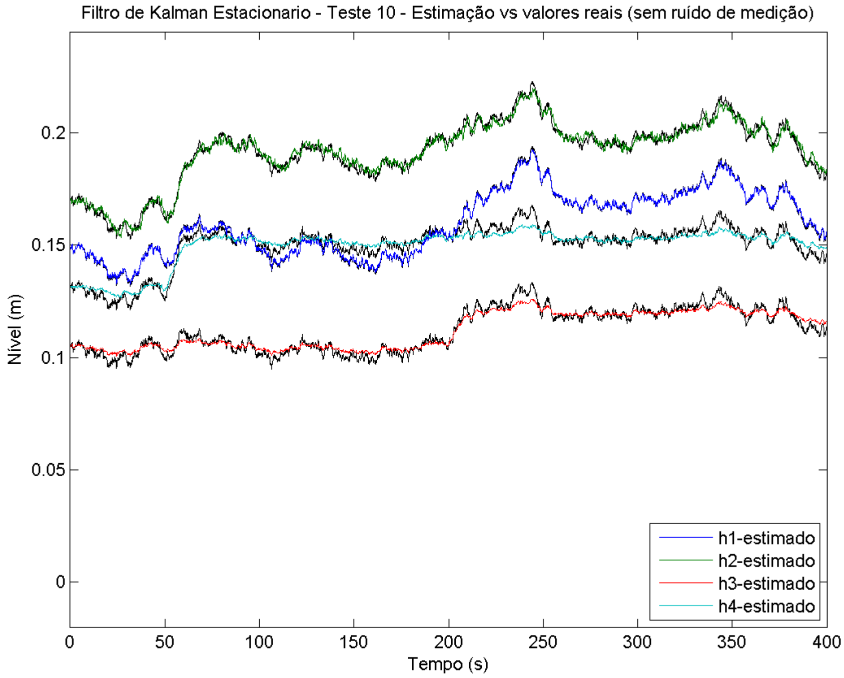


Figura I.47: Filtro de Kalman recursivo - Teste 10 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

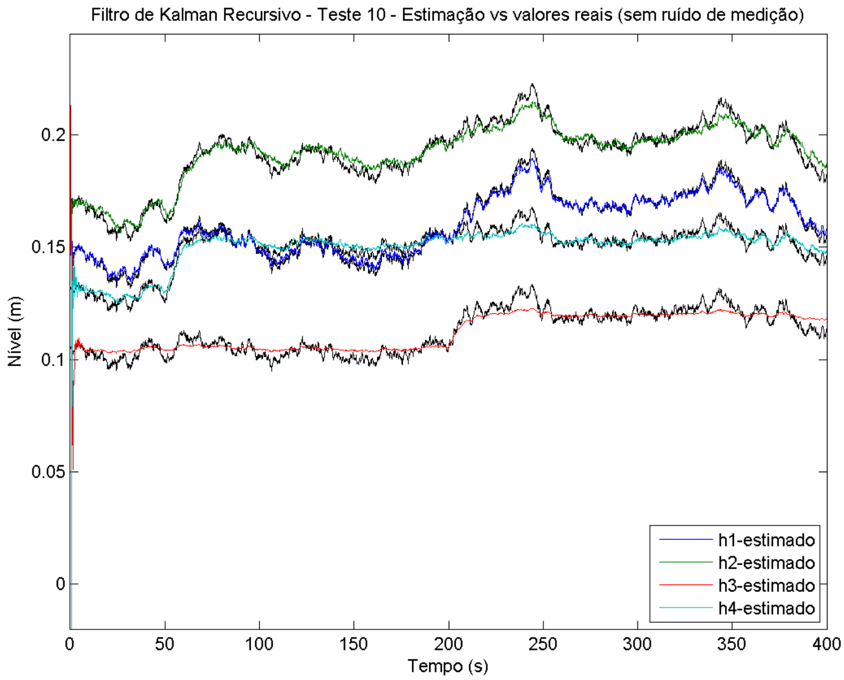


Figura I.48: Filtro de Kalman recursivo - Teste 10 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

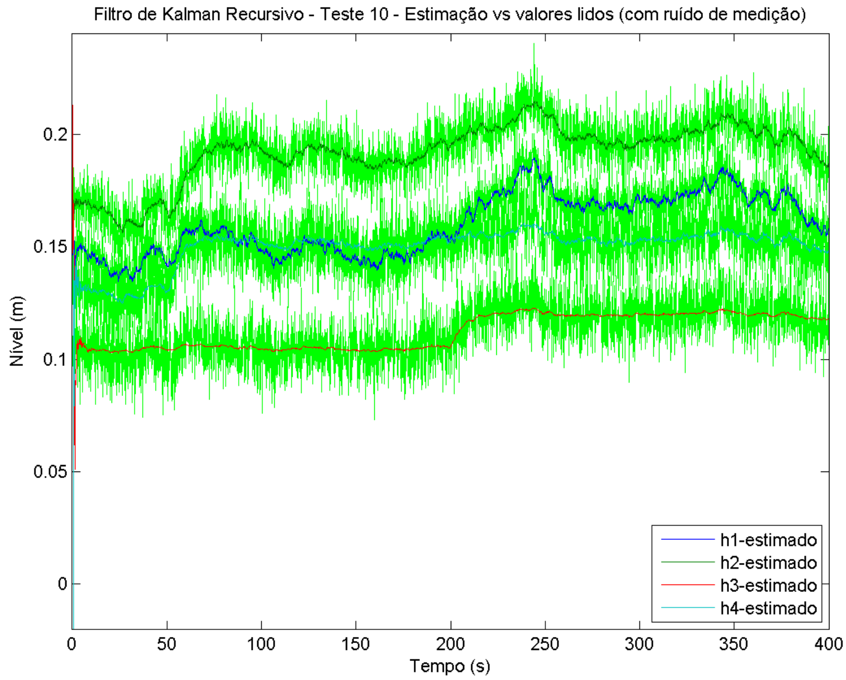


Figura I.49: Filtro de Kalman estendido - Teste 10 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

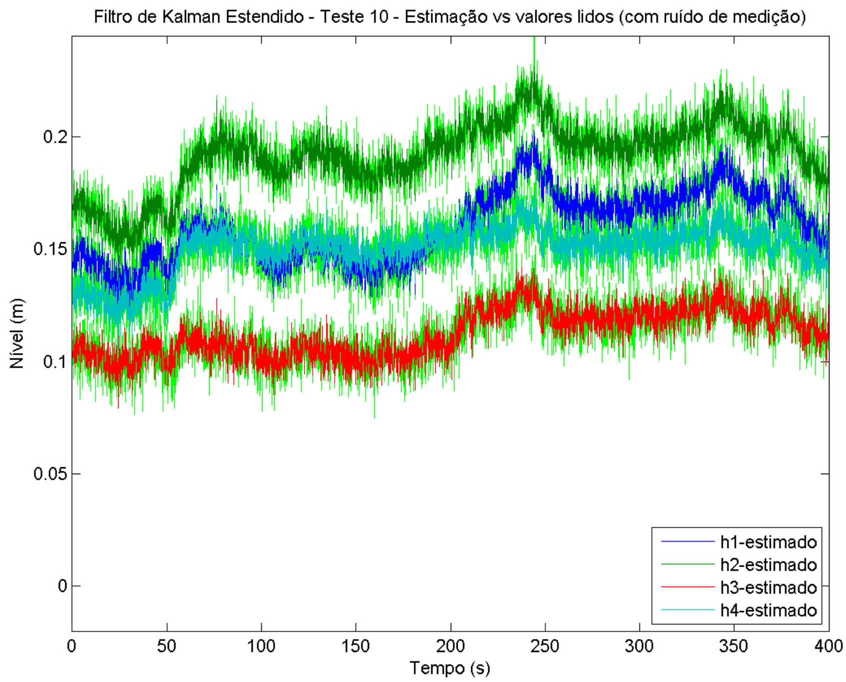


Figura I.50: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 10 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

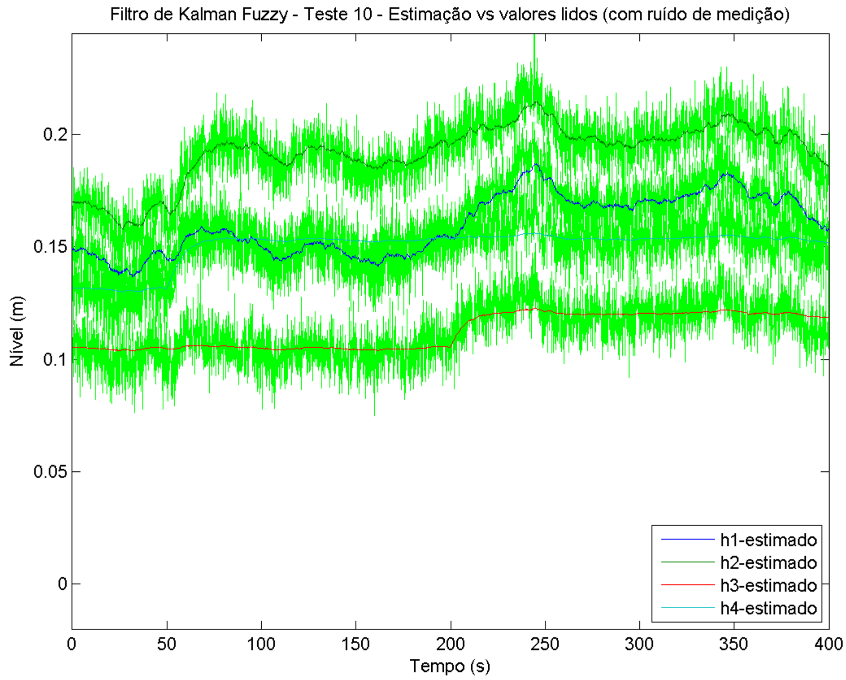


Figura I.51: Filtro de Kalman estacionário - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

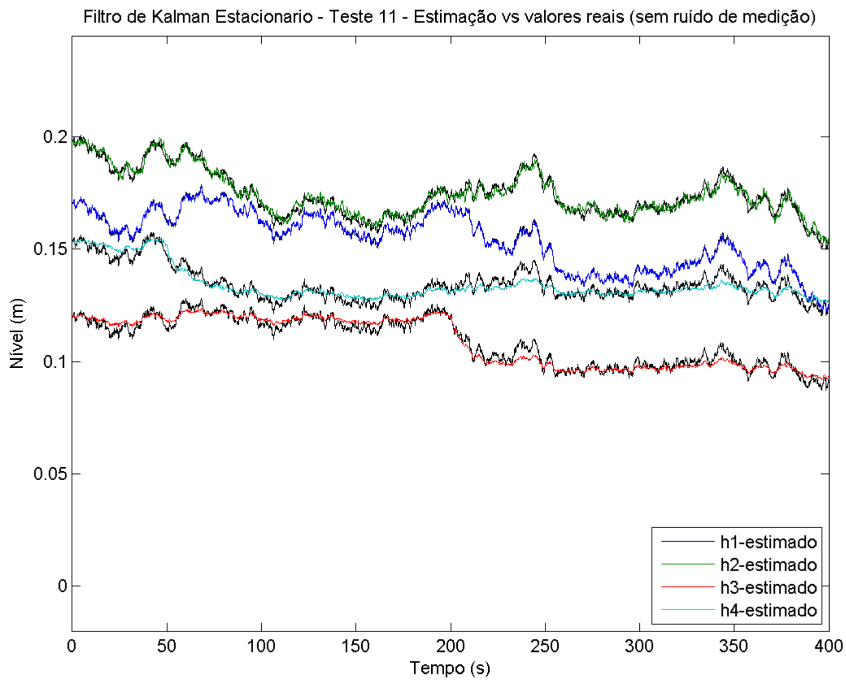


Figura I.52: Filtro de Kalman recursivo - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

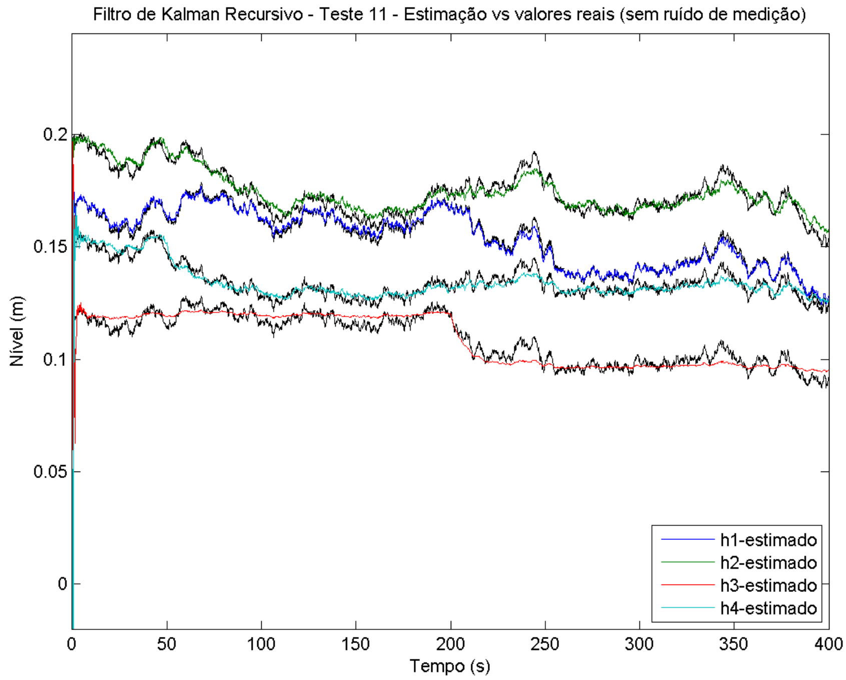


Figura I.53: Filtro de Kalman estendido - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

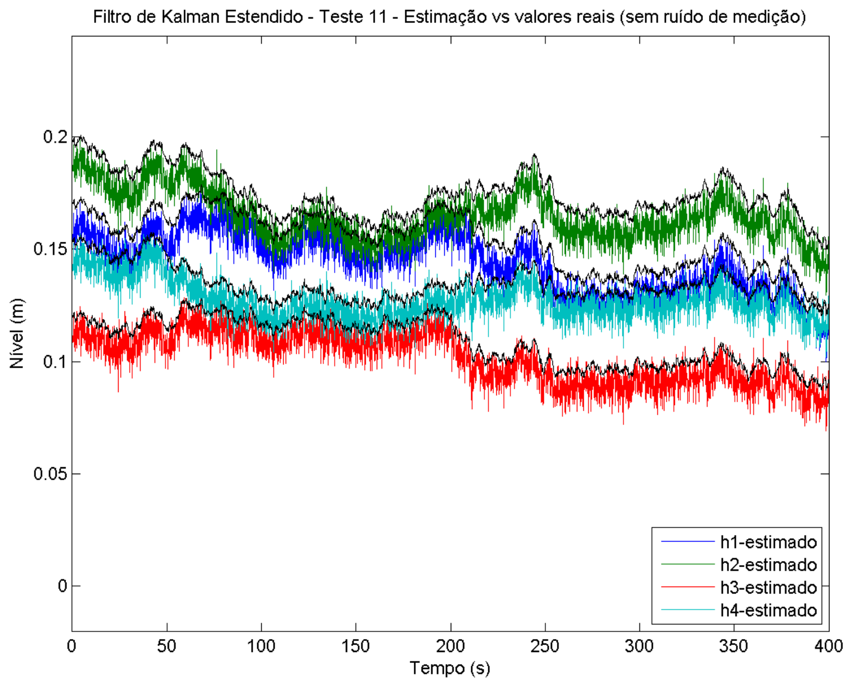


Figura I.54: Filtro de Kalman estendido - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

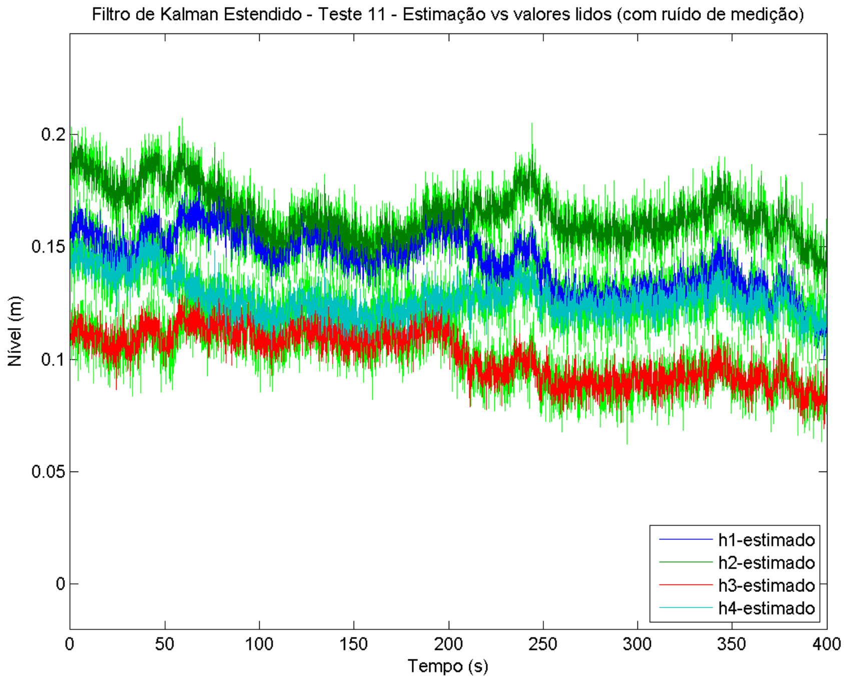


Figura I.55: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 11 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

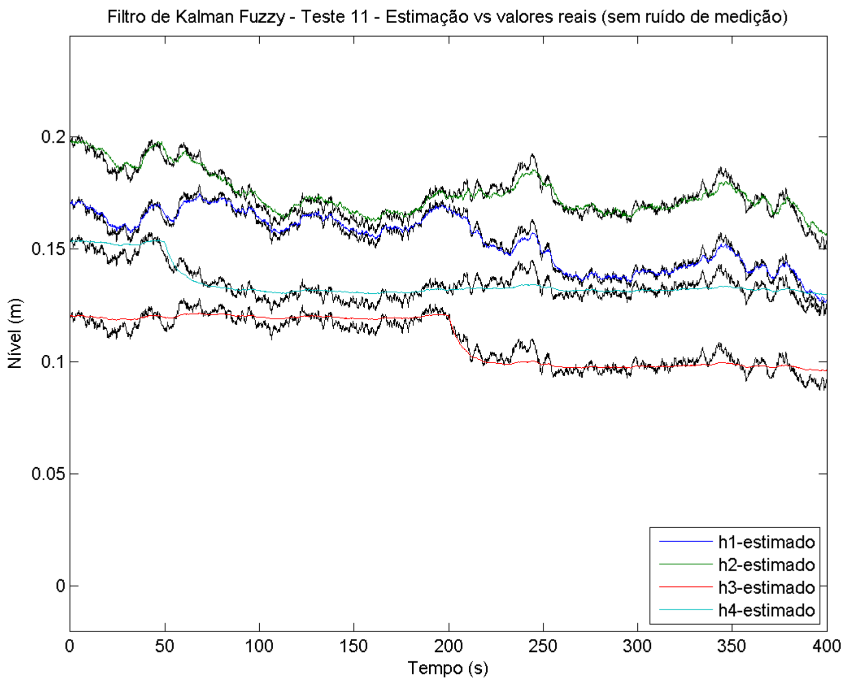


Figura I.56: Filtro de Kalman estacionário - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

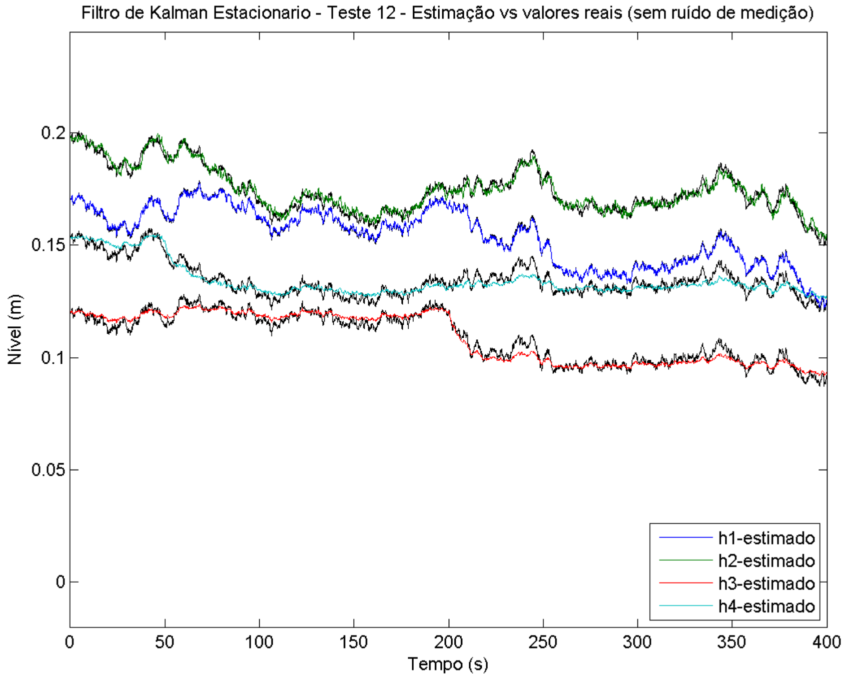


Figura I.57: Filtro de Kalman recursivo - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

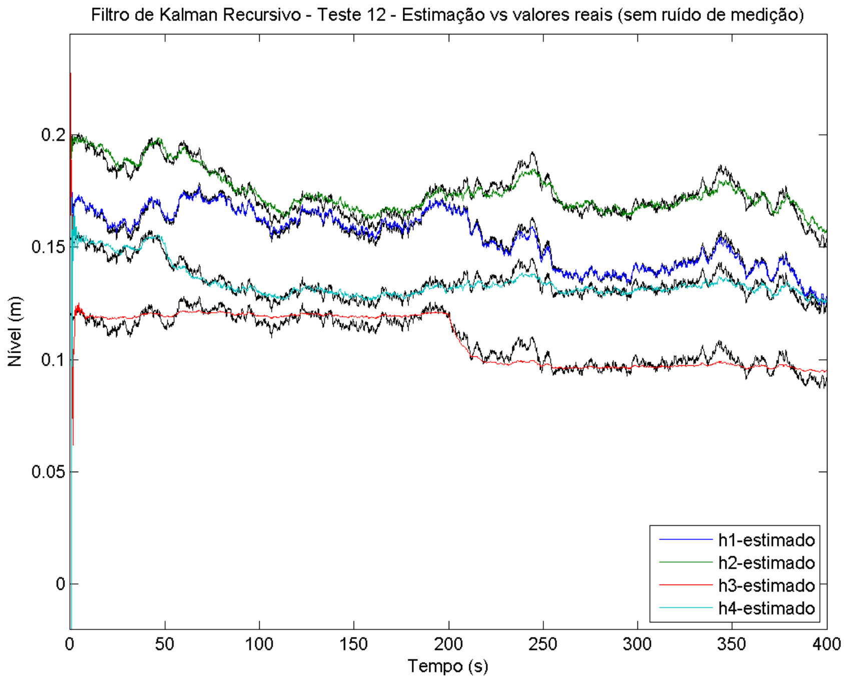


Figura I.58: Filtro de Kalman estendido - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

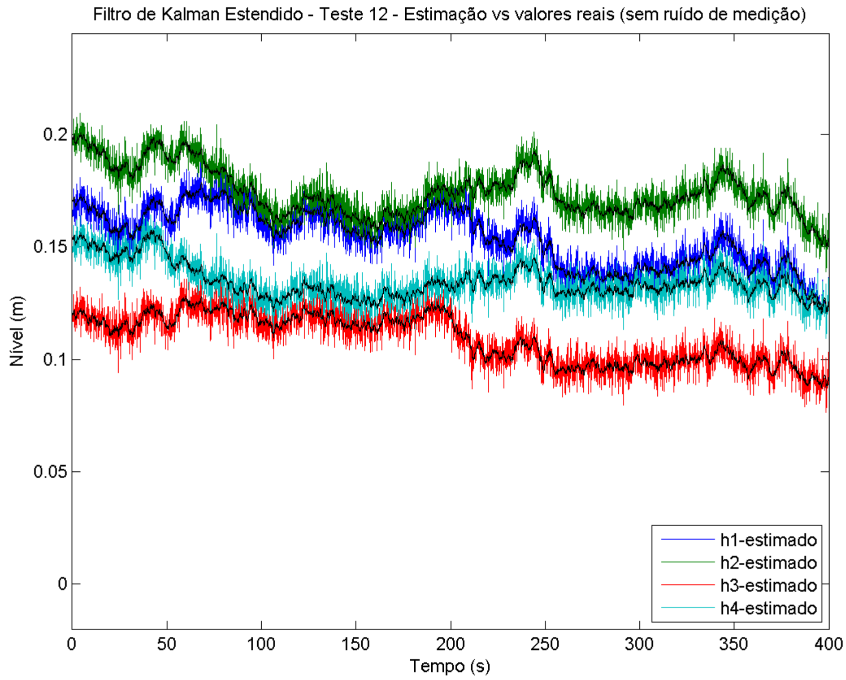


Figura I.59: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

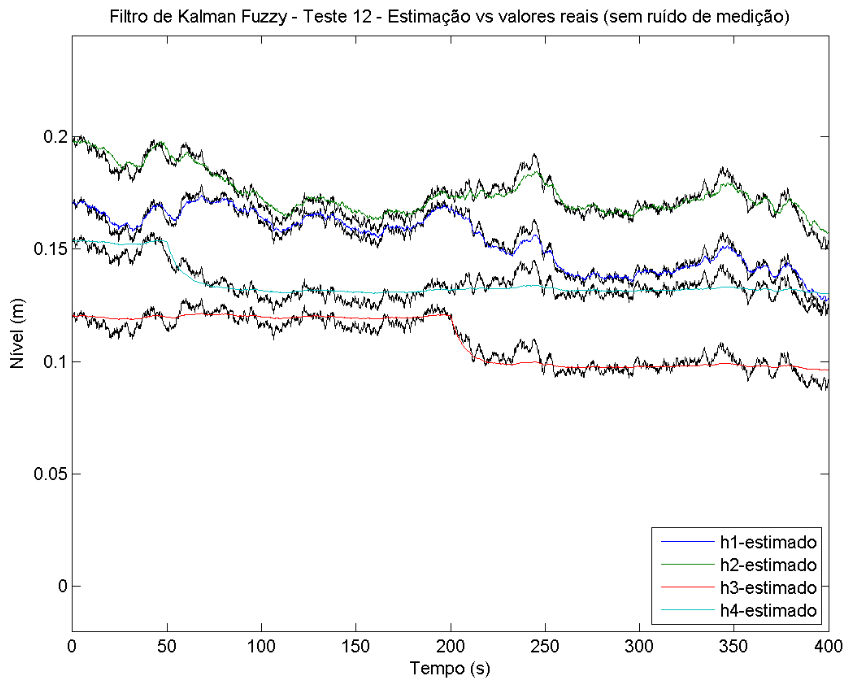


Figura I.60: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 12 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

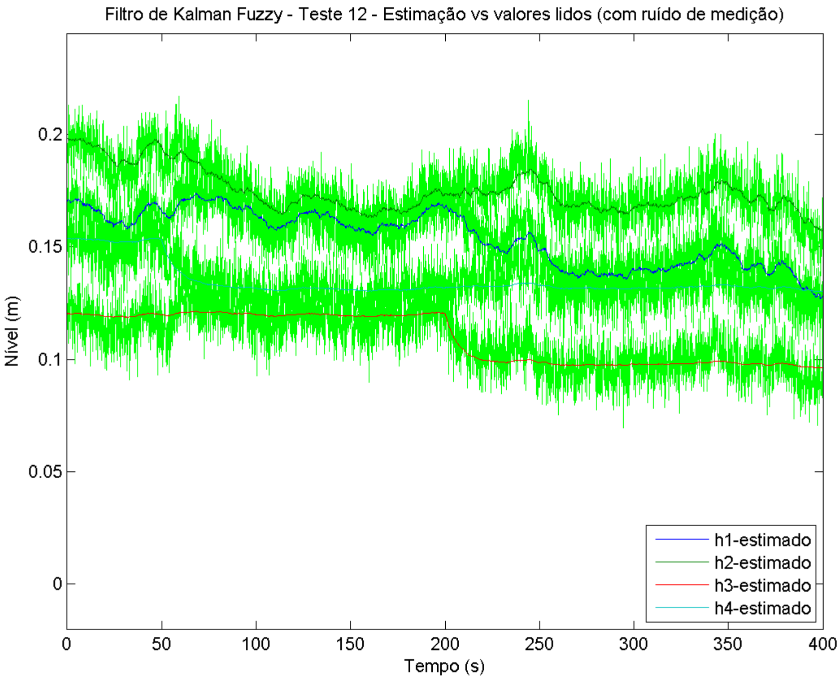


Figura I.61: Filtro de Kalman estacionário - Teste 13 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

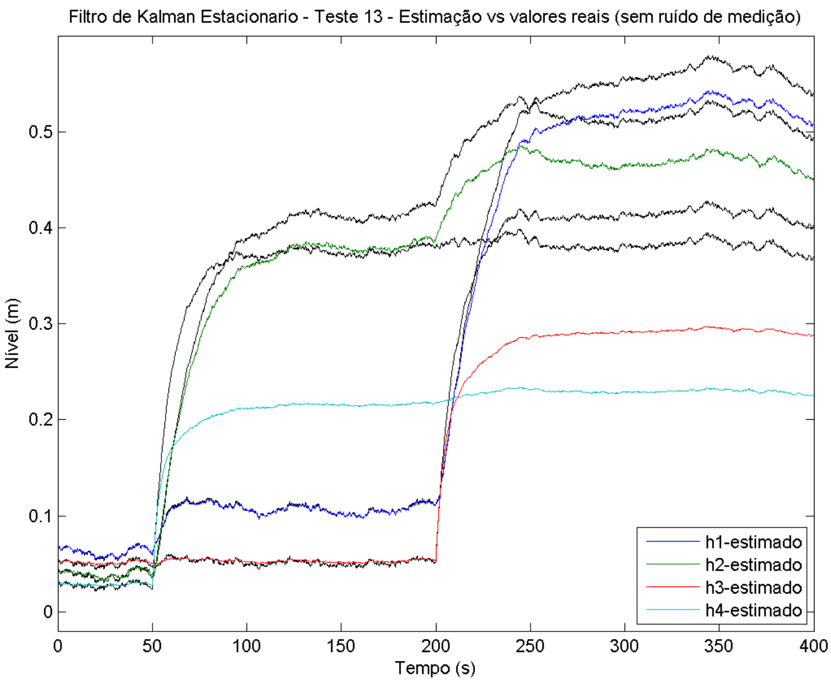


Figura I.62: Filtro de Kalman estacionário - Teste 13 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

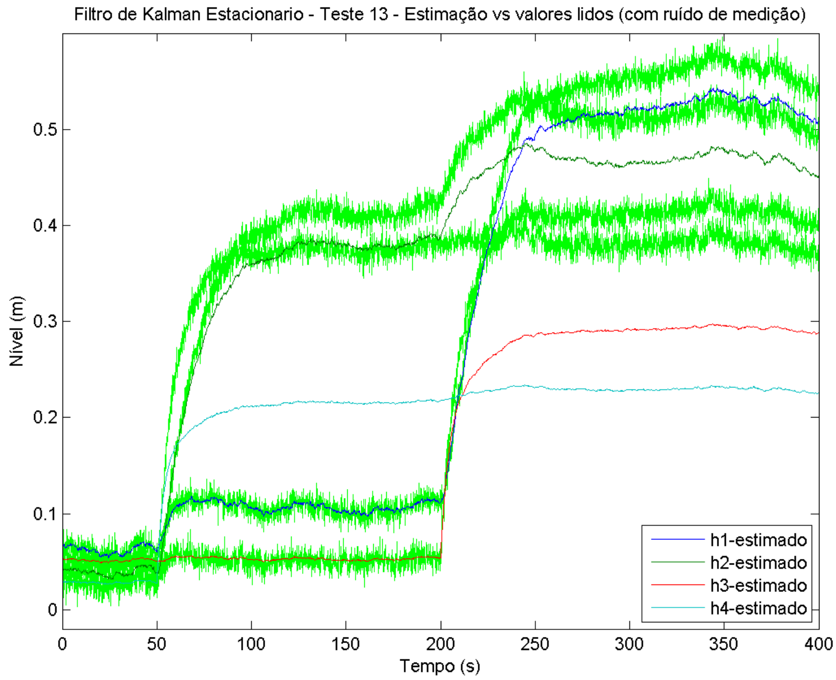


Figura I.63: Filtro de Kalman recursivo - Teste 13 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

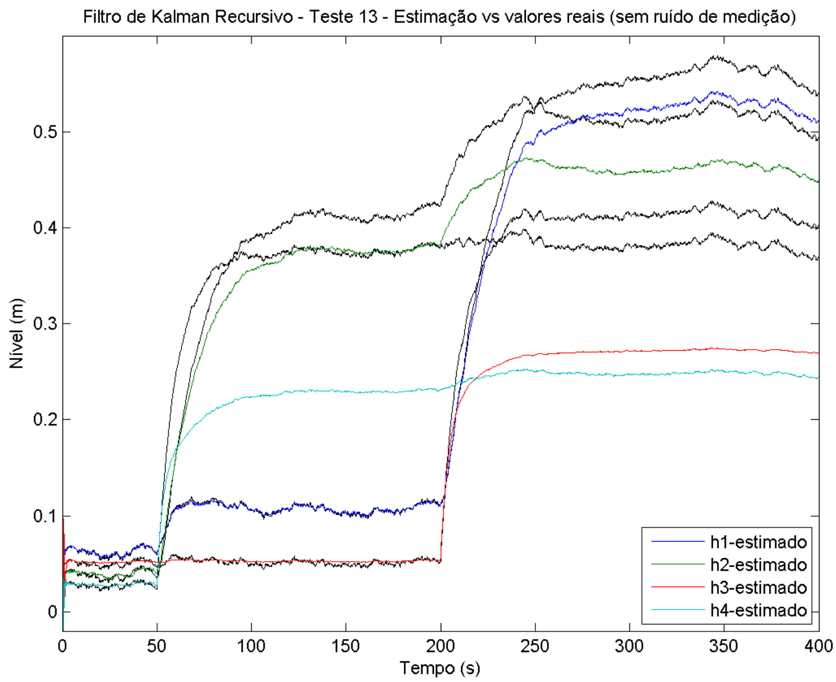


Figura I.64: Filtro de Kalman estendido - Teste 13 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

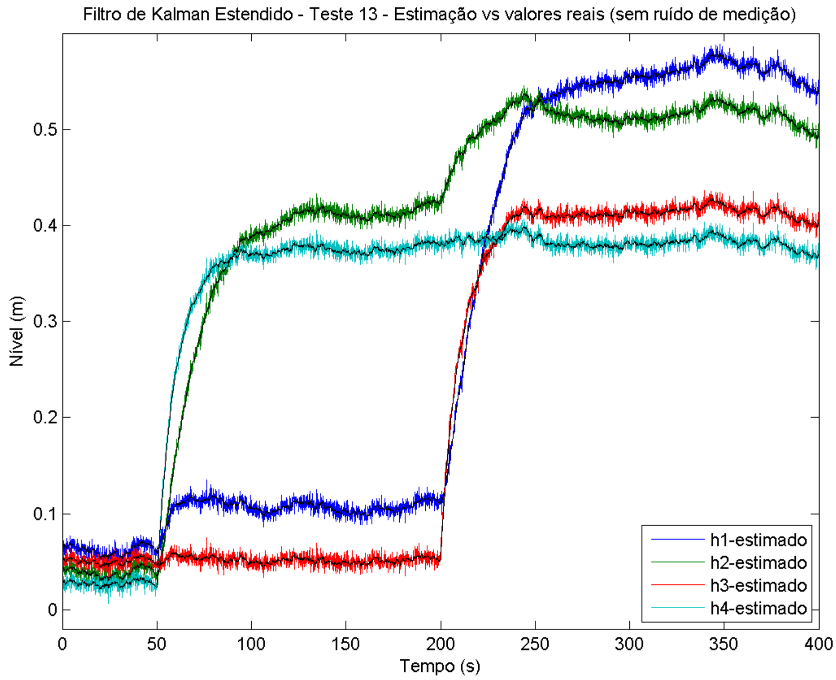


Figura I.65: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 13 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

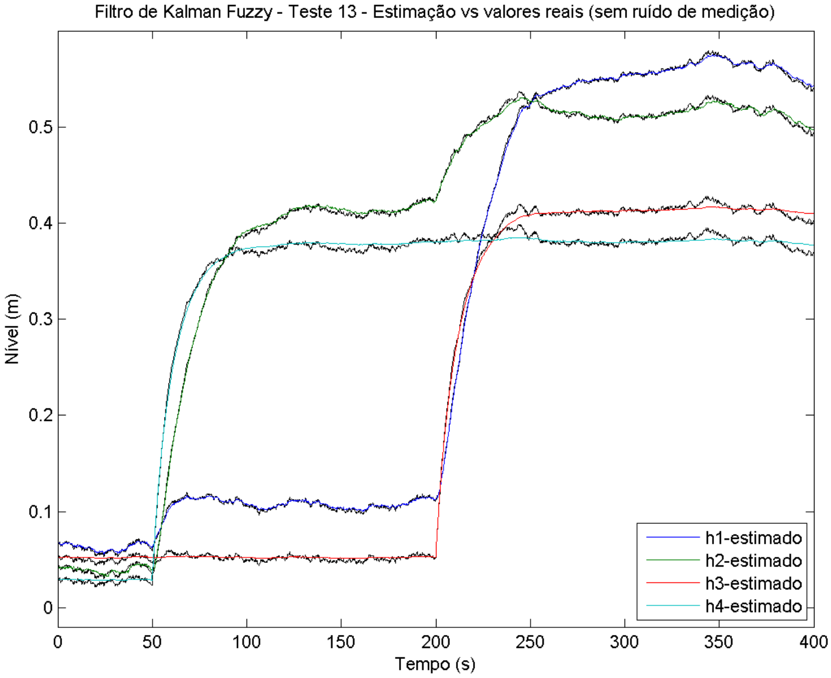


Figura I.66: Filtro de Kalman estacionário - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

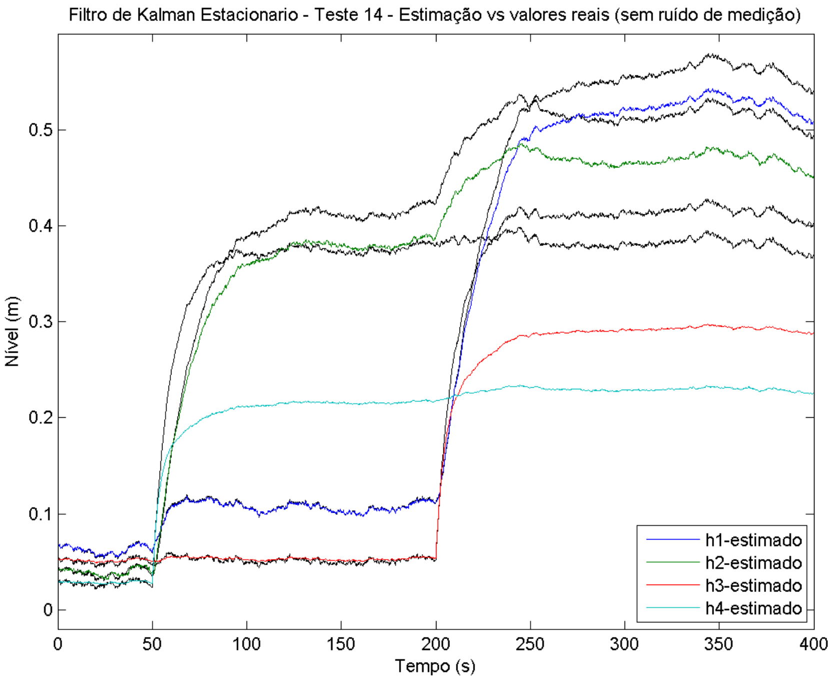


Figura I.67: Filtro de Kalman estacionário - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

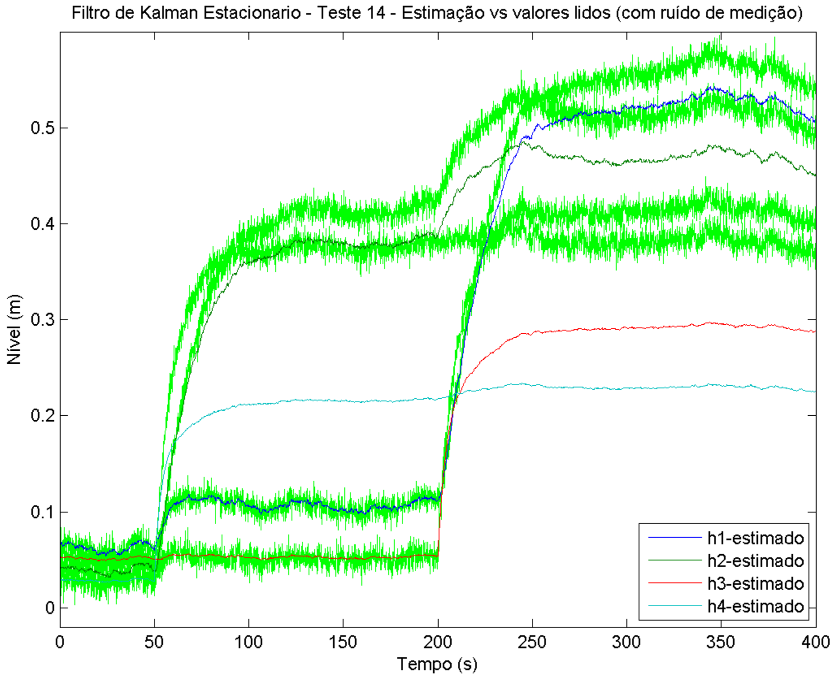


Figura I.68: Filtro de Kalman recursivo - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

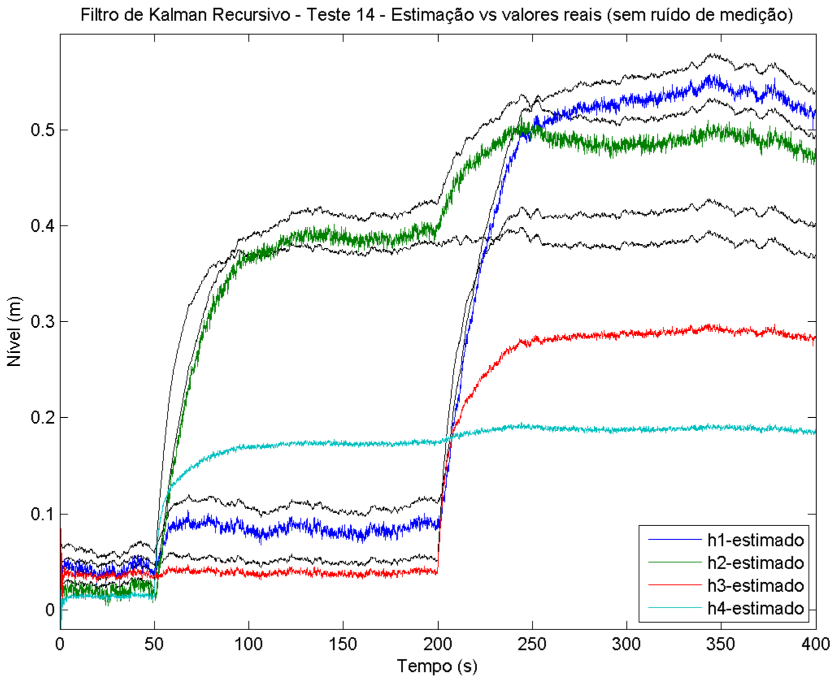


Figura I.69: Filtro de Kalman recursivo - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

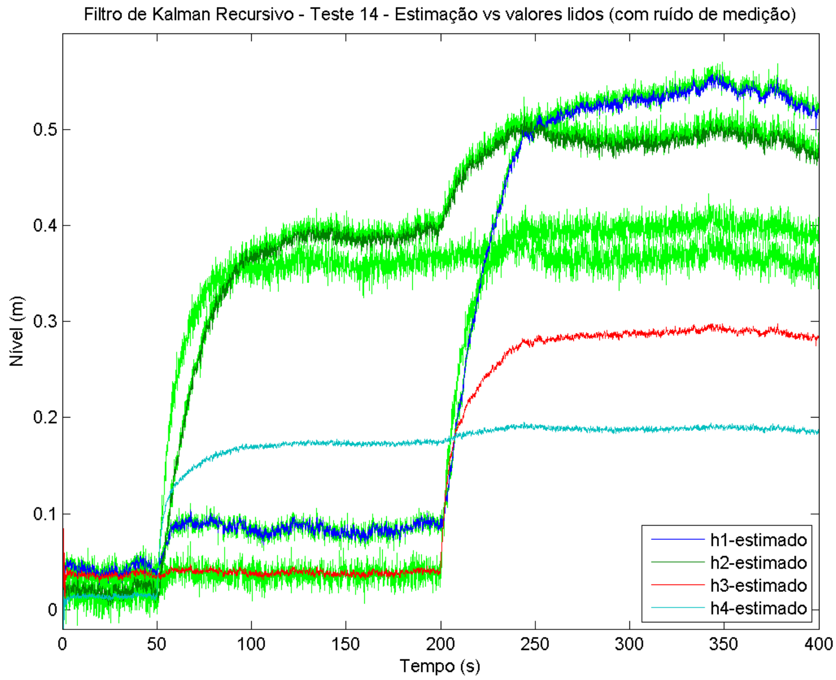


Figura I.70: Filtro de Kalman estendido - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

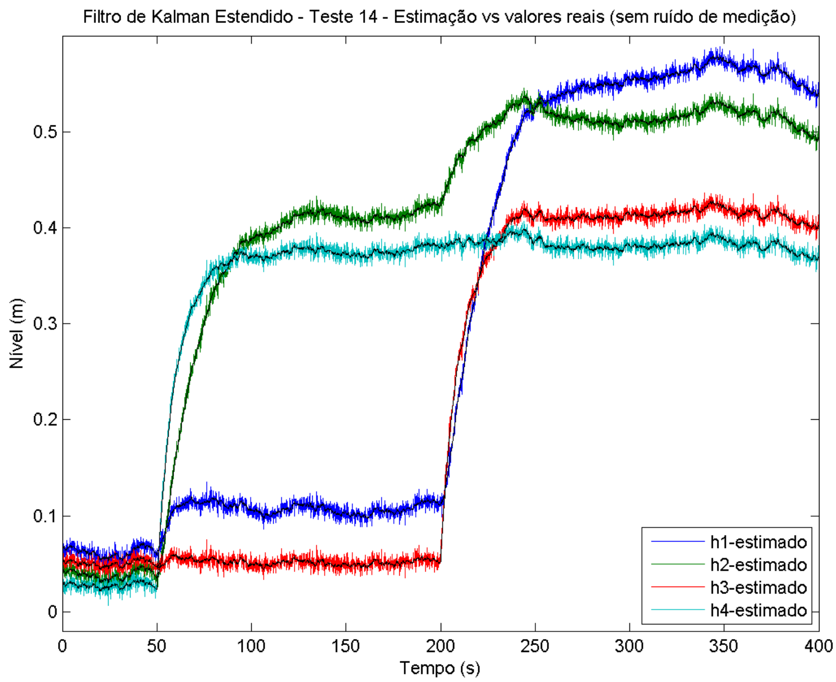


Figura I.71: Filtro de Kalman estendido - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)

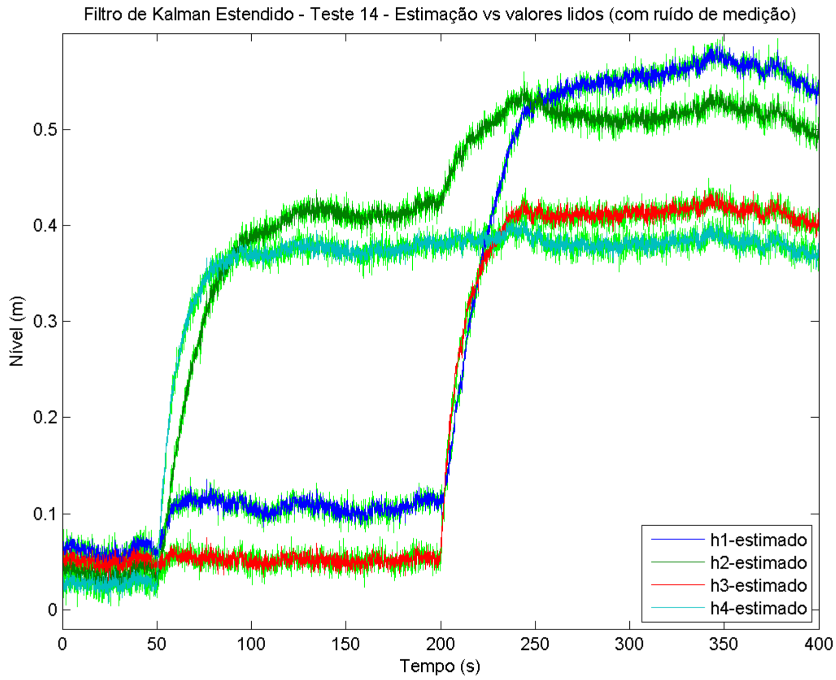


Figura I.72: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis reais dos tanques (sem ruído)

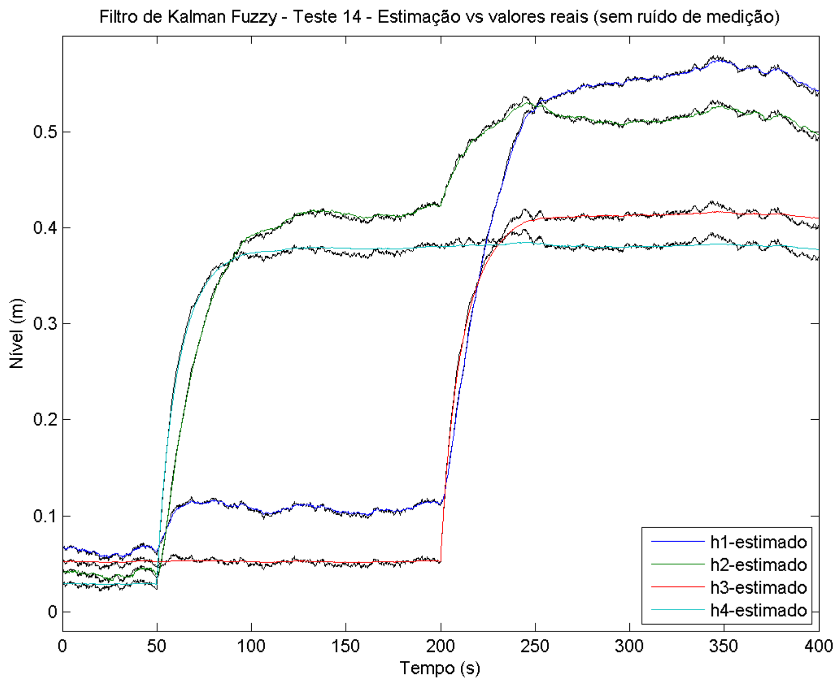


Figura I.73: Filtro de Kalman Fuzzy - Teste 14 - Comparação entre a estimação e os níveis lidos pelos sensores (com ruído)