

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM E AVALIAÇÃO DE FATORES DE  
INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS DE  
PROPAGAÇÃO DE TRINCAS, POR FADIGA, UTILIZANDO O  
PROGRAMA BEMCRACKER2D**

**AMIR MAHDI ARAGHI**  
**KEVEN FELIPE BARBOSA DE CASTRO**

**ORIENTADOR: GILBERTO GOMES**

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ENGENHARIA  
CIVIL**

**BRASÍLIA / DF: JULHO/2017**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MODELAGEM E AVALIAÇÃO DE FATORES DE  
INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS DE  
PROPAGAÇÃO DE TRINCAS, POR FADIGA, UTILIZANDO O  
PROGRAMA BEMCRACKER2D**

**AMIR MAHDI ARAGHI**  
**KEVEN FELIPE BARBOSA DE CASTRO**

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

**APROVADA POR:**

---

**GILBERTO GOMES, DSc. (UnB)**  
**(ORIENTADOR)**

---

**RAÚL DARÍO DURAND FARFÁN, DSc. (UnB)**  
**(EXAMINADOR INTERNO)**

---

**AGNO ALVES VIEIRA, MSc. (UnB)**  
**(EXAMINADOR EXTERNO)**

**DATA: BRASÍLIA/DF, 07 DE JULHO DE 2017.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

ARAGHI, Amir Mahdi e CASTRO, Keven Felipe Barbosa

Modelagem e avaliação de Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de propagação de trincas, por fadiga, utilizando o programa BemCracker2D [Distrito Federal] 2017.

x, 78 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2017)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Mecânica da Fratura

2. Método dos Elementos de Contorno

3. Propagação de trincas

4. Fator de Intensidade de Tensão

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Engenheiro)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ARAGHI, A.M e CASTRO, K.F.B. (2017). Modelagem e avaliação de Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de propagação de trincas, por fadiga, utilizando o programa BemCracker2D. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 78 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DOS AUTORES: Keven Felipe Barbosa de Castro e Amir Mahdi Araghi

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Modelagem e avaliação de Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de propagação de trincas, por fadiga, utilizando o programa BemCracker2D.

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2017

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. Os autores reservam outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito dos autores.

---

Keven Felipe Barbosa de Castro

QNP 34 conj. "C" casa 17-A

72.236-403 – Ceilândia/DF – Brasil

---

Amir Mahdi Araghi

SQN 407 Bl. "E" Ap. 202

70.855-050 – Asa Norte/DF – Brasil

## RESUMO

A Mecânica da Fratura é a área da mecânica que estuda o impacto que as trincas causam nos materiais, diminuindo a resistência e a durabilidade desses. Essa é uma das ferramentas fundamentais na melhoria do desempenho mecânico dos materiais e componentes. Calcular o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) em uma trinca é um item importante na definição das tensões atuantes nessa e, por meio disso, é possível estimar a ocorrência de propagação e aumento de tensões, comprometendo a resistência do material trincado. O cálculo dos FITs, de forma analítica, é possível apenas para poucas geometrias e, por isso a necessidade de modelagem por técnicas numéricas, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), é de suma importância no campo da Mecânica da Fratura. Esse projeto tratará da avaliação dos valores de FIT em problemas de propagação de trincas, a partir de um programa denominado BemCracker2D para análise via MEC.

**Palavras-chave:** Mecânica da Fratura – Elementos de Contorno – Fatores de Intensidade de Tensão - Trincas

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS .....	3
1.1.1 OBJETIVO GERAL.....	3
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>4</b>
2.1 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR (MFLE) .....	4
2.1.1 HISTÓRICO .....	4
2.1.2 FUNDAMENTOS.....	7
2.1.3 MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO (FIT) .....	13
2.1.3.1 SOLUÇÃO EXATA EM UM DOMÍNIO COM PONTOS SINGULARES ( $P_k$ ).....	13
2.1.3.2 INTEGRAL J.....	14
2.1.3.3 EXTRAPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS .....	15
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC).....	17
2.2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	17
2.2.2 ESCOLHA DO MÉTODO APROXIMADO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	18
2.2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (LINEAR).....	18
2.2.3.1 HISTÓRICO .....	20
2.2.3.2 FORMULAÇÃO .....	23
2.2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (DUAL) .....	24
2.3 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS.....	27
2.4 PROGRAMAS DE ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS .....	33
2.4.1 BEMLAB2D.....	34
2.4.2 BEMCRACKER2D .....	35
<b>3. METODOLOGIA .....</b>	<b>37</b>
3.1 Problema 1: Placa com trinca central na borda.....	38
3.2 Problema 2: Placa com trinca central na borda .....	42
3.3 Problema 3: Placa com trinca lateral .....	47
3.4 Problema 4: Placa com duas trincas laterais.....	49
3.5 Problema 5: Placa com trinca central .....	51
3.6 Exemplo 6: Viga com trinca central na borda .....	53
<b>4. RESULTADOS E ANÁLISE .....</b>	<b>55</b>
4.1 PRIMEIRA ETAPA .....	55
4.2 SEGUNDA ETAPA .....	56
4.2.1 PROBLEMA 3 .....	57

4.2.2 PROBLEMA 4 .....	59
4.2.3 PROBLEMA 5 .....	62
4.2.4 PROBLEMA 6 .....	64
<b>5. CONCLUSÃO .....</b>	<b>69</b>
5.1 CONCLUSÕES .....	69
5.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	69
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>70</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Placa finita com furo elíptico central (fonte: MIRANDA, 2003) .....	8
Figura 2 - Componentes de tensão e sistema de referências (fonte: DURAN, 2011).....	10
Figura 3 - Modos básicos de solitação de uma trinca (fonte: BORGES, 2010).....	11
Figura 4 - Trinca centrada (2a) em uma placa infinita (fonte: MIRANDA, 2003) .....	11
Figura 5 – Pontos singulares de um domínio de soluções (fonte: PEREIRA, 2004) .....	14
Figura 6 – Contorno de um trinca - Integral J (fonte: MIRANDA, 2003) .....	15
Figura 7 – Elemento linear e elemento quadrático contínuo (fonte: PORTELA, 1993) .....	16
Figura 8 – Representação do contorno da fratura na formulação dual (fonte: KZAM, 2009).....	26
Figura 9 – Colocação dos nós na formulação dual (fonte: KZAM, 2009) .....	26
Figura 10 – Curva de Propagação das Trincas por Fadiga Típica (fonte: MIRANDA, 2003) .....	33
Figura 11 – Interface inicial do BemLab2D (fonte: LEITE, 2016).....	34
Figura 12 – Diagrama de classes do programa BemCracker2D .....	36
Figura 13 – Fluxograma de análise do problema .....	37
Figura 14 – Exemplo 1 (h=9mm; w=10mm; a=1mm) .....	38
Figura 15 – Exemplo 1.....	39
Figura 16 – Dimensões da placa utilizada no exemplo 1 .....	39
Figura 17 – Discretização em 68 elementos.....	40
Figura 18 – Discretização em 86 elementos.....	41
Figura 19 – Discretização em 110 elementos .....	42
Figura 20 – Exemplo 2 (h=9mm; w=10mm; a=2mm) .....	42
Figura 21 – Exemplo 2.....	43
Figura 22 – Dimensões da placa utilizada no exemplo 2 .....	43
Figura 23 – Discretização em 68 elementos.....	44
Figura 24 – Discretização em 86 elementos.....	45
Figura 25 – Discretização em 110 elementos .....	46
Figura 26 – Exemplo 3 (placa com trinca lateral) .....	47
Figura 27 – Exemplo 3 (malha com 188 elementos) .....	48
Figura 28 – Exemplo 3 (carregamento de 31,5MPa) .....	48
Figura 29 – Exemplo 4 (placa com duas trincas laterais) .....	49
Figura 30 – Exemplo 4 (malha com 196 elementos) .....	50
Figura 31 – Exemplo 4 (carregamento de 40,0MPa) .....	50
Figura 32 – Exemplo 5 (placa com trinca central) .....	51
Figura 33 – Exemplo 5 (malha com 130 elementos) .....	52
Figura 34 – Exemplo 5 (carregamento de 40,0MPa) .....	52
Figura 35 – Exemplo 6 (viga com trinca central na extremidade).....	53
Figura 36 – Exemplo 6 (malha com 308 elementos) .....	53
Figura 37 – Exemplo 6 (carregamento de 100kN).....	54
Figura 38 – Resultados problema 3 (KI Analítico x KI Obtido) .....	57

<b>Figura 39 – Resultados problema 3 (KI x KII) .....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 40 – Problema 3 (caminho de propagação [a]).....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 41 – Problema 3 (caminho de propagação [b]).....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 42 – Resultados problema 4 (KI Analítico x KI Obtido) .....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 43 – Resultados problema 4 (KI x KII) .....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 44 – Problema 4 (caminho de propagação [a]).....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 45 – Problema 4 (caminho de propagação [b]).....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 46 – Resultados problema 5 (KI Analítico x KI Obtido) .....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 47 – Resultados problema 5 (KI x KII) .....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 48 – Problema 5 (caminho de propagação [a]).....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 49 – Problema 5 (caminho de propagação [b]).....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 50 – Resultados problema 6 (KI Analítico x KI Obtido) .....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 51 – Resultados problema 6 (KI x KII) .....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 52 – Problema 6 (caminho de propagação [a]).....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 53 – Problema 6 (caminho de propagação [b]).....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 54 – Inclusão dos dados iniciais de entrada (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016).....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 55 – a) Título do problema – b) Tipo do problema – c) Módulo de Elasticidade – d) Coeficiente de Poisson (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 56 – Menu de escalas dos eixos, Grid e Incidência (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 57 – Limites dos eixos (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016).....</b>	<b>74</b>
<b>Figura 58 – a) Ferramentas de desenho – b) Gerador de malhas (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .</b>	<b>75</b>
<b>Figura 59 – Inserir ponto por vetores (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>75</b>
<b>Figura 60 – Inserir ponto por coordenadas (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>75</b>
<b>Figura 61 – a) Definição da continuidade (contínuo) – b) Definição da quantidade de elementos (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016).....</b>	<b>76</b>
<b>Figura 62 – a) Definição da continuidade (descontínuo) – b) Definição da relação dos elementos (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016).....</b>	<b>76</b>
<b>Figura 63 – Quantidade de elementos (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>76</b>
<b>Figura 64 – Condições de contorno - menu (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016) .....</b>	<b>77</b>
<b>Figura 65 – Traction / Displacement (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016).....</b>	<b>77</b>



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do FIT obtidos com o BemCracker2D .....	55
Tabela 2 – Valores do FIT obtidos analiticamente .....	55
Tabela 3 – Diferença percentual .....	56
Tabela 4 – Resultados problema 3.....	57
Tabela 5 – Resultados problema 4.....	59
Tabela 6 – Resultados problema 5.....	62
Tabela 7 – Resultados problema 6.....	64
Tabela 8 – Diferença percentual (Problema 3).....	67
Tabela 9 – Diferença percentual (Problema 4).....	67
Tabela 10 – Diferença percentual (Problema 5).....	68
Tabela 11 – Diferença percentual (Problema 6).....	68

## **LISTA DE ABREVIACOES**

EDO – Equação Diferencial Ordinária

EDP – Equação Diferencial Parcial

FIT – Fator de Intensidade de Tensão

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MECD – Método dos Elementos de Contorno Dual

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizado

MEFX – Método dos Elementos Finitos Extendido

MFEP – Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

## 1. INTRODUÇÃO

A Mecânica da Fratura é uma área da mecânica que trata do estudo do comportamento de trincas e fissuras nos materiais. Para o cálculo das forças atuantes nessa trinca, utiliza os métodos da mecânica dos sólidos. Essa mecânica da fratura tem uma importância fundamental no desenvolvimento e aprimoramento dos materiais, especificamente no que tange ao desempenho mecânico.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) inicialmente assume que o material é elástico isotrópico e linear. Com base nesse pressuposto, o campo de tensões próximo à ponta da trinca é calculado usando a teoria da elasticidade. Quando as tensões próximas à ponta da trinca excedem um limite do material, a trinca cresce. Na Mecânica da Fratura Linear Elástica, a maioria das fórmulas são para os estados planos de tensão e de deformação, associados com os três modos de movimentos relativos das superfícies da trinca: de abertura, de cisalhamento no plano e cisalhamento fora do plano. A MFLE só é válida quando a deformação plástica é pequena comparada ao tamanho da trinca. Se as zonas de deformação plástica foram consideradas grandes comparadas com o tamanho da trinca, a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) deve ser usada.

Todos os problemas que existem na ciência e na engenharia têm que passar por um processo de simplificação para que possam ser resolvidos. Pode-se transformar um problema físico real para um equivalente e mais simples. Para isso, deve-se adotar algumas hipóteses de simplificação que aproximam o modelo físico do problema para um modelo matemático correspondente ao fenômeno em questão. Resolvendo esse modelo matemático, pode-se achar uma solução para o problema. Entre essas etapas de simplificações e aproximações, está a proposição do modelo matemático aproximado, utilizando-se equações diferenciais.

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma equação diferencial. Por essa razão, saber reconhecer uma equação diferencial dentro de um problema específico é muito importante na busca da solução. Da mesma forma, saber classificar uma equação diferencial é o primeiro passo dessa busca, pois, apesar de não existir um método único para se resolver todas essas equações, a classificação delas ajuda a escolher o método mais adequado. (ALVES L.M, 2006)

Outros métodos aplicados na resolução dos problemas são o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) e seus respectivos desenvolvimentos, tais como Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), Método dos

Elementos Finitos Extendido (MEFX) e Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG).

- ✓ MEC: é um método computacional para a solução de sistemas de equações diferenciais formuladas em forma integral. É aplicado em diversas áreas da engenharia, como em mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, mecânica dos solos, acústica, eletromagnetismo e mecânica da fratura, dentre outras.
- ✓ MEF: é um procedimento numérico para determinar soluções aproximadas de problemas de valores sobre o contorno de equações diferenciais parciais. O MEF subdivide o domínio de um problema em partes menores, denominadas elementos finitos.

A principal diferença entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, que é o método numérico mais tradicional, é que no primeiro somente o contorno do problema é discretizado (dividido em elementos). Esse fato, em muitos casos, reduz drasticamente o tamanho do problema, além de ser mais simples a implementação de pré-processadores.

Outra diferença marcante entre os métodos citados é que, por ser mais tradicional, o MEF possui softwares disponíveis comercialmente, tais como o ANSYS e o ABAQUS. Já o MEC, por não possuir uma matemática simples envolvida, não possui softwares comercialmente disponíveis. Isso torna os estudos de MEC mais complexos, no sentido de existir a necessidade de programar e criar pré-processadores todas as vezes que se pretende resolver um problema.

## **1.1 OBJETIVOS**

Muitos problemas em Engenharia estão relacionados com a existência de trincas e fissuras em peças e estruturas submetidas a esforços. Há uma constante busca pelo aprimoramento desses materiais, principalmente no que tange ao desempenho mecânico. Não deve haver uma diminuição da funcionalidade.

Peças fissuradas submetidas a carregamentos cíclicos podem ter uma propagação da trinca. Isso ocorre em razão da variação do Fator de Intensidade de Tensões. No estudo e aprimoramento dos materiais, tem-se como objetivo avaliar a direção e a velocidade de propagação dessa fissura. Isso é realizado com o intuito de identificar as tensões principais e desenvolver técnicas para desenvolver soluções para esses problemas de Engenharia.

Este trabalho está inserido na área de Estruturas da Engenharia Civil e tem por escopo avaliar casos clássicos de problemas de propagação de trincas.

### **1.1.1 OBJETIVO GERAL**

Este trabalho tem como objetivo principal a avaliação dos Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de trincas bidimensionais a partir de uma modelagem via Elementos de Contorno com uso do programa BemCracker2D.

### **1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Os objetivos específicos são:

- Estudar o funcionamento do programa BemCracker2D, bem como de sua Interface Gráfica BemLab2D, para entender o processo de análise e modelagem;
- Modelar e Calcular os Fatores de Intensidade de Tensão em problemas clássicos de chapas e vigas submetidos a carregamentos cíclicos;
- Comparar os resultados obtidos com a solução analítica da literatura;
- Verificar a precisão do BemCracker2D.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo são apresentados conceitos relevantes relacionados ao projeto desenvolvido. Nele será possível encontrar todo o histórico de desenvolvimento da Mecânica da Fratura Elástica Linear e do Método dos Elementos de Contorno. Além disso, serão apresentados todos os aspectos teóricos fundamentais que serão utilizados no desenvolvimento do projeto.

### **2.1 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR (MFLE)**

#### **2.1.1 HISTÓRICO**

As primeiras referências que se tem a respeito da mecânica da fratura remetem ao físico italiano GALILEU GALILEI (1564-1642). Galileu apresenta, em seus diálogos, as ideias sobre a “resistência que os sólidos oferecem à fratura”. Entretanto, o primeiro pesquisador a desenvolver um aparato para verificação da resistência à fratura foi o também italiano LEONARDO DA VINCI (1452-1519). Ele construiu um aparelho que media a resistência de arames de aço de diferentes comprimentos.

Nessa mesma linha de pensamento, Galileu desenvolveu um aparelho para medir a resistência de arames de aço de mesmo comprimento, variando a espessura desses. Estudando esses arames de aço e também colunas de mármore, conseguiu provar que a resistência desses depende da área da seção transversal e não do comprimento. Galileu conseguiu dar um grande avanço no estudo da mecânica da fratura.

Os primeiros trabalhos conhecidos, publicados e dedicados à fratura foram artigos de GRIFFITH (1920,1924): “The phenomenon of rupture and flow in solids” (1920) e “The theory of rupture” (1924). Segundo BORGES (2010), esses dois artigos formam a base da Mecânica da Fratura devido aos conceitos desenvolvidos e à iniciativa de aplicar essa teoria envolvida nos problemas de engenharia.

COTTERELL (1997) relatou que, nos artigos de Griffith, o autor recorre aos conceitos de termodinâmica para estabelecer um critério de equilíbrio energético. Ele utilizou os resultados de INGLIS (1913) para calcular a redução da energia potencial do sistema

mecânico devido à formação de novas superfícies de fratura. Os experimentos de Griffith foram realizados na Royal Aircraft Establishmen. Foram medidos os campos de tensão próximos aos entalhes das peças de aviões de combate da Primeira Guerra Mundial. Esses experimentos de Griffith eram aplicados apenas a materiais frágeis.

Já segundo ROSSMANITH (1997), o primeiro trabalho que trata analiticamente a mecânica da fratura é de WIEGHARDT (1907). Esse autor parte de uma hipótese definida por Sommerfield para determinar o campo de tensão em torno de uma fratura no “Problema de Bach” (fratura de um rolamento de esferas). Nessa publicação havia um estudo completo do campo de tensão em torno da trinca estática em modo de carregamento misto. Também investigou o início da trinca utilizando o critério da tensão de tração máxima e o critério de cisalhamento máximo, a depender do comportamento do material. Alguns autores, dentre eles ROSSMANITH (1995), dizem que essa publicação de Wieghardt não se destacou devido ao encerramento das tiragens do jornal em que ela foi impressa. Por causa desse ocorrido, não ganhou o legado merecido.

Há autores, dentre os quais pode-se citar PAPADOPOULOS (1993), que atribuem a Inglis (1913) os primeiros trabalhos com fundamentos analíticos da Mecânica da Fratura. Nesse artigo é apresentada a solução do problema da distribuição de tensão em volta de uma abertura elíptica de uma excentricidade de uma chapa em meio elástico infinito submetido a um estado biaxial de tração. Essa teoria desenvolvida por Inglis serviu como base para as publicações práticas de Peterson sobre concentrações de tensão (1940) e de NEUBER (1937).

Segundo COTTERELL (2002), foi o trabalho de Orowan que generalizou o trabalho de Griffith para materiais menos frágeis. Usando raio X, Orowan estudou a profundidade da deformação plástica abaixo das facetas de clivagem do aço com um baixo teor de carbono.

Segundo PAPADOPOULOS (1993), com IRWIN (1948,1957) houve um considerável avanço na MFLE. Irwin segundo COTTERELL (2002) notou que a energia empregada na deformação plástica poderia ser estimada pelos resultados de Orowan. Para Irwin, a fratura se propaga de acordo com três tipos de mecanismos independentes de deformação e são “associadas a uma grandeza denominada fator de intensidade de tensão. Para o autor, essa energia de fratura,  $\gamma_p$ , para aços com baixos teores de carbono e a 0°C, seria aproximadamente duas mil vezes a energia de superfície,  $\gamma_s$ . Além disso, conclui que a teoria de Griffith poderia ser utilizada houvesse uma substituição da energia de superfície pelo trabalho plástico.

Em KZAM (2009) e BORGES (2010) é citado o desenvolvimento da MFLE graças ao trabalho de Irwin. Esse autor, tratado como o “pai da Mecânica da Fratura Moderna”, definiu a taxa de energia de deformação como  $G$  (representa a energia disponível para um incremento na extensão da trinca), e então mostrou que era possível determinar os campos de tensões e deformações na região próxima a ponta da trinca, estabelecendo o valor crítico  $G_c$ , o qual especifica que quando ocorre a propagação da trinca,  $G$  atinge o valor de  $G_c = 2\gamma_p$ .

Kies e Smith segundo COTTERELL (2002) observaram que, para um certo tamanho de trinca, a tensão crítica depende apenas de  $G_cE$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

Estas ideias formaram a base para a mecânica da fratura linear-elástica (MFLE). Três eram as ideias fundamentais:

- 1) Movimento progressivo da frente da trinca;
- 2)  $G$  era a taxa de energia do campo de tensão à frente da trinca por incremento do aumento dessa;
- 3) A resistência à propagação da trinca era a taxa de energia dissipada nas deformações não elásticas próxima à frente da trinca.

Em 1958, Irwin publicou um sumário completo do estado da mecânica da fratura. Neste artigo incluía-se as expressões convenientes das tensões e deslocamentos próximos à ponta da trinca sob os três modos básicos de carregamento (abertura, cisalhamento ao longo da trinca e cisalhamento transversal). Os trabalhos de Irwin fizeram um grande desenvolvimento da MFLE, com base em termos de energia.

Segundo ROSA (2002) o uso mais generalizado da Mecânica da Fratura se deve ao fato de que esta permite quantificar de uma forma bastante precisa os níveis admissíveis em que um componente com trincas pode operar, sem que venha a falhar. Este aspecto é extremamente importante em peças de elevado custo de fabricação, que estão sujeitas à ocorrência de defeitos (por exemplo: grandes rotores, reservatórios soldados e oleodutos). Devido aos processos de fabricação é quase impossível assegurar que não ocorram defeitos internos no material.



## 2.1.2 FUNDAMENTOS

Segundo ROSA (2002) a fratura de um material “consiste na separação ou fragmentação de um corpo sólido em duas ou mais partes, pela ação de tensões. Sem dúvida, o assunto de fratura é bem vasto e envolve áreas tão diversas como a física do estado sólido, a ciência dos materiais e a mecânica do contínuo, ou seja, a fratura deve ser tratada no todo como um fenômeno envolvendo as mais diferentes áreas do conhecimento humano”.

Segundo DEUS (2014) a falha de uma estrutura se dá, primeiramente, pelo acúmulo de danos, em seguida, acontece a iniciação de uma ou mais trincas. Essa trinca irá se propagar e fraturar o material. Então, segundo ele, a Mecânica da Fratura consiste no ramo da Engenharia com o objetivo de responder, quantitativamente, problemas relacionados à presença de trincas (e fraturas).

Uma estrutura falha quando sua utilização fica em parte (ou totalmente) comprometida ou quando seu nível de utilização perde algum desempenho. DE DEUS (2015) diz que uma total inutilização, uma utilização com certa insegurança ou uma utilização com desempenho insatisfatório determinam a falha da estrutura.

Existem diversos motivos para que uma falha ocorra em uma estrutura, entre eles, podemos citar: negligência durante o projeto, execução ou operação dessa; modificação do projeto; utilização de um novo material, que não dê o resultado esperado.

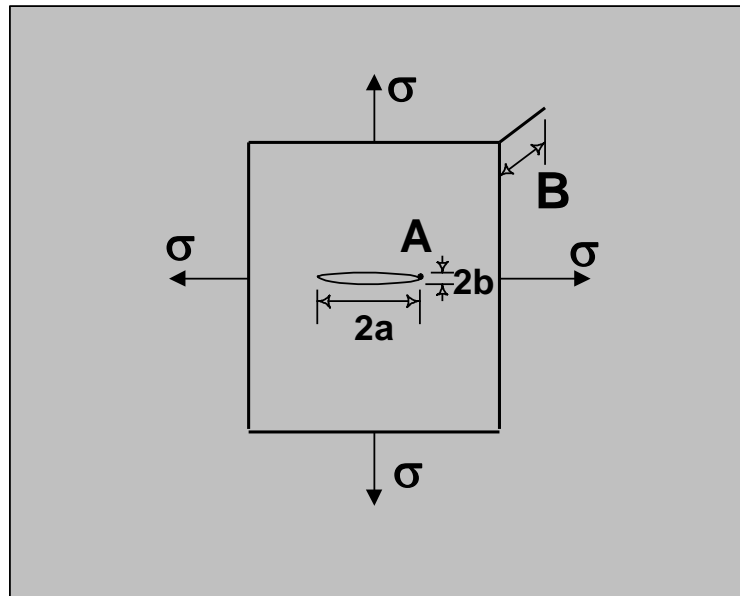
Segundo DURAN (2011), as falhas mecânicas são causadas, primeiramente, pelas tensões atuantes. Essas falhas podem ser classificadas como locais ou globais. As falhas locais são sensíveis a detalhes, que concentrem tensões no ponto crítico e são progressivas.

Segundo MIRANDA (2003), embora a fratura seja um evento que se dá de forma “brusca e terminal”, as trincas podem se propagar por muito tempo sem que percam a estabilidade e sem que ocorra a fratura. Os tipos de trincamento são: fadiga, hidrogenação e corrosão. A Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFLE) analisa a distribuição de tensões na vizinhança de uma trinca, que atue na fase elástica de um certo material. O objetivo desse ramo da Engenharia é avaliar e prever se um dado componente (ou estrutura) trincado irá ou não romper com a atuação de um esforço.

O primeiro a quantificar a influência das tensões em trincas elípticas de materiais foi Inglis, em 1913. Ele propôs:

$$\sigma_A = \sigma \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (1)$$

a qual é utilizada para se obter a tensão na extremidade do maior eixo de uma elipse. Inglis concluiu que o formato da placa não influenciaria essas tensões. A Figura 1 mostra uma fratura elíptica a qual se aplicava a teoria de Inglis.



**Figura 1 - Placa finita com furo elíptico central (fonte: MIRANDA, 2003)**

Onde,  $\rho = \frac{b^2}{a}$  é a curvatura dessa elipse.

Uma análise da Eq. (1) mostra que, quanto mais afiado for o entalhe, maior será o efeito de concentração de tensões. A concentração de tensões para um raio nulo tende a zero. Esse raio nulo acontece nos casos de trincas. Ou seja, quando  $b \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 0$  e  $\sigma \rightarrow 0$ , o furo tenderia a uma trinca. Portanto, segundo Inglis, a ruptura aconteceria quando a tensão aplicada fosse próxima a zero, fato esse que não ocorre na realidade.

Em seguida, em 1920, Griffith, considerando uma placa infinita com uma trinca de comprimento  $2a$  e tensão uniformemente aplicada, propôs um balanço energético, em que o incremento de área  $dA$  pode ser expresso, em condições de equilíbrio, por:

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_S}{dA} = 0 \quad (2)$$

- $E_T$  = Energia total do sistema;
- $\Pi$  = Energia potencial na placa;
- $W_S$  = Energia de formação das trincas;

$W_S$  pode ser obtido pelo produto da energia elástica da superfície do material,  $\gamma_s$  e a nova superfície de área da trinca:

$$W_S = 2(2aB\gamma_s) \quad (3)$$

Griffith, utilizando a teoria desenvolvida por Inglis, mostrou que:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a^2 \cdot B}{E} \quad (4)$$

- $\Pi_0$  = Energia potencial de uma placa sem trinca;
- B = Espessura da placa;

Substituindo as equações (2), (3) e (4), obtém-se:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a}\right)} \quad (5)$$

- $\sigma_f$  = Tensão de fratura de Griffith;

Utilizando experimentos com vidros, Griffith obteve resultados satisfatórios, entretanto, quando se começa a trabalhar com materiais estruturais comuns, essa equação subestima os resultados. Portanto, essa equação só é válida para materiais idealmente frágeis.

IRWIN (1948) também desenvolveu a MFLE em termos de energia. Ele definiu a taxa de liberação de energia G, que representa a energia disponível para um incremento na extensão da trinca. A grandeza G também é chamada de força motriz para extensão de trinca. Uma fratura poderá iniciar quando G alcançar o valor crítico  $G_c = 2 \cdot \gamma_p$ . G é obtida da derivada do potencial total:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (6)$$

Para uma placa infinita (como no trabalho de Griffith), a taxa de alívio é dada por:

$$G = -\frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (7)$$

O valor crítico de G, é dado por:

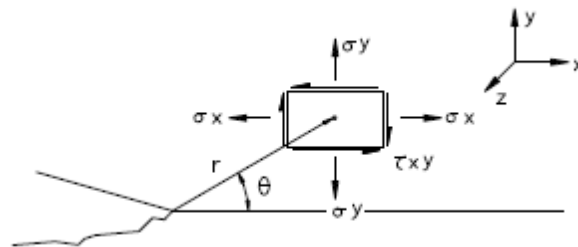
$$G_c = 2W_f \quad (8)$$

KIES e SMITH (1955) utilizaram  $(G_c E)^{1/2}$  e determinaram um parâmetro de fratura, denominado tenacidade à fratura ( $= K_c$ ). Irwin relacionou G ao campo de tensão na ponta da trinca e determinou o campo de tensões nos pontos próximos à ponta da trinca (Figura 2) como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (9)$$

-  $f_{ij}(\theta)$  = função trigonométrica do ângulo  $\theta$ ;

- r e  $\theta$  = coordenadas cilíndricas de um ponto próximo à trinca;

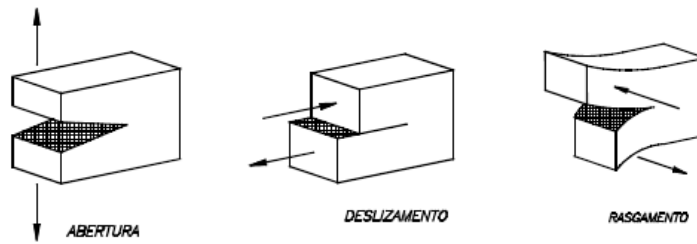


**Figura 2 - Componentes de tensão e sistema de referências (fonte: DURAN, 2011)**

Segundo BORGES (2010), a trinca em uma placa plana pode ser solicitada por três tipos básicos (Figura 3). Esses modos são:

- a) Modo I: abertura. Deslocamentos perpendiculares ao plano da trinca;
- b) Modo II: cisalhamento. Deslocamentos na direção perpendicular à frente da trinca.
- c) Modo III: rasgamento. Deslocamento paralelo à frente da trinca.

Além desses três modos, pode ocorrer um modo geral de solicitação, chamado de modo misto.



**Figura 3 - Modos básicos de solicitação de uma trinca (fonte: BORGES, 2010)**

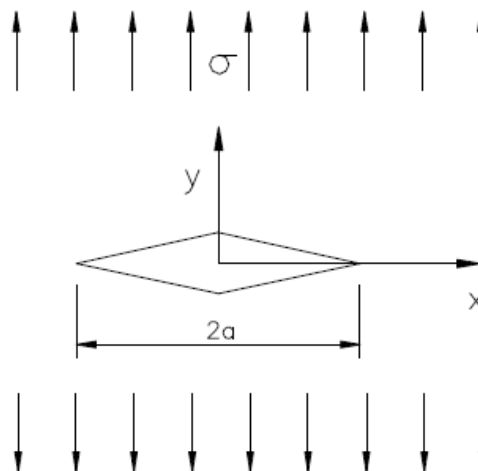
Segundo MIRANDA (2003), o modo I é o mais importante no projeto pois é por meio dele que ocorrem a maioria das fraturas nas peças trincadas.

Para uma placa infinita (Figura 3), com tensão remota e uniforme  $\sigma$ , com uma trinca centrada de tamanho  $2a$ ,  $K_I$ , é dado como:

$$K_I = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (10)$$

-  $\beta$  = fator de correção que depende da geometria da trinca;

Para a placa apresentada na Figura 4,  $\beta = 1$ .



**Figura 4 - Trinca centrada (2a) em uma placa infinita (fonte: MIRANDA, 2003)**

WILLIAM (1957), utilizando funções harmônicas, encontrou o campo de tensões e deslocamentos na ponta da trinca, para cada modo de solicitação.

- Modo I:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (11)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad (13)$$

- Modo II:

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (14)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (16)$$

Em todos os casos, o fator de intensidade de tensão pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot f \quad (17)$$

-  $f$  = parâmetro dependente do carregamento e da geometria da peça;

Pode-se relacionar o fator de intensidade de tensões com o módulo de cisalhamento por meio da seguinte expressão:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (18)$$

### 2.1.3 MÉTODOS DE CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO (FIT)

Os fatores de intensidade de tensão variam com o comprimento da fissura, com a geometria do corpo e com a distribuição e intensidade do carregamento (CIMINI JUNIOR, 1992). Segundo PEREIRA (2004), o fator de intensidade de tensão (K) fornece um parâmetro de segurança, que permite projetar estruturas mais seguras. Entre os métodos de deduções de expressões para o fator K, destacam-se os métodos pela Teoria da Elasticidade e pela Distribuição de tensão na extremidade de uma trinca.

A depender do modo de deformação, o campo de tensão irá variar em uma trinca. Segundo BROEK (1982), a Equação que descreve os campos de tensão na vizinhança de uma fissura pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}^{(n)}(\theta) \quad (19)$$

Onde: n = I, II, III indica o modo de deformação; r e  $\theta$  as coordenadas polares.

#### 2.1.3.1 SOLUÇÃO EXATA EM UM DOMÍNIO COM PONTOS SINGULARES ( $P_K$ )

Em problemas bidimensionais, pode-se obter a solução exata pela soma de duas funções: uma função suave ( $u_1$ ) e funções na forma descrita na Equação 20, desde que na vizinhança de um número finito  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (SZABÓ, 1991):

$$u_2 = \sum_{i=1}^{M_k} A_i \cdot r^{\lambda_i} \cdot \psi_i(\theta) \quad (20)$$

Onde: r e  $\theta$  são coordenadas polares no centro  $P_K$ ;  $A_i$  coeficientes dependentes do carregamento e da geometria e  $\psi(\theta)$  funções suaves.

Os pontos  $P_K$  são os chamados “Pontos singulares”, os quais podem aparecer no interior, no contorno ou fora do domínio da solução. A Figura 5 mostra um exemplo de pontos singulares.

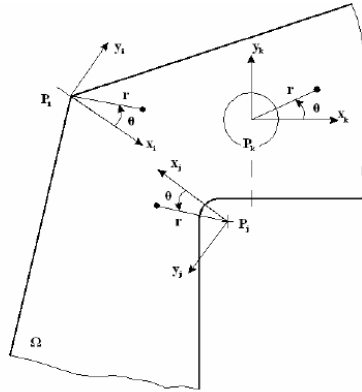


Figura 5 – Pontos singulares de um domínio de soluções (fonte: PEREIRA, 2004)

Em pontos no interior ou no contorno do domínio, o parâmetro  $\lambda_i$  e as funções suaves caracterizam a singularidade da solução exata ( $u_{ex}$ ) na vizinhança do ponto singular. Em pontos que não pertençam ao domínio, a singularidade da solução é dada pela distância desses ao domínio.

### 2.1.3.2 INTEGRAL J

Rice (1968) foi o responsável por introduzir a integral de linha ao redor da ponta da trinca, não variante em qualquer percurso utilizado, que se inicie na face inferior e termine na face superior de uma trinca, denominada Integral J. Segundo MIRANDA (2003), essa integral é definida em relação a um eixo de coordenadas, cuja origem se dê na ponta da trinca (Figura 6). A fórmula dessa integral é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W \eta_x - \sigma_{ij} \eta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] d\Gamma \quad (21)$$

Onde:  $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  = energia de deformação por unidade de volume;

$u_i$  = vetor de deslocamentos;

$\eta_{ij}$  = cossenos do caminho  $\Gamma$ .



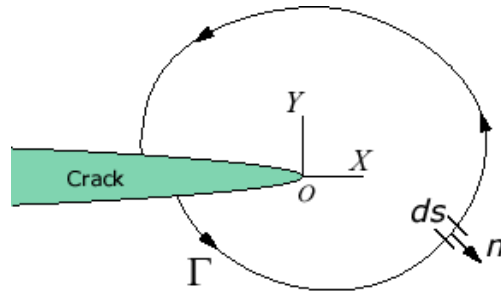


Figura 6 – Contorno de um trinca - Integral J (fonte: MIRANDA, 2003)

Para a MFLE, a integral J é numericamente igual a taxa de alívio G. Portanto, se relaciona com K, pela equação 18. Considerando um caminho de integração fechado, sem incluir nenhuma trinca, Rice provou a independência da integral J, onde:

$$J^* = \int_{\Gamma} \left[ W \eta_x - \sigma_{ij} \eta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] d\Gamma^* \quad (22)$$

- Aplicando o Teorema de Green, desenvolvendo o primeiro termo da equação, aplicando a relação tensão-deformação para pequenos deslocamentos, e utilizando a equação do equilíbrio, obtém-se:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (23)$$

Isso demonstra que a integral J = 0 para qualquer contorno fechado.

Se dois contornos arbitrários, em volta da trinca,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são conectados por outros dois caminhos,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ , ao longo da face da trinca, o contorno gerado é fechado. A energia J é a soma das contribuições de cada segmento:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 \quad (24)$$

Onde:  $J_3 = J_4 = 0$  e  $J_1 = -J_2$

### 2.1.3.3 EXTRAPOLAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Sejam r e  $\theta$  um sistema de coordenadas polares, centrada na ponta da trinca, em que  $\theta \pm \pi$  define a trinca. O campo de deslocamentos na superfície de trinca pode ser escrito como: (PORTELA, 1992)

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_l \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (25)$$

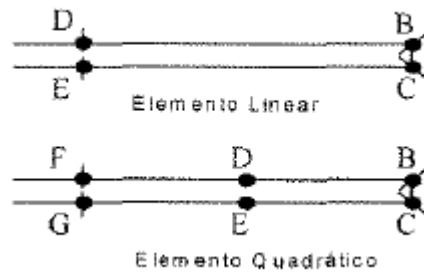
Onde:

-  $\mu$  = Módulo transversal;

-  $k = 3-4\eta$  (plano de deformação:  $\eta = \nu$  / plano de tensão:  $\eta = \nu/(1+\nu)$ )

-  $K_l$  = fator de intensidade de tensão para a trinca l.

Quando os deslocamentos nas superfícies de trinca são conhecidos, o fator de intensidade de tensão pode ser determinado por uma solução de elemento de contorno. A Figura 7 mostra os elementos linear e quadráticos na ponta de uma trinca.



**Figura 7 – Elemento linear e elemento quadrático contínuo (fonte: PORTELA, 1993)**

O fator de intensidade  $K_l$  para o elemento linear, em função do deslocamento nos nós D/E, é dado por:

$$K_l^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{k+1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (26)$$

O fator de intensidade  $K_l$  para o elemento quadrático, em função do deslocamento nos nós D/E e F/G, é dado por:

$$K_l^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{k+1} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (27)$$

$$K_l^{FG} = (u_2^F - u_2^G) \frac{\mu}{k+1} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (28)$$

Nesse caso, existem três nós em cada elemento, sendo um deles na ponta da trinca. Com isso, pode-se extrapolar os resultados para a ponta da trinca, utilizando os valores obtidos para os outros dois nós. Os valores da extrapolação para a ponta da trinca são:

$$K_l = \left[ 4 \cdot (u_2^D - u_2^E) - \sqrt{2} \cdot (u_2^F - u_2^G) \right] \cdot \frac{\mu}{k+1} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (29)$$

## 2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

### 2.2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Em matemática, uma equação diferencial é aquela cuja incógnita é função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas. Dada uma variável  $x$ , função de uma variável  $y$ , a equação diferencial envolve  $x$ ,  $y$ , derivadas de  $y$  e, eventualmente, derivadas de  $x$ . (MENDELSON e AYRES JR)

As equações diferenciais têm propriedades intrinsecamente interessantes, como:

- Existência ou não de solução;
- Caso exista, pode ser única e não.

A ordem da equação diferencial é dada pela ordem da derivada de maior grau. A solução de uma equação diferencial de ordem  $n$ , conterá  $n$  constantes. (MENDELSON; AYRES JR)

As equações diferenciais dividem-se em dois tipos:

- Equação Diferencial Ordinária (EDO): contém apenas funções de uma variável e derivadas da mesma variável;
- Equação Diferencial Parcial (EDP): contém funções com mais de uma variável e suas derivadas parciais. (SANTOS e ZANOMI, 2006)

Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, que possui infinitos graus de liberdade, uma vez que as variáveis se distribuem continuamente em todo o

domínio do problema. Com exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar soluções analíticas para o problema. Recorre-se, então, aos modelos discretos (ou numéricos), obtidos dos modelos contínuos através de hipóteses simplificadoras: As variáveis que constituem infinitos graus de liberdade, são expressos em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são incógnitas dos modelos discretos dos sistemas equivalentes e são determinados a partir da solução de um sistema de equações algébricas. (ALVES L.M, 2006)

## **2.2.2 ESCOLHA DO MÉTODO APROXIMADO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA**

Diversas são as técnicas de aproximação para solução de equações diferenciais e equações integrais. Entre os métodos de equações diferenciais, destacam-se o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos, o método dos volumes finitos, e, entre os métodos de equações integrais, tem-se o método dos elementos de contorno.

## **2.2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (LINEAR)**

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste na transformação da equação diferencial parcial, que descreve o comportamento das incógnitas tanto no interior quanto sobre o contorno do domínio, em uma equação integral que relaciona apenas valores de contorno na obtenção de sua solução numérica. Se valores em pontos internos são requeridos, estes são calculados de forma direta a partir dos dados ora encontrados no contorno. (GOMES, 2006)

- Vantagens:

- **Envolve somente a discretização do contorno o que diminui o custo computacional:**

A redução das dimensões do problema analisado constitui uma das razões pela qual o Método de Elementos de Contorno é tão atrativo. Na aplicação em problemas bidimensionais, apenas o contorno unidimensional do

domínio é discretizado em elementos. Em problemas tridimensionais, apenas as superfícies do contorno. Isso significa que, quando comparada ao Método de Elementos Finitos e a outras técnicas de análise de domínio, uma análise de contorno resulta em uma substancial redução no esforço de modelagem computacional. Além do mais, como os parâmetros incógnitos (tais como deslocamentos e forças de superfície) são aproximados nos contornos discretizados, um sistema de equações muito menor do que o gerado pelo Método de Elementos Finitos é obtido. (SCUCIATO, 2007)

- **Precisão dos Resultados:**

Uma peculiaridade do Método de Elementos de Contorno é que ele provê um modelo contínuo do domínio, uma vez que nenhuma discretização do mesmo é requerida. Isso conduz a uma ótima resolução dos parâmetros incógnitos no domínio do problema. As soluções nos pontos internos são calculadas após as incógnitas de contorno terem sido calculadas, de maneira semelhante a um pós-processamento. A densidade, distribuição e localização dos pontos internos não interferem na malha de contorno, tampouco nos valores das incógnitas de contorno. (SCUCIATO, 2007)

- **Problemas infinitos ou semi-infinitos (elimina o efeito de bordas):**

Outra característica do Método de Elementos de Contorno é a satisfação automática de condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos, o que elimina a necessidade de discretização numérica em contornos remotos. (SCUCIATO, 2007)

- Desvantagens:

- Falta de programas comerciais abrangentes;
- Problemas de não-linearidades das equações;
- Dificuldade na Implementação Computacional;
- Necessidade de cálculo de soluções fundamentais para cada caso.

### 2.2.3.1 HISTÓRICO

Nesse item será apresentado um breve histórico do desenvolvimento do Método dos elementos de contorno.

Apesar de ser um método relativamente novo, não se pode esquecer seus percursos e pesquisadores que, com avanço de seus estudos fundamentais, tornaram viável a criação do MEC como se conhece hoje.

O primeiro a deduzir uma equação integral para resolver um problema físico foi o ABEL (1823). O problema tratava do pêndulo isócrono. LIOUVILLE (1837) deduziu uma equação integral e usou aproximações sucessivas para resolver um problema de valor inicial. VOLTERRA (1884) estudou a distribuição de cargas elétricas de uma esfera e usou equações integrais nos estudos para conseguir avançar.

O primeiro estudo rigoroso das equações integrais deve-se a FREDHOLM (1903), que apresentou um estudo das aplicações das equações integrais lineares à solução de problemas de valor de contorno em elastostática, que posteriormente os pesquisadores soviéticos MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957), e KUPRADZE (1965) aplicaram para solução de problemas de elasticidade. (WUTZOW 2003)

MASSONET (1965) formulou uma equação integral singular baseada na solução de KELVIN para solucionar numericamente o problema de valores de tensões no contorno de elementos.

RIZZO (1967) publicou o primeiro trabalho sobre resolução numérica das equações integrais em problemas de elasticidade, no qual ele propôs uma formulação direta para as equações integrais. Em seguida, CRUZE (1969) ampliou essa formulação para o caso tridimensional.

Inicialmente, o método dos elementos de contorno foi conhecido como método das equações integrais de contorno, pois os problemas eram resolvidos através de equações integrais sobre o contorno do domínio. Posteriormente, BREBBIA (1978) tratou o método das equações integrais de contorno de uma maneira mais conveniente, chamando-o de método dos elementos de contorno. A formulação do método dos elementos de contorno foi elaborada, primeiramente, a partir de aproximações das equações integrais obtidas através de algum princípio clássico, por exemplo, o teorema de BETTI (1872). Depois, verificou a possibilidade de se utilizar o método dos resíduos ponderados para obter a formulação do método dos elementos de contorno, tornando-a mais genérica e facilitando a combinação com

outros métodos numéricos conforme BREBBIA et al. (1984). Pode-se observar, na evolução do método dos elementos de contorno, os chamados métodos indiretos os quais as variáveis envolvidas não são as variáveis físicas do problema e os métodos diretos nos quais a formulação é desenvolvida considerando-se as variáveis reais do problema. (WUTZOW, 2003)

O método dos elementos de contorno se apresenta como uma boa opção de cálculo em problemas de domínios infinitos, semi-infinitos e regiões de grande concentração de tensões. A combinação entre os diversos métodos numéricos é um assunto de grande interesse para os pesquisadores, pois possibilita utilizar o método numérico mais conveniente a cada subestrutura, aproveitando melhor as particularidades de cada um. Pode-se destacar a combinação do método dos elementos finitos e elementos de contorno, que surgiu com McDONALD & WEXLER (1972), analisando problemas de engenharia elétrica. CHEN & MEI (1974) estudaram problemas de mecânica dos fluidos, onde o MEC foi utilizado para tratar o domínio infinito. Mas os trabalhos de ZIENKIEWICZ et al. (1977), de SHAW & FALBY (1977), e de OSIAS et al. (1977), foram os primeiros a tratar sólidos deformáveis através da combinação elementos finitos e elementos de contorno. E AYALA & GOMEZ (1979) apresentaram detalhes do processo de resolução de problemas elásticos tridimensionais em geomecânica. (WUTZOW, 2003)

BREBBIA & GEORGIO (1980) conseguiram bons resultados na análise de problemas bidimensionais, combinando os dois métodos MEC e MEF.

RODRÍGUEZ (1986) tentou resolver problemas bidimensionais de elasticidade linear empregando elementos contínuos e descontínuos. Já ROCHA (1988) estudou problemas que envolvem descontinuidade em regimes elastoplásticos ou elastoviscopoplásticos para simular as descontinuidades em problemas bi e tridimensionais.

RAMALHO & VENTURINI (1990) e RAMALHO (1990) analisaram a interação da estruturas com o meio contínuo. Nessa análise, o solo é modelado pelo MEC e a estrutura (sapata) pelo MEF. CODA (1993) também usou a combinação do MEC-MEF, em seus estudos, para analisar a ligação da estrutura com o solo e apresentou uma formulação tridimensional dinâmica transiente, na qual a estrutura (sapata) é modelada pelo MEF e o solo é modelado pelo MEC. Ele usou a técnica das sub-regiões e elementos rígidos de ligação para o acoplamento da estrutura com o meio contínuo. Já VENTURINI & FERRO (1991 e 1992) combinaram o MEC-MEF para analisar a interação entre estacas e o solo. KUMATSU (1995) estudou problemas geomecânicos, combinando MEF e MEC.

AGOSTINHO (1998) usa a combinação do MEC-MEF e estuda a associação de chapas, empregando a técnica de sub-regiões com subestruturação. Também estudou problemas de escorregamento e tentou simulá-los por meio de modelos plásticos e viscoplásticos simples do tipo Coulomb.

LOPES (1996) analisou problemas de propagação de fraturas em domínios bidimensionais. SOUZA (1999) propôs um modelo adaptativo para o problema físico, governado pela equação de Laplace, dando especial atenção aos problemas de singularidade e hipersingularidade. MENDONÇA (2002) estudou o problema de laminas multiconectadas não coplanares por meio de duas formulações: uma chamada de tetraparamétrica e a outra hexaparamétrica, abordando problemas elásticos e elastoplásticos. Em ARISTIDERMIO & TURCO (1994), é utilizada uma técnica de discretização, em que o contorno é dividido em segmentos chamados macro-elementos, que possuem suas próprias funções interpoladoras. Cada um deles é dividido em elementos menores pela introdução de nós e as variáveis do contorno são interpoladas por curvas ‘Spline’ quadráticas. Embora as variáveis do contorno sejam interpoladas por funções quadráticas, as integrais são calculadas analiticamente de tal forma que os resultados são expressos em função de parcelas polinomiais de ordem genérica. Assim, interpolações com B-splines de ordens superiores, após alguns ajustes algébricos, podem ser também obtidas e empregadas em diversas análises, principalmente, envolvendo estudos de adaptatividade. (WUTZOW, 2003)

FOLTRAN (1999) estudou problemas planos em regime elástico e elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno, no qual propõe o uso de expressões analíticas para as integrais sobre o contorno para elementos isoparamétricos lineares. Inclui também expressões analíticas para o tratamento de carregamentos de domínio com células lineares. CODA (2001) apresenta uma análise do comportamento não-linear dinâmico e estático de meios reforçados por meio de uma abordagem do acoplamento MEC/MEF, no qual o MEF é utilizado para representar os reforços no meio discretizado pelo MEC. (WUTZOW, 2003)

LEITE, CODA & VENTURINI (2003) apresentam um estudo bidimensional de sólidos reforçados com barras usando o método dos elementos de contorno. FERNANDES & VENTURINI (2002) também aplicam a técnica de redução de graus de liberdade no acoplamento MEC/MEC, para problemas em placas. De forma semelhante, LOVÓN (2003) e MACIEL (2003) obtiveram a integração totalmente analítica da solução fundamental de Kelvin, LOVÓN (2003) empregando-as para análise de erro em modelos auto adaptativos e MACIEL (2003), utilizando também de forma analítica as equações dos gradientes de tensão, para o estudo de problemas de fissuras. BOTTA & VENTURINI (2003) têm desenvolvido o



acoplamento MEC/MEF em chapas, estudando problemas de contato na interface entre o domínio e o enrijecedor. Para minimizar perturbações indesejáveis nos resultados dessa interface, é aplicada a técnica de suavização do contorno com mínimos quadrados. Esse trabalho ainda trata de problemas de localização. (WUTZOW, 2003)

### 2.2.3.2 FORMULAÇÃO

Como dito anteriormente, o Método de Elementos de Contorno constitui-se numa técnica numérica, baseada em um procedimento de discretização para a solução das equações oriundas das denominadas formulações integrais de contorno. Essas formulações integrais de contorno são divididas em duas categorias diferentes. A primeira, e talvez a mais popular, é a chamada formulação direta, na qual as funções incógnitas presentes na formulação são variáveis físicas do problema. Em elasticidade, por exemplo, essas funções incógnitas são os campos de deslocamentos e forças de superfície. A outra abordagem é chamada de formulação indireta, na qual as funções incógnitas são representadas por fontes de densidade fictícias. Uma vez que essas fontes de densidade são calculadas, os valores dos parâmetros físicos podem ser obtidos por meio de simples integrações. (SCUCIATO, 2007)

Introduzindo a aproximação na equação que governa o problema, um erro – ou função de erro – é produzido tanto na equação, quanto nas condições de contorno correspondentes. Essa função erro ou residual representa o erro que ocorre no domínio ou no contorno, uma vez que a equação não é satisfeita. Assim, a ideia consiste em se buscar técnicas que minimizem esse erro, distribuindo ou ponderando o mesmo. A mais comum é forçar a integral dos resíduos ponderados a ser zero, conhecida como **Técnica dos Resíduos Ponderados**. (GOMES, 2006)

A Equação Integral de Contorno, requerida pelo MEC, inicialmente pode ser deduzida de maneira simples a partir das considerações dos Resíduos Ponderados, do teorema de Betti, da Terceira Identidade de Green ou do Princípio Fundamental dos Trabalhos Virtuais. Entretanto, é vantajoso utilizar-se da Técnica dos Resíduos Ponderados, devido sua generalidade, uma vez que esta pode ser estendida para resolução de equações diferenciais parciais mais complexas e, ainda, pode ser usada para relacionar elementos de contorno com outras técnicas. (GOMES, 2006)

## 2.2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (DUAL)

Segundo TEIXEIRA (2006), em problemas os quais aparecem altas concentrações de tensões e de domínios infinitos (ou semi-infinitos), tem-se a possibilidade de utilização da técnica numérica do MEC. Na aplicação desse método, em interfaces diferentes da trinca, resguardando a não ocorrência dessas interfaces em regiões opostas, tem-se uma matriz não singular, que descreve a equação integral para esses dois pontos.

Para isso, escreve-se a equação dos deslocamentos em uma face da trinca e a equação das forças de superfície para a outra face. Esse método, chamado de Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), foi implementado por PORTELA et al. (1992).

A utilização do MEC convencional para problemas de contorno com a existência de um par de pontos coincidentes no contorno da trinca não traz a solução. Isso ocorre porque as equações relativas a um ponto são idênticas às do ponto oposto. O deslocamento utilizado para a integração é o mesmo, causando esse problema. (GOMES et al., 2016)

Segundo TEIXEIRA (2006), uma aplicação direta do MEC em problemas de Mecânica da Fratura gera uma matriz singular quando se escreve a equação integral para dois pontos de mesmas coordenadas, embora em faces opostas da trinca. Isso ocorre porque o caminho de integração é o mesmo. Essa singularidade pode ser evitada colocando-se as interfaces da trinca em sub-regiões distintas. Entretanto, essa solução gera um contorno artificial nas interfaces e aumenta o número de incógnitas.

Pode-se chegar à solução do problema utilizando equações de contorno distintas, que levarão a equações algébricas distintas e independentes. As equações utilizadas são:

- Equação Integral do Deslocamento: (ALIABADI, 2002)

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma(x) \quad (30)$$

Onde:

-  $T_{ij}(x', x)$  e  $U_{ij}(x', x)$  = soluções fundamentais para tração e deslocamento em um ponto  $x$  do contorno;

-  $i$  e  $j$  = componentes cartesianos;

- CPV = Valor Principal de Cauchy;

-  $c_{ij}(x')$  = coeficientes para contorno suave.

Nessa equação, a distância entre os pontos  $x'$  e  $x$  é diferente de zero. Essa distância  $r$ , tendendo a zero. As soluções apresentam singularidades: fortes em  $T_{ij}$  de ordem  $1/r$  e fracas em  $U_{ij}$  de ordem  $\ln(1/r)$ .

- Equação Integral de Tração: (PORTELA, 1992)

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x)u_k(x)d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (31)$$

Onde:

- HPV = Valor Principal de Hadamard;

-  $S_{ijk}(x', x)$  e  $D_{ijk}(x', x)$  = derivadas de  $T_{ij}(x', x)$  e  $U_{ij}(x', x)$ ;

Quando  $r$  tende a zero,  $S_{ijk}$  apresenta singularidade de ordem  $1/r^2$  e  $D_{ijk}$  de ordem  $1/r$ .

Dessa maneira, pode-se reescrever as componentes de tração em um contorno suave como:

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x)u_k(x)d\Gamma(x) = n_i(x')CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (32)$$

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) tem como base as equações 30 e 32. Além de utilizar uma região única, esse procedimento é especialmente adequado no estudo de propagação de trincas. Quando se utilizam elementos descontínuos, estes novos elementos originários da propagação da trinca resultam em linhas e colunas adicionadas à matriz do sistema, mantendo aquelas já existentes antes da propagação. A técnica de sub-regiões, ao contrário, obriga a montagem de todo o sistema a cada extensão da trinca. (TEIXEIRA, 2006)

Para a discretização de um problema para ser estudado por meio do MECD, devem ser seguidos os seguintes passos:

- Os contornos da trinca são modelados com elementos quadráticos descontínuos;
- Elementos quadráticos contínuos são usados no restante do contorno da estrutura, exceto na interseção entre a trinca e a aresta, onde elementos

descontínuos ou semi-descontínuos são exigidos nas arestas para se evitar o nó comum na interseção;

- A equação de deslocamentos (30) é aplicada em uma das superfícies da trinca;
- A equação de forças (32) é aplicada na outra superfície da trinca;
- A equação de deslocamentos (30) é aplicada em todo o contorno que não coincida com a trinca.

Para um sólido fraturado,  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$  representam as faces da trinca e  $\Gamma^*$  representa o contorno remanescente, conforme Figura 8.

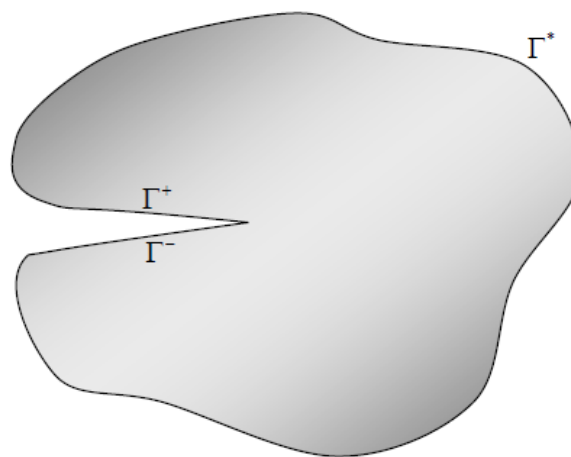


Figura 8 – Representação do contorno da fratura na formulação dual (fonte: KZAM, 2009)

PORTELA (1992) apresenta a metodologia clássica de discretização, conforme Figura 9.

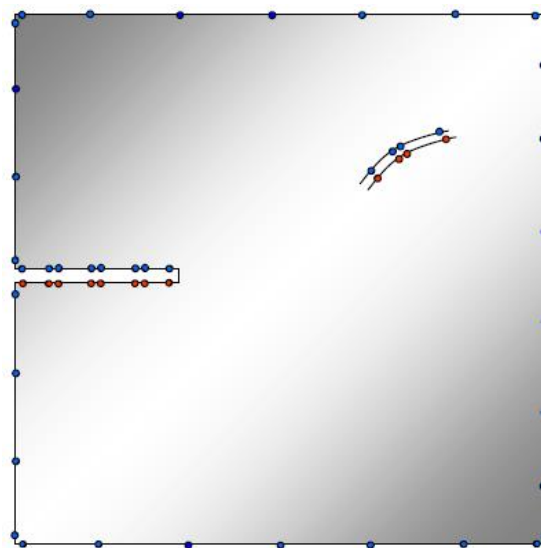


Figura 9 – Colocação dos nós na formulação dual (fonte: KZAM, 2009)

Os nós azuis indicam equações de deslocamento e os nós vermelhos equações de força.

## 2.3 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

Segundo KZAM (2009), a fadiga é caracterizada como o processo que causa falha prematura ou dano permanente a um componente sujeito a carregamentos cíclicos, que são causados por carregamento e descarregamento, compressão e descompressão, aquecimento e resfriamento e vibrações. Já segundo MIRANDA (2003), a fadiga é um tipo de falha mecânica caracterizada pela propagação de forma progressiva de uma trinca, causada pela repetição de carregamentos sobre determinada peça.

Os parâmetros que influenciam a resistência dos materiais à fratura são divididos em quatro grupos, são eles:

- Relativo à geometria: influencia o fator de intensidade de tensões e o gradiente das tensões;
- Relativo às solicitações: inclui os estados de tensões, razão entre FIT máximo e mínimo, tipo de carregamento e frequência;
- Propriedades mecânicas: caracterizam o comportamento de determinado material;
- Ambiente externo: inclui temperaturas e agressividade do ambiente.

Existem dois aspectos principais na propagação de trinca por fadiga no modo misto: a direção e a velocidade da propagação da trinca. Vários critérios foram propostos para a previsão da direção de propagação. O mais utilizado é o Critério da Tensão Tangencial Máxima (MTS). Este critério afirma que a propagação da trinca começa a partir da ponta, na direção onde a tensão tangencial é máxima e quando esta tensão atinge um valor crítico, igual à tensão de fratura do teste de tração uniaxial. Este critério é bastante usado devido à simplicidade e é confirmado em diversas observações experimentais.

O Critério da Densidade da Energia de Deformação Mínima (Critério S) foi proposto por SIH (1974) e é baseado na densidade local do campo de energia na região da ponta da trinca. Supõe-se que a trinca propaga na direção onde a densidade da energia de deformação é mínima e quando este fator atinge um valor crítico. Este critério tem a vantagem de ser

simples na sua aplicação, além da facilidade de tratar as diversas situações de combinação de carregamento. Entretanto, alguns resultados contraditórios são reportados na literatura. O Critério J foi proposto por HELLEN e BLACKBURN (1975) e afirma que a trinca cresce na direção do vetor J que é dado por:

$$J = J_I \mathbf{i} + J_{II} \mathbf{j} \quad (33)$$

- $J_I$  e  $J_{II}$  são valores desacoplados para os modos I e II da integral, independente do caminho de propagação;
- $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são vetores unitários nas direções do eixo da trinca e perpendicular a ele;

A fratura ocorre quando o vetor J atinge um valor crítico. Este critério apresenta resultados satisfatórios quando o carregamento predominante é do modo I, desviando-se significativamente dos resultados experimentais quando predominam as condições de carregamento no modo II.

O Critério da Densidade da Energia de Deformação Dilatacional (Critério T) foi proposto por THEOCARIS e ADRIANOPOULOS (1982) que sugerem a separação da densidade de energia de deformação total em suas componentes distorcional e dilatacional. Este critério afirma que a trinca começa a propagar quando a energia de deformação dilatacional, em um ponto vizinho da ponta da trinca, atinge um valor crítico. Isso implica que a trinca propaga segundo a direção desta componente quando ela é máxima. O contorno elastoplástico, obtido a partir da condição de escoamento de Von Mises, deve ser usado para avaliar a energia de deformação dilatacional em torno da ponta da trinca e, por definição desta condição de escoamento, a parte distorcional da energia total é constante ao longo do contorno elastoplástico.

O Critério do Vetor Deslocamento da Ponta da Trinca (Critério CTD), proposto por LI (1989), é baseado no conceito de que o vetor deslocamento da ponta da trinca indica a direção da propagação por fadiga da trinca. Supõe-se que a trinca propaga segundo a direção deste vetor, que é definido como a soma dos vetores CTOD (vetor abertura correspondente ao modo de fratura I) e CTSD (vetor deslizamento correspondente ao modo de fratura II). Os resultados obtidos têm boa concordância com os resultados experimentais. Os Critérios do Fator da Tensão Tangencial e do Fator da Deformação Tangencial foram definidos por WU e LI (1989) e consideram que a trinca propaga segundo a direção do valor máximo de  $(r_{1/2} \sigma \theta)$

para o primeiro critério e  $(r/2 \epsilon\theta)$  para o segundo, calculado no contorno elastoplástico, sendo  $r$  é a distância do ponto considerado à ponta da trinca.

O Critério da Deformação Tangencial Máxima foi proposto por CHAMBERS et al.(1991) e é baseado no conceito do mecanismo de arredondamento plástico da ponta na propagação da trinca. Os autores sugerem que o arredondamento esteja relacionado com a deformação tangencial plástica. Assim, supõe-se que as deformações tangenciais próximas à ponta da trinca, determinadas com base no comportamento elástico linear, são as mesmas que ocorrem na região plastificada, apesar das tensões estarem abaixo da tensão de escoamento. Seguindo procedimento análogo ao critério da tensão tangencial máxima, pode-se prever a direção da propagação por fadiga da trinca.

Entre os critérios mencionados, os Critérios da Tensão Tangencial Máxima e da Densidade da Energia de Deformação Mínima são os mais utilizados nos estudos de propagação de trincas, com carregamento no modo misto. As aplicações destes dois critérios foram estendidas para os carregamentos nos modos mistos I, II e III por CHEN et al. (1986), onde se reportou que o critério da densidade da energia de deformação mínima ofereceu melhores resultados que o critério da tensão tangencial máxima. Entretanto não há um único critério que dê resultados satisfatórios para todas as condições de carregamento.

RADAJ e ZHANG (1995) propuseram o critério do Processo da Zona de Fratura que consiste em hipóteses distintas para o aparecimento de trincas em materiais de comportamento frágil e dúctil. Para o comportamento frágil, a trinca se inicia no limite da zona de fratura em um ponto determinado pelo valor máximo da densidade de energia de deformação dilatacional. A trinca é iniciada no valor crítico da primeira tensão principal e se propaga na direção perpendicular a esta tensão. Para o comportamento dúctil a trinca também se inicia no limite da zona de fratura em um ponto determinado pelo valor máximo da densidade de energia de deformação distorcional. A trinca é iniciada e se propaga como no comportamento frágil. Para a iniciação da trinca, o critério se mostrou conservativo em relação aos critérios convencionais.

SEWERYN (1998) propôs o critério da Taxa de Liberação de Energia de Deformação não-local para materiais com comportamento frágil, baseado na hipótese onde a propagação da trinca ocorre quando o valor máximo da função de abertura e deslizamento da taxa de liberação da energia de deformação atinge um valor crítico. KHAN e KHRAISHEH (2000) apresentaram uma análise detalhada do aparecimento de trincas inclinadas, sob diferentes carregamentos, utilizando vários critérios. O critério da tensão tangencial máxima, originalmente proposto para materiais frágeis, foi modificado para ser usado em materiais

dúcteis. Foi incorporado a este critério um raio variável, medido a partir da ponta da trinca, baseado no contorno elastoplástico de Von Mises. Eles concluíram que os dados experimentais não favorecem qualquer critério para todas as condições de carregamento.

SOH e BIAN (2001) estudaram o comportamento de uma placa retangular de liga de alumínio com uma trinca semi-elíptica inclinada submetida a carregamento axial, experimental e teoricamente. A inclinação da trinca em relação ao eixo do carregamento variou de 0o a 90o. Os dois critérios mais comuns, Tensão Principal Máxima e Densidade de Energia de Deformação Mínima, foram modificados adotando-se o contorno elastoplástico de Von Mises. Os resultados obtidos usando-se estes critérios melhorados foram comparados com os critérios usuais e os resultados experimentais. Os autores concluíram que os resultados obtidos com os critérios de fratura modificados, são mais precisos do que aqueles obtidos pelos critérios usuais, quando comparados com resultados experimentais.

A estimativa da velocidade de propagação da trinca sob carregamento no modo misto é encontrada na literatura sob diversos enfoques. O primeiro estudo de propagação de trinca por fadiga no modo misto I e II é devido a IIDA e KOBAYASHI (1969).

A taxa de propagação de trinca por fadiga descrita por TANAKA (1974) usa uma equação similar à Lei de Paris e é função de um fator de intensidade de tensão efetivo:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m \quad (34)$$

- $\Delta K_{eff} = (\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4)^{0,25}$ , para carregamentos misto dos modos I e II.

Este modelo é baseado na hipótese de que a trinca se propaga por fadiga quando a soma dos valores absolutos dos deslocamentos na região plástica atinge um valor crítico. Sob condições do modo misto supõe-se que as deformações devidas aos carregamentos nos modos I e II não são interativas. Ele sugeriu que este critério pode ser estendido para a combinação dos três modos de carregamento.

O Fator Densidade da Energia de Deformação foi utilizado por SIH e BARTHELEMY (1980) para correlacionar a velocidade de propagação da trinca no modo I a partir, também, de uma equação similar à equação de Paris. PATEL e PANDEY (1981) usaram o fator densidade de energia de deformação para estimar a velocidade de propagação da trinca com carregamento no modo misto.



O Modelo proposto por GAO et al. (1985) supõe que a propagação da trinca por fadiga é função da deformação plástica reversa na ponta da trinca e a velocidade é inversamente proporcional a ductibilidade à fratura. DOWLING e BEGLEY (1976) usaram a Integral J para avaliar a velocidade de propagação da trinca no modo I. Este conceito foi estendido para análise da velocidade de propagação por fadiga de pequenas trincas com carregamento no modo misto por HOSHIDE e SOCIE (1987). Os autores afirmaram que é desejável relacionar diretamente a velocidade de propagação com o deslocamento da ponta da trinca. Parâmetros adicionais são necessários para fazer a correlação, devido à dificuldade de medir os deslocamentos na ponta da trinca. Neste modelo a abertura e o deslizamento medidos a uma determinada distância atrás da ponta da trinca são os parâmetros que governam a propagação, que é expressa por uma equação do tipo da Lei de Paris. As estimativas resultaram em velocidades mais altas do que os dados experimentais.

O Fator Intensidade de Deformação Equivalente foi proposto por SOCIE et al. (1987) e relacionaram as variações máximas da deformação por cisalhamento e deformação normal, agindo no plano da variação máxima da deformação por cisalhamento. CHEN e KEER (1991) utilizaram o modelo de Dugdale para relacionar a velocidade de propagação da trinca com os deslocamentos plásticos acumulados (abertura e deslizamento). As seguintes três hipóteses foram feitas: os efeitos de fechamento e ramificação devem ser desprezados; o deslocamento plástico acumulado total é a soma vetorial da abertura e deslizamento totais acumulados e as tensões de tração e de cisalhamento na região de escoamento satisfazem ao critério de Von Mises.

PLANK e KUHN (1999) utilizaram o critério da tensão tangencial máxima em corpos de prova de ligas de alumínio para estudar a propagação de trincas sob carregamento não proporcional no modo misto. Eles mostraram as condições para o aparecimento e propagação de trincas, concluindo que, sob o ponto de vista do mecanismo da fratura, não existiam hipóteses até aquele momento que explicassem as diferentes taxas de propagação das trincas submetidas a carregamentos nos modos de tração e cisalhamento.

A primeira tentativa de se modelar automaticamente a propagação de trincas no modo misto é devido a INGRAFFEA et al. (1987) para problemas bidimensionais. Eles usaram a técnica de sub-regiões e o critério da tensão circunferencial máxima para calcular a direção da propagação da trinca. A aplicação deste método para problemas 3D foi apresentada por GREESTLE (1986). O processo de propagação de trinca em materiais ortotrópicos foi apresentado por DOBLARE et al. (1990) que usaram a técnica de sub-regiões e elementos quarter-point. Propagações de trincas com sub-regiões foram também desenvolvidas para

problemas dinâmicos por GALLEGO e DOMINGUEZ (1992) que utilizaram a formulação dependente do tempo com elementos quarter-point. CEN e MAIER (1992) também utilizaram sub-regiões para análise de propagação de trincas em estruturas de concreto. Nesta formulação o modelo de trinca coesiva foi utilizado para simular a zona com fratura no concreto. Em análise incremental para propagação de trinca o método de sub-regiões não é facilmente implementado, pois o contorno adicional que liga a trinca ao contorno real não é único e deve ser introduzido repetidamente a cada extensão da trinca. PORTELA et al. (1993) e MI e ALIABADI (1994) e (1995) apresentaram uma aplicação do MECD para propagação de trinca no modo misto para problemas bi e tri dimensionais em mecânica da fratura elástica linear.

Os processos de propagação de trinca foram simulados em análise incremental baseado no critério da tensão principal máxima para 2D e o critério da densidade da energia de deformação mínima para 3D. Em PORTELA (1993), para cada extensão da trinca, o MECD foi aplicado em análise de tensão com uma única região e a técnica da Integral J para calcular o fator de intensidade de tensão. Como a extensão da trinca foi modelada com novos elementos descontínuos, nenhuma alteração na malha do contorno existente foi necessária, por causa da utilização de uma única região, propriedade intrínseca do MECD. Em propagação de trincas em 3D, entretanto, alguma alteração na malha é necessária. Um procedimento automático para este processo foi desenvolvido por ALIABADI e MI (1994). SALGADO e ALIABADI (1996) apresentaram a aplicação do MECD em estruturas enrijecidas. Eles simularam a propagação da trinca em painéis aeronáuticos reforçados por enrijecedores.

#### **- Lei de Paris**

No início da década de 60, Paris (1960-1961) mostrou que o parâmetro que controla a propagação das trincas por fadiga é a variação do fator de intensidade de tensões ( $\Delta K$ ), e não a tensão. Em um clássico experimento, Paris usou duas chapas idênticas, feitas do mesmo material e com uma trinca central de mesmo comprimento. A chapa 1 foi carregada pelas bordas enquanto a chapa 2 foi carregada pelas faces da trinca, mantendo a mesma tensão nas duas chapas. A trinca, na chapa 1, acelerava e, na chapa 2, desacelerava. Como ambas trabalhavam sob a mesma variação de tensão, essa não poderia estar controlando a propagação das trincas. Entretanto, devido à forma da aplicação da carga, na chapa 1,  $\Delta K$  aumentava à medida que a trinca crescia, enquanto na chapa 2,  $\Delta K$  decrescia à medida que a trinca crescia. Assim Paris sugeriu que era  $\Delta K$  que controlava a propagação e mostrou que

quando se relacionava a taxa de propagação da trinca ( $da/dN$ ) com  $\Delta K$ , os pontos experimentais gerados tanto na chapa 1 quanto na chapa 2 coincidiam.

Ele propôs a Curva de Propagação de Trincas por Fadiga Típica (Figura 10).

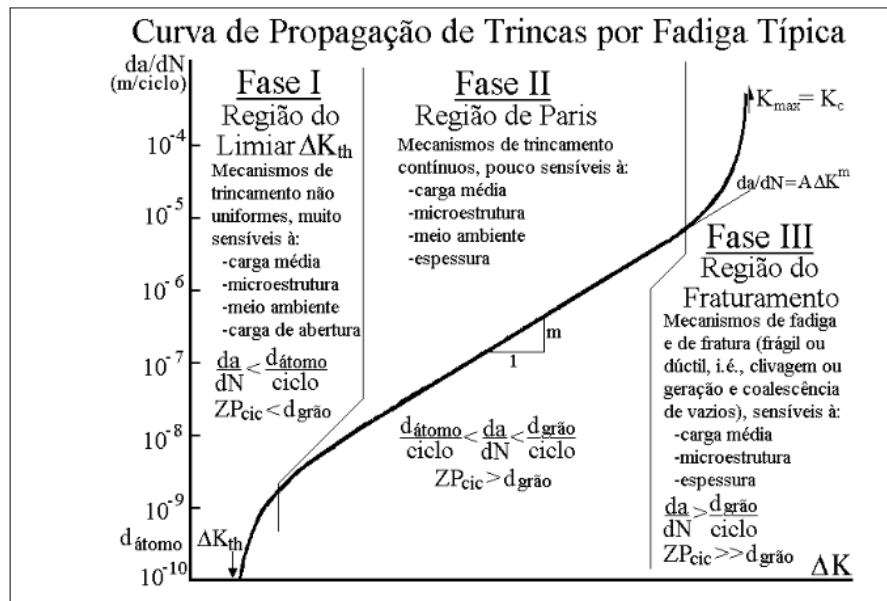


Figura 10 – Curva de Propagação das Trincas por Fadiga Típica (fonte: MIRANDA, 2003)

## 2.4 PROGRAMAS DE ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS

Existem, consagrados na literatura, alguns programas para o cálculo e análise de tensões em trincas bidimensionais. Em sua maioria, utilizam para o cálculo o Método dos Elementos Finitos (MEF). Todos os softwares consistem em uma discretização do modelo matemático existente por trás da resolução do problema.

Inicialmente, tem-se um problema físico para se chegar a uma solução. Então, simplificações e aproximações são feitas para se ter um modelo matemático que dê a solução. A seleção desse modelo, depende da resposta a ser obtida. Após isso, modelos numéricos de discretização são propostos para que, por meio de aproximação e convergência, se consiga chegar à solução. Os softwares foram desenvolvidos com a inclusão de métodos numéricos para se ter uma facilidade nos cálculos. Entre esses programas, podemos citar o ANSYS, o ABAQUS, FRANC2D e QUEBRA2D. Todos utilizam o MEF como base. Entre os que utilizam o MEC, podemos citar o BemCracker2D (GOMES, 2016), o qual este trabalho está inserido.

### 2.4.1 BEMLAB2D

Um programa com a função de pré e pós-processamento, escrito em plataforma MATLAB, com a função primária de gerar e visualizar sólidos bidimensionais para modelagem devido a DELGADO NETO e GOMES (2016). O BemLab2D é uma Interface Gráfica que permite, entre outras funções, a de modelador via Elementos de Contorno para análise de trincas, conforme ilustrado na Figura 11.

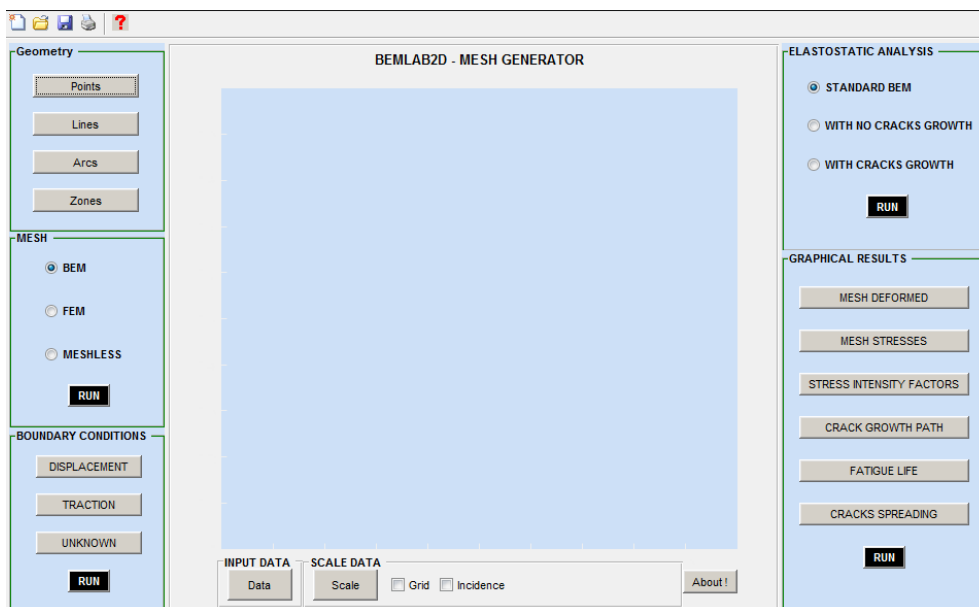


Figura 11 – Interface inicial do BemLab2D (fonte: LEITE, 2016)

Dentre os módulos existentes nesse programa, pode-se citar:

- ✓ Módulo I (GEOMETRY): Utilizado para a construção do modelo bidimensional do problema por meio de ferramentas de desenho (pontos de auxílio, linhas, arcos e definição de zonas);
- ✓ Módulo II (MESH): Utilizado para gerar a malha do problema. Há opções para gerar malhas de MEC, MEF e opção sem malha (*Meshless*);
- ✓ Módulo III (BOUNDARY CONDITIONS): Aqui são definidos as condições de contorno especificamente para o MEC;

- ✓ Módulo IV (ELASTOSTATIC ANALYSIS): Nesse módulo é definido o tipo de análise que será executado para o problema. Pode-se optar pela análise padrão do MEC, análise sem propagação de trinca e análise com propagação de trinca;
- ✓ Módulo V (GRAPHICAL RESULTS): Esse módulo é o responsável pelo pós-processamento, ou seja, nele são visualizados os resultados gerados pelo processador BemCracker2D, onde é possível visualizar a malha deformada, valores dos fatores de intensidade de tensão  $K$ , propagação da trinca etc.

Pela Figura 11, nota-se que existem, na área de controle do programa, botões para entrada de dados iniciais, como: “Título”, “Tipo de Problema”, “Modulo de Elasticidade” e “Coeficiente de Poisson”. Em um outro menu estão localizadas as ferramentas de desenho, como: o “Inserir Ponto”, “Inserir Segmento Reto”, “Inserir Segmento Curvo” e “Gerar Malha”. Esse último tem este botão tem a funcionalidade de gerar a malha sobre o contorno do desenho previamente construído na área de desenhos. Tem-se, também, um menu com opções para inserir restrições locais/global e forças. (DELGAGO NETO et. al, 2016)

#### **2.4.2 BEMCRACKER2D**

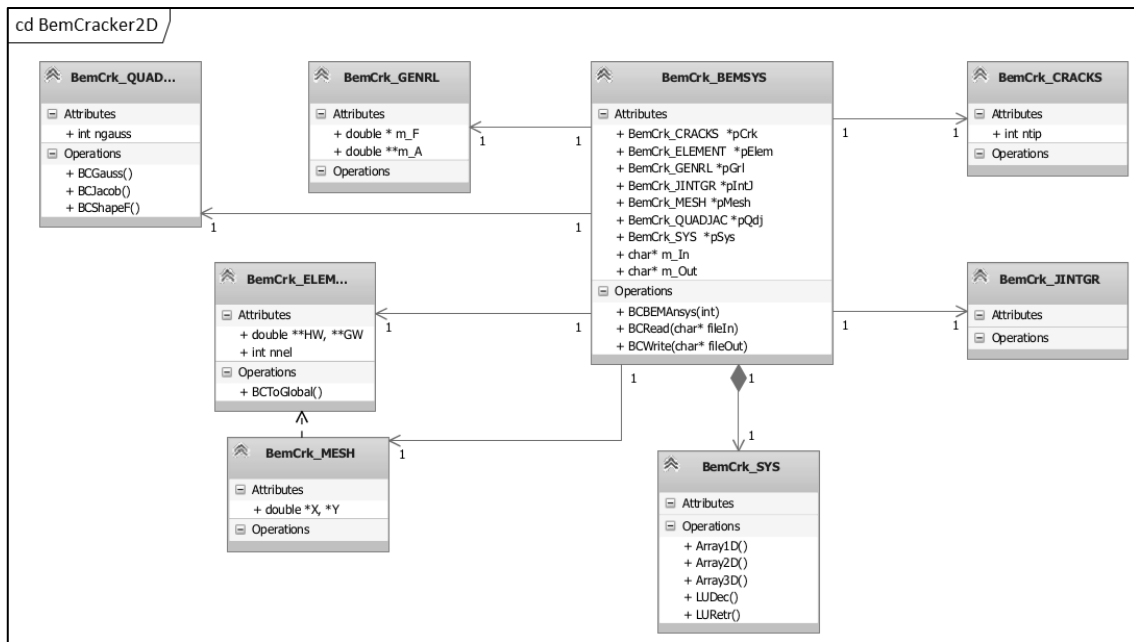
Com fundamento nos conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO) e escrito em linguagem C++, o software utilizado para analisar problemas elastostáticos bidimensionais por meio do MEC, recebe o nome de BEMCRACKER2D. Desenvolvido por GOMES (2016), o programa recebe dados da etapa de pré-processamento do BemLab2D, processa a automatização da análise de propagação de trincas bidimensionais e gera os resultados, para que sejam enviados de volta para que o BemLab2D faça o pós-processamento.

Os três módulos básicos de processamento estão indicados abaixo:

- ✓ Módulo I: MEC padrão;
- ✓ Módulo II: MECD sem propagação;
- ✓ Módulo III: com propagação;

O método que será utilizado nessa primeira etapa do trabalho é o módulo II.

O programa BemCracker2D é baseado no diagrama de classes ilustrado na Figura 12, no qual BemCrk\_BEMSYS com seus atributos e métodos é a classe motora do programa e principal elo de ligação com a interface BemLab2D.



**Figura 12 – Diagrama de classes do programa BemCracker2D**

O software tem como base um conjunto de classes, as quais possuem, cada uma delas, funções específicas para gerar resultados para a etapa de pós-processamento no BEMLAB2D. São elas:

- ✓ BemCrk\_BEMSYS: Responsável pela leitura, análise, solução e impressão do modelo de trinca;
- ✓ BemCrk\_GENRL: Responsável pela montagem do sistema de equações do MEC;
- ✓ BemCrk\_ELEMENT: Responsável pela montagem dos elementos quadráticos contínuos e descontínuos;
- ✓ BemCrk\_MESH: Responsável pela montagem da malha;
- ✓ BemCrk\_QUADJAC: Gerador de pontos de Gauss, Jacobiano e Funções de Forma;
- ✓ BemCrk\_CRACKS: Responsável pela montagem do incremento de crescimento de trinca;
- ✓ BemCrk\_IINTGR: Gerador dos Fatores de Intensidade de Tensão pela Integral-J;
- ✓ BemCrk\_SYS: Responsável pelo arranjo de dados gerados e resolução do sistema de equações.

### 3. METODOLOGIA

A metodologia desse trabalho se dará por comparação, com o objetivo de se analisar os resultados do Fator de Intensidade de Tensão (FIT) calculado com um software que utiliza o MEC. O programa será o BemCracker2D (com o auxílio da etapa de pré-processamento do BemLab2D).

A primeira parte da análise do problema envolve a elaboração da malha no BemLab2D. Nesse momento, definem-se a quantidade de elementos a ser utilizada no contorno e na trinca. Após isso, determinam-se os tipos de apoio e as forças envolvidas no problema que se analisa. Feito isso, escolhe-se o tipo de análise que se pretende fazer, incluem-se as constantes do material envolvidas e processa o problema no BemCracker2D. A Figura 13 mostra o fluxograma da montagem da análise.

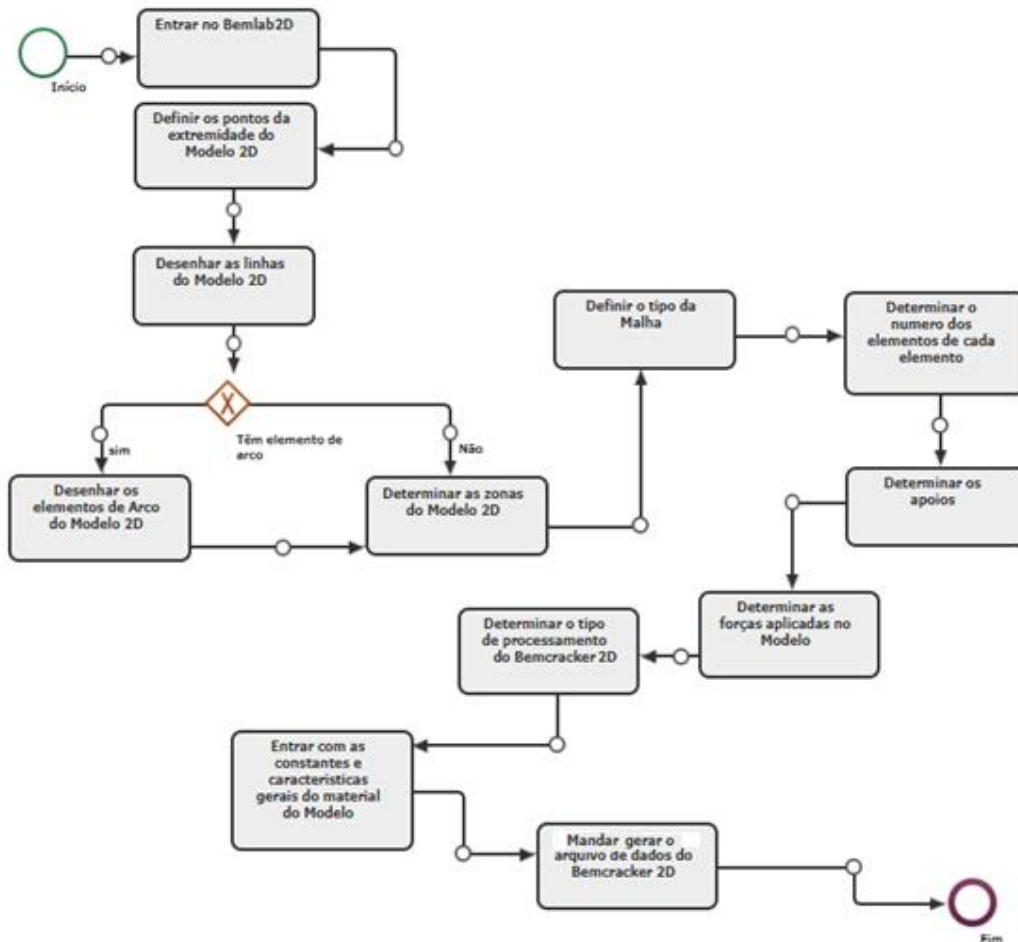


Figura 13 – Fluxograma de análise do problema

Esse trabalho foi dividido em duas partes:

Na primeira etapa, foram analisados, no BemCracker2D, dois problemas clássicos com trincas bidimensionais, sem a propagação dessas. O objetivo foi obter o fator de

intensidade de tensão e comparar os resultados obtidos com o valor calculado analiticamente. O foco da primeira etapa é verificar se o cálculo feito por meio do MEC se aproxima do valor teórico admissível, calculado pelas fórmulas analíticas.

### 3.1 Problema 1: Placa com trinca central na borda

A Figura 14 mostra o primeiro exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma placa retangular, com altura  $2h = 18\text{mm}$  e largura  $w = 10\text{mm}$ . O carregamento aplicado é de  $1\text{Mpa}$  e a trinca, localizada na extremidade central da placa, terá tamanho de  $1\text{mm}$  ( $a = 1$ ). O Módulo de Elasticidade ( $E$ ) utilizado foi de  $210\text{GPa}$  e o Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a  $0,30$ .

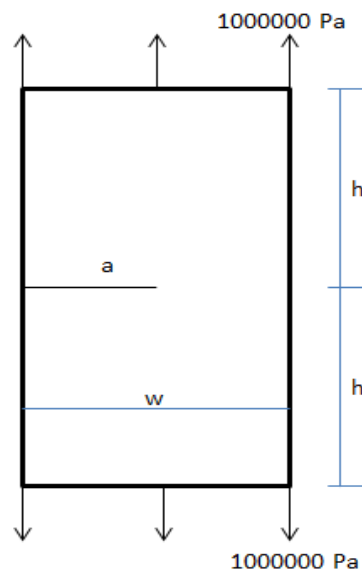
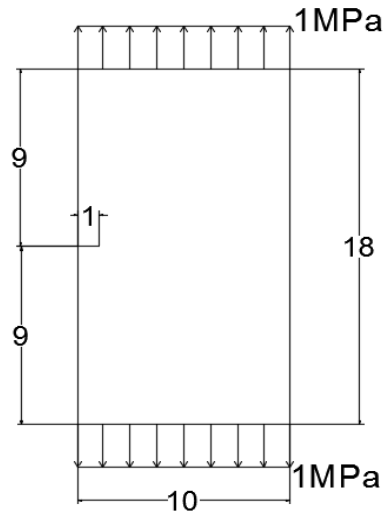


Figura 14 – Exemplo 1 ( $h=9\text{mm}$ ;  $w=10\text{mm}$ ;  $a=1\text{mm}$ )

Foram criadas três malhas distintas para que os resultados finais pudessem ser comparados, a fim de se verificar se o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) estava convergindo para algum valor. A Figura 15 mostra o problema montado no BemCracker2D.

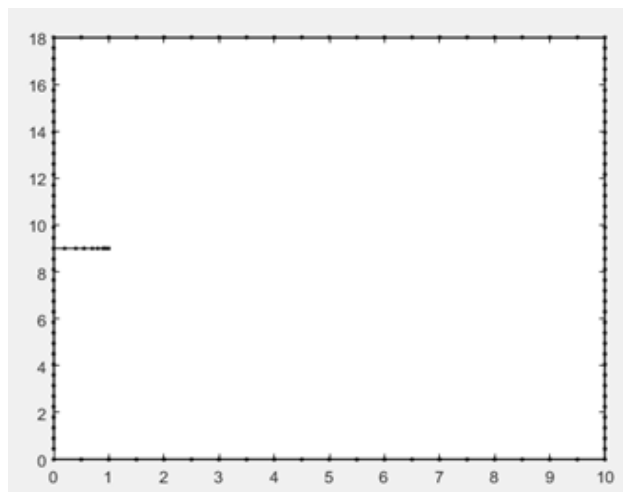




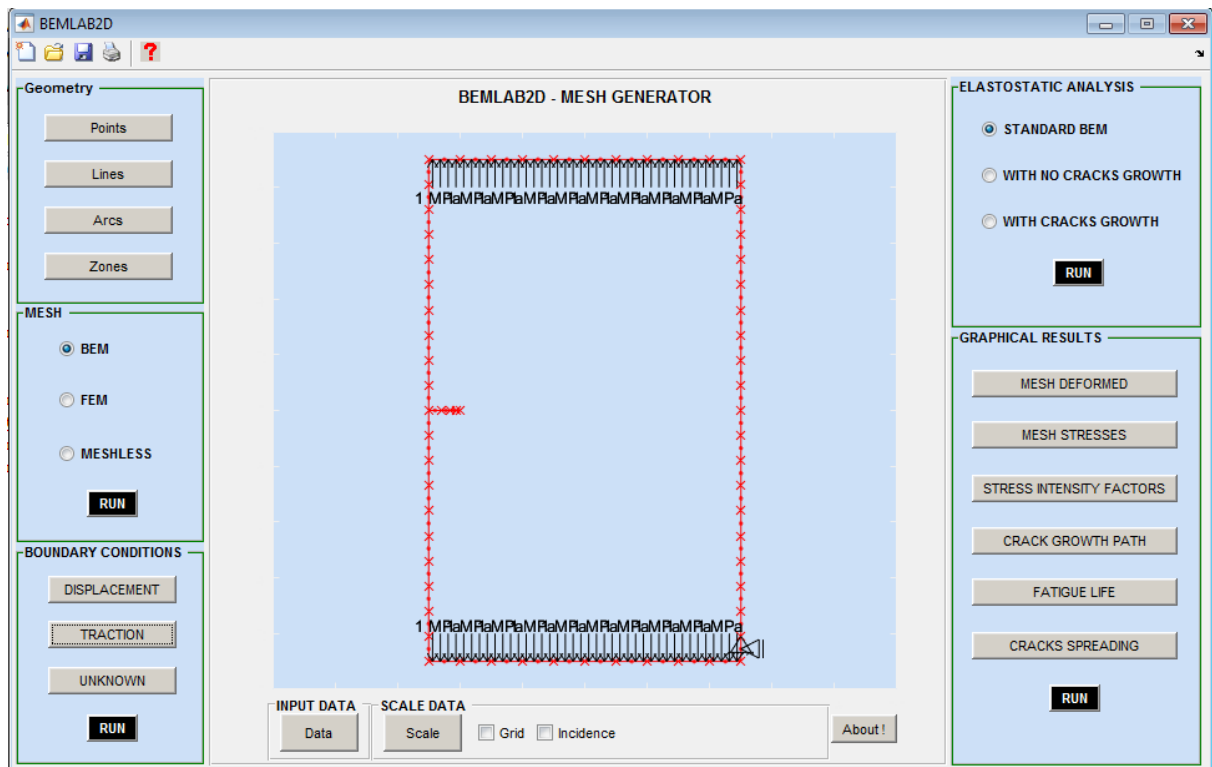
**Figura 15 – Exemplo 1**

- Primeira malha: 68 elementos

A primeira análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 68 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 60 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 20 ao longo de cada lado no comprimento e 10 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. As Figuras 16 e 17 mostram a placa utilizada na análise e a discretização em 68 elementos, feita no BemLab2D, respectivamente.



**Figura 16 – Dimensões da placa utilizada no exemplo 1**



**Figura 17 – Discretização em 68 elementos**

- Segunda malha: 86 elementos

A segunda análise foi feita utilizando-se também o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 86 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 78 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 26 ao longo de cada lado no comprimento e 13 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. A Figura 18 mostra a discretização em 86 elementos, feita no BemLab2D.

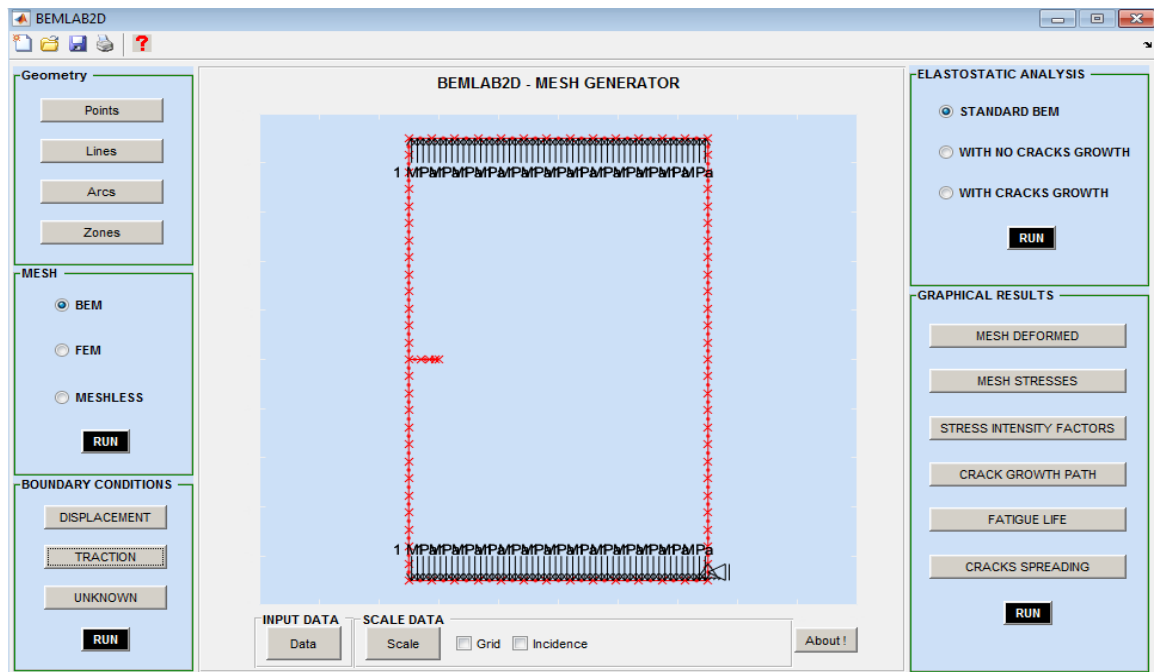


Figura 18 – Discretização em 86 elementos

- Terceira malha: 110 elementos

A terceira análise foi feita utilizando-se também o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 110 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 102 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 34 ao longo de cada lado no comprimento e 17 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. A Figura 19 mostra a discretização em 110 elementos, feita no BemLab2D.

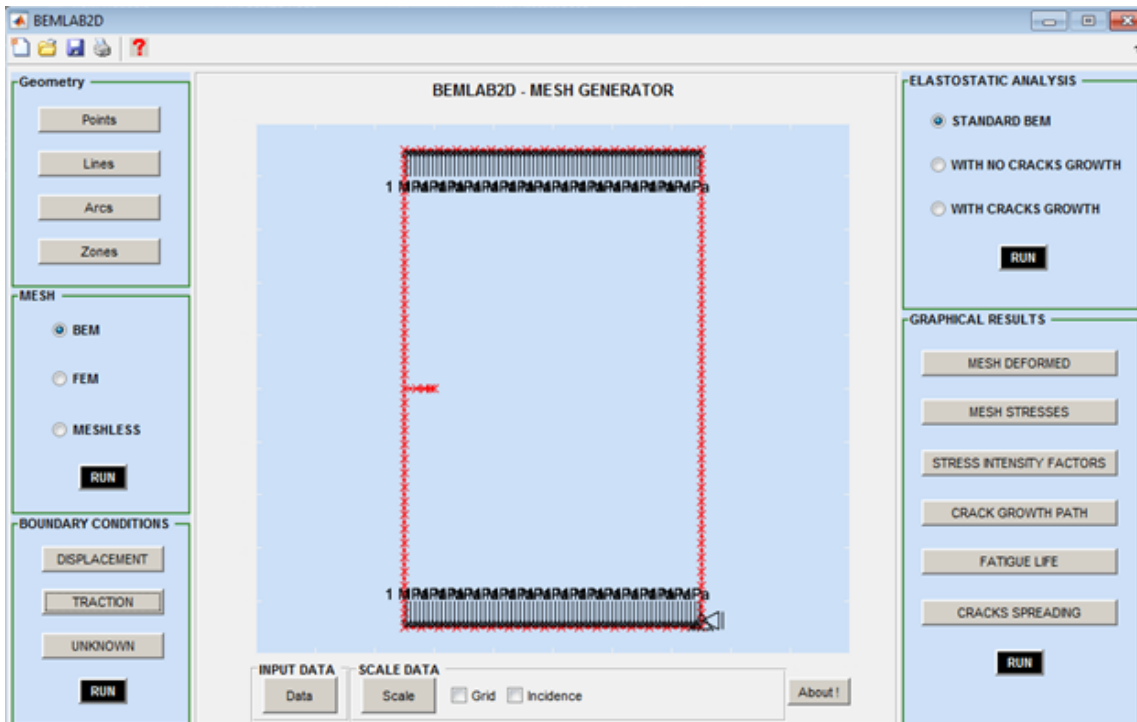


Figura 19 – Discretização em 110 elementos

### 3.2 Problema 2: Placa com trinca central na borda

A Figura 20 mostra o segundo exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma placa retangular, com altura  $2h = 18\text{mm}$  e largura  $w = 10\text{mm}$ . O carregamento aplicado é de  $1\text{Mpa}$  e a trinca, localizada na extremidade central da placa, terá tamanho de  $2\text{mm}$  ( $a = 2$ ). O Módulo de Elasticidade ( $E$ ) utilizado foi de  $210\text{GPa}$  e o Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) igual a  $0,30$ .

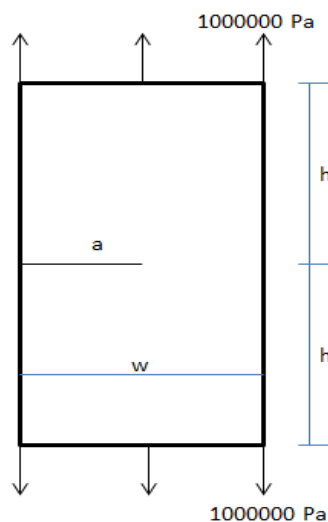
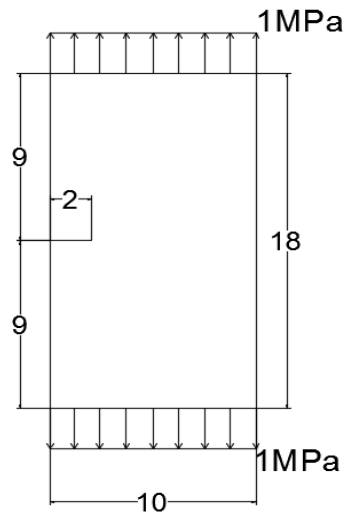


Figura 20 – Exemplo 2 ( $h=9\text{mm}$ ;  $w=10\text{mm}$ ;  $a=2\text{mm}$ )

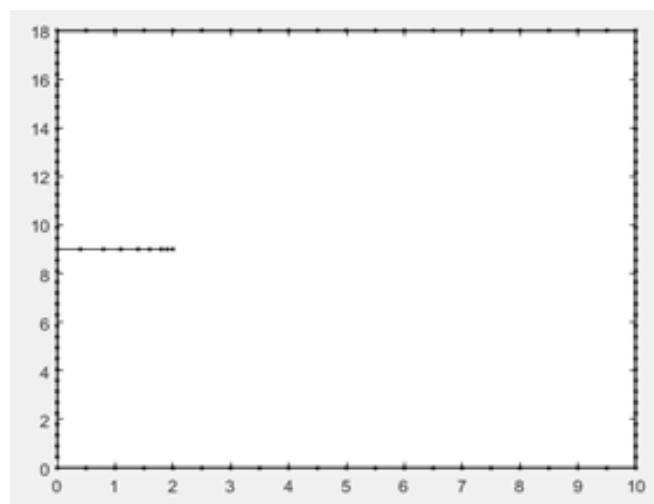
Foram criadas três malhas distintas para que os resultados finais pudessem ser comparados, a fim de se verificar se o Fator de Intensidade de Tensão (FIT) estava convergindo para algum valor. A Figura 21 mostra o problema montado no BemCracker2D.



**Figura 21 – Exemplo 2**

- Primeira malha: 68 elementos

A primeira análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 68 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 60 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 20 ao longo de cada lado no comprimento e 10 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. As Figuras 22 e 23 mostram a placa utilizada na análise e a discretização em 68 elementos, feita no BemLab2D.



**Figura 22 – Dimensões da placa utilizada no exemplo 2**

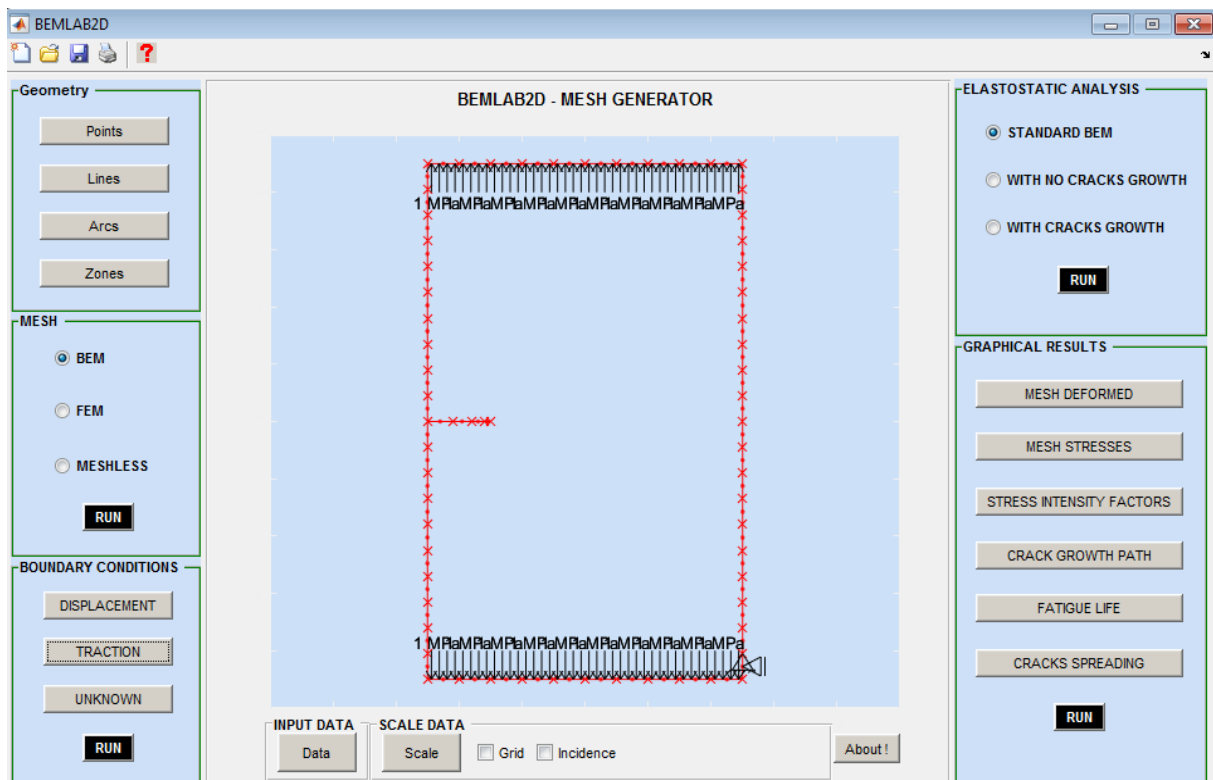


Figura 23 – Discretização em 68 elementos

- Segunda malha: 86 elementos

A segunda análise foi feita utilizando-se também o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 86 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 78 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 26 ao longo de cada lado no comprimento e 13 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. A Figura 24 mostra a discretização em 86 elementos, feita no BemLab2D.

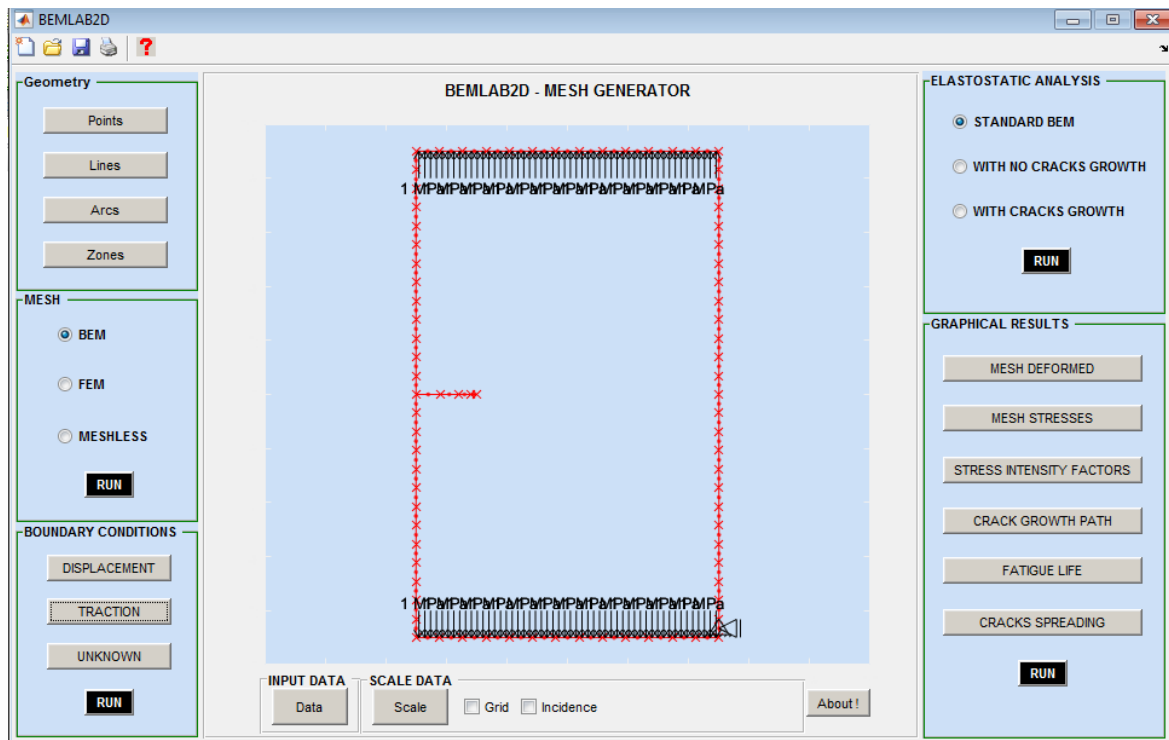


Figura 24 – Discretização em 86 elementos

- Terceira malha: 110 elementos

A terceira análise foi feita utilizando-se também o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 110 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 102 elementos contínuos, distribuídos da seguinte maneira: 34 ao longo de cada lado no comprimento e 17 ao longo de cada lado na largura. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. A Figura 25 mostra a discretização em 110 elementos, feita no BemLab2D.

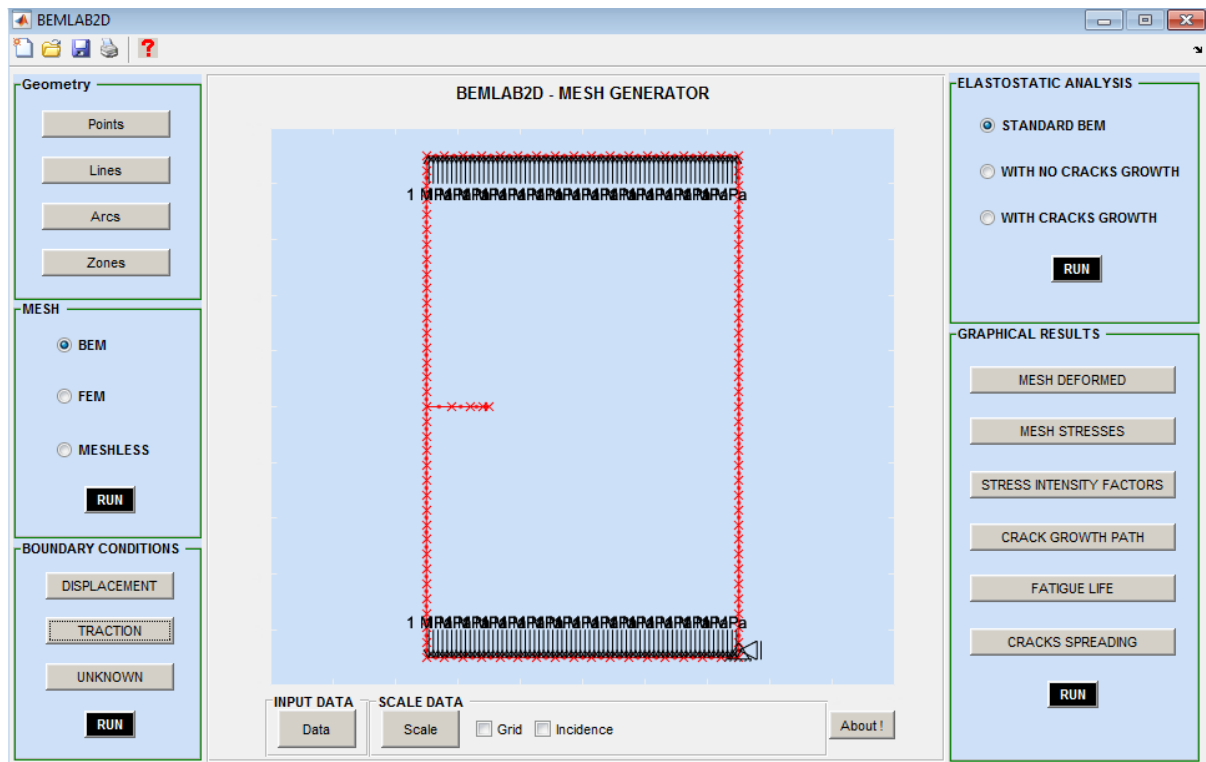


Figura 25 – Discretização em 110 elementos

Os dois exemplos utilizados na análise com o BemCracker2D foram resolvidos de modo analítico, com as fórmulas citadas em TADA et. al (2000), para que os valores obtidos pudessem ser comparados. As fórmulas propostas são:

- Precisão de 0,01:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \frac{\left\{0,857 + 0,265 \left[ \frac{a}{w} + \left(1 - \frac{a}{w}\right)^{5,5} \right] \right\}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{1,5}} \quad (35)$$

- Precisão de 0,005:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \left[ 0,752 + 2,02 \frac{a}{w} + 0,37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2w}\right)^3 \right] \sec \frac{\pi a}{2w} \sqrt{\frac{2w}{\pi a}} \tan \frac{\pi a}{2w} \quad (36)$$



Na segunda etapa desse projeto final, foram analisados quatro problemas com a utilização do mesmo programa, calculando o FIT por meio do MEC. Esses valores foram comparados com os valores calculados analiticamente, disponíveis na literatura.

O objetivo será analisar os resultados obtidos, compará-los com o valor analítico e verificar qual a precisão que ele possui com o valor admissível (analítico). De modo mais geral, o objetivo desse trabalho é verificar a precisão do BemCracker2D, programa que utiliza o MEC para calcular o FIT.

Fez-se, também, uma análise de propagação de trincas do modelo em estudo, com a respectiva direção e o caminho percorrido., considerando o material como sendo aço ferrítico-perlítico. As fórmulas do cálculo analítico foram obtidas em em TADA et. al (2000).

### 3.3 Problema 3: Placa com trinca lateral

A Figura 26 mostra o terceiro exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma placa de aço com largura finita, tracionada axialmente sob um carregamento cíclico com amplitude de carga constante. Ela possui 320mm de comprimento e 150mm de largura. A razão entre a tensão mínima e máxima é  $R = S_{min} / S_{max} = 0,5$ . A placa é constituída de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . A trinca inicial tem a forma retangular e profundidade inicial  $a = 5$  mm. O incremento de trinca  $ia_{max}$  foi considerado igual a 5 mm, aplicado no ponto nodal a frente do qual ocorre  $K_{i_{max}}$ .

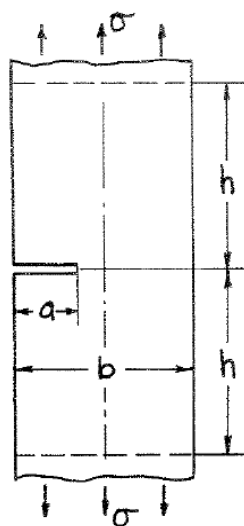
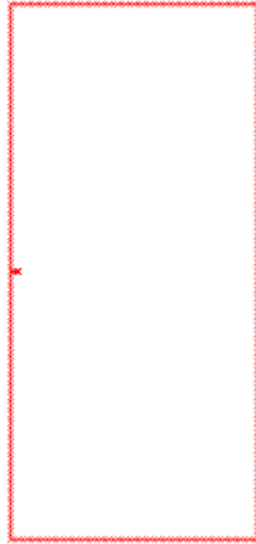
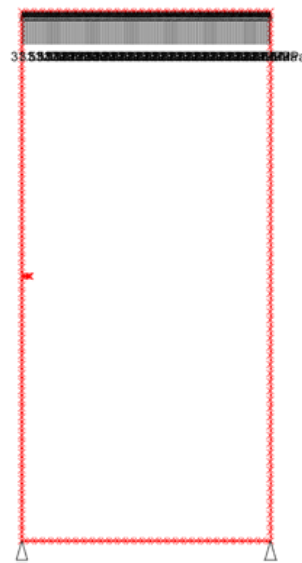


Figura 26 – Exemplo 3 (placa com trinca lateral)

A análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 188 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 180 elementos contínuos. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. As Figuras 27 e 28 mostram a placa utilizada na análise e a discretização feita no BemLab2D.



**Figura 27 – Exemplo 3 (malha com 188 elementos)**



**Figura 28 – Exemplo 3 (carregamento de 31,5MPa)**

- Fórmula Analítica:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (37)$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 0,265\left(1 - \frac{a}{b}\right)^4 + \frac{0,857 + 0,265\frac{a}{b}}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2}} \quad (38)$$

### 3.4 Problema 4: Placa com duas trincas laterais

A Figura 29 mostra o quarto exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma placa de aço com largura finita, tracionada axialmente sob um carregamento cíclico com amplitude de carga constante. Ela possui 320mm de comprimento e 150mm de largura. A razão entre a tensão mínima e máxima é  $R = S_{min} / S_{max} = 0,5$ . A placa é constituída de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Ela possui duas trincas laterais, com forma retangular e profundidade inicial  $a = 5$  mm, na metade da altura. O incremento de trinca  $ia_{max}$  foi considerado igual a 5 mm, aplicado no ponto nodal a frente do qual ocorre  $K_{i_{max}}$ .

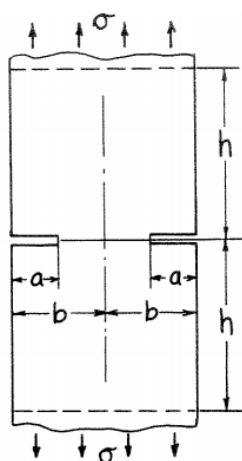


Figura 29 – Exemplo 4 (placa com duas trincas laterais)

A análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 196 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 180 elementos contínuos. Em cada trinca, foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. As Figuras 30 e 31 mostram a placa utilizada na análise e a discretização feita no BemLab2D.

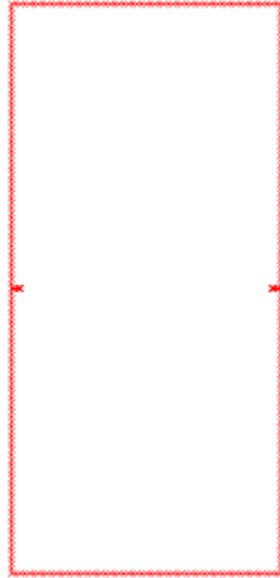


Figura 30 – Exemplo 4 (malha com 196 elementos)

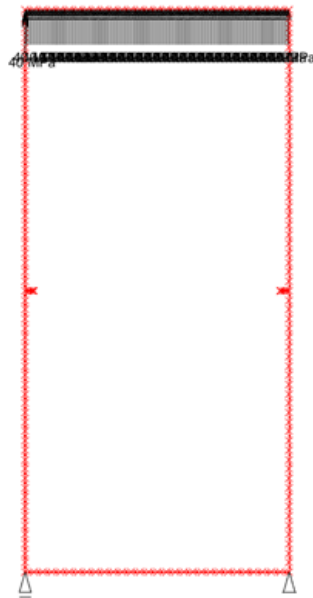


Figura 31 – Exemplo 4 (carregamento de 40,0MPa)

- Fórmula Analítica:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (39)$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1,122 - 0,561\left(\frac{a}{b}\right) - 0,205\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,471\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,190\left(\frac{a}{b}\right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \quad (40)$$

### 3.5 Problema 5: Placa com trinca central

A Figura 32 mostra o quinto exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma placa de aço com largura finita, tracionada axialmente sob um carregamento cíclico com amplitude de carga constante. Ela possui 200mm de comprimento e 100mm de largura. A razão entre a tensão mínima e máxima é  $R = S_{min} / S_{max} = 0,5$ . A placa é constituída de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Ela possui uma trinca central, cujo forma é retangular e o comprimento inicial é  $2a = 10$ mm. O incremento de trinca  $ia_{max}$  foi considerado igual a 2 mm, aplicado no ponto nodal a frente do qual ocorre  $Ki_{max}$ .

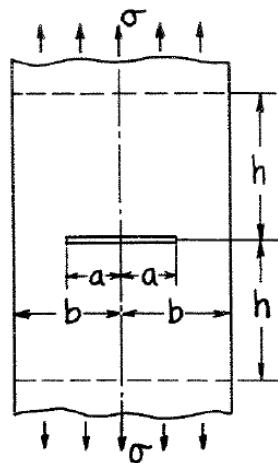


Figura 32 – Exemplo 5 (placa com trinca central)

A análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 130 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 120 elementos contínuos. Na trinca foram utilizados 10 elementos descontínuos, sendo 5 elementos em cada face dela. As Figuras 33 e 34 mostram a placa utilizada na análise e a discretização feita no BemLab2D.

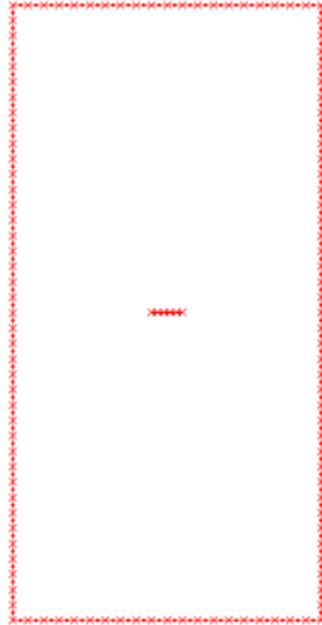


Figura 33 – Exemplo 5 (malha com 130 elementos)

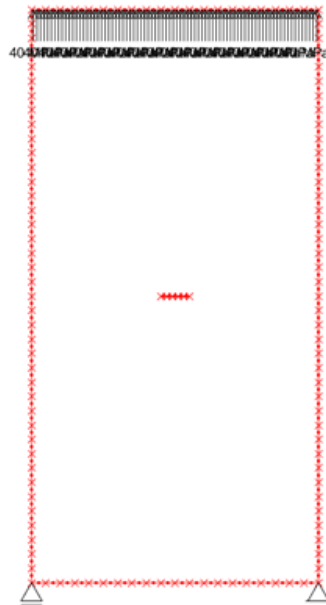


Figura 34 – Exemplo 5 (carregamento de 40,0MPa)

- Fórmula Analítica:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (41)$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + 0,128\left(\frac{a}{b}\right) - 0,288\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,525\left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (42)$$

### 3.6 Exemplo 6: Viga com trinca central na borda

A Figura 35 mostra o sexto exemplo a ser analisado nesse trabalho. Trata-se de uma viga de aço com largura finita, tracionada axialmente sob um carregamento cíclico com amplitude de carga constante. Ela possui 120mm de comprimento e 30mm de altura. A razão entre a tensão mínima e máxima é  $R = S_{min} / S_{max} = 0,5$ . A placa é constituída de aço SAE 4140, com resistência ao escoamento  $f_y = 655$  MPa, resistência última  $f_u = 981$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 210.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Ela possui uma trinca central, cujo forma é retangular e o comprimento inicial é  $a = 5$ mm. O incremento de trinca  $ia_{max}$  foi considerado igual a 1 mm, aplicado no ponto nodal a frente do qual ocorre  $Ki_{max}$ .

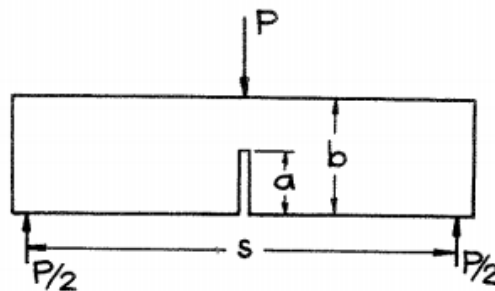


Figura 35 – Exemplo 6 (viga com trinca central na extremidade)

A análise foi feita utilizando-se o MEC como método de cálculo, em uma discretização com 308 elementos quadráticos. No contorno, foram utilizados 300 elementos contínuos. Na trinca foram utilizados 8 elementos descontínuos, sendo 4 elementos em cada face dela. As Figuras 36 e 37 mostram a placa utilizada na análise e a discretização feita no BemLab2D.



Figura 36 – Exemplo 6 (malha com 308 elementos)

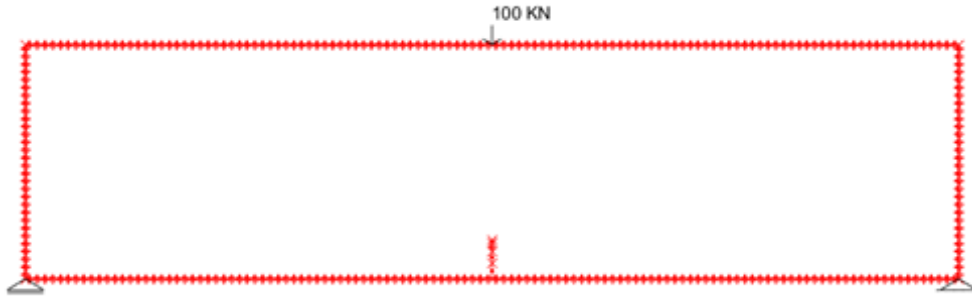


Figura 37 – Exemplo 6 (carregamento de 100kN)

- Fórmula Analítica:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (43)$$

$$\sigma = \frac{6M}{b^2} ; \left(M = \frac{PS}{4}\right) \quad (44)$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1,99 - \frac{a}{b}(1 - \frac{a}{b})(2,15 - 3,93\frac{a}{b} + 2,7(\frac{a}{b})^2)}{(1 + 2\frac{a}{b})(1 - \frac{a}{b})^{3/2}} \quad (45)$$



## 4. RESULTADOS E ANÁLISE

### 4.1 PRIMEIRA ETAPA

Os resultados obtidos no Bemcracker para os problemas 1 e 2 estão dispostos na Tabela 1.

**Tabela 1 – Valores do FIT obtidos com o BemCracker2D**

Discretização	Exemplo 1	Exemplo 2
	FIT (MPa.m <sup>0,5</sup> )	FIT (MPa.m <sup>0,5</sup> )
68 Elementos	2,10	3,42
86 Elementos	2,11	3,43
110 Elementos	2,11	3,44

Os resultados calculados analiticamente para os mesmos problemas estão dispostos na Tabela 2.

**Tabela 2 – Valores do FIT obtidos analiticamente**

Precisão	Exemplo 1	Exemplo 2
	FIT (MPa.m <sup>0,5</sup> )	FIT (MPa.m <sup>0,5</sup> )
1,0%	2,14	3,46
0,5%	2,12	3,43

Com todos os cálculos efetuados e as soluções dos problemas definidas, pode-se comparar os resultados obtidos do BemCracker2D com aquelas obtidos analiticamente. A diferença percentual entre os valores foi calculada da seguinte maneira:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{K_1 (anal) - K_1 (BCR)}{K_1 (anal)} \right|$$

Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 3.

**Tabela 3 – Diferença percentual**

Discretização	<u>Precisão de 1,0%</u>		Discretização	<u>Precisão de 0,5%</u>	
	Exemplo 1 Dif. Percentual	Exemplo 2 Dif. Percentual		Exemplo 1 Dif. Percentual	Exemplo 2 Dif. Percentual
68 Elementos	1,87%	1,16%	68 Elementos	0,94%	0,29%
86 Elementos	1,40%	0,87%	86 Elementos	0,47%	0,00%
110 Elementos	1,40%	0,58%	110 Elementos	0,47%	0,29%

Percebe-se que os valores obtidos com o BEMCRACKER estão muito próximos dos valores calculados analiticamente, o que comprova a precisão desse programa. Em nenhum caso, a diferença percentual é maior que 2,0%.

Percebe-se também que os valores do FIT obtidos com as discretizações de 86 e 110 elementos foram iguais, o que indica que, para uma análise de MEC, não é necessária uma discretização muito grande do problema. Isso facilita a análise, uma vez que quanto maior a discretização, mais programação é necessária.

## **4.2 SEGUNDA ETAPA**

Nesta etapa, são apresentados os resultados dos problemas analisados com a propagação das trincas. O Fator de Intensidade de Tensões foi calculado para trincas bidimensionais levando em consideração a propagação dessas, com a respectiva direção e o caminho percorrido.

### 4.2.1 PROBLEMA 3

Os resultados do terceiro problema analisado estão dispostos na Tabela 4 e os gráficos de comparação estão dispostos nas Figuras 38 e 39.

Tabela 4 – Resultados problema 3

$\pi$	$\sigma$	b	a	B	KI (Analítico)	KI (Resultados MEC)	KII (Resultados MEC)
3,142	31,5	150	5	1,1424	142,622	141,042	0,428
3,142	31,5	150	10	1,1711	206,771	204,787	0,493
3,142	31,5	150	15	1,2086	261,352	259,333	0,628
3,142	31,5	150	20	1,2555	313,483	312,100	0,656
3,142	31,5	150	25	1,3124	366,375	366,090	0,629
3,142	31,5	150	30	1,3803	422,106	423,167	0,532
3,142	31,5	150	35	1,4603	482,353	484,834	0,373
3,142	31,5	150	40	1,5538	548,684	552,528	0,132
3,142	31,5	150	45	1,6627	622,728	627,786	-0,172
3,142	31,5	150	50	1,7890	706,300	712,365	-0,155
3,142	31,5	150	55	1,9357	801,521	808,363	-0,632
3,142	31,5	150	60	2,1064	910,961	918,353	-1,016
3,142	31,5	150	65	2,3056	1037,816	1045,560	-1,283
3,142	31,5	150	70	2,5393	1186,152	1194,090	-1,560
3,142	31,5	150	75	2,8153	1361,255	1369,300	-1,797
3,142	31,5	150	80	3,1442	1570,129	1578,250	-1,977

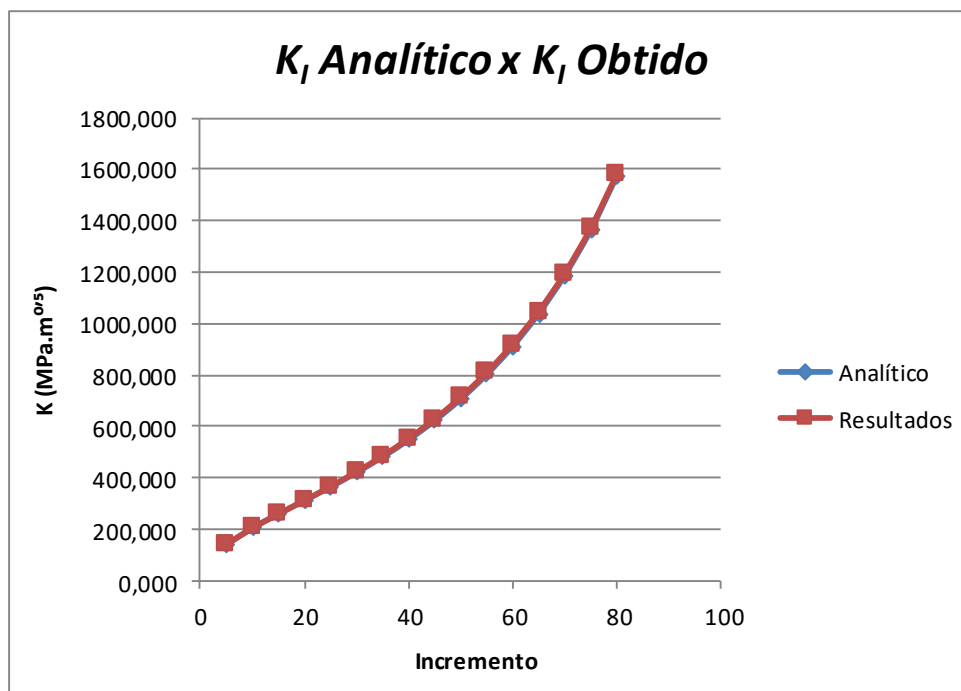
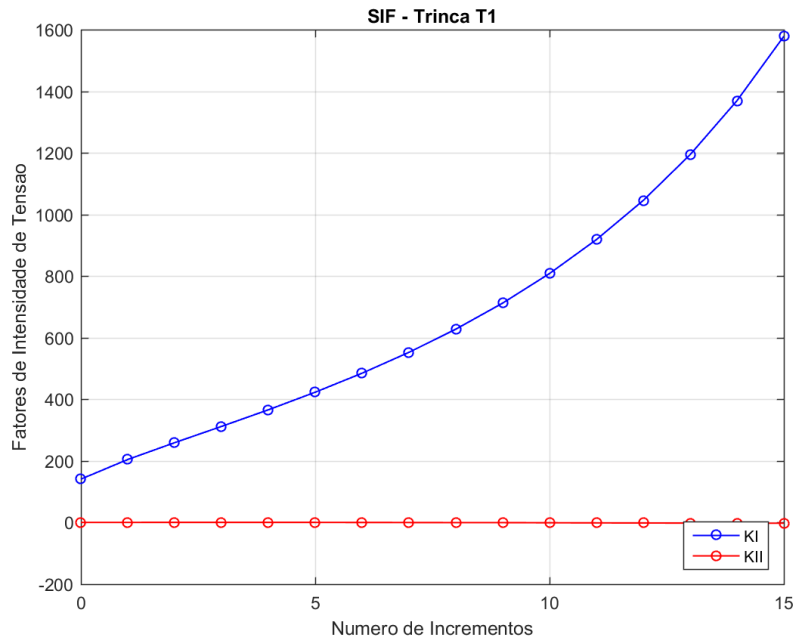
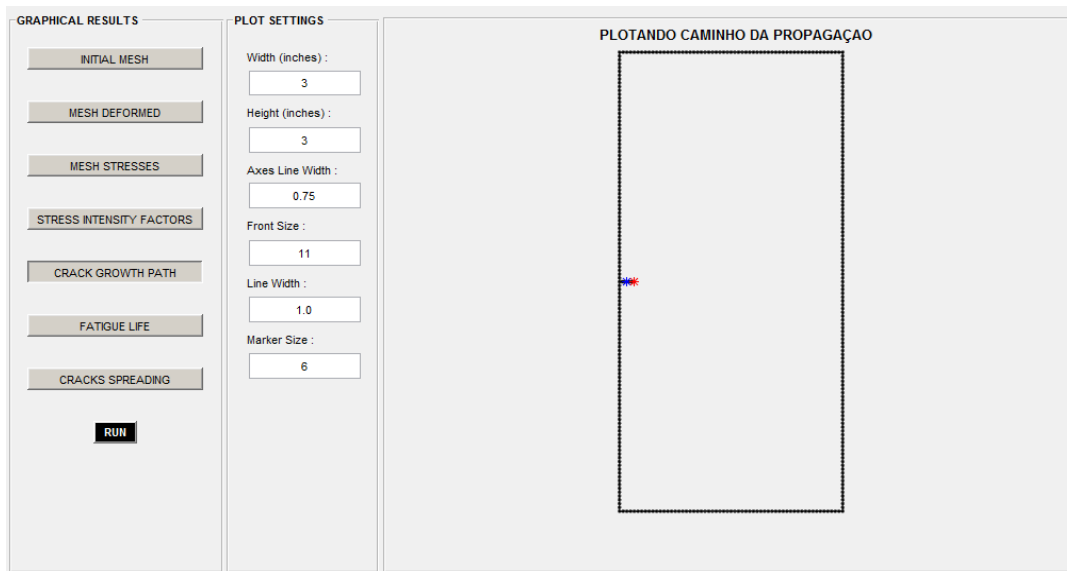


Figura 38 – Resultados problema 3 (KI Analítico x KI Obtido)



**Figura 39 – Resultados problema 3 (KI x KII)**

O caminho e a direção de propagação da trinca são mostrados nas Figuras 40 e 41.



**Figura 40 – Problema 3 (caminho de propagação [a])**

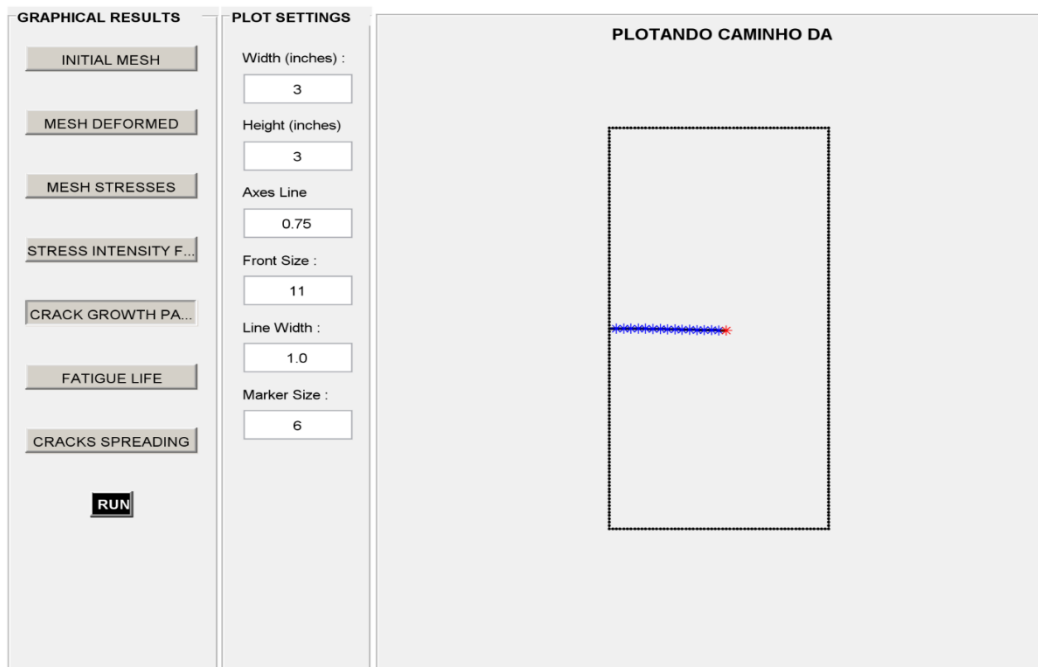


Figura 41 – Problema 3 (caminho de propagação [b])

#### 4.2.2 PROBLEMA 4

Os resultados do terceiro problema analisado estão dispostos na Tabela 5 e os gráficos de comparação estão dispostos nas Figuras 42 e 43.

Tabela 5 – Resultados problema 4

$\pi$	$\sigma$	b	a	a/b	F(a/b)	KI (Analítico)	KI (Resultados MEC)	KII (Resultados MEC)
3,142	40	150	5	0,03	1,12	177,560	165,010	-0,511
3,142	40	150	10	0,07	1,12	251,100	233,736	-0,667
3,142	40	150	15	0,1	1,12	307,540	285,482	-0,847
3,142	40	150	20	0,13	1,12	355,110	328,848	-0,944
3,142	40	150	25	0,17	1,12	397,030	367,341	-0,967
3,142	40	150	30	0,2	1,12	434,920	403,000	-0,909
3,142	40	150	35	0,23	1,13	473,970	437,214	-0,780
3,142	40	150	40	0,27	1,13	506,690	470,971	-0,605
3,142	40	150	45	0,3	1,13	537,430	504,854	-0,443
3,142	40	150	50	0,33	1,14	571,510	538,623	-0,415
3,142	40	150	55	0,37	1,14	599,410	569,596	-0,874

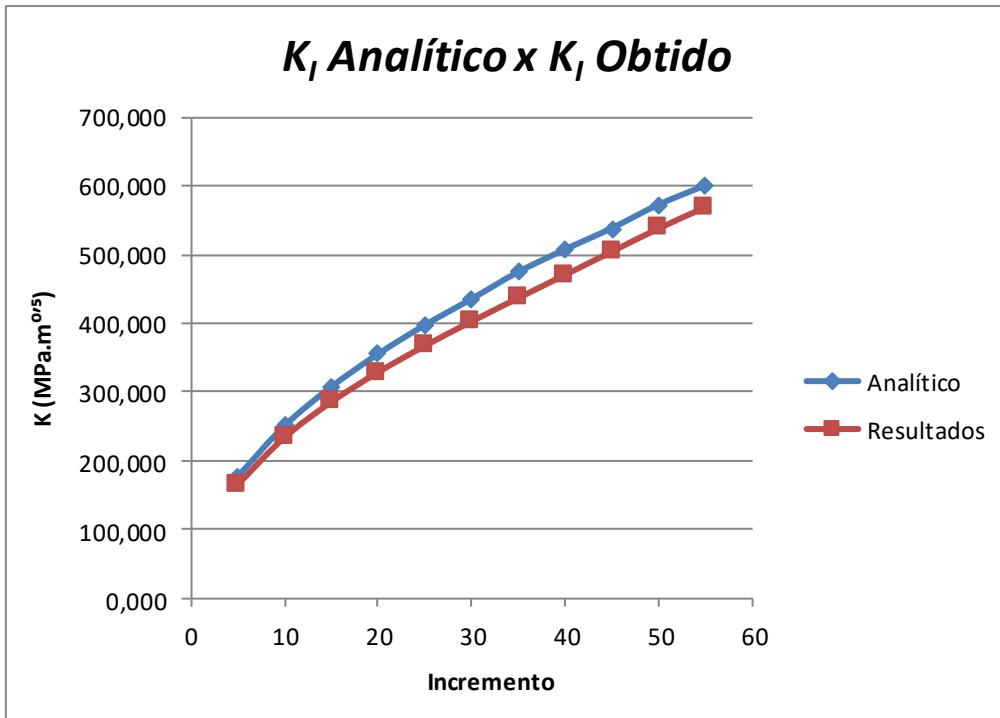


Figura 42 – Resultados problema 4 ( $K_I$  Analítico x  $K_I$  Obtido)

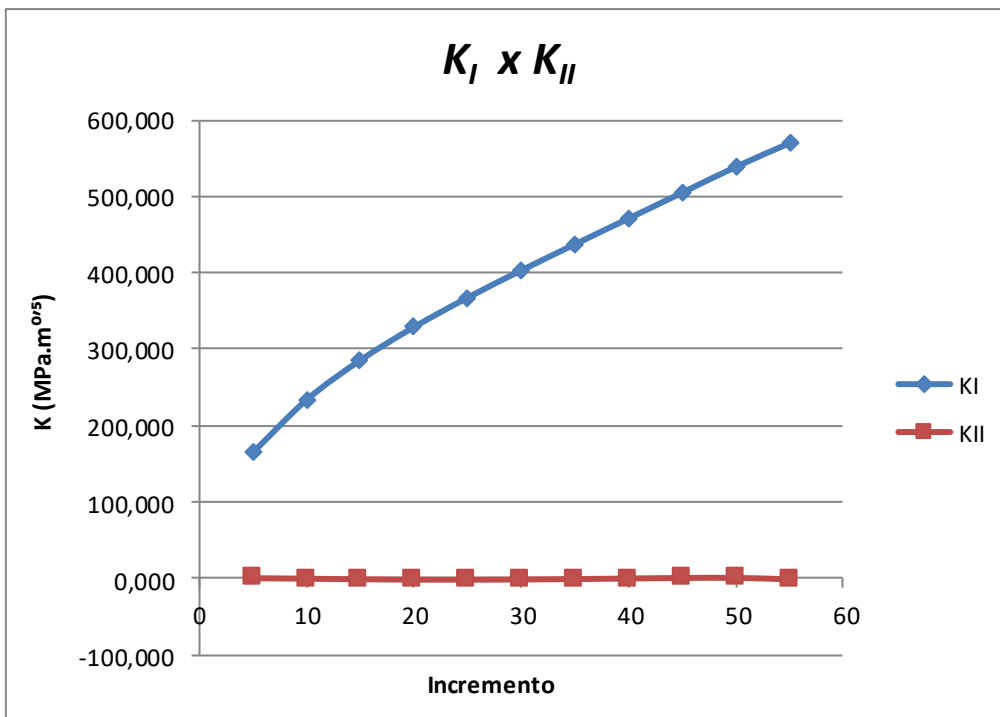


Figura 43 – Resultados problema 4 ( $K_I$  x  $K_{II}$ )

O caminho e a direção de propagação da trinca são mostrados nas Figuras 44 e 45.

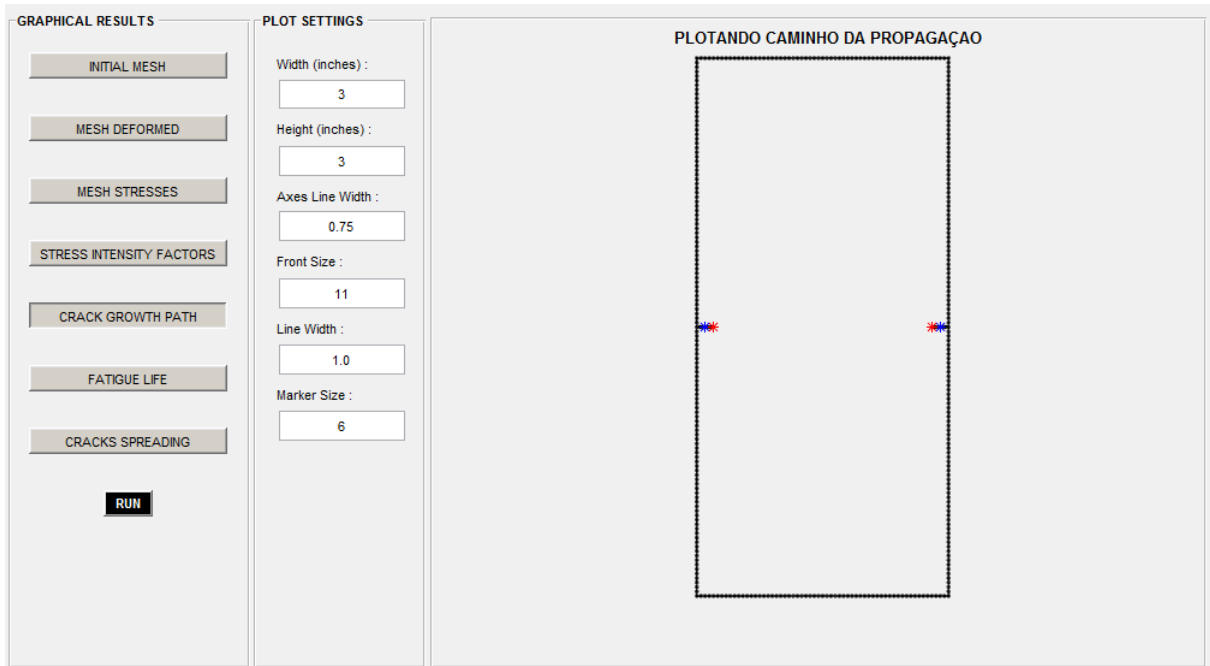


Figura 44 – Problema 4 (caminho de propagação [a])

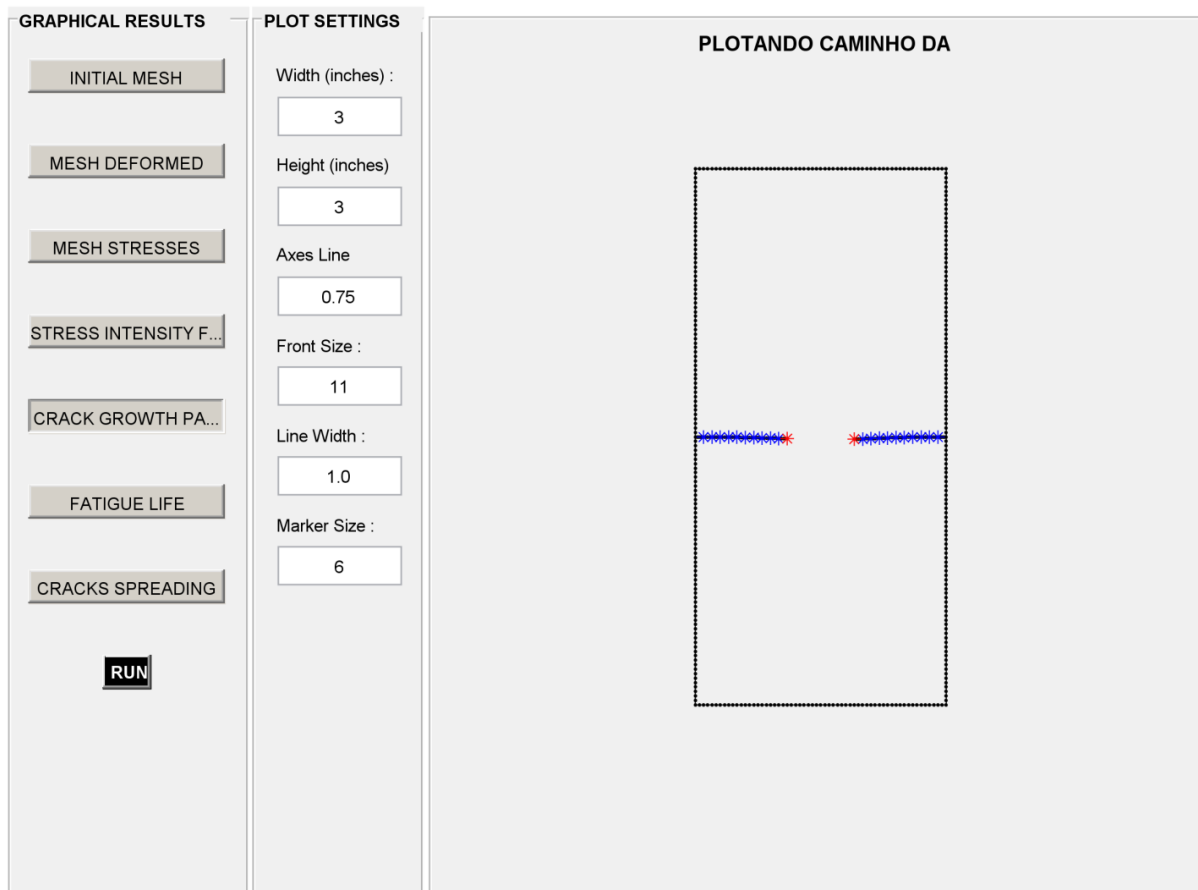


Figura 45 – Problema 4 (caminho de propagação [b])

### 4.2.3 PROBLEMA 5

Os resultados do terceiro problema analisado estão dispostos na Tabela 6 e os gráficos de comparação estão dispostos nas Figuras 46 e 47.

Tabela 6 – Resultados problema 5

$\pi$	$\sigma$	b	A	a/b	F(a/b)	KI (Analítico)	KI (Resultados MEC)	KII (Resultados MEC)
3,142	40	100	5	0,05	1,006	159,460	155,372	1,199
3,142	40	100	7	0,07	1,008	189,090	184,358	0,647
3,142	40	100	9	0,09	1,010	214,880	210,693	-0,846
3,142	40	100	11	0,11	1,013	238,110	235,594	0,097
3,142	40	100	13	0,13	1,015	259,490	259,738	-0,433
3,142	40	100	15	0,15	1,018	279,490	283,700	-0,114
3,142	40	100	17	0,17	1,021	298,440	307,939	-0,186
3,142	40	100	19	0,19	1,024	316,570	332,872	-0,081
3,142	40	100	21	0,21	1,028	334,090	358,908	0,017
3,142	40	100	23	0,23	1,033	351,150	386,482	0,019
3,142	40	100	25	0,25	1,038	367,900	416,093	0,104

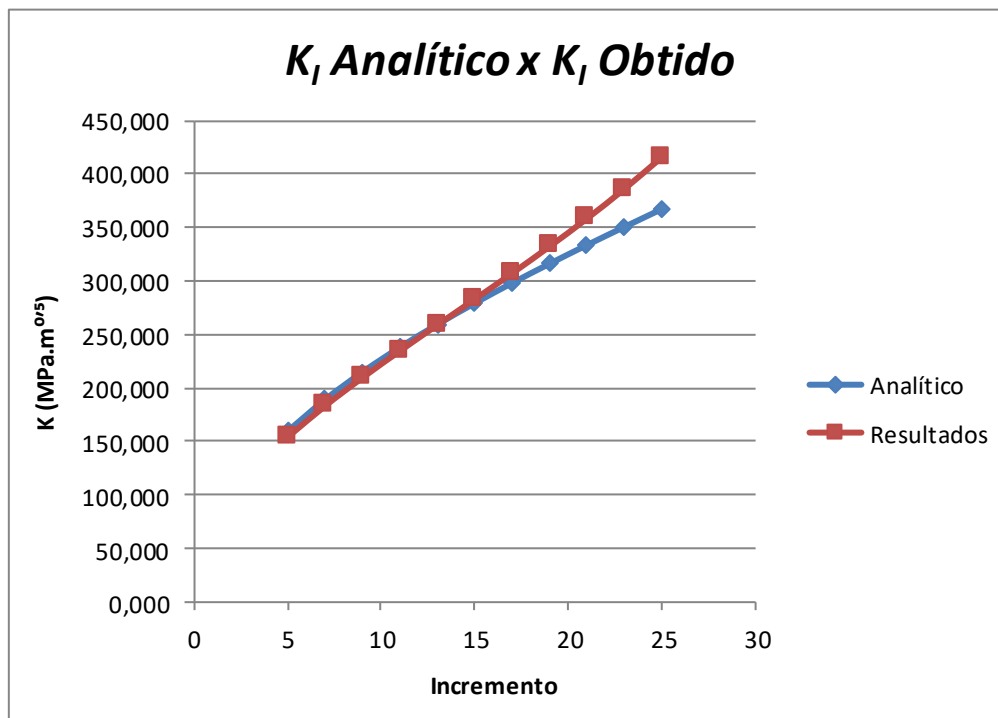


Figura 46 – Resultados problema 5 (KI Analítico x KI Obtido)



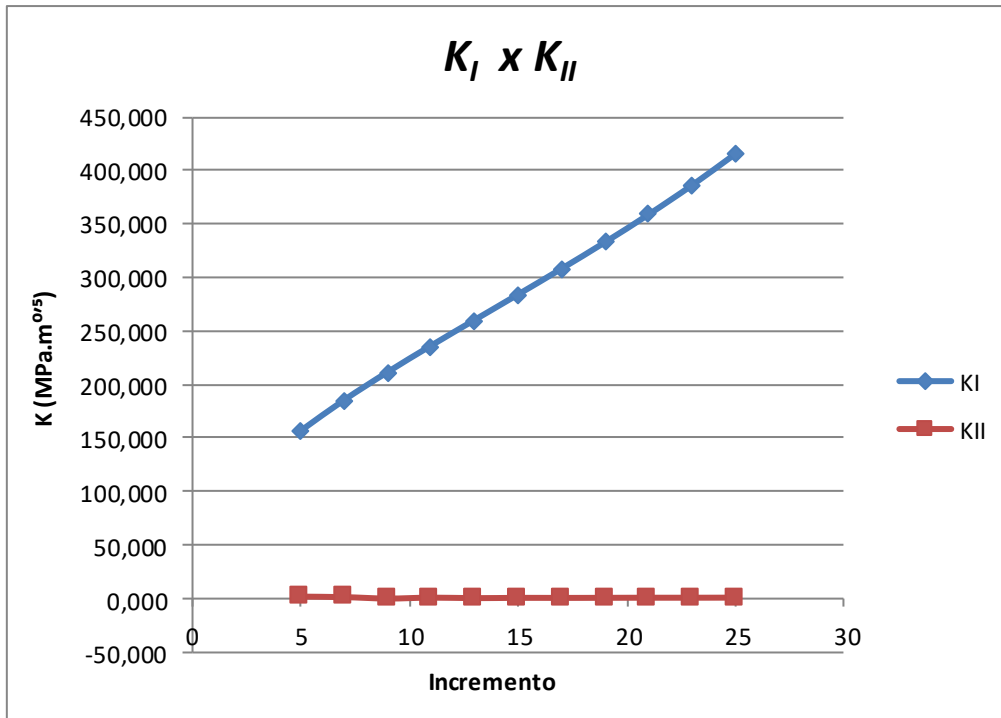


Figura 47 – Resultados problema 5 (KI x KII)

O caminho e a direção de propagação da trinca são mostrados nas Figuras 48 e 49.

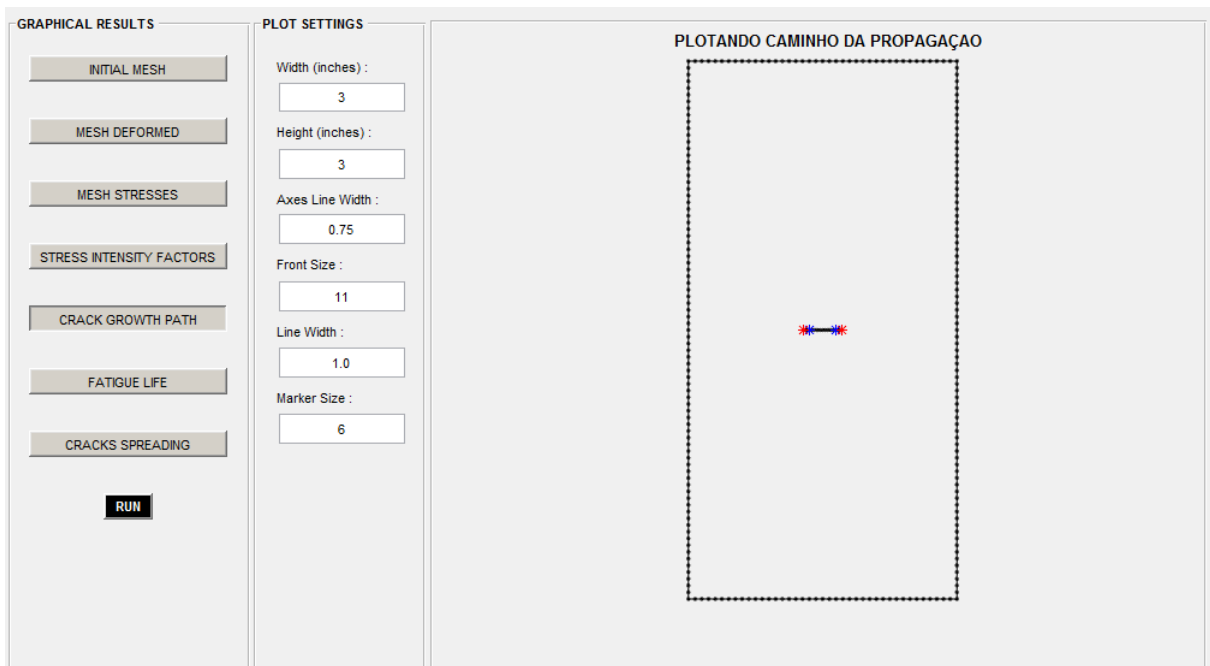


Figura 48 – Problema 5 (caminho de propagação [a])

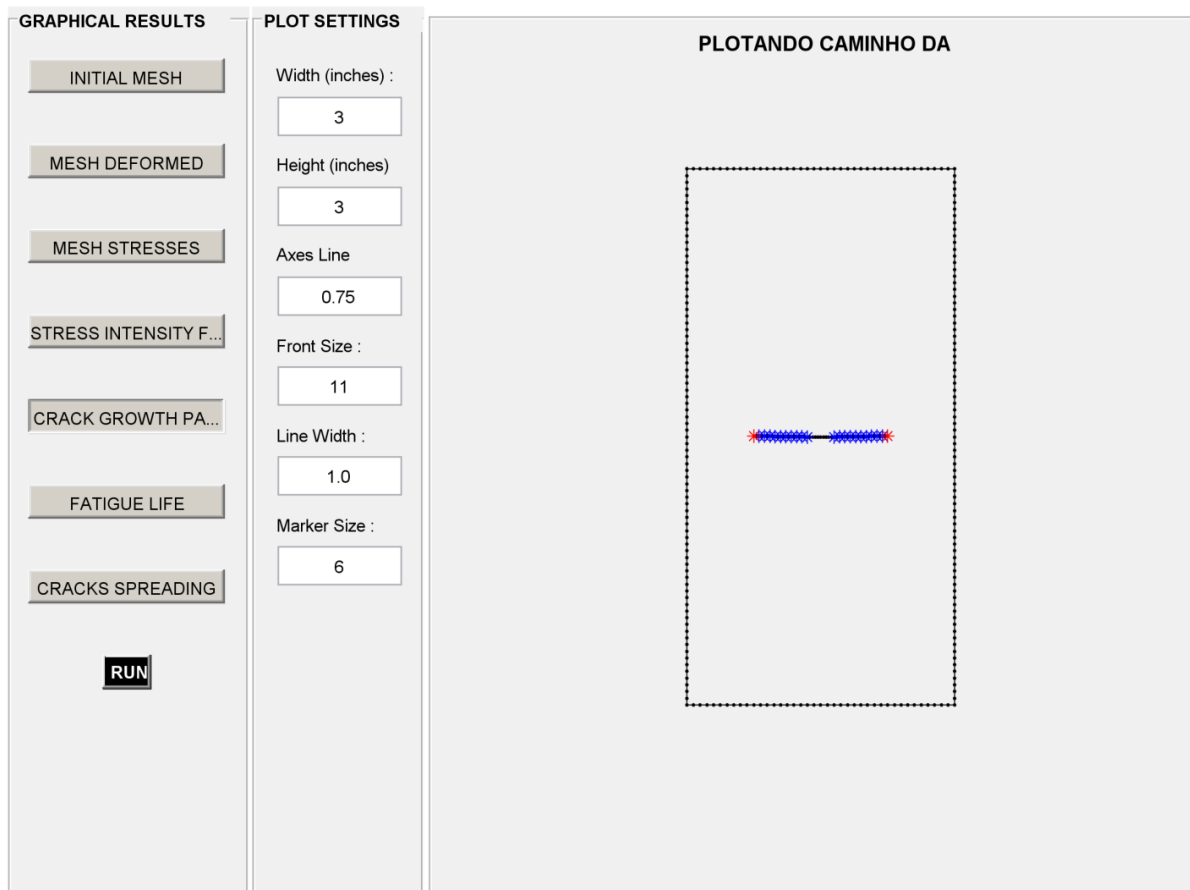


Figura 49 – Problema 5 (caminho de propagação [b])

#### 4.2.4 PROBLEMA 6

Os resultados do terceiro problema analisado estão dispostos na Tabela 7 e os gráficos de comparação estão dispostos nas Figuras 50 e 51.

Tabela 7 – Resultados problema 6

$\pi$	s	M	P	$\sigma$	b	a	a/b	F (a/b)	KI (Analítico)	KI (Resultados MEC)	KII (Resultados MEC)
3,142	120	3000	100	20	30	5	0,17	1,00	79,270	79,706	0,000
3,142	120	3000	100	20	30	6	0,2	1,00	86,830	87,863	0,000
3,142	120	3000	100	20	30	7	0,23	1,01	94,730	96,171	0,001
3,142	120	3000	100	20	30	8	0,27	1,02	102,270	102,933	0,001
3,142	120	3000	100	20	30	9	0,3	1,03	109,540	110,350	0,001
3,142	120	3000	100	20	30	10	0,33	1,04	116,580	118,645	0,001

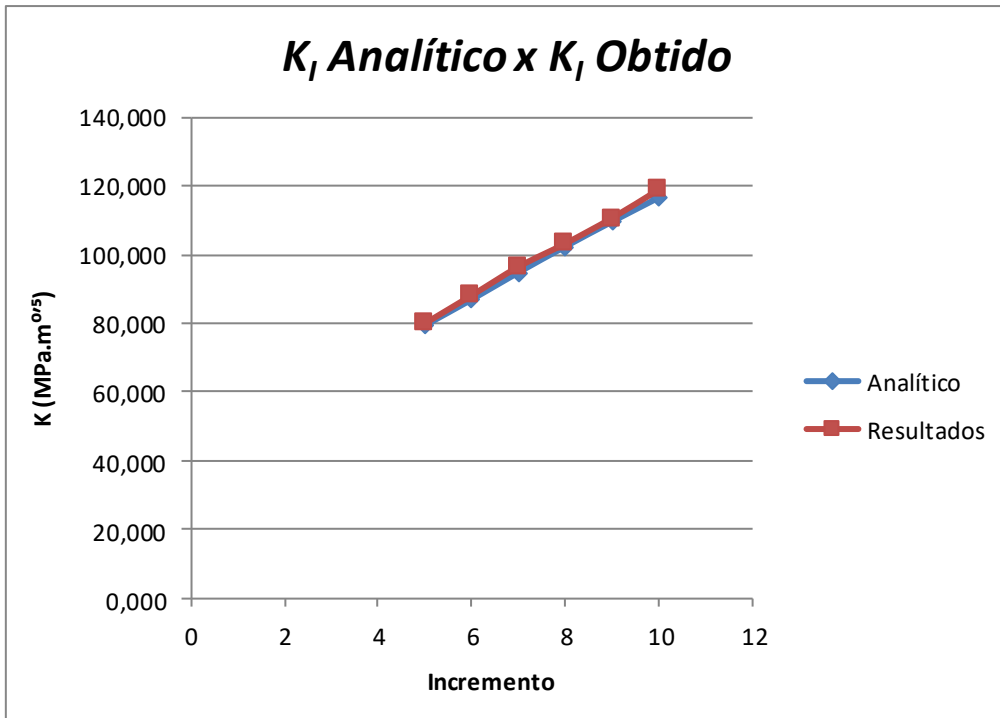


Figura 50 – Resultados problema 6 ( $K_I$  Analítico x  $K_I$  Obtido)

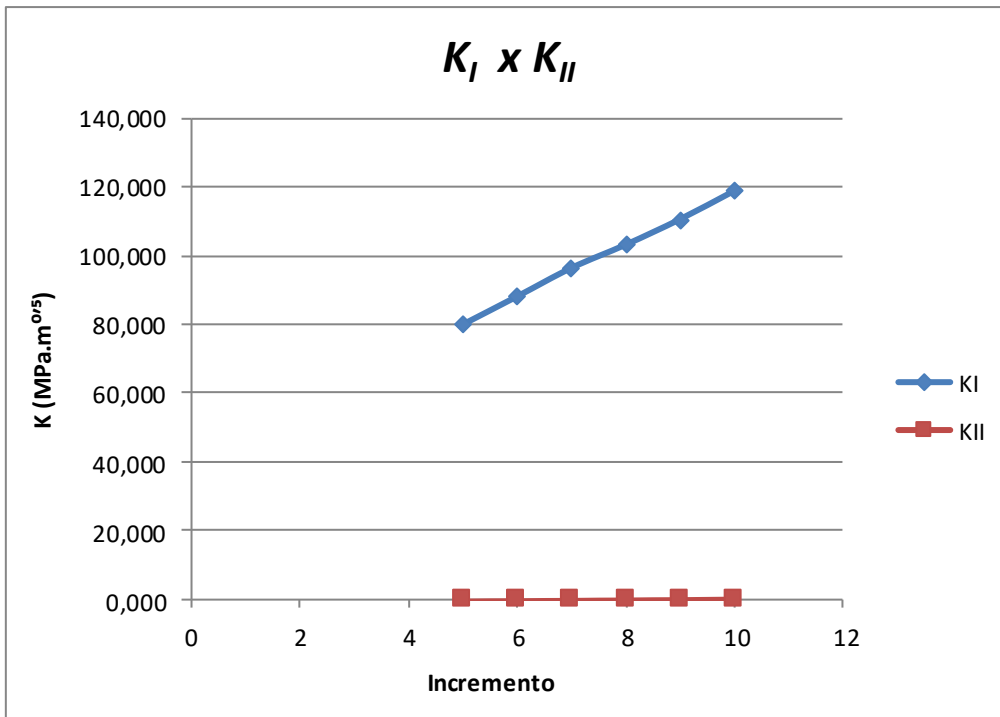


Figura 51 – Resultados problema 6 ( $K_I$  x  $K_{II}$ )

O caminho e a direção de propagação da trinca são mostrados nas Figuras 52 e 53.

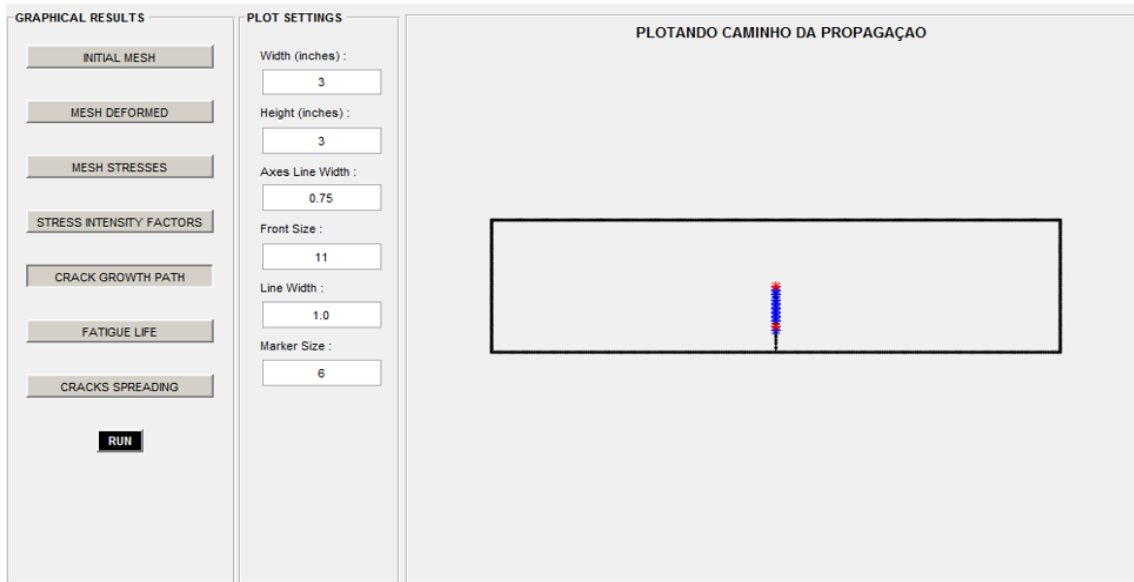


Figura 52 – Problema 6 (caminho de propagação [a])

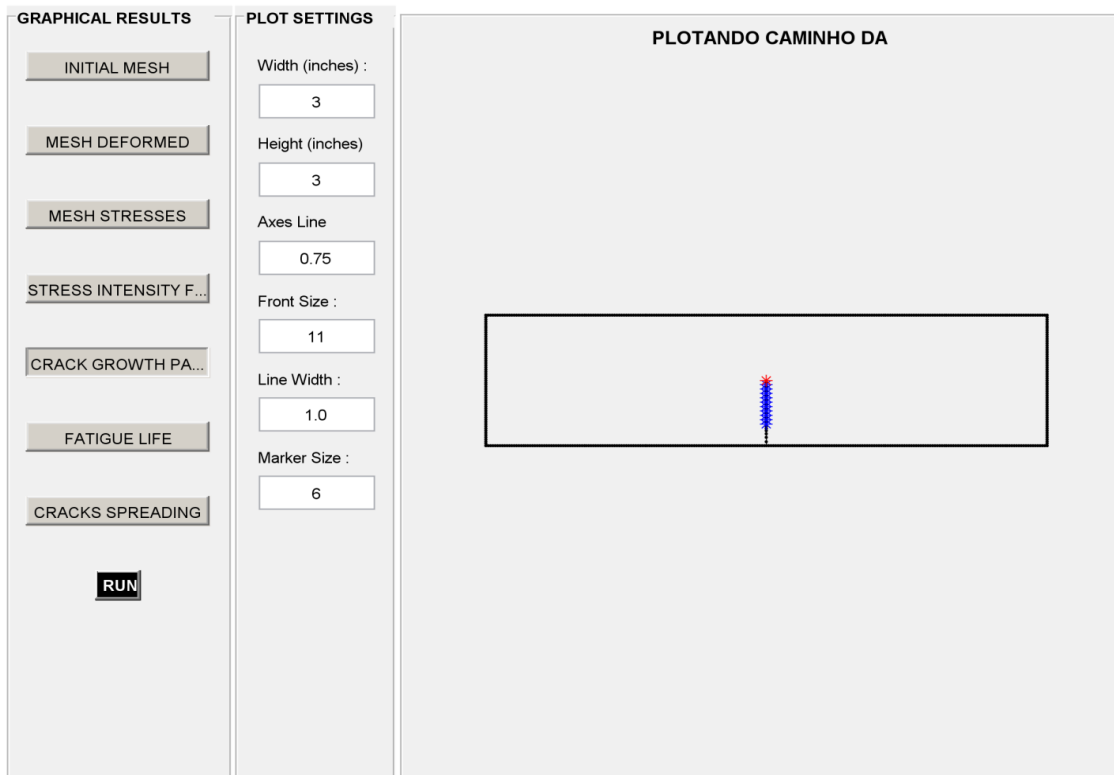


Figura 53 – Problema 6 (caminho de propagação [b])

Com todos os cálculos efetuados e as soluções dos problemas definidas, pode-se comparar os resultados obtidos do BemCracker2D com aquelas obtidos analiticamente. A diferença percentual entre os valores foi calculada da seguinte maneira:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{K_1 (anal) - K_1 (BCR)}{K_1 (anal)} \right|$$

Os resultados obtidos estão dispostos na Tabela 8, 9, 10 e 11.

**Tabela 8 – Diferença percentual (Problema 3)**

<b>EXEMPLO 3</b>		
<b>KI (Analítico)</b>	<b>KI (BemCracker2D)</b>	<b>Δ (%)</b>
142,622	141,042	1,11%
206,771	204,787	0,96%
261,352	259,333	0,77%
313,483	312,100	0,44%
366,375	366,090	0,08%
422,106	423,167	-0,25%
482,353	484,834	-0,51%
548,684	552,528	-0,70%
622,728	627,786	-0,81%
706,300	712,365	-0,86%
801,521	808,363	-0,85%
910,961	918,353	-0,81%
1037,816	1045,560	-0,75%
1186,152	1194,090	-0,67%
1361,255	1369,300	-0,59%
1570,129	1578,250	-0,52%

**Tabela 9 – Diferença percentual (Problema 4)**

<b>EXEMPLO 4</b>		
<b>KI (Analítico)</b>	<b>KI (BemCracker2D)</b>	<b>Δ (%)</b>
177,560	165,010	7,07%
251,100	233,736	6,92%
307,540	285,482	7,17%
355,110	328,848	7,40%
397,030	367,341	7,48%
434,920	403,000	7,34%
473,970	437,214	7,75%
506,690	470,971	7,05%
537,430	504,854	6,06%
571,510	538,623	5,75%
599,410	569,596	4,97%

**Tabela 10 – Diferença percentual (Problema 5)**

<b>EXEMPLO 5</b>		
<b>KI (Analítico)</b>	<b>KI (BemCracker2D)</b>	<b><math>\Delta</math> (%)</b>
159,460	155,372	2,56%
189,090	184,358	2,50%
214,880	210,693	1,95%
238,110	235,594	1,06%
259,490	259,738	-0,10%
279,490	283,700	-1,51%
298,440	307,939	-3,18%
316,570	332,872	-5,15%
334,090	358,908	-7,43%
351,150	386,482	-10,06%
367,900	416,093	-13,10%

**Tabela 11 – Diferença percentual (Problema 6)**

<b>EXEMPLO 6</b>		
<b>KI (Analítico)</b>	<b>KI (BemCracker2D)</b>	<b><math>\Delta</math> (%)</b>
79,270	79,706	-0,55%
86,830	87,863	-1,19%
94,730	96,171	-1,52%
102,270	102,933	-0,65%
109,540	110,350	-0,74%
116,580	118,645	-1,77%

Percebe-se que os valores obtidos com o BEMCRACKER estão muito próximos dos valores calculados analiticamente, o que comprova a precisão desse programa. Em alguns casos, houve uma discrepância maior. Isso se deve à variabilidade de soluções analíticas encontradas na literatura. Outro fator a ser levado em consideração é a dificuldade de se montar o problema no programa de forma igual à realidade. Caso fosse utilizado um maior número de discretizações, as soluções convergiriam mais.

## **5. CONCLUSÃO**

### **5.1 CONCLUSÕES**

Este trabalho confirmou a precisão do programa Bemcracker2D para análises de problemas em Mecânica da Fratura, por meio do Método dos Elementos de Contorno (MEC), para problemas que envolvam propagação de trincas bidimensionais. Os modelos apresentados foram resolvidos por meio do programa proposto e a validação se deu pela comparação dos resultados com os valores calculados analiticamente, disponíveis na literatura. Os resultados obtidos comprovam a eficiência da análise feita via MEC.

Para diferentes discretizações, foram obtidos resultados com precisões diferentes. Isso comprovou que para se obter resultados mais precisos, deve-se resolver o problema com o maior número de discretizações possível. Além disso, concluiu-se que o programa está de acordo com a Lei de Paris, no que tange à direção de propagação das trincas. Para todos os exemplos apresentados, as trincas se propagaram em linha reta e dependente apenas do Fator de Intensidade de Tensões (FIT).

Para que os problemas propostos pudessem ser resolvidos, algumas simplificações tiveram que ser feitas, principalmente em razão da limitação das ferramentas de desenho da interface gráfica do Bemcracker2D, que é o Bemlab2D. Esse programa facilita a entrada de dados para serem analisados, entretanto, possui algumas limitações, tais como: não é possível desfazer um elemento ou parte dele, não é possível modificar elementos já desenhados e etc. Isso dificulta a discretização em uma maior número de elementos.

### **5.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS**

- Implementar um modo de análise no Bemcracker2D para problemas de encontro de fissuras;
- Implementar uma maneira de analisar a propagação de trincas com base no Método das Charneiras Plásticas, a fim de identificar os mecanismos que serão formados nas peças rompidas;

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ALMEIDA, L.P.C.P.F., Avaliação de Tensões em Peças Pré-Fissuradas Usando o Método dos Elementos de Contorno, UEC, 2003.
- 2 - ANDERSON, T.L., FRACTURE MECHANICS, CRC, 1995.
- 3 - BORGES, M.L.M., ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR MEIO DA MECÂNICA DA FRATURA, UFMG, 2010.
- 4 - CERIOLO, L. and DI TOMMASO, A., FRACTURE MECHANICS OF BRITTLE MATERIALS: A HISTORICAL POINT OF VIEW, Università Iuav di Venezia, 1998.
- 5 - CIMINI JUNIOR, C.A., DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DE FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO NA MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR USANDO A INTEGRAL J PROCESSOS ADAPTATIVOS, UFMG, 1992.
- 6 - COSTABEL, M., PRINCIPLES OF BOUNDARY ELEMENT METHODS, TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT, 1986.
- 7 - DELGADO NETO, A.M. e GUIMARÃES, D.C., BEMLAB2D: GUI MODELING, VISUALIZATION AND ANALYSIS WITH BOUNDARY ELEMENT – AN APPLICATION IN ELASTOSTATIC PROBLEMS, XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, 2016.
- 8 DEUS, E. P.; SOUZA, J. B. . DAMAGE MECHANICS APPLIED FOR STEEL REINFORCEMENTS IN CONCRETE STRUCTURES UNDER CORROSION. PROCEDIA MATERIALS SCIENCE, V. 3, P. 2000-2005, 2014.
- 9 - EDISON, R., Análise de Resistência Mecânica: Mecânica da Fratura e Fadiga, UFSC, 2002, 399 p.
- 10 - GOMES, G. e DELGADO NETO, A.M., MODELLING AND 2D CARCKS VIEW USING DUAL BOUNDARY INTEGRAL EQUATION, XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, 2016.
- 11 - GOMES, G., APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO E RECIPROCIDADE DUAL EM PROBLEMAS DE PLASTICIDADE 2D ORIENTADA A OBJETO, UnB, 2006.
- 12 - GRIFFITH, A.A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Philosophical Transactions, Series A, v 221, 1920, pp.163-198.
- 13 - INGLIS, C.E., Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Cracks, Transactions of the Intitution of Naval Architects, v 55, 1913, pp.219-242.
- 14 - IRWIN, G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics, v 24, 1957, pp.361-364.



- 15 - IRWIN, G.R., Fracture Dynamics, Fracturing of Metals, Cleveland: American Society of Metals, 1948, pp.147-166.
- 16 - IRWIN, G.R., Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys, Sagamore Research Conference Proceedings, v 2, 1956, pp.289-305.
- 17 - KARZAM, A.K.L, FORMULAÇÃO DUAL EM MECÂNICA DA FRATURA UTILIZANDO ELEMENTOS DE CONTORNO CURVOS DE ORDEM QUALQUER, EESC-USP, 2009.
- 18 - LEITE, P.G.P., AVALIAÇÃO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO, UnB, 2016.
- 19 - LUCAS, M.A., APOSTILA DE MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO, CURITIBA, 2016.
- 20 - MALDANER, M., Obtenção do Fator de Intensidade de Tensão pelo Método da Função de Green Local Modificado, UFSC, 1993.
- 21 - MIRANDA, A.C.O., Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis, Rio de Janeiro. 106p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, PUC – Rio de Janeiro, 2003.
- 22 - OROWAN, E., Fracture and Strength of Solids, Reports on Progress in Physics, v XII, 1948, pp.185.
- 23 - PEREIRA, J.P.A., EXTRAÇÃO DE FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO UTILIZANDO A SOLUÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS, USP, 2004.
- 24 - PORTELA, A., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v 33, 1992, pp.1269-1287.
- 25 - QUINTA, N.R.A., DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO A PARTIR DE MEDIÇÕES FOTOELÁSTICAS AFASTADAS DA EXTREMIDADE DA FENDA, UNIVERSIDADE DO PORTO, 1994.
- 26 - SCUCIATO, R.P., ESTUDO TEÓRICO E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS LINEARES BIDIMENSIONAIS, UFP, 2007.
- 27 – TADA, H., PARIS, P.C., IRWIN, G., THE STRESS ANALYSIS OF CRACKS HANDBOOK, DEL RESEARCH CORPORATION, MISSOURI, USA, 2000.
- 28 - TEIXEIRA, M.C., ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO, UFMG, 2006.

29 - WILSON, W.W., FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE DE CHAPAS COM ENRIJECEDORES, SÃO CARLOS, 2003.

## APÊNDICE A

As funcionalidades do BemLab2D são:

- Dados iniciais de entrada

Uma nova análise se iniciará com a definição das características do material e os limites dos eixos, que será feita por meio da implementação das informações iniciais de entrada (Figura 11).

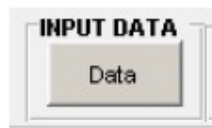


Figura 54 – Inclusão dos dados iniciais de entrada (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

Ao clicar-se nesse menu, será exibida uma série de caixa de diálogos, nas quais serão inseridos os dados iniciais do problema. Esses serão essenciais para a resolução no processador. (Figura 12)

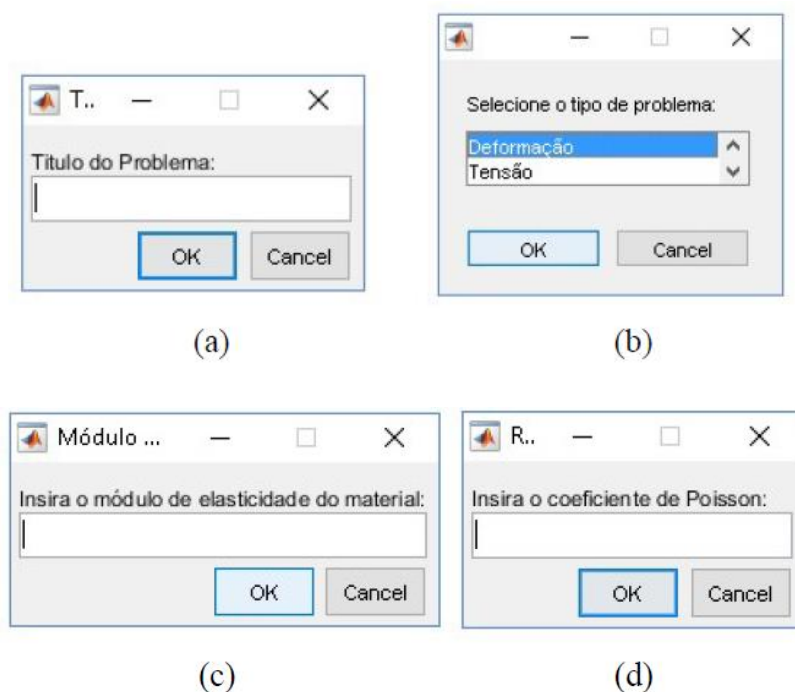


Figura 55 – a) Título do problema – b) Tipo do problema – c) Módulo de Elasticidade – d) Coeficiente de Poisson (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

O menu “Scale Data” define o limite dos eixos X e Y. Ao clicar-se nesse menu, abre-se uma caixa de diálogo, na qual deve-se inserir as coordenadas iniciais e finais de X ( $X_i$  e  $X_f$ ) e de Y ( $Y_i$  e  $Y_f$ ). (Figuras 13 e 14)



Figura 56 – Menu de escalas dos eixos, Grid e Incidência (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

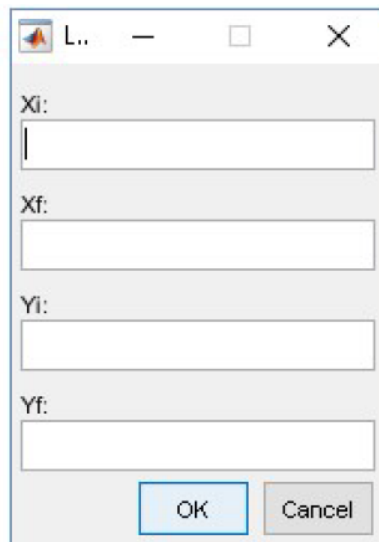


Figura 57 – Limites dos eixos (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

- Ferramentas de desenho e malha

Para a produção do desenho, o programa conta com ferramentas para inserir pontos, segmentos de reta e segmentos de curva. Primeiramente, desenham-se os pontos, em seguida os segmentos de reta ou curva. Dessa maneira, os botões de inserir malha ou identificar zonas fechadas só aparecerão após a inserção dos segmentos de reta ou curva. Isso tem por objetivo incentivar o usuário a construir o problema de forma lógica (pontos → retas/curvas → malhas).

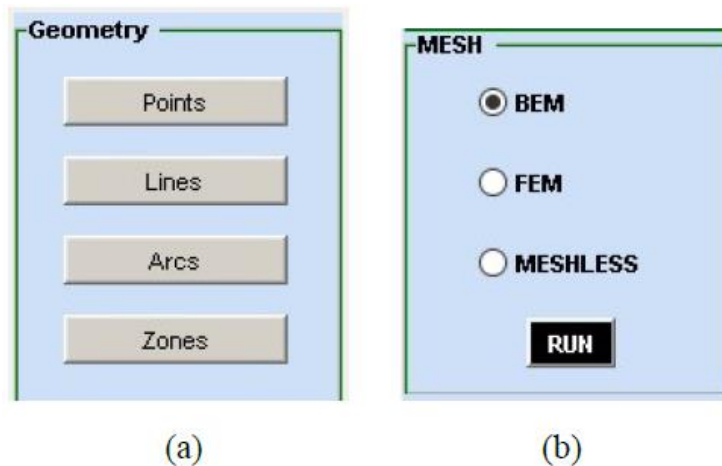


Figura 58 – a) Ferramentas de desenho – b) Gerador de malhas (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

Ao ser selecionado o botão de pontos (Points), será exibida uma janela, na qual é possível inserir um ou mais pontos, por meio das coordenadas ou por meio de vetores, conforme Figuras 59 e 60.

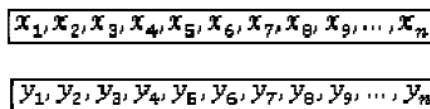


Figura 59 – Inserir ponto por vetores (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

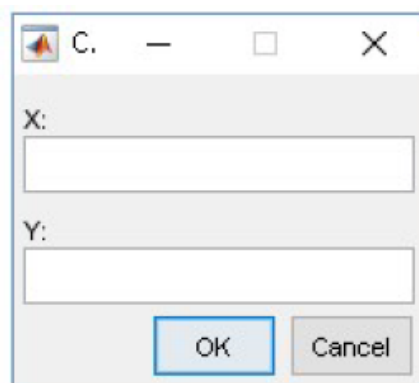
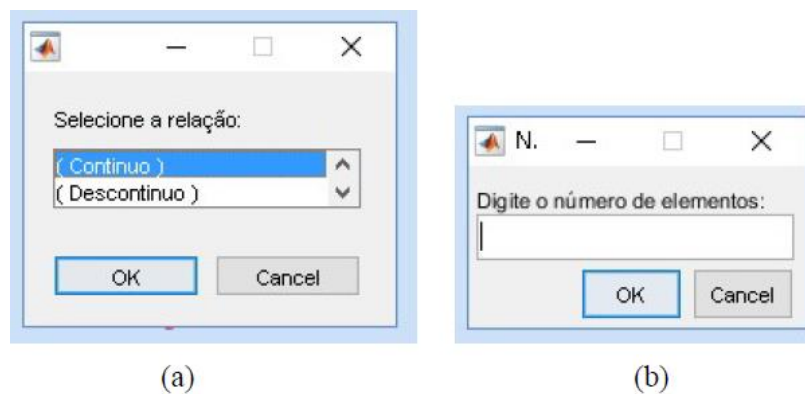


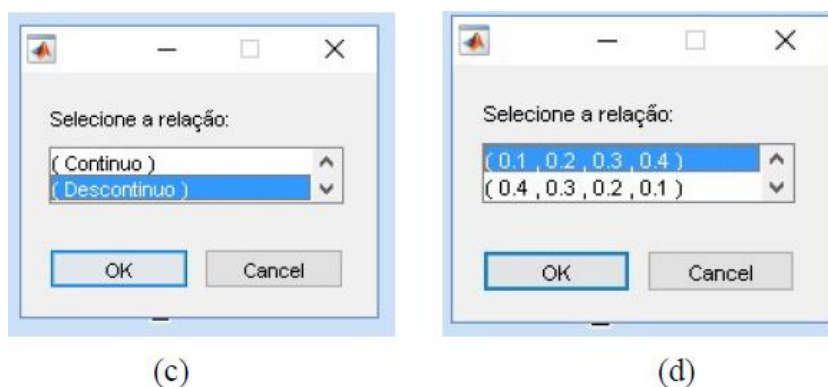
Figura 60 – Inserir ponto por coordenadas (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

Os segmentos de reta e os segmentos de curva podem ser inseridos, respectivamente, pelos botões “Lines” e “Arcs”. Ao clicar-se no botão de inserir segmentos retos, será exibido um ponteiro de seleção de pontos, a fim de que o segmento seja definido. Selecionando-se pontos em sequência, uma série de caixas de diálogos serão exibidas:



**Figura 61 – a) Definição da continuidade (contínuo) – b) Definição da quantidade de elementos**  
 (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

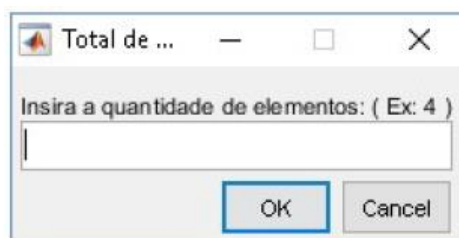
- a) O elemento pode ser contínuo ou descontínuo;
- b) Quantidade de elementos do segmento (para elementos contínuos);



**Figura 62 – a) Definição da continuidade (descontínuo) – b) Definição da relação dos elementos**  
 (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

- c) O elemento pode ser contínuo ou descontínuo;
- d) Relação entre os elementos (para descontínuos);

Ao clicar-se no botão de inserir segmentos curvos, será exibido um ponteiro de seleção de pontos, a fim de que o segmento seja definido, da mesma maneira que os segmentos de reta. Selecionando-se pontos em sequência, a caixa de diálogo da Figura 63 será exibida:



**Figura 63 – Quantidade de elementos** (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

O próximo passo é definir as zonas de contorno utilizando o botão “Zones”. Esse botão permite gerar a malha do problema, por meio da montagem das matrizes de informações. Feito isso, o modelo estará finalizado na área gráfica do programa.

- Ferramentas de desenho e malha

Por meio do menu das condições de contorno (Figura 64), é possível informar as restrições nodais e globais existentes no problema.

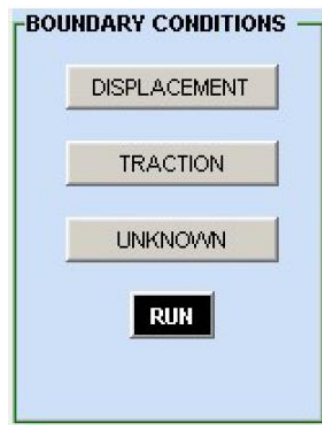


Figura 64 – Condições de contorno - menu (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

Ao escolher as opções “DISPLACEMENT” ou “TRACTION”, uma nova janela será exibida com informações para a construção do problema, tais como: elemento, número de nós e direção. Essas são necessárias para a construção dos apoios e das forças e finalizar a análise do problema (Figura 22).

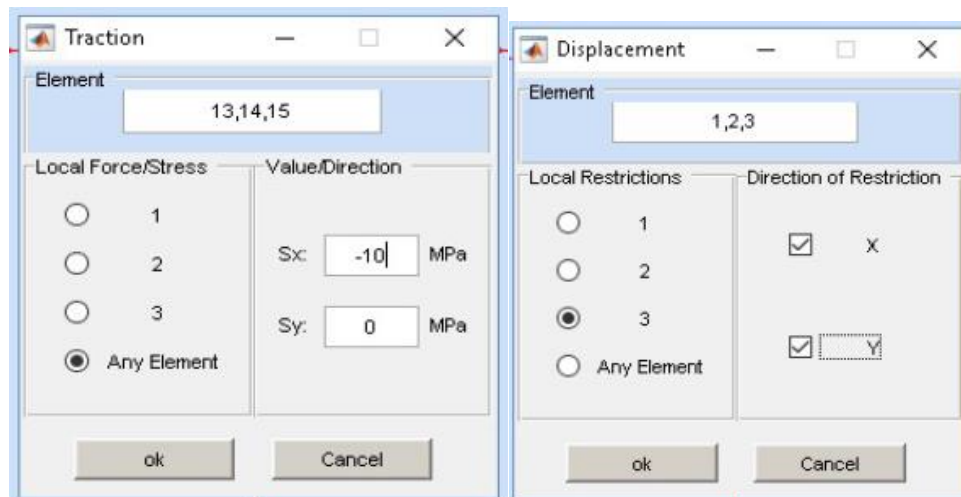


Figura 65 – Traction / Displacement (fonte: DELGADO NETO et. al, 2016)

