



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO
COMPORTAMENTO HIDROSTÁTICO DE
SUPERFÍCIES LIVRES EM FLUIDOS
MAGNÉTICOS**

Por,

Douglas Daniel de Carvalho

Brasília, 21 de junho de 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO HIDROSTÁTICO DE SUPERFÍCIES LIVRES EM FLUIDOS MAGNÉTICOS

Por,

Douglas Daniel de Carvalho

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha _____

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues _____

Prof. Álvaro Moreira Neto _____

Brasília, 21 de junho de 2017

*À Olinda Maria de Jesus e
Oswaldo Luciano de Carvalho*

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores pelos conhecimentos transmitidos ao longo deste curso de graduação. Agradeço em especial aos professores Francisco Ricardo da Cunha e Rafael Gabler Gontijo pela participação indireta na criação do meu desejo em prosseguir na carreira acadêmica. Agradeço a todos os meus amigos, em especial Henrique e Gabby, e, sobretudo, agradeço às minhas 7 cordas: Papai, Mamãe, Jhonie, Maycon, Dácia, Thaisa e Raisa.

Douglas Daniel de Carvalho

RESUMO

O trabalho apresentado remete ao projeto final de graduação submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico. Este projeto consiste na realização de um estudo teórico, numérico e experimental que visa determinar o formato, bem como a altura de deslocamento vertical de uma superfície livre, formada pela interface entre um ferrofluido e um fluido não-magnético entre duas placas planas verticais paralelas, sob a influência de um campo magnético externo aplicado por um ímã permanente posicionado arbitrariamente no espaço. Um novo modelo matemático é proposto, que acopla consistentemente a equação de *Euler* da Mecânica dos Fluidos sob o contexto de um fluido magnético em equilíbrio estático, juntamente com as equações de *Maxwell* no limite magnetostático e a condição de salto de pressões dada pela lei de *Young-Laplace*, levando à dedução de uma equação diferencial não linear que considera a solução exata para um campo magnético irrotacional variável. Esta equação é resolvida numericamente por integração direta usando um método de *Runge-Kutta* de quarta ordem, acoplado a um esquema de *Newton-Raphson*. A influência da variação das variáveis físicas concernentes à física do problema no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre é avaliada. O código numérico é validado frente a algumas soluções analíticas para alguns casos assintóticos, como o caso onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos. Em alguns casos analisados, a presença de efeitos magnéticos possibilitou um deslocamento de fluido aproximadamente 180 vezes superior ao apresentado para o caso não-magnético. Medições experimentais de tensão superficial, massa específica e altura de deslocamento vertical de fluidos Newtonianos em capilares com diâmetros internos distintos são também apresentadas. A partir destas medições, foi possível calcular-se ângulos de contato para estes fluidos em cada um dos tubos analisados. As condições do trabalho experimental foram então simuladas numericamente. Uma excelente concordância entre os resultados numéricos e experimentais foi observado.

Palavras-chaves: Fluidos magnéticos. Capilaridade. Formato/deslocamento de menisco. Medidas de ângulo de contato. Pressões magnética/capilar/hidrostática.

ABSTRACT

The presented work refers to the final graduation project submitted to the Department of Mechanical Engineering of the Faculty of Technology of the University of Brasília, as part of the requirements required to obtain the degree of Mechanical Engineer. This project consists of a theoretical, numerical and experimental study in order to determine the shape, as well as the vertical displacement of a free surface, formed by the interface between a ferrofluid and a non-magnetic fluid, between two parallel vertical flat plates, under the influence of an external magnetic field applied by a permanent magnet arbitrarily positioned in space. A new mathematical model is proposed, which consistently couples the equation of *Euler* of Fluid Mechanics under the context of a static magnetic fluid coupled with with the equations of *Maxwell* in the magnetostatic limit and the pressure jump condition given by the Young-Laplace law. This procedure leads to an equation which considers the exact solution for a variable irrotational magnetic field. This equation is solved numerically by direct integration using a fourth-order Runge-Kutta method coupled with a Newton-Raphson scheme. The influence of the variation of the physical variables concerning the physics of the problem in the shape as well as the vertical displacement of the free surface is evaluated. The numeric code is validated by means of some asymptotic solutions, such as the case where both fluids are considered non-magnetic. In some analyzed cases, the presence of magnetic effects allowed a fluid displacement approximately 180 times higher than that presented for the non-magnetic case. Experimental measurements of surface tension, density and vertical displacement of Newtonian fluids in capillaries with different internal diameters are also shown. From these measurements, it was possible to calculate contact angles for each fluid in each of the tubes analyzed. The conditions of the experimental work were then simulated numerically. An excellent agreement between the numerical and experimental results was observed.

Key-words: Magnetic fluids. Capillarity. Magnetic/capillary/hydrostatic pressures. Meniscus shape/displacement. Contact angle measurements.

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Picos formados na superfície de um fluido magnético sob a influência de um campo magnético externo (FRANCISQUINI; SCHOENMAKER; SOUZA, 19- -).	5
Figura 2.2 – Uma sequência típica do movimento da gota sob a ação de um campo magnético aplicado. Imagem retirada de (CUNHA; SOBRAL, 2004).	7
Figura 2.3 – (a) Uma molécula no interior de um fluido contornada em todos os lados por outras moléculas, que a atrem igualmente em todas as direções, resultando em uma força nula. (b) Uma molécula na superfície sente uma força resultante, pois não há moléculas do fluido acima da superfície (SCIPP, 19- -).	8
Figura 2.4 – (A) Menisco côncavo e (B) Menisco convexo (WIKIWAND, 19- -).	9
Figura 2.5 – Altura de ascensão “h” versus a porosidade “p”, para 40 valores do parâmetro de capilaridade “a” (BRAGARD; LEBON, 1994).	11
Figura 3.1 – Modelo esquemático do problema em estudo.	14
Figura 3.2 – Esquemas das condições de contorno magnéticas na interface entre dois meios contínuos distintos, 1 e 2. Em (a) indução magnética e em (b) campo magnético. Imagem retirada de (CUNHA, 2012).	22
Figura 3.3 – Eixos coordenados como apresentados por (MCCAIG; CLEGG, 1987). Imagem retirada de (MCCAIG; CLEGG, 1987).	29
Figura 3.4 – Vetores normal \hat{n} e tangencial \hat{t} à superfície livre.	31
Figura 4.1 – (a) Esquema de modelo estudado apresentando algumas relações geométricas, para placas planas verticais paralelas; (b) Esquema de modelo estudado para tubo capilar apresentando algumas relações geométricas..	36
Figura 4.2 – Esquema de forças no modelo estudado para tubo capilar apresentando algumas relações geométricas.	39
Figura 4.3 – Esquema da bancada experimental utilizada no experimento. Aqui, objetiva-se determinar a altura "h". As dimensões representam os diâmetros internos dos tubos capilares.	41
Figura 4.4 – Bancada experimental construída para aferição das alturas de equilíbrio.	41

Figura 4.5 – (A) Tubo capilar com diâmetro externo de $3 \pm 0,2\text{mm}$, diâmetro interno de $50 \pm 2\mu\text{m}$ e comprimento de 150mm. (B) Tubo capilar com diâmetro externo de $3 \pm 0,2\text{mm}$, diâmetro interno de $50 \pm 2\mu\text{m}$ e comprimento de 150mm. Verifica-se a presença do filme de PVC próximo à base do tubo.	42
Figura 4.6 – Ascensão de glicerina por ação capilar. Tudo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Verifica-se também a presença da régua na imagem, utilizada como escala métrica, bem como a altura de ascensão, indicada pela reta amarela.	44
Figura 4.7 – (a) Aqui verifica-se a seleção do comprimento a ser utilizado como comprimento base para a aferição das alturas de equilíbrio. Tubo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Água destilada; (b) Aqui verifica-se a seleção do comprimento corresponde à altura de equilíbrio. Tubo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Água destilada.	44
Figura 4.8 – Densímetro DMA 38, da marca Anto Paar, utilizado neste experimento.	46
Figura 4.9 – À esquerda tensiômetro LAUDA TVT 2 e à direita banho térmico LAUDA ECO RE 415. Verifica-se também a temperatura sob a qual os experimentos foram realizados.	47
Figura 5.1 – Esquema de modelo estudado apresentando algumas relações geométricas.	50
Figura 5.2 – Alturas de deslocamento vertical em função do ângulo de contato, obtidas segundo a solução analítica 4.5. Há dois perfis para o formato do menisco. O perfil à esquerda representa o perfil para ângulo de contato $\alpha = \pi/2 - 0,1$ e o perfil à direita representa o perfil para ângulo de contato $\alpha = \pi/2 + 0,1$. Para este gráfico: $B_o = 0,1$; $B_{o_m}=0,8$, $A = 3$; $B = 4$; $R = -9$; $S = 8$; $M_i/4\pi M_s = 5$	55
Figura 7.1 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha contínua denota a solução analítica 5.3 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.4. Para este gráfico: $B_o = 0,1$	61
Figura 7.2 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha contínua denota a solução analítica 5.3 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.4. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$	61
Figura 7.3 – Formato da superfície livre, para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha ponto-traço denota a solução analítica 5.1 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.2. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $B_o = 0,1$	62

Figura 7.4 – Altura de deslocamento vertical como função do número de Bond magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos e a linha tracejada denota a solução analítica 5.5. Para este gráfico: $Bo = 1/10$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 3,0$; $B = 3,0$; $R = -9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	63
Figura 7.5 – (b) Altura de deslocamento vertical em função do ângulo de contato. Os pontos pretos representam a solução numérica, e a linha tracejada representa a solução analítica 5.5. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$	64
Figura 7.6 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$	66
Figura 7.7 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 + 0,05$	67
Figura 7.8 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$	68
Figura 7.9 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 + 0,05$	68
Figura 7.10 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$	70
Figura 7.11 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$ e $\alpha < \pi/2$	71
Figura 7.12 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$ e $\alpha > \pi/2$	71
Figura 7.13 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a água destilada.	76
Figura 7.14 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a glicerina.	76
Figura 7.15 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a vaselina.	77
Figura 7.16 – Ângulos de contato em função do diâmetro do tubo capilar, para todos os fluidos estudados.	78
Figura 7.17 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a água destilada.	82
Figura 7.18 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a glicerina.	83
Figura 7.19 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a vaselina.	83

Figura 7.20–Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond para $Bo_m = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	87
Figura 7.21–Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond para $\alpha = \pi/2 + 0,30$ e: Círculos: $Bo_m = 1/10$; Triângulos: $Bo_m = 1/2,5$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	87
Figura 7.22–Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do número de Bond, para $Bo_m = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	88
Figura 7.23–Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.	89
Figura 7.24–Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.	90
Figura 7.25–Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.	90
Figura 7.26–Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.	91
Figura 7.27–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 0,1$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	92
Figura 7.28–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 0,5$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	93
Figura 7.29–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 1,0$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.	93

Figura 7.30–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $B_o = 1,5$. Para este gráfico: $\chi_2 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	94
Figura 7.31–Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond magnético para $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e: Círculos: $B_o = 1/3$; Triângulos: $B_o = 1,0$. Para esta figura: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	96
Figura 7.32–Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond magnético para $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	96
Figura 7.33–Altura de equilíbrio versus número de Bond magnético. Os círculos pretos representam valores numéricos. Para este gráfico: $B_o = 3/10$; $\chi_0 = 1/10$; $\beta_0^* = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 1/10$ (GONTIJO et al., 2016). Imagem retirada de (GONTIJO et al., 2016).	97
Figura 7.34–Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético onde $B_{o_m} = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do número de Bond magético, para $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	98
Figura 7.35–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	99
Figura 7.36–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para este gráfico: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	99
Figura 7.37–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	100
Figura 7.38–Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para este gráfico: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	100
Figura 7.39–Susceptibilidade magnética da magnetita (Fe_3O_4). Imagem retirada de (HUNT; MOSKOWITZ; BENERJEE, 1995).	102

Figura 7.40–Variação da susceptibilidade magnética inicial da amostra com a temperatura em um campo aplicado de 480e (TARI et al., 1978). Imagem retirada de (TARI et al., 1978).	103
Figura 7.41–(a) Susceptibilidade magnética inicial em função da concentração volumétrica ϕ , à uma temperatura $T = 250K$. A linha pontilhada corresponde a MMF2, teoria 1, a linha tracejada denota a teoria polidispersa, teoria 2, e a linha contínua é obtida a partir da nova teoria polidispersa, teoria 3. Valores típicos $M_0 = 480kA/m$, $\alpha = 7$ e $x_0 = 1,28nm$. (b) Dependência da susceptibilidade com a temperatura, para uma amostra de bromopentano 2, com ϕ igual a 0,238 pela primeira teoria, ϕ igual a 0,250 pela segunda teoria e ϕ igual a 0,197 pela terceira teoria. Os pontos são dados experimentais (SOLOVYOVA et al., 2016). Imagens retiradas de (SOLOVYOVA et al., 2016).	103
Figura 7.42–Altura de deslocamento vertical em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido: Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$	104
Figura 7.43–Altura de deslocamento vertical em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$ e $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,30$	106
Figura 7.44–Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para $Bo_m = 1/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$	106
Figura 7.45–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$	107
Figura 7.46–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$	108
Figura 7.47–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$	108

Figura 7.48–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$	109
Figura 7.49–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 0,1$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	110
Figura 7.50–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	111
Figura 7.51–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 2,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	111
Figura 7.52–Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 3,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	112
Figura 7.53–Configurações bidimensionais possíveis para um ímã tridimensional.	113
Figura 7.54–Características do ímã disponibilizadas pelo fabricante “ <i>Supermagnete</i> ”. Imagem retirada do catálogo (SUPERMAGNETE, 20–a).	114
Figura 7.55–Características da classificação “magnetização” N30. Imagem retirada de (SUPERMAGNETE, 20–b).	114
Figura 7.56–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	117
Figura 7.57–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	118
Figura 7.58–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $Bo_m = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$	118

- Figura 7.59–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$ 119
- Figura 7.60–Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite assintótico não-magnético, onde $B_{o_m} = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã permanente. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. 119
- Figura 7.61–Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite assintótico não-magnético, onde $B_{o_m} = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã permanente. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. 120
- Figura 7.62–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 121
- Figura 7.63–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 121
- Figura 7.64–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 122
- Figura 7.65–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 122
- Figura 7.66–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 123
- Figura 7.67–Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$ 123

Figura 7.68–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã 2A, para diferentes números de Bond magnético e 2A = 1,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	125
Figura 7.69–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã 2A, para diferentes números de Bond magnético e 2A = 4,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	125
Figura 7.70–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã 2A, para diferentes números de Bond magnético e 2A = 7,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	126
Figura 7.71–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã 2A, para diferentes números de Bond magnético e 2A = 10,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	126
Figura 7.72–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical 2B do ímã, para diferentes números de Bond magnético e 2B = 1,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	127
Figura 7.73–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical 2B do ímã, para diferentes números de Bond magnético e 2B = 4,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	127
Figura 7.74–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical 2B do ímã, para diferentes números de Bond magnético e 2B = 7,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	128
Figura 7.75–Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical 2B do ímã, para diferentes números de Bond magnético e 2B = 10,0. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	128
Figura 7.76–Propriedades de ferrofluidos comerciais. Imagem retirada de (ROSENSWEIG, 1985).	129
Figura 7.77–Altura de deslocamento vertical em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$: Círculos: $B_o = 1/2$; Triângulos: $B_o = 1/10$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$	132

- Figura 7.78–Altura de deslocamento vertical em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $Bo_m = 1/2$; $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 + 0,3$; $2A = 6,0$ e $2B = 6,0$ 132
- Figura 7.79–Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para $Bo_m = 1/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$ 133
- Figura 7.80–Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,050$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$ 134
- Figura 7.81–Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,050$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$ 135
- Figura 7.82–Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,050$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$ 135
- Figura 7.83–Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,050$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$ 136
- Figura 7.84–Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$ 137
- Figura 7.85–Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 2,5$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$ 138
- Figura 7.86–Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 4,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$ 138

Figura 7.87–Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 8,0$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$	139
Figura 7.88–Esquema apresentando a malha utilizada na análise da variação da influência da posição do ímã permanente no deslocamento vertical de fluido e no formato da superfície livre, para um ímã permanente com dimensões iguais ao espaçamento entre as placas paralelas.	140
Figura 7.89–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição vertical S do ímã permanente. Círculos: $B_{o_m} = 1/2$; Triângulos: $B_{o_m} = 1/10$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = -7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	141
Figura 7.90–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente. Círculos: $B_{o_m} = 1/2$; Triângulos: $B_{o_m} = 1/10$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $S = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	141
Figura 7.91–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição vertical S do ímã permanente, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = -7,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 + 0,20$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	142
Figura 7.92–Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $S = 7,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 + 0,20$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	142
Figura 7.93–Alturas de deslocamento vertical em função da variação das posições vertical S do ímã permanente, para $R > 0$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = 7,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	143
Figura 7.94–Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético, onde $B_{o_m} \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da posição vertical S do ímã permanente. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$; $R = -7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	145
Figura 7.95–Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético, onde $B_{o_m} \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$; $S = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	145

Figura 7.96–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $R = -7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	146
Figura 7.97–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $R = 9,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	147
Figura 7.98–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	147
Figura 7.99–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	148
Figura 7.100–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $R = -7,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	148
Figura 7.101–Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$	149
Figura 7.102–Altura de deslocamento vertical em função do ângulo de contato. Para este gráfico: $B_0 = 1/3$; $B_{o_m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$	151
Figura 7.103–Altura de equilíbrio como uma função do ângulo de contato α . A linha pontilhada representa a solução numérica. Para este gráfico: $\epsilon = 0$; $B_0 = 3/10$; $\chi_0 = 1/10$; $\beta_0^* = 1/10$ e $B_{o_m} = 1/10$ (GONTIJO et al., 2016).	151
Figura 7.104–Formatos da superfície livre para diferentes ângulos de contato. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $B_{o_m} = 1/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$	153
Figura 7.105–Formatos da superfície livre para diferentes ângulos de contato. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$	154

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Análise de sinal para as componentes t_x, t_y, n_x e n_y	32
Tabela 5.1 – Agrupamento das soluções analíticas para o caso limite assintótico não-magnético. Soluções retiradas de (GONTIJO et al., 2016).	55
Tabela 5.2 – Solução analítica obtida para o caso geral.	56
Tabela 7.1 – Faixa de variação das variáveis físicas da análise para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.	65
Tabela 7.2 – Massa específica e tensão superficial dos fluidos em análise, tomadas pelo densímetro DMA 38, da marca <i>Anto Paar</i> e pelo tensiômetro LAUDA TVT 2, respectivamente, em uma temperatura de 25°C.	73
Tabela 7.3 – Alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, bem como a média e o desvio padrão médio destas medidas. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.	74
Tabela 7.4 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.	75
Tabela 7.5 – Ângulos de contato para cada fluido em análise em função do diâmetro do tubo capilar.	78
Tabela 7.6 – Números de Bond calculados para cada um dos fluidos em cada um dos diferentes tubos capilares.	79
Tabela 7.7 – Alturas adimensionais para cada um dos fluidos nos diferentes tubos capilares.	79
Tabela 7.8 – Comparação entre alturas adimensionais. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.	81
Tabela 7.9 – Faixa de variação das variáveis físicas da análise para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo.	85
Tabela 7.10 – Altura de deslocamento vertical em função das dimensões do ímã 2A e 2B. Para esta tabela: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$	116

Tabela 7.11–Alturas de deslocamento vertical em função da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. (a) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 860\text{KA/m}$; (b) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 955\text{KA/m}$; (c) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 1035\text{KA/m}$. Para estas tabelas: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$	131
Tabela 7.12–Ângulos de contato para mudança de sinal da altura de deslocamento vertical D em função do número de Bond magnético. Para esta tabela: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$	152
Tabela 9.1 – Características dos ímãs analisados. Informações retiradas do catálogo do fabricante “ <i>Supermagnete</i> ” (SUPERMAGNETE, 20–a) e do endereço eletrônico do fabricante (SUPERMAGNETE, 20–b).	159

Lista de símbolos

Símbolos Latinos

$2b$	Altura do ímã
$2a$	Comprimento do ímã
d	Altura de equilíbrio
D	Altura de equilíbrio adimensional
$2c$	Distância entre as placas paralelas
p	Pressão
\bar{K}	Curvatura média
M	Magnetização induzida
H	Campo magnético aplicado
B	Campo vetorial de indução magnética
g	Campo vetorial de aceleração gravitacional
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material
u	Campo vetorial de velocidades
Bo	Número de Bond
Bo_m	Número de Bond magnético
p_m	Pressão magnética
I	Tensor Delta de Kronecker
f	Vetor força
dS	Diferencial de área
$y = f(x)$	Função que descreve o formato do menisco

y'	Primeira derivada de $y = f(x)$
y''	Segunda derivada de $y = f(x)$
R	Raio de curvatura do menisco
M_i	Magnetização interna do ímã
M_s	Magnetização de saturação do ferrofluido

Símbolos Gregos

ρ	Massa específica
χ	Susceptibilidade magnética
α	Ângulo de contato
γ	Tensão superficial
μ	Permeabilidade magnética
∇	Operador vetorial gradiente
σ	Tensor de tensões
ϕ_m	Potencial magnético

Abreviações

Fig.	Figura
Tab.	Tabela
Eq.	Equação

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Tema proposto	1
1.2	Motivação	1
1.3	Objetivos	2
1.3.1	Objetivos principais	2
1.3.2	Objetivos específicos	2
1.4	Estrutura do relatório	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	Conceituação física	4
2.1.1	Ferrofluidos	4
2.1.1.1	Algumas aplicações para ferrofluidos	5
2.1.2	Formação do menisco	8
2.2	Revisão bibliográfica	10
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	14
3.1	Modelo em estudo	14
3.2	Equações governantes	15
3.2.1	Salto de pressões na interface entre dois fluidos estáticos	15
3.2.2	Equacionamento magnético	15
3.2.2.1	Equações de <i>Maxwell</i> em regime magnetostático	15
3.2.2.2	Magnetização do fluido	16
3.2.2.3	A relação entre B , H e M	17
3.2.3	Equacionamento hidrodinâmico	17
3.3	Equação constitutiva para um fluido magnético	17
3.4	Equação geral do movimento: acoplamento hidrodinâmica e magnetismo	19
3.5	Dois fluidos estáticos imiscíveis	20
3.6	Condições de contorno magnéticas	22
3.6.1	Condição de contorno para B	22

3.6.2	Condição de contorno para H	23
3.7	Salto de tensões na interface	24
3.8	Equação governante geral	26
3.9	Equação governante geral adimensional	27
3.10	Campo magnético externo	28
3.11	Equação geral adimensional final	30
	4 SEGUIMENTO EXPERIMENTAL	34
4.1	Resumo	34
4.2	Fundamentação Teórica	35
4.2.1	Efeito Capilar	35
4.2.1.1	Altura de ascensão de fluido entre duas placas planas paralelas infinitas, com a hipótese de curvatura constante	35
4.2.1.2	Altura de ascensão de fluido em tubo capilar cilíndrico com interface esférica, com a hipótese de curvatura constante	38
4.2.1.3	Altura de ascensão de fluido em tubo capilar cilíndrico com interface esférica, com a hipótese de curvatura constante - Balanço de forças	39
4.2.1.4	Propagação de erros	40
4.3	Objetivos	40
4.4	Materiais	41
4.4.1	Sólidos	41
4.4.2	Fluidos utilizados	42
4.5	Metodologia	43
4.6	Medição da massa específica	45
4.7	Medição da tensão superficial	46
	5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS	49
5.1	Solução geométrica para o formato do menisco sob curvatura constante	49
5.2	Formato do menisco para o limite assintótico onde os ambos os fluidos são considerados não-magnéticos, com a restrição de que $\cot(\alpha) \ll 1$ e para curvatura não constante	52
5.3	Predição da altura de deslocamento vertical para o menisco formado no limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos, para curvatura constante	52
5.4	Predição da altura de deslocamento vertical para o menisco formado no limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos, para curvatura variável	54
5.5	Predição da altura de deslocamento vertical da superfície livre, para curvatura constante	54
	6 SOLUÇÃO NUMÉRICA	57

6.1	Algoritmo utilizado	57
6.2	Breve discussão sobre as condições de contorno	58
	7 RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
7.1	Validação dos resultados obtidos numericamente	60
7.1.1	Validação dos resultados obtidos numericamente para o limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos	60
7.1.2	Validação dos resultados obtidos numericamente para a interface formada entre um ferrofluido e um fluido não-magnético	63
7.2	Resultados obtidos para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	65
7.2.1	Resultados numéricos obtidos para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	65
7.2.1.1	Análise do efeito da variação do número de Bond no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	65
7.2.1.1.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	66
7.2.1.1.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	67
7.2.1.2	Análise do efeito da variação do ângulo de contato α no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	69
7.2.1.2.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α , para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	69
7.2.1.2.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α , para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	70
7.2.2	Resultados experimentais obtidos para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos	72
7.2.2.1	Resultados obtidos para as massas específicas e para as tensões superficiais dos fluidos em análise	73
7.2.2.2	Resultados obtidos para a altura de deslocamento vertical de fluido Newtonianos em tubos capilares	73
7.2.2.3	Ângulos de contato	77
7.2.2.4	Comparação entre resultados teóricos, experimentais e numéricos	79
7.2.2.5	Comentários acerca dos resultados experimentais	84
7.3	Resultados numéricos obtidos para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético	84

7.3.1	Análise do efeito da variação do número de Bond no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	86
7.3.1.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond	86
7.3.1.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond	89
7.3.2	Análise do efeito da variação do número de Bond magnético no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	95
7.3.2.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond magnético	95
7.3.2.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond magnético	98
7.3.3	Análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	101
7.3.3.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética do ferrofluido χ_1	104
7.3.3.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética do ferrofluido χ_1	107
7.3.4	Análise do efeito da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	113
7.3.4.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B	115
7.3.4.2	Resultados obtidos numericamente para a superfície livre para a análise da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B	120
7.3.5	Análise do efeito da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$ no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	129

7.3.5.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$	130
7.3.5.2	Resultados obtidos numericamente para a superfície livre para a análise da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$	134
7.3.6	Análise do efeito da variação da posição espacial do ímã permanente no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	139
7.3.6.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação da posição espacial do ímã	140
7.3.6.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação da posição espacial do ímã	146
7.3.7	Análise do efeito da variação do ângulo de contato α no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo	150
7.3.7.1	Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do ângulo de contato	150
7.3.7.2	Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α	153
7.3.8	Síntese dos resultados obtidos numericamente	154
	8 CONCLUSÃO	156
	9 APÊNDICE A	158
	10 REFERÊNCIAS	160
	REFERÊNCIAS	164

1 INTRODUÇÃO

O trabalho aqui apresentado remete ao projeto final de graduação submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

1.1 TEMA PROPOSTO

Este projeto consiste na realização de um estudo teórico, numérico e experimental que visa determinar o formato, bem como a altura de deslocamento vertical de uma superfície livre formada pela interface entre um ferrofluido e um fluido não-magnético entre duas placas planas verticais paralelas, sob a influência de um campo magnético externo aplicado por um ímã permanente posicionado arbitrariamente no espaço. A influência da variação das variáveis físicas concernentes à física do problema no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre foi avaliada.

Do ponto de vista físico-matemático, foi utilizada uma formulação baseada na equação geral da estática dos fluidos aplicada a um fluido superparamagnético. Neste contexto, a física do problema é governada por um balanço de forças devido à ação combinada das forças capilares, forças magnetostáticas, forças gravitacionais e do ângulo de contato (BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988).

Do ponto de vista experimental, uma bancada experimental foi confeccionada com o objetivo de determinar-se a altura de deslocamento vertical de fluidos Newtonianos em tubos capilares com diâmetros distintos. A massa específica e a tensão superficial destes fluidos também foram aferidas, utilizando-se para tanto as instalações do Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília.

1.2 MOTIVAÇÃO

A compreensão e o controle do deslocamento de fluidos em meios porosos por efeitos capilares é de alto interesse de indústrias específicas, principalmente a indústria petrolífera. Reservatórios de óleo constituem um meio poroso, onde a pressão capilar

exerce um papel importante na dinâmica de descolamento de fluido dentro de pequenos poros contendo fluidos imiscíveis. Para tanto, o estudo da ascensão de um fluido por capilaridade em tubos capilares, bem como a possibilidade de se usar um fluido magnético para promover um deslocamento capilar mais efetivo é de grande importância.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivos principais

Os objetivos principais deste trabalho são a determinação da altura de deslocamento vertical bem como o formato de uma superfície livre formada na interface entre um fluido magnético e um fluido não-magnético, quando em presença de um campo magnético externo, aplicado por um ímã permanente arbitrariamente posicionado no espaço. Pretende-se também obter um entendimento de como as variáveis físicas do problema influenciam na dinâmica de formação/deslocamento da superfície livre.

1.3.2 Objetivos específicos

- Revisão bibliográfica de publicações científicas concernentes ao tema proposto;
- Descrição físico-matemática do problema em estudo;
- Apresentação de soluções analíticas para a equação final obtida;
- Adaptação de um código numérico em *FORTRAN 90* para a resolução numérica da equação final obtida;
- Validação do código numérico modificado, a partir das soluções analíticas propostas;
- Apresentação dos resultados numéricos obtidos, bem como a discussão física dos mesmos;
- Medições de massa específica, tensão superficial e altura de deslocamento vertical de fluidos Newtonianos.

1.4 ESTRUTURA DO RELATÓRIO

No capítulo “Fundamentação Teórica”, encontra-se uma descrição sucinta sobre os ferrofluidos e os fenômenos físicos importantes na formação de um menisco. Aqui encontra-se também uma revisão bibliográfica de publicações científicas concernentes ao tema em estudo.

No capítulo “Formulação do Problema”, a descrição física e matemática do problema em estudo é apresentada, até a determinação da equação a ser resolvida numericamente neste projeto.

O próximo capítulo, “Seguimento Experimental”, apresenta detalhes sobre como a parte experimental deste projeto foi realizada.

O capítulo seguinte, “Soluções Analíticas”, apresenta soluções analíticas para o formato e altura de ascensão da superfície livre. A maioria das soluções propostas foram apresentadas por (GONTIJO et al., 2016) e replicadas aqui, com algumas pequenas modificações.

O quinto capítulo, “Solução Numérica”, descreve o funcionamento do código numérico, previamente fornecido pelo Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos e devidamente modificado, utilizado na resolução da equação geral adimensional final obtida.

Na primeira parte do capítulo “Resultados e Discussões”, o código numérico é validado frente às soluções analíticas propostas no capítulo 4 - Soluções Analíticas -. Em seguida, os resultados numéricos obtidos para o caso limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos são apresentados e discutidos. Os resultados obtidos experimentalmente para as massas específicas, tensões superficiais e alturas de deslocamento vertical de fluidos Newtonianos em capilares com diâmetros distintos, bem como os resultados calculados para os ângulos de contato para cada um dos casos são também apresentados. Por fim, os resultados numéricos obtidos para o caso mais geral são apresentados e discutidos.

O capítulo final, “Conclusões”, faz um resumo dos principais resultados obtidos ao longo do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CONCEITUAÇÃO FÍSICA

2.1.1 Ferrofluidos

Segundo (ROSENSWEIG, 1985), Ferrohidrodinâmica é o ramo da Mecânica dos Fluidos que lida com a mecânica do movimento de fluidos influenciados por intensas forças de polarização magnética. Começou a ser desenvolvida na década de 1960, motivada pelo objetivo de se converter calor em trabalho sem o auxílio de partes mecânicas. Contudo, quando os fluidos magnéticos coloidais (ferrofluidos) se tornaram disponíveis, várias outras aplicações surgiram. Muitas destas aplicações trabalham com o posicionamento e controle destes fluidos utilizando-se campos de força magnética.

Ferrofluidos são suspensões coloidais estáveis de partículas sólidas, magnéticas e nanométricas (3-15 nm), revestidas com uma camada molecular de um dispersante (tensoativo) de modo a inibir sua aglutinação, suspensas em um meio contínuo portador (normalmente um solvente orgânico ou água), que se magnetizam fortemente na presença de um campo magnético externo. A agitação térmica mantém as partículas suspensas devido ao movimento Browniano, e os revestimentos previnem que as partículas se aglomerem, muito embora, um pequeno gradiente de concentração possa ser estabelecido após uma longa exposição a um campo de força (gravitacional ou magnético) (ROSENSWEIG, 1985).

Na ausência de um campo magnético externo, as partículas em um ferrofluido coloidal, cada qual com seu momento magnético \mathbf{m} , estão aleatoriamente orientadas, e o fluido não tem nenhuma magnetização líquida. Para campos com intensidades moderadas, a tendência dos momentos de dipolo de se alinharem ao campo magnético aplicado é parcialmente superada pela agitação térmica. À medida que a intensidade do campo é aumentada, as partículas se tornam mais e mais alinhadas com a direção do campo (ROSENSWEIG, 1985).

Muitos fenômenos marcantes ocorrem na física dos ferrofluidos quando em resposta a estímulos magnéticos externos, como a instabilidade de campo, devido à qual um padrão de picos aparece na superfície do fluido (ROSENSWEIG, 1985).

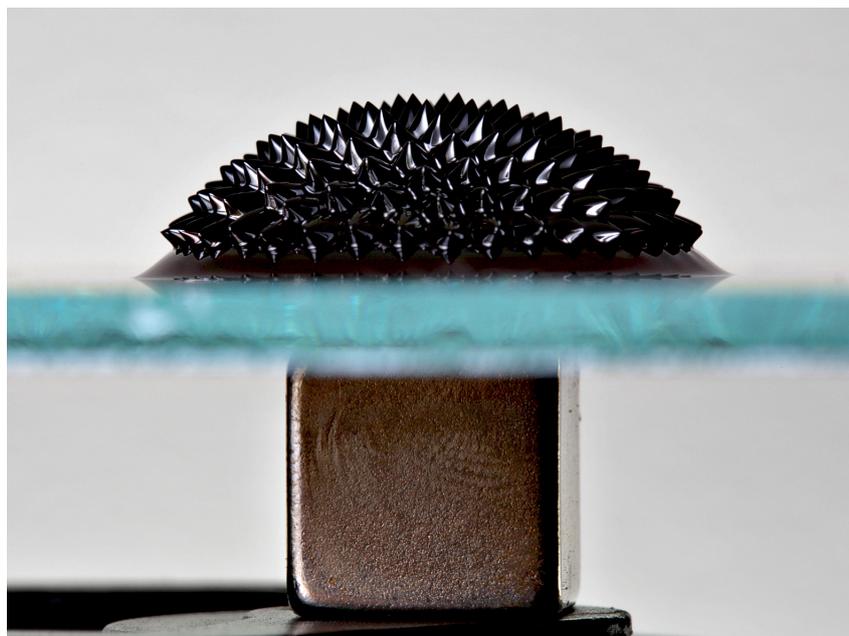


Figura 2.1 – Picos formados na superfície de um fluido magnético sob a influência de um campo magnético externo (FRANCISQUINI; SCHOENMAKER; SOUZA, 19- -).

Os ferrofluidos coloidais devem ser sintetizados, uma vez que não são encontrados na natureza. Um ferrofluido típico contém aproximadamente 10^{23} partículas por metro cúbico e é opaco à luz visível (ROSENSWEIG, 1985).

Os ferrofluidos combinam as propriedades hidrodinâmicas de fluidos comuns com a oportunidade de interagirem com campos magnéticos. Essa combinação dá origem à uma vasta gama de aplicações (JOHN; MAT; STANNARIUS, 2011). A razão principal reside no fácil controle e monitoração de sistemas contendo fluidos ou partículas magnéticas, pela resposta rápida destes fluidos quando sujeitos à ação de um campo magnético (CUNHA, 2012).

2.1.1.1 Algumas aplicações para ferrofluidos

Como exemplos de aplicações, para aplicações tecnológicas, estes fluidos podem ser utilizados em vedações dinâmicas - em muitos equipamentos onde há dois ou mais ambientes que necessitam ser hermeticamente isolados um do outro -, dissipação de calor - convecção termo-magnética -, amortecedores inerciais e viscosos - utilizados para descartar vibrações indesejadas -, processos de separação magnética, redução de arrasto mesmo em escoamentos laminares, lubrificação de mancais e eixos, entre outras. Para aplicações biomédicas, estes fluidos podem ser utilizados para tratamento de câncer - tratamento de câncer experimental chamado magnetohipertermia -, realce de contraste para ressonância magnética, transporte de fármacos e quimioterápicos no corpo humano, magnetocitólise de tumores malignos, entre outras (SCHERER; NETO, 2005);(CUNHA, 2012).

Magnetoviscosidade

Na presença de um campo magnético aplicado, os momentos magnéticos das partículas magnéticas em um ferrofluido irão se orientar na direção do campo, devido ao torque magnético produzido pela interação dos momentos com o mesmo. Deste modo, as partículas magneticamente orientadas são impedidas de girar livremente com a vorticidade do escoamento, causando um aumento em sua viscosidade efetiva. Quando o fluido é sujeito a um cisalhamento simples, o torque mecânico devido às tensões viscosas, tenta girar o momento magnético das partículas na direção da vorticidade do escoamento, gerando um desalinhamento entre os momentos e o campo aplicado. Assim, surge um torque magnético restaurador, que atua contrariamente ao torque mecânico. Este obstáculo na rotação da partícula, manifesta-se como um aumento na viscosidade efetiva do ferrofluido. Esta propriedade tem levado à criação de ferrofluidos que possuem altas taxas de cisalhamento mesmo em condições de campos magnéticos com baixa intensidade aplicados. A presença desta característica é muito desejável em óleos lubrificantes. Alguns óleos lubrificantes sintéticos modernos já usam manipulações reológicas de fluidos magnéticos para sintetizar líquidos que mantêm uma viscosidade ainda elevada mesmo em condições desfavoráveis de altas temperaturas, como ocorre em motores de combustão interna (CUNHA, 2012).

Separação magnética

Uma das aplicações para fluidos magnéticos é a separação magnética. Uma aplicação ambiental é a separação água-óleo em manchas oriundas de vazamentos de óleo em ambientes naturais. Sobre a mancha de óleo são dispersos compostos magnéticos hidrofóbicos, com bom potencial de deslocamento quando sujeitos à ação de um campo magnético. Devido ao campo magnético induzido por ímãs permanentes, o óleo magnetizado desloca-se, deixando a água ambiente com uma fração de óleo muito menor do que a inicial, em um tempo relativamente curto (CUNHA, 2012). Recentemente, (CUNHA; SOBRAL, 2004) fizeram uma caracterização dos parâmetros físicos em um processo de separação magnética. O estudo foi primeiramente aplicado para descrever o movimento de uma gota magnética suspensa livremente em um fluido viscoso sob a ação de um campo magnético permanente. A gota magnética utilizada no experimento feito pelos autores foi preparada misturando-se uma quantidade suficiente de micropartículas dispersas em um óleo lubrificante comercial, sendo estas nanopartículas de magnetita. Os autores então injetaram as gotas no fluido ambiente por meio de uma pequena haste metálica com um diâmetro de cerca de 1 mm. A indução magnética foi criada usando-se uma barra retangular de um ímã permanente. A Figura (2.2) apresenta o movimento de captura da gota magnética utilizada nos experimentos feitos pelos autores.

Convecção termo-magnética

A convecção térmica de um fluido magnético sob ação de um campo magnético e de gradientes de temperatura ocorre devido às forças de expuxo no interior do fluido

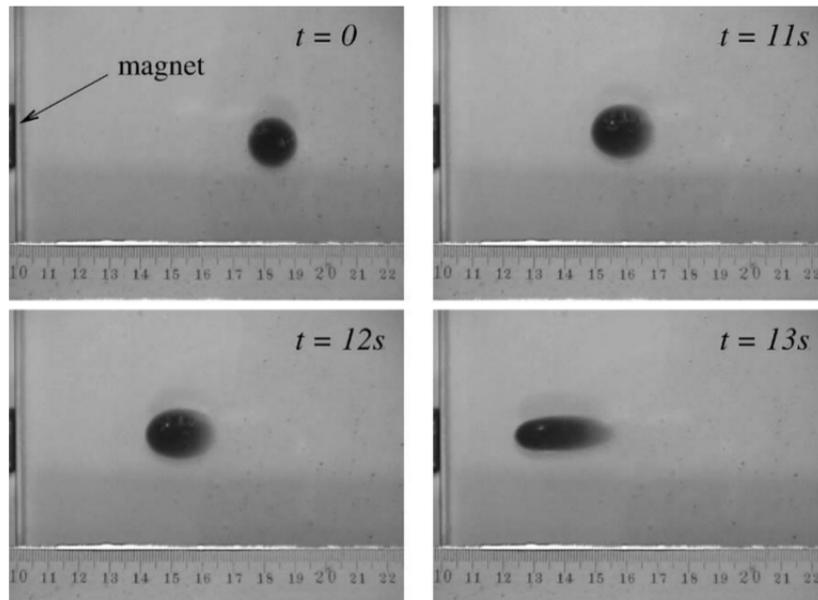


Figura 2.2 – Uma sequência típica do movimento da gota sob a ação de um campo magnético aplicado. Imagem retirada de (CUNHA; SOBRAL, 2004).

geradas por gradientes de susceptibilidade magnética ou de magnetização do fluido, de maneira análoga aos gradientes de massa específica na convecção natural. Por consequência da convecção termo-magnética, mesmo em ambientes em condições de microgravidade, é possível gerar-se um resfriamento convectivo de componentes eletrônicos pela movimentação do fluido em resposta a um gradiente de campo magnético aplicado (CUNHA, 2012). Recentemente, (GONTIJO; CUNHA, 2012), apresentaram resultados experimentais sobre convecção termo-magnética dentro de cavidades. Os autores mediram os campos de temperatura e as taxas de transferência de calor, mostrando que, mesmo para suspensões de compósitos magnéticos com uma fração volumétrica de partículas de 0,5% (isto é, uma suspensão muito diluída), já era suficiente para gerar-se uma diminuição de até 10% na temperatura média do fluido dentro de uma cavidade, e um aumento de aproximadamente 10% no número de Nusselt.

Capilaridade magnética

O fenômeno de capilaridade magnética pode ser usado para deslocamento magnético de líquidos contra a ação da gravidade na presença de uma superfície livre. Ainda que a interface entre os fluidos seja plana, é possível gerar-se um salto de pressões associado à pressão capilar magnética - vide Eq. (3.54) -, se um dos fluidos na interface for magnético (CUNHA, 2012). Esta é uma aplicação importante em poros com alta permeabilidade, como na indústria petrolífera, onde, nestes casos, as pressões capilares são mínimas.

Um dos objetivos deste projeto é encontrar uma combinação de variáveis físicas ótimas que promovam o maior deslocamento possível de fluido magnético em capilares.

2.1.2 Formação do menisco

Uma das características mais fascinantes da física de fluidos magnéticos é o fato de que o formato e a aparência de suas superfícies livres podem ser drasticamente modificados sob a influência de campos magnéticos externos (EISSMANN; LANGE; ODENBACH, 2011).

A superfície livre é comumente chamada de menisco. As formas de equilíbrio do menisco de ferrofluidos são resultado da combinação dos efeitos gerados por forças capilares, forças magnetostáticas, forças gravitacionais e pelo ângulo de contato da junção sólido/líquido/gás (BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988).

Um outro fator importante na formação de meniscos é a tensão superficial. A tensão superficial é a tendência elástica da superfície de um fluido, que faz com que ele adquira a menor área superficial possível, sendo causada por um desequilíbrio de forças de origem molecular na superfície. A origem molecular deste fenômeno reside nas forças coesivas intermoleculares. No interior de um líquido, cada molécula é empurrada igualmente em todas as direções por moléculas vizinhas, resultando em uma força resultante nula. As moléculas da superfície, por sua vez, não possuem o mesmo número de moléculas ao seu lado, e, por isso, experimentam uma força coesiva resultante na direção externa ao fluido, criando assim uma pressão interna, condizente com a tendência da superfície livre em se contrair (BATCHELOR, 1967). Um complemento à explicação sobre a tensão superficial é apresentado no capítulo 7 (Seguimento Experimental).

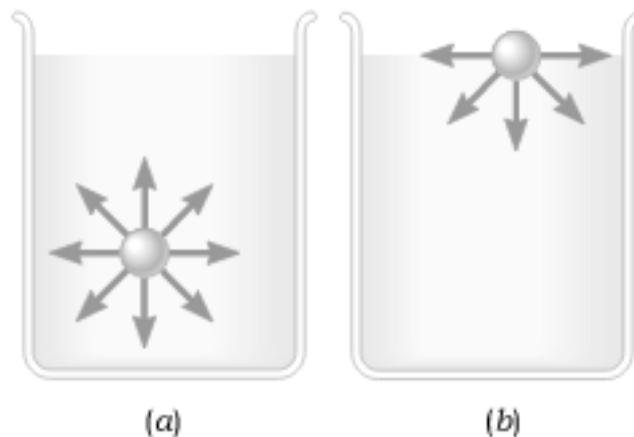


Figura 2.3 – (a) Uma molécula no interior de um fluido contornada em todos os lados por outras moléculas, que a atrem igualmente em todas as direções, resultando em uma força nula. (b) Uma molécula na superfície sente uma força resultante, pois não há moléculas do fluido acima da superfície (SCIPP, 19-).

Dois tipos especiais de forças intermoleculares agem na formação do menisco: as forças de coesão, responsáveis por manter a atração entre as moléculas, e as forças de adesão, responsáveis por fazer com que o líquido adira nas superfícies sólidas que o circundam.

Os meniscos podem ser convexos ou côncavos. Os meniscos convexos ocorrem quando as moléculas do líquido possuem uma atração mais forte por elas mesmas do que pelas moléculas do reservatório (adesão). Os meniscos côncavos, por sua vez, ocorrem quando as moléculas de um líquido são mais atraídas pelas moléculas do reservatório do que por elas mesmas, fazendo com que o líquido escale as paredes, sendo este processo conhecido como capilaridade.

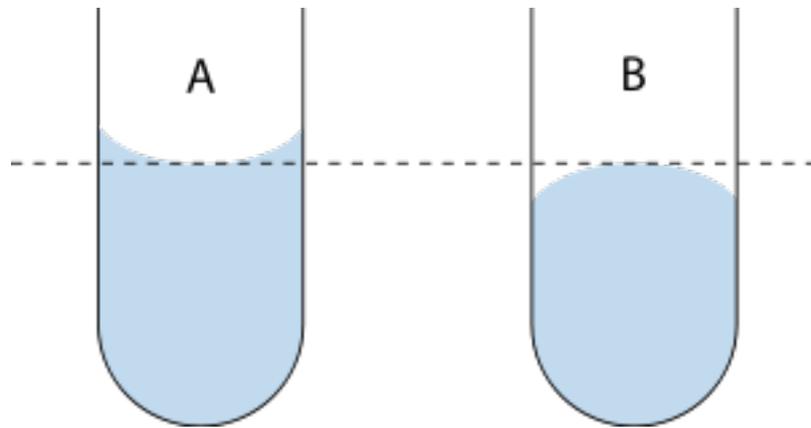


Figura 2.4 – (A) Menisco côncavo e (B) Menisco convexo (WIKIWAND, 19- -).

Um outro aspecto físico relevante na física de meniscos é a molhabilidade. A molhabilidade é a habilidade de um líquido em manter contato com uma superfície sólida, sendo resultante de interações intermoleculares que ocorrem quando os dois são mantidos em contato. O grau de molhabilidade é determinado por um equilíbrio entre as forças de adesão e as de coesão.

Na escala de um formato de menisco observável, as propriedades de molhabilidade são representadas pelo ângulo de contato aparente, formado entre a superfície livre do líquido em estudo e a parede do recipiente que contém o mesmo (BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988). O ângulo de contato depende da natureza do fluido e das propriedades dos sólidos. A determinação do ângulo de contato é um problema crucial e necessita da descrição da interação sólido/fluido (BRAGARD; LEBON, 1994).

Quando o líquido é magnetizável, como é o caso dos ferrofluidos, e um campo magnético externo está presente, as forças magnetostáticas entram em evidência no equilíbrio de forças, tanto ao longo da interface entre o líquido magnético e o fluido não magnético quanto dentro do líquido (BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988).

Além disso, quando o ferrofluido está presente, um campo magnético aplicado de forma a ser uniforme no espaço é distorcido devido ao campo de desmagnetização não uniforme (“*fringing field*”), que é criado pelo ferrofluido. Essa distorção também ocorre quando o ferrofluido entra em contato com um material não magnético, devido à descontinuidade na permeabilidade. A superfície livre do ferrofluido também se distorce, devido ao ângulo de contato que a mesma deve fazer com a parede (BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988).

2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção encontram-se publicações científicas relacionadas ao tema de pesquisa deste projeto de graduação.

(BOUDOUVIS; PUCHALLA; SCRIVEN, 1988), realizaram medidas e predições teóricas sobre o efeito da interação da molhabilidade capilar e do campo magnético da borda (*fringing magnetic field*) sobre as formas em equilíbrio de meniscos de ferrofluidos sob a aplicação de campo magnético externo e analisaram o efeito na deformação de gotas sésseis de ferrofluido sob a aplicação de campo magnético externo. Eles descobriram que, embora o ângulo de contato aparente dependa do campo de força local, o ângulo de contato macroscópico (visto sob alta magnificação) não varia durante uma grande variação do campo de força (0 a 200G). Os autores realizaram novas medidas da deformação de superfícies livres de ferrofluidos e da deformação e ruptura de gotas de ferrofluido aprisionadas em um campo magnético, demonstrando que as propriedades de molhabilidade do sistema líquido/sólido/gás e a não uniformidade do campo de desmagnetização podem ser importantes. Estes efeitos são importantes fatores na formação de padrões que acompanham a instabilidade de campo na superfície de um ferrofluido, pois a molhabilidade influencia significativamente o início da padronização bem como os subsequentes desenvolvimentos perto da parede do reservatório.

Alguns estudos mostraram a possibilidade de deslocamento de fluidos magnéticos em meios porosos pela combinação de pressão capilar e pressão magnética.

(BRAGARD; LEBON, 1994) analisaram o problema da ascensão capilar em um meio poroso aleatório. Através de simulações numéricas, os autores deduziram uma lei de escala relacionando a capilaridade e a altura de ascensão. Obtiveram também uma solução analítica, e a utilizaram para comparar os resultados numéricos obtidos. Construíram um gráfico relacionando a altura de ascensão com a porosidade, e mostraram que, para diferentes valores de um parâmetro adimensional “a”, diretamente relacionado à capilaridade e ao inverso do número de Bond, existem duas regiões distintas, uma para baixa porosidade e outra para alta porosidade. Evidenciaram que as curvas para baixa porosidade são independentes do parâmetro “a”, pois o fluxo é rapidamente parado devido à grande concentração de matriz sólida. Em contrapartida, à altas porosidades, a capilaridade exerce um papel importante. Foi exposto que para cada valor fixo do parâmetro de capilaridade “a”, existe uma porosidade ótima para a qual a altura de ascensão é máxima. O gráfico é apresentado na Fig. (2.4). Os autores esperam que o formato do meio poroso influencie profundamente a ascensão do fluido e que, portanto, um parâmetro relacionado ao formato deveria ser implementado à lei de escala desenvolvida por eles.

(BASHTOVOI; KUZHIR; REKS, 2002), investigaram o equilíbrio de uma coluna de fluido magnético dentro de um tubo capilar cilíndrico na presença de um campo magnético externo. Concluíram que devido à elongação (deformação) do menisco do fluido

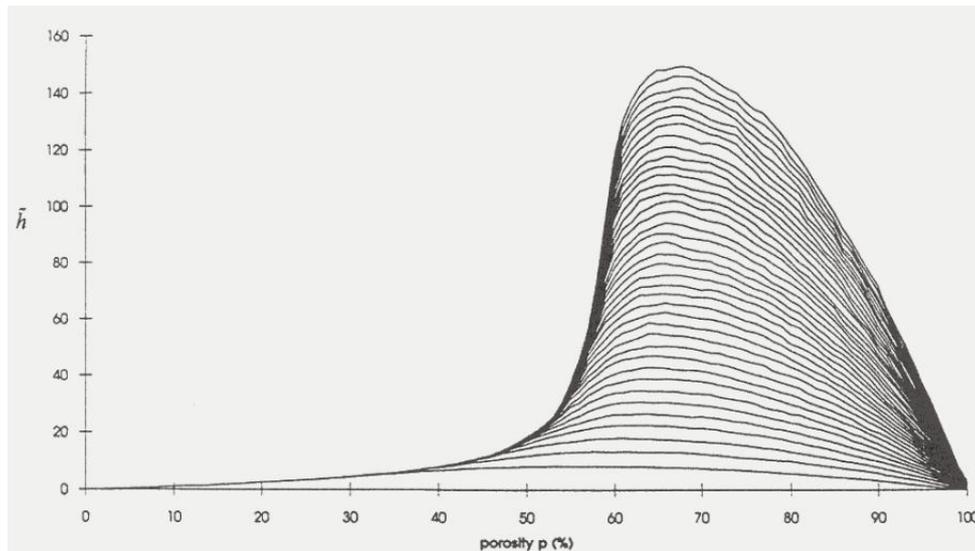


Figura 2.5 – Altura de ascensão “h” versus a porosidade “p”, para 40 valores do parâmetro de capilaridade “a” (BRAGARD; LEBON, 1994).

magnético no capilar, a queda de pressão no fluido diminui em até duas vezes sob o campo magnético longitudinal uniforme. Houve também um decréscimo sob o campo magnético transversal, o que levou à diminuição na altura de ascensão e na velocidade de ascensão do fluido.

Em outro estudo, (BASHTOVOI et al., 2005), estudaram o efeito de um campo magnético externo na altura e dinâmica da ascensão de um fluido magnético dentro de um tubo capilar cilíndrico vertical. Concluíram que há dois efeitos importantes resultantes do campo magnético externo uniforme na altura de ascensão do fluido magnético dentro do capilar. Primeiro, o campo muda o salto de pressão no menisco e segundo, induz uma diferença de pressão entre o volume de fluido magnético no capilar e o reservatório devido à campos de desmagnetização não uniformes. Devido a efeitos de desmagnetização no fluido magnético, a altura de ascensão aumenta no campo magnético longitudinal ao capilar e diminui no campo transversal, proporcionalmente ao quadrado da magnetização do fluido magnético. Observaram também que a ascensão do fluido magnético desacelera fortemente no campo transversal.

Outro estudo focou na investigação da instabilidade de um fluido magnético sujeito a um campo magnético.

(POLEVIKOV; TOBISKA, 2005) estudaram o comportamento de uma camada de fluido magnético sujeita a um campo magnético uniforme. Segundo os autores, dois diferentes tipos de instabilidades aparecem à medida em que a intensidade do campo magnético aumenta. Mostraram que, para pequenos ângulos de contato (no caso de total umedecimento - ângulo de contato nulo), a camada rompe ao longo dos eixos do capilar e se espalha sobre sua parede, já para ângulos de contato maiores, (se não há o umedecimento da parede - ângulo de contato igual a 180 graus), a camada se alonga na parte central até a sua separação das paredes.

Usando um sistema óptico, que opera através de reflexões de um raio *laser* em superfícies, (ROSENSWEIG et al., 2005), mediram a altura e o formato de um menisco de um ferrofluido em resposta à um campo magnético uniforme, encontrando que a altura do menisco em uma parede vertical plana diminui para campos aplicados horizontalmente (perpendicularmente à parede), aumenta em campos aplicados verticalmente e não se altera em campos aplicados paralelamente à parede.

Alguns trabalhos utilizaram simulações numéricas e medições do formato de menisco de ferrofluidos ao lado de fios cilíndricos verticais portadores de corrente elétrica, e observaram a influência da viscosidade, do ângulo de contato e da tensão superficial no formato do menisco.

(EISSMANN; LANGE; ODENBACH, 2011), realizaram um estudo do menisco em um fluido magnético ao redor de um fio cilíndrico vertical portador de corrente elétrica, estudando a influência da viscosidade e do ângulo de contato no fio e na borda do recipiente. Os resultados obtidos pelos autores mostraram que, a viscosidade do fluido magnético não tem influência no formato final do menisco ao redor do fio. Contrariamente, grandes mudanças no ângulo de contato no fio, bem como modificações moderadas no ângulo de contato na borda do recipiente podem influenciar o menisco sobre todo o recipiente.

(JOHN; MAT; STANNARIUS, 2011), estudaram os perfis de meniscos em ferrofluidos sob um campo magnético de um fio vertical portador de corrente, apresentando uma comparação quantitativa do menisco experimental com perfis calculados, levando em consideração a tensão superficial. Os cálculos provaram que as contribuições do ângulo de contato ao perfil estão localizadas na vizinhança do fio e que o ângulo de contato mostrou uma leve dependência com a corrente.

Recentemente, (GONTIJO et al., 2016), investigaram o comportamento do formato e a altura de equilíbrio de um menisco de em um ferrofluido na presença de um campo magnético vertical contra a direção da gravidade. O formato do menisco foi investigado pelos autores para diferentes combinações de parâmetros magnéticos, tais como o número de Bond magnético, a susceptibilidade magnética e sua derivada em respeito ao campo. Os autores apresentaram uma expressão assintótica para o formato do menisco do ferrofluido sob condições de baixos valores do número de Bond magnético e para susceptibilidade constante. A ascensão de fluido magnético com ângulos de contato maiores que $\pi/2$ combinando valores do número de Bond magnético e susceptibilidade magnética também foram examinados. O código numérico desenvolvido pelos autores para resolver e equação diferencial não linear regente do problema foi validado contra várias teorias, incluindo casos não magnéticos para curvaturas constantes e não constantes, problema magnético para curvatura constante e uma teoria assintótica para pequenos efeitos magnéticos. Os autores mostraram que, mesmo para a condição onde a interface possui uma pequena curvatura, seria possível fazer um deslocamento da interface do fluido com uma combinação de baixa pressão capilar e pressão magnética. Neste caso, o salto de pressão na interface não é nulo na presença de um gradiente de campo magnético, e, consequen-

temente, as componentes normais do campo magnético não são contínuas nas fronteiras e na interface. Também mostraram que, variações da susceptibilidade magnética em respeito ao campo magnético aplicado diminuem o efeito da pressão magnética na interface magnética para ângulo de contato maiores que $\pi/2$. Apresentaram uma não linearidade do formato da superfície livre em relação ao comprimento de onda e a intensidade do campo aplicado. Observaram que, uma pequena variação do número de Bond pode produzir uma mudança significativa no formato da superfície livre. Este projeto pretende ampliar os resultados obtidos neste artigo científico, e estender os seus resultados para um campo magnético aplicado externamente por uma ímã permanente, considerando-se ambas as componentes x e y do campo.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 MODELO EM ESTUDO

O presente projeto consiste no estudo de uma superfície livre bidimensional formada na interface entre um ferrofluido e um fluido não-magnético entre duas placas planas verticais paralelas, quando em presença de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo, de acordo com o esquema apresentado na Fig. (3.1)

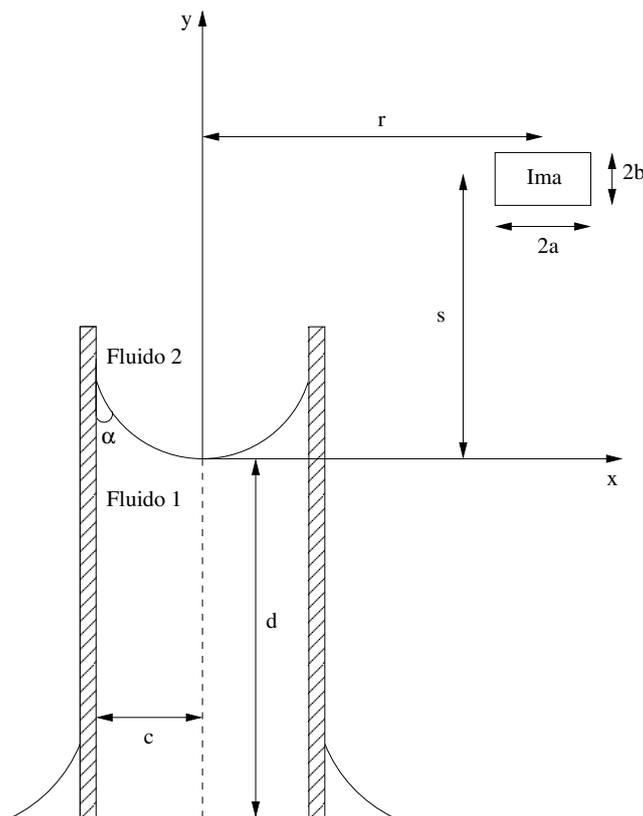


Figura 3.1 – Modelo esquemático do problema em estudo.

Nesta análise, o ferrofluido é tido como o fluido 1 e o fluido não-magnético como o fluido 2. O espaçamento entre as duas placas planas verticais paralelas é dado por uma distância $2c$. O ferrofluido possui massa específica ρ_1 e susceptibilidade magnética χ_1 , enquanto que o fluido não-magnético possui massa específica ρ_2 e susceptibilidade magnética χ_2 . A altura “d” denota a altura de deslocamento vertical da superfície livre dentro

das placas paralelas. O ímã permanente é posicionado verticalmente a uma distância “s” e horizontalmente a uma distância “r” da origem dos eixos coordenados xy, e possui dimensões “2a” e “2b”. A tensão superficial é dada por γ e o ângulo de contato formado entre o fluido 1 e as paredes das placas planas paralelas é dado por α . O formato da superfície livre formada é dado por uma curva do tipo $y = f(x)$, cuja curvatura média é dada por \bar{K} .

3.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Este projeto propõe um novo modelo matemático para o estudo da superfície livre formada entre um ferrofluido e um fluido não-magnético, que acopla consistentemente a equação de *Euler* da Mecânica dos Fluidos no contexto de um fluido magnético em equilíbrio estático, juntamente com as equações de *Maxwell* no limite magnetostático. A condição de salto de pressões dada pela lei de *Young-Laplace* é também considerada. Este procedimento leva à dedução de uma equação diferencial não linear que leva em consideração a solução exata para um campo magnético externo irrotacional variável.

3.2.1 Salto de pressões na interface entre dois fluidos estáticos

A descontinuidade na distribuição de pressões sobre uma interface não plana foi estudada por *Thomas Young* e *Pierre-Simon Laplace*, sendo descrita matematicamente pela chamada equação de *Young-Laplace* - Eq.(3.1) - , que denota a diferença de pressões mantida através de uma interface entre dois fluidos estáticos.

$$\Delta p = 2\gamma\bar{K}. \quad (3.1)$$

Aqui, $\Delta p - (p_1 - p_2)$ - é o salto de pressões na interface, γ é a tensão superficial e \bar{K} é a curvatura média da interface.

3.2.2 Equacionamento magnético

3.2.2.1 Equações de *Maxwell* em regime magnetostático

O problema em análise é governado pelas leis da Ferrohodinâmica. Para aplicações em Ferrohodinâmica, considera-se o limite magnetostático das equações de *Maxwell*, que corresponde em desprezar-se os efeitos de fluxo de corrente elétrica e de campo elétrico, ou seja, $\mathbf{J} = 0$ e $\mathbf{E} = 0$. Nestas condições, tem-se um regime permanente de indução magnética $\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$ (CUNHA, 2012).

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.3)$$

Em que, \mathbf{B} representa o vetor indução magnética, \mathbf{H} representa o vetor intensidade de campo e ∇ denota o operador vetorial gradiente.

3.2.2.2 Magnetização do fluido

Quando um corpo contínuo é colocado em um campo magnético, o campo nas vizinhanças do corpo pode sofrer mudanças significativas. Para materiais ferromagnéticos, o campo em um ponto pode aumentar de um fator de cerca de cem vezes. Esta propriedade depende da interação microscópica dos momentos de dipolo magnético do material com o campo magnético externo a que o material é submetido. Toda molécula ou nanopartícula magnética adquire um momento magnético induzido quando sujeito a um campo magnético. Na escala molecular, as partículas em um campo magnético são ditas magnetizadas, já na escala macroscópica, a magnetização mede o estado de polarização de um material contínuo magnetizado (CUNHA, 2012).

Para fluidos magnéticos, em que cada partícula pode ser interpretada como um nanoímã, em primeira análise, a magnetização \mathbf{M} representa uma medida global do grau de alinhamento dos momentos magnéticos na direção do campo aplicado, e pode ser dada por (CUNHA, 2012):

$$\mathbf{M} = n\bar{\mathbf{m}}. \quad (3.4)$$

Onde, \mathbf{M} é o vetor magnetização, $\bar{\mathbf{m}}$ é a média dos momentos magnéticos e n é o número de densidade de partículas, dado por $n = N/\delta V$, sendo N o número de partículas contidas em um volume infinitesimal δV .

A magnetização é, portanto, uma média volumétrica de momentos magnéticos na direção do campo por unidade de volume. Se todos os momentos magnéticos em um elemento de volume do fluido contínuo estão alinhados com a direção do campo aplicado \mathbf{H} , a média volumétrica corresponde ao valor máximo da magnetização, ou, como também chamada, magnetização de saturação \mathbf{M}_s . A intensidade de \mathbf{M}_s num gráfico M versus H , representa o valor de M que a partir de um determinado valor do campo H permanece constante (CUNHA, 2012).

No presente projeto, o ferrofluido em análise é tido como um fluido superparamagnético. Nesta condição, o vetor magnetização \mathbf{M} está alinhado com o vetor intensidade de campo \mathbf{H} , e não existe desvio, do ponto de vista vetorial, entre ambos. Neste caso, o tempo de relaxamento magnético é instantâneo, e estes materiais não apresentam memória magnética (CUNHA, 2012). Sob estas condições, o vetor magnetização pode ser dado por:

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}. \quad (3.5)$$

Onde χ é a susceptibilidade magnética, sendo esta uma medida da extensão a qual uma substância fica magnetizada quando colocada sob a ação de um campo magnético externo.

3.2.2.3 A relação entre \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M}

A circulação de \mathbf{M} em torno de qualquer circuito C fechado é igual à corrente superficial que atravessa qualquer região limitada por C . A indução magnética resultante \mathbf{B} numa barra magnetizada é devido tanto a corrente do condutor no enrolamento de um solenóide que envolve a barra quanto às correntes superficiais na barra. Sendo assim, a lei de *Ampère* para o campo \mathbf{B} estabelece que (CUNHA, 2012):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (3.6)$$

Em que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ é a permeabilidade magnética no vácuo em Henrys por metro.

3.2.3 Equacionamento hidrodinâmico

A formulação das equações para descrever o escoamento de fluido magnético acopla as equações hidrodinâmicas com as equações magnéticas para \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} . Assume-se o fluido como incompressível, deste modo a equação para o princípio de conservação de massa - equação da continuidade - se reduz a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.7)$$

Aqui, \mathbf{u} é o campo vetorial de velocidades Euleriano.

A equação de *Euler* representa o princípio da conservação de momentum, oriundo da segunda lei de *Newton*, sendo um caso particular das equações de *Navier-Stokes* para um fluido invíscido.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.8)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido, ∇ denota o operador vetorial gradiente, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões do fluido e \mathbf{g} é o campo vetorial de aceleração gravitacional.

Em regime hidrostático, a Eq. (3.8) torna-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

3.3 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA UM FLUIDO MAGNÉTICO

Uma das etapas fundamentais para a determinação de um sistema de equações diferenciais bem posto na dinâmica do escoamento é a busca por uma equação constitutiva

que descreva o comportamento do fluido em movimento de forma satisfatória (CUNHA, 2012). Há ainda uma certa controvérsia acerca de qual seria a equação constitutiva mais adequada para descrever-se o comportamento de um fluido magnético (GONTIJO et al., 2016). Uma formulação muito utilizada para a modelagem do tensor de tensões magnéticas de um ferrofluido consiste no tensor de *Maxwell* (ROSENSWEIG, 1985).

Segundo (CUNHA, 2012), a densidade de força magnética sobre um corpo contínuo magnetizado com uma densidade volumétrica de polos ρ_v é definida pelo divergente de um tensor magnético $\boldsymbol{\sigma}_m$, tal que:

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m = \nabla \cdot \left[-\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0)\mathbf{I} + \mu_0\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0 \right]. \quad (3.10)$$

Em que \mathbf{I} é o tensor Delta de *Kronecker*.

A partir da Eq. (3.10) conclui-se que o tensor de tensões associado à densidade de força magnética, \mathbf{f}_m , é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0)\mathbf{I} + \mu_0\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0 = -\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0)\mathbf{I} + \mathbf{B}_0\mathbf{H}_0. \quad (3.11)$$

É necessário ressaltar-se que no vácuo, $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0$, o que justifica a última expressão do lado direito da Eq. (3.11). A Equação (3.11) pode ser generalizada para campos \mathbf{B} e \mathbf{H} em qualquer meio além do vácuo, para a seguinte forma (CUNHA, 2012):

$$\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (3.12)$$

De maneira análoga ao tensor de tensões de *Navier-Stokes* usado em Mecânica dos Fluidos, o tensor de tensões magnético apresenta um termo isotrópico associado com a pressão magnética - Eq. (3.13) - somado a uma parte deviatórica - $\mu_0\mathbf{H}\mathbf{H}$ -, que representa uma tensão aplicada na direção do campo (CUNHA, 2012).

$$p_m = \frac{\mu_0}{2}H^2. \quad (3.13)$$

Aqui, p_m é a pressão magnética.

Desta forma, o tensor $\boldsymbol{\sigma}_m$ não é necessariamente simétrico, tendo em vista as componentes da parte deviatórica B_iH_j , contudo, na condição de superparamagnetismo, o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}_m$ é simétrico. No contexto de fluidos magnéticos, esta condição corresponde ao caso onde não existe torque magnético interno produzido nos elementos de fluido pelos momentos magnéticos das nanopartículas. No caso de superparamagnetismo, o vetor magnetização do elemento do fluido está alinhado com o campo - Eq. (3.5) - e, conseqüentemente, o torque magnético \mathbf{T}_m é nulo: $\mathbf{T}_m = \mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0}$ (CUNHA, 2012).

Para os fluidos magnéticos, o fluido base carreador no qual as partículas magnéticas estão dispersas geralmente é um líquido Newtoniano (CUNHA, 2012). O tensor de tensões

do fluido magnético contínuo é representado pela soma dos efeitos do fluido base e das partículas magnéticas, acarretando numa contribuição hidrodinâmica e magnética. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}, t). \quad (3.14)$$

Em que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ é o tensor de tensões do ferrofluido, $\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t)$ é a contribuição do fluido base, aqui considerado Newtoniano, incompressível e invíscido e $\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}, t)$ é a contribuição das partículas magnéticas ao fluido magnético homogêneo, dada pela Eq. (3.12).

A contribuição do fluido base $\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t)$ é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}. \quad (3.15)$$

Onde p é a pressão estática.

Deste modo, substituindo-se as Eqs. (3.15), (3.13) e (3.12) na Eq. (3.14), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\left[p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\right]\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (3.16)$$

A Equação (3.16) representa a equação constitutiva para um fluido magnético invíscido e incompressível.

3.4 EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO: ACOPLAMENTO HIDRODINÂMICA E MAGNETISMO

Nesta parte, considera-se a equação constitutiva para um fluido magnético - Eq. (3.16) -, e toma-se o seu divergente, de modo a substituir o resultado obtido na equação de Euler - Eq. (3.8) -.

Assim, deseja-se calcular:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \left\{ -\left[p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\right]\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H} \right\}. \quad (3.17)$$

Aqui faz-se uso de algumas identidades vetoriais:

$$01) \nabla \cdot (-p)\mathbf{I} = -\nabla p;$$

$$02) \nabla \cdot (-p_m)\mathbf{I} = -\nabla p_m \text{ e}$$

$$03) \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{H}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B}.$$

Assim, a Eq. (3.17) resume-se a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p - \frac{1}{2}\mu_0 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H} \nabla \cdot \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

Da segunda equação de *Maxwell* - Eq.(3.3) -, o último termo da Eq.(3.18) anula-se.

Utilizando-se a Eq.(3.6) na Eq. (3.18), resulta-se em:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p - \frac{1}{2}\mu_0 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (3.19)$$

Aplicando-se a propriedade distributiva:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p - \frac{1}{2}\mu_0 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (3.20)$$

Usando-se a identidade vetorial $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \nabla\left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2}\right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ na Eq. (3.20), obtém-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p - \frac{1}{2}\mu_0 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \mu_0 \left[\nabla \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (3.21)$$

Da quarta equação de *Maxwell* no limite magnetostático - Eq.(3.2) -, o termo $(\nabla \times \mathbf{H})$ anula-se e observando-se que o termo $\mu_0 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})/2$ cancela-se mutuamente com a contribuição de pressão magnética na Eq. (3.21), a Eq. (3.21) resume-se a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (3.22)$$

Portanto, o divergente do tensor de tensões para um fluido magnético - Eq. (3.16) - resultou em um fator de contribuição magnética relevante ao problema de se descrever um ferrofluido arbitrário: $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ (GONTIJO et al., 2016). Este fator é chamado densidade de força de *Kelvin* (ROSENSWEIG, 1985). Esta força é proporcional à magnetização do corpo contínuo e ao gradiente do campo magnético aplicado. Portanto, ainda que um material esteja magnetizado, se o mesmo é colocado sob a ação de um campo magnético uniforme, a força magnética é nula (CUNHA, 2012).

Substituindo-se o divergente do tensor de tensões - Eq.(3.22) - na equação de *Euler* - Eq.(3.8) -, resulta-se em:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.23)$$

A Equação (3.23) corresponde à equação de *Euler* padrão para um fluido incompressível e invíscido, modificada por uma contribuição magnética, que corresponde a uma força magnética por unidade de volume sobre o elemento de fluido.

Em regime hidrostático, a Eq. (3.23) reduz-se a:

$$\nabla p = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.24)$$

3.5 DOIS FLUIDOS ESTÁTICOS IMISCÍVEIS

Um caso particular da Eq. (3.24) é a condição de superparamagnetismo. Conforme visto, o vetor \mathbf{M} é dado pela Eq. (3.5), o que acarreta na simetria do fluido (CUNHA,

2012). Nestas condições, a Eq. (3.24) assim fica:

$$\nabla p = \mu_0(\chi \mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}. \quad (3.25)$$

Utilizando-se a identidade vetorial $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \nabla \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ na Eq. (3.25), vem que:

$$\nabla p = \mu_0 \chi \left[\nabla \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right] + \rho \mathbf{g}. \quad (3.26)$$

Substituindo-se a Eq. (3.2) na Eq. (3.26):

$$\nabla p = \frac{\mu_0 \chi}{2} \nabla (H^2) + \rho \mathbf{g}. \quad (3.27)$$

Multiplicando-se escalarmente a Eq. (3.27) por $d\mathbf{x}$, vem que:

$$dp = \frac{\mu_0 \chi}{2} dH^2 + \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.28)$$

Integrando-se a Eq. (3.28) indefinidamente e sabendo-se que $dH^2 = 2HdH$, obtém-se:

$$p = \frac{\mu_0 \chi}{2} H^2 + \int \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} + A. \quad (3.29)$$

Aqui, A é uma constante de integração.

Consideremos pois, uma configuração como a mostrada na Fig. (3.1). Aplicando-se a Eq. (3.29) para cada um dos fluidos imiscíveis:

Para o fluido 1:

$$p_1 = \frac{\mu_0 \chi_1}{2} H_1^2 + \rho_1(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) + A_1. \quad (3.30)$$

Para o fluido 2:

$$p_2 = \frac{\mu_0 \chi_2}{2} H_2^2 + \rho_2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) + A_2. \quad (3.31)$$

Em que A_1 e A_2 são constantes arbitrárias de integração.

Subtraindo-se a Eq. (3.31) da Eq. (3.30), obtém-se o salto de pressões na interface entre os fluidos.

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu_0}{2} (\chi_2 H_2^2 - \chi_1 H_1^2) + (\rho_2 - \rho_1) \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + (A_2 - A_1). \quad (3.32)$$

Para calcular-se o valor do termo $(A_2 - A_1)$, utiliza-se as seguintes condições de contorno:

Para $y = -d$:

01) $p_2 = p_1 = p_0$ e

02) $H_2 = H_1 = 0$.

Neste caso, é considerado que o campo magnético externo é aplicado sobre a região do menisco e que ele decai à medida em que se afasta da superfície, onde ele é nulo

(GONTIJO et al., 2016). Nota-se também que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = -gy$, onde g denota a o módulo da aceleração gravitacional.

Portanto:

$$(A_2 - A_1) = (\rho_1 - \rho_2)gd. \quad (3.33)$$

Utilizando-se a equação Eq. (3.33) na Eq. (3.32):

$$p_2 - p_1 = (\rho_1 - \rho_2)g(d + y) + \frac{\mu_0}{2}(\chi_2 H_2^2 - \chi_1 H_1^2). \quad (3.34)$$

A Equação (3.34) apresenta o salto de pressões na interface, para um problema como o apresentado pelo esquema da Fig. (3.1).

3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO MAGNÉTICAS

Nesta seção, condições de contorno entre diferentes meios contínuos para os vetores \mathbf{H} e \mathbf{B} são apresentadas.

Considerando-se a Fig. (3.2):

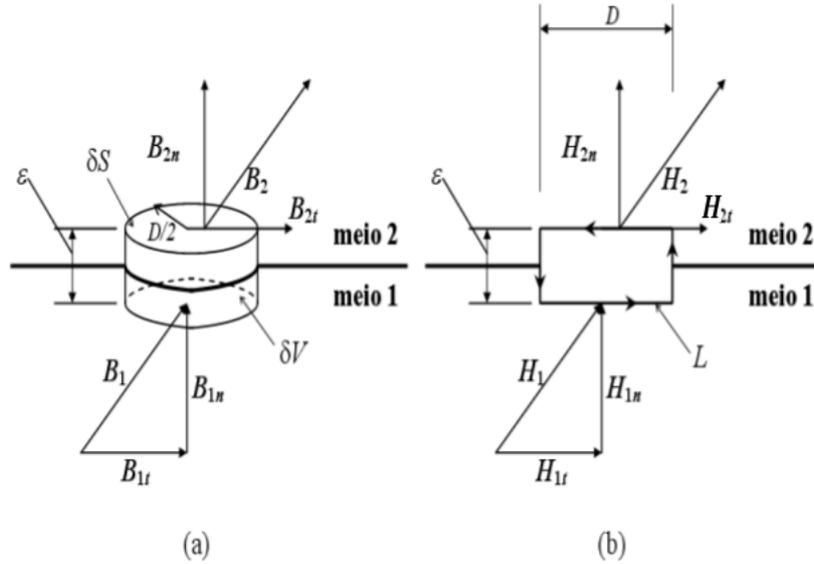


Figura 3.2 – Esquemas das condições de contorno magnéticas na interface entre dois meios contínuos distintos, 1 e 2. Em (a) indução magnética e em (b) campo magnético. Imagem retirada de (CUNHA, 2012).

3.6.1 Condição de contorno para \mathbf{B}

A condição de contorno para a indução magnética \mathbf{B} é uma consequência direta da segunda lei de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ - Eq. (3.3). Considere o disco de volume δV apresentado na Fig. (3.2)-(a), com raio $a = D/2$ e altura ε , colocado entre dois meios contínuos 1 e 2.

Integrando-se a segunda lei de *Maxwell* em δV contendo os dois meios e aplicando-se o teorema da divergência de *Gauss* tem-se (CUNHA, 2012):

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \iint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.35)$$

A Equação (3.35) mostra que o fluxo líquido de indução magnética \mathbf{B} através de qualquer superfície fechada é nulo.

Fazendo-se a altura ε tender a zero - $\varepsilon \ll D$ -, o fluxo total de indução magnética sobre a superfície δS do disco tem contribuições somente das áreas superior A_2 (saída) e inferior A_1 (entrada), já que $\varepsilon \ll a$, ou $|\mathbf{B}| \pi a^2 \gg |\mathbf{B}| 2\pi a \varepsilon$. Portanto, a integral de superfície na Eq. (3.35) reduz-se a (CUNHA, 2012):

$$\iint_{A_1} B_{1n} dS = \iint_{A_2} B_{2n} dS. \quad (3.36)$$

Como $A_1 = A_2$, a condição apresentada pela Eq. (3.36) só é satisfeita se a componente normal de \mathbf{B} for contínua ao longo da interface entre os meios 1 e 2 (CUNHA, 2012). Assim:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.37)$$

Deste modo, a componente normal da indução magnética \mathbf{B} é contínua ao longo da interface.

3.6.2 Condição de contorno para \mathbf{H}

A partir da quarta equação de *Maxwell* no limite magnetostático: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ - Eq.(3.2) -, determina-se outra condição de contorno magnética, segundo o esquema apresentado na Fig. (3.2)-(b). Integrando-se a condição de irrotacionalidade de \mathbf{H} na superfície regular S limitada pelo contorno L e aplicando-se o teorema de *Stokes* (CUNHA, 2012):

$$\iint (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dL = 0. \quad (3.38)$$

Aqui, \mathbf{t} é o vetor tangente unitário ao caminho L . No caminho indicado pela Fig. (3.2)-(b), $D \gg \varepsilon$, assim, as integrais de linha de primeira espécie em ε do caminho L são muito menores que as integrais em D . Deste modo, a integral ao longo do caminho fechado L da Eq. (3.38), reduz-se (CUNHA, 2012):

$$\oint_{D_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dL = \oint_{D_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dL. \quad (3.39)$$

O que leva a:

$$\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (3.40)$$

Deste modo:

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (3.41)$$

Assim, verifica-se que a componente tangencial do vetor \mathbf{H} é contínua ao longo da interface entre os meios 1 e 2.

Desta maneira, as condições magnéticas de contorno são dadas por $B_{1n} = B_{2n}$ e $H_{1t} = H_{2t}$, o que significa que as componentes normais do vetor \mathbf{B} e as componentes tangenciais do vetor \mathbf{H} são contínuas através da interface (GONTIJO et al., 2016).

3.7 SALTO DE TENSÕES NA INTERFACE

Considerando-se a interface segundo o esquema apresentado na Fig. (3.1), e sem fazer-se nenhuma restrição quanto à natureza dos fluidos em análise, o tensor de tensões para cada um dos fluidos é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = -p_1\mathbf{I} - \frac{\mu_0 H_1^2}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}_1\mathbf{H}_1, \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = -p_2\mathbf{I} - \frac{\mu_0 H_2^2}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}_2\mathbf{H}_2. \quad (3.43)$$

Em cada ponto da interface existe um vetor normal com componentes x, y e z que fornece a densidade superficial de forças atuando naquele ponto, sendo dado por:

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = n_j \sigma_{ji} \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (3.44)$$

Em que \mathbf{f} é o vetor tensão e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à interface.

O salto de tensões através da interface entre os dois fluidos é dado por (CUNHA, 2012); (POZRIKIDIS, 1992):

$$\Delta \mathbf{f}_i = \mathbf{n} \cdot \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\|. \quad (3.45)$$

Onde $\Delta \mathbf{f}_i$ é a força interfacial e depende das características entre os dois fluidos (CUNHA, 2012). Considerando-se uma membrana isotrópica e homogênea, a força interfacial é dado por:

$$\Delta \mathbf{f}_i = 2\gamma \bar{K} \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.46)$$

Aqui, \bar{K} representa a curvatura média da interface - Eq.(3.47) - e γ é a tensão interfacial.

$$\bar{K} = \frac{1}{2}(R_1^{-1} + R_2^{-1}) = \frac{1}{2}\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.47)$$

Em que R_1 e R_2 são os raios de curvatura principais da superfície S.

Projetando-se os tensores $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ na direção normal ($\mathbf{f} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$), obtém-se:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 = -p_1 \hat{\mathbf{n}} - \frac{\mu_0 H_1^2}{2} \hat{\mathbf{n}} + B_{1n} \mathbf{H}_1. \quad (3.48)$$

e

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = -p_2 \hat{\mathbf{n}} - \frac{\mu_0 H_2^2}{2} \hat{\mathbf{n}} + B_{2n} \mathbf{H}_2. \quad (3.49)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.46), (3.48) e (3.49) na Eq. (3.45), chega-se a:

$$(p_2 - p_1) \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu_0}{2} (H_2^2 - H_1^2) \hat{\mathbf{n}} - (B_{2n} \mathbf{H}_2 - B_{1n} \mathbf{H}_1) = 2\gamma \bar{K} \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.50)$$

Onde B_{1n} e B_{2n} denotam as componentes normais do vetor \mathbf{B} nos fluidos 1 e 2, respectivamente.

Multiplicando-se escalarmente a Eq. (3.50) por $\hat{\mathbf{n}}$:

$$(p_2 - p_1) + \frac{\mu_0}{2} (H_2^2 - H_1^2) - (B_{2n} H_{2n} - B_{1n} H_{1n}) = 2\gamma \bar{K}. \quad (3.51)$$

Em que H_{1n} e H_{2n} denotam as componentes normais do vetor \mathbf{H} nos fluidos 1 e 2, respectivamente.

Denotando-se $(p_2 - p_1) = \Delta p$ e a pressão capilar $p_c = 2\bar{K}\gamma$, e sabendo-se que $H^2 = H_n^2 + H_t^2$, onde H_n e H_t são as componentes normal e tangencial do vetor \mathbf{H} na interface, respectivamente, vem que, após substituição na Eq. (3.51):

$$\Delta p - p_c + \frac{\mu_0}{2} (H_{2n}^2 + H_{2t}^2 - H_{1n}^2 - H_{1t}^2) - (B_{2n} H_{2n} - B_{1n} H_{1n}) = 0. \quad (3.52)$$

Substituindo-se as Eqs.(3.5) e (3.6) na Eq. (3.52), e após manipulações algébricas:

$$\Delta p - p_c + \frac{\mu_0}{2} \left[H_{1n}^2 (1 + 2\chi_1) - H_{2n}^2 (1 + 2\chi_2) + H_{2t}^2 - H_{1t}^2 \right] = 0. \quad (3.53)$$

Substituindo-se a condição de contorno para o vetor \mathbf{H} , $H_{1t} = H_{2t}$ - Eq.(3.41) - na Eq. (3.53), vem:

$$\Delta p - p_c + \frac{\mu_0}{2} \left[H_{1n}^2 (1 + 2\chi_1) - H_{2n}^2 (1 + 2\chi_2) \right] = 0. \quad (3.54)$$

Da Equação (3.54) nota-se que a diferença de pressões na interface Δp não é apenas igual à pressão capilar, como o é um caso não-magnético. Existe um termo relacionado às pressões magnéticas p' , que gera uma diferença de pressão na interface e pode deslocar fluido dentro de capilares mesmo quando a curvatura da interface é muito pequena, e o efeito da pressão capilar é praticamente desprezível (CUNHA, 2012). No presente contexto, $\Delta p = p_c - p'$, onde p' é dado pela Eq. (3.55).

$$p' = \frac{\mu_0}{2} \left[H_{1n}^2 (1 + 2\chi_1) - H_{2n}^2 (1 + 2\chi_2) \right]. \quad (3.55)$$

Trabalhando-se um pouco mais com a Eq. (3.51), calculando-se o termo $(H_2^2 - H_1^2)$, teremos:

$$H_2^2 - H_1^2 = (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_2) - (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_1). \quad (3.56)$$

Deste modo, sabendo-se que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_n$, vem:

$$H_2^2 - H_1^2 = H_{2t}^2 + H_{2n}^2 - H_{1t}^2 - H_{1n}^2. \quad (3.57)$$

Substituindo-se a condição de contorno para o vetor \mathbf{H} , $H_{1t} = H_{2t}$ - Eq. (3.41) - na Eq. (3.57), vem:

$$H_2^2 - H_1^2 = H_{2n}^2 - H_{1n}^2. \quad (3.58)$$

Substituindo-se a Eq. (3.58) na Eq. (3.51):

$$(p_2 - p_1) + \frac{\mu_0}{2}(H_{2n}^2 - H_{1n}^2) - (B_{2n}H_{2n} - B_{1n}H_{1n}) = 2\gamma\bar{K}. \quad (3.59)$$

Definindo-se o termo $(p_2 - p_1)$ como Δp , a usando-se a condição de contorno magnética para a indução magnética \mathbf{B} - Eq. (3.37) -, vem que:

$$\Delta p = 2\gamma\bar{K} - \frac{\mu_0}{2}(H_{2n}^2 - H_{1n}^2) + B_{2n}H_{2n} - B_{1n}H_{1n}. \quad (3.60)$$

Da equação que relaciona \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} - Eq. (3.6) -, e da relação que define a magnetização para um fluido superparamagnético - Eq. (3.5) -, vem:

$$B_{1n} = \mu_0 H_{1n}(1 + \chi_1). \quad (3.61)$$

e

$$B_{2n} = \mu_0 H_{2n}(1 + \chi_2). \quad (3.62)$$

Assim, substituindo-se as Eqs. (3.61) e (3.62) na Eq. (3.60), é possível obter-se:

$$H_{1n} = H_{2n} \frac{(1 + \chi_2)}{(1 + \chi_1)}. \quad (3.63)$$

Nota-se a partir da Eq.(3.63), que o salto de permeabilidade magnética existente na interface é considerado neste projeto.

Deste modo, utilizando-se as Eqs. (3.63) e (3.62) na Eq. (3.60), após manipulações algébricas obtém-se:

$$\Delta p = 2\gamma\bar{K} + \frac{\mu_0}{2} H_{2n}^2 \left[-1 + \frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)^2} + 2(1 + \chi_2) - 2\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} \right]. \quad (3.64)$$

3.8 EQUAÇÃO GOVERNANTE GERAL

Nesta seção, combina-se os saltos de pressões obtidos nas Eq. (3.64) e (3.34).

Definindo-se $(\rho_1 - \rho_2)$ como $\Delta\rho$, e lembrando-se que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_n + \mathbf{H}_t$, a Eq. (3.34) torna-se:

$$\Delta p = \Delta\rho g(d + y) + \frac{\mu_0}{2}\chi_2(H_{2n}^2 + H_{2t}^2) - \frac{\mu_0}{2}\chi_1(H_{1n}^2 + H_{1t}^2). \quad (3.65)$$

Substituindo-se a Eq. (3.63) na Eq. (3.65), e utilizando-se a condição de contorno magnética para \mathbf{H} - Eq. (3.41) -, após manipulações algébricas obtém-se:

$$\Delta p = \Delta \rho g(d + y) + \frac{\mu_0}{2} H_{2n}^2 \left[\chi_2 - \chi_1 \frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)^2} \right] + \frac{\mu_0}{2} H_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1). \quad (3.66)$$

Substituindo-se a Eq. (3.66) na Eq. (3.64), chega-se a:

$$\begin{aligned} \Delta \rho g(d + y) + \frac{\mu_0}{2} H_{2n}^2 \left[\chi_2 - \chi_1 \frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)^2} \right] + \frac{\mu_0}{2} H_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1) = \\ 2\gamma \bar{K} + \frac{\mu_0}{2} H_{2n}^2 \left[-1 + \frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)^2} + 2(1 + \chi_2) - 2 \frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Manipulando-se algebricamente a Eq. (3.67), chega-se a:

$$2\gamma \bar{K} = \Delta \rho g(d + y) + \frac{\mu_0}{2} H_{2n}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] + \frac{\mu_0}{2} H_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1). \quad (3.68)$$

A curvatura média \bar{K} de uma curva genérica $y = f(x)$ é dada por:

$$\bar{K} = \frac{y''}{2(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.69)$$

Aqui, $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$ e $y = f(x)$ é a equação da superfície livre.

Usando-se a Eq.(3.69) na Eq. (3.68), resulta-se finalmente em:

$$y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\Delta \rho g(d + y)}{\gamma} + \frac{\mu_0}{2\gamma} H_{2n}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] + \frac{\mu_0}{2\gamma} H_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1) \right\}. \quad (3.70)$$

A Equação (3.70) representa uma equação modificada de *Young-Laplace* para uma interface na presença de efeitos magnéticos.

3.9 EQUAÇÃO GOVERNANTE GERAL ADIMENSIONAL

Com o propósito de adimensionalizar-se a Eq.(3.70), considerou-se como escala típica de comprimento, metade do espaçamento entre as placas paralelas - c -, de acordo com a Fig.(3.1). Considerou-se também a magnetização de saturação do ferrofluido M_s .

Assim, adimensionalizando-se as variáveis com as escalas típicas acima mencionadas:

$$Y = \frac{y}{c}; \quad X = \frac{x}{c}; \quad D = \frac{d}{c}; \quad \tilde{H}_{2n} = \frac{H_{2n}}{M_s}; \quad \tilde{H}_{2t} = \frac{H_{2t}}{M_s}.$$

Substituindo-se as relações de adimensionalização apresentadas acima na Eq.(3.70), resulta-se em:

$$Y'' = (1 + Y'^2)^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{\Delta \rho g c}{\gamma} \right) (D + Y) + \left(\frac{\mu_0 M_s^2}{2\gamma c} \right) \tilde{H}_{2n}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] + \left(\frac{\mu_0 M_s^2}{2\gamma c} \right) \tilde{H}_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1) \right\}. \quad (3.71)$$

Reconhece-se na Eq. (3.71) duas importantes variáveis adimensionais, o número de Bond - Bo - e o número de Bond magnético - Bo_m -, dados pelas Eqs. (3.72) e (3.73), respectivamente.

$$Bo = \frac{\Delta\rho g c}{\gamma/c}. \quad (3.72)$$

$$Bo_m = \frac{\mu_0 M_s^2}{2\gamma/c}. \quad (3.73)$$

O número de Bond pode ser interpretado como uma relação entre a pressão hidrostática e a pressão capilar, já o número de Bond magnético representa a razão entre a pressão magnética e a pressão capilar (GONTIJO et al., 2016).

Substituindo-se as Eqs. (3.72) e (3.73) na equação Eq.(3.71), obtém-se:

$$Y'' = \left(1+Y'^2\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ Bo(D+Y) + Bo_m \left\{ \tilde{H}_{2n}^2 \left[\frac{(1+\chi_2)^2}{(1+\chi_1)} - (1+\chi_2) \right] + \tilde{H}_{2t}^2 (\chi_2 - \chi_1) \right\} \right\}. \quad (3.74)$$

As condições de contorno utilizadas para a resolução da Eq.(3.74) são os valores das derivadas nas placas planas verticais paralelas, uma vez que elas dependem exclusivamente do ângulo de contato α , sendo este uma propriedade física do sistema em análise (GONTIJO et al., 2016):

$$01) Y'(1) = \cot g(\alpha);$$

$$02) Y'(-1) = -\cot g(\alpha).$$

Onde $\cot g(\alpha)$ é a cotangente do ângulo de contato α .

3.10 CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO

Considerando-se a quarta equação de *Maxwell* no limite magnetostático - Eq.(3.2) - e a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$, vem que o campo magnético externo \mathbf{H} pode ser dado como o gradiente de um potencial magnético escalar.

$$\mathbf{H} = \nabla\psi_m. \quad (3.75)$$

Aqui, ψ_m é um campo potencial magnético.

Substituindo-se a Eq.(3.6) na Eq.(3.3), vem que:

$$\nabla \cdot \left[\mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \right] = 0. \quad (3.76)$$

Deste modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{H}. \quad (3.77)$$

Da condição superparamagnética padrão, vem que o vetor magnetização \mathbf{M} é dado por: $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ - Eq.(3.5) -, sendo assim, a Eq.(3.77) reduz-se a:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.78)$$

Tirando-se o divergente de ambos os lados da Eq. (3.75) e substituindo-se o resultado obtido na equação Eq. (3.78), vem:

$$\nabla^2\psi_m = 0. \quad (3.79)$$

Desta maneira, o potencial escalar magnético obedece a equação de *Laplace*, para o qual muitas soluções são conhecidas para problemas em eletroestática, condução térmica, difusão molecular e elasticidade (ROSENSWEIG, 1985). Aqui, ∇^2 é o operador *Laplaciano*.

Viu-se que para fluidos com permeabilidade magnética uniforme e não-nula, o potencial do campo \mathbf{H} satisfaz a equação de *Laplace*, dada pela Eq.(3.79). Em geral, no entanto, sem a condição de superparamagnetismo e permeabilidade ou susceptibilidade magnéticas uniformes, o campo \mathbf{H} não é Laplaciano e deve ser dado pela Eq. (3.80) (CUNHA, 2012).

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla^2\psi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.80)$$

Este projeto considera a solução exata para um campo magnético externo irrotacional aplicado por uma ímã permanente de superfície retangular com polaridade uniforme, sendo as componentes nas direções x e y dadas, para um sistema de eixos coordenados como o apresentado na Fig.(3.3), por (MCCAIG; CLEGG, 1987):

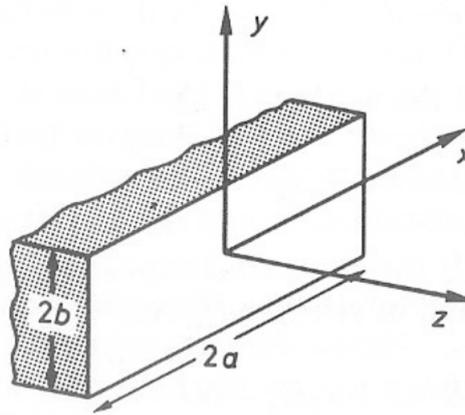


Figura 3.3 – Eixos coordenados como apresentados por (MCCAIG; CLEGG, 1987). Imagem retirada de (MCCAIG; CLEGG, 1987).

$$H_{0x} = \frac{J}{4\pi\mu_0} \ln \left\{ \frac{y + b + \left[(y + b)^2 + (x - a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{y - b + \left[(y - b)^2 + (x - a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y - b + \left[(y - b)^2 + (x + a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-y + b + \left[(-y + b)^2 + (x + a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.81)$$

$$H_{0y} = \frac{J}{4\pi\mu_0} \ln \left\{ \frac{x+a + \left[(y-b)^2 + (x+a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{x-a + \left[(y-b)^2 + (x-a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \times \frac{x-a + \left[(y+b)^2 + (x-a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{x+a + \left[(y+b)^2 + (x+a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.82)$$

Aqui, $J = \mu_0 M$, onde M é tido como a magnetização interna do ímã. A partir das Eqs.(3.81) e (3.82) vê-se que as componentes nas direções x e y do campo magnético aplicado, são funções da geometria do ímã permanente utilizado, da posição na qual deseja-se calcular a magnitude do campo, bem como do parâmetro $J/4\pi\mu_0$, aqui interpretado como uma medida indireta da intensidade do campo, estando intrinsecamente relacionado à magnetização interna do ímã permanente.

Adaptando-se as Eqs.(3.81) e (3.82) para o sistema de eixos coordenados adotados neste projeto, e adimensionalizando-as, obtêm-se as componentes adimensionais nas direções X e Y do campo magnético aplicado, dadas pelas Eqs.(3.83) e (3.84), respectivamente. Vale ressaltar-se que as dimensões do ímã permanente foram adimensionalizadas utilizando-se como escala típica de comprimento metade do espaçamento entre as placas planas verticais paralelas, neste caso: c . Deste modo, $2A = 2a/c$ e $2B = 2b/c$.

$$\tilde{H}_{0x} = \frac{M_i}{4\pi M_s} \ln \left\{ \frac{-(S-Y) + B + \left[-(S-Y) + B \right]^2 + \left[-(R-X) - A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-(S-Y) - B + \left[-(S-Y) - B \right]^2 + \left[-(R-X) - A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \times \frac{-(S-Y) - B + \left[-(S-Y) - B \right]^2 + \left[-(R-X) + A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-(S-Y) + B + \left[-(S-Y) + B \right]^2 + \left[-(R-X) + A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.83)$$

$$\tilde{H}_{0y} = \frac{M_i}{4\pi M_s} \ln \left\{ \frac{-(R-X) + A + \left[-(S-Y) - B \right]^2 + \left[-(R-X) + A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-(R-X) - A + \left[-(S-Y) - B \right]^2 + \left[-(R-X) - A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \times \frac{-(R-X) - A + \left[-(S-Y) + B \right]^2 + \left[-(R-X) - A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{-(R-X) + A + \left[-(S-Y) + B \right]^2 + \left[-(R-X) + A \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (3.84)$$

Aqui, M_i é a magnetização interna do ímã permanente.

3.11 EQUAÇÃO GERAL ADIMENSIONAL FINAL

Calculando-se as componentes \tilde{H}_{2n}^2 e \tilde{H}_{2t}^2 da Eq.(3.71):

Considerando-se a Fig.(3.4):

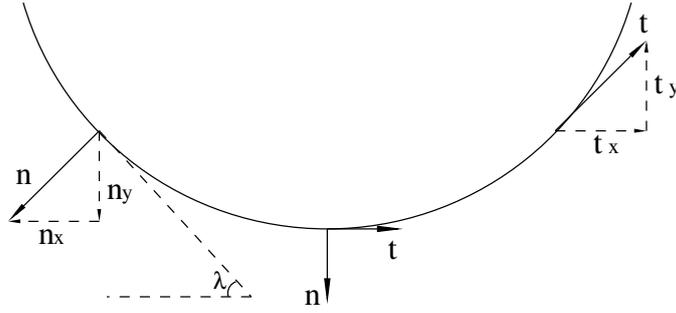


Figura 3.4 – Vetores normal $\hat{\mathbf{n}}$ e tangencial $\hat{\mathbf{t}}$ à superfície livre.

Sabendo-se que:

$$\mathbf{H}_{2n} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2)\hat{\mathbf{n}}. \quad (3.85)$$

$$\mathbf{H}_{2t} = (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2)\hat{\mathbf{t}}. \quad (3.86)$$

Aqui $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ são os vetores normal e tangencial à interface. Deste modo:

$$\mathbf{H}_{2n} = (n_x H_{0x} + n_y H_{0y})\hat{\mathbf{n}}. \quad (3.87)$$

$$\mathbf{H}_{2t} = (t_x H_{0x} + t_y H_{0y})\hat{\mathbf{t}}. \quad (3.88)$$

Aqui, n_x , n_y , t_x , t_y são as componentes nas direções x e y dos vetores $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente. As componentes H_{0x} e H_{0y} são dadas pelas Eqs.(3.83) e (3.84).

Sabendo-se que o vetor $\hat{\mathbf{n}}$ é dado por $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{e}}_x + n_y \hat{\mathbf{e}}_y$, e que $\hat{\mathbf{t}}$ é dado por $\hat{\mathbf{t}} = t_x \hat{\mathbf{e}}_x + t_y \hat{\mathbf{e}}_y$, vem que:

$$\mathbf{H}_{2n} = (n_x H_{0x} + n_y H_{0y})n_x \hat{\mathbf{e}}_x + (n_x H_{0x} + n_y H_{0y})n_y \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (3.89)$$

$$\mathbf{H}_{2t} = (t_x H_{0x} + t_y H_{0y})t_x \hat{\mathbf{e}}_x + (t_x H_{0x} + t_y H_{0y})t_y \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (3.90)$$

Utilizando-se a Fig.(3.4), é possível obter-se as seguintes relações geométricas:

$$n_x = \frac{\sin(\lambda)}{|\hat{\mathbf{n}}|}; \quad n_y = \frac{\cos(\lambda)}{|\hat{\mathbf{n}}|}; \quad t_x = \frac{\sin(\lambda)}{|\hat{\mathbf{t}}|}; \quad t_y = \frac{\cos(\lambda)}{|\hat{\mathbf{t}}|}; \quad Y'(X) = \tan(\lambda) = \frac{n_x}{n_y}.$$

Aqui, λ é o arco-tangente da primeira derivada da função $Y(X)$: $\lambda = \arctan[Y'(X)]$.

Sabendo-se que $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ são vetores unitários: $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$ e $|\hat{\mathbf{t}}| = 1$.

Neste momento, cabe fazer-se uma análise de sinal sobre as relações apresentadas acima. Tais resultados são apresentados na Tab. (3.1).

Tabela 3.1 – Análise de sinal para as componentes t_x, t_y, n_x e n_y .

	$Y'(X) \geq 0$	$Y'(X) < 0$
n_x	$ \sin [\arctan (Y'(X))] $	$- \sin [\arctan (Y'(X))] $
n_y	$- \cos [\arctan (Y'(X))] $	$- \cos [\arctan (Y'(X))] $
t_x	$ \cos [\arctan (Y'(X))] $	$ \cos [\arctan (Y'(X))] $
t_y	$ \sin [\arctan (Y'(X))] $	$- \sin [\arctan (Y'(X))] $

Deste modo, é possível calcular-se os valores de \mathbf{H}_{2n} e \mathbf{H}_{2t} . Após a adimensiona-
lização destas quantidades:

$$\tilde{H}_{2n}^2 = (n_x n_x \tilde{H}_{0x} + n_y n_x \tilde{H}_{0y})^2 + (n_x n_y \tilde{H}_{0x} + n_y n_y \tilde{H}_{0y})^2. \quad (3.91)$$

$$\tilde{H}_{2t}^2 = (t_x t_x \tilde{H}_{0x} + t_y t_x \tilde{H}_{0y})^2 + (t_x t_y \tilde{H}_{0x} + t_y t_y \tilde{H}_{0y})^2. \quad (3.92)$$

Vê-se que as componentes \tilde{H}_{2n}^2 e \tilde{H}_{2t}^2 são funções de X, Y, Y', \tilde{H}_{0x} e \tilde{H}_{0y} , portanto, o autor decidiu por designá-las por funções $F(X, Y, Y', \tilde{H}_{0x}, \tilde{H}_{0y})$ e $G(X, Y, Y', \tilde{H}_{0x}, \tilde{H}_{0y})$, respectivamente.

Assim:

$$\tilde{H}_{2t}^2 = G(X, Y, Y', \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x}) = (t_x t_x \tilde{H}_{0x} + t_y t_x \tilde{H}_{0y})^2 + (t_x t_y \tilde{H}_{0x} + t_y t_y \tilde{H}_{0y})^2. \quad (3.93)$$

$$\tilde{H}_{2n}^2 = F(X, Y, Y', \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x}) = (n_x n_x \tilde{H}_{0x} + n_y n_x \tilde{H}_{0y})^2 + (n_x n_y \tilde{H}_{0x} + n_y n_y \tilde{H}_{0y})^2. \quad (3.94)$$

Substituindo-se as Eqs.(3.93) e (3.94) na Eq.(3.71), obtém-se a equação geral final adimensional:

$$Y'' = \left(1 + Y'^2\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ Bo(D + Y) + Bo_m \left\{ F(X, Y, Y', \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x}) \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] + G(X, Y, Y', \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x})(\chi_2 - \chi_1) \right\} \right\}. \quad (3.95)$$

A Equação (3.95) apresenta uma equação diferencial não linear, obtida a partir do acoplamento consistente da equação de *Euler* da Mecânica dos Fluidos no contexto de um fluido magnético em equilíbrio estático, juntamente com as equações de *Maxwell* no limite magnetostático e a lei para o salto de pressões de *Young-Laplace*. O objetivo maior deste projeto é a resolução numérica da Eq.(3.95) afim de obter-se a altura de deslocamento vertical D bem como o formato da superfície livre formada $Y(X)$, utilizando-se para tanto as condições de contorno mencionadas na seção 3.9. Esta equação é resolvida

numericamente por integração direta usando um método Runge-Kutta de quarta ordem, juntamente com um esquema de Newton-Raphson, de acordo com o apresentado no capítulo 5. A influência da variação das variáveis físicas relevantes do problema na altura de equilíbrio e no formato do menisco são avaliadas, e os resultados são apresentados no capítulo 6. Vê-se, a partir da Eq.(3.95), que as variáveis físicas associadas à física deste problema são: a susceptibilidade magnética do fluido 1 χ_1 , a susceptibilidade magnética do fluido 2 χ_2 , os números de Bond e Bond magnético, associados às pressões hidrostáticas, capilares e magnéticas, e as componentes H_{0x} e H_{0y} do campo magnético aplicado, que por sua vez são funções da geometria do ímã permanente - 2A e 2B -, da posição na qual o ímã é posicionado no espaço - R e S -, bem como do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, um parâmetro indireto representativo de intensidade do campo magnético, associado à magnetização interna do ímã, sendo compensado pela magnetização de saturação do ferrofluido - fluido 1 -.

4 SEGUIMENTO EXPERIMENTAL

4.1 RESUMO

O seguimento experimental deste Projeto de Graduação apresenta alturas de ascensão de fluidos Newtonianos em tubos capilares medidas experimentalmente, utilizando-se uma bancada experimental operada no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade de Brasília (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de escoamentos Complexos), bem como apresenta a caracterização física destes fluidos, a partir da medição de suas massas específicas e de suas tensões superficiais. Os fluidos utilizados para este seguimento foram água destilada, glicerina e vaselina. Ângulos de contato para cada um dos fluidos em cada um dos tubos com distintos diâmetros internos foram calculados. Por fim, apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos experimentalmente com os obtidos analiticamente e numericamente para alturas de ascensão adimensionais.

Primeiramente, apresenta-se uma seção dedicada à fundamentação teórica, onde relações para a determinação da altura de deslocamento de fluido por efeitos capilares são determinadas para um fluido confinado entre duas placas planas paralelas verticais e para um fluido confinado em um tubo capilar cilíndrico.

Em seguida, a metodologia de realização do experimento é apresentada, onde verifica-se o passo a passo dos procedimentos utilizados para a aferição das alturas de equilíbrio, das massas específicas e das tensões superficiais dos fluidos analisados.

Os resultados obtidos são então apresentados. A glicerina obteve a maior massa específica entre os fluidos estudados e a água destilada a maior tensão superficial. As alturas de ascensão de fluido nos tubos capilares apresentaram uma relação hiperbólica do tipo $d \sim b^{-1}$, ou seja, uma maior altura de ascensão foi aferida à medida em que o diâmetro dos tubos capilares foram diminuídos.

Tendo aferido as alturas de ascensão, as massas específicas e as tensões superficiais, foi possível calcular-se os ângulos de contato para os três fluidos analisados, em cada um dos tubos capilares. Para a água destilada e para a glicerina, no tubo capilar com $1000 \pm 50\mu\text{m}$ de diâmetro interno, o ângulo de contato foi $\alpha \sim \pi/2$, ou seja, o menisco formado

no interior do tubo era quase plano.

Por fim, comparando-se os resultados obtidos experimentalmente com os numéricos e analíticos, verificou-se que os resultados experimentais foram extremamente satisfatórios. A solução analítica para curvatura constante 5.3, apresentada no capítulo 4 (Soluções Analíticas) provou-se uma ferramenta poderosa no cálculo das alturas de equilíbrio.

4.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.2.1 Efeito Capilar

A dinâmica de deslocamento de fluidos em capilares é determinada pelo balanço entre as forças hidrostáticas, associadas ao efeito gravitacional, e as forças capilares, associadas à curvatura da superfície livre.

A força do efeito capilar é quantificada pelo ângulo de contato α . Este é o ângulo que a tangente à superfície líquida faz com a superfície sólida no ponto de contato (CENGEL; CIMBALA, 2015).

A força da tensão superficial atua ao longo da reta tangente no sentido da superfície sólida. Portanto, a força de tensão superficial sobre um líquido num tubo de vidro atua tangente à superfície, no caso da água, atua para cima ao longo da circunferência, tendendo a puxar a água para cima. Em consequência, a água se desloca verticalmente até que seu peso acima do nível do reservatório seja equilibrado pela força da tensão superficial. Este efeito é conhecido como efeito capilar. Microscopicamente, este efeito baseia-se nas magnitudes relativas das forças coesivas e das forças adesivas (CENGEL; CIMBALA, 2015).

Desta maneira, é possível calcular-se a altura de ascensão/involução de um fluido entre duas placas planas paralelas infinitas e em um tubo capilar cilíndrico.

4.2.1.1 Altura de ascensão de fluido entre duas placas planas paralelas infinitas, com a hipótese de curvatura constante

O desenvolvimento matemático apresentado nas subseções 4.2.1.1 e 4.2.1.2 baseia-se nas notas de aula do professor Francisco Ricardo da Cunha (CUNHA, 20–).

Esta subseção dedica-se à determinação da altura de equilíbrio de deslocamento de fluido entre duas placas planas verticais paralelas, de acordo com o esquema apresentado na Fig. (4.1)-(a).

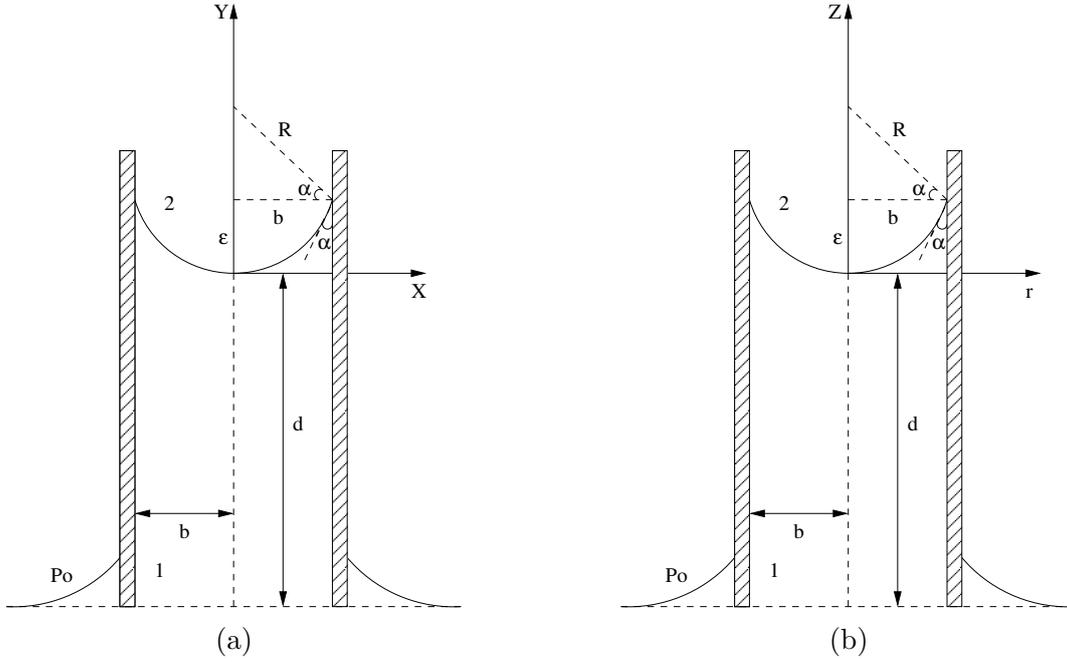


Figura 4.1 – (a) Esquema de modelo estudado apresentando algumas relações geométricas, para placas planas verticais paralelas; (b) Esquema de modelo estudado para tubo capilar apresentando algumas relações geométricas..

R é o raio de curvatura do menisco, α é o ângulo de contato, b é a metade do distanciamento entre as placas e d é a altura de deslocamento vertical.

Da lei fundamental da hidrostática:

$$P_i = \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + A_i. \quad (4.1)$$

Onde P_i é a pressão do fluido “i”, ρ_i é a massa específica do fluido “i”, \mathbf{g} é o vetor aceleração gravitacional, \mathbf{x} é um vetor direcional e A_i é uma condição de contorno apropriada.

Chamando-se o líquido no interior das placas de 1 e o ar de 2, aplicadando-se a relação dada pela Eq. (4.1) para cada um dos fluidos e subtraindo-se as mesmas, obtém-se:

$$P_2 - P_1 = (\rho_2 - \rho_1) \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + (A_2 - A_1). \quad (4.2)$$

Da equação de Laplace-Young vem:

$$P_2 - P_1 = 2\gamma \bar{K}. \quad (4.3)$$

Aqui, γ é a tensão superficial do líquido e \bar{K} é a curvatura média.

Na condição de equilíbrio, pode-se substituir a Eq. (4.3) na Eq. (4.2), resultando em:

$$2\bar{K} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{(A_2 - A_1)}{\gamma}. \quad (4.4)$$

Neste problema, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = -gy$.

Sendo assim:

$$2\bar{K} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\gamma}gy + B. \quad (4.5)$$

Onde $B = (A_2 - A_1)/\gamma$.

Da Figura (4.1)-(a), deduz-se que $b = R\cos(\alpha)$.

Resta então determinar-se o valor da condição de contorno B.

Para uma altura $y = -h$, tem-se que $P_1 = P_2 = P_0$, onde P_0 é a pressão exterior às placas.

Desta maneira, fazendo-se $y = -h$ na Eq. (4.1), para cada um dos fluidos tem-se:

$$P_1 = -\rho_1gy + A_1. \quad (4.6)$$

$$P_2 = -\rho_2gy + A_2. \quad (4.7)$$

Da condição de contorno, $P_2 = P_1$.

$$\rho_1gy + A_1 = \rho_2gy + A_2. \quad (4.8)$$

Sendo assim:

$$B = \frac{(A_2 - A_1)}{\gamma} = \frac{\Delta\rho}{\gamma}gd. \quad (4.9)$$

Onde $\Delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)$.

Substituindo-se o valor de B na Eq. (4.5).

$$2\bar{K} = \frac{\Delta\rho}{\gamma}gy + \frac{\Delta\rho}{\gamma}gd. \quad (4.10)$$

A curvatura K é dada por:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}. \quad (4.11)$$

Onde R_i é o raio de curvatura na direção i . Nesta caso, R_2 tende ao infinito, e portanto, $1/R_2$ tende a zero.

Desta maneira, a curvatura média é dada por:

$$\bar{K} = \frac{1}{2R}. \quad (4.12)$$

Substituindo-se a Eq. (4.12) na Eq. (4.10), chega-se a:

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\rho}{\gamma}g(y + d). \quad (4.13)$$

Da Figura (4.1)-(a), sabe-se que $R = b/\cos(\alpha)$.

Então:

$$\frac{\cos(\alpha)}{b} = \frac{\Delta\rho}{\gamma}g(y + d). \quad (4.14)$$

Para determinar-se a altura de equilíbrio d , basta igualar-se y a zero.

Para $y = 0$, a Eq. (4.14) torna-se:

$$d_{placas} = \frac{\gamma\cos(\alpha)}{\Delta\rho gb}. \quad (4.15)$$

A Equação (4.15) pode ser adimensionalizada dividindo-se ambos os membros da igualdade por b .

$$\frac{d}{b} = \frac{\gamma\cos(\alpha)}{\Delta\rho gb^2}. \quad (4.16)$$

Finalmente:

$$D_{placas} = \frac{\cos(\alpha)}{Bo}. \quad (4.17)$$

Onde Bo é o número de Bond, definido pela Eq. (3.72).

A condição de aproximação de curvatura constante pode ser aplicada se $\varepsilon \ll d$, pois neste caso as variações na curvatura são imperceptíveis, levando a $Bo \ll 1 + \sin(\alpha)$, como será mostrado no capítulo 5 (Soluções Analíticas).

4.2.1.2 Altura de ascensão de fluido em tubo capilar cilíndrico com interface esférica, com a hipótese de curvatura constante

O desenvolvimento matemático para a determinação da altura de equilíbrio de ascensão de fluido em tubos capilares cilíndricos com interface esférica é análogo ao desenvolvimento apresentado na subseção 4.2.1.1, para altura de ascensão de fluido entre duas placas planas paralelas infinitas.

Fazendo-se uma adaptação dos eixos coordenados, mudando-se do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema cilíndrico, ambos bidimensionais (xy para rz) - vide Fig.(4.1)-(b), e atendo-se ao fato da mudança na curvatura vem o seguinte:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}. \quad (4.18)$$

Neste caso, a curvatura é dada por $K = 2/R$ e a curvatura média por:

$$\bar{K} = \frac{1}{R}. \quad (4.19)$$

Desta maneira, após as devidas manipulações algébricas, e fazendo-se $z = 0$ para a determinação da altura de equilíbrio chega-se a:

$$d_{tubo} = \frac{2\gamma\cos(\alpha)}{\Delta\rho gb}. \quad (4.20)$$

Adimensionalizando-se a Eq. (4.20).

$$D_{tubo} = \frac{2\cos(\alpha)}{Bo}. \quad (4.21)$$

Neste caso, a condição de aproximação de curvatura constante pode ser aplicada se $Bo \ll 2(1 + \text{sen}(\alpha))$, com demonstração análoga à que será apresentada no capítulo 5 (Soluções Analíticas).

4.2.1.3 Altura de ascensão de fluido em tubo capilar cilíndrico com interface esférica, com a hipótese de curvatura constante - Balanço de forças

O mesmo resultado pode ser obtido fazendo-se um balanço de forças atuantes no volume de fluido presente dentro do tubo capilar, acima da superfície livre, como mostrado na Fig. (4.2).

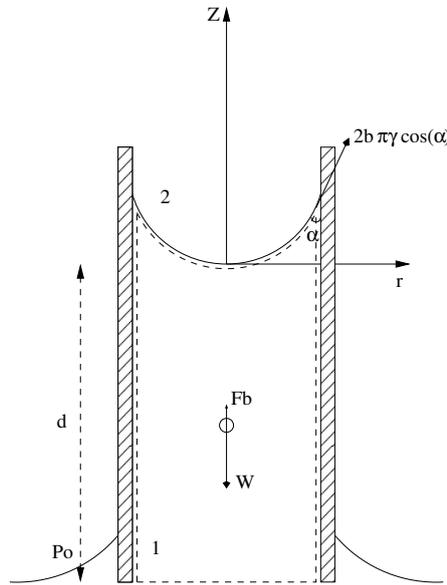


Figura 4.2 – Esquema de forças no modelo estudado para tubo capilar apresentando algumas relações geométricas.

Aqui W é a força peso do volume de fluido delineado pela linha tracejada, F_b é o empuxo de Arquimedes, $2b\pi\gamma\cos(\alpha)$ é a componente vertical da força gerada pela tensão superficial.

$$\rho_1 g(\pi R^2 d) - \rho_2 g(\pi R^2 d) = 2\pi b\gamma\cos(\alpha). \quad (4.22)$$

Aqui, ρ_1 é a massa específica da fluido em análise, ρ_2 é a massa específica do ar, g é o módulo da aceleração gravitacional, b é o raio do tubo capilar, d é a altura de deslocamento vertical do fluido, γ é o valor da tensão superficial e α é o ângulo de contato.

Rearranjando os termos da Eq. (4.22):

$$d = \frac{2\gamma\cos(\alpha)}{\Delta\rho gb}. \quad (4.23)$$

Para ângulos menores que $\pi/2$, $d > 0$ - ascensão de fluido -, já para ângulos menores que $\pi/2$, $d < 0$ - involução de fluido -.

Neste trabalho, realiza-se a medição da massa específica ρ_1 , da tensão superficial γ e da altura de deslocamento vertical de fluido d , desta maneira é possível calcular-se o valor do ângulo de contato α .

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\Delta\rho g b d}{2\gamma}\right). \quad (4.24)$$

É interessante evidenciar-se que, assumindo-se a distância de separação das placas paralelas iguais ao diâmetro do tubo capilar, e analisando-se a condição de operação para o mesmo fluido, que a altura de ascensão no tubo capilar será o dobro da altura de ascensão entre as placas paralelas, uma vez que:

$$\frac{d_{tubo}}{d_{placa}} = 2. \quad (4.25)$$

4.2.1.4 Propagação de erros

O conteúdo apresentado nesta subseção é baseado em (TOGINHO; ANDRELLO, 2009).

Seja $\bar{a} \pm \sigma_{\bar{a}}$ e $\bar{b} \pm \sigma_{\bar{b}}$ duas variáveis quaisquer com seus erros associados.

Sendo $\bar{R} = \bar{a} \pm \bar{b}$, o erro total associado é dado pela Eq. (4.26).

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{a}})^2 + (\sigma_{\bar{b}})^2}. \quad (4.26)$$

Sendo $\bar{R} = \bar{a} \bar{b}$ ou $\bar{R} = \bar{a}/\bar{b}$, o erro total associado é dado pela Eq. (4.27).

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{b}}}{\bar{b}}\right)^2} \bar{R}. \quad (4.27)$$

4.3 OBJETIVOS

Este experimento tem por objetivo a aferição de alturas de equilíbrio de deslocamento vertical de fluidos em tubos capilares com diâmetros variados, utilizando para tanto uma bancada experimental operada no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos), segundo esquema apresentado na Fig. (4.3).

Objetiva-se também a aferição da massa específica ρ e da tensão superficial γ destes fluidos, utilizando-se para tanto um densímetro e um tensiômetro, respectivamente.

Após a determinação das alturas de equilíbrio, das massas específicas e das tensões superficiais, deseja-se determinar o ângulo de contato formado entre a tangente à superfície livre e a parede sólida do tubo capilar.

Finalmente, deseja-se realizar uma comparação entre os resultados obtidos experimentalmente com os obtidos numericamente e analiticamente para as alturas de equilíbrio adimensionais.

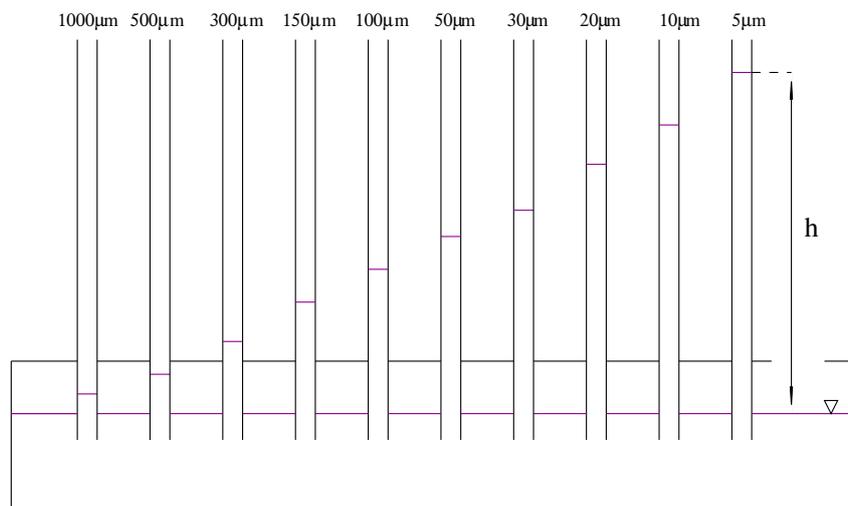


Figura 4.3 – Esquema da bancada experimental utilizada no experimento. Aqui, objetiva-se determinar a altura "h". As dimensões representam os diâmetros internos dos tubos capilares.

4.4 MATERIAIS

4.4.1 Sólidos

1. Uma bancada experimental fabricada segundo projeto em acrílico transparente, consistindo de um reservatório retangular. Sua face superior é constituída de uma placa retangular com 15 orifícios, dos quais 14 são utilizados para o posicionamento de tubos capilares com 3mm de diâmetro externo, e 1 utilizado como entrada de fluido para o preenchimento do reservatório.

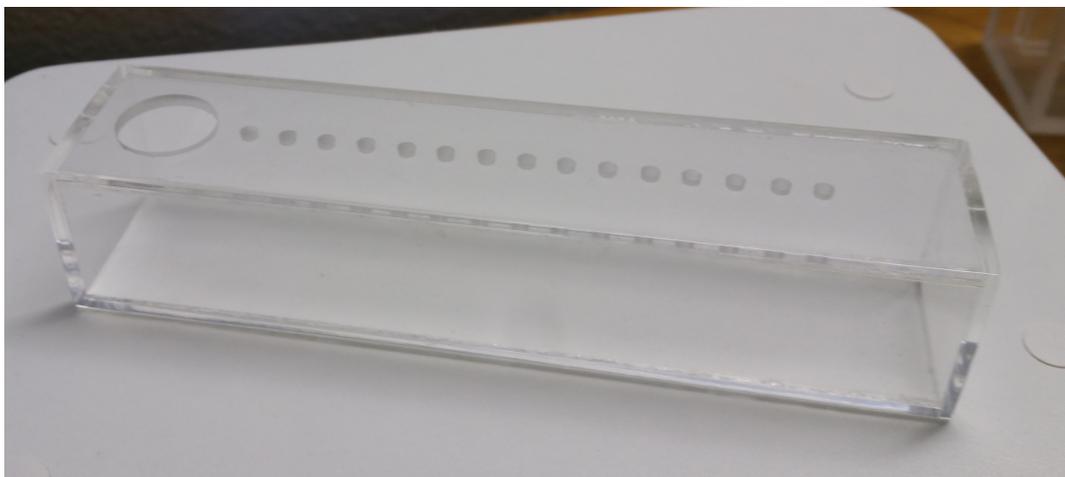


Figura 4.4 – Bancada experimental construída para aferição das alturas de equilíbrio.

- Um b quer fabricado em vidro transparente, com volume interno igual a 250ml, utilizado para aloca o de fluido.
- 5 tubos capilares, fabricados em vidro transparente pela empresa *Hilgenberg* e fornecidos pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos), com $3,00 \pm 0,20$ mm de diâmetro externo, 150mm de comprimento e diâmetros internos variáveis. Para este procedimento, os tubos capilares utilizados possuem $1000 \pm 50\mu\text{m}$, $500 \pm 20\mu\text{m}$, $300 \pm 10\mu\text{m}$, $150 \pm 5\mu\text{m}$ e $100 \pm 5\mu\text{m}$ de diâmetro interno.



Figura 4.5 – (A) Tubo capilar com diâmetro externo de $3 \pm 0,2$ mm, diâmetro interno de $50 \pm 2\mu\text{m}$ e comprimento de 150mm. (B) Tubo capilar com diâmetro externo de $3 \pm 0,2$ mm, diâmetro interno de $50 \pm 2\mu\text{m}$ e comprimento de 150mm. Verifica-se a presença do filme de PVC próximo à base do tubo.

- Régua comum transparente de 30cm para ser usada como escala de comprimento.
- Filme de PVC para correta aloca o dos tubos capilares nos furos do recipiente retangular.

4.4.2 Fluidos utilizados

Foram utilizados 3 diferentes tipos de fluido para a realiza o deste experimento.

-  gua destilada, fornecida pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos).
- Glicerina (Glicerol) $C_3H_5(OH)_3$, fabricada pela empresa *Vetec*, lote: DCBB8708, com data de fabrica o 23/05/2013 e data de validade 23/05/2021, código V000123-1L, fornecida pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos).

3. Óleo mineral (Vaselina líquida), fabricado pela empresa *Vetec*, lote: DCBB56, com data de fabricação 19/07/2013 e data de validade 19/07/2021, código V000018-1L, fornecido pelo Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos).

4.4 METODOLOGIA

Este trabalho experimental seguiu as seguintes etapas:

1. Adequação do diâmetro externo dos tubos capilares para correto encaixe na bancada experimental.

Primeiramente foi necessário adequar-se os diâmetros externos dos tubos capilares com os orifícios presentes na bancada. O diâmetro externo dos tubos capilares é igual a $3 \pm 0,2\text{mm}$, contudo, o orifício no qual eles são posicionados no reservatório retangular possui aproximadamente 3,1mm. De modo a compensar esta folga de encaixe, uma tira de filme de PVC foi utilizada em cada tubo, de acordo com a Fig. (4.5)-(B). Esta manobra permitiu um posicionamento mais adequado dos tubos capilares de modo a evitar eventuais discrepâncias nas tomadas de dados, permitindo assim a alocação dos mesmos a uma mesma altura. Em nenhum dos casos a tira comprometeu a visualização da altura de deslocamento da superfície livre.

2. Preencher o reservatório da bancada com o fluido em análise e aguardar até que não haja mais variação na altura de deslocamento

Após a alocação dos tubos capilares, as soluções eram então depositadas no reservatório. Em seguida o processo de deslocamento de fluido iniciava-se. Os fluidos eram então deixados em repouso até que nenhuma mudança na altura de deslocamento fosse perceptível.

3. Fotografar os tubos ao lado de uma escala métrica

Após o repouso, cada tubo foi fotografado individualmente ao lado de uma régua transparente de 30cm que serviu como escala métrica, de modo a averiguar-se as alturas de fluido deslocadas. Vide Figura (4.6).

4. Aferição das alturas de deslocamento com o auxílio de um software.

A aferição das alturas de equilíbrio foi realizada com o auxílio do software *ImageJ*. Este software trabalha com a comparação de medidas, sendo a primeira medida pré-estabelecida pelo usuário.

Primeiramente, a fotografia das alturas de equilíbrio eram abertas no software e então dois pontos eram selecionados, pontos estes que seriam utilizados como escala de comparação para o programa. Para tanto, dois pontos foram posicionados na régua, de modo a comportarem uma distância de 10mm entre eles, de acordo com a Fig. (4.7)-(a).

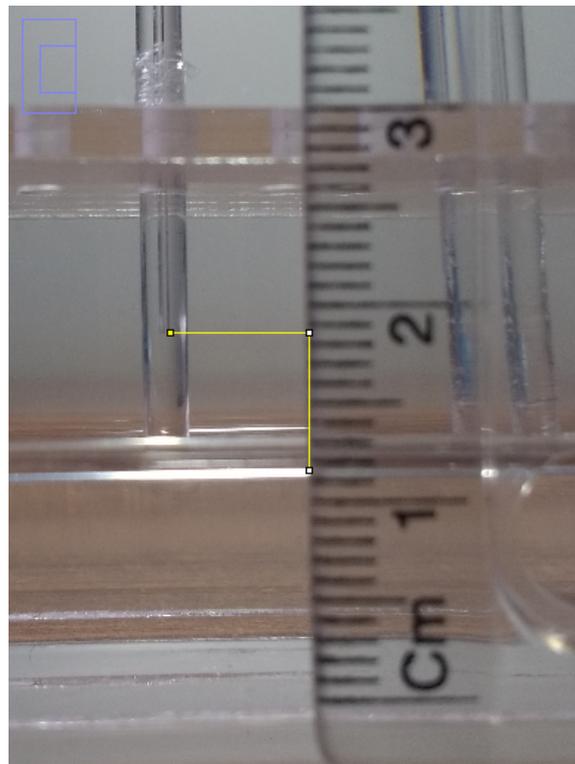
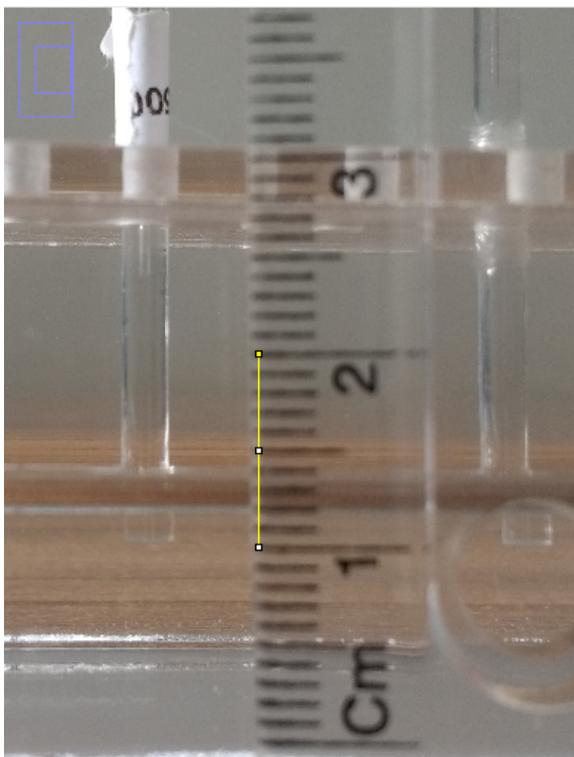
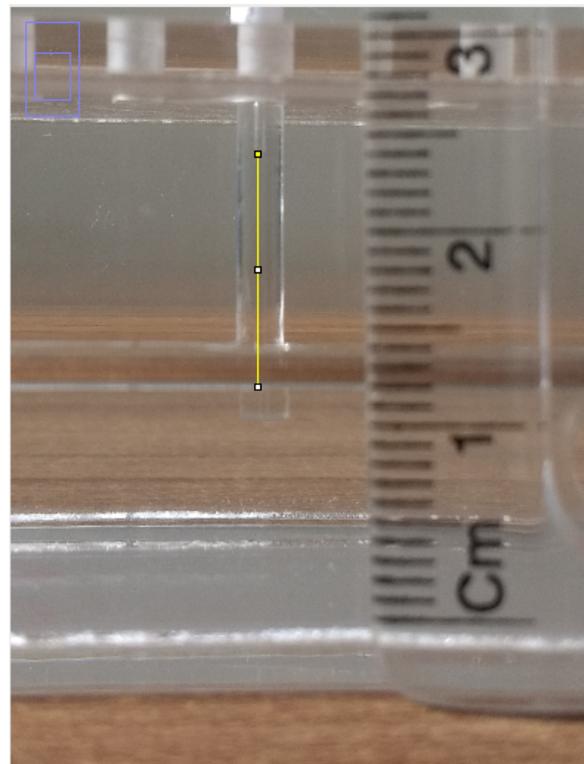


Figura 4.6 – Ascensão de glicerina por ação capilar. Tudo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Verifica-se também a presença da régua na imagem, utilizada como escala métrica, bem como a altura de ascensão, indicada pela reta amarela.



(a)



(b)

Figura 4.7 – (a) Aqui verifica-se a seleção do comprimento a ser utilizado como comprimento base para a aferição das alturas de equilíbrio. Tubo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Água destilada; (b) Aqui verifica-se a seleção do comprimento corresponde à altura de equilíbrio. Tubo com $500 \pm 20\mu\text{m}$ de diâmetro interno. Água destilada.

Desta maneira, o software possuía então uma escala de comprimento pré-definida de modo a usá-la para comparação da distância entre quaisquer outros pontos selecionados na imagem.

Dois pontos eram então selecionados, um deles na altura da superfície livre, e outro na altura deslocada h . Tal procedimento foi repetido 12 vezes para cada tubo capilar. Ver Fig. (4.7)-(b).

Ao término das medições, a maior e a menor medida tomadas eram descartadas. A média aritmética e o desvio padrão das 10 medidas restantes eram então tomados.

5. Aferição da tensão superficial das soluções utilizando um tensiômetro no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos).
6. Aferição da massa específica das soluções utilizando um densímetro no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos).
7. Confecção de tabelas e gráficos para futura discussão dos resultados.

4.6 MEDIÇÃO DA MASSA ESPECÍFICA

Para a aferição das massas específicas dos fluidos utilizados neste experimento, fez-se uso do densímetro DMA 38, da marca *Anto Paar*, do Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília, densímetro este do tipo tubo oscilante em U.

Este densímetro opera segundo o princípio do tubo oscilante em U, baseado na lei de oscilação harmônica, na qual um tubo em U é completamente preenchido com o fluido o qual deseja-se obter a massa específica e é sujeito a uma força eletromagnética. O conjunto fluido-tubo é então posto a oscilar. As medidas da frequência e do período de vibração permitem a determinação da massa específica. O princípio de medição é baseado em um modelo massa-mola.

O tubo em U oscila na sua frequência fundamental, que por sua vez é função da massa do sistema. Assumindo-se que o volume dentro do tubo em U é constante, a frequência de oscilação é então função da massa específica (FURTADO et al., 2009).

A massa específica é dada pela Eq. (4.28):

$$\rho = A + B\tau^2 + \frac{C}{\text{Amortecimento}}. \quad (4.28)$$

Aqui ρ é a massa específica da substância, τ é o período de oscilação, e as constantes A, B e C são coeficientes determinados na calibração do instrumento utilizando duas



Figura 4.8 – Densímetro DMA 38, da marca Anto Paar, utilizado neste experimento.

substâncias de massas específicas conhecidas, geralmente água e ar (FURTADO et al., 2009).

4.7 MEDIÇÃO DA TENSÃO SUPERFICIAL

Para a aferição da tensão superficial dos fluidos utilizados neste experimento, fez-se uso do tensiômetro LAUDA TVT 2, do Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília.

Este tensiômetro opera segundo o método da gota pendente. A tensão superficial é medida a partir de um balanço de forças atuantes em uma gota formada na extremidade de um capilar vertical. A gota se mantém presa à extremidade do capilar devido à tensão superficial. Quando em balanço, a tensão superficial equilibra o par peso-empuxo de Arquimedes da gota. O volume da gota é então aumentado até que um volume crítico V seja atingido, onde a tensão superficial não é mais capaz de equilibrar o par peso-empuxo. Neste momento, a gota se desprende do capilar e o ângulo formado entre a superfície da gota e a horizontal do capilar é de $\pi/2$.

O balanço de forças é dado por:

$$\rho_l V g - \rho_a V g = \gamma 2\pi r_{cap} \text{sen}(\pi/2). \quad (4.29)$$

Aqui ρ_l é a massa específico do fluido em análise, ρ_a é a massa específica do ar, V é o volume crítico da gota, g é o módulo de aceleração gravitacional, γ é a tensão superficial



Figura 4.9 – À esquerda tensiômetro LAUDA TVT 2 e à direita banho térmico LAUDA ECO RE 415. Verifica-se também a temperatura sob a qual os experimentos foram realizados.

e r_{cap} é o raio do capilar utilizado.

Rearrajando os termos da Eq. (4.29), chega-se à expressão final para a tensão superficial.

$$\gamma = \frac{(\rho_l - \rho_a)Vg}{2\pi r_{cap}}. \quad (4.30)$$

Para efetuar a medição, a gota do fluido sob análise é formada gradualmente na ponta do capilar. Este é fixo à extremidade de uma seringa onde o fluido é colocado. O deslocamento gradual do êmbolo da seringa provoca a formação da gota.

O capilar é posicionado verticalmente em um recipiente de vidro contendo ar. Uma vez que se sabe a área superficial da seringa, uma simples medição do deslocamento realizado pelo êmbolo fornece o volume da gota formada. Um sensor óptico presente no equipamento detecta o momento do desprendimento da gota, calculando-se assim o volume crítico V .

A tensão superficial é proporcional ao volume da gota, conforme a Eq. (4.30), acrescida, neste caso, de um fator de correção F , que é função de γ , ρ_l , ρ_a , g e r_{cap} .

$$\gamma = \frac{(\rho_l - \rho_a)Vg}{2\pi r_{cap}} F. \quad (4.31)$$

Para este experimento, o equipamento operou sob o modo Padrão, onde o único parâmetro ajustável é a velocidade de formação da gota (deslocamento do êmbolo), que

se mantém constante durante todo o experimento. Define-se também o raio do capilar, que neste experimento foi de 1,380mm.

O equipamento possui duas partes principais, sendo uma mecânica e outro de controle eletrônico. Uma unidade para produzir um banho térmico de modo a controlar a temperatura da amostra também está presente.

Sendo a tensão superficial uma função da temperatura, a temperatura do ambiente onde os experimentos foram realizados foi controlada, sendo mantida a 25°C.

5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste capítulo, algumas soluções analíticas são desenvolvidas e analisadas para o formato bem como para a altura de deslocamento vertical de uma superfície livre formada na interface entre um fluido não-magnético e um ferrofluido entre duas placas planas verticais paralelas. Algumas destas soluções são apresentadas no excelente artigo “*The influence of a magnetic field on the mechanical behavior of a fluid interface*” (GONTIJO et al., 2016). O desenvolvimento destas soluções torna possível a validação dos resultados obtidos numericamente.

Para todas as soluções analíticas, a suposição de que $y'^2 \ll 1$ foi imposta, de modo que a curvatura média do menisco fosse reduzida a $\bar{K} = y''/2$.

A equação da curvatura média de uma curva arbitrária $y = f(x)$ é dada por:

$$\bar{K} = \frac{y''}{2(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.1)$$

Aqui \bar{K} é a curvatura média, y'' e y' são, respectivamente, as derivadas de segunda e primeira ordem de uma função $y = f(x)$ arbitrária.

Utilizando-se $y'^2 \ll 1$ na Eq. (5.1), vem que:

$$\bar{K} = \frac{y''}{2}. \quad (5.2)$$

5.1 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA PARA O FORMATO DO MENISCO SOB CURVATURA CONSTANTE

Uma solução geométrica possível para o formato do menisco é obtida considerando-se uma curvatura constante, utilizando-se para tanto algumas relações geométricas obtidas a partir da Fig. (5.1).

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{R}. \quad (5.3)$$

Aqui, α é o ângulo de contato formado entre o menisco e a parede sólida das placas que contêm os fluidos, b é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e a parede

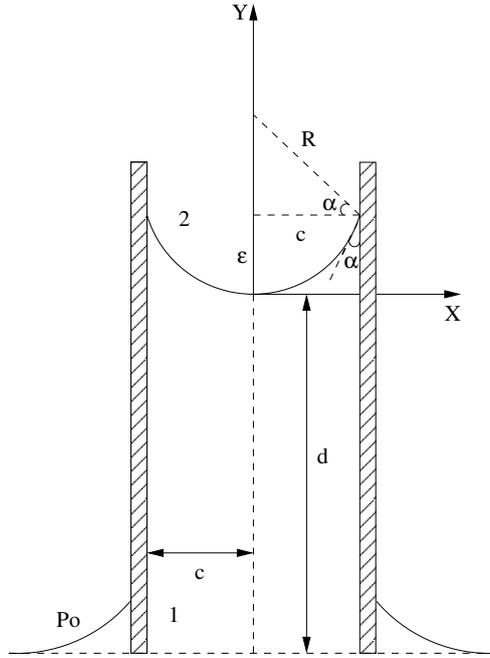


Figura 5.1 – Esquema de modelo estudado apresentando algumas relações geométricas.

das placas e R é o raio de curvatura da curva para o formato do menisco.

$$\varepsilon = R[1 - \text{sen}(\alpha)]. \quad (5.4)$$

Aqui, ε é um parâmetro puramente geométrico.

A curvatura de uma curva é dada por:

$$K = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}. \quad (5.5)$$

Onde, R_x e R_y são os raios de curvatura sob os eixos paralelos à superfície.

Como estuda-se um modelo bidimensional, com os fluidos entre duas placas planas paralelas infinitas, $R_y \rightarrow \infty$, e portanto:

$$K = \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R}. \quad (5.6)$$

Deste modo, a curvatura média é dada por:

$$\bar{K} = \frac{1}{2R}. \quad (5.7)$$

Usando-se a Eq. (5.3) na Eq. (5.7).

$$\bar{K} = \frac{\cos(\alpha)}{2c}. \quad (5.8)$$

Para um menisco com uma curvatura constante pode-se assumir que, a partir da Eq. (5.2), Y'' é também constante.

Integrando-se a Eq. (5.2) e utilizando-se a condição geométrica $Y(0) = 0$ e a condição de contorno $Y'(1) = \cot(\alpha)$, obtêm-se:

$$Y(X) = X[\cot(\alpha) - \cos(\alpha)] + X^2 \frac{\cos(\alpha)}{2}. \quad (5.9)$$

A condição $Y(0) = 0$ é apenas uma restrição geométrica associada à definição da origem do sistema de coordenadas e não representa, portanto, uma condição de contorno extra.

Aqui faz-se necessário verificar a simetria em relação ao eixo y da Eq. (5.9). Fazendo $X=-X$, obtêm-se:

$$Y(-X) = X[\cos(\alpha) - \cot(\alpha)] + X^2 \frac{\cos(\alpha)}{2}. \quad (5.10)$$

Portanto, verifica-se que a Eq. (5.10) não é simétrica em relação ao eixo y .

A primeira derivada da Eq. (5.9) pode ser usada para encontrar-se uma restrição geométrica em termos do ângulo de contato α para a aplicação de soluções analíticas baseadas na Eq. (5.2).

A primeira derivada da Eq. (5.9) é dada por:

$$Y'(X) = \cot(\alpha) + \cos(\alpha)(X - 1). \quad (5.11)$$

A restrição apresentada no começo desta seção, de que $Y' \ll 1$, é feita de modo a garantir que a curvatura média seja dada pela Eq. (5.2), sendo assim:

$$Y'(X) = \cot(\alpha) + \cos(\alpha)(X - 1) \ll 1. \quad (5.12)$$

Analisando-se a Eq. (5.11), é possível verificar-se que seu mínimo se dá para um ângulo de contato $\alpha = \pi/2$ para todo o domínio X . Para tanto, a primeira derivada será nula, $Y' = 0$.

No entanto, para uma posição $X = 1$ (na parede das placas paralelas), $Y' = \cot(\alpha)$, o que implica no valor máximo da função apresentada na Eq. (5.11).

Sendo assim, utilizando-se o resultado apresentado para o máximo da função e comparando-o à Eq. (5.11), vem que:

$$Y'(X)_{m\acute{a}x} = \cot(\alpha) \ll 1. \quad (5.13)$$

Dessa maneira, se $\cot(\alpha) \ll 1$ a restrição que leva à Eq. (5.2) é satisfeita para todo o domínio X da curva representativa do formato do menisco e a Eq. (5.9) pode ser usada para se fazer uma boa aproximação deste formato, respeitando-se, obviamente, as restrições impostas.

5.2 FORMATO DO MENISCO PARA O LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS, COM A RESTRIÇÃO DE QUE $\cot(\alpha) \ll 1$ E PARA CURVATURA NÃO CONSTANTE

Tratando-se da análise de um menisco formado entre dois fluidos não magnéticos, com susceptibilidades magnéticas $\chi \ll 1$, faz-se as susceptibilidades magnéticas χ_1 e $\chi_2 \rightarrow 0$ na Eq. (3.95), obtendo-se:

$$Y'' = \left[1 + (Y')^2\right]^{\frac{3}{2}} \left[Bo(D + Y)\right]. \quad (5.14)$$

Uma outra solução analítica para o formato do menisco pode ser obtida à partir da integração direta da Eq. (5.14), para um limite onde $Y'^2 \rightarrow 0$, utilizando-se para tanto as condições de contorno $Y(-1) = -\cot(\alpha)$ e $Y(1) = \cot(\alpha)$.

Após a integração, aqui realizada com o auxílio do software *Mathematica* (GONTIJO et al., 2016), chega-se à seguinte equação:

$$Y(X) = -D + \frac{\cot(\alpha) \cosh(\sqrt{Bo}X) \operatorname{csch}(\sqrt{Bo})}{\sqrt{Bo}}. \quad (5.15)$$

Aqui “cot” representa a função cotangente, “cosh” a função cosseno hiperbólico e “csch” a função cossecante hiperbólica.

A Equação (5.15) descreve o formato do menisco formado no limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos ($\chi_1 = \chi_2 \ll 1$), com ângulos de contato satisfazendo a restrição geométrica $\cot(\alpha) \ll 1$, ou seja, para ângulos de contato $\alpha \sim \pi/2$.

Observa-se aqui que a restrição de curvatura constante não foi imposta, tornando esta uma solução mais geral que a apresentada na seção 5.1.

5.3 PREDIÇÃO DA ALTURA DE DESLOCAMENTO VERTICAL PARA O MENISCO FORMADO NO LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS, PARA CURVATURA CONSTANTE

Da Figura (5.1), obtêm-se as relações $\epsilon = R[1 - \sin(\alpha)]$ e $\cos(\alpha) = b/R$.

Para um menisco com uma curvatura constante, a curvatura média adimensional é dada por $\tilde{K} = \cos(\alpha)/2$.

A condição puramente geométrica necessária e suficiente para se assumir um menisco com curvatura constante ocorre quando $\epsilon \ll d$, onde d é o valor da altura de deslocamento vertical da superfície livre.

Em termos adimensionais, esta altura pode ser escrita como $d = cD$, onde D é a altura de deslocamento vertical adimensional e c é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e a parede das placas que contém o fluido.

Utilizando-se a Eq. (5.4) na condição $\epsilon \ll d$ vem:

$$R[1 - \text{sen}(\alpha)] \ll d. \quad (5.16)$$

Dividindo-se ambos os termos da desigualdade por b e fazendo-se uso da Eq. (5.3), tem-se:

$$1 - \text{sen}(\alpha) \ll D\text{cos}(\alpha). \quad (5.17)$$

Utilizando-se a Eq. (5.2) na Eq. (3.95) obtém-se a equação governante do problema para uma condição de curvatura constante, e lembrando que $Y' \ll 1$:

$$2\bar{K} = Bo(D + Y) + Bo_m \left\{ \tilde{H}_{2t}^2(\chi_2 - \chi_1) + \tilde{H}_{2n}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] \right\} \quad (5.18)$$

Observa-se que até o momento, nenhuma restrição quanto à natureza do fluido foi imposta, o que torna a Eq. (5.19) passível de aplicação a todos os tipos de fluido, magnéticos ou não, atendo-se à condição de curvatura constante.

Avaliando-se a Eq. (5.19) na origem do sistema de coordenadas (0,0;0,0) para os limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos ($\chi_1 = \chi_2 \ll 1$), é possível encontrar-se a altura de deslocamento vertical D_c para a condição de curvatura constante.

$$2\bar{K} = Bo(D + Y) \quad (5.19)$$

Utilizando-se a Eq. (5.8) na Eq. (5.19), para $Y = 0$, resulta em:

$$D_c = \frac{\text{cos}(\alpha)}{Bo}. \quad (5.20)$$

O sinal do deslocamento vertical da superfície livre D_c na Eq. (4.20) é determinado pelo valor do ângulo de contato α . Quando $\alpha < \pi/2$ o menisco ascende, resultando em uma ascensão capilar positiva, $D_c > 0$. Quando $\alpha > \pi/2$ o menisco submerge, resultando em uma ascensão capilar negativa (submersão), $D_c < 0$. Por fim, quando $\alpha = \pi/2$ o menisco se mantém plano ao nível da superfície livre do lado de fora das placas verticais paralelas.

Substituindo-se a Eq. (5.20) na Eq. (5.17).

$$\frac{1 - \text{sen}(\alpha)}{\text{cos}^2(\alpha)} \ll \frac{1}{Bo}. \quad (5.21)$$

Manipulando-se algebricamente, resulta:

$$Bo \ll 1 + \text{sen}(\alpha). \quad (5.22)$$

A Equação (5.22) denota a condição física para que a abordagem do problema sob curvatura média constante possa ser aplicável.

4.4 PREDIÇÃO DA ALTURA DE DESLOCAMENTO VERTICAL PARA O MENISCO FORMADO NO LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS, PARA CURVATURA VARIÁVEL

A Equação (5.15) fornece o formato de um menisco formado por um fluido não magnético no caso limite onde a $\cot(\alpha) \ll 1$, sendo esta a condição necessária para a suposição de que $Y' \ll 1$. Usando-se a condição geométrica de que $Y(0) = 0$, obtém-se uma expressão analítica para o descolamento vertical de equilíbrio D_0 .

$$0 = -D + \frac{\cot(\alpha) \cosh(0) \operatorname{csch}(\sqrt{Bo})}{\sqrt{Bo}}. \quad (5.23)$$

Utilizando-se a Eq. (5.20) na Eq. (5.23), obtém-se:

$$D_0 = \sqrt{Bo} D_c \left[\frac{\operatorname{csch}(\sqrt{Bo})}{\sin(\alpha)} \right]. \quad (5.24)$$

5.5 PREDIÇÃO DA ALTURA DE DESLOCAMENTO VERTICAL DA SUPERFÍCIE LIVRE, PARA CURVATURA CONSTANTE

Avaliando-se a Eq. (5.18) para a origem dos sistemas coordenados (0,0;0,0), e fazendo-se uso da Eq. (5.20), obtém-se:

$$D_m = \underbrace{D_c}_I - \underbrace{\frac{Bo_m}{Bo} \left\{ \tilde{H}_{0x}^2 (\chi_2 - \chi_1) + \tilde{H}_{0y}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] \right\}}_{II}. \quad (5.25)$$

A Equação (5.25) indica que um fluido magnético contido em um pequeno espaçamento entre duas placas planas verticais paralelas, pode elevar-se contra a gravidade ainda que os efeitos de pressões capilares D_c sejam nulos, o que ocorre para $\alpha = \pi/2$ ou para os casos onde $Bo \gg 1$. Neste caso, há uma nova contribuição devido à ação magnética, associada aos efeitos de pressões magnéticas, relacionados ao termo II da Eq. (5.25)

Este efeito pode ser melhor observado na Fig. (5.2).

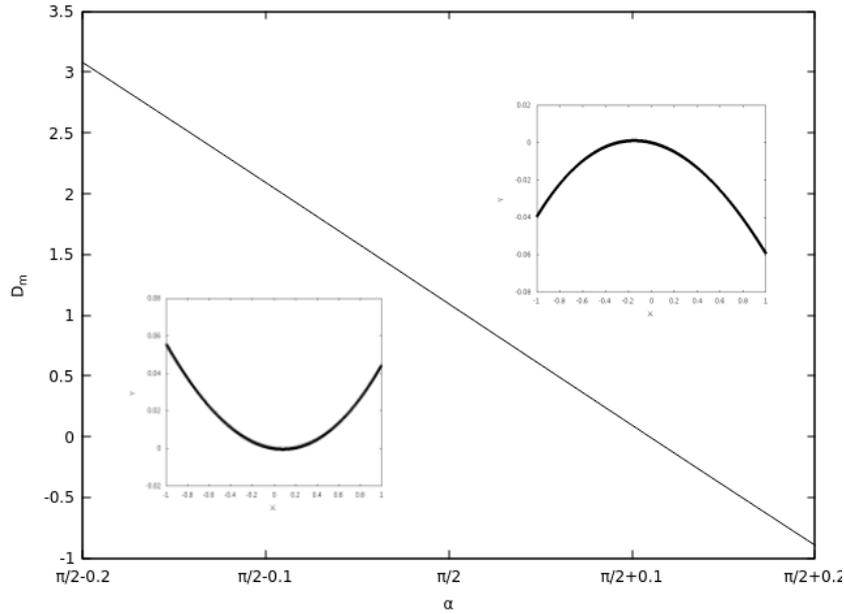


Figura 5.2 – Alturas de deslocamento vertical em função do ângulo de contato, obtidas segundo a solução analítica 4.5. Há dois perfis para o formato do menisco. O perfil à esquerda representa o perfil para ângulo de contato $\alpha = \pi/2 - 0,1$ e o perfil à direita representa o perfil para ângulo de contato $\alpha = \pi/2 + 0,1$. Para este gráfico: $Bo = 0,1$; $Bo_m = 0,8$, $A = 3$; $B = 4$; $R = -9$; $S = 8$; $M_i/4\pi M_s = 5$.

As Tabelas (5.1) e (5.2) apresentam todas as soluções analíticas obtidas, bem como as suas condições de aplicação. As soluções analíticas apresentadas na Tab.(5.1) são dadas por (GONTIJO et al., 2016).

Tabela 5.1 – Agrupamento das soluções analíticas para o caso limite assintótico não-magnético. Soluções retiradas de (GONTIJO et al., 2016).

Curvatura constante (Não-magnético)	
Formato	$Y(X) = X[\cot(\alpha) - \cos(\alpha)] + X^2 \frac{\cos(\alpha)}{2}$
Altura de Equilíbrio	$D_c = \frac{\cos(\alpha)}{Bo}$
Condições de Aplicação	$Bo \ll 1 + \sin(\alpha)$ e $\cot(\alpha) \ll 1$
Curvatura variável (Não-magnético)	
Formato	$Y(X) = -D + \frac{\cot(\alpha) \cosh(\sqrt{Bo}X) \operatorname{csch}(\sqrt{Bo})}{\sqrt{Bo}}$
Altura de Equilíbrio	$D_0 = \sqrt{Bo} D_c \left[\frac{\operatorname{csch}(\sqrt{Bo})}{\sin(\alpha)} \right]$
Condições de Aplicação	$\cot(\alpha) \ll 1$

Tabela 5.2 – Solução analítica obtida para o caso geral.

Curvatura constante (Magnético)	
Altura de Equilíbrio	$D_m = D_c - \frac{Bo_m}{Bo} \left\{ \tilde{H}_{0x}^2 (\chi_2 - \chi_1) + \tilde{H}_{0y}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] \right\}$
Condições de Aplicação	$\cot(\alpha) \ll 1$

6 SOLUÇÃO NUMÉRICA

De modo a estender-se a solução do problema proposto para condições físicas onde as soluções analíticas apresentadas no capítulo 5 não podem ser devidamente utilizadas, propõe-se a resolução da Eq. (3.95) por vias de um método numérico. Um código numérico, desenvolvido em linguagem FORTRAN pelo Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos da Universidade de Brasília, que fora utilizado para resolver um problema semelhante por outros membros do grupo, foi devidamente modificado pelo autor de modo a atender-se a realidade física do problema proposto neste projeto.

6.1 ALGORITMO UTILIZADO

Este código computa a altura de deslocamento vertical bem como o formato da superfície livre formada - $Y = F(X, Bo, Bo_m, \alpha, \chi_1, \chi_2, \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x})$ - de uma interface bidimensional entre duas placas planas verticais paralelas separadas por uma distância $2c$, formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, de acordo com o esquema apresentado na Fig. (3.1).

Transformou-se o problema em um problema de valor inicial - PVI -, usando-se um esquema iterativo acoplado ao método de Newton-Raphson, de modo a acelerar-se a convergência da solução numérica (GONTIJO et al., 2016).

Como trata-se de uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem, transformou-se a mesma em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como sugerido por (RUGGIERO; LOPES, 1996) e (FRANCO, 2007).

$$F = \frac{dY}{dx} = W(X, Bo, Bo_m, \alpha, \chi_1, \chi_2, \tilde{H}_{0y}, \tilde{H}_{0x}); \quad (6.1)$$

$$G = \frac{dW}{dX} = \left[1 + (W)^2\right]^{\frac{3}{2}} \left[Bo(D + Y)\right] + Bo_m \left\{ H_{2t}^2(\chi_2 - \chi_1) + H_{2n}^2 \left[\frac{(1 + \chi_2)^2}{(1 + \chi_1)} - (1 + \chi_2) \right] \right\}. \quad (6.2)$$

As Equações (6.1) e (6.2) foram integradas numericamente usando-se um esquema de *Runge-Kutta* de quarta ordem, acoplado ao método de *Newton-Raphson*. Este método necessita de quatro avaliações para F e G em cada passo da integração numérica.

Primeiramente, declara-se as variáveis físicas do problema - Bo , Bo_m , α , χ_1 , χ_2 , R , S , $2A$, $2B$, $M_i/4\pi M_s$ -. Uma estimativa para a altura de deslocamento vertical adimensional D é também necessária para inicializar-se o método iterativo do PVI. Para tanto, decidiu-se utilizar como estimativa o valor para a altura de deslocamento vertical apresentada na solução analítica 5.5, Eq. (5.25).

Para a realização da integração, tomou-se passos adimensionais ΔX e ΔY suficientemente pequenos de modo a garantir que o erro associado à integração numérica fosse menor que 10^{-6} . Utilizou-se tipicamente $\Delta X = \Delta Y = 10^{-6}$, mas estes valores foram modificados em algumas situações de modo a conseguir-se a convergência do método.

Em seguida, declara-se a condição de contorno do problema - $Y'(-1) = -\cot(\alpha)$ - e arbitra-se um valor para $Y(-1)$. Deste modo, o processo de integração começa em $X = -1$ e termina em $X = 1$, com valores arbitrários para D e $Y(-1)$.

Após cada etapa de integração, a condição de contorno $Y'(1) = \cot(\alpha)$ e a restrição geométrica $Y(0) = 0,0$ são verificadas. Se estas condições não forem respeitadas, um esquema de *Newton-Raphson* é aplicado de maneira a atualizar-se o valor de D e o valor de $Y(-1)$ para satisfazerem:

$$Y'(1) - \cot(\alpha) = 0; \quad (6.3)$$

e

$$Y(0) = 0. \quad (6.4)$$

O procedimento é então repetido até que as Eqs. (6.3) e (6.4) sejam satisfeitas dentro de uma tolerância igual a 10^{-6} .

Deste modo, os valores iniciais para D e $Y(-1)$ são extremamente importantes para a convergência do método.

5.2 BREVE DISCUSSÃO SOBRE AS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A formulação do problema necessita de algumas assunções relacionadas às condições de contorno utilizadas para obter-se o formato da superfície livre $Y(X)$. É necessário escolher-se condições de contorno fisicamente consistentes para modelar-se o problema apropriadamente. Nesta seção duas opções são discutidas bem como suas implicações.

Condições de contorno 1:

$$Y'(0) = 0 \text{ e } Y'(1) = \cot(\alpha), \quad 0 \leq X \leq 1,$$

e condições de contorno 2:

$$Y'(-1) = -\cot(\alpha) \text{ e } Y'(1) = \cot(\alpha), \quad -1 \leq X \leq 1.$$

As condições de contorno 1 demandam a imposição de simetria vertical para obter-se o formato completo da superfície livre. Os resultados apresentados na seção 7.3 do capítulo 7 comprovarão que esta imposição é incompatível com a realidade física. De fato, as únicas condições de contorno que se tem certeza vêm da física do problema, e são os valores das derivadas nas placas planas, que dependem exclusivamente do ângulo de contato α , uma propriedade física do sistema líquido-sólido-gás em análise.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, propõe-se apresentar os resultados numéricos obtidos da integração numérica direta da Eq. (3.95), utilizando-se o esquema apresentado no capítulo 6 - Solução Numérica -. Procurou-se observar o efeito da variação de cada uma das variáveis físicas do problema, tanto na altura de deslocamento vertical como no formato da superfície livre.

Este capítulo é dividido em três distintas partes. A primeira consiste na validação da solução numérica, utilizando-se para tanto as soluções analíticas desenvolvidas no capítulo 5. A segunda parte consiste na apresentação dos resultados obtidos para o limite assintótico onde ambos os fluidos na interface são considerados não-magnéticos, através da integração numérica direta da Eq. (5.14). A terceira parte consiste na apresentação dos resultados obtidos numericamente para o caso mais geral, onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético. Para efeitos práticos, o fluido não-magnético foi tido como o ar atmosférico ao longo das simulações numéricas.

7.1 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NUMERICAMENTE

Nesta seção, realizou-se um teste do esquema de integração numérica total da Eq. (3.95), e os resultados numéricos obtidos foram confrontados frente às soluções analíticas apresentadas no capítulo 5, de modo a validá-los.

Primeiramente, os resultados numéricos foram validados para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos e em seguida, foram validados para o caso mais geral, onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, aqui tido como o ar atmosférico.

6.1.1 Validação dos resultados obtidos numericamente para o limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos

As Figuras (7.1), (7.2) e (7.3) apresentam os resultados obtidos através da integração numérica da Eq. (5.14), bem como os obtidos através das soluções analíticas apresentadas no capítulo 5, para a altura de deslocamento vertical e o formato da superfície livre, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

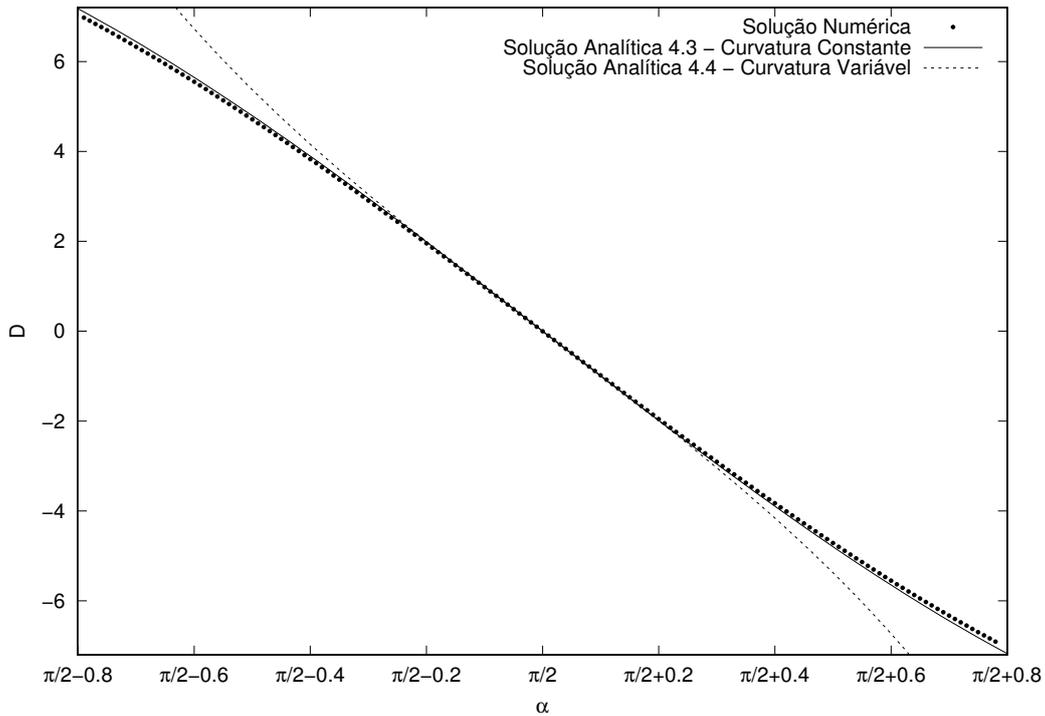


Figura 7.1 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha contínua denota a solução analítica 5.3 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.4. Para este gráfico: $Bo = 0,1$.

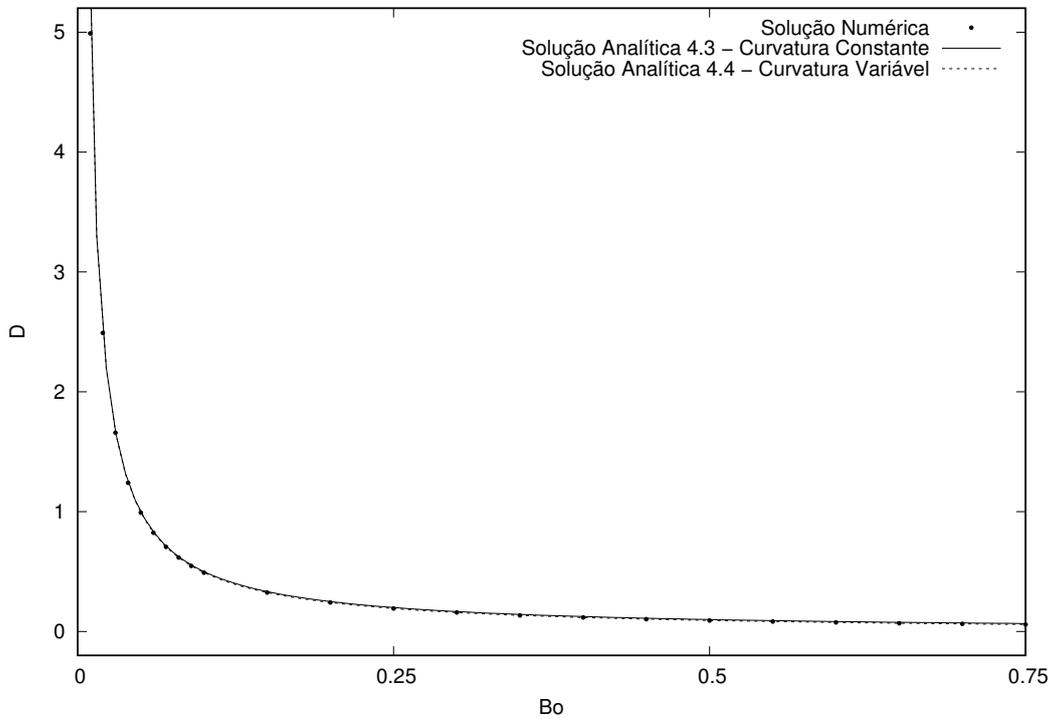


Figura 7.2 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha contínua denota a solução analítica 5.3 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.4. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

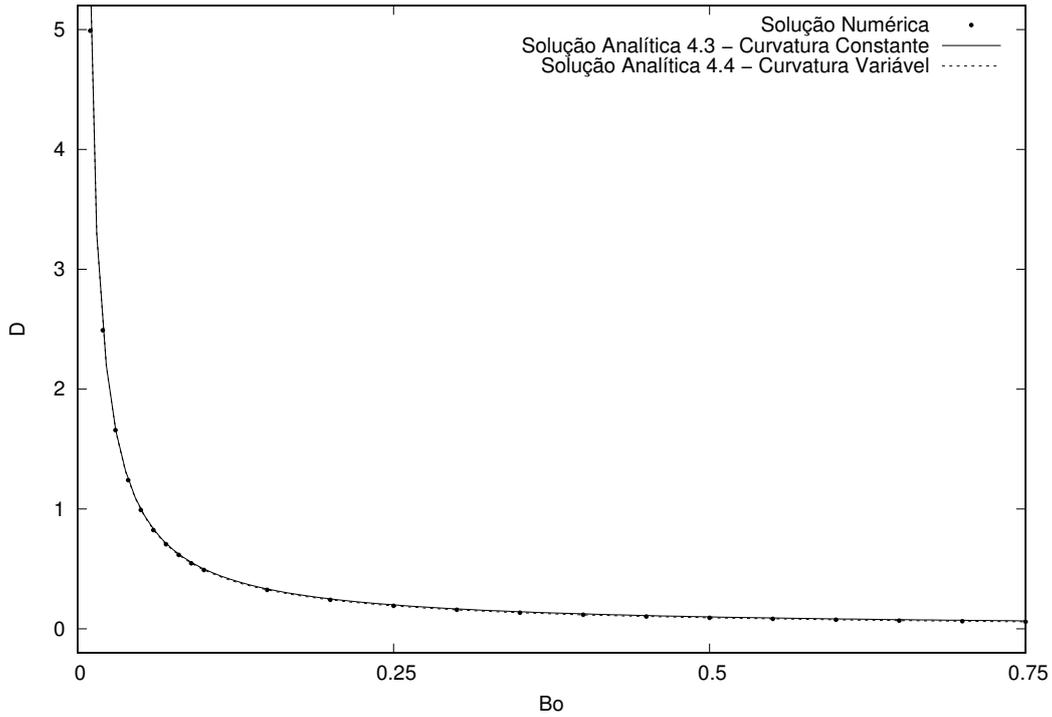


Figura 7.3 – Formato da superfície livre, para o caso não magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos, a linha ponto-traço denota a solução analítica 5.1 e a linha tracejada denota a solução analítica 5.2. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $Bo = 0,1$.

A partir da Fig. (7.1), é possível observar-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos numericamente e os obtidos através das soluções analíticas, para uma faixa de ângulos de contato α próximos a $\pi/2$. A divergência entre o resultado numérico e os analíticos para ângulos de contato distantes de $\pi/2$, se dá devido à não verificação das restrições de aplicação das soluções analíticas 5.3 e 5.4 - Eqs. (5.20) e (5.24), respectivamente -, de que $\cot g(\alpha) \ll 1$.

A Fig. (7.2) apresenta as alturas de equilíbrio em função da variação do número de Bond. Para a faixa de números de Bond avaliada, houve total acordo entre os resultados obtidos numericamente e analiticamente, tanto para curvatura constante quanto para curvatura variável.

A Fig. (7.3) apresenta os formatos obtidos para a interface para o limite assintótico não magnético. Vê-se que os resultados obtidos numericamente estão em excelente conformidade com os obtidos analiticamente, através das soluções analíticas 5.1 e 5.2 - Eqs. (5.9) e (5.15), respectivamente -.

Deste modo, os resultados obtidos numericamente estão validados para o caso limite assintótico não-magnético.

7.1.2 Validação dos resultados obtidos numericamente para a interface formada entre um ferrofluido e um fluido não-magnético

As Figuras (7.4) e (7.5) apresentam os resultados obtidos através da integração numérica da Eq. (3.95), bem como os obtidos através das soluções analíticas apresentadas no capítulo 5, para a altura de deslocamento vertical para o caso mais geral, onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético.

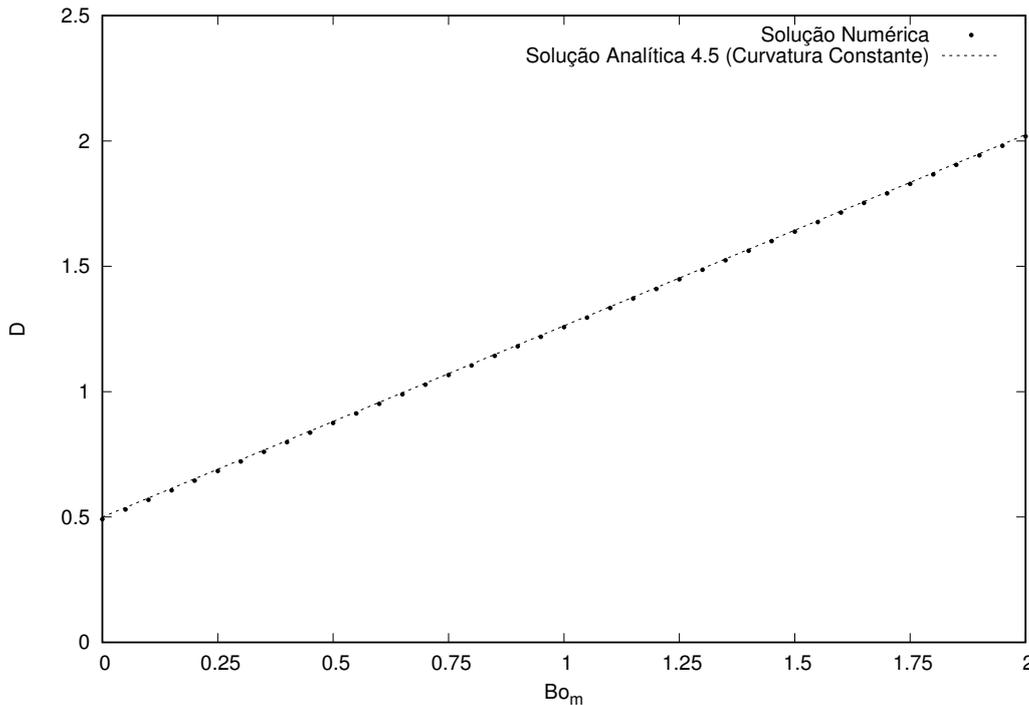


Figura 7.4 – Altura de deslocamento vertical como função do número de Bond magnético. Os círculos pretos denotam os resultados numéricos e a linha tracejada denota a solução analítica 5.5. Para este gráfico: $Bo = 1/10$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 3,0$; $B = 3,0$; $R = -9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

A partir da Fig. (7.4), é possível observar-se uma excelente concordância entre a solução numérica e a solução analítica para curvatura constante 5.5, para toda a faixa de números de Bond magnético avaliada. Sob estas circunstâncias, considerando-se que as pressões capilares são 10 vezes maiores que as pressões hidrostáticas - $Bo = 1/10$ -, para números de Bond magnético pequenos, as pressões capilares são mais importantes que as pressões magnéticas contra as pressões hidrostáticas, portanto, como as pressões capilares são proporcionais à curvatura média, um modelo com curvatura constante vai exibir resultados satisfatórios. Já para números de Bond magnético maiores, as pressões magnéticas tendem a dominar os efeitos capilares contra a gravidade. Vale ressaltar que a única restrição de aplicação da teoria para curvatura constante 4.5 é que $\cotg(\alpha) \ll 1$, o que foi respeitado, uma vez que α é igual a $\pi/2 - 0,05$.

A Figura (7.5) mostra que, quando o ângulo de contato aproxima-se de $\pi/2$, am-

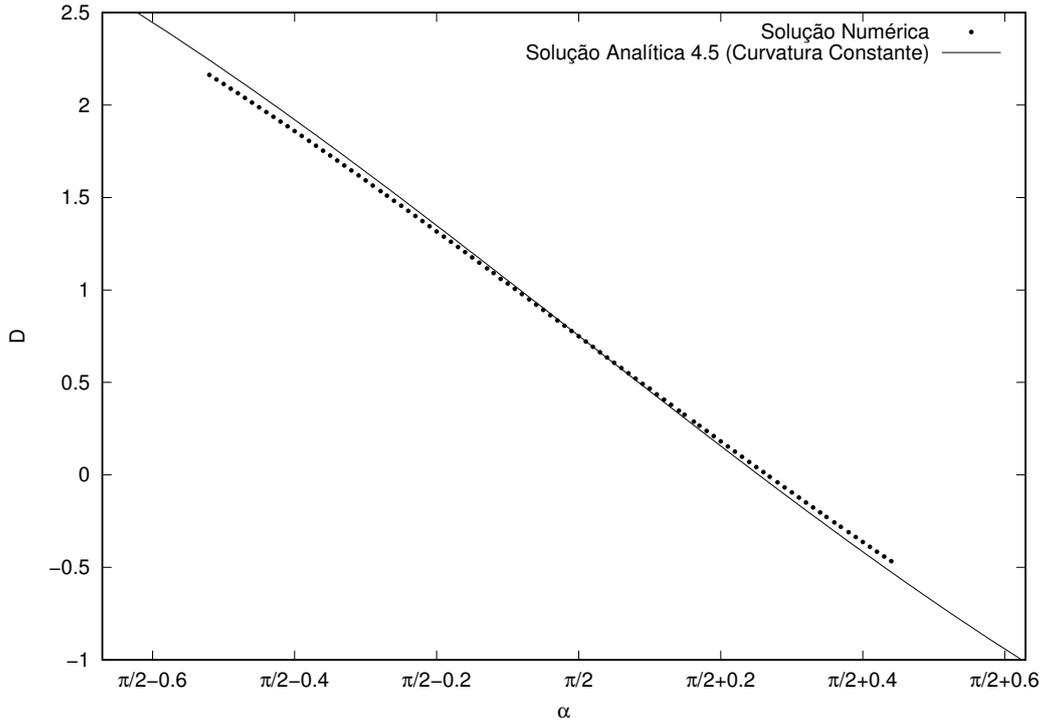


Figura 7.5 – (b) Altura de deslocamento vertical em função do ângulo de contato. Os pontos pretos representam a solução numérica, e a linha tracejada representa a solução analítica 5.5. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$.

bas as soluções numérica e analítica produzem resultados em concordância. Contudo, à medida em que os valores de α tendem a afastar-se de $\pi/2$, os resultados obtidos numericamente e analiticamente divergem, pois a curvatura não pode mais ser definida pela segunda derivada da função $Y(X)$ que rege o formato do menisco, e a mesma não pode ser assumida como constante. A Figura (7.5) também aponta o limite de aplicação da solução analítica 5.5, dada pela Eq. (5.25). Em adição, a Fig. (7.5) mostra a importância da solução numérica para explorar outros regimes onde a solução analítica não é válida.

Sendo assim, a solução analítica 5.5 para curvatura constante mostrou-se muito eficiente na predição das alturas de deslocamento vertical, e possibilitou a validação do código numérico utilizado para o caso onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético.

Deste modo, devido à concordância obtida entre os resultados numéricos e os analíticos, o código numérico utilizado para a resolução da Eq. (3.95) está validado e apto para ser utilizado para explorar regimes onde as soluções analíticas não podem ser devidamente aplicadas.

7.2 RESULTADOS OBTIDOS PARA O LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS

7.2.1 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS PARA O LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS

Esta seção apresenta os resultados obtidos da integração numérica da Eq. (5.14), para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos. Neste caso, a dinâmica de deslocamento vertical de fluido bem como formação da superfície livre é regulada pela interação entre efeitos capilares e hidrostáticos. Deste modo, apenas duas variáveis físicas governam este problema, o número de Bond e o ângulo de contato α , sendo este, uma propriedade física do sistema líquido-sólido-gás em análise e aquele, uma medição da importância relativa entre as pressões hidrostáticas e pressões capilares.

A Tabela (7.1) apresenta os limites de variação destes parâmetros, utilizados nesta análise.

Tabela 7.1 – Faixa de variação das variáveis físicas da análise para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

Variável física	Faixa de variação
Número de Bond	$0,01 \leq Bo \leq 2,00$
Ângulo de contato	$\pi/2 - 0,79 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,79$

7.2.1.1 Análise do efeito da variação do número de Bond no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do número de Bond na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

O número de Bond - Eq.(3.72) - mede a intensidade relativa entre as pressões hidrostáticas e as pressões capilares, sendo função das massas específicas ρ dos fluidos em análise, da aceleração gravitacional g , da tensão interfacial γ e do espaçamento c entre as placas planas verticais paralelas - vide Fig.(3.1) -. Deste modo, existe uma enorme

possibilidade de combinações entre estas variáveis de modo a obter-se o número de Bond, portanto, o autor decidiu por variá-lo numa faixa de $0,01 \leq Bo \leq 2,0$, explorando regimes onde as pressões capilares são dominadas pelas pressões hidrostáticas e vice-versa.

7.2.1.1.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

Como explicitado acima, o número de Bond foi variado numa faixa de $0,01 \leq Bo \leq 2,0$. As Figuras (7.6) e (7.7) apresentam os resultados obtidos para a altura de deslocamento vertical D , calculadas numericamente para esta faixa de valores, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

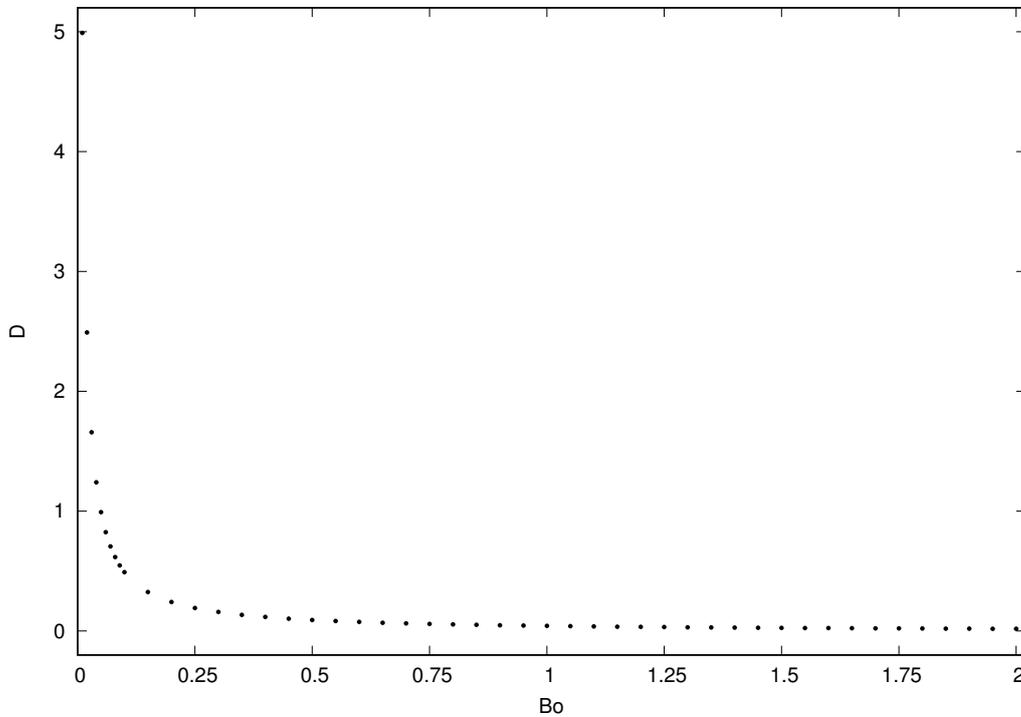


Figura 7.6 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

A partir da Fig. (7.6) verifica-se que a altura de deslocamento vertical D diminui à medida em que aumenta-se o número de Bond. Para um número de Bond $Bo = 0,1$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 0,492$, já para $Bo = 1,0$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 4,25 \times 10^{-2}$. Deste modo, vê-se que um aumento de 10 vezes no número de Bond causou uma diminuição de aproximadamente 11,5 vezes no deslocamento vertical. Sabendo-se que o número de Bond - Eq. (3.72) - é uma medição da importância relativa entre as pressões hidrostáticas e capilares, sendo estas associadas à tensão superficial e à curvatura média, responsáveis pela ascensão de fluido e por vencer o efeito produzido por aquelas, associadas à ação gravitacional, um aumento no número de Bond significa

um aumento nas pressões hidrostáticas, inibidoras da ascensão capilar, assim é natural que um aumento no número de Bond resulte em uma diminuição nas alturas de deslocamento vertical D . Na prática, este aumento é conseguido por um maior distanciamento entre as placas paralelas (2c), o que acarreta em condições onde os efeitos capilares são insignificantes ou mesmo inexistentes, o que justifica as alturas de deslocamento vertical praticamente nulas, obtidas nestas condições.

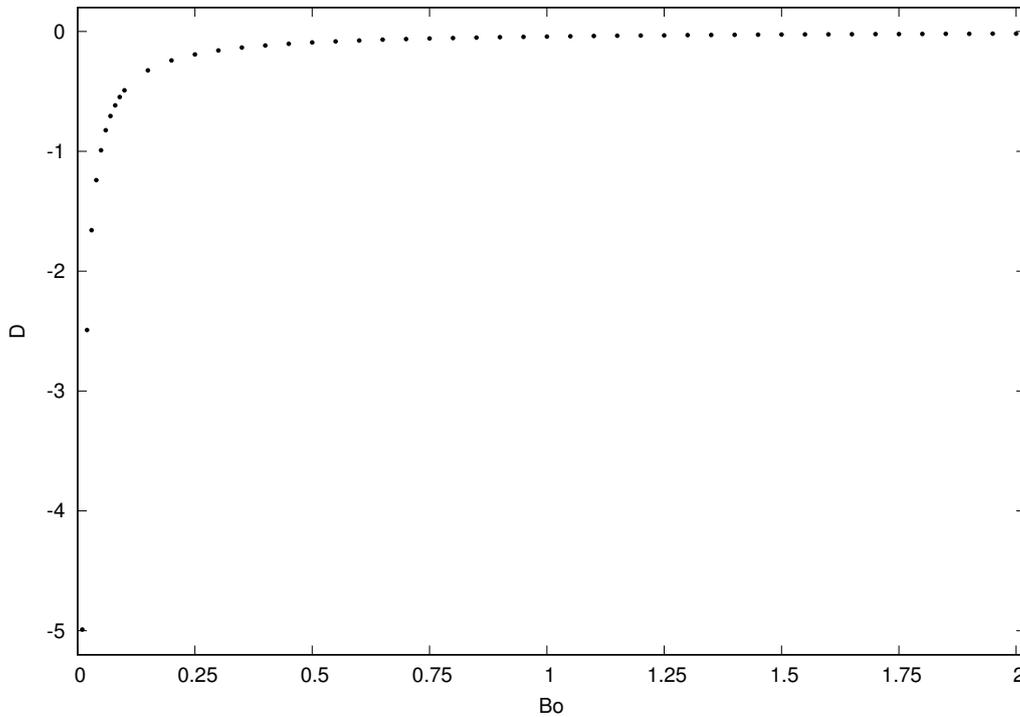


Figura 7.7 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 + 0,05$.

A Figura. (7.7), apresenta alturas de deslocamento vertical para quando o sistema líquido-sólido-gás em análise possui ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. As alturas de deslocamento vertical obtidas foram todas negativas, indicando involução de fluido dentro dos capilares, em oposição à ascensão observada para ângulos de contato $\alpha < \pi/2$ - Fig. (7.6) -. Neste caso, o aumento do número de Bond tende a inibir a involução do fluido.

7.2.1.1.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

As Figuras (7.8) e (7.9) apresentam formatos de superfície livre em função da variação do número de Bond, calculadas numericamente, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

As Figuras (7.8) e (7.9) mostram que a variação do número de Bond resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se que todas as curvas obtidas são

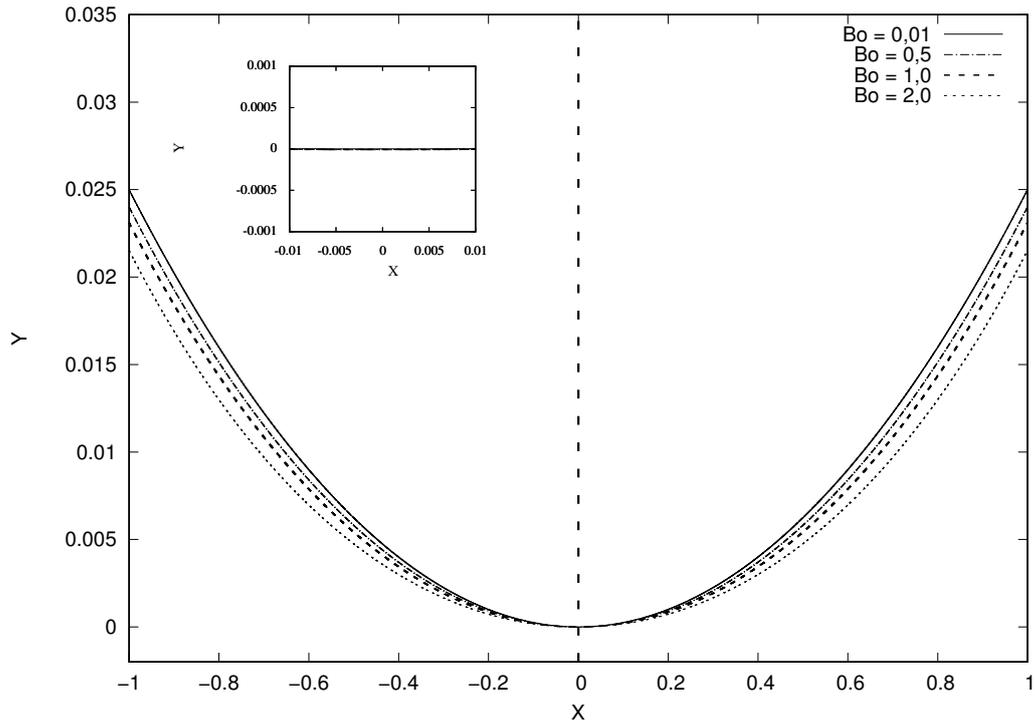


Figura 7.8 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

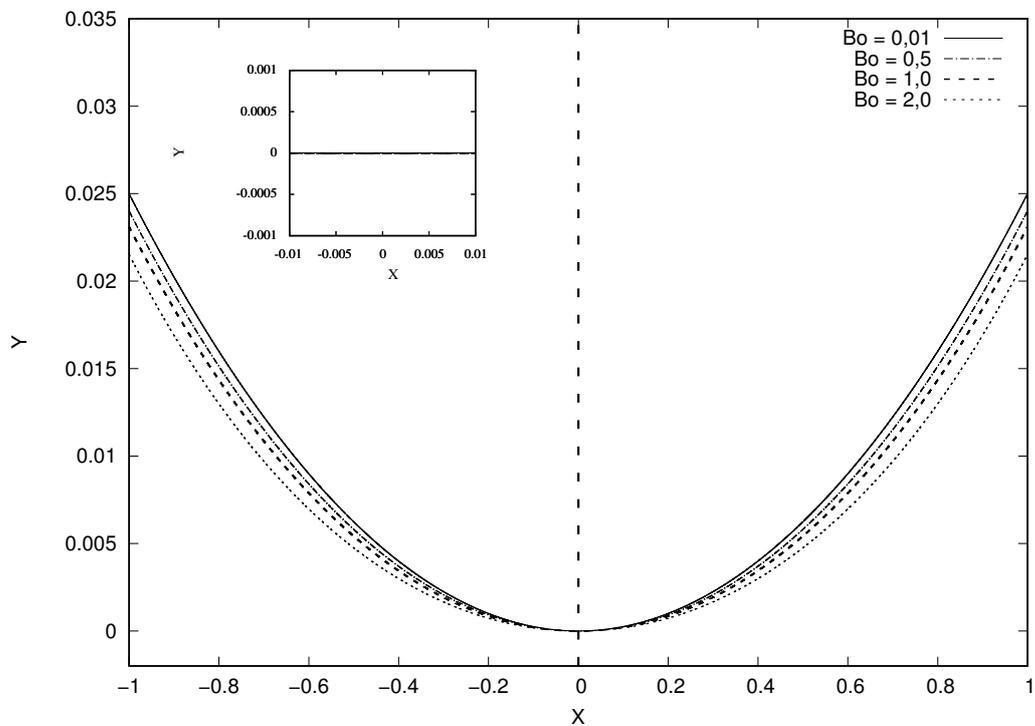


Figura 7.9 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função da variação do número de Bond, para o caso não magnético. Para este gráfico: $\alpha = \pi/2 + 0,05$.

simétricas em relação ao eixo Y. Para admitir-se uma simetria vertical deve-se afirmar que $Y'(0) = 0$, como discutido ao final do capítulo 5, o que é válido nestes casos, como mostrado pelo detalhe da figura (7.8).

A Figura (7.8) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Vê-se que para condições onde as pressões capilares dominam as hidrostáticas - baixos números de Bo -, as porções laterais dos meniscos formados ascenderam mais que para os casos onde as pressões hidrostáticas dominam as capilares - altos números de Bond -.

A Figura (7.9) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos obtidos para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$ - Fig. (7.8) -.

7.2.1.2 Análise do efeito da variação do ângulo de contato α no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do ângulo de contato α na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

O ângulo de contato é uma propriedade física do sistema líquido-sólido-gás em análise, variando à medida em que uma destas partes é modificada. Diante da impossibilidade de encontrar-se uma faixa de variação precisa deste parâmetro, o autor decidiu por variá-lo numa faixa arbitrária, de $\pi/2 - 0,79 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,79$, cobrindo ângulos tanto maiores quanto menores que $\pi/2$.

7.2.1.2.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α , para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

Como explicitado acima, o ângulo de contato foi variado numa faixa de $\pi/2 - 0,79 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,79$. A Figura (7.10) apresenta os valores para a altura de deslocamento vertical D calculadas numericamente para esta faixa de valores.

Verifica-se a partir da Fig. (7.10) que, à medida em que o ângulo de contato α aumenta ($\pi/2 - 0,79 \rightarrow \pi/2 + 0,79$), as alturas de deslocamento vertical diminuem, até que não haja mais ascensão de fluido ($D > 0$), e sim involução ($D < 0$). Esta mudança ocorre no ângulo $\alpha = \pi/2$. Portanto, conclui-se que para o caso não-magnético, em sistemas líquido-sólido-gás com ângulo de contato $\alpha < \pi/2$, há ascensão de fluido, já para sistemas com $\alpha > \pi/2$, há involução de fluido. Um comportamento interessante foi observado. Para

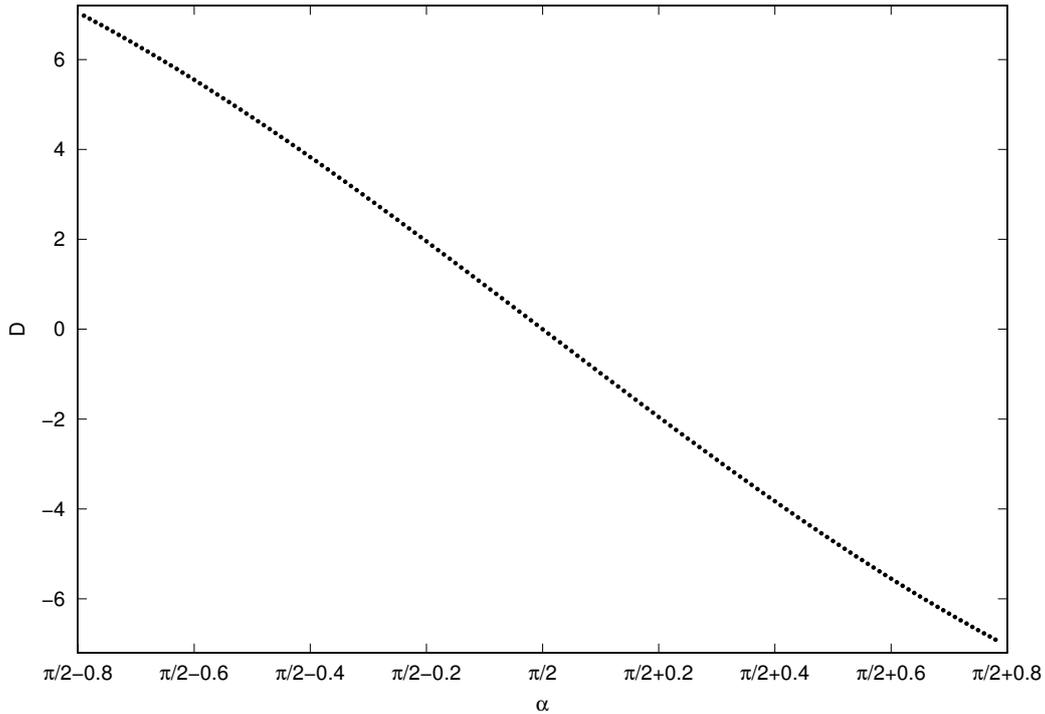


Figura 7.10 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$.

ângulos de contato “simétricos” (e.x. $\pi/2 - 0,05$ e $\pi/2 + 0,05$), as alturas de deslocamento vertical obtidas foram também simétricas, (e.x. $D = 0,4915$ e $D = -0,4916$). A altura de deslocamento vertical obtida para ângulo $\alpha = \pi/2$ foi nula, uma vez que nestas condições, a curvatura média é nula, e por conseguinte não há salto de pressões na interface.

7.2.1.2.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α , para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos

As Figuras (7.11) e (7.12) apresentam formatos de superfície livre em função da variação do ângulo de contato α , calculadas numericamente, para o limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos.

As Figuras (7.11) e (7.12) mostram que a variação do número do ângulo de contato resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se que todas as curvas obtidas são simétricas em relação ao eixo Y. Para admitir-se uma simetria vertical deve-se afirmar que $Y'(0) = 0$, como discutido ao final do capítulo 5, o que é válido nestes casos, como mostrado pelo detalhe da figura (7.11).

A Figura (7.11) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para ângulos de contato α menores $\pi/2$. Vê-se que para ângulos de contato cada vez mais distantes de $\alpha = \pi/2$, as porções laterais dos meniscos ascendem mais, o que faz sentido físico, uma vez que no limite onde $\alpha = \pi/2$, a curvatura da superfície livre é nula, e

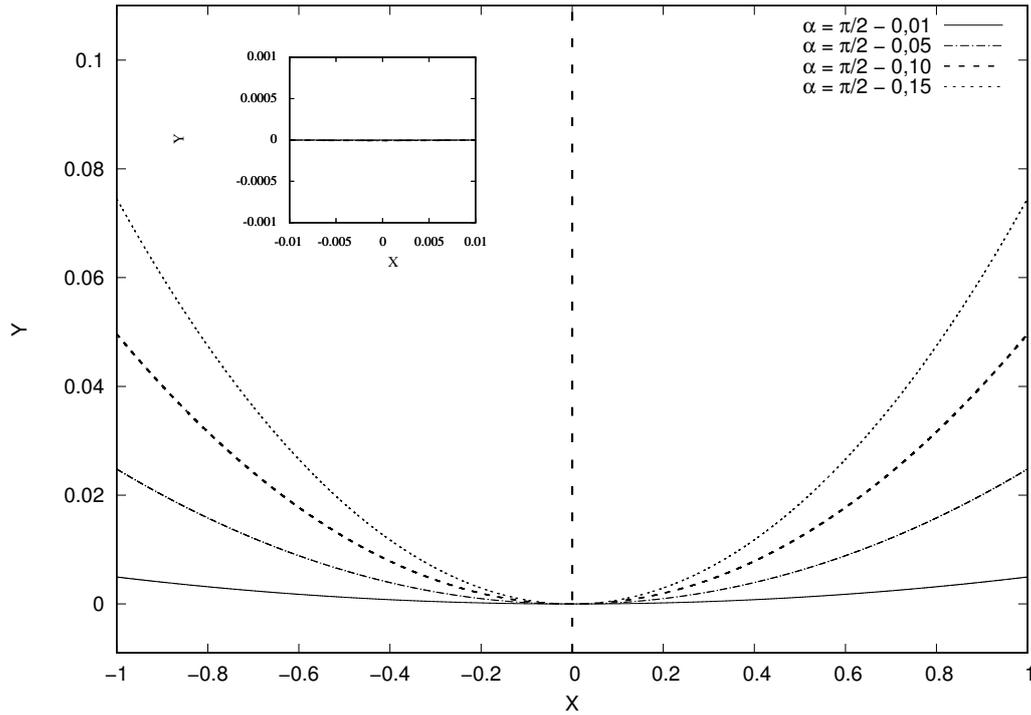


Figura 7.11 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$ e $\alpha < \pi/2$.

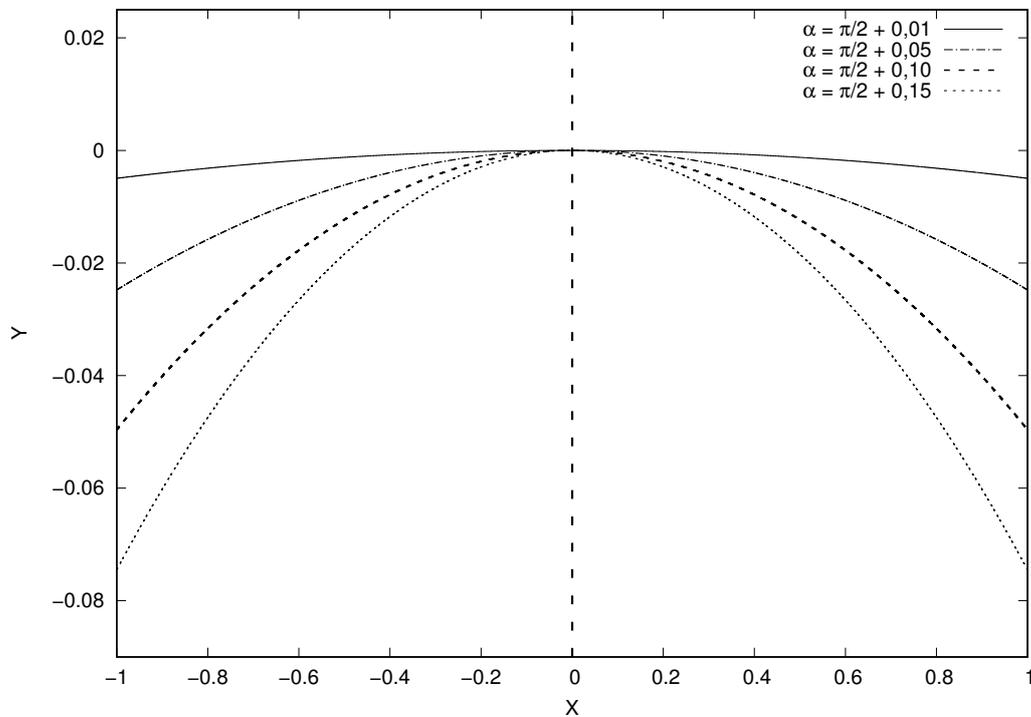


Figura 7.12 – Formatos de superfície livre obtidos numericamente em função do ângulo de contato α , para o caso não magnético. Para este gráfico: $Bo = 1/10$ e $\alpha > \pi/2$.

a superfície livre formada é plana. Para ângulos de contato cada vez mais distantes de $\pi/2$, observa-se um aumento na curvatura, que está intrinsicamente associada às pressões capilares, responsáveis por vencer os efeitos gravitacionais causados pelas pressões hidrostáticas, portanto, nestes casos, uma maior altura de deslocamento vertical foi também observada, devido à presença de efeitos capilares mais intensos.

A Figura (7.12) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para ângulos de contato α maiores que $\pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos obtidos para ângulos de contato α menores que $\pi/2$ - Fig. (7.11) -.

7.2.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS PARA O LIMITE ASSINTÓTICO ONDE AMBOS OS FLUIDOS SÃO CONSIDERADOS NÃO-MAGNÉTICOS

Antes da apresentação dos resultados experimentais, alguns comentários acerca da realização do experimento serão feitos.

Os três fluidos apresentaram uma dinâmica de deslocamento de fluido distinta, com velocidades de ascensão bem diferentes. Para a água destilada, a ascensão capilar era quase instantânea, não havendo um tempo significativo de subida de fluido. Para a glicerina, 18 horas foram necessárias para que nenhuma mudança na altura de fluido deslocada fosse perceptível, já para a vaselina, foram necessárias 24 horas. Os tubos com menor diâmetro interno apresentaram uma dinâmica de deslocamento de fluido mais lenta.

O Laboratório de Mecânica dos Fluidos (Grupo Vortex – Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos) dispunha de tubos capilares com 10 distintos diâmetros internos, $1000 \pm 50\mu\text{m}$, $500 \pm 20\mu\text{m}$, $300 \pm 10\mu\text{m}$, $150 \pm 5\mu\text{m}$, $100 \pm 5\mu\text{m}$, $50 \pm 2\mu\text{m}$, $30 \pm 2\mu\text{m}$, $20 \pm 2\mu\text{m}$, $10 \pm 2\mu\text{m}$ e $5 \pm 2\mu\text{m}$, contudo, apenas 5 foram utilizados neste experimento, $1000 \pm 50\mu\text{m}$, $500 \pm 20\mu\text{m}$, $300 \pm 10\mu\text{m}$, $150 \pm 5\mu\text{m}$ e $100 \pm 5\mu\text{m}$, devido à dificuldade na visualização das alturas de deslocamento.

Foram realizadas 12 medidas de alturas de deslocamento para cada um dos tubos capilares. O maior e o menor valor obtidos foram descartados para o cálculo de uma média.

Sendo a massa específica e a tensão superficial funções da temperatura, as medições realizadas neste experimento foram feitas em um ambiente cuja temperatura era de 25°C .

Após estes breves comentários, segue a apresentação e discussão dos resultados obtidos.

7.2.2.1 Resultados obtidos para as massas específicas e para as tensões superficiais dos fluidos em análise

A caracterização física dos fluidos em estudo é de extrema importância para o trabalho em progresso, uma vez que a massa específica e a tensão superficial são fatores determinantes no cálculo de ângulos de contato, como mostrado pela Eq. (4.24).

A Tabela (7.2) apresenta os valores de massa específica medidos no densímetro DMA 38, da marca *Anto Paar*, bem como os valores de tensão superficial, medidos pelo tensiômetro LAUDA TVT 2, do Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília, tomadas em uma temperatura de 25°C.

Verifica-se a partir da Tab. (7.2) que a água destilada é o fluido com maior tensão superficial entre os fluidos estudados, e a glicerina é o fluido com maior massa específica.

Tabela 7.2 – Massa específica e tensão superficial dos fluidos em análise, tomadas pelo densímetro DMA 38, da marca *Anto Paar* e pelo tensiômetro LAUDA TVT 2, respectivamente, em uma temperatura de 25°C.

Fluido	Massa específica [Kg/m ³]	Tensão Superficial [N/m]
Água Destilada	997 ± 1	0,07088 ± 0,00010
Glicerina	1258 ± 1	0,06272 ± 0,00024
Vaselina	866 ± 1	0,02648 ± 0,00044

7.2.2.2 Resultados obtidos para a altura de deslocamento vertical de fluido Newtonianos em tubos capilares

Foram realizadas 12 medidas de alturas de equilíbrio para cada um dos tubos capilares, de acordo com o descrito na seção Metodologia. O maior e o menor valor medido foram descartados e, em seguida, uma média aritmética foi calculada bem como um desvio padrão médio.

Tomando-se em consideração que as alturas foram medidas segundo comparação com uma régua convencional, acresceu-se à cada medida uma incerteza de ± 0,5mm, sendo este valor a metade da resolução da régua.

Esta incerteza foi então acrescida ao valor calculado do desvio padrão médio, chegando-se então ao valor final da incerteza da medição das alturas de equilíbrio.

A Tabela (7.3) apresenta os valores medidos para cada fluido, em cada um dos tubos capilares com diâmetros internos distintos.

Tabela 7.3 – Alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, bem como a média e o desvio padrão médio destas medidas. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.

Diâmetro [μm]	Altura deslocada												Média [mm]	Desvio Padrão [mm]
	[mm]													
1000	3,43	3,56	3,48	3,43	3,56	3,52	3,48	3,56	3,48	3,43	3,39	3,61	3,49	0,05
500	11,96	11,96	12,07	11,92	12,03	11,96	11,96	11,99	11,96	11,96	12,11	11,99	11,97	0,03
300	21,20	21,26	21,37	21,31	21,26	21,31	21,26	21,37	21,20	21,31	21,49	21,14	21,29	0,05
150	58,59	58,89	59,04	59,04	58,45	58,74	58,73	58,58	59,04	58,88	59,18	58,45	58,80	0,18
100	83,46	83,13	83,29	83,30	83,12	83,13	83,63	83,12	83,30	83,47	83,64	82,60	83,29	0,14

(a)

Diâmetro [μm]	Altura deslocada												Média [mm]	Desvio Padrão [mm]
	[mm]													
1000	2,61	2,53	2,61	2,69	2,78	2,57	2,82	2,61	2,65	2,74	2,49	2,94	2,67	0,10
500	7,02	6,96	7,07	7,13	7,07	7,07	7,13	7,07	6,91	7,02	7,13	6,91	7,04	0,07
300	19,53	19,53	19,59	19,53	19,59	19,41	19,41	19,59	19,41	19,53	19,70	19,35	19,51	0,08
150	40,87	41,07	40,97	40,78	40,87	40,78	40,97	40,87	40,68	40,78	40,58	41,07	40,86	0,12
100	68,13	68,14	68,23	68,43	68,23	68,42	68,22	68,03	68,13	68,43	68,54	67,64	68,21	0,17

(b)

Diâmetro [μm]	Altura deslocada												Média [mm]	Desvio Padrão [mm]
	[mm]													
1000	8,03	8,08	8,17	8,08	8,22	8,37	8,27	8,27	8,27	8,22	8,41	7,98	8,20	0,11
500	19,60	19,55	19,55	19,60	19,38	19,60	19,49	19,55	19,55	19,49	19,60	19,32	19,52	0,07
300	25,55	25,62	25,34	25,48	25,62	25,62	25,62	25,55	25,55	25,41	25,34	25,62	25,53	0,09
150	76,82	76,94	76,71	76,59	76,95	76,47	76,71	76,59	76,48	76,83	77,07	76,47	76,72	0,17

(c)

A partir da Tab. (7.3), é possível verificar-se um aumento na altura de deslocamento vertical de fluido à medida em que o diâmetro do tubo capilar é diminuído, resultado este em acordo com a Eq. (4.20), uma vez que a altura de ascensão é inversa-

mente proporcional ao valor do raio do tubo capilar. Sabendo-se que o número de Bond - Eq. (3.72) - é uma medição da importância relativa entre as pressões hidrostáticas e capilares, sendo estas associadas à tensão superficial e à curvatura média, responsáveis pela ascensão de fluido e por vencer o efeito produzido por aquelas, associadas à ação gravitacional, um aumento no número de Bond significa um aumento nas pressões hidrostáticas, inibidoras da ascensão capilar, assim é natural que um aumento no número de Bond resulte em uma diminuição nas alturas de deslocamento vertical D . Na prática, este aumento é conseguido por um aumento no diâmetro dos capilares, o que acarreta em condições onde os efeitos capilares são insignificantes ou mesmo inexistentes, o que justifica as alturas de deslocamento vertical menores, obtidas nestas condições.

As médias das alturas medidas bem como seus respectivos desvios padrões são dispostos na Tab.(7.4).

Tabela 7.4 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.

Diâmetro tubos [μm]	1000	500	300	150	100
Altura [mm]	$3,49 \pm 0,55$	$11,97 \pm 0,53$	$21,29 \pm 0,56$	$58,80 \pm 0,68$	$83,29 \pm 0,64$

(a)

Diâmetro tubos [μm]	1000	500	300	150	100
Altura [mm]	$2,67 \pm 0,60$	$7,04 \pm 0,57$	$19,51 \pm 0,58$	$40,86 \pm 0,62$	$68,21 \pm 0,67$

(b)

Diâmetro tubos [μm]	1000	500	300	150
Altura [mm]	$8,20 \pm 0,61$	$19,52 \pm 0,57$	$25,53 \pm 0,59$	$76,72 \pm 0,67$

(c)

Os valores apresentados na Tab.(7.4) são apresentados graficamente nas Figs.(7.13), (7.14) e (7.15).

Verifica-se a partir das Figs. (7.13), (7.14) e (7.15), que a altura de deslocamento possui uma dependência hiperbólica com o raio dos tubos capilares. Tal resultado era esperado, visto que, segundo a Eq. (7.20), $d \sim b^{-1}$.

As Figuras (7.13), (7.14) e (7.15) também apresentam uma curva de ajuste para os dados, do tipo $f(b) = C/b$, onde C é uma constante fixa, representando o quociente do dobro da tensão superficial pelo produto da massa específica, do raio do tubo capilar

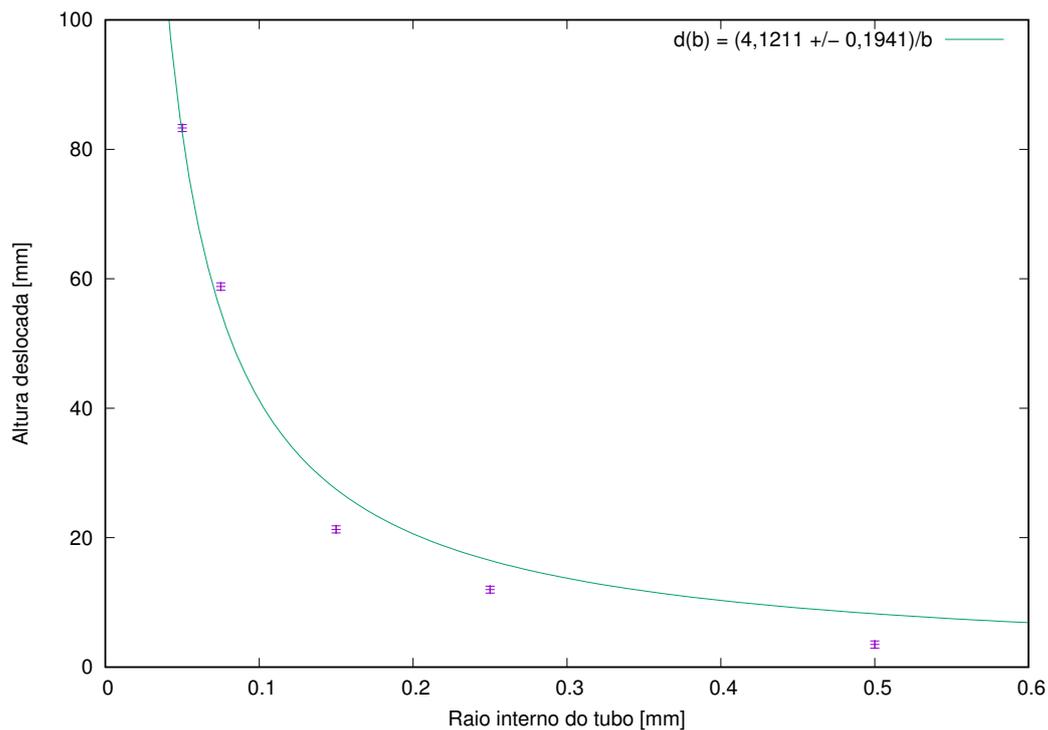


Figura 7.13 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a água destilada.

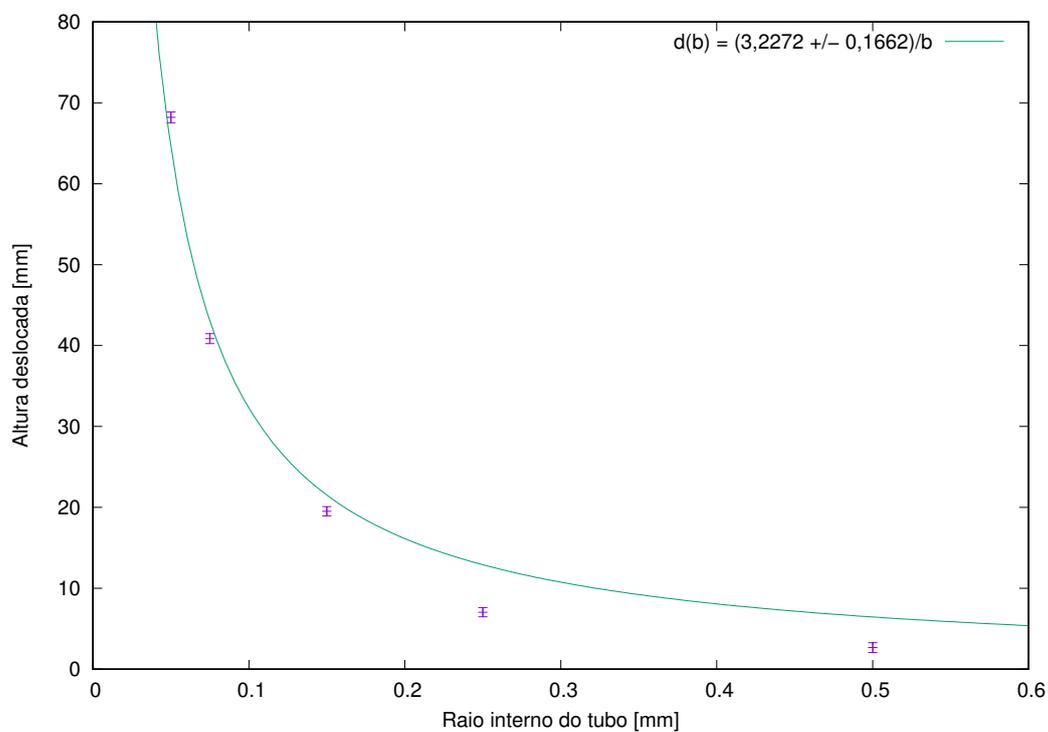


Figura 7.14 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a glicerina.

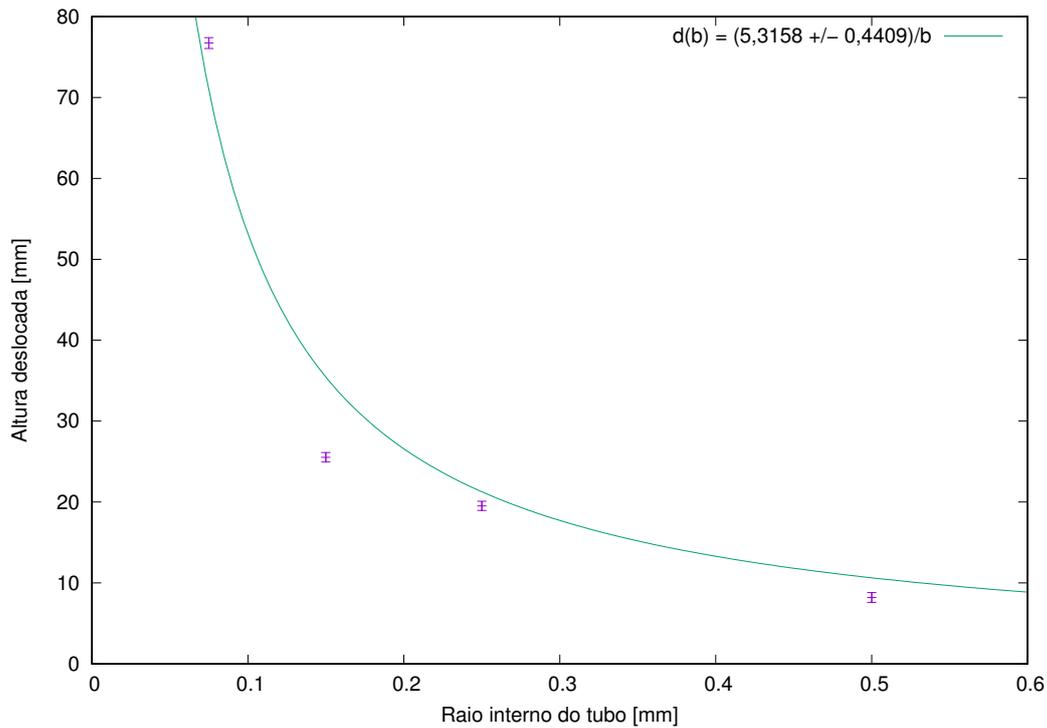


Figura 7.15 – Médias das alturas de deslocamento vertical em função do diâmetro interno de tubo capilar, para a vaselina.

e da aceleração gravitacional e b é o raio do tubo capilar.

Para a Figura (7.13) - água destilada -, a curva de ajuste é igual a $d(b) = (4,1211 \pm 0,1941)/b$, para a Fig. (7.14) - glicerina -, a curva de ajuste é igual a $d(b) = (3,2272 \pm 0,1662)/b$ e para a Fig. (7.15) - vaselina -, a curva de ajuste é igual a $d(b) = (5,3158 \pm 0,4409)/b$.

De modo geral, as alturas medidas estiveram muito próximas das curvas de ajuste. A discrepância de alguns pontos deve-se, provavelmente, a alguma impureza deixada pela má limpeza do tubo capilar entre experimentos, impedindo que o fluido ascendesse adequadamente.

7.2.2.3 Ângulos de contato

Uma vez que a massa específica, a tensão superficial e as alturas de equilíbrio foram determinadas, é possível calcular-se o ângulo de contato formado para cada fluido em cada um dos tubos capilares, utilizando-se para tanto a Eq. (4.24).

Segundo (CENGEL; CIMBALA, 2015), o ângulo de contato quantifica a força do efeito capilar, e é, portanto, de extrema importância que se saiba o valor do ângulo de contato.

Utilizando-se os dados medidos experimentalmente e substituindo-os na Eq. (4.24), encontra-se os ângulos de contato apresentados na Tab. (7.5). Para a realização deste cálculo, utilizou-se as fórmulas de propagação de erros apresentadas pelas Eqs. (4.26) e

(4.27).

Tabela 7.5 – Ângulos de contato para cada fluido em análise em função do diâmetro do tubo capilar.

Ângulos de contato [Graus]					
Diâmetro do tubo capilar [μm]	1000	500	300	150	100
Água Destilada	$83,1 \pm 1,3$	$78,1 \pm 1,1$	$77,3 \pm 0,9$	$72,3 \pm 1,2$	$73,4 \pm 1,6$
Glicerina	$82,5 \pm 1,8$	$80,1 \pm 0,9$	$73,3 \pm 0,6$	$72,5 \pm 0,3$	$70,5 \pm 0,3$
Vaselina	$49,1 \pm 4,7$	$38,7 \pm 2,2$	$52,3 \pm 1,1$	$23,1 \pm 0,8$	X

Através da Tab. (7.5), é possível verificar-se que todos os ângulos estão presentes no intervalo $[0 ; \pi/2]$. Para esta faixa de ângulos, ocorre ascensão de fluido no tubo capilar, como foi observado no experimento.

Verifica-se também que tanto para a água destilada, quanto para a glicerina, no tubo capilar com $1000 \pm 50\mu\text{m}$ de diâmetro interno, os ângulos de contato são muito próximos a $\pi/2$, ou seja, suas superfícies livres são quase planas. O resultado está de acordo com as alturas de equilíbrio, uma vez que as mesmas foram muito pequenas. Para o caso limite onde o ângulo de contato é igual a $\pi/2$, não há ascensão de fluido.

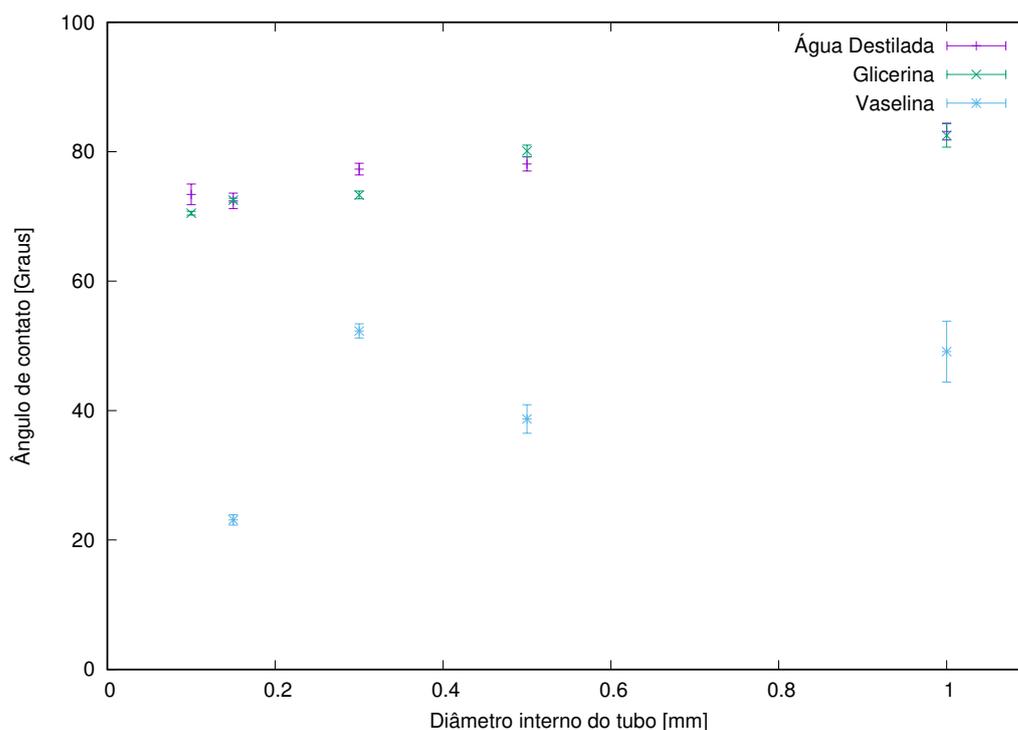


Figura 7.16 – Ângulos de contato em função do diâmetro do tubo capilar, para todos os fluidos estudados.

7.2.2.4 Comparação entre resultados teóricos, experimentais e numéricos

Esta seção dedica-se à comparação entre os resultados obtidos experimentalmente, com os obtidos a partir das soluções analíticas apresentadas no capítulo 5 (Soluções Analíticas) e os obtidos numericamente.

Para fazer tal comparação, é necessário que o número de Bond seja calculado para cada fluido em cada diâmetro, utilizando-se a Eq. (3.72). A Tabela (7.6) apresenta os números de Bond calculados para cada um dos casos.

Tabela 7.6 – Números de Bond calculados para cada um dos fluidos em cada um dos diferentes tubos capilares.

Número de Bond					
Diâmetro tubos [μm]	1000	500	300	150	100
Água Destilada	0,03435059	0,00858765	0,00309155	0,00077289	0,00034351
Glicerina	0,04899418	0,01224855	0,00440948	0,00110237	0,00048994
Vaselina	0,07985178	0,01996294	0,00718666	0,0017967	X

De maneira a fazer-se uma comparação correta, é necessário que as alturas medidas experimentalmente sejam adimensionalizadas. Para tanto, dividiu-se cada altura medida pelo raio do tubo capilar correspondente. A Tabela (7.7) apresenta as alturas medidas adimensionais.

Tabela 7.7 – Alturas adimensionais para cada um dos fluidos nos diferentes tubos capilares.

Alturas Adimensionais					
Diâmetro tubos [μm]	1000	500	300	150	100
Água Destilada	$6,99 \pm 1,30$	$47,89 \pm 4,39$	$141,90 \pm 10,15$	$783,98 \pm 53,05$	$1665,88 \pm 167,07$
Glicerina	$5,34 \pm 1,32$	$28,16 \pm 3,19$	$130,08 \pm 9,49$	$544,74 \pm 37,23$	$1364,26 \pm 137,08$
Vaselina	$16,39 \pm 2,04$	$78,09 \pm 6,65$	$170,17 \pm 12,00$	$1022,94 \pm 68,78$	X

É necessário ressaltar-se que, segundo a Eq. (4.25), as alturas calculadas para as placas paralelas são iguais à metade do valor das calculadas para o tubo capilar. Portanto, as alturas adimensionais calculadas numericamente, bem como as calculadas

pelas soluções analíticas, utilizando-se as Eqs. (5.21) e (5.25) foram multiplicadas por um fator igual a 2, de modo a fazer-se uma comparação equivalente.

A Tabela (7.8) apresenta as alturas adimensionais medidas experimentalmente, as calculadas numericamente, bem como as calculadas pelas soluções analíticas, utilizando-se as Eqs. (5.20) e (5.24), para os fluidos em análise nos diferentes tubos capilares. As alturas calculadas para as placas paralelas foram multiplicadas por um fator igual a 2, como explicado no parágrafo acima.

A partir da Tab. (7.8)-(a) verifica-se que houve de maneira geral uma excelente concordância entre o resultado experimental e os resultados analíticos e numérico. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura constante, D_c , foi de aproximadamente 2,44%, para o tubo capilar com 300 μm de diâmetro. Para os demais tubos, o erro percentual foi de 0,00%. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura variável, D_0 , foi de aproximadamente 4,92%, para o tubo capilar com 150 μm de diâmetro. Para os tubos com 1000 μm , 500 μm , 300 μm e 100 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 0,15%, 2,04%, 0,00% e 4,36%, respectivamente. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução numérica foi de aproximadamente 0,57%, para o tubo capilar com 1000 μm de diâmetro. Para os tubos com 500 μm , 300 μm , 150 μm e 100 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 0,14%, 0,05%, 0,01% e 0,00%, respectivamente.

A partir da Tab. (7.8)-(b) vê-se que houve de maneira geral uma excelente concordância entre o resultado experimental e os resultados analíticos e numérico. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura constante, D_c , foi de aproximadamente 4,31%, para o tubo capilar com 300 μm de diâmetro. Para os tubos com 1000 μm , 500 μm , 150 μm e 100 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 0,00%, 1,31%, 0,00% e 0,00%, respectivamente. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura variável, D_0 , foi de aproximadamente 6,09%, para o tubo capilar com 100 μm de diâmetro. Para os tubos com 1000 μm , 500 μm , 300 μm e 150 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 0,05%, 0,00%, 0,00% e 4,82%, respectivamente. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução numérica foi de aproximadamente 0,81%, para o tubo capilar com 1000 μm de diâmetro. Para os tubos com 500 μm , 300 μm , 150 μm e 100 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 0,20%, 0,07%, 0,02% e 0,01%, respectivamente.

A partir da Tab. (7.8)-(c) observa-se que houve de maneira geral uma excelente concordância entre o resultado experimental e os resultados analíticos e numérico. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura constante, D_c , foi de aproximadamente 0,00% para todos os tubos capilares testados. A diferença máxima entre o resultado experimental e a solução analítica para curvatura variável, D_0 , foi de aproximadamente 153,47%, para o tubo capilar com 150 μm de diâmetro. Para os tubos com 1000 μm , 500 μm e 300 μm , o erro percentual foi de aproximadamente 30,53%, 59,09% e 26,23%, respectivamente. A

Tabela 7.8 – Comparação entre alturas adimensionais. (a) Água destilada; (b) Glicerina; (c) Vaselina.

Alturas Adimensionais				
Diâmetro tubo [μm]	D_c (Curvatura Constante)	D_0 (Curvatura Variável)	$D_{\text{Numérico}}$	$D_{\text{Experimental}}$
1000	6,99	7,00	6,95	$6,99 \pm 1,30$
500	47,89	48,87	47,83	$47,89 \pm 4,39$
300	145,37	141,90	141,83	$141,90 \pm 10,15$
150	783,98	822,53	783,89	$783,98 \pm 53,05$
100	1665,88	1738,46	1665,81	$1665,88 \pm 167,07$

(a)

Alturas Adimensionais				
Diâmetro tubo [μm]	D_c (Curvatura Constante)	D_0 (Curvatura Variável)	$D_{\text{Numérico}}$	$D_{\text{Experimental}}$
1000	5,34	5,34	5,30	$5,34 \pm 1,32$
500	28,53	28,16	28,10	$28,16 \pm 3,19$
300	135,68	130,08	129,99	$130,08 \pm 9,49$
150	544,74	570,99	544,65	$544,74 \pm 37,23$
100	1364,26	1447,37	1364,17	$1364,26 \pm 137,08$

(b)

Alturas Adimensionais				
Diâmetro tubo [μm]	D_c (Curvatura Constante)	D_0 (Curvatura Variável)	$D_{\text{Numérico}}$	$D_{\text{Experimental}}$
1000	16,39	21,40	16,16	$16,39 \pm 2,04$
500	78,09	124,23	77,80	$78,09 \pm 6,65$
300	170,17	214,80	169,95	$170,17 \pm 12,00$
150	1022,94	2592,89	1022,59	$1022,94 \pm 68,78$

(c)

diferença máxima entre o resultado experimental e a solução numérica foi de aproximadamente 1,41%, para o tubo capilar com $1000\mu\text{m}$ de diâmetro. Para os tubos com $500\mu\text{m}$, $300\mu\text{m}$ e $150\mu\text{m}$, o erro percentual foi de aproximadamente 0,37%, 0,13% e 0,03%, respectivamente. A maior diferença entre o resultado numérico e o resultado experimental foi de apenas 1,41%. A solução analítica para curvatura constante mostrou-se extremamente satisfatória, pois não apresentou diferenças com os resultados experimentais, já a solução analítica para curvatura variável apresentou uma diferença máxima de 153,47%.

Os resultados apresentados na Tab. (7.8) são apresentados nas Figs. (7.17), (7.18) e (7.19).

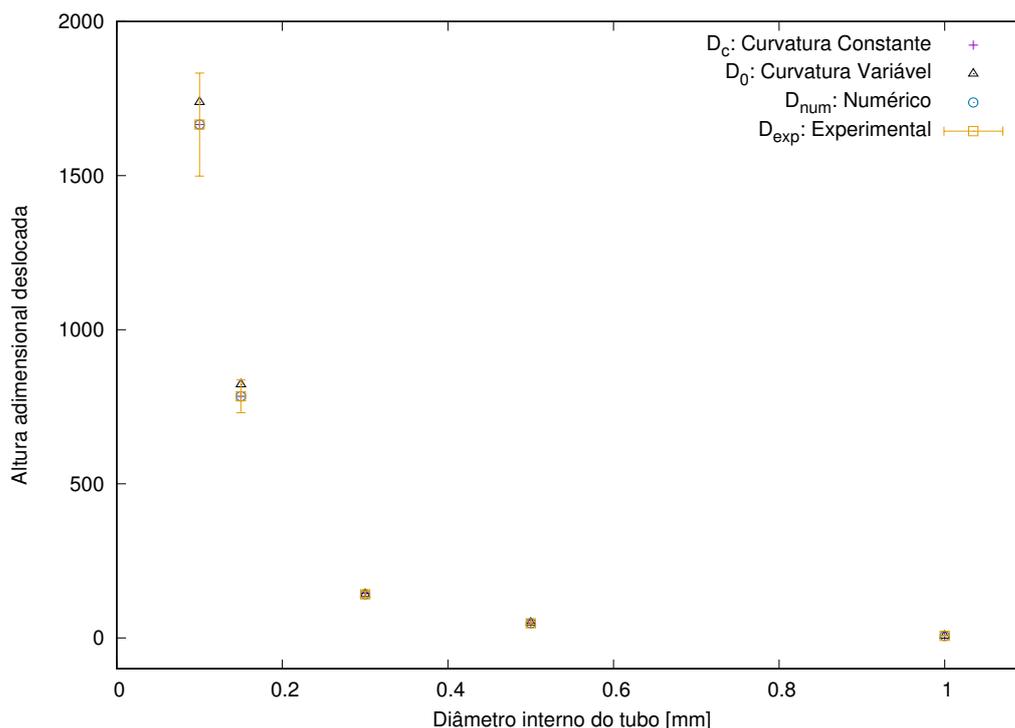


Figura 7.17 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a água destilada.

A partir da Fig. (7.17), evidencia-se que os resultados experimentais obtidos foram extremamente satisfatórios, uma vez que as amplitudes (representadas pelas barras verticais) das incertezas das medições experimentais cobriram a faixa de valores encontrados numericamente e analiticamente para cada um dos distintos diâmetros internos dos tubos. A maior diferença entre o resultado numérico e o resultado experimental foi de apenas 0,57%. A solução analítica para curvatura constante mostrou-se extremamente satisfatória, com uma diferença máxima de 2,44%, já a solução analítica para curvatura variável apresentou uma diferença máxima de 4,92%. Desta maneira, ambas as soluções provaram ser uma ferramenta valiosa para o cálculo de alturas de equilíbrio analiticamente.

Da Figura (7.18), evidencia-se que os resultados experimentais obtidos foram extremamente satisfatórios, uma vez que as amplitudes (representadas pelas barras verticais) das incertezas das medições experimentais cobriram a faixa de valores encontrados numericamente e analiticamente para cada um dos distintos diâmetros internos dos tubos.

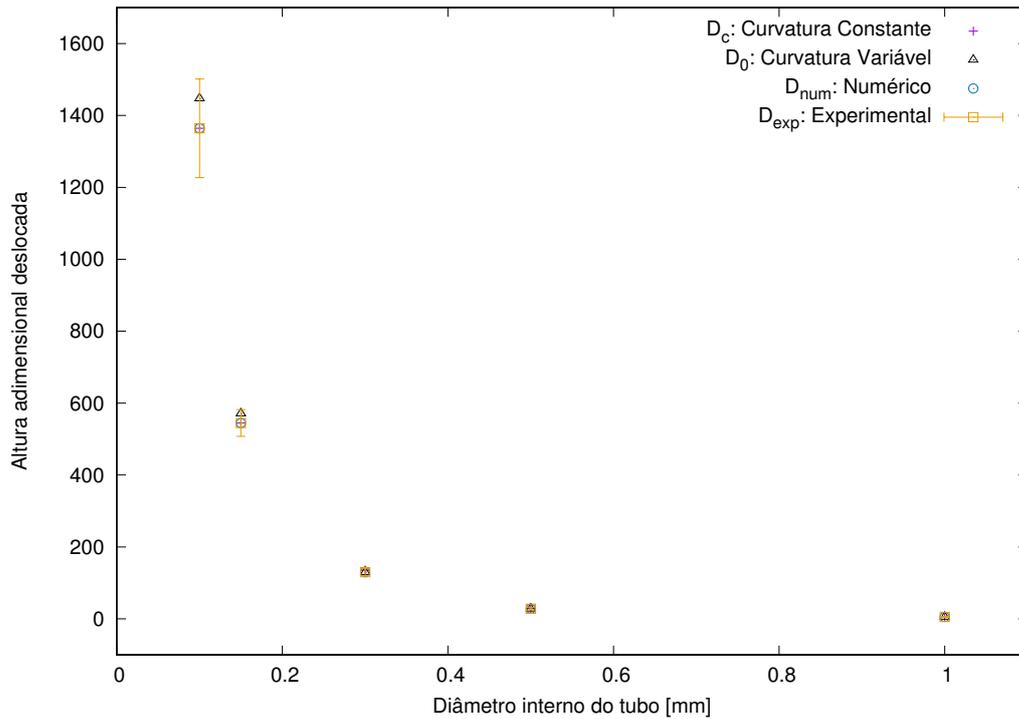


Figura 7.18 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a glicerina.

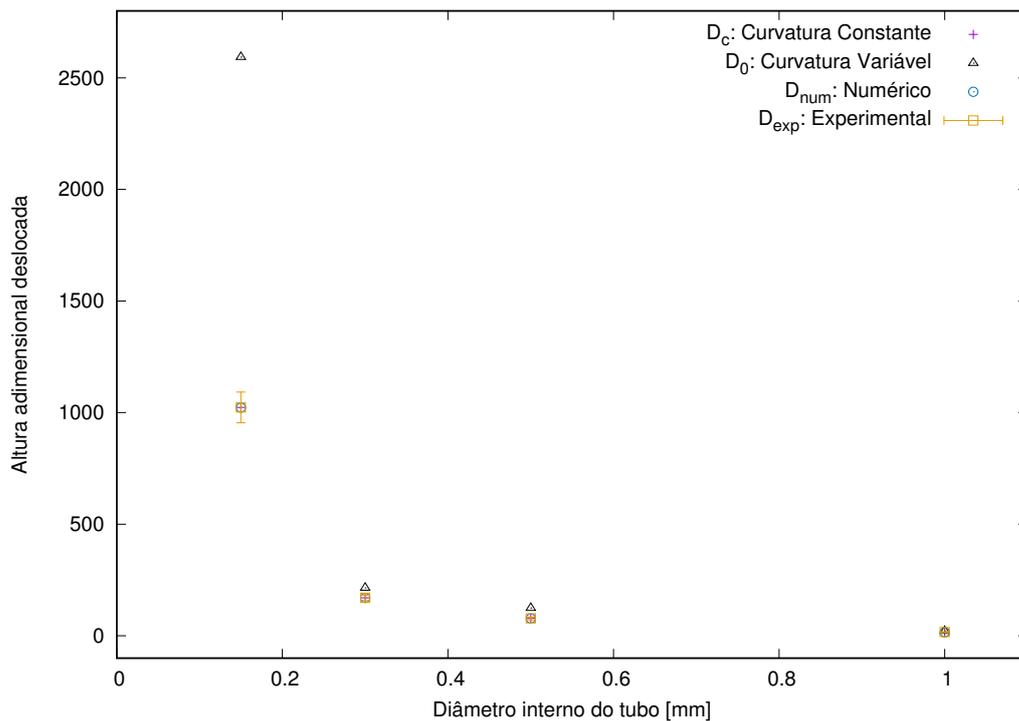


Figura 7.19 – Comparação alturas adimensionais obtidas, para a vaselina.

A maior diferença entre o resultado numérico e o resultado experimental foi de apenas 0,81%. A solução analítica para curvatura constante mostrou-se extremamente satisfatória, com uma diferença máxima de 4,31%, já a solução analítica para curvatura variável apresentou uma diferença máxima de 6,09%. Desta maneira, ambas as soluções provaram ser uma ferramenta valiosa para o cálculo de alturas de equilíbrio analiticamente.

Verifica-se a partir da Fig. (7.19), que a amplitude de incerteza das medidas experimentais não é suficiente para cobrir o valor obtido pela solução analítica para curvatura variável, portanto, a mesma não pode ser utilizada para o cálculo de alturas de equilíbrio, neste caso. Tal fato pode ter ocorrido uma vez que a solução analítica para curvatura variável só pode ser aplicada para ângulos de contato cuja cotangente seja muito menor que 1, como evidenciado no capítulo 5 (Soluções Analíticas). O valor das cotangentes para os ângulos obtidos para a vaselina nos diferentes tubos capilares são: 0,87; 1,24; 0,77 e 2,33, para os tubos com diâmetro interno de 1000 μm , 500 μm , 300 μm e 150 μm , respectivamente. Fica claro que nenhum desses valores é muito menor que 1, portanto a solução não pode ser devidamente utilizada. Desta maneira, apenas a solução analítica para curvatura constante, inesperadamente, uma vez que a sua condição de aplicação não foi respeitada ($\cotg(\alpha) \ll 1$), mostrou-se ser uma ferramenta valiosa para o cálculo de alturas de equilíbrio analiticamente, neste caso.

7.2.2.5 Comentários acerca dos resultados experimentais

O experimento mostrou-se muito satisfatório pois possibilitou o cálculo dos ângulos de contato em cada um dos diferentes tubos capilares para cada um dos fluidos analisados. Segundo (CENGEL; CIMBALA, 2015), o ângulo de contato quantifica o efeito capilar, portanto, uma determinação do ângulo de contato é de extrema importância.

Ficou evidenciado que os resultados obtidos experimentalmente foram muito satisfatórios, divergindo dos resultados numéricos em no máximo 1,41%, para todos os fluidos analisados.

Evidenciou-se também que a solução analítica para curvatura constante pode ser usada para o cálculo das alturas de equilíbrio em todos os casos, pois apresentou no geral uma diferença máxima de 4,31% entre os resultados experimental e analítico, para todos os fluidos analisados.

7.3 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS PARA O CASO MAIS GERAL ONDE A INTERFACE É FORMADA POR UM FERROFLUIDO E UM FLUIDO NÃO-MAGNÉTICO, SOB A INFLUÊNCIA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

Esta seção apresenta os resultados obtidos da integração numérica da Eq. (3.95), para o caso mais geral onde a interface é formada por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo, de acordo com o esquema apresentado na Fig. (3.1). Neste caso, a dinâmica de deslocamento vertical de fluido bem como formação da superfície livre, é regulada

pela interação entre efeitos capilares, magnéticos e hidrostáticos. Deste modo, as variáveis físicas que governam o problema são: o número de Bond, o número de Bond magnético, o ângulo de contato, as susceptibilidades magnéticas de ambos os fluidos, as dimensões do ímã permanente, a posição onde o mesmo é posicionado no espaço bem como um parâmetro indicador de sua intensidade. Para fins práticos, o fluido não-magnético foi tido como o ar atmosférico.

Ao longo das subseções seguintes, cada uma das variáveis físicas do problema será analisada isoladamente de modo a verificar-se o seu efeito na altura de deslocamento vertical bem como no formato da superfície livre. A Tabela (7.9) apresenta os limites de variação dos parâmetros utilizados nesta análise.

Tabela 7.9 – Faixa de variação das variáveis físicas da análise para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo.

Variável Física	Faixa de Variação
Número de Bond	$0,01 \leq Bo \leq 2,00$
Número de Bond Magnético	$0,01 \leq Bo_m \leq 3,00$
Susceptibilidade Magnética do Ferrofluido	$0,1 \leq \chi_1 \leq 10,0$
Susceptibilidade Magnética do Ar	$\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$
Dimensões Ímã Permanente	$1,0 \leq 2A \leq 10,0$ e $1,0 \leq 2B \leq 10,0$
Intensidade do Ímã Permanente	$1,0 \leq M_i/4\pi M_s \leq 11,0$
Posição do Ímã Permanente	$0,0 \leq S \leq 40,0$ e $-40,0 \leq R \leq 40,0$
Ângulo de contato	$\pi/2 - 0,92 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,44$

Isolando-se a altura de deslocamento vertical D na Eq. (3.95), obtém-se:

$$D = \underbrace{\frac{Y''}{Bo(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}}_I - Y - \underbrace{\frac{Bo_m}{Bo} \left\{ H_{2t}^2(\chi_2 - \chi_1) + H_{2n}^2 \left[\frac{(1+\chi_2)^2}{(1+\chi_1)} - (1+\chi_2) \right] \right\}}_{II}. \quad (7.1)$$

O termo “II” apresentado na Eq. (7.1) representa os termos da contribuição mag-

nética à altura de deslocamento vertical D . Sendo as quantidades Bo , Bo_m , H_{2t}^2 e H_{2n}^2 positivas e sabendo-se que $\chi_1 \gg \chi_2$, o termo “II” sempre é um termo positivo, contribuindo no sentido de aumentar a altura de deslocamento vertical. Desta maneira, a partir da análise isolada da contribuição magnética à altura de deslocamento vertical, conclui-se que a presença do ímã deve provocar um maior deslocamento de fluido do que o apresentado para o caso limite não-magnético.

7.3.1 Análise do efeito da variação do número de Bond no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do número de Bond na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada.

O número de Bond - Eq.(3.72) - mede a intensidade relativa entre as pressões hidrostáticas e as pressões capilares, sendo função das massas específicas ρ dos fluidos em análise, da aceleração gravitacional g , da tensão interfacial γ e do espaçamento b entre as placas planas paralelas. Deste modo, existe uma enorme possibilidade de combinações entre estas variáveis de modo a obter-se o número de Bond, portanto, o autor decidiu por variá-lo numa faixa de $0,01 \leq Bo \leq 2,0$, cobrindo regimes onde as pressões hidrostáticas superam as capilares e vice-versa.

7.3.1.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond

Como explicitado acima, o número de Bond foi variado numa faixa de $0,01 \leq Bo \leq 2,0$. As Figuras (7.20) e (7.21) apresentam os valores para a altura de deslocamento vertical D . A Figura (7.22) apresenta valores da quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, calculadas numericamente para esta faixa de valores, onde D_{lim} é o valor para a altura de deslocamento vertical obtida para o caso limite assintótico não-magnético, sob as mesmas condições físicas analisadas.

A partir da Fig. (7.20) verifica-se que a altura de deslocamento vertical D diminui à medida em que aumenta-se o número de Bond magnético Bo . Para um número de Bond $Bo = 0,1$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 1,784$, já para $Bo = 1,0$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 0,172$. Deste modo, vê-se que um aumento de 10 vezes no número de Bond causou uma diminuição de aproximadamente 10,5 vezes no deslocamento vertical. A explicação física para estes resultados é dada na seção 6.2.1.1. Na prática, o aumento do número de Bond é conseguido por um maior distanciamento entre as placas

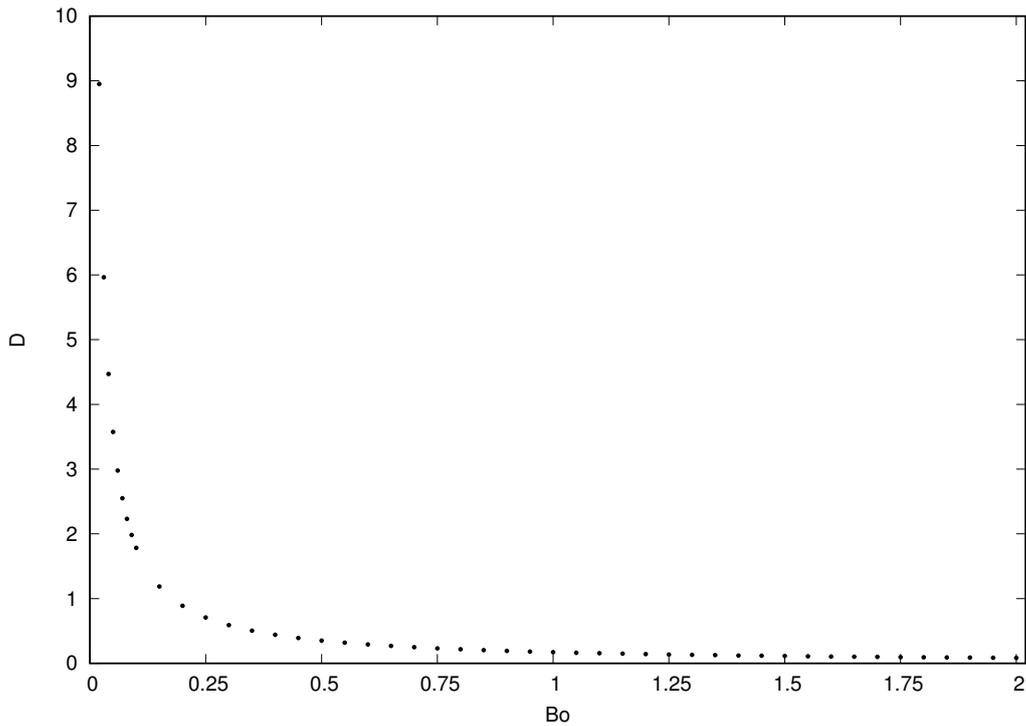


Figura 7.20 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond para $Bo_m = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

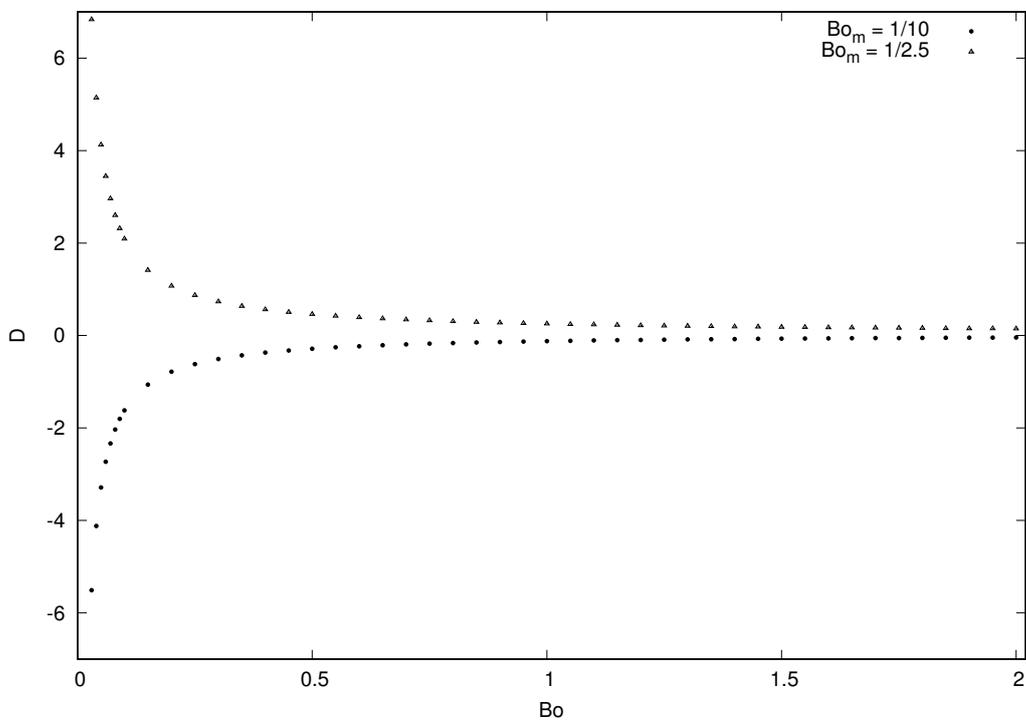


Figura 7.21 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond para $\alpha = \pi/2 + 0,30$ e: Círculos: $Bo_m = 1/10$; Triângulos: $Bo_m = 1/2,5$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

paralelas (2c), o que acarreta em condições onde os efeitos capilares são insignificantes ou mesmo inexistentes. Ainda assim, mesmo nestas condições, a Fig. (7.20) indica ser possível efetuar-se um deslocamento vertical de fluido para cima, devido à presença das pressões magnéticas, associadas ao campo magnético aplicado externamente, que causam um aumento no salto de pressões na interface, em oposição às alturas de deslocamento vertical praticamente nulas, obtidas sob estas condições para o caso limite não-magnético.

A Figura (7.21) mostra que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado possua ângulo de contato $\alpha > \pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo, mesmo em condições onde as pressões hidrostáticas são altíssimas - altos número de Bond -, em contrapartida à involução de fluido evidenciada nas condições onde $\alpha > \pi/2$ para o caso não-magnético - vide Fig.(7.5) -. Comparando-se as duas curvas obtidas, para baixos e médios números de Bond magnético, vê-se que para condições onde as pressões magnéticas são baixas, não foi possível causar ascensão de fluido dentro do capilar, contudo, com um aumento no salto de pressões na interface causado pelo aumento das pressões magnéticas - aumento no número de Bond magnético-, foi possível fazê-lo.

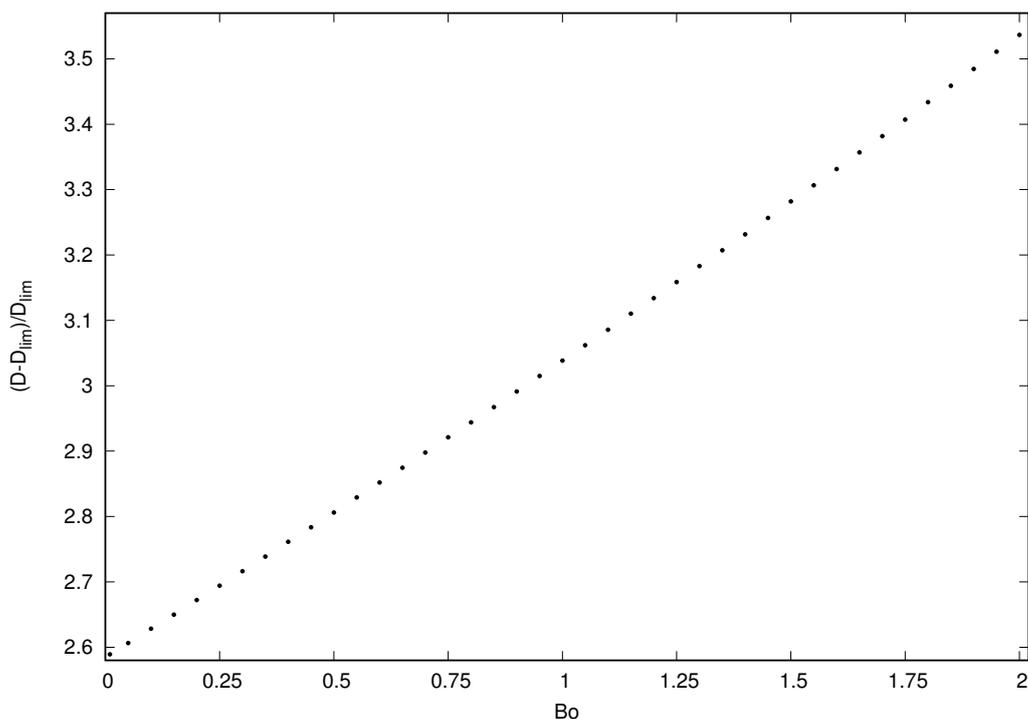


Figura 7.22 – Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do número de Bond, para $Bo_m = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

A Figura (7.22) apresenta os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã externo, em função da variação do número de Bond. Para as condições físicas analisadas, a quantidade D_{lim} é igual aos

resultados apresentados na Fig. (7.6), na seção 7.2.2.1, para a análise do limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos. Observa-se que a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$ varia de forma aproximadamente linear em relação a Bo , em contrapartida à altura D , que varia de forma aproximadamente hiperbólica. Para um número de Bond $Bo = 0,1$, houve um deslocamento vertical aproximadamente 2,6 vezes superior ao limite onde não há a presença de um ímã permanente externo. Vale ressaltar-se que $(D - D_{lim})/D_{lim}$ aumentou à medida em que aumentou-se Bo , indicando a importância da contribuição magnética ao aumento da altura de equilíbrio para aplicações físicas onde os números de Bond são muito altos (e.x. capilares com altos diâmetros). Os resultados apresentados na Fig. (7.22) indicam que mesmo em condições extremamente adversas à ascensão de fluido, ainda foi possível deslocar-se o mesmo aproximadamente 3,6 vezes mais em relação ao caso não-magnético.

7.3.1.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond

As Figuras (7.23), (7.24), (7.25) e (7.26) apresentam formatos de superfície livre em função da variação do número de Bond.

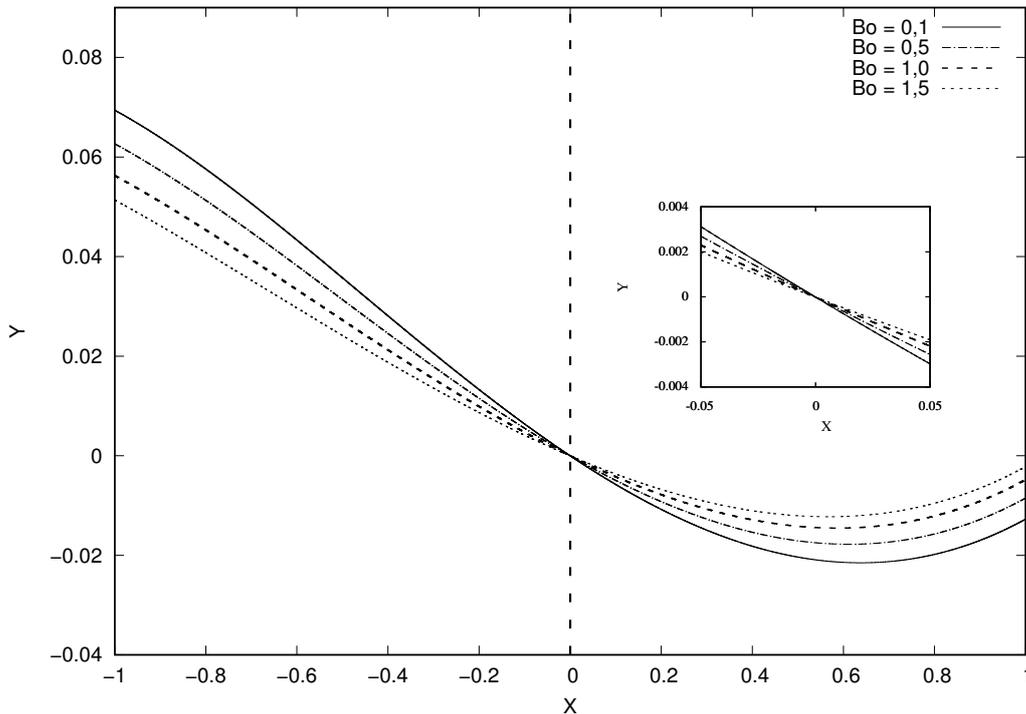


Figura 7.23 – Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.

As Figuras (7.23), (7.24), (7.25) e (7.26) mostram que a variação do número de Bond resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um crescimento na

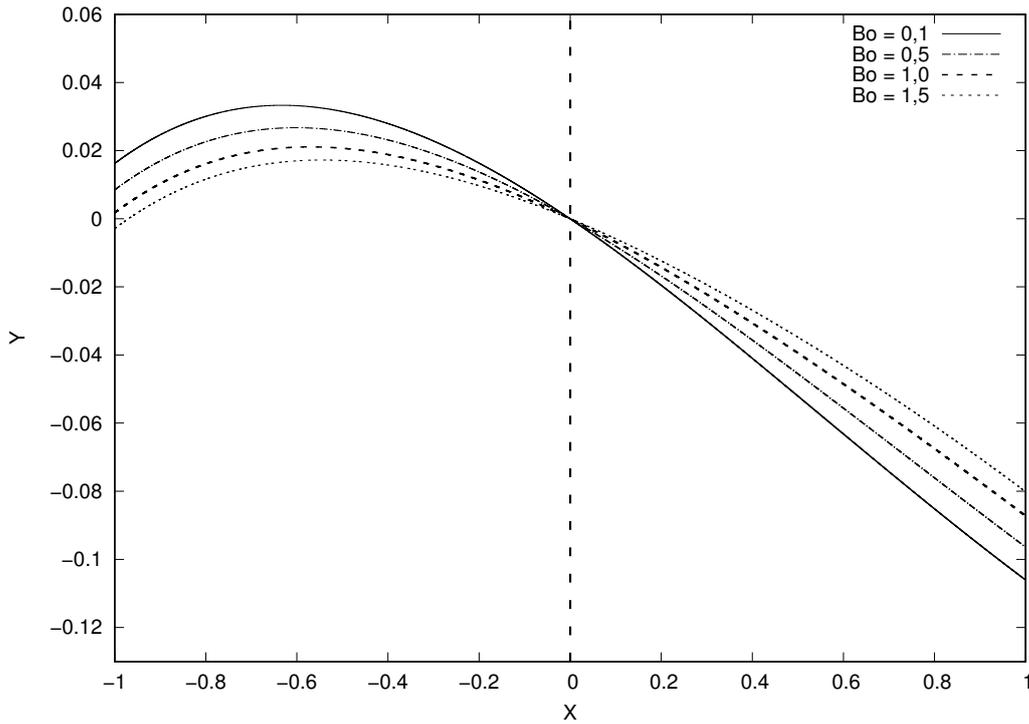


Figura 7.24 – Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.

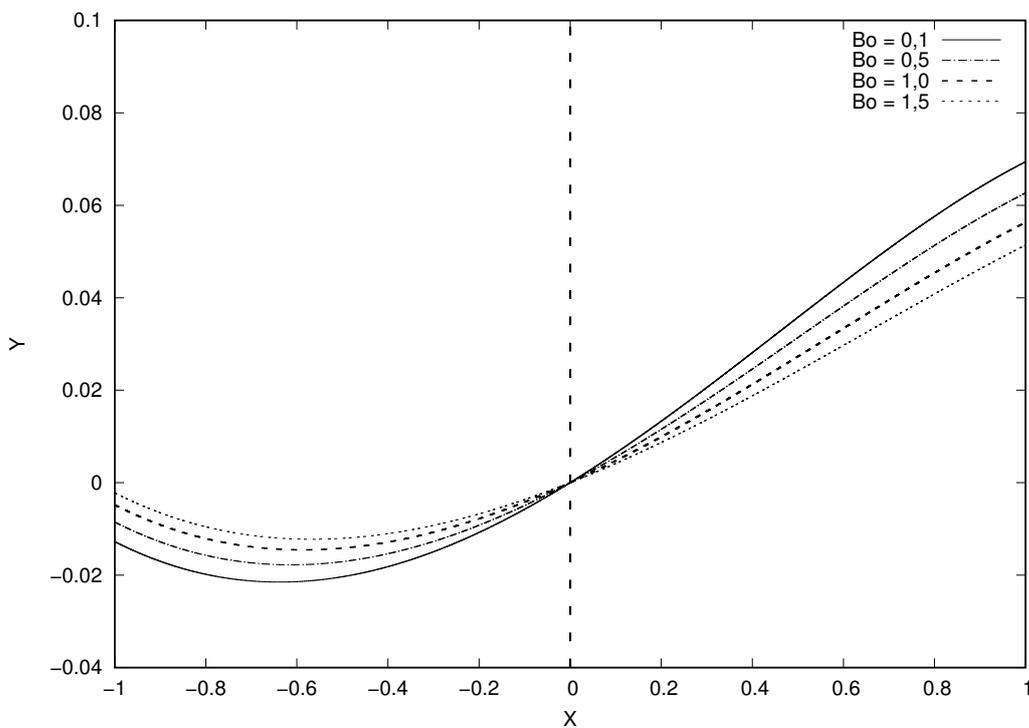


Figura 7.25 – Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.

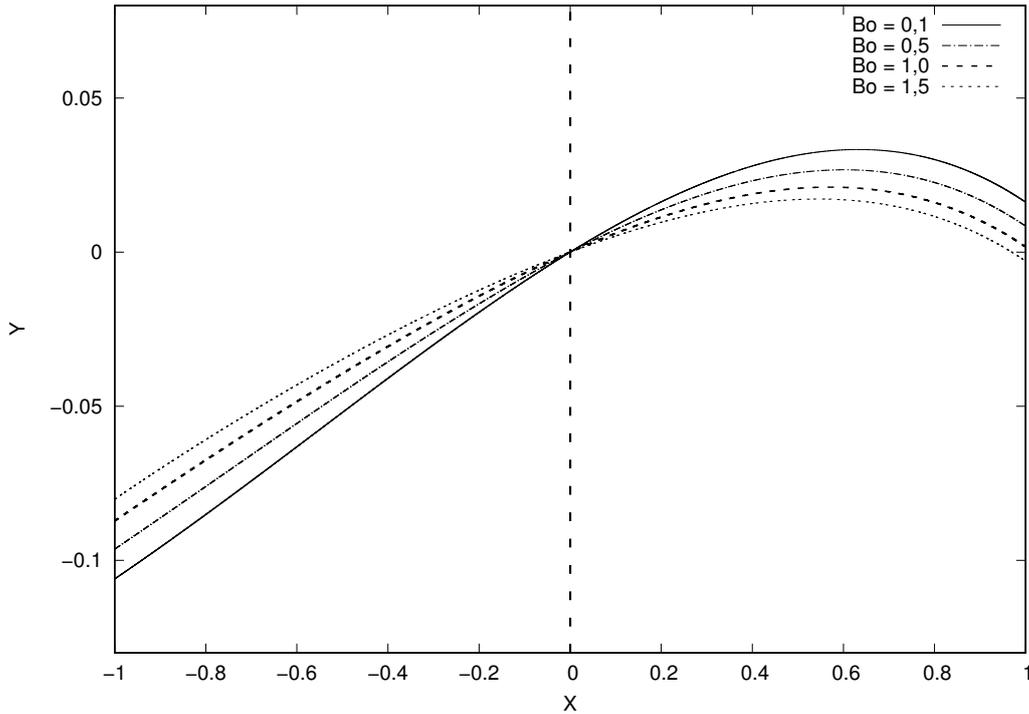


Figura 7.26 – Formato da superfície livre em função da variação do número de Bond. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para este gráfico: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$, $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $Bo_m = 1/2$.

assimetria das curvas obtidas à medida em que diminui-se Bo . A diminuição do número de Bond acarreta na diminuição dos efeitos hidrostáticos, fazendo com que os efeitos capilares e magnéticos tornem-se mais dominantes. As Figuras (7.23), (7.24), (7.25) e (7.26) parecem sugerir que o aumento do desvio na condição de simetria no formato da superfície livre é uma medida da intensidade dos efeitos magnéticos (GONTIJO et al., 2016).

A Figura (7.23) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. A Figura (7.23) também indica que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que diminui-se Bo , o mesmo ocorre com as derivadas no centro, como indica o detalhe da Fig. (7.23).

A Figura (7.24), apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos observados para condições onde o ângulo de contato α é menor que $\pi/2$.

A Figura (7.25) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã

encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Neste caso, $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. Também verifica-se o aumento do grau de assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, à medida em que diminui-se Bo .

A Figura (7.26), apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$.

As Figuras (7.27), (7.28), (7.29) e (7.30) apresentam formatos de superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético.

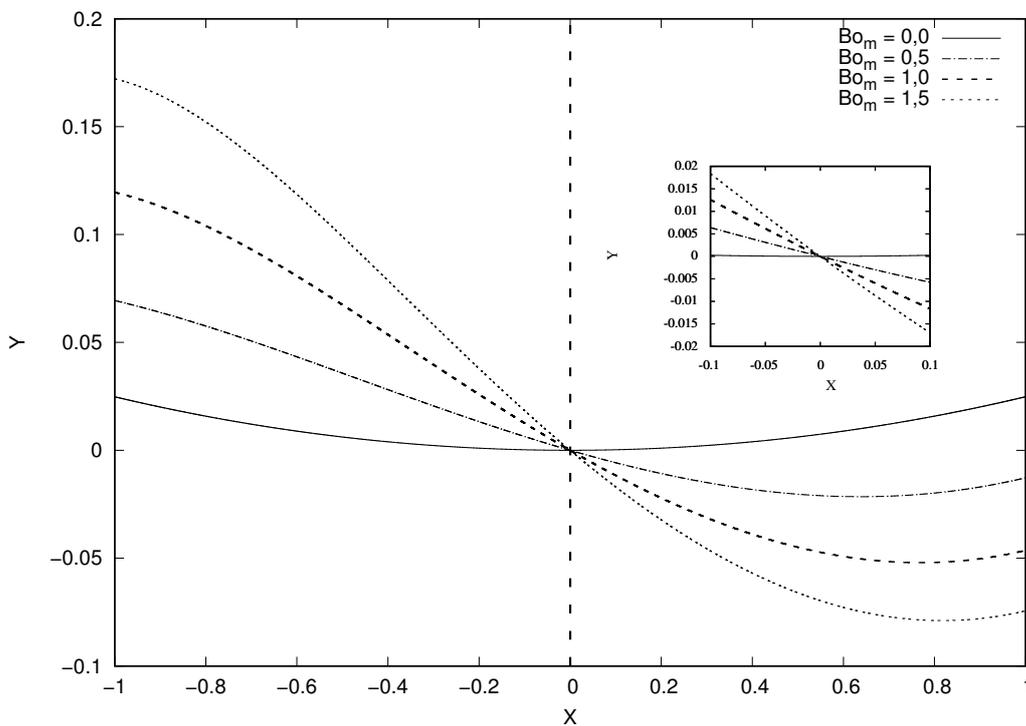


Figura 7.27 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 0,1$. Para este gráfico: $\chi_2 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

A partir das Figs. (7.27), (7.28), (7.29) e (7.30) vê-se que o aumento do número de Bond magnético tende a tornar as superfícies livres cada vez mais assimétricas, indicando um comportamento mais complexo e menos linear do formato do menisco. Este efeito foi observado mesmo em condições adversas à ascensão de fluido, onde as pressões hidrostáticas são dominantes - altos números de Bond -, como mostrado na Fig. (7.30). Aqui verifica-se mais uma vez, que na ausência de efeitos magnéticos - curvas para $Bo_m = 0$, as superfícies livres obtidas são simétricas.

As Figuras (7.27), (7.28), (7.29) e (7.30) reafirmam a argumentação apresentada na discussão acerca da Fig. (7.26) de que um aumento no desvio da condição de simetria

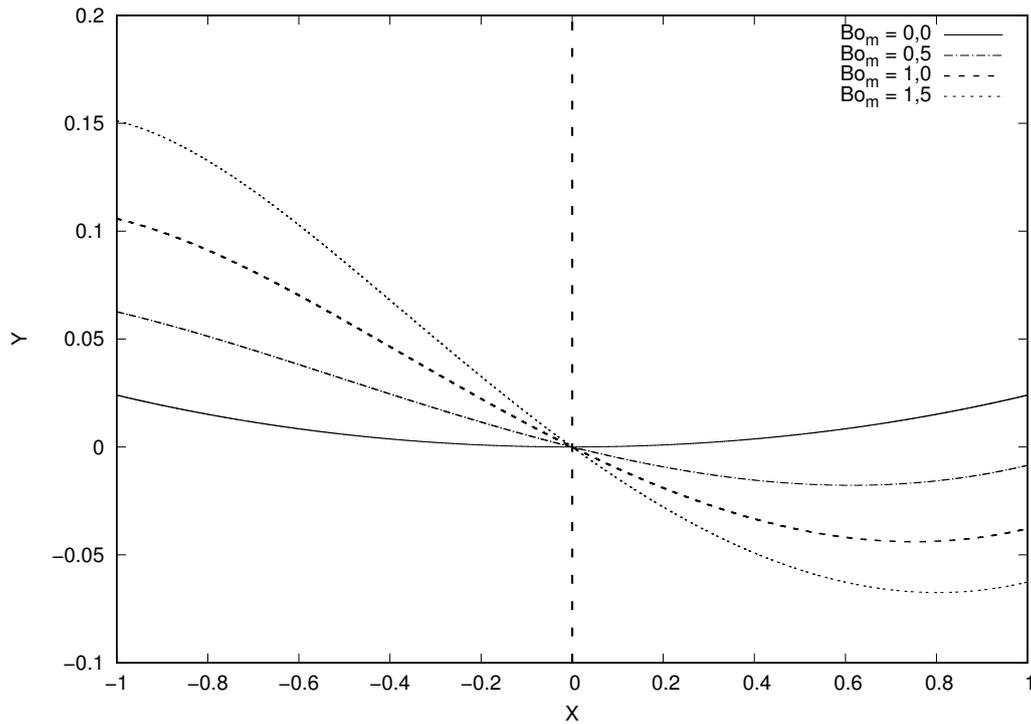


Figura 7.28 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 0,5$. Para este gráfico: $\chi_2 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

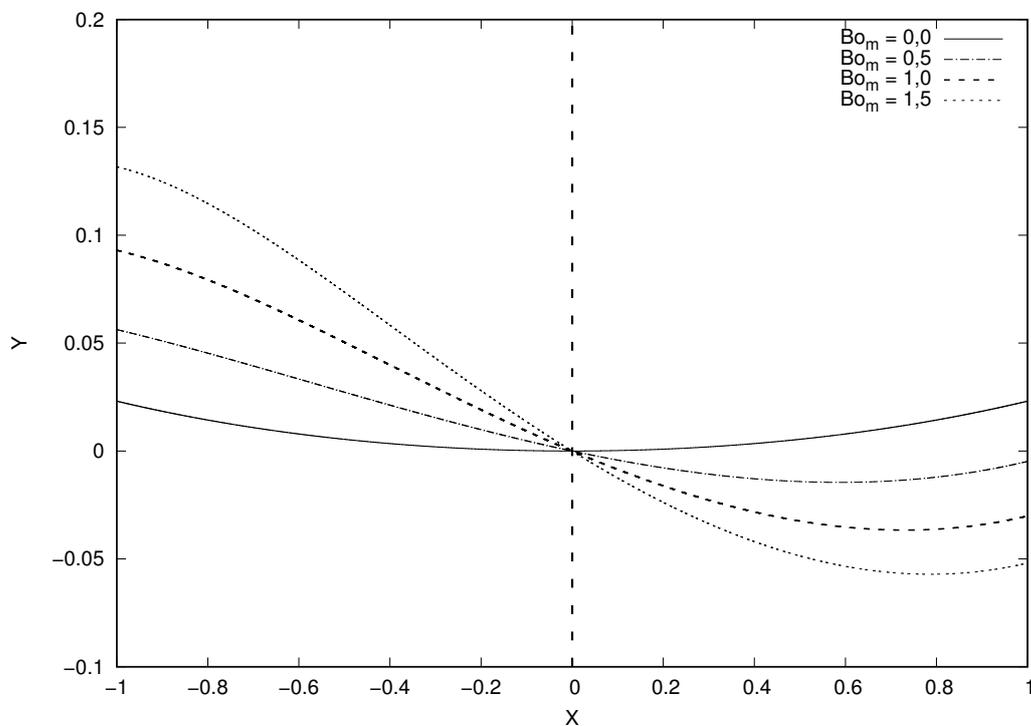


Figura 7.29 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 1,0$. Para este gráfico: $\chi_2 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

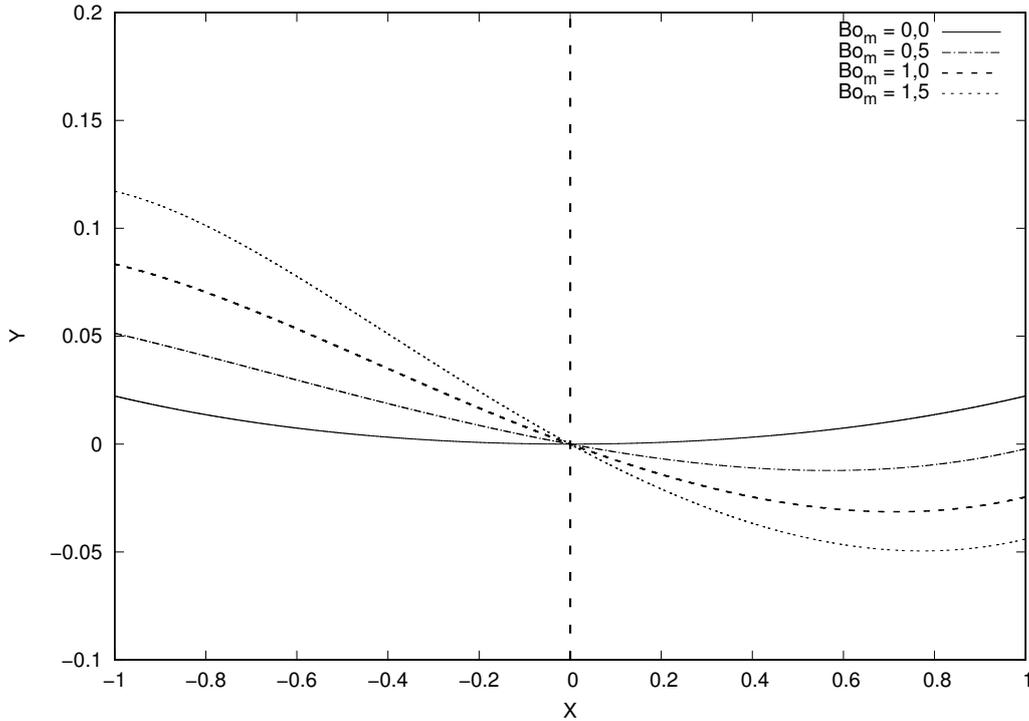


Figura 7.30 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond, para diferentes números de Bond magnético, para $Bo = 1,5$. Para este gráfico: $\chi_2 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

seja uma medida da intensidade dos efeitos magnéticos. A assunção de que possa haver uma simetria vertical no formato do menisco, obviamente levaria a um comportamento não realista da superfície livre. Como argumentando na breve discussão sobre as condições de contorno, apresentada ao final do Capítulo 6 - Solução Numérica -, para admitir-se uma simetria vertical deve-se afirmar que $Y'(0) = 0$, o que não é válido nestes casos. As únicas derivadas que se tem certeza vêm da física do problema, e são os valores das derivadas nas paredes das placas planas verticais paralelas, uma vez que elas dependem exclusivamente no ângulo de contato, que é uma propriedade física do sistema fluido-sólido-gás. O detalhe da Fig. (7.27) apresenta um comportamento interessante. À medida em que aumenta-se o número de Bond magnético, as derivadas no centro $(0,0;0,0)$ também aumentam, corroborando a impossibilidade de obtenção de uma simetria nos formatos das superfícies livres. Esta forte dependência em pequenas perturbações de algum parâmetro físico do problema é uma característica típica de problemas governados por equações diferenciais não-lineares (GONTIJO et al., 2016).

Verifica-se também a partir das Figs.(7.27), (7.28), (7.29) e (7.30) que o grau de assimetria das curvas tende a diminuir à medida em que aumenta-se o número de Bond, uma vez que nestes casos os efeitos hidrostáticos tornam-se mais evidentes que os capilares e os magnéticos, mas ainda assim, mesmo em condições de altos números de Bond - vide Fig.(7.30) -, a presença dos efeitos magnéticos foi suficiente para causar uma quebra de simetria.

7.3.2 Análise do efeito da variação do número de Bond magnético no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do número de Bond magnético na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada.

O número de Bond magnético - Eq. (3.73) - mede a intensidade relativa entre as pressões magnéticas e as pressões capilares, sendo função da magnetização de saturação M_s do ferrofluido, da permeabilidade magnética no vácuo μ_0 , da tensão interfacial γ e do espaçamento c entre as placas planas verticais paralelas. Deste modo, existe uma enorme possibilidade de combinações entre estas variáveis de modo a obter-se o número de Bond magnético, portanto, o autor decidiu por variá-lo numa faixa de $0,1 \leq Bo_m \leq 3,0$, cobrindo regimes onde as pressões capilares são mais intensas que as magnéticas e vice-versa.

7.3.2.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do número de Bond magnético

Como explicitado acima, o número de Bond magnético foi variado numa faixa de $0,1 \leq Bo_m \leq 3,0$. As Figuras (7.31) e (7.32) apresentam os valores para a altura de deslocamento vertical D . A Figura (7.34) apresenta valores da quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, calculados numericamente para esta faixa de valores.

A partir da Fig. (7.31) verifica-se que a altura de deslocamento vertical D aumenta à medida em que aumenta-se o valor de Bo_m . Para a curva obtida para número de Bond $Bo = 1/3$, vê-se que para $Bo_m = 0,1$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 0,530$, já para $Bo_m = 1,0$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 3,855$. Deste modo, vê-se que um aumento de 10 vezes no número de Bond magnético causou um aumento de aproximadamente 7,3 vezes na altura de deslocamento vertical. Sabendo-se que o número de Bond magnético - Eq. (3.73) - é uma medição da importância relativa entre as pressões magnéticas e capilares, sendo estas associadas à tensão superficial e à curvatura média, e aquelas associadas ao campo magnético aplicado, ambas atuantes no sentido de vencer o efeito hidrostático devido à ação gravitacional. Vê-se que um aumento em Bo_m é conseguido por um aumento dos efeitos magnéticos, que atuam no sentido de provocar um deslocamento vertical mesmo em condições adversas à ascensão de fluido, condições onde os efeitos capilares podem ser considerados desprezíveis (e.x. capilares com altos diâmetros), deste modo, é natural que um aumento em Bo_m cause um aumento na altura de deslocamento vertical, uma vez que este aumento causará um aumento da importância das pressões

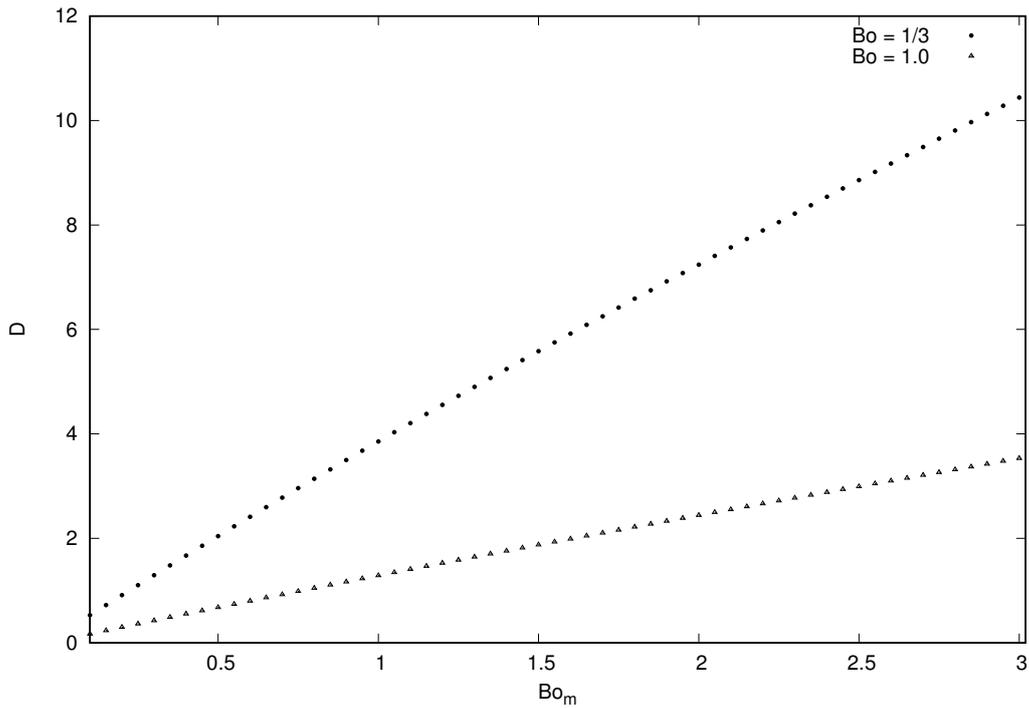


Figura 7.31 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond magnético para $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e: Círculos: $Bo = 1/3$; Triângulos: $Bo = 1,0$. Para esta figura: $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

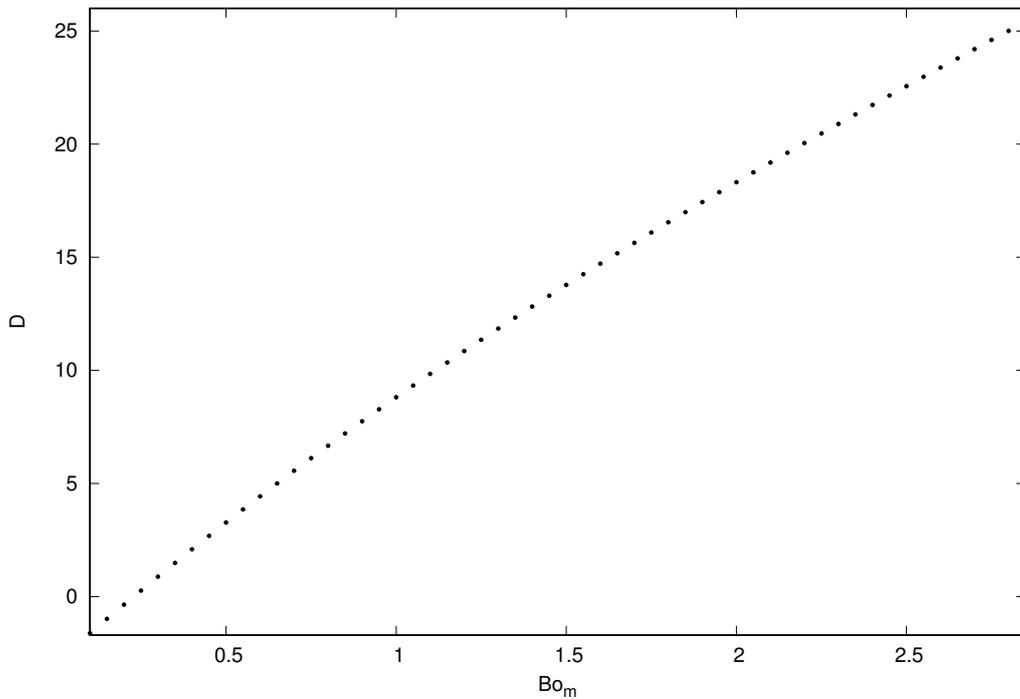


Figura 7.32 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do número de Bond magnético para $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

magnéticas na dinâmica de relação de importância entre as pressões hidrostáticas, capilares e magnéticas. Comparando-se as duas curvas obtidas, para baixos e altos números de Bond, constata-se que, mesmo para condições muito adversas à ascensão de fluido - altos números de Bond: dominância de efeitos hidrostáticos -, é possível obter-se as mesmas alturas de deslocamento vertical obtidas para pequenos números de Bond - dominância de efeitos capilares -, somente aumentando-se o valor do número de Bond Magnético, e consequentemente, das pressões magnéticas. Este resultado é evidenciado pela Eq. (3.54), que mostra que por efeitos de pressões magnéticas, ainda é possível gerar-se um salto de pressão na interface mesmo quando a curvatura da interface é muito pequena e o efeito da pressão capilar é praticamente desprezível (CUNHA, 2012).

Os resultados apresentados na Fig. (7.31), estão em acordo com os apresentados por (GONTIJO et al., 2016) - Fig. (7.33) -, em uma análise feita para um campo magnético vertical.

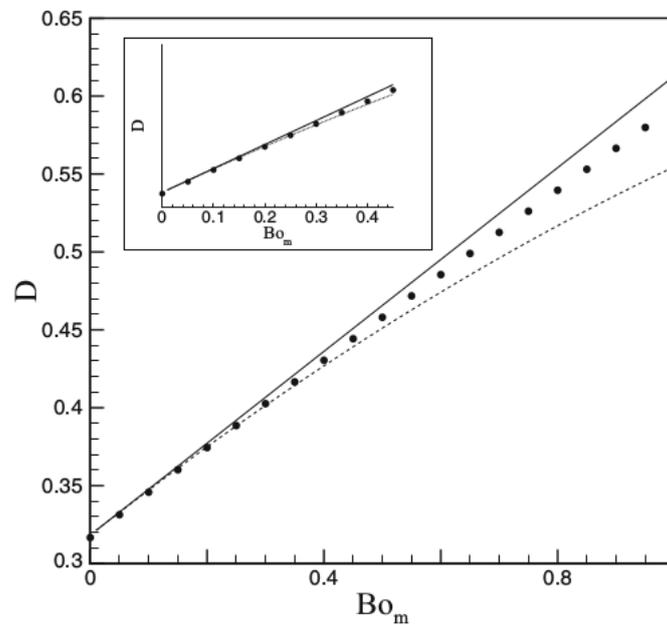


Figura 7.33 – Altura de equilíbrio versus número de Bond magnético. Os círculos pretos representam valores numéricos. Para este gráfico: $Bo = 3/10$; $\chi_0 = 1/10$; $\beta_0^* = 1/10$ e $\alpha = \pi/2 - 1/10$ (GONTIJO et al., 2016). Imagem retirada de (GONTIJO et al., 2016).

A Figura (7.32) mostra que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado possua ângulo de contato α maior que $\pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo à medida em que aumentava-se o número de Bond magnético. Para valores de Bo_m até aproximadamente 0,2, verifica-se alturas de deslocamento vertical negativas - involução de fluido -, contudo, para Bo_m superiores a este valor, houve um deslocamento vertical de fluido positivo - ascensão de fluido -. Os resultados apresentados na Fig. (7.32) evidenciam que mesmo para sistemas líquido-sólido-gás com ângulo de contato maiores que $\pi/2$, ainda é possível deslocar-se fluido verticalmente para cima,

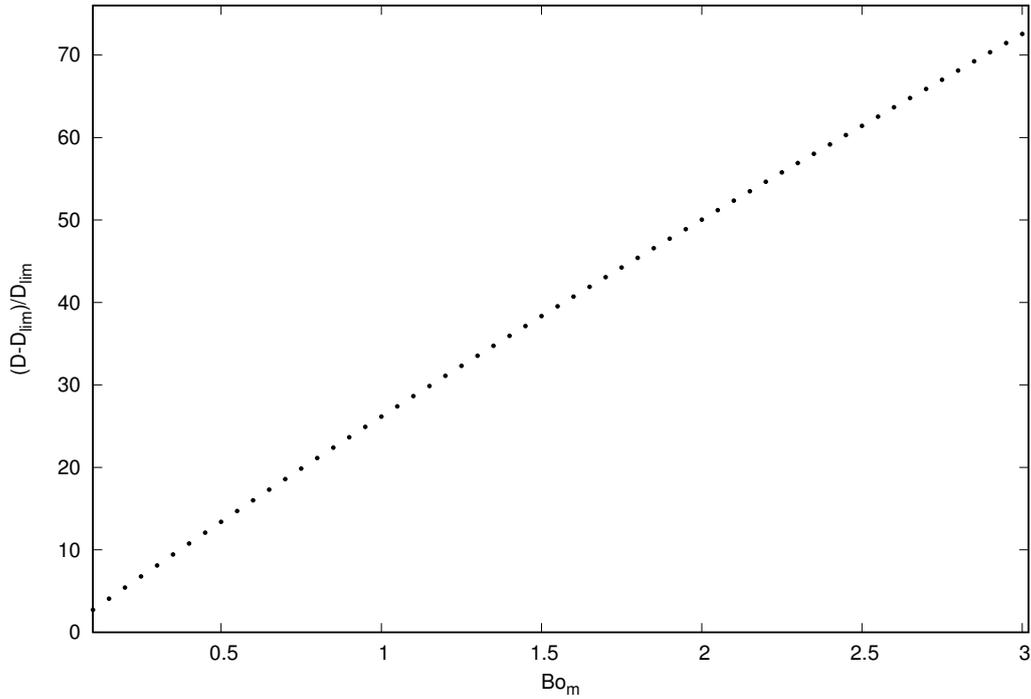


Figura 7.34 – Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do número de Bond magnético, para $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

aumentado-se somente o número de Bond magnético.

A Figura (7.34) apresenta os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã externo, em função da variação de Bo_m . Para as condições físicas analisadas, $D_{lim} = 0,142$. Observa-se que a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$ aumenta à medida em que aumenta-se Bo_m . Para $Bo_m = 3,0$, houve um deslocamento vertical aproximadamente 73 vezes superior ao limite onde não há a presença de um ímã externo, e conseqüentemente, de um campo magnético externo.

Os resultados obtidos são extremamente significantes, evidenciando que em aplicações onde deseja-se obter o máximo de deslocamento vertical possível (e.x. indústria petrolífera), é possível fazê-lo aumentando-se o valor do número de Bond magnético.

7.3.2.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do número de Bond magnético

As Figuras (7.35), (7.36), (7.37) e (7.38) apresentam formatos de superfície livre em função da variação do número de Bond magnético.

As Figuras (7.35), (7.36), (7.37) e (7.38) mostram que a variação do número de Bond magnético resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um

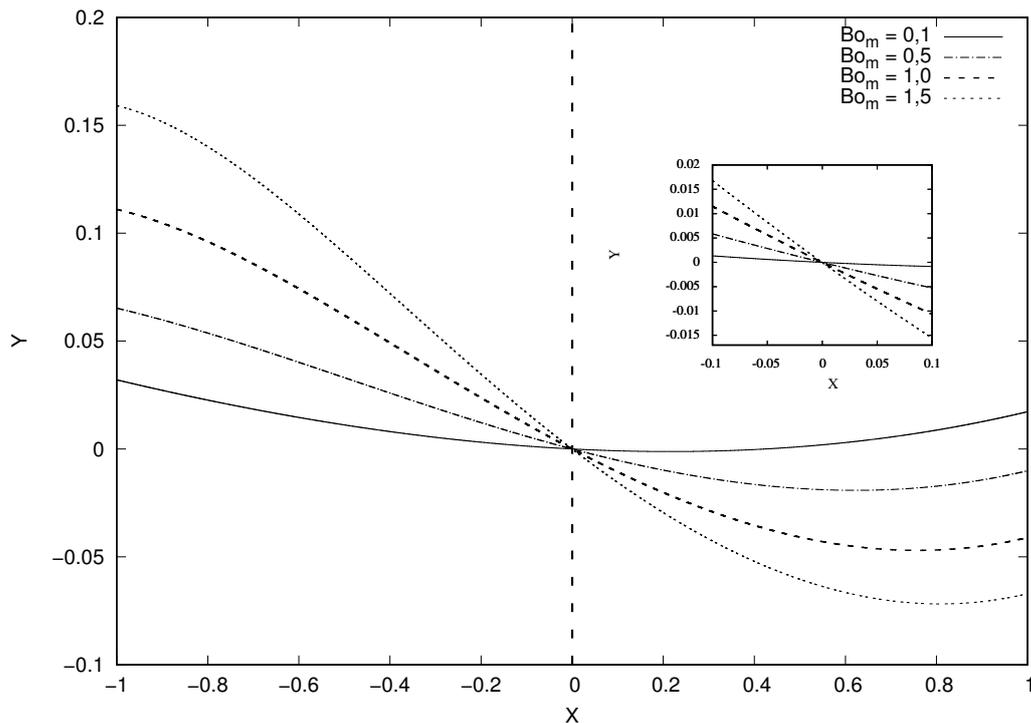


Figura 7.35 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

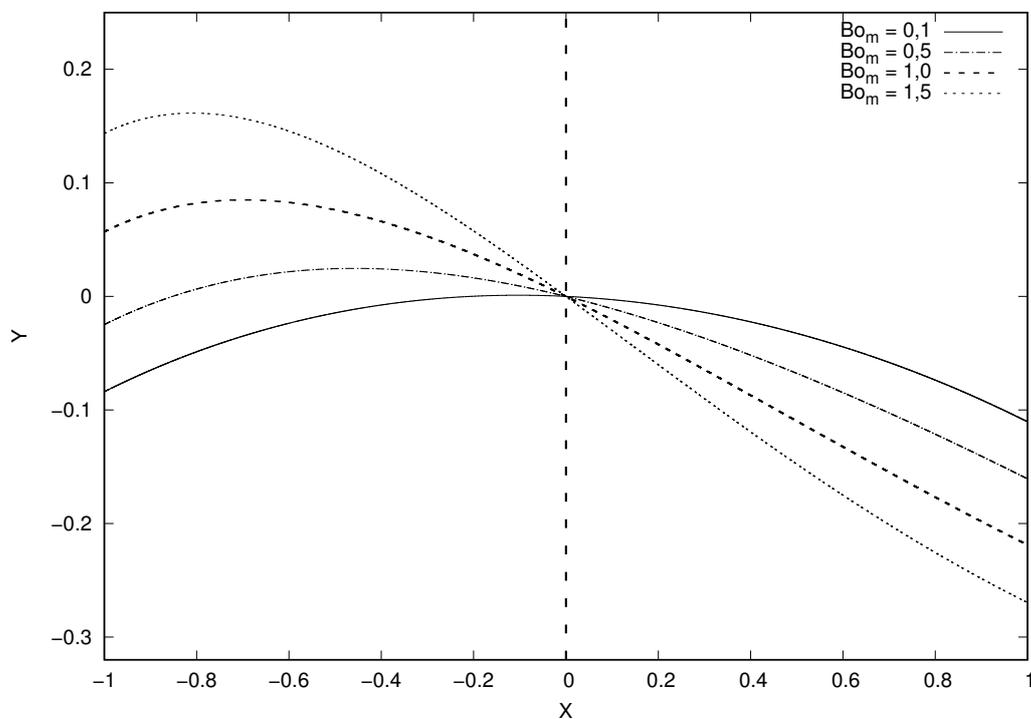


Figura 7.36 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

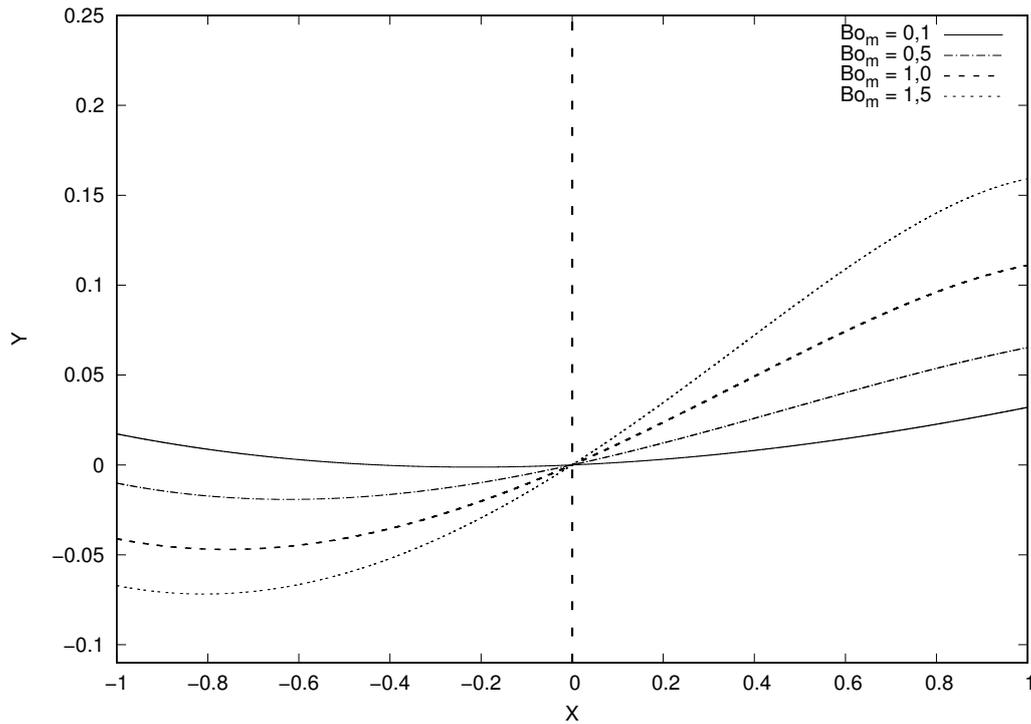


Figura 7.37 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

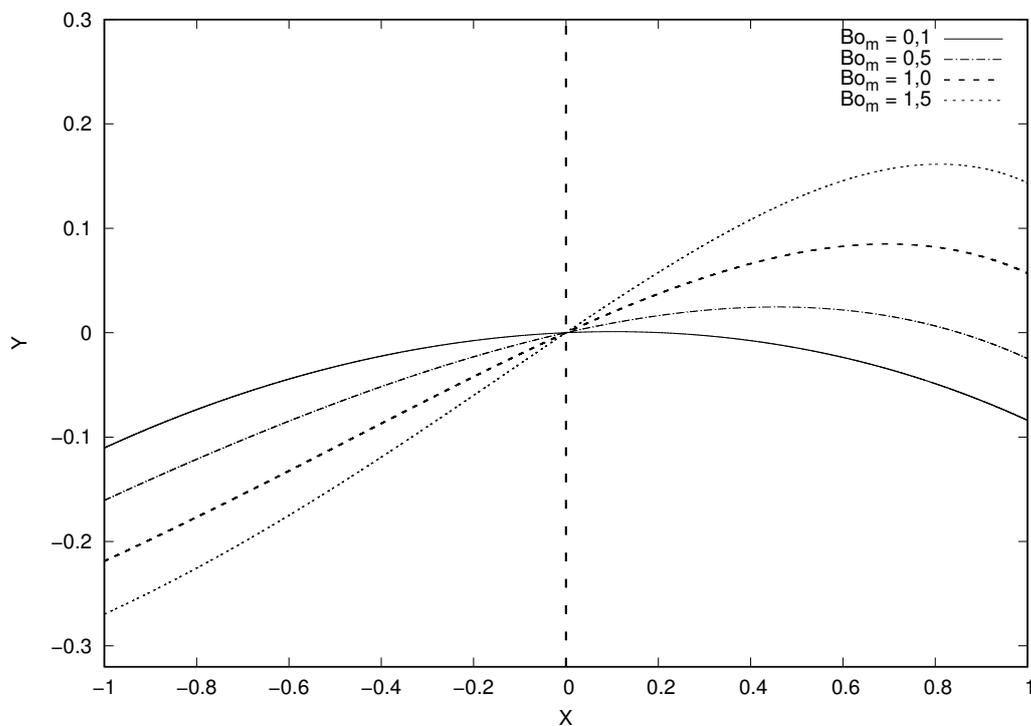


Figura 7.38 – Formatos da superfície livre em função da variação do número de Bond magnético. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

crescimento na assimetria das curvas obtidas à medida em que aumenta-se Bo_m , já que, como argumentado na seção 7.3.1.2, o desvio na condição de simetria no formato da superfície livre é uma medida da intensidade dos efeitos magnéticos.

A Figura (7.35) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. A Figura (7.35) também indica que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que Bo_m é aumentado, o mesmo ocorre com as derivas no centro $(0,0;0,0)$, como indica o detalhe da Fig. (7.35).

A Figura (7.36) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos observados para condições onde o ângulo de contato α é menor que $\pi/2$.

A Figura (7.37) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Neste caso, $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. Também verifica-se o aumento do grau de assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, à medida em que aumenta-se Bo_m .

A Figura (7.38) apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$.

7.3.3 Análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, na altura de deslocamento vertical bem como no formato da superfície livre formada.

Valores característicos para a susceptibilidade magnética foram encontrados após uma análise prévia de publicações científicas concernentes ao assunto em questão.

De acordo com (HUKE; LUCKE, 2004), uma combinação comum na composição de ferrofluidos é magnetita (Fe_3O_4) dispersa em um hidrocarboneto. A fração volumé-

trica ϕ de partículas magnéticas é tipicamente pequena, da ordem de 10^{-2} . As partículas magnéticas fazem com que o ferrofluido exiba o equilíbrio termodinâmico de um líquido paramagnético. A susceptibilidade magnética inicial pode facilmente alcançar valores de $\chi_1 \sim 1$ a valores ainda maiores. Sendo estes valores ordens de grandeza maiores do que os de líquidos paramagnéticos comuns, os ferrofluidos são chamados de “superparamagnéticos”. Num ferrofluido suficientemente diluído, as partículas magnéticas podem ser pensadas como independentes, não interagindo umas com as outras, e as propriedades magnéticas de equilíbrio de um ferrofluido deste tipo são as de um gás paramagnético ideal.

Segundo (CLARK; EMERSON, 1991) ; (HUNT; MOSKOWITZ; BENERJEE, 1995), a susceptibilidade magnética da magnetita (Fe_3O_4) é igual a aproximadamente 5,7.

TABLE 1. Magnetic Susceptibilities of Selected Rocks and Minerals

Rock/Mineral	Chemical Formula	Density (10^3 kg m^{-3})	Volume k (10^{-6} SI)	Mass χ ($10^{-8} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$)	References
magnetite	Fe_3O_4	5.18	1,000,000–5,700,000	20,000–110,000	16, 18, 22, 55, 61, 62, 75, 114, 115

Figura 7.39 – Susceptibilidade magnética da magnetita (Fe_3O_4). Imagem retirada de (HUNT; MOSKOWITZ; BENERJEE, 1995).

Os autores da publicação (TARI et al., 1978) estudaram um ferrofluido comercial constituído por partículas de magnetita (Fe_3O_4) com um diâmetro de 75\AA num dispersante de diéster. Os autores monitoraram a estabilidade do fluido durante o curso da investigação, observando a parte real da susceptibilidade $\chi'(f)$ do fluido utilizando um circuito de ressonância L-C. A Figura (7.40) mostra um gráfico apresentado pelos autores que relaciona a susceptibilidade magnética inicial χ_i em função da temperatura.

A partir da Fig. (7.40) verifica-se que, após um aumento brusco inicial próximo à temperatura ambiente, a suscetibilidade torna-se linear com a diminuição da temperatura (TARI et al., 1978).

Recentemente, (SOLOVYOVA et al., 2016) analisaram a dependência da susceptibilidade magnética inicial com a temperatura para ferrofluidos com várias concentrações ($0,2 < \phi < 0,5$), através de experimentos e teorias mecânico-estatísticas. Os autores mediram a susceptibilidade para doze amostras de fluidos à base de magnetita (Fe_3O_4), estabilizados com ácido oleico, para uma vasta faixa de temperaturas ($210\text{K} < T < 390\text{K}$). Os resultados experimentais obtidos pelos autores foram analisados frente a três teorias distintas: Teoria do campo médio modificado de segunda ordem (MMF2); sua correção para ferrofluidos polidispersos e uma nova teoria em MMF2. A Figura (7.41) mostra dois gráficos apresentados pelos autores. O primeiro mostra a dependência da susceptibilidade inicial com a concentração e o segundo mostra a dependência da susceptibilidade com a temperatura, para uma amostra de bromopentano 2.

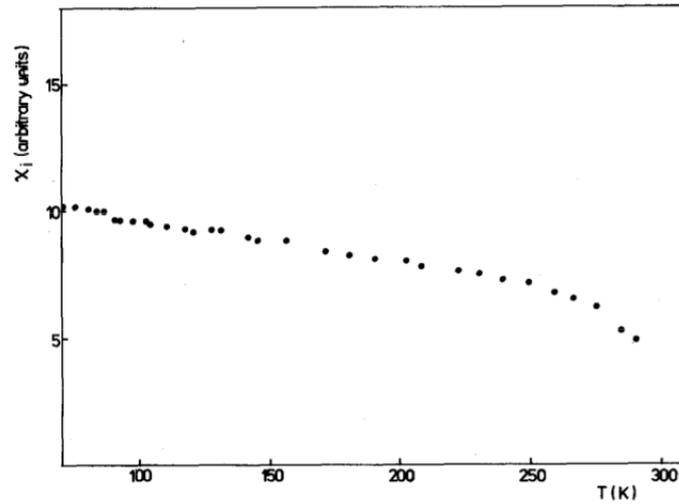


Figura 7.40 – Variação da susceptibilidade magnética inicial da amostra com a temperatura em um campo aplicado de 480e (TARI et al., 1978). Imagem retirada de (TARI et al., 1978).

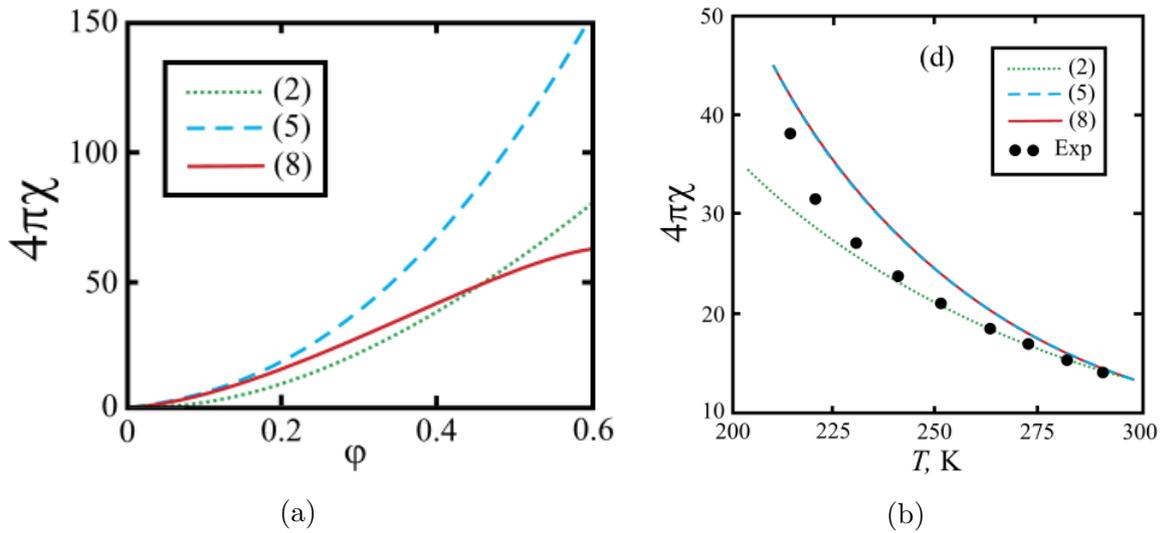


Figura 7.41 – (a) Susceptibilidade magnética inicial em função da concentração volumétrica ϕ , à uma temperatura $T = 250\text{K}$. A linha pontilhada corresponde a MMF2, teoria 1, a linha tracejada denota a teoria polidispersa, teoria 2, e a linha contínua é obtida a partir da nova teoria polidispersa, teoria 3. Valores típicos $M_0 = 480\text{kA/m}$, $\alpha = 7$ e $x_0 = 1,28\text{nm}$. (b) Dependência da susceptibilidade com a temperatura, para uma amostra de bromopentano 2, com ϕ igual a 0,238 pela primeira teoria, ϕ igual a 0,250 pela segunda teoria e ϕ igual a 0,197 pela terceira teoria. Os pontos são dados experimentais (SOLOVYOVA et al., 2016). Imagens retiradas de (SOLOVYOVA et al., 2016).

As Figuras (7.41)-(a) e (b) deixam claro a dependência da susceptibilidade magnética com a concentração e a temperatura.

Adicionalmente, a susceptibilidade do Ferro (recozido) pode chegar a 5499 (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982).

A partir da Fig. (7.40), verifica-se que a susceptibilidade pode atingir valores de ordem $\chi = 10$, a baixas temperaturas. Da Figura (7.41)-(a), vê-se que para uma alta concentração ($\phi = 0,5$), a susceptibilidade magnética atinge valores de até aproximadamente $\chi = 8$, para uma temperatura fixa de 250K, já a Fig. (7.41)-(b), mostra que a susceptibilidade magnética pode atingir valores de aproximadamente $\chi = 4$.

De posse destes valores característicos apresentados, o autor decidiu por estudar o efeito da variação da susceptibilidade magnética de um ferrofluido, variando-a numa faixa de $0,1 \leq \chi_1 \leq 10,0$.

7.3.3.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética do ferrofluido χ_1

Tomando-se como limites de variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido os valores característicos apresentados na discussão acima, encontrou-se uma faixa de possível variação da mesma, aqui sendo $0,1 \leq \chi_1 \leq 10,0$. As Figuras (7.42) e (7.43) apresentam os valores para a altura de deslocamento vertical D calculadas numericamente para esta faixa de valores. A Figura (7.44) apresenta valores da quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$.

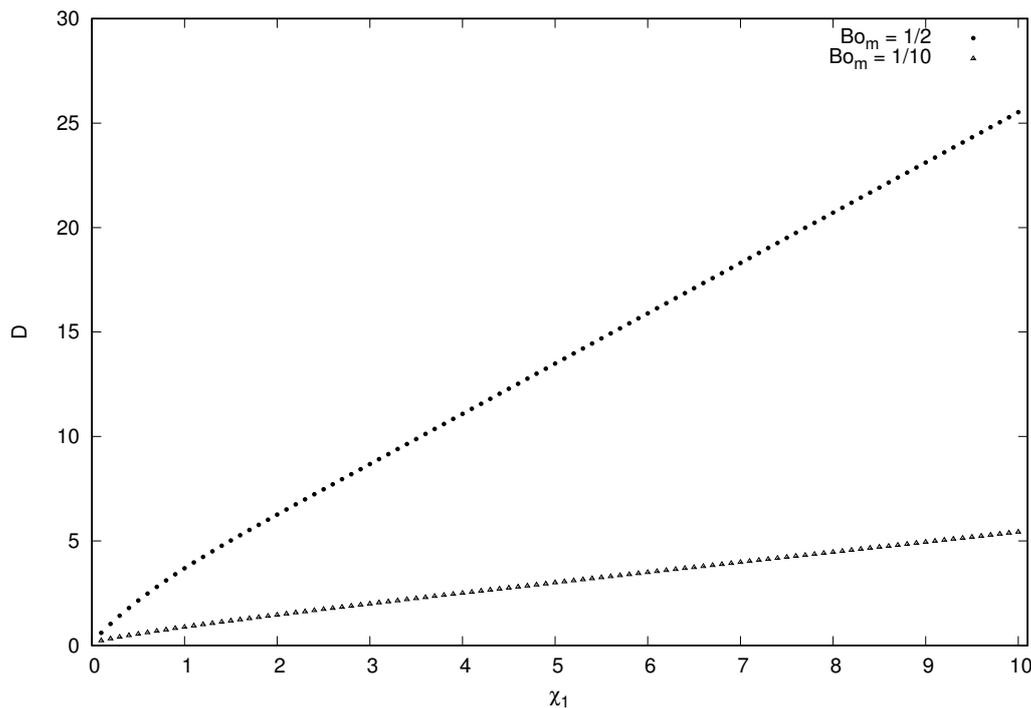


Figura 7.42 – Altura de deslocamento vertical em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido: Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$.

A partir da Fig. (7.42) verifica-se que a altura de deslocamento vertical D aumenta à medida em que a susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido é aumentada. Para uma susceptibilidade magnética $\chi_1 = 1,0$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 3,691$, já

para $\chi_1 = 10,0$, obteve-se um deslocamento vertical $D = 25,521$. Deste modo, vê-se que um aumento de 10 vezes na susceptibilidade magnética causou um aumento de aproximadamente 7 vezes no deslocamento vertical. Interpretando-se a susceptibilidade magnética como uma medida percentual do número de partículas que respondem ao campo magnético - como o fluido responde ao mesmo - e, sabendo-se tratar de um contexto de um fluido superparamagnético, onde $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, admite-se que o tempo de resposta das partículas magnéticas ao campo magnético aplicado é instantâneo e que seus momentos de dipolo magnético se alinham na direção do campo assim que o mesmo é aplicado. Desta maneira, não existe desvio, do ponto de vista vetorial, entre \mathbf{M} (média da projeção do alinhamento dos momentos de dipolo magnético das partículas em cada direção do espaço) e \mathbf{H} (o campo aplicado com uma direção específica), desde que $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, fala-se de um regime onde \mathbf{M} é paralelo à \mathbf{H} . Conforme aumenta-se o valor de χ_1 , aumenta-se o percentual de partículas sensíveis ao efeito do campo magnético e, conseqüentemente, o estado de polarização magnética do meio. De forma análoga, aumentando-se a susceptibilidade magnética, aumenta-se o quão reativo o ferrofluido é à aplicação do campo, ou, em outras palavras, o quanto ele se magnetiza. Como a susceptibilidade magnética está intrinsecamente ligada à contribuição magnética à altura de deslocamento, o seu aumento acaba por aumentar o salto de pressões na interface, pois adiciona à pressão capilar (associada à tensão superficial e à curvatura) a contribuição de uma pressão magnética maior, responsável por vencer o efeito das pressões hidrostáticas. Resultado este confirmado pela Eq. (3.24), onde vê-se que um aumento na magnetização do fluido causa um aumento no salto de pressões, devido à presença da densidade de força de Kelvin - $\mu_0\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}$ -. Comparando-se as duas curvas obtidas, para baixos e médios números de Bond magnético, é possível ver-se também que, mesmo para condições onde as pressões magnéticas são relativamente baixas - baixos números de Bond magnético -, é possível obter-se as mesmas alturas de deslocamento vertical obtidas para números de Bond magnético superiores, somente aumentando-se o valor susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido.

A Figura (7.43) mostra que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado possua ângulo de contato $\alpha > \pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo à medida em que aumentava-se a susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Para valores de χ_1 até aproximadamente 1,1, verifica-se alturas de deslocamento vertical negativas - involução de fluido -, contudo, para susceptibilidades magnéticas superiores a este valor, houve um deslocamento vertical de fluido positivo - ascensão de fluido -. Os resultados apresentados na Fig. (7.43) evidenciam que mesmo para sistemas líquido-sólido-gás com ângulos de contato maiores que $\pi/2$, ainda é possível deslocar-se fluido verticalmente para cima, aumentando-se somente a susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, em contrapartida ao resultados evidenciados pela Fig.(6.5), para o caso limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados não-magnéticos, onde em sistemas com ângulo de contato $\alpha > \pi/2$ há involução de fluido.

A Figura (7.44) apresenta os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$,

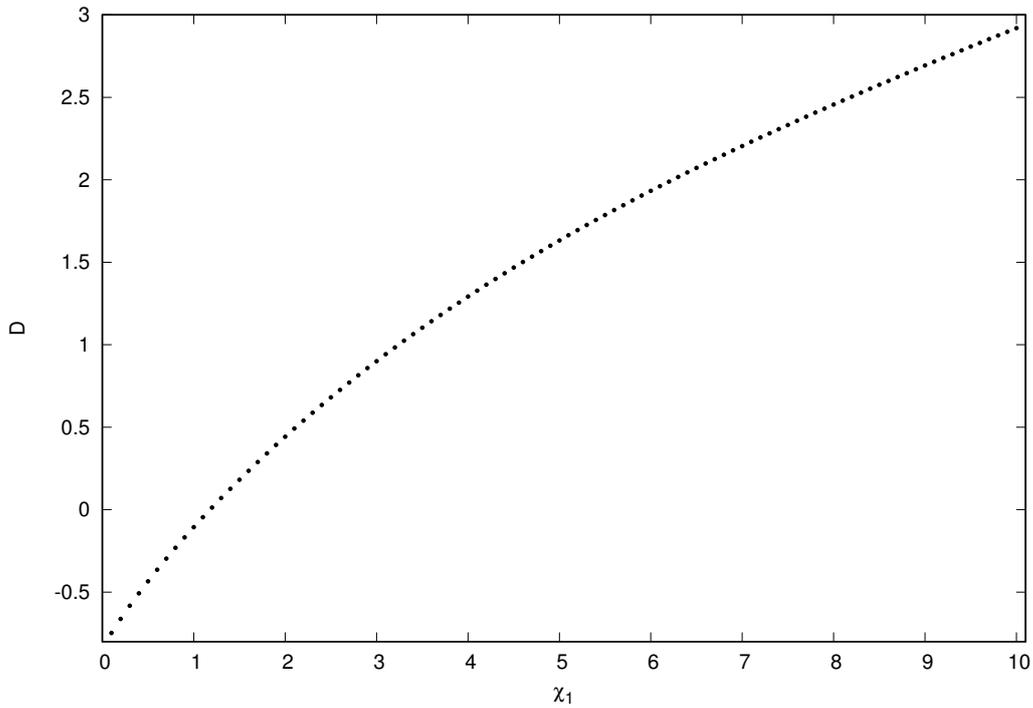


Figura 7.43 – Altura de deslocamento vertical em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$ e $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,30$.

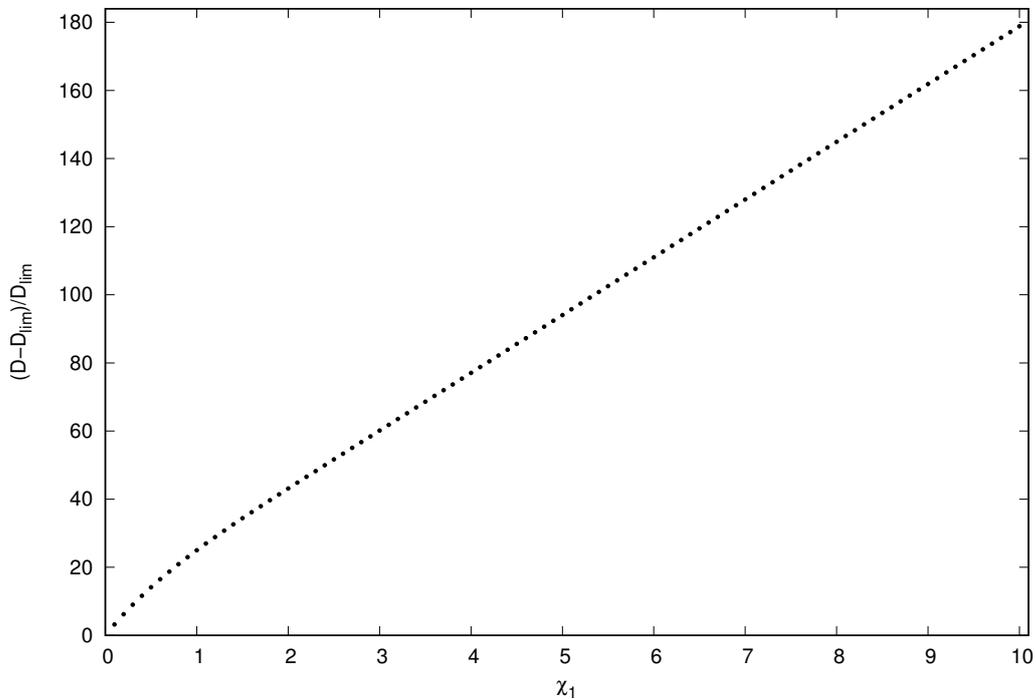


Figura 7.44 – Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para $Bo_m = 1/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$.

interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã externo, em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Para as condições físicas analisadas, $D_{lim} = 0,142$. Observa-se que a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, após determinado valor de χ_1 , varia de forma aproximadamente linear em relação a χ_1 . Para uma susceptibilidade magnética $\chi_1 = 10,0$, houve um deslocamento vertical aproximadamente 180 vezes superior ao limite onde não há a presença de um ímã permanente externo.

Os resultados obtidos são extremamente significantes, evidenciando que em aplicações onde deseja-se obter o máximo de deslocamento vertical possível (e.x. indústria petrolífera), é possível fazê-lo utilizando-se ferrofluidos com susceptibilidades magnéticas maiores, ou, como evidenciado por (TARI et al., 1978) e (SOLOVYOVA et al., 2016), aumentando-se a concentração do ferrofluido e diminuindo-se a sua temperatura.

7.3.3.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação da susceptibilidade magnética do ferrofluido χ_1

As Figuras (7.45), (7.46), (7.47) e (7.48) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido.

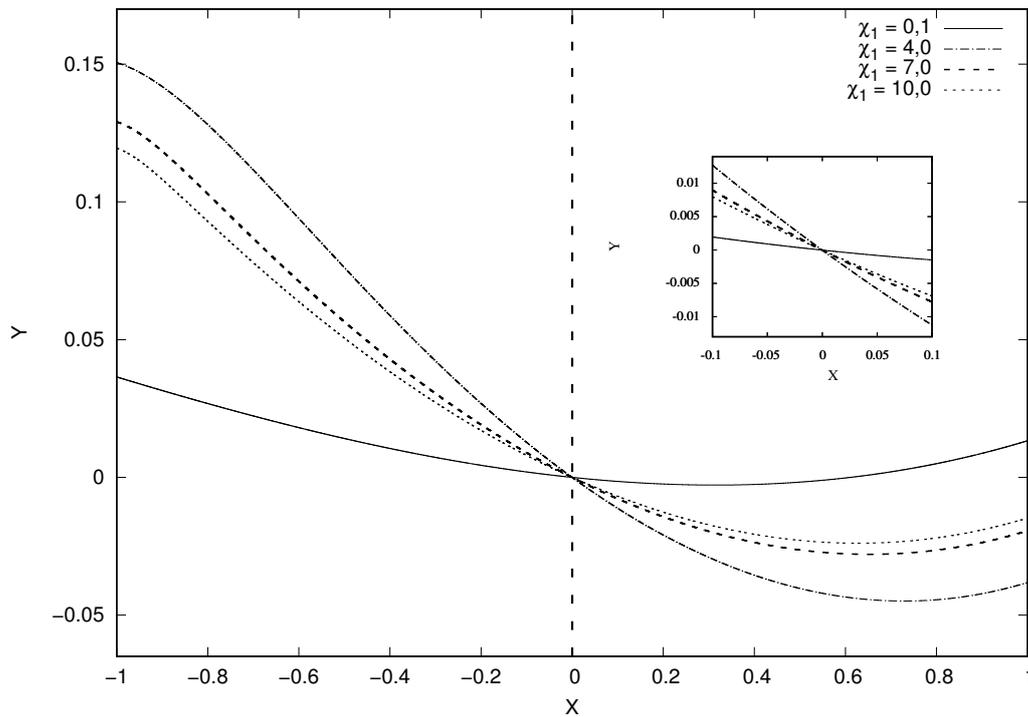


Figura 7.45 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $B_{o_m} = 1/2$. Para (c) e (d): $B_{o_m} = 1/10$.

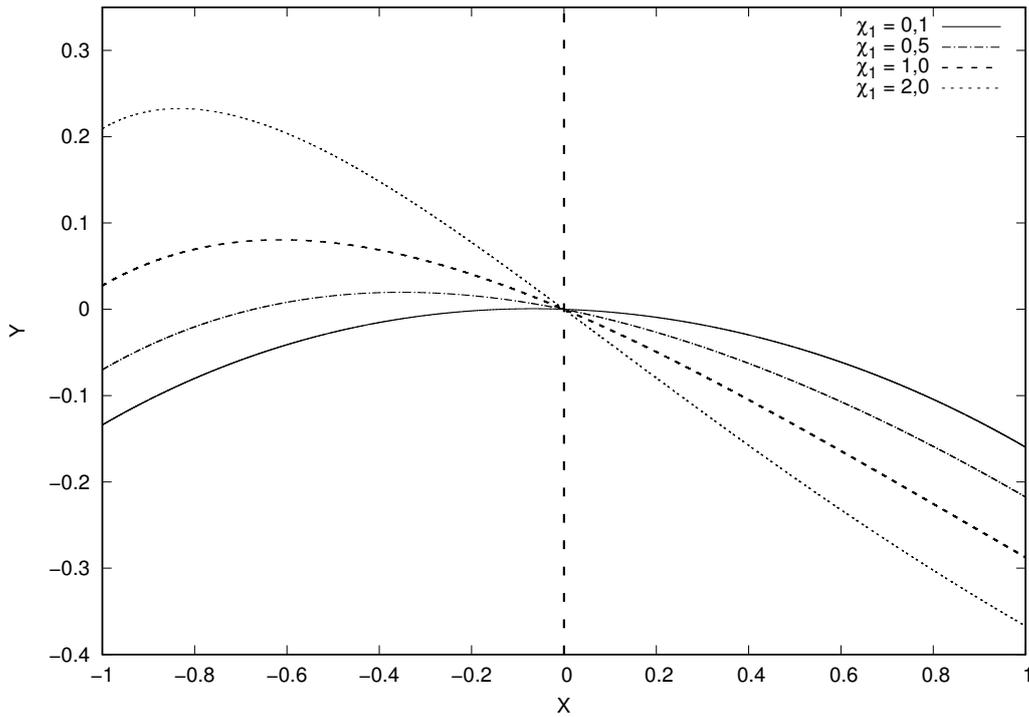


Figura 7.46 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$.

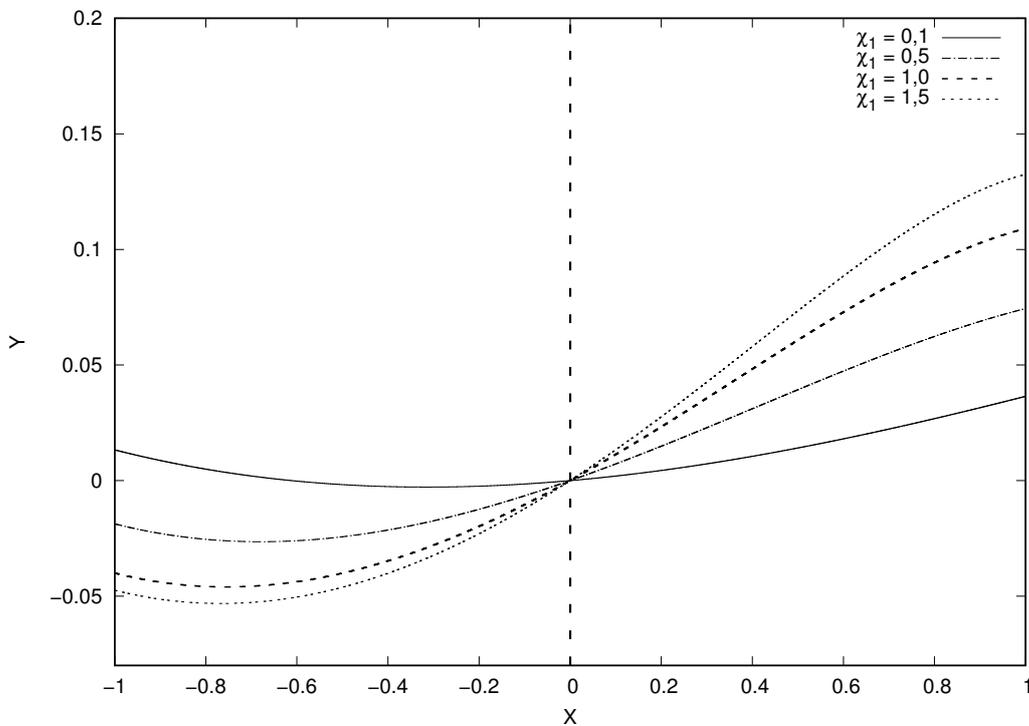


Figura 7.47 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$.

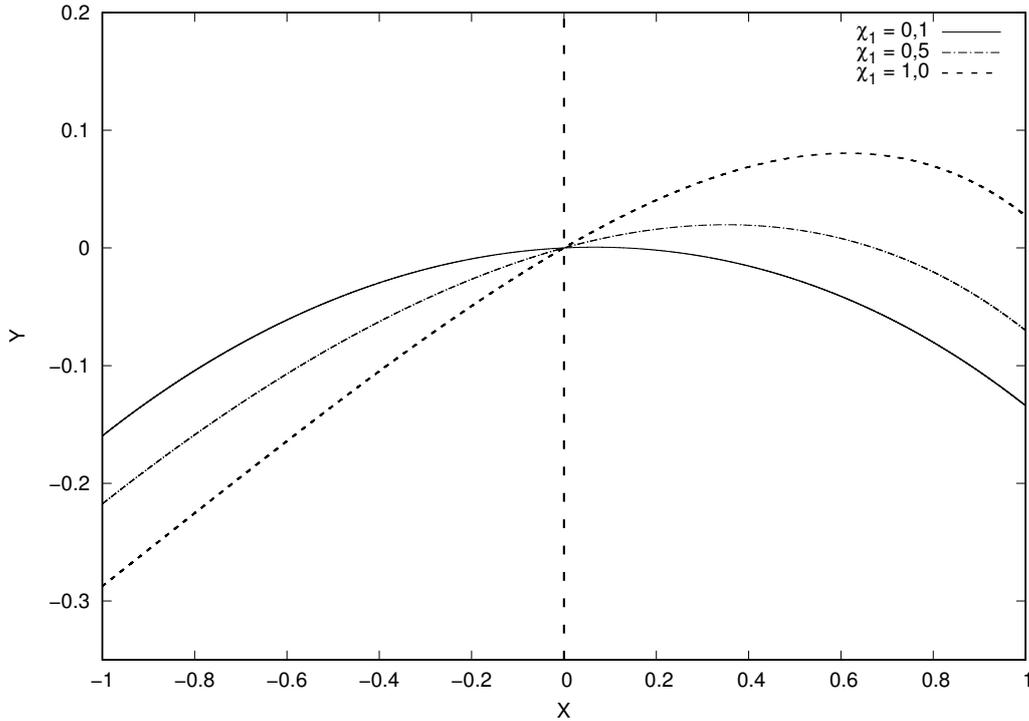


Figura 7.48 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,30$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$. Para (a) e (b): $Bo_m = 1/2$. Para (c) e (d): $Bo_m = 1/10$.

As Figuras (7.45), (7.46), (7.47) e (7.48) mostram que a variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um crescimento na assimetria das curvas obtidas à medida em que aumenta-se χ_1 . Como já argumentado em outras seções deste projeto, o aumento na antissimetria das curvas é uma medida indireta da magnitude dos efeitos magnéticos.

A Figura (7.45) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. A Figura (7.45) também indica que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que χ_1 é aumentada, o mesmo ocorre com as derivas no centro $(0,0;0,0)$, como indica o detalhe da Fig. (7.45).

A Figura (7.46) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos observados para condições onde o ângulo de contato α é menor que $\pi/2$.

A Figura (7.47) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha < \pi/2$.

Neste caso, $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. Também verifica-se o aumento do grau de assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, à medida em que aumenta-se χ_1 .

A Figura (7.48) apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$.

Comparando-se as Figs. (7.47) e (7.48), vê-se que sistemas líquido-sólido-gás com ângulos de contato $\alpha > \pi/2$ não sofrem deformações na curvatura tão bruscas para pequenas perturbações na susceptibilidade magnética como observado em sistemas com $\alpha < \pi/2$.

As Figuras (7.49), (7.50), (7.51) e (7.52) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético.

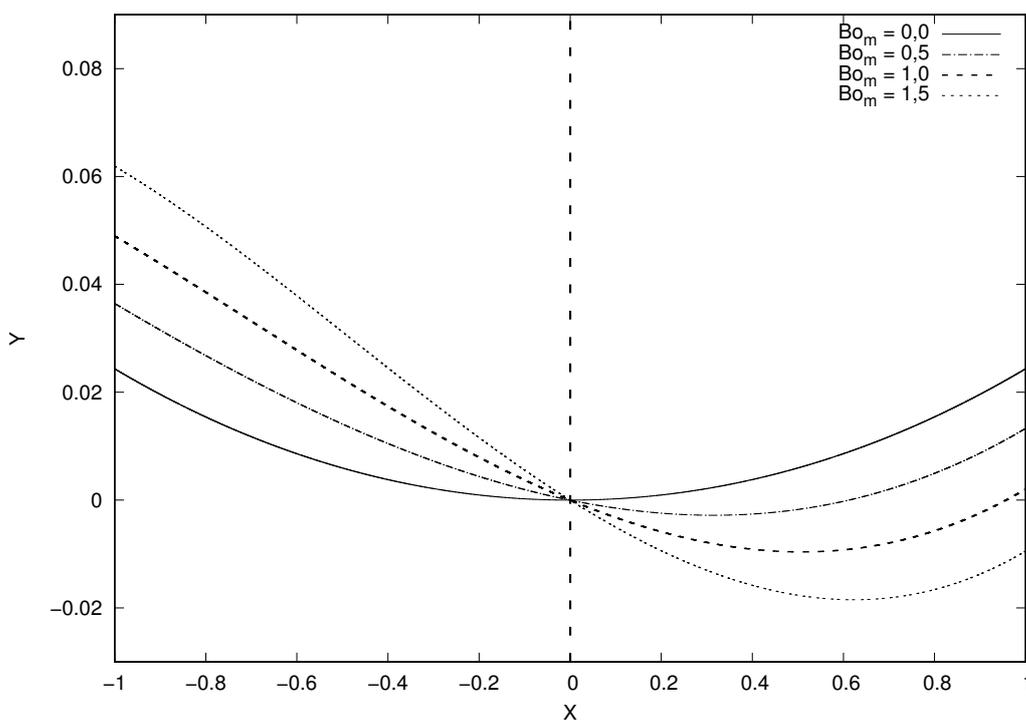


Figura 7.49 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 0,1$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

A partir das Figs. (7.49), (7.50), (7.51) e (7.52) vê-se que o aumento da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido - Fig. (7.49) \rightarrow Fig. (7.52) - tende a tornar as superfícies livres cada vez mais assimétricas, fenômeno este observado mesmo em condições de baixas pressões magnéticas - baixos números de Bond magnético -, causando assim, como já discutido, um aumento na altura de deslocamento vertical. Para uma susceptibilidade

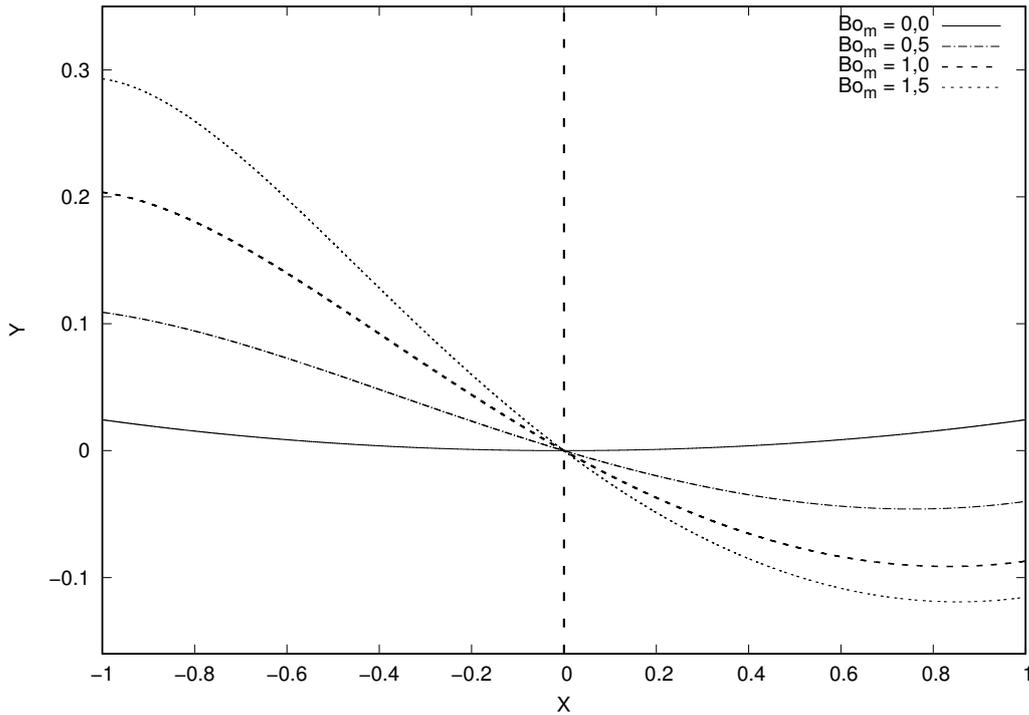


Figura 7.50 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

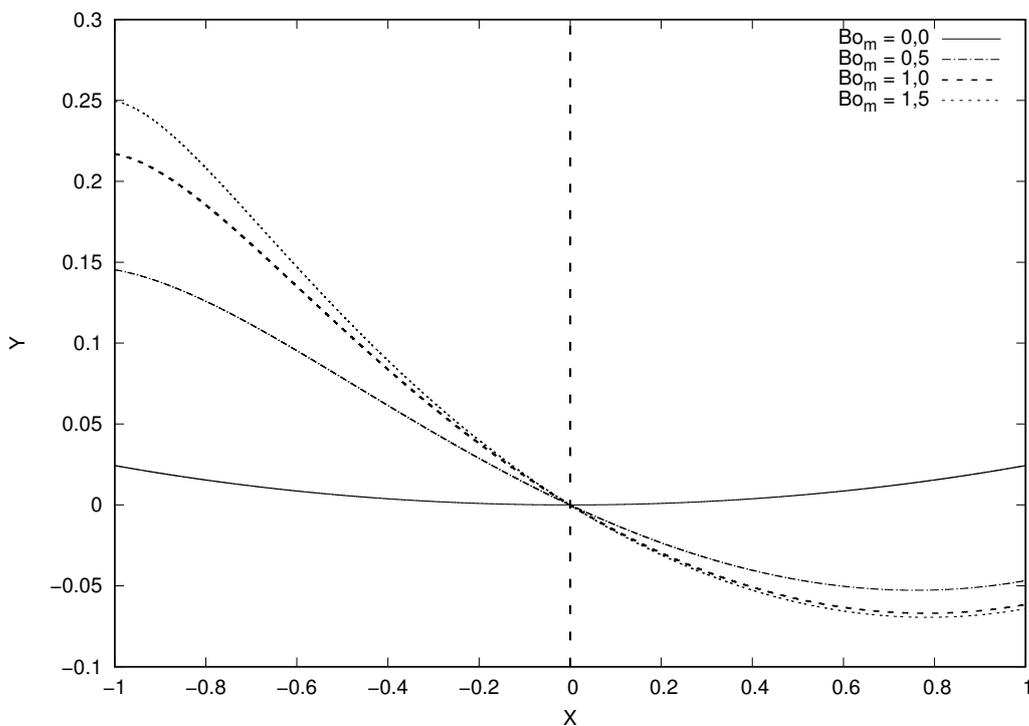


Figura 7.51 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 2,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

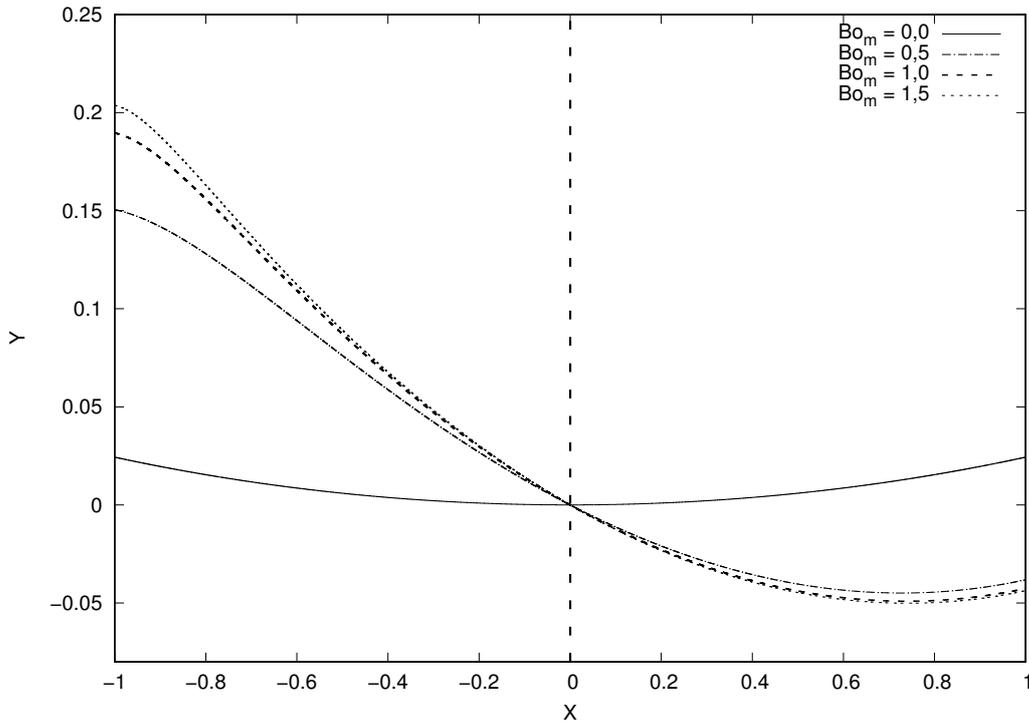


Figura 7.52 – Formatos da superfície livre em função da variação da susceptibilidade magnética χ_1 do ferrofluido, para diferentes números de Bond magnético, para $\chi_1 = 3,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$; $2B = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

magnética χ_1 fixa, um aumento no número de Bond magnético, ou seja, um aumento na importância relativa entre as pressões magnéticas e pressões capilares, gera um aumento no grau de assimetria das curvas, indicando um comportamento mais complexo e menos linear do formato do menisco. Diminuindo-se χ_1 , vê-se que as curvas tornam-se cada vez mais simétricas. Argumenta-se que no caso limite onde $\chi_1 \ll 1$, o formato da superfície livre é idêntico ao obtido para o caso limite onde não há a presença de um ímã externo, aqui, a mesma curva obtida para condições onde $Bo_m = 0$.

A Figura (7.49) evidencia que, mesmo em condições de baixas susceptibilidades magnéticas χ_1 , ainda é possível gerar-se uma quebra de simetria na superfície livre devido ao aumento da importância relativa das pressões magnéticas - aumento do número de Bond magnético -.

A Figura (7.52) indica que a partir de certo valor de susceptibilidade magnética χ_1 , as curvas obtidas para baixos números de Bond magnético são tão antissimétricas quanto as obtidas para altos Bo_m , sugerindo que após determinado limite, a importância relativa entre a χ_1 e Bo_m na dinâmica de deslocamento de fluido magnético é dominada por χ_1 , indicando que mesmo em condições de baixíssimas pressões magnéticas - baixos Bo_m -, é possível aumentar-se a assimetria da superfície livre aumentando-se χ_1 .

7.3.4 Análise do efeito da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B na altura de deslocamento vertical bem como no formato da superfície livre formada.

Primeiramente, a análise foi feita considerando-se dimensões de ímãs comerciais, utilizando-se para tanto ímãs em barra de neodímio (NdFeB), fornecidos pelo fabricante “*Supermagnete*” (SUPERMAGNETE, 20–a).

Diante disso, algumas considerações devem ser feitas:

1. Neste projeto, realiza-se uma análise bidimensional, e portanto, a orientação com que o ímã tridimensional, fornecido pelo fabricante, é feita é de extrema importância. Assim, combinando-se as dimensões arbitrárias x , y e z de um ímã tridimensional em pares bidimensionais, é possível obter-se seis configurações distintas: $(x;y)$, $(x;z)$, $(y;x)$, $(y;z)$, $(z;x)$ e $(z;y)$, de acordo com a Fig. (7.68). Deste modo, para cada ímã comercial selecionado para análise, todas as 6 combinações possíveis foram analisadas.

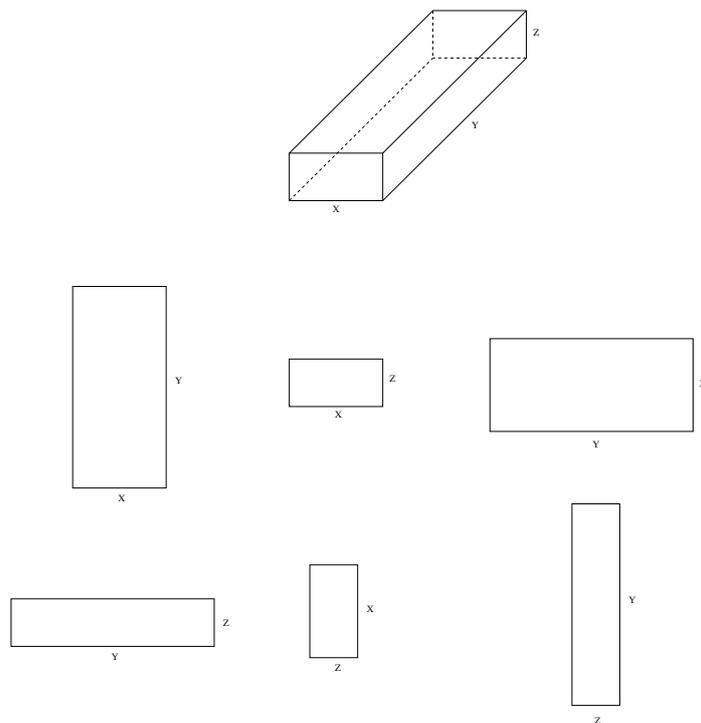


Figura 7.53 – Configurações bidimensionais possíveis para um ímã tridimensional.

2. No catálogo do fabricante, é possível encontrar-se alguns dados sobre os ímãs dispo-

níveis, como as dimensões geométricas, a massa, a composição química, um código de uma classificação chamada “magnetização” e a força do ímã, como mostrado na Fig. (7.94). Segundo o fabricante, o código representativo da classificação “magnetização” (e.x. N45, N48, 35H) é uma medida da qualidade do material magnético, indicando quanta energia magnética por volume é contida no mesmo e até qual temperatura o ímã pode ser utilizado. Os números (e.x. 40,42) são equivalentes à aproximadamente ao máximo produto da energia do ímã, em MOe. As letras (e.x. N, H, SH) dizem algo a respeito da máxima temperatura de trabalho, que pode ser de 80, 100, 120, 150, 180 ou 200°C (SUPERMAGNETE, 20–c).

Order online at www.supermagnete.de Tel. +49 7731 939 839 2 Fax +49 7731 939 839 9 supermagnete.de The World's Strongest Magnets

Neodymium (NdFeB) block magnets, medium
 All medium block magnets (except for Q-19-13-06-LN) have the north and south pole on the two largest surfaces.

	Q-10-10-05-N	Price in EUR	We couldn't think of any unique comments to make about this magnet. It's simply a good average model.
	Block magnet	5 pcs. 0,75 ea.	
	10 x 10 x 5 mm	from 15 pcs. 0,65 ea.	
	Weight: 3,8 g	from 40 pcs. 0,57 ea.	
	Nickel-plated (Ni-Cu-Ni)	from 80 pcs. 0,52 ea.	
	Magnetisation: N42		
	strength: approx. 2,8 kg		

Figura 7.54 – Características do ímã disponibilizadas pelo fabricante “Supermagnete”. Imagem retirada do catálogo (SUPERMAGNETE, 20–a).

- No endereço eletrônico do fabricante na internet - <https://www.supermagnete.de> - há uma página dedicada à caracterização dos códigos referentes à classificação “magnetização”. Para cada código (e.x. N45), existe um valor associado a B_r (magnetismo residual), bH_c e iH_c (intensidade de campo coercitivo), $B \times H_{max}$ (produto de energia) e máxima temperatura operacional, como mostrado na Fig. (7.95).

Physical Magnet Data

Neodymium Magnets

Grade	Residual magnetism		Coercive field strength				Energy product		Max. operational temp.
	Br		bHc		iHc		(BxH)max		
	Gauss (G)	Tesla (T)	kOe	kA/m	kOe	kA/m	MGOe	kJ/m ³	
N30	10800-11200	1.08-1.12	9.8-10.5	780-836	≥12	≥955	28-30	223-239	≤80

Figura 7.55 – Características da classificação “magnetização” N30. Imagem retirada de (SUPERMAGNETE, 20–b).

Segundo o fabricante, a intensidade de campo coercitivo H_c descreve a intensidade necessária para desmagnetizar completamente um ímã. Existem diferenças entre a intensidade de campo coercitivo bH_c da densidade de fluxo e a intensidade de campo coercitivo jH_c de polarização. Se um ímã é exposto a uma força de campo de desmagnetização de bH_c , a densidade de fluxo magnético no ímã desaparece. O ímã em si ainda é magnético, mas a densidade de fluxo que o ímã gerou é exatamente

contrária à densidade de fluxo do campo desmagnetizante, de modo que os dois se cancelam mutuamente. O ímã só perde sua polarização magnética, e portanto seu magnetismo total, por uma intensidade de campo desmagnetizante de jH_c . A unidade de medida padrão utilizada para a intensidade é A/m (Ampère por metro) (SUPERMAGNETE, 20-d).

Diante desta informação, o autor decidiu por analisar ímãs que possuem valores de intensidade de campo coercitivo similares, de modo a manter o parâmetro de análise $M_i/4\pi M_s$ constante.

Após as considerações acima feitas, o autor decidiu analisar os ímãs apresentados no Apêndice - A, todos disponíveis no catálogo do fabricante “*Supermagnete*” (SUPERMAGNETE, 20-a). Tendo como base as dimensões dos ímãs comerciais apresentados no Apêndice A, o autor encontrou uma faixa de possível variação das dimensões horizontal e vertical do ímã: $1,0 \leq 2A \leq 10,0$ e $1,0 \leq 2B \leq 10,0$. A análise foi feita fixando-se uma das dimensões e variando-se a outra, de modo a verificar-se o efeito da variação de cada uma isoladamente.

7.3.4.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B

A Tabela (7.10) apresenta as alturas de deslocamento vertical calculadas numericamente para a análise da variação das dimensões geométricas do ímã 2A e 2B. Os valores de 2A e 2B analisados são combinações das dimensões dos ímãs comerciais apresentados na Tab. (9.1). É necessário ressaltar-se que as dimensões apresentadas na Tab. (9.1) - Apêndice A - são grandezas físicas dimensionais [mm], e não dimensões adimensionais como as utilizadas na solução numérica. O autor decidiu por considerar estas dimensões como parâmetros adimensionais afim de realizar as simulações numéricas. Para um caso onde a separação entre as placas paralelas é $2c = 2\text{mm}$, a asserção de que 2A e 2B são iguais às dimensões físicas dimensionais dos ímãs é válida.

A partir da Tab. (7.10) verifica-se que, à medida em que as dimensões do ímã são aumentadas, a altura de deslocamento vertical D também aumenta. Para um ímã com dimensões adimensionais 10×1 , houve um deslocamento vertical de 0,287, já para um ímã com dimensões adimensionais 10×10 , houve um deslocamento vertical de 15,004. Vê-se que um aumento de 10 vezes na dimensão vertical do ímã causou um deslocamento vertical aproximadamente 52 vezes maior.

Tomando-se como limites de variação das dimensões do ímã 2A e 2B os valores das dimensões dos ímãs comerciais apresentados na Tab. (9.1) - Apêndice A -, encontrou-se uma faixa de variação dessas dimensões, aqui sendo $1,0 \leq 2A \leq 10,0$ e $1,0 \leq 2B \leq 10,0$.

As Figuras (7.56), (7.57), (7.58) e (7.59) apresentam os valores para a altura de deslocamento vertical D calculados numericamente para esta faixa de valores. As Figuras

Tabela 7.10 – Altura de deslocamento vertical em função das dimensões do ímã 2A e 2B.
 Para esta tabela: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,050$.

2A	2B	D	2A	2B	D												
1,0	1,0	0,143	1,5	4,0	0,193	2,5	5,0	0,367	4,0	4,0	0,509	5,0	4,0	0,718	8,0	3,0	0,978
1,0	1,5	0,145	1,5	5,0	0,223	3,0	2,0	0,193	4,0	5,0	0,721	5,0	5,0	1,049	8,0	4,0	1,635
1,0	4,0	0,165	1,5	10,0	0,487	3,0	3,0	0,257	4,0	6,0	0,984	5,0	10,0	3,928	10,0	1,0	0,287
1,0	5,0	0,178	2,0	2,5	0,177	3,0	4,0	0,348	4,0	8,0	1,671	6,0	1,2	0,216	10,0	1,2	0,351
1,0	10,0	0,295	2,0	3,0	0,193	3,0	5,0	0,467	4,0	10,0	2,580	6,0	2,0	0,348	10,0	1,5	0,470
1,2	5,0	0,194	2,0	4,0	0,233	3,0	8,0	1,002	5,0	1,0	0,177	6,0	4,0	0,975	10,0	2,0	0,725
1,2	6,0	0,217	2,0	5,0	0,286	3,0	10,0	1,519	5,0	1,2	0,193	6,0	6,0	2,044	10,0	3,0	1,458
1,2	7,0	0,246	2,0	6,0	0,352	4,0	1,0	0,165	5,0	1,5	0,222	6,0	7,0	2,750	10,0	4,0	2,489
1,2	10,0	0,363	2,0	10,0	0,755	4,0	1,5	0,193	5,0	2,0	0,284	7,0	1,2	0,243	10,0	5,0	3,819
1,5	1,0	0,145	2,5	1,5	0,162	4,0	2,0	0,233	5,0	2,5	0,365	7,0	6,0	2,735	10,0	10,0	15,004
1,5	2,5	0,162	2,5	2,0	0,177	4,0	3,0	0,347	5,0	3,0	0,464	7,0	7,0	3,691	-	-	-

(7.60) e (7.61) apresentam valores para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$.

A partir das Figs. (7.56) e (7.57) verifica-se que um aumento nas dimensões adimensionais horizontal 2A ou vertical 2B do ímã causa um aumento na altura de deslocamento vertical D, e este se dá de uma forma aproximadamente hiperbólica. Estes resultados evidenciam a dependência da magnitude dos efeitos magnéticos com as dimensões geométricas do ímã. Segundo o fabricante de ímãs “*Supermagnete*”, analisando-se dois ímãs com diferentes tamanhos e classificações de magnetização dentre seus produtos, a diferença na força dos ímãs se dá mais devido às diferenças nos seus volumes do que às diferenças em suas magnetizações. Por este motivo, quanto maior o ímã, mais forte o mesmo será, ainda que sua classificação de magnetização seja menor ([SUPERMAGNETE, 20-c](#)). Na presença de um ímã com maiores dimensões, os efeitos de força magnética - densidade de força de Kelvin: $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$; Eq. (3.24) -, proporcional ao gradiente do campo magnético aplicado no contexto de um fluido superparamagnético, serão maiores, uma vez que o campo aplicado possuirá uma magnitude maior, e, conseqüentemente, o salto de pressões na interface será também maior, e desta maneira, uma altura de deslocamento superior será observada. As Figuras (7.56) e (7.57) também mostram que ímãs com dimensões simétricas (e.x. 5×10 e 10×5), promovem alturas de deslocamento vertical distintas. Vê-se também que, mesmo para condições onde as pressões magnéticas são relativamente baixas - baixos números de Bond magnético -, é possível obter-se as mesmas alturas

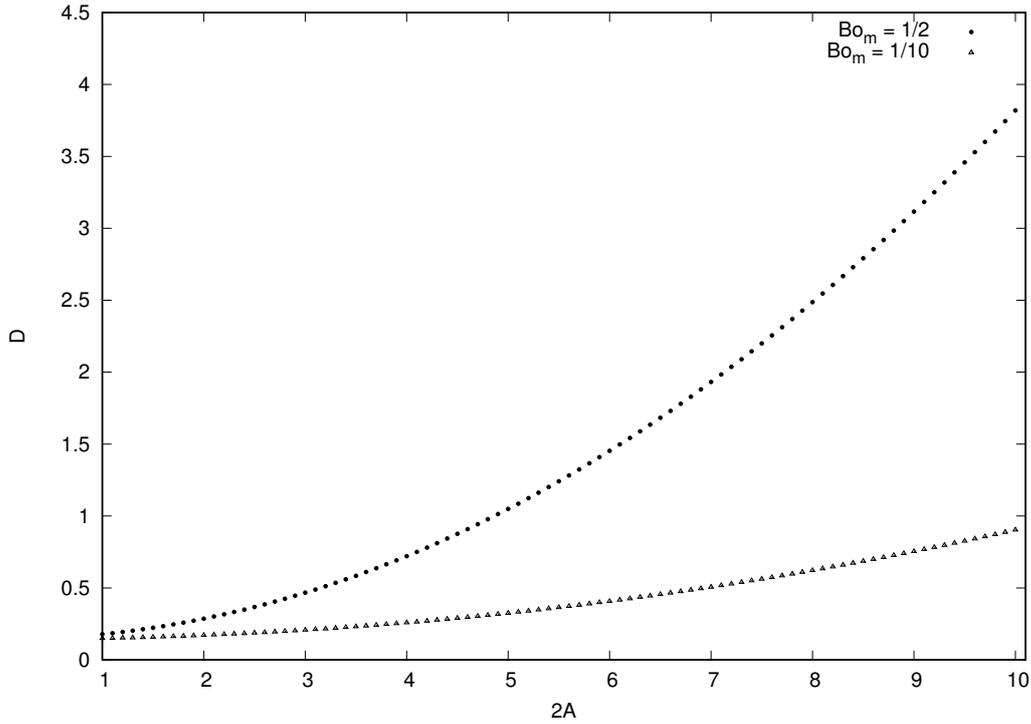


Figura 7.56 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

de deslocamento vertical obtidas para números de Bond magnético superiores, somente aumentando-se as dimensões do ímã.

As Figuras (7.58) e (7.59) mostram que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado possua ângulo de contato $\alpha > \pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo à medida em que aumentava-se as dimensões do ímã permanente. Para valores de $2A$ e $2B$ até aproximadamente 3,9, verifica-se alturas de deslocamento vertical negativas - involução de fluido -, contudo, para dimensões adimensionais superiores a este valor, houve um deslocamento vertical de fluido positivo - ascensão de fluido -. Os resultados apresentados nas Figs. (7.58) e (7.59) evidenciam que mesmo para sistemas líquido-sólido-gás com ângulos de contato $\alpha > \pi/2$, ainda é possível deslocar-se fluido verticalmente para cima, variando-se somente as dimensões dos ímãs permanentes.

As Figuras (7.60) e (7.61) apresentam os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã externo, em função da variação das dimensões adimensionais do ímã. Para as condições físicas analisadas, $D_{lim} = 0,142$. Observa-se que a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$ varia de forma aproximadamente hiperbólica em relação às dimensões adimensionais do ímã permanente. Para um ímã com dimensões adimensionais 5×10 obteve-se $(D - D_{lim})/D_{lim} = 26,611$ e para um ímã com dimensões 10×5 obteve-se $(D - D_{lim})/D_{lim} = 25,910$. Deste modo, vê-se que houve um deslocamento aproximadamente 27 vezes superior ao apresentado para o caso limite onde

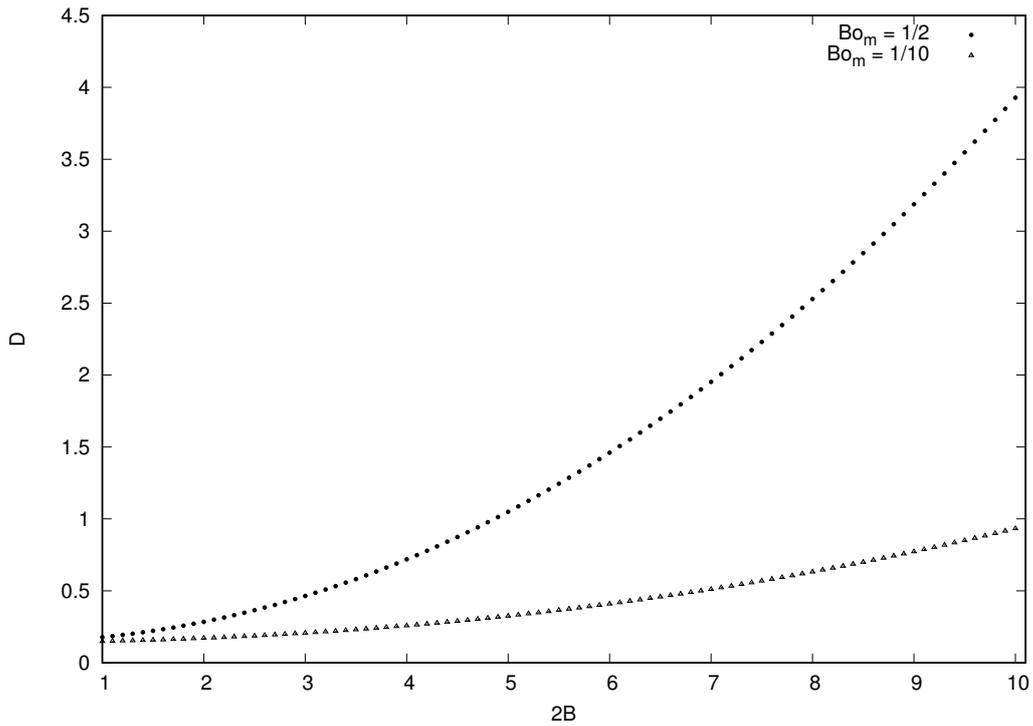


Figura 7.57 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

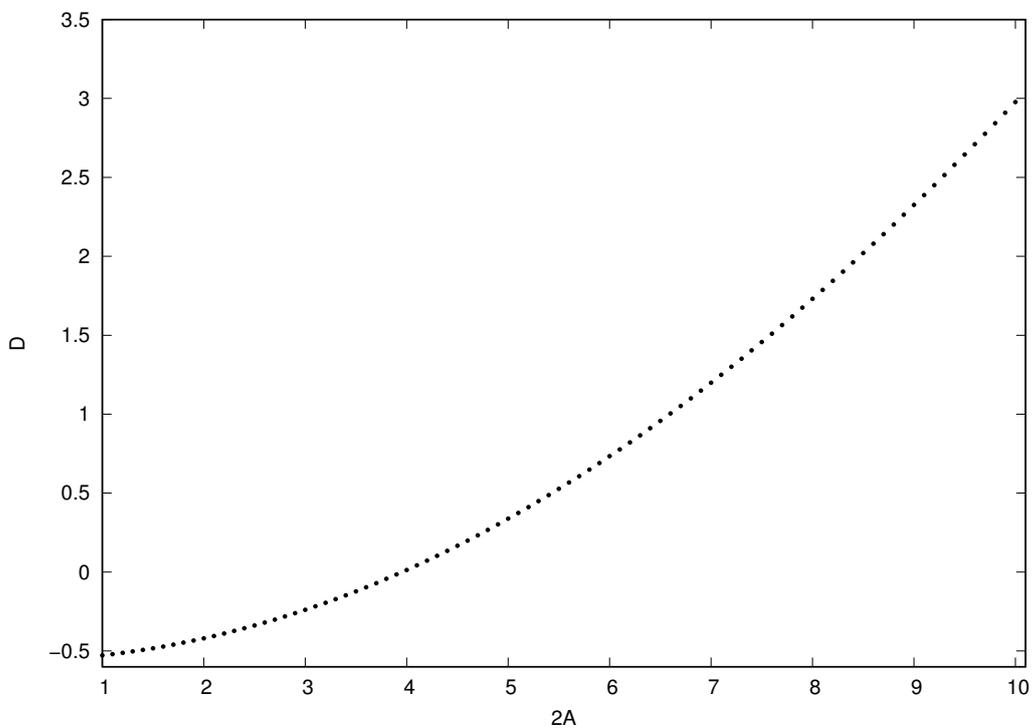


Figura 7.58 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $Bo_m = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$.

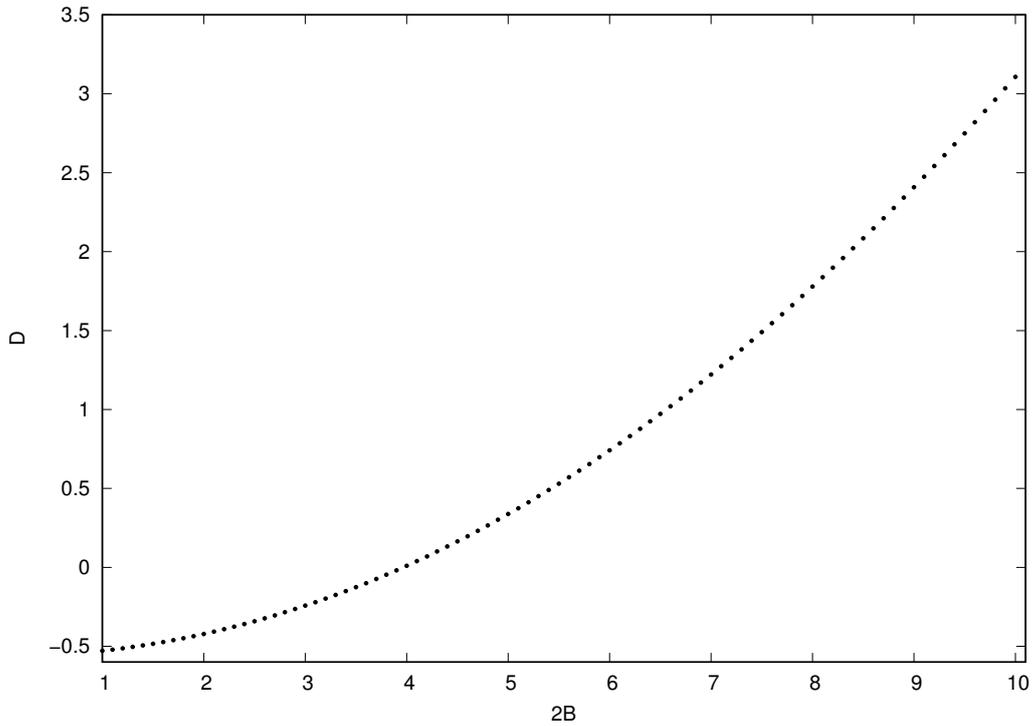


Figura 7.59 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$.

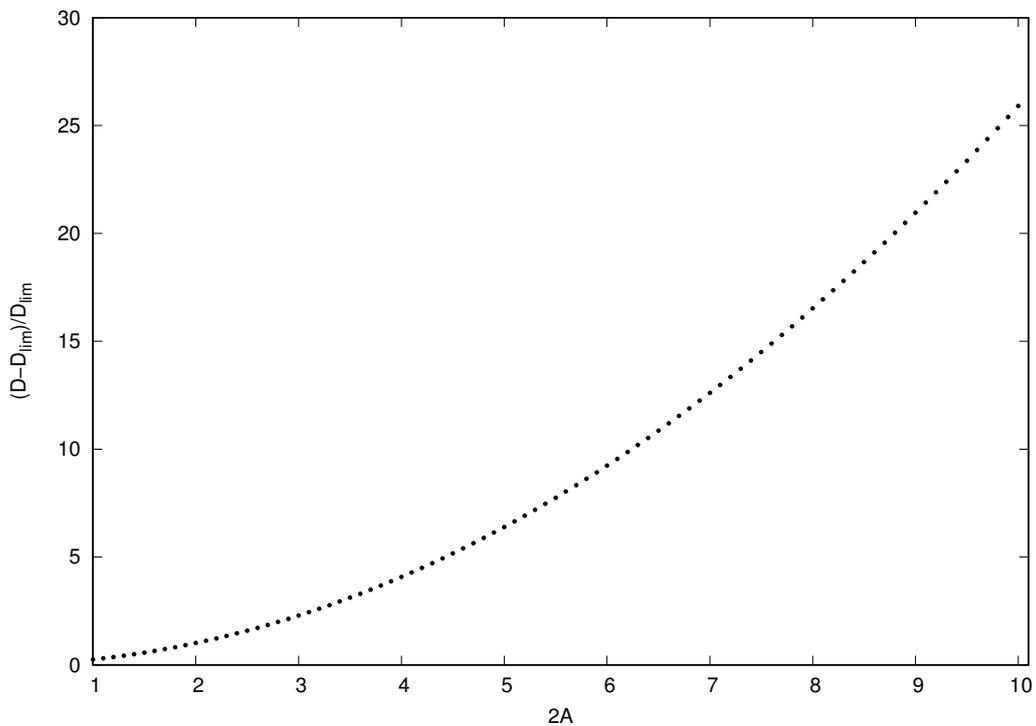


Figura 7.60 – Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite assintótico não-magnético, onde $B_{o_m} = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da dimensão horizontal $2A$ do ímã permanente. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

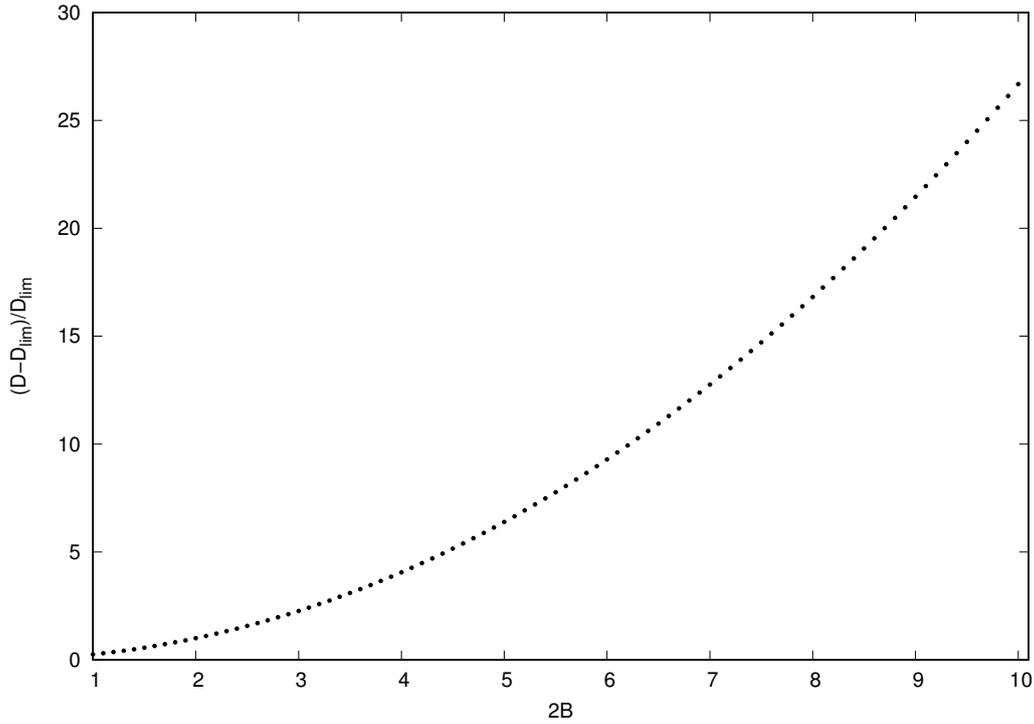


Figura 7.61 – Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite assintótico não-magnético, onde $Bo_m = 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã permanente. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $Bo_m = 1/2$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

não há a presença de um ímã externo.

Os resultados obtidos são extremamente significantes, evidenciando que em aplicações onde deseja-se obter o máximo de deslocamento vertical possível (e.x. indústria petrolífera), é possível fazê-lo utilizando-se ímãs com maiores dimensões.

7.3.4.2 Resultados obtidos numericamente para a superfície livre para a análise da variação das dimensões geométricas do ímã $2A$ e $2B$

As Figuras (7.62), (7.63), (7.64), (7.65), (7.66) e (7.67) apresentam formatos de superfície livre em função da variação das dimensões do ímã.

As Figuras (7.62), (7.63), (7.64), (7.65), (7.66) e (7.67) mostram que a variação das dimensões adimensionais $2A$ e $2B$ do ímã permanente resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um crescimento na assimetria das curvas obtidas à medida em que aumenta-se as dimensões. Como já argumentado em outras seções deste projeto, o aumento na antissimetria das curvas é uma medida indireta da magnitude dos efeitos magnéticos.

As Figuras (7.62) e (7.64) apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da dimensão vertical $2B$ e horizontal $2A$ do ímã, respectivamente, para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos

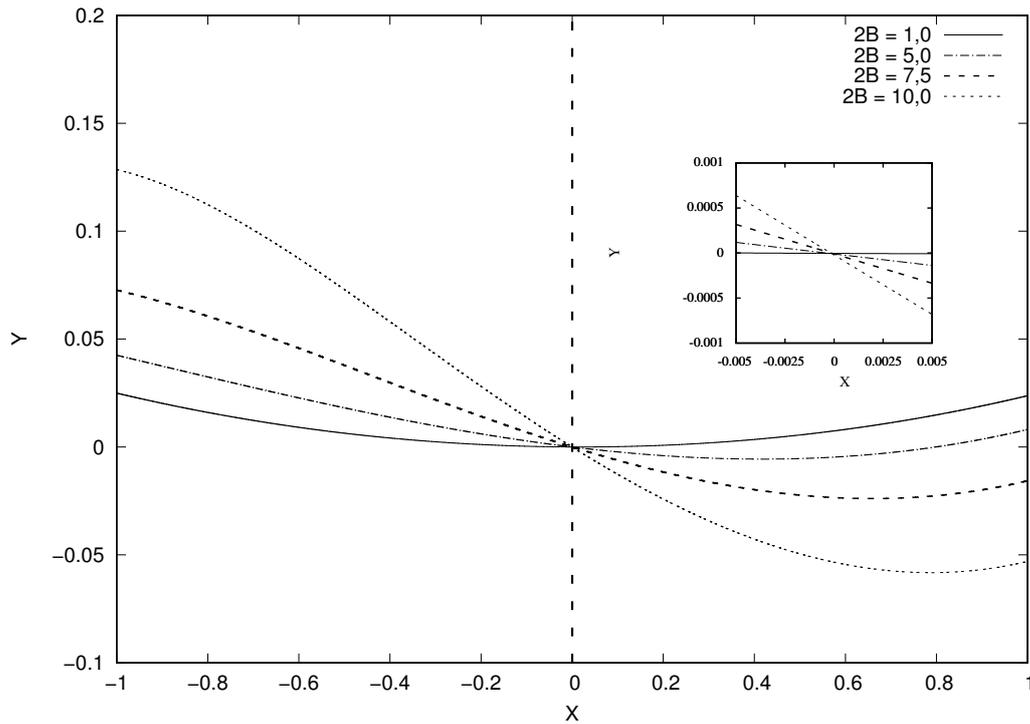


Figura 7.62 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

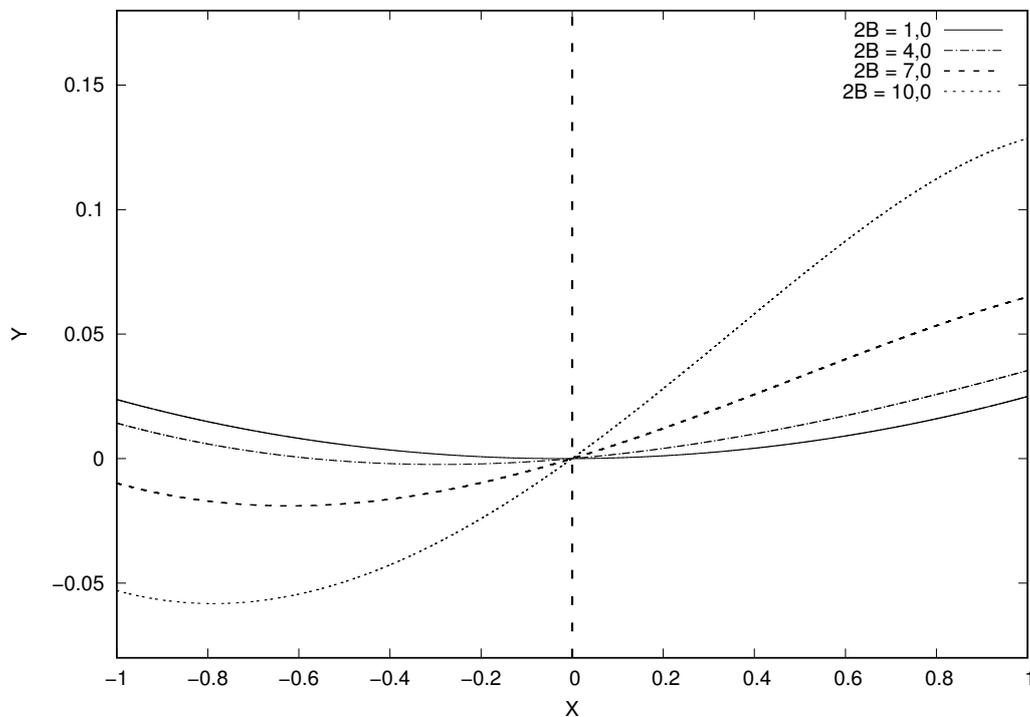


Figura 7.63 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

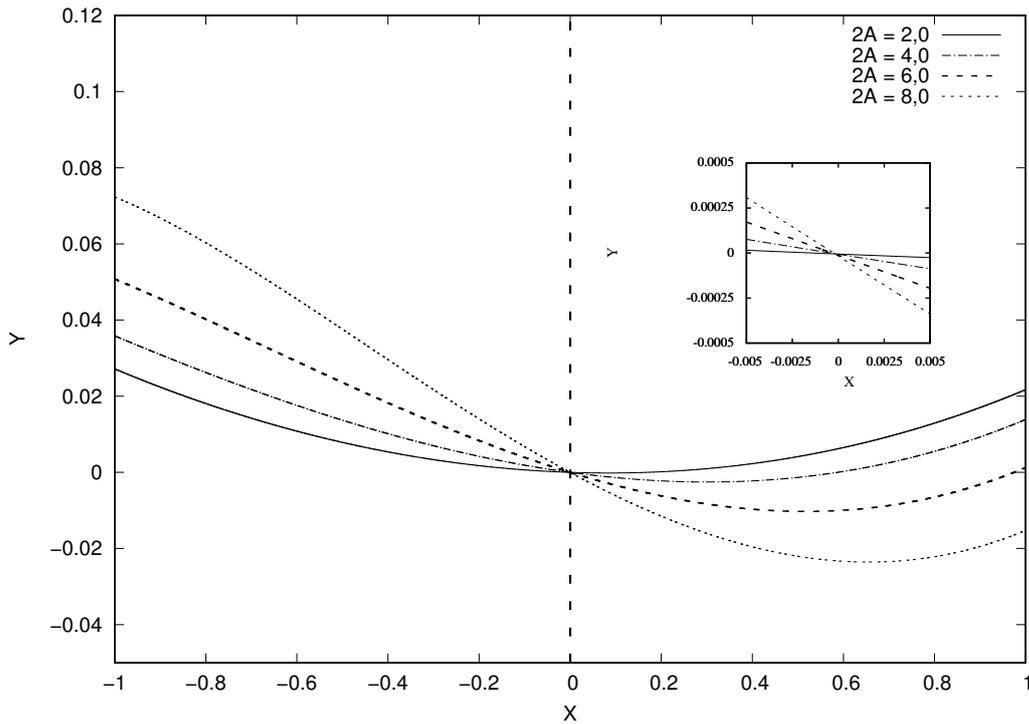


Figura 7.64 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

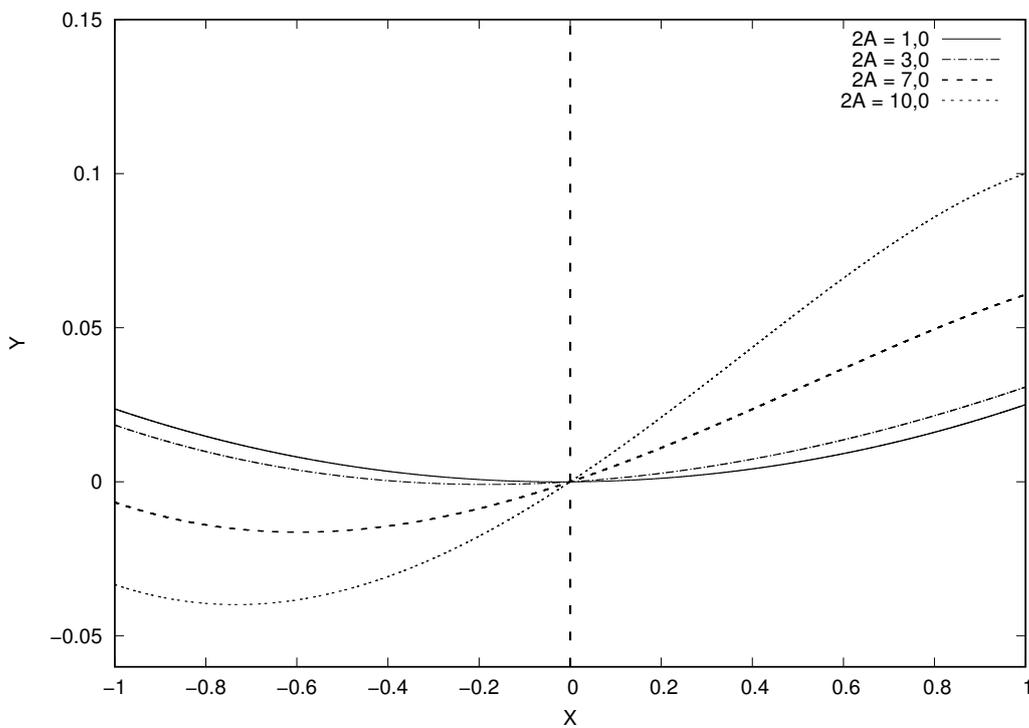


Figura 7.65 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

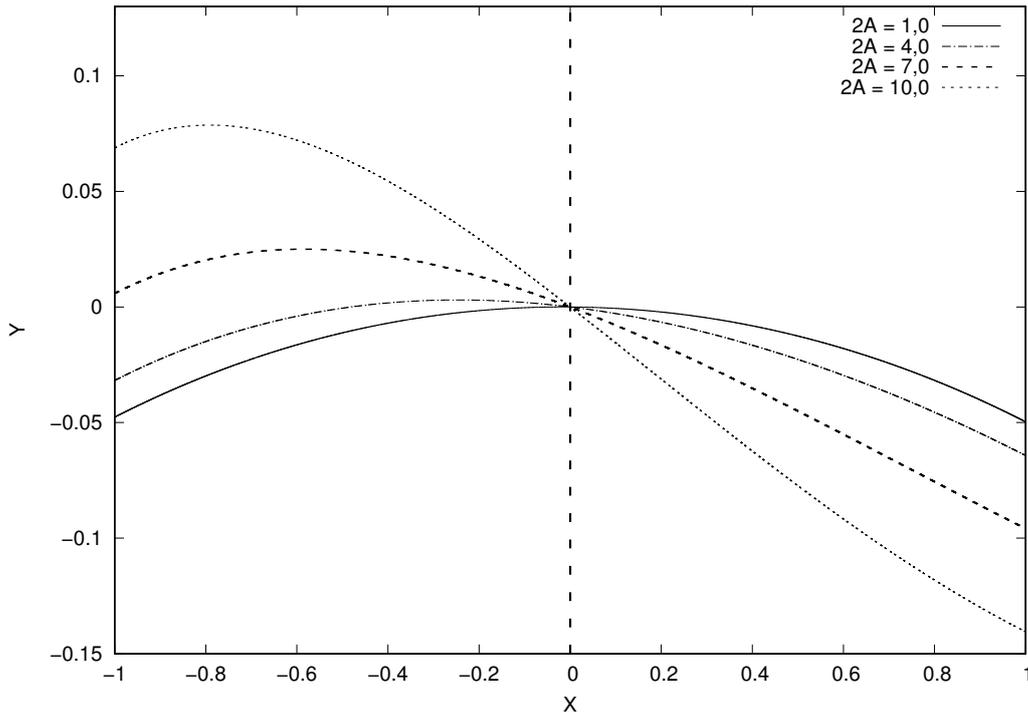


Figura 7.66 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2A = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

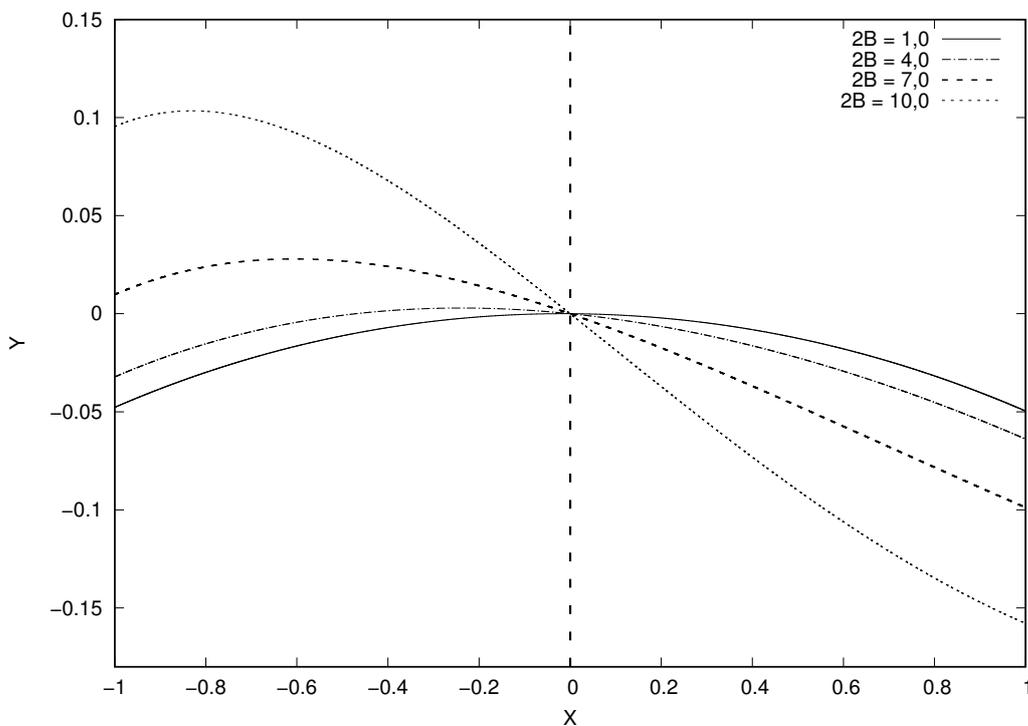


Figura 7.67 – Formatos da superfície livre em função da variação das dimensões do ímã. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $2B = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

coordenados. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos de pressões magnéticas mais intensos. As Figuras (7.62) e (7.64) também indicam que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que as dimensões do ímã permanente são aumentadas. O mesmo ocorre com as derivadas no centro $(0,0;0,0)$, como mostra o detalhe das Figs. (7.62) e (7.64).

As Figuras (7.63) e (7.65) apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da dimensão vertical $2B$ e horizontal $2A$ do ímã, respectivamente, para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados. Vê-se que $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos de pressões magnéticas mais intensos. As Figuras (7.63) e (7.65) também indicam que o grau de assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, aumenta à medida em que as dimensões do ímã permanente são aumentadas.

As Figuras (7.66) e (7.67), apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da dimensão horizontal $2A$ e vertical $2B$ do ímã, respectivamente, para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são tipicamente convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos observados para condições onde o ângulo de contato $\alpha < \pi/2$.

As Figuras (7.68), (7.69), (7.70) e (7.71) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da dimensão adimensional horizontal $2A$ do ímã permanente, para diferentes números de Bond magnético.

As Figuras (7.72), (7.73), (7.74) e (7.75) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da dimensão adimensional vertical $2B$ do ímã permanente, para diferentes números de Bond magnético.

A partir das Figs. (7.68), (7.69), (7.70), (7.71), (7.72), (7.73), (7.74) e (7.75) vê-se que o aumento das dimensões do ímã tende a tornar as superfícies livres cada vez mais assimétricas, fenômeno este observado mesmo em condições de baixas pressões magnéticas - baixos números de Bond magnético -, causando assim, como já discutido, um aumento na altura de deslocamento vertical. Para dimensões adimensionais do ímã permanente constantes, um aumento no número de Bond magnético, ou seja, um aumento na importância relativa entre as pressões magnéticas e pressões capilares, gera um aumento no grau de assimetria das curvas, indicando um comportamento mais complexo e menos linear do formato do menisco. Diminuindo-se as dimensões do ímã permanente, vê-se que as curvas tornam-se cada vez mais simétricas. Argumenta-se que no caso limite onde as dimensões do ímã permanente são nulas - $2A$ e $2B \rightarrow 0$, o formato da superfície livre tende ao formato para o caso não-magnético, aqui, a mesma curva obtida para condições onde $Bo_m = 0$,

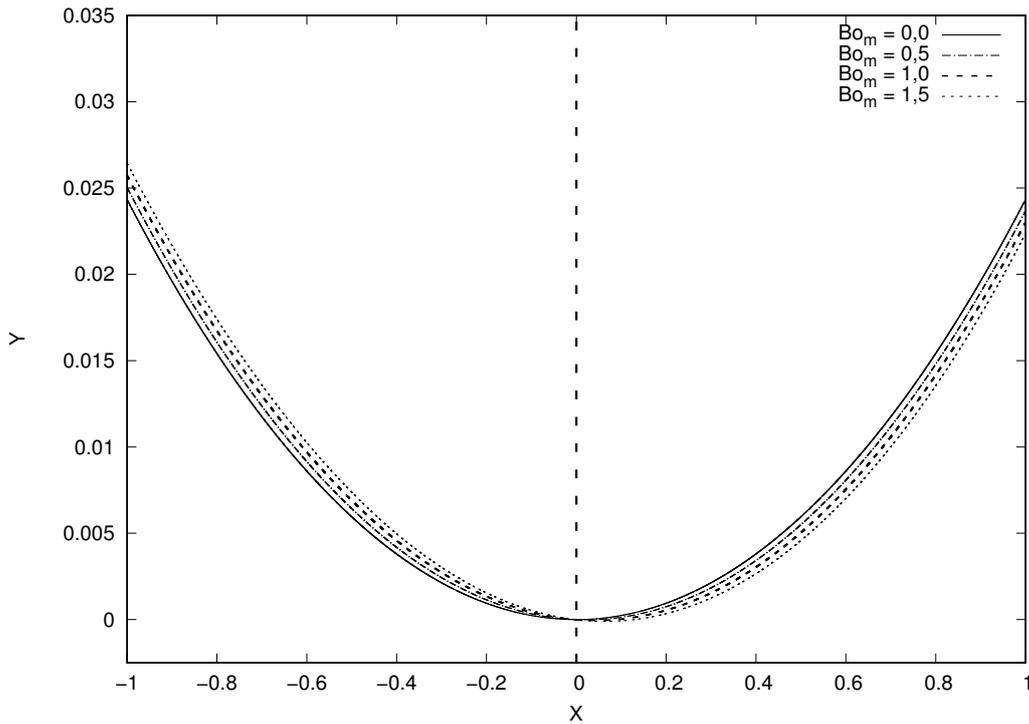


Figura 7.68 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã $2A$, para diferentes números de Bond magnético e $2A = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

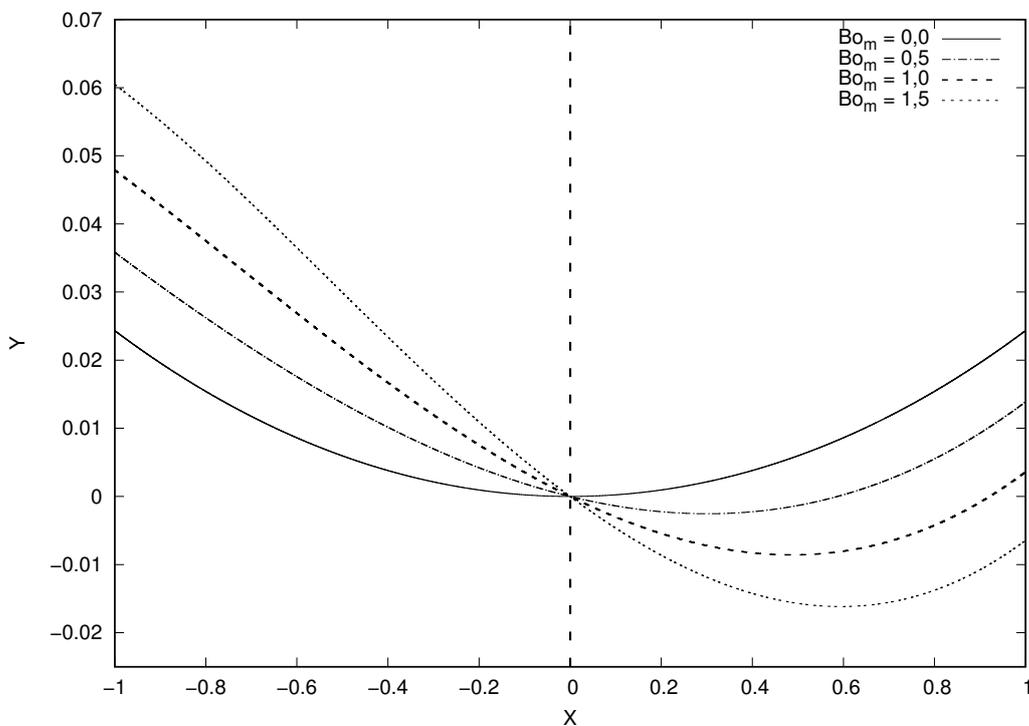


Figura 7.69 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã $2A$, para diferentes números de Bond magnético e $2A = 4,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

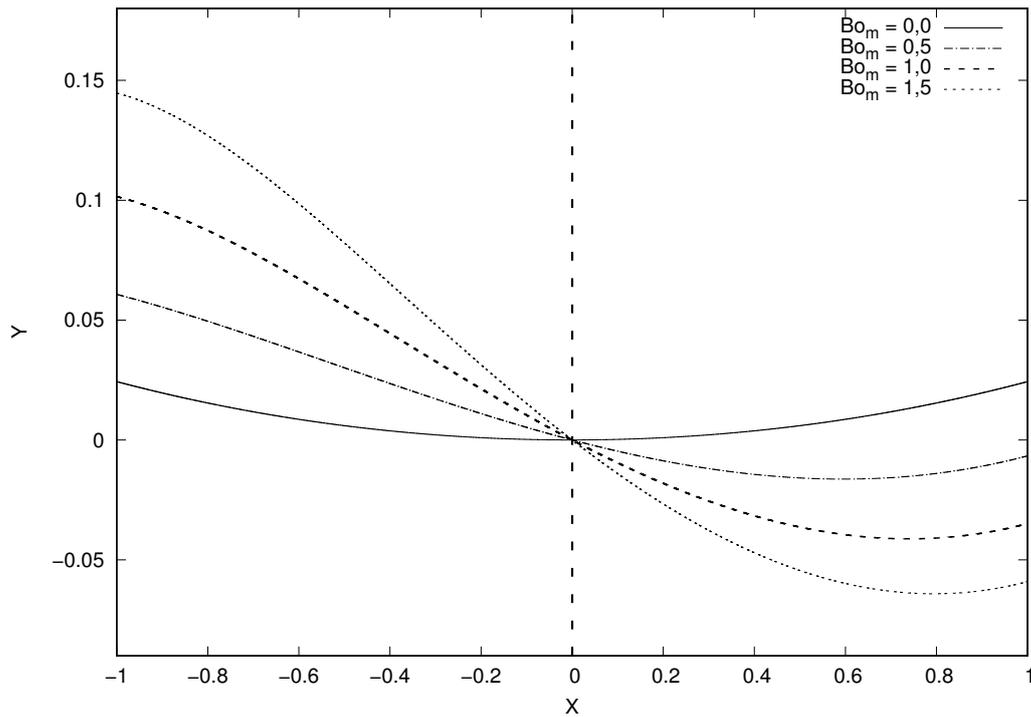


Figura 7.70 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã $2A$, para diferentes números de Bond magnético e $2A = 7,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

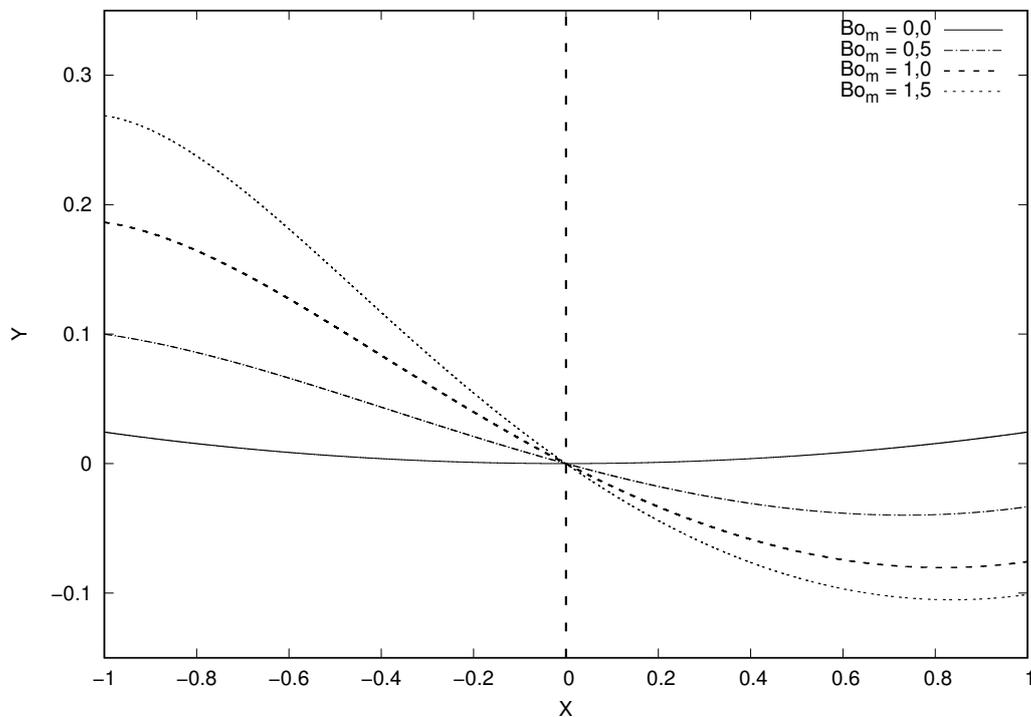


Figura 7.71 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão horizontal do ímã $2A$, para diferentes números de Bond magnético e $2A = 10,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2B = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

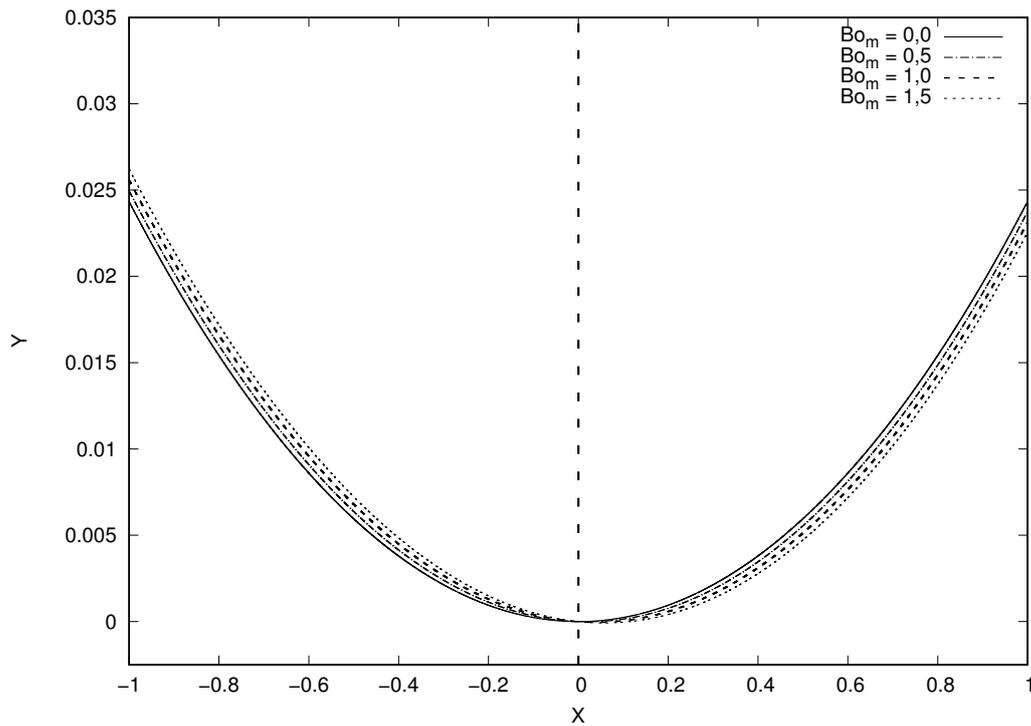


Figura 7.72 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para diferentes números de Bond magnético e $2B = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

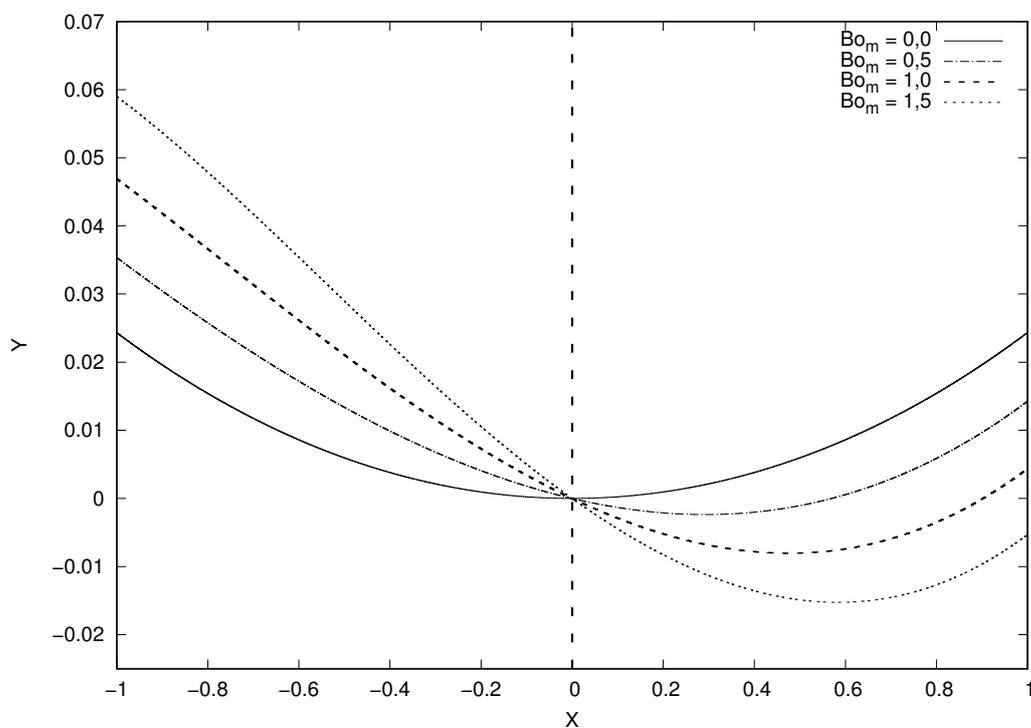


Figura 7.73 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para diferentes números de Bond magnético e $2B = 4,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

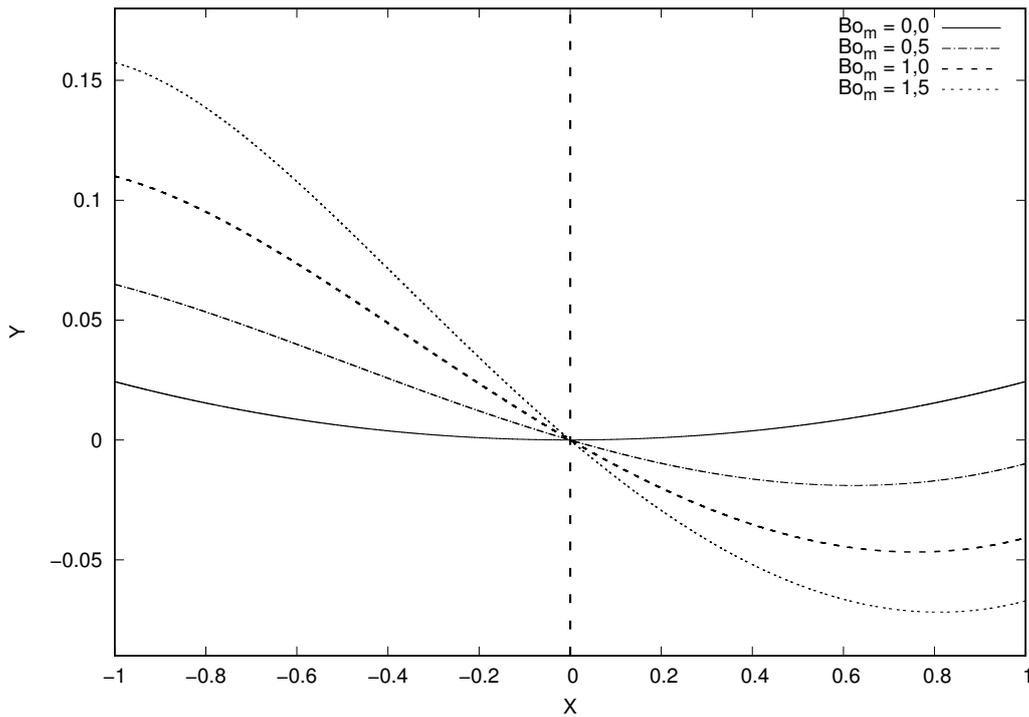


Figura 7.74 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para diferentes números de Bond magnético e $2B = 7,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

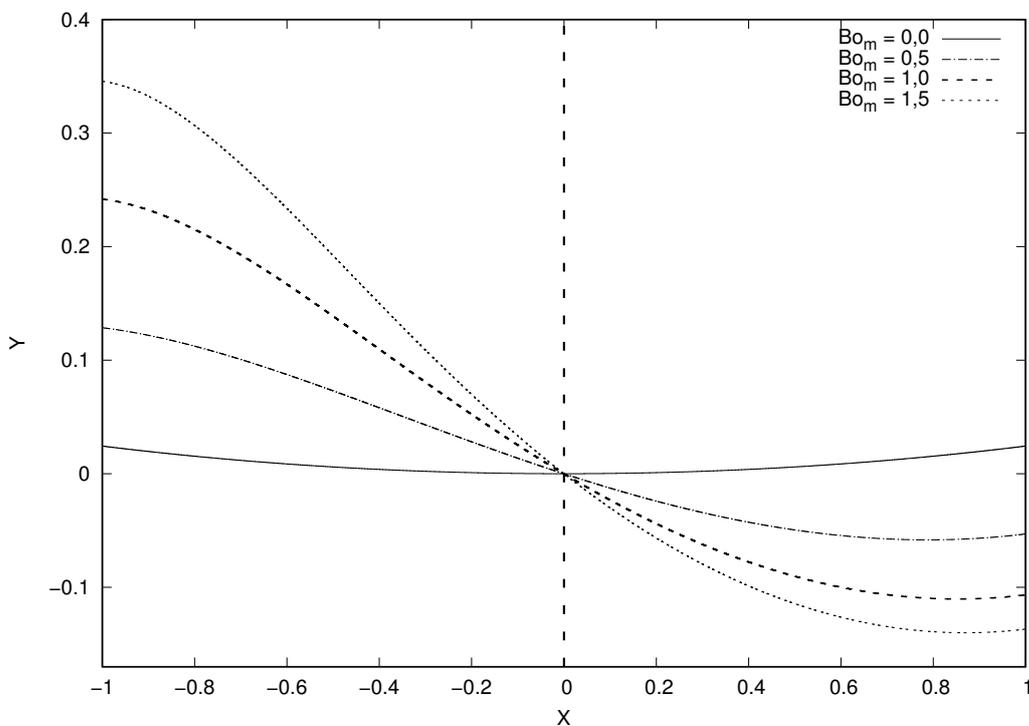


Figura 7.75 – Formatos da superfície livre em função da variação da dimensão vertical $2B$ do ímã, para diferentes números de Bond magnético e $2B = 10,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 5,0$; $M_i/4\pi M_s = 5,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

uma vez que neste caso não há a presença de um ímã permanente, e consequentemente, não há um campo magnético externo para interagir com as nanopartículas magnéticas no ferrofluido.

As Figuras (7.68) e (7.72) evidenciam que, mesmo em condições onde as dimensões do ímã permanente são pequenas, ainda é possível gerar-se uma quebra de simetria na superfície livre devido ao aumento da importância relativa das pressões magnéticas - aumento do número de Bond magnético -.

7.3.5 Análise do efeito da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$ no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, interpretado como uma medida do valor da intensidade adimensional do ímã permanente, na altura de deslocamento bem como no formato da superfície livre formada.

Primeiramente, calculou-se valores típicos para o parâmetro $M_i/4\pi M_s$, utilizando-se valores de propriedades de ferrofluidos e ímãs comerciais, como os apresentados na Tab. (9.1) e na Fig. (7.76) (ROSENSWEIG, 1985).

Table 2.4 Nominal properties of ferrofluids (298 K)

Carrier fluid	Magnetic saturation ($A \cdot m^{-1}$)	Density ($kg \cdot m^{-3}$)	Viscosity ^a ($N \cdot s \cdot m^{-2}$)	Pour point ^b (K)	Boiling point ^c (K)	Surface tension ($mN \cdot m^{-1}$)	Thermal conductivity ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	Specific heat ($kJ \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$)	Thermal expansion coefficient ^d ($m^3 \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$)
Diester	15,900	1185	0.075	236	422	32	0.16		
Hydrocarbon	15,900	1050	0.003	278	350	28	0.15	1715	9.0×10^{-4}
Fluorocarbon	31,800	1250	0.006	281	350	28	0.19	1840	8.6×10^{-4}
Ester	7,960	2050	2.50	239	456	18	0.20	1966	10.6×10^{-4}
	15,900	1150	0.014	217	422	26	0.31	3724	8.1×10^{-4}
Water	31,800	1300	0.030	217	422	26		3724	8.1×10^{-4}
	47,700	1400	0.035	211	422	21		3724	8.1×10^{-4}
	15,900	1180	0.007	273 ^e	299 ^f	26	0.59	4184	5.2×10^{-4}
Polyphenylether	31,800	1380	0.010	273 ^e	299 ^f	26		4184	5.0×10^{-4}
	7,960	2050	7.50	283	533				

^a Measured in the absence of a magnetic field at shear rate $>10 s^{-1}$.

^b Viscosity $100 N \cdot s \cdot m^{-2}$.

^c Under a pressure of 133 Pa (1 Torr).

^d Average over the range 298–367 K.

^e Freezing point.

^f At 3.2 kPa.

Figura 7.76 – Propriedades de ferrofluidos comerciais. Imagem retirada de (ROSENSWEIG, 1985).

Após uma verificação prévia dos valores encontrados para o parâmetro $M_i/4\pi M_s$, calculado por meio dos valores comerciais acima mencionados, o autor encontrou uma

faixa de possível variação deste parâmetro: $1,0 \leq M_i/4\pi M_s \leq 11,0$.

7.3.5.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$

A Tabela (7.11) apresenta as alturas de deslocamento vertical D calculadas numericamente para a análise da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$, calculada utilizando-se valores de propriedades comerciais.

A partir da Tab. (7.11)-(a) verifica-se que, à medida em que aumenta-se a intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$, as alturas de deslocamento vertical obtidas também aumentam. Para $M_i/4\pi M_s = 1,435$, a altura deslocada obtida foi de $D = 0,447$, já para $M_i/4\pi M_s = 8,598$, a altura deslocada obtida foi de $9,854$. Deste modo, verificou-se que um aumento de aproximadamente 6 vezes na intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$ causou um aumento de aproximadamente 22 vezes na altura de deslocamento vertical. O mesmo comportamento foi observado para as Tabs. (7.11)-(b) e (7.11)-(c).

Tomando-se como limites de variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$ os valores calculados utilizando-se propriedades de ímãs e ferrofluidos comerciais, encontrou-se uma faixa de possível variação do mesmo, aqui sendo $1,0 < M_i/4\pi M_s < 11,0$.

As Figuras (7.77) e (7.78) apresentam os valores para a altura de deslocamento vertical D calculadas numericamente para esta faixa de valores. A Figura (7.79) apresenta valores da quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$.

A partir da Fig. (7.77) verifica-se que a altura de deslocamento vertical D varia de forma aproximadamente hiperbólica em relação ao parâmetro $M_i/4\pi M_s$. Interpretando-se o parâmetro $M_i/4\pi M_s$ como a intensidade adimensional do ímã permanente, e, conseqüentemente, do campo magnético aplicado, vê-se que este parâmetro é proporcional à força magnética - Força de Kelvin: $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$; Eq. (3.22), (CUNHA, 2012)-, que está intrinsicamente relacionada ao gradiente do campo magnético aplicado, sob o contexto de um fluido superparamagnético ou simétrico. Deste modo, quanto maior o parâmetro $M_i/4\pi M_s$, maior será o efeito da força magnética proporcional ao gradiente do campo, e conseqüentemente, um maior efeito das pressões magnéticas atuantes sobre a superfície livre será observado, o que naturalmente produzirá um deslocamento vertical de fluido superior. Comparando-se as duas curvas obtidas, para baixos e médios números de Bond magnético, é possível ver-se também que, mesmo para condições onde as pressões magnéticas são relativamente baixas - baixos números de Bond magnético -, é possível obter-se as mesmas alturas de deslocamento vertical obtidas para números de Bond magnético superiores, somente aumentando-se o valor da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$.

A Figura (7.78) mostra que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado

Tabela 7.11 – Alturas de deslocamento vertical em função da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. (a) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 860\text{KA/m}$; (b) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 955\text{KA/m}$; (c) Valores para magnetização interna do ímã igual a $M_i = 1035\text{KA/m}$. Para estas tabelas: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

(a)

Fluido Base	M_s [A/m]	M_i [A/m]	$M_i/4\pi M_s$	D
Diéster	15900	860000	4,304	2,805
Hidrocarboneto	15900	860000	4,304	2,805
Fluorocarbono	31800	860000	2,152	0,825
Éster	7960	860000	8,598	9,854
Éster	15900	860000	4,304	2,805
Éster	31800	860000	2,152	0,825
Água	47700	860000	1,435	0,447
Água	15900	860000	4,304	2,805
Éter polifenílico	31800	860000	2,152	0,825
Éter polifenílico	7960	860000	8,598	9,854

(b)

Fluido Base	M_s [A/m]	M_i [A/m]	$M_i/4\pi M_s$	D
Diéster	15900	955000	4,780	3,399
Hidrocarboneto	15900	955000	4,780	3,399
Fluorocarbono	31800	955000	2,390	0,983
Éster	7960	955000	9,547	11,902
Éster	15900	955000	4,780	3,399
Éster	31800	955000	2,390	0,983
Água	47700	955000	1,593	0,518
Água	15900	955000	4,780	3,399
Éter polifenílico	31800	955000	2,390	0,983
Éter polifenílico	7960	955000	9,547	11,902

(c)

Fluido Base	M_s [A/m]	M_i [A/m]	$M_i/4\pi M_s$	D
Diéster	15900	1035000	5,180	3,939
Hidrocarboneto	15900	1035000	5,180	3,939
Fluorocarbono	31800	1035000	2,590	1,128
Éster	7960	1035000	10,347	13,773
Éster	15900	1035000	5,180	3,939
Éster	31800	1035000	2,590	1,128
Água	47700	1035000	1,727	0,583
Água	15900	1035000	5,180	3,939
Éter polifenílico	31800	1035000	2,590	1,128
Éter polifenílico	7960	1035000	10,347	13,773

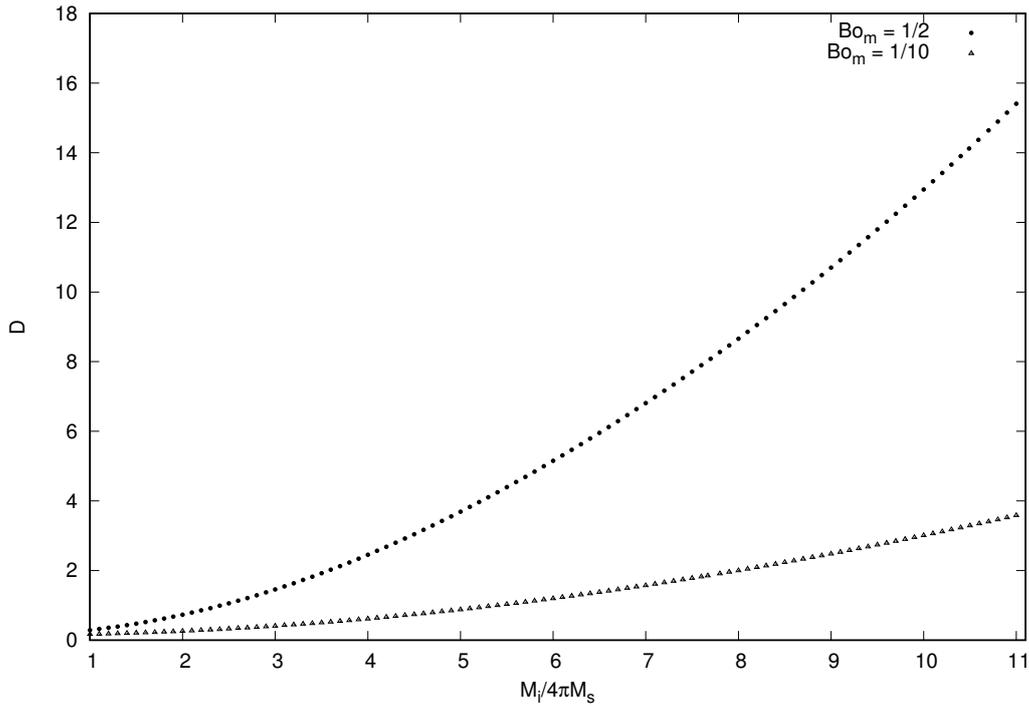


Figura 7.77 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$: Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

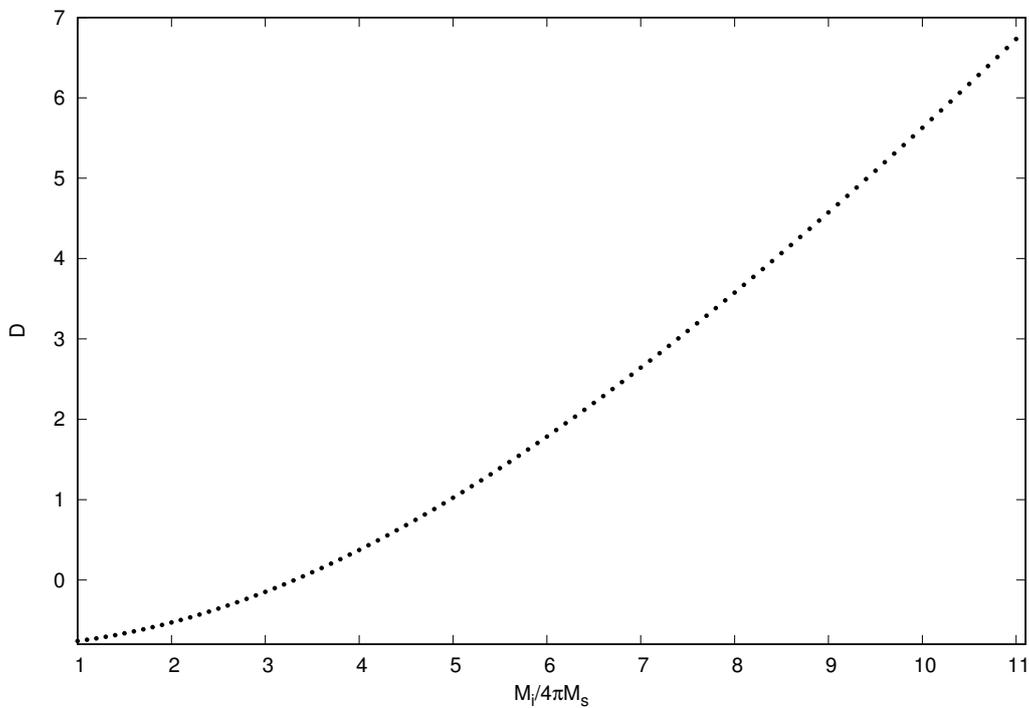


Figura 7.78 – Altura de deslocamento vertical em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Para esta figura: $Bo_m = 1/2$; $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 + 0,3$; $2A = 6,0$ e $2B = 6,0$.

possua ângulo de contato α maior que $\pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo à medida em que aumentava-se a intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Para valores de $M_i/4\pi M_s$ até aproximadamente 3,30, verifica-se alturas de deslocamento vertical negativas - involução de fluido -, contudo, para intensidades adimensionais superiores a este valor, houve um deslocamento vertical de fluido positivo - ascensão de fluido -. Os resultados apresentados na Fig. (7.78) evidenciam que mesmo para sistemas com ângulos de contato maiores que $\pi/2$, ainda é possível deslocar-se fluido verticalmente para cima, aumentado-se somente a intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$.

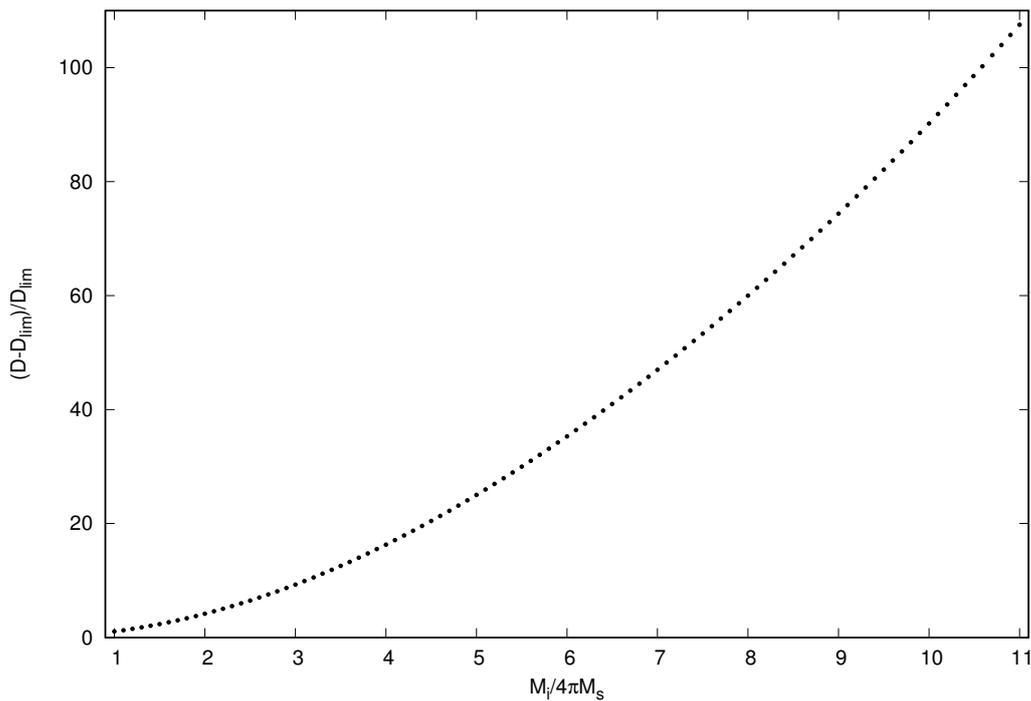


Figura 7.79 – Altura de deslocamento vertical superior ao caso limite não-magnético, onde $Bo_m \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para $Bo_m = 1/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,050$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

A Figura (7.79) apresenta os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã externo, em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$. Para as condições físicas analisadas, $D_{lim} = 0,142$. Observa-se que a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$ varia de forma aproximadamente hiperbólica em relação à intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Para uma intensidade adimensional $M_i/4\pi M_s = 11,0$, houve um deslocamento vertical aproximadamente 110 vezes superior ao limite onde não há a presença de um ímã externo.

Os resultados obtidos são extremamente significantes, evidenciando que em aplicações onde deseja-se obter o máximo de deslocamento vertical possível (e.x. indústria

petrolífera), é possível fazê-lo utilizando-se ímãs com maiores valores de intensidade adimensional $M_i/4\pi M_s$.

7.3.5.2 Resultados obtidos numericamente para a superfície livre para a análise da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$

As Figuras (7.80), (7.81), (7.82) e (7.83) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$.

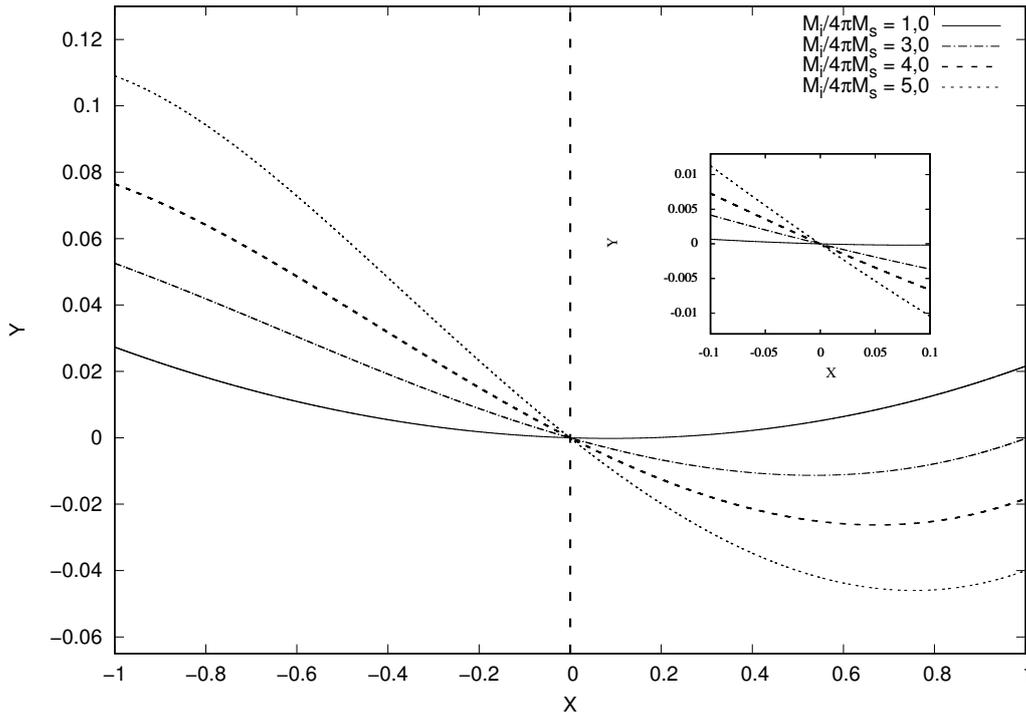


Figura 7.80 – Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,050$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

As Figuras (7.80), (7.81), (7.82) e (7.83) mostram que a variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$ resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um crescimento na assimetria das curvas obtidas à medida em que aumenta-se o parâmetro $M_i/4\pi M_s$. Como já argumentado em outras seções deste projeto, o aumento na antissimetria das curvas é uma medida indireta da magnitude dos efeitos magnéticos e, portanto, uma maior altura de deslocamento vertical é observada nestes casos.

A Figura (7.80) apresenta os formatos da superfície livre obtidos numericamente para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e quando o ângulo de contato é menor que $\pi/2$. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. A Figura (7.80) também

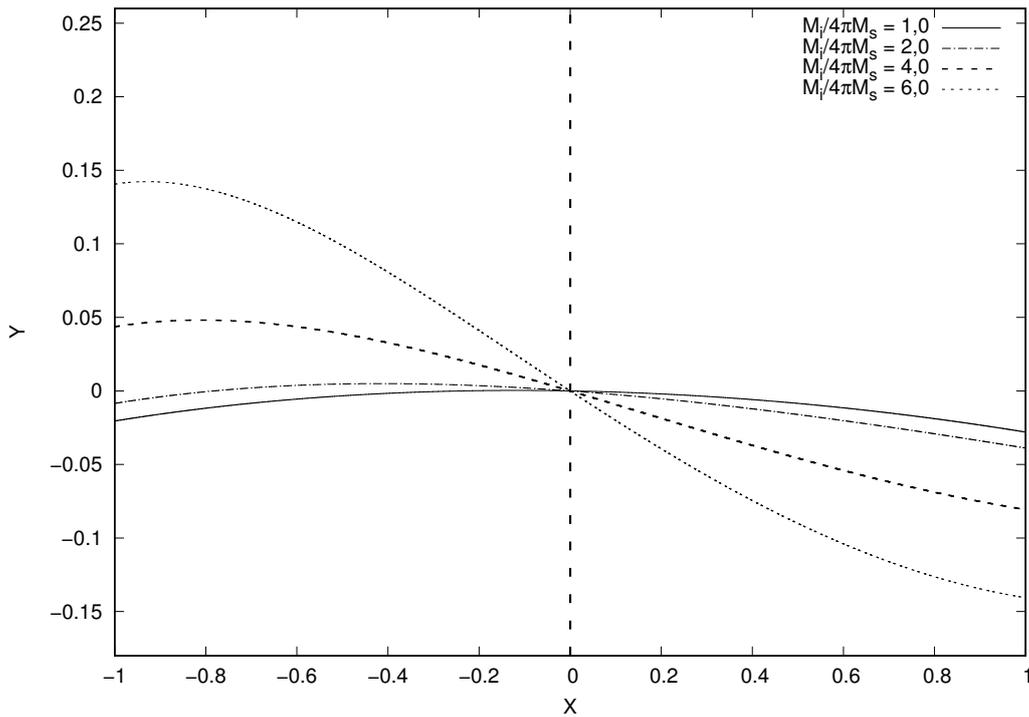


Figura 7.81 – Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,050$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

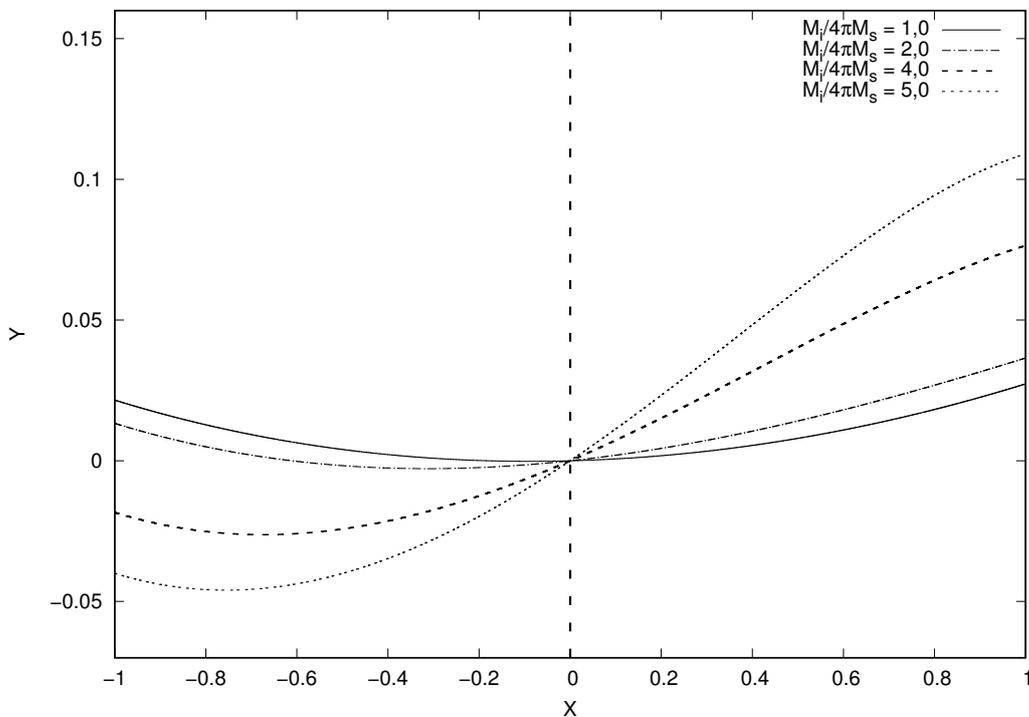


Figura 7.82 – Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 - 0,050$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

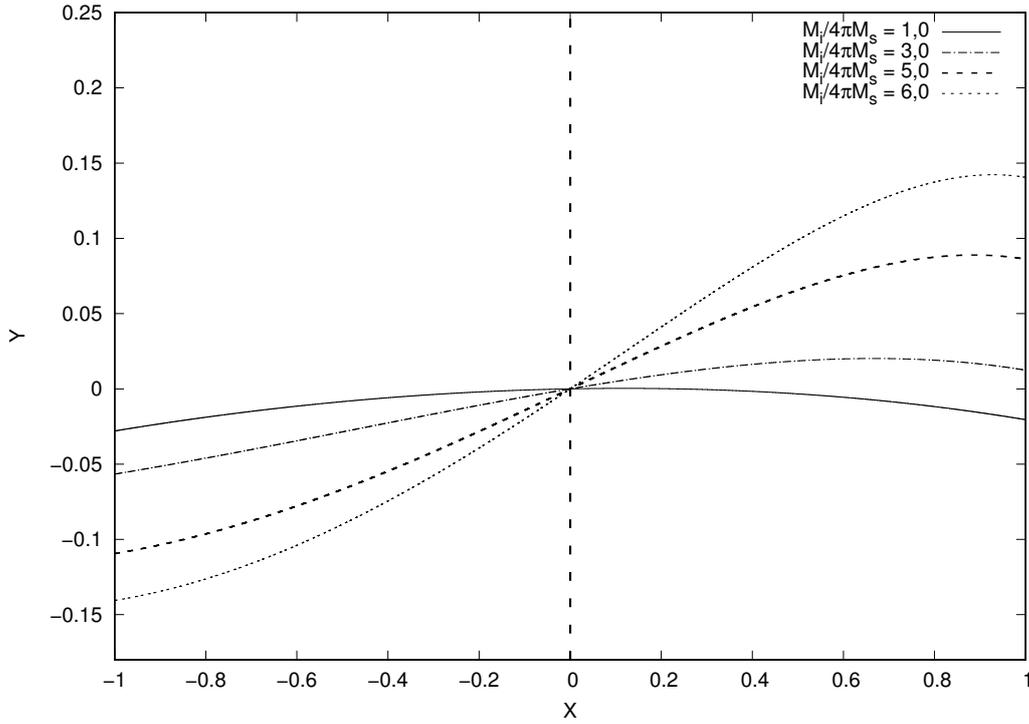


Figura 7.83 – Formatos da superfície livre em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2 + 0,050$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = \pm 9,0$; $S = 8,0$; $2A = 7,0$ e $2B = 7,0$.

indica que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que o parâmetro $M_i/4\pi M_s$ é aumentado. O detalhe da Fig. (7.80) mostra que as derivadas no centro $(0,0;0,0)$ também aumentam à medida em que este parâmetro é aumentado.

A Figura (7.81), apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato maior que $\pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são convexos, em contrapartida aos meniscos côncavos observados para condições onde o ângulo de contato α é menor que $\pi/2$.

A Figura (7.82) apresenta os formatos da superfície livre para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato menor que $\pi/2$. Neste caso, $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos magnéticos mais intensos. Também verifica-se o aumento do grau de assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, à medida em que a em que o parâmetro $M_i/4\pi M_s$ é aumentado.

A Figura (7.83), apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados e para ângulo de contato maior que $\pi/2$.

As Figuras (7.84), (7.85), (7.86) e (7.87) apresentam formatos de superfície livre

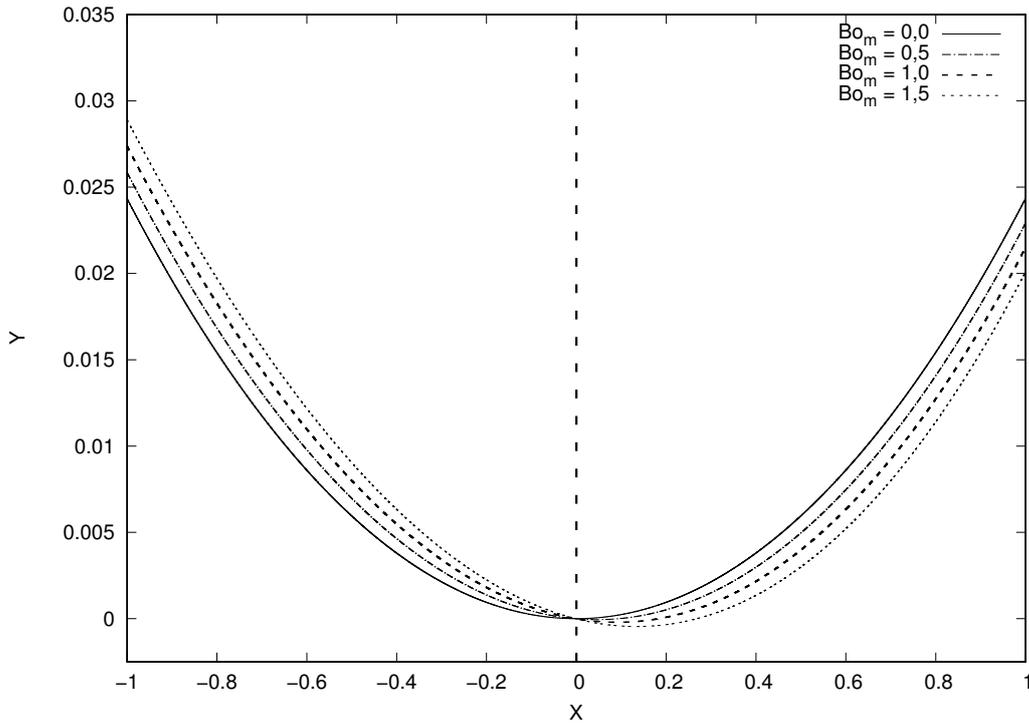


Figura 7.84 – Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 1,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

em função da variação da intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético.

A partir das Figs. (7.84), (7.85), (7.86) e (7.87) vê-se que o aumento da intensidade adimensional do ímã permanente tende a tornar as superfícies livres cada vez mais assimétricas, fenômeno este observado mesmo em condições de baixas pressões magnéticas - baixos números de Bond magnético -, causando assim, como já discutido, um aumento na altura de deslocamento vertical. Para uma intensidade adimensional do ímã permanente $M_i/4\pi M_s$ fixa, um aumento no número de Bond magnético, ou seja, um aumento na importância relativa entre as pressões magnéticas e pressões capilares, gera um aumento no grau de assimetria das curvas, indicando um comportamento mais complexo e menos linear do formato do menisco. Diminuindo-se o parâmetro $M_i/4\pi M_s$, vê-se que as curvas tornam-se cada vez mais simétricas. Argumenta-se que no caso limite onde $M_i/4\pi M_s \rightarrow 0$, o formato da superfície livre é idêntico ao obtido para o caso limite onde não há a presença de um ímã externo, aqui, a mesma curva obtida para condições onde $Bo_m = 0$.

A Figura (7.84) evidencia que, mesmo em condições de baixos valores de $M_i/4\pi M_s$, ainda é possível gerar-se uma quebra de simetria na superfície livre devido ao aumento da importância relativa das pressões magnéticas - aumento do número de Bond magnético -.

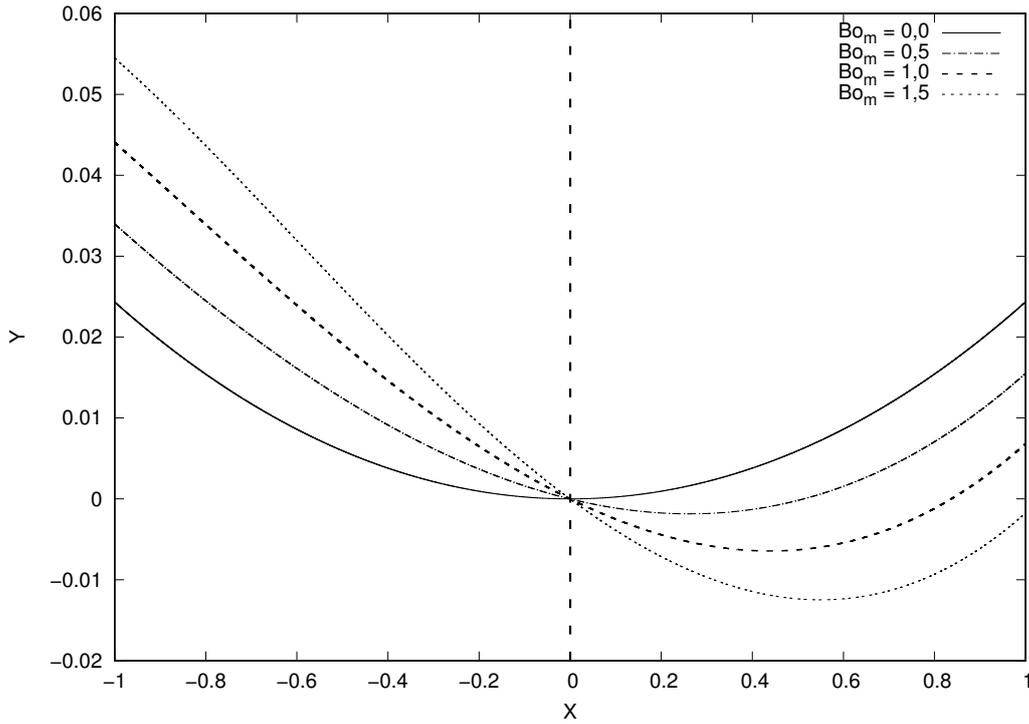


Figura 7.85 – Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 2,5$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

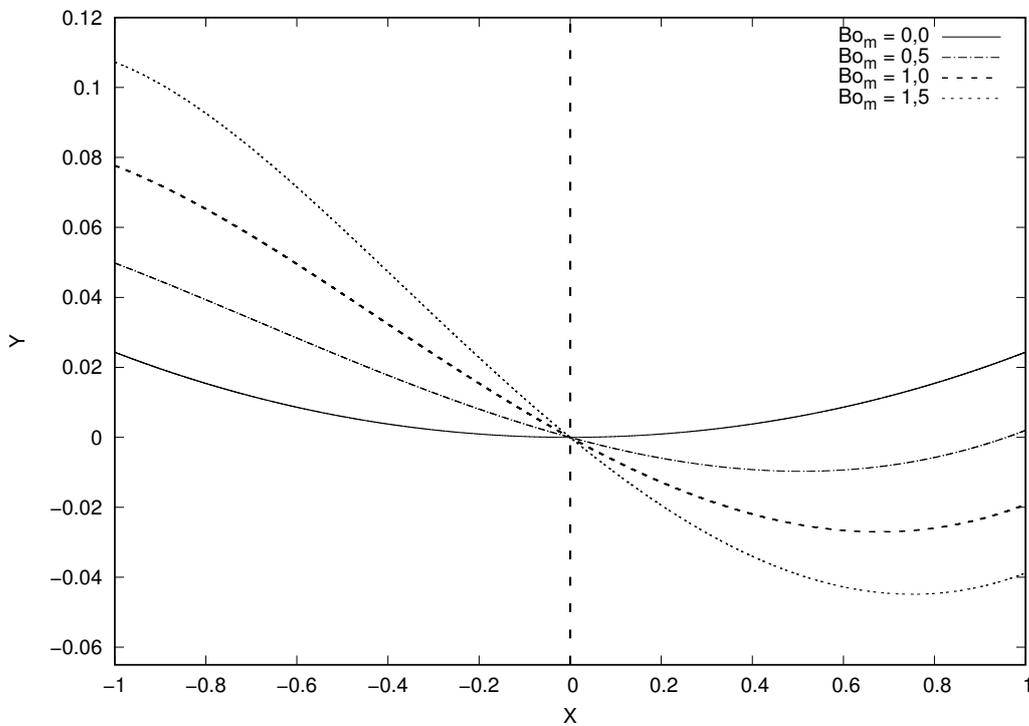


Figura 7.86 – Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 4,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

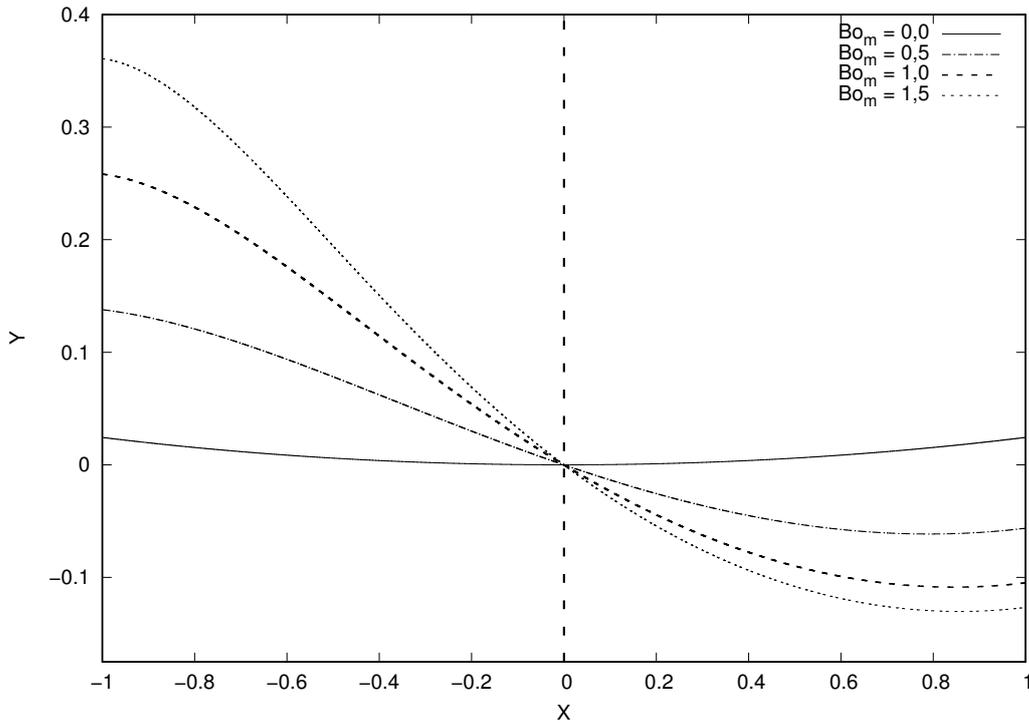


Figura 7.87 – Formatos da superfície livre em função da variação do parâmetro $M_i/4\pi M_s$, para diferentes números de Bond magnético e $M_i/4\pi M_s = 8,0$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $R = -9,0$; $S = 8,0$; $2A = 6,0$; $2B = 6,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$.

7.3.6 Análise do efeito da variação da posição espacial do ímã permanente no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação da posição espacial do ímã permanente na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada.

De modo a fazer-se esta análise, o espaço bidimensional foi discretizado em uma malha com coordenadas (R,S) , sendo estas as coordenadas do centro de gravidade do ímã permanente, segundo o esquema apresentado na Fig. (7.88), onde o quadrado hachurado representa o ímã permanente.

Duas abordagens foram utilizadas nesta análise. A primeira consistiu em fixar-se duas posições horizontais R , uma para quando o ímã permanente encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados - $R < 0$ -, e outra para quando o mesmo encontra-se à direita - $R > 0$ -, e variar-se a posição vertical do ímã permanente S . A segunda consistiu em fixar-se uma posição vertical S , e variar-se a posição horizontal R .

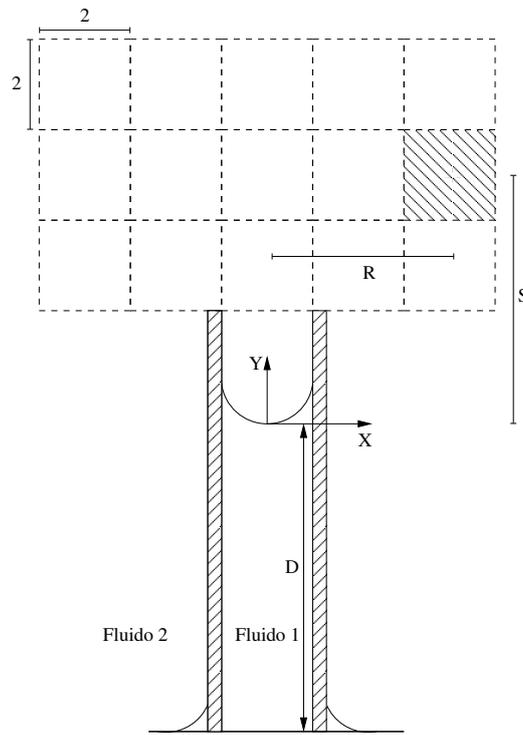


Figura 7.88 – Esquema apresentando a malha utilizada na análise da variação da influência da posição do ímã permanente no deslocamento vertical de fluido e no formato da superfície livre, para um ímã permanente com dimensões iguais ao espaçamento entre as placas paralelas.

7.3.6.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação da posição espacial do ímã

As Figuras (7.89), (7.90), (7.91), (7.92) e (7.93) apresentam os valores obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical D .

A Figura (7.89) evidencia que para uma posição horizontal R fixa do ímã permanente, uma diminuição da coordenada vertical S tende a aumentar a altura de deslocamento vertical. Para $Bo_m = 1/2$ e $R = -7,0$, uma posição vertical $S = 1,0$, acarretou numa altura de deslocamento vertical $D = 9,100$, já para $S = 10,0$, a altura obtida foi $D = 0,873$. Deste modo, vê-se que um distanciamento vertical em relação à origem de 10 vezes, provocou uma diminuição na altura de deslocamento vertical de aproximadamente 10,5 vezes. A diminuição de S acarreta na aproximação do ímã permanente à superfície livre, e, sabendo-se que o vetor intensidade de campo magnético \mathbf{H} , dado pela Eq. (7.2) (CUNHA, 2012), possui um decaimento do tipo $1/r^2$, onde \mathbf{r} é uma posição qualquer no espaço livre, vê-se que à medida em que r diminui, a intensidade do vetor \mathbf{H} aumenta. Um aumento na intensidade do vetor \mathbf{H} acarreta no aumento da intensidade dos efeitos magnéticos na interface, causando-se assim um aumento no salto de pressões, e, por conseguinte, um aumento na altura de deslocamento vertical. A Figura (7.89) mostra também que, a partir de certo valor para a posição vertical S , nas condições físicas analisadas $S \sim 20$, não há mais um deslocamento vertical de fluido significativo, indicando que a intensidade do campo \mathbf{H} decaiu até um valor muito pequeno, incapaz de causar um aumento no salto de pressões na

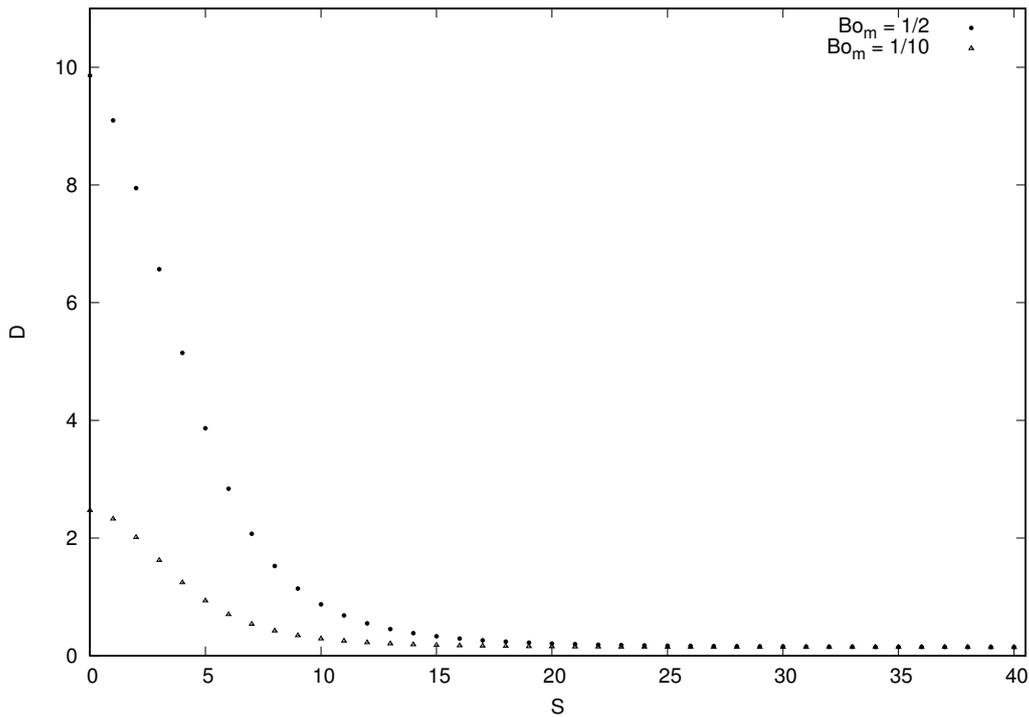


Figura 7.89 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição vertical S do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = -7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

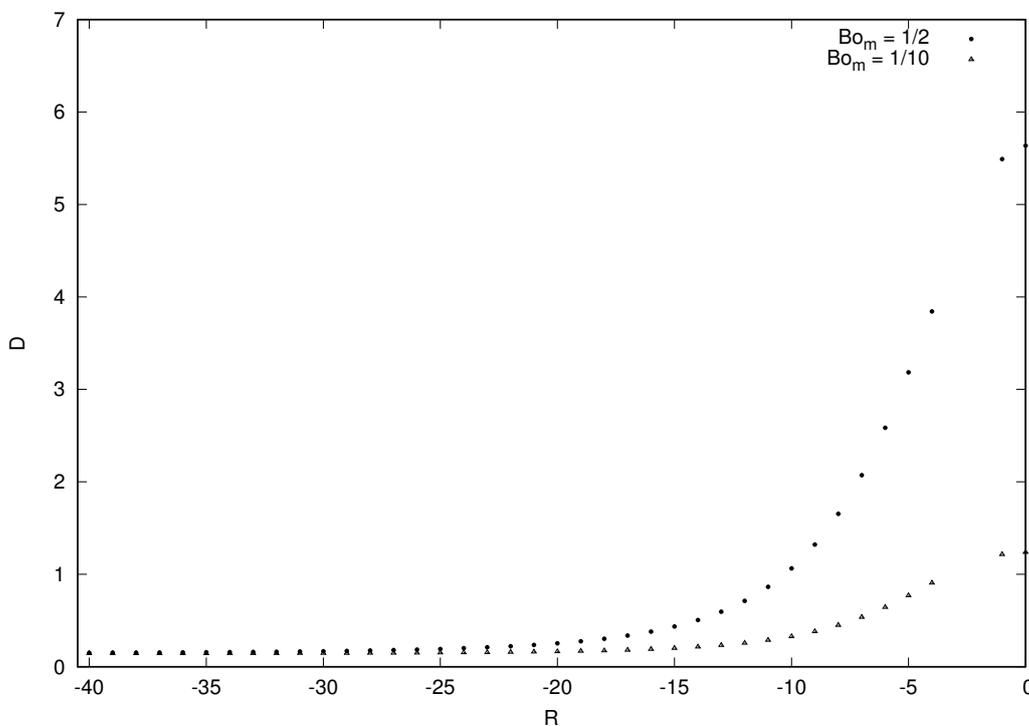


Figura 7.90 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente. Círculos: $Bo_m = 1/2$; Triângulos: $Bo_m = 1/10$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $S = 7,0$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

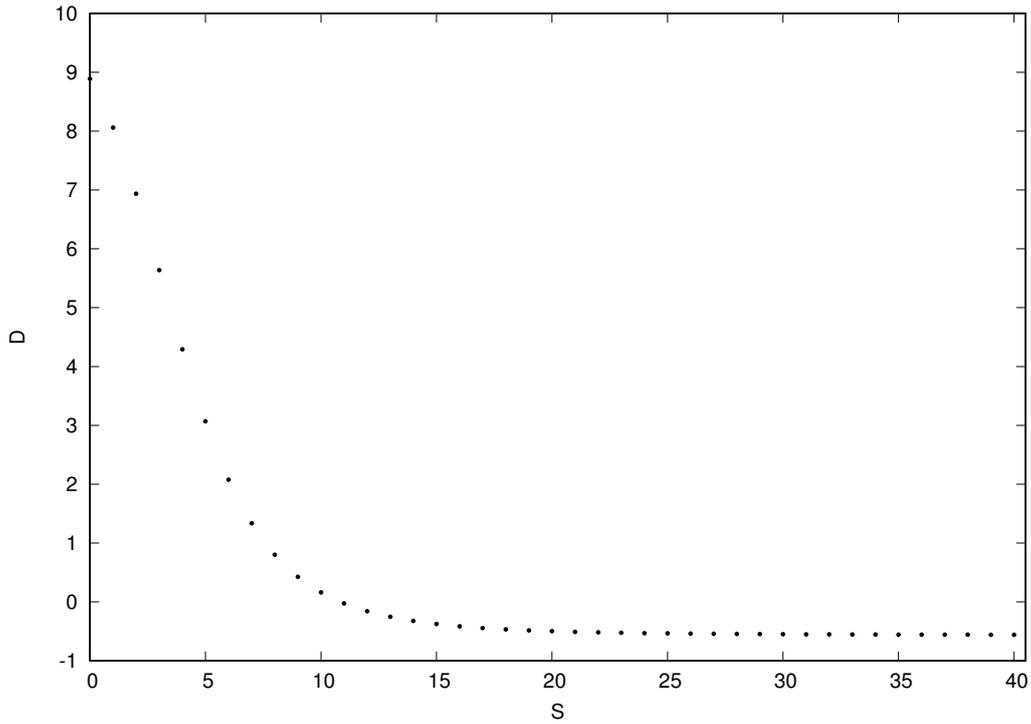


Figura 7.91 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição vertical S do ímã permanente, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = -7,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 + 0,20$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

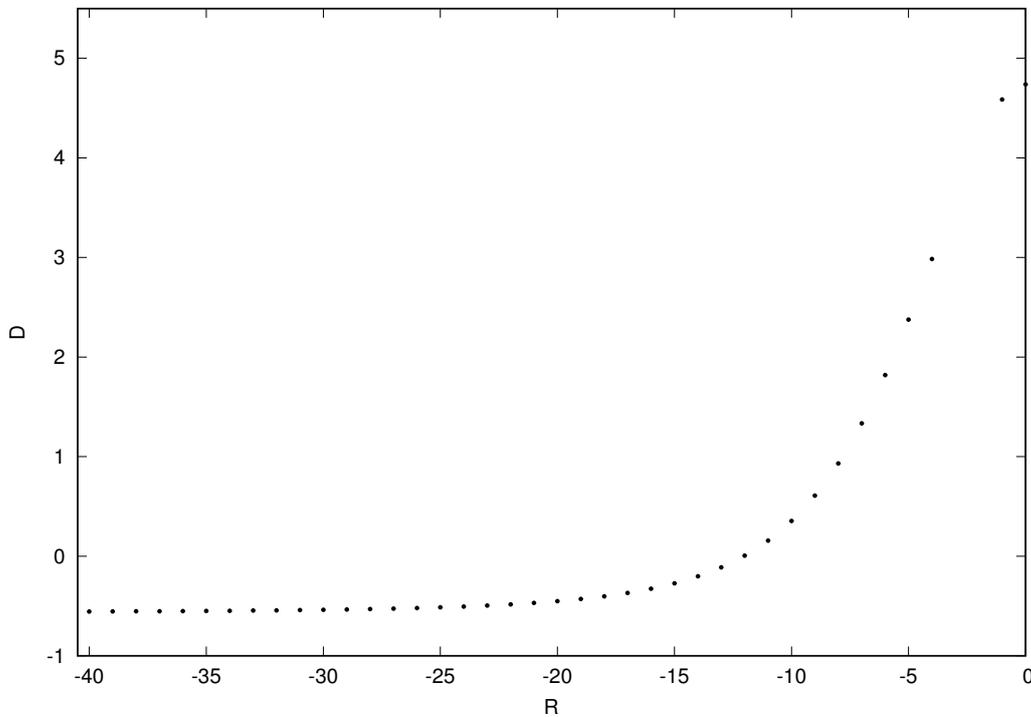


Figura 7.92 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente, para ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $S = 7,0$; $B_{o_m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 + 0,20$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

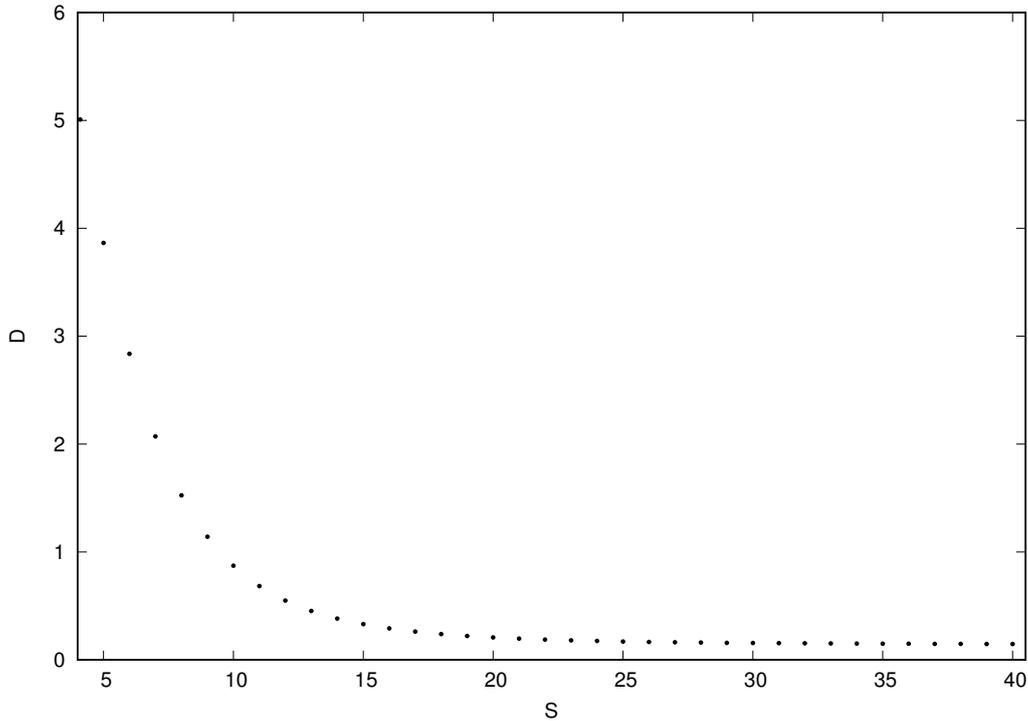


Figura 7.93 – Alturas de deslocamento vertical em função da variação das posições vertical S do ímã permanente, para $R > 0$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$, $R = 7,0$; $B_{0m} = 1/2$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

interface relevante. A Figura (7.89) também apresenta uma comparação entre as alturas de deslocamento vertical obtidas para diferentes números de Bond magnético, indicando que, mesmo para condições onde as pressões magnéticas são relativamente baixas - baixos números de Bond magnético -, é possível obter-se as mesmas alturas de deslocamento vertical obtidas para números de Bond magnético superiores, somente aproximando-se o ímã permanente da superfície livre por meio de uma aproximação vertical - diminuindo-se S -.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathcal{P} \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2}. \quad (7.2)$$

Aqui, \mathbf{H} é a intensidade de campo, \mathbf{r} é uma posição qualquer no espaço livre, $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor unitário na direção de \mathbf{r} , μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo e \mathcal{P} é uma intensidade de pólo puntiforme (CUNHA, 2012).

A Figura (7.90) evidencia que para uma posição vertical S fixa do ímã permanente, uma aproximação horizontal do ímã à origem dos eixos coordenados - aumento de R, se $R < 0$ -, tende a aumentar a altura de deslocamento vertical. Para $B_{0m} = 1/2$ e $S = 7,0$, uma posição horizontal $R = -1,0$ acarretou numa altura de deslocamento vertical $D = 5,490$, já para $R = -10,0$, a altura obtida foi $D = 1,064$. Deste modo, vê-se que um distanciamento horizontal em relação à origem de 10 vezes, provocou uma diminuição na altura de deslocamento vertical de aproximadamente 5 vezes. Tanto o distanciamento horizontal

quanto o vertical do ímã permanente estão relacionados à diminuição da intensidade do campo \mathbf{H} , como evidenciado pela Eq. (7.2). Portanto, uma altura de deslocamento vertical menor é observada para condições onde a distância relativa entre o ponto de aplicação de \mathbf{H} e o ponto de atuação do mesmo é maior. A Figura (7.90) também evidencia que mesmo para condições onde as pressões magnéticas são relativamente baixas - baixos números de Bond magnético -, é possível obter-se as mesmas alturas de deslocamento vertical obtidas para números de Bond magnético superiores, somente aproximando-se o ímã permanente da superfície livre por meio de uma aproximação horizontal - aumentando-se R se $R < 0$, ou diminuindo-se R se $R > 0$ -.

As Figuras (7.91) e (7.92) mostram que, muito embora o sistema líquido-sólido-gás analisado possua ângulo de contato $\alpha > \pi/2$, ainda foi possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido D positivo à medida em que o ímã permanente era aproximado à superfície livre, tanto vertical - Fig. (7.91) - quanto horizontalmente - Fig. (7.92) -. As Figuras (7.91) e (7.92) evidenciam que, para valores de S superiores a $S = 11,0$ e valores de R inferiores a $R = -13,0$, respectivamente, as alturas de deslocamento vertical obtidas foram negativas - involução de fluido -, contudo, para valores superiores a estes limites, a intensidade do campo \mathbf{H} foi suficiente para provocar um deslocamento vertical de fluido positivo - ascensão de fluido -. Os resultados apresentados nas Figs. (7.91) e (7.92) evidenciam que mesmo para sistemas líquido-sólido-gás com ângulos de contato $\alpha > \pi/2$, ainda é possível deslocar-se fluido verticalmente para cima, apenas aproximando o ímã permanente da superfície livre.

A Figura (7.93) apresenta valores da altura de deslocamento vertical D para quando o ímã permanente encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, $R = 7,0$. A condição física analisada é simétrica à apresentada na Fig. (7.89), onde apresenta-se resultados da altura de deslocamento vertical D obtidas para $R = -7,0$. Verificou-se que as alturas de deslocamento vertical D obtidas nas duas situações são idênticas até a terceira casa decimal, indicando que alturas de deslocamento vertical obtidas para casos simétricos da posição do ímã permanente em relação ao eixo Y (e.x. $S = 7$; $R = \pm 7$) não possuem variações significativas.

As Figuras (7.94) e (7.95) apresentam valores da quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, calculadas numericamente.

As Figuras (7.94) e (7.95) apresentam os valores obtidos para a quantidade $(D - D_{lim})/D_{lim}$, interpretada como o quanto a mais da altura de deslocamento vertical é deslocada em relação ao limite onde não há a presença de um ímã permanente - $M_i/4\pi M_s \rightarrow 0$ -, em função da variação das posições vertical e horizontal do ímã, respectivamente. Para as condições físicas analisadas, $D_{lim} = 0,142$. A Figura (7.94) indica que nas condições físicas analisadas, onde o ímã é fixado em uma posição horizontal $R = -7$, é possível obter-se um deslocamento vertical superior ao caso limite de aproximadamente 70 vezes apenas variando-se a posição vertical S , já a Fig. (7.95) indica que nas condições onde o ímã é fixado em uma posição vertical $S = 7$, é possível obter-se um deslocamento ver-

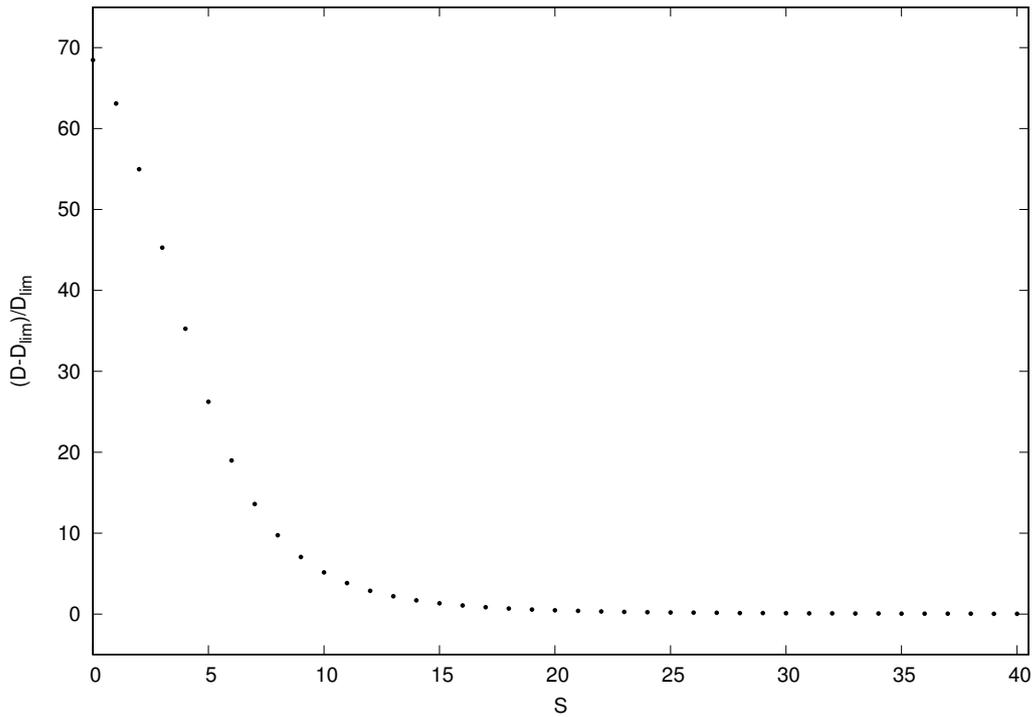


Figura 7.94 – Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético, onde $Bo_m \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da posição vertical S do ímã permanente. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$; $R = -7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

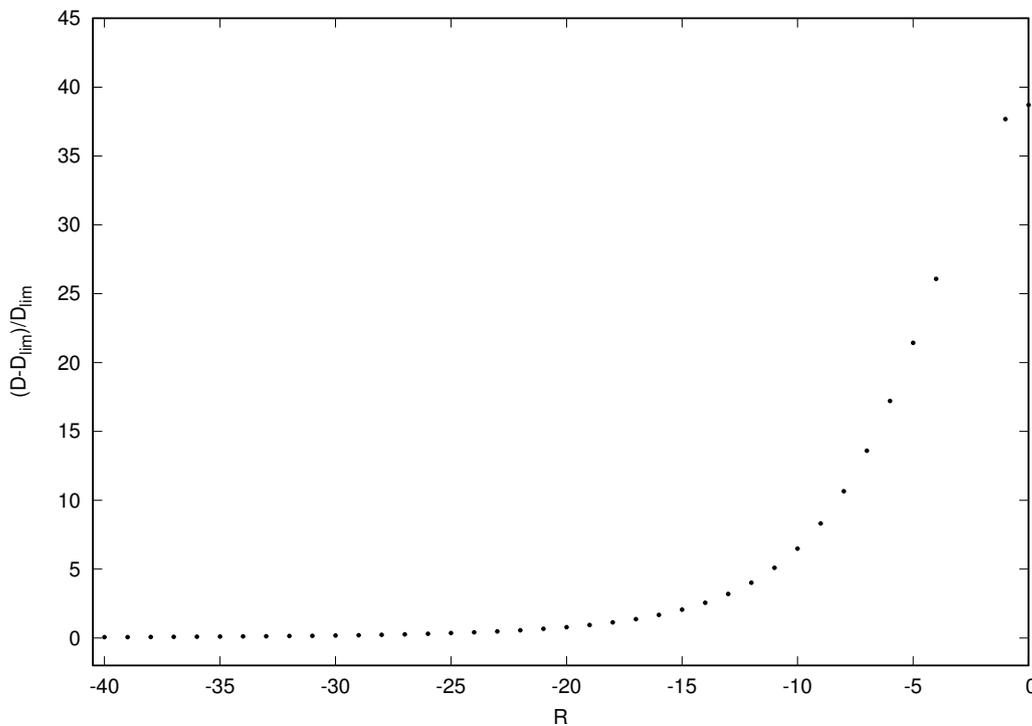


Figura 7.95 – Alturas de deslocamento vertical superior ao caso limite não magnético, onde $Bo_m \rightarrow 0$ (fisicamente onde não há a presença de um ímã externo), em função da variação da posição horizontal R do ímã permanente. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $\alpha = \pi/2 - 0,05$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$; $S = 7,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

tical superior ao caso limite de aproximadamente 40 vezes apenas variando-se a posição horizontal R. As Figuras (7.94) e (7.95) também evidenciam que para valores de S superiores a $S \sim 30,0$ e de R inferiores a $R \sim -36,0$, respectivamente, o deslocamento vertical obtido é aproximadamente o mesmo obtido para o caso não-magnético, mostrando que a partir destes valores, para as condições físicas analisadas, o ímã permanente já não exerce nenhuma influência na dinâmica de deslocamento de fluido.

Os resultados obtidos são extremamente significantes, evidenciando que em aplicações onde deseja-se obter o máximo de deslocamento vertical possível (e.x. indústria petrolífera), é possível fazê-lo apenas aproximando-se o ímã permanente dos capilares.

7.3.6.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação da posição espacial do ímã

As Figuras (7.96), (7.97), (7.98), (7.99), (7.100) e (7.101) apresentam formatos de superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente.

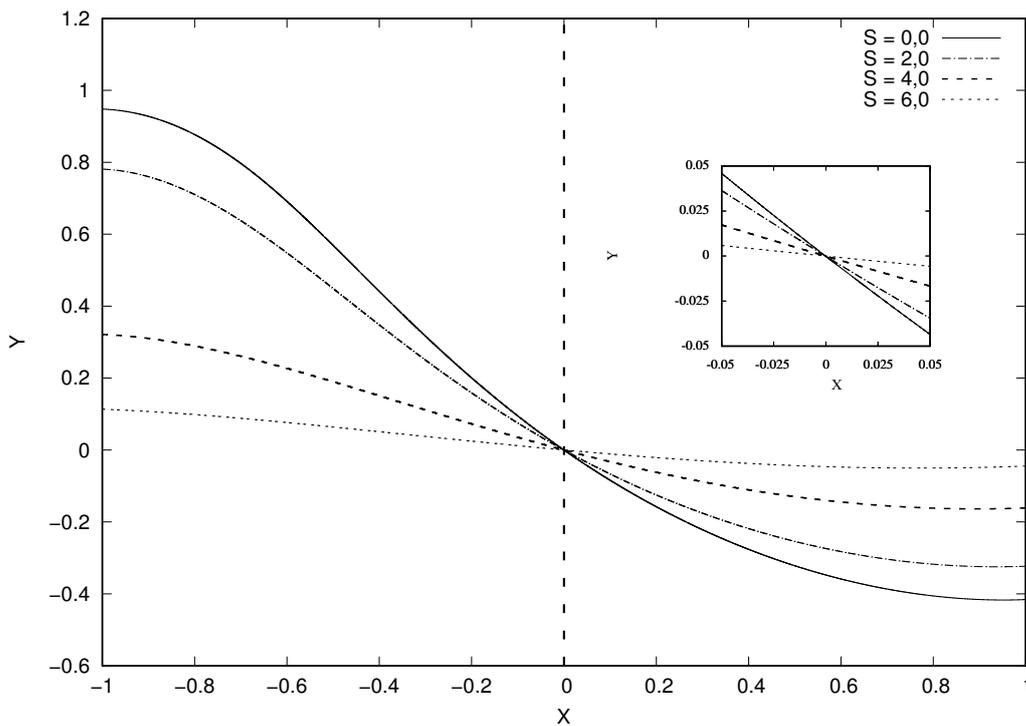


Figura 7.96 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $R = -7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

As Figuras (7.96), (7.97), (7.98), (7.99), (7.100) e (7.101) mostram que a variação das posições vertical S e horizontal R do ímã permanente resulta em diferentes formatos para a superfície livre. Verifica-se um crescimento na assimetria das curvas obtidas à medida em que o ímã é aproximado da origem dos eixos coordenados. Como já argumentado em outras seções deste projeto, o aumento na antissimetria das curvas é uma medida da

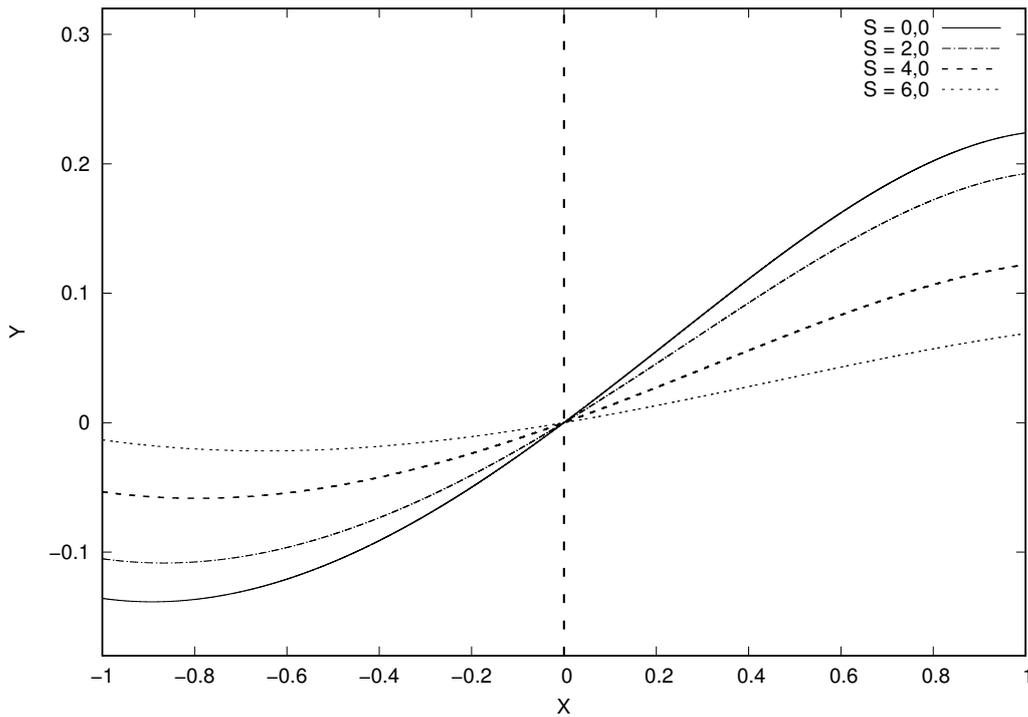


Figura 7.97 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $R = 9,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

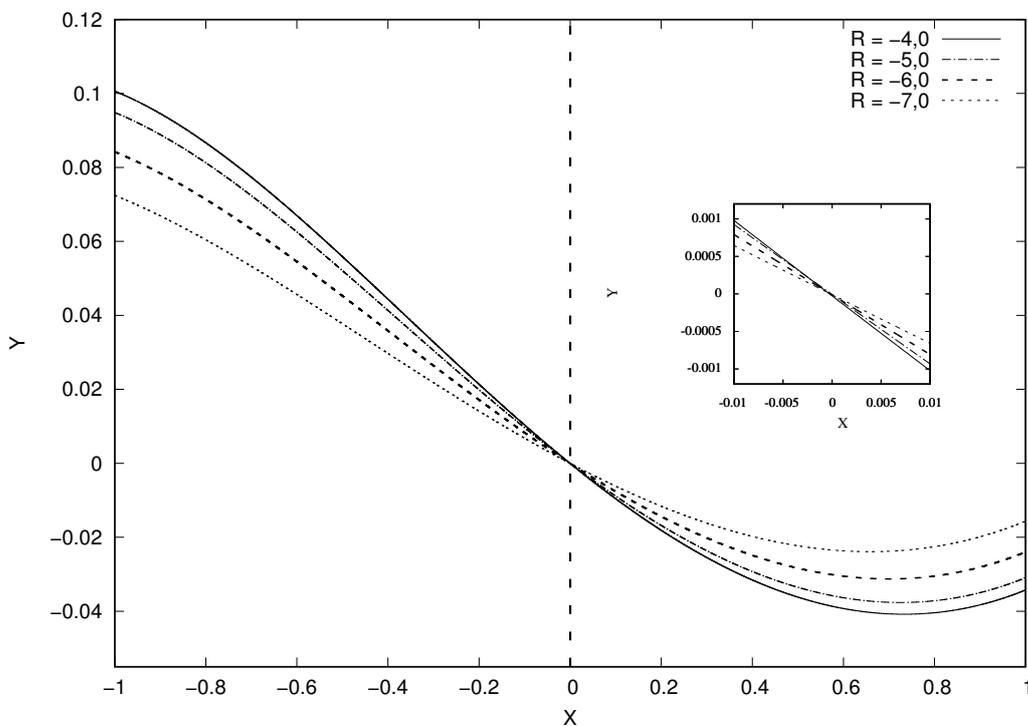


Figura 7.98 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

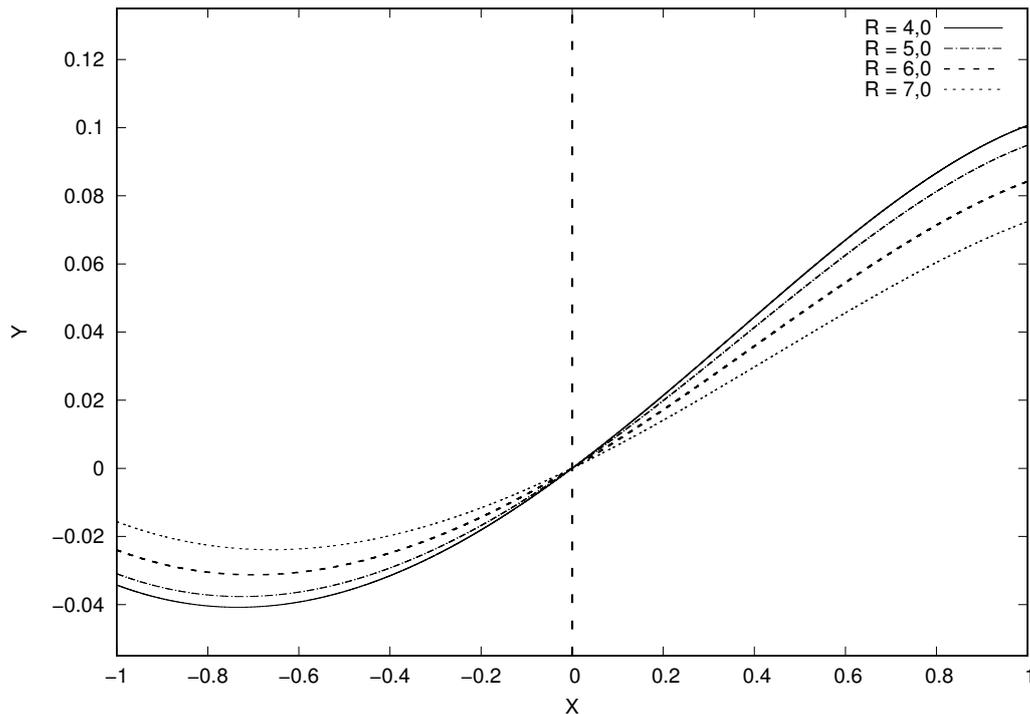


Figura 7.99 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à direita da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 - 0,05$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

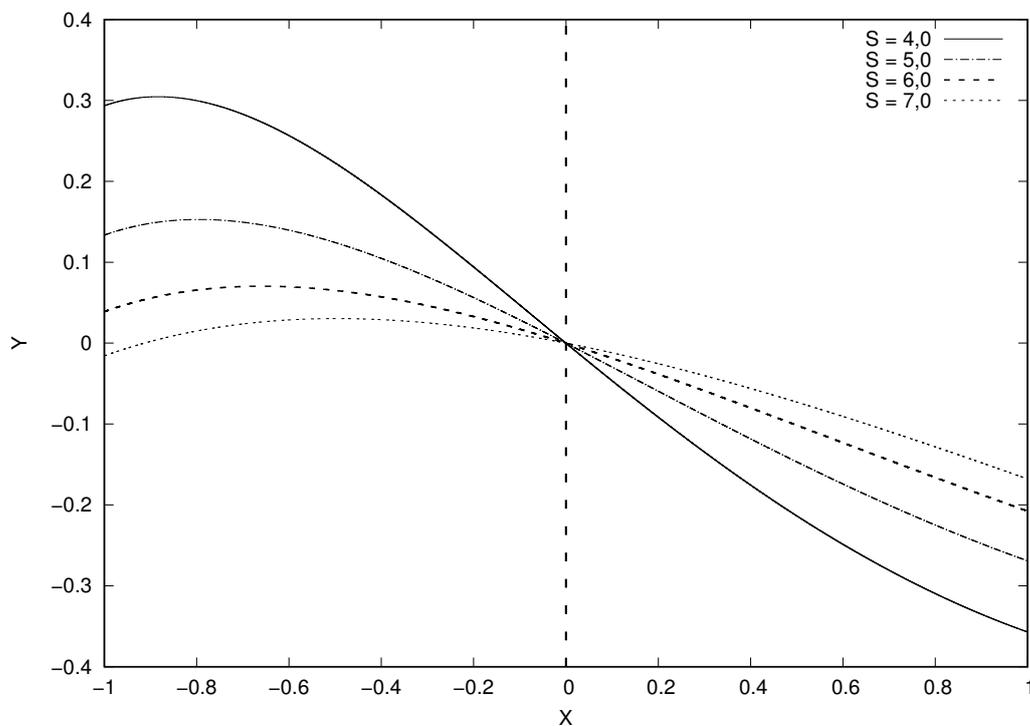


Figura 7.100 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $R = -7,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

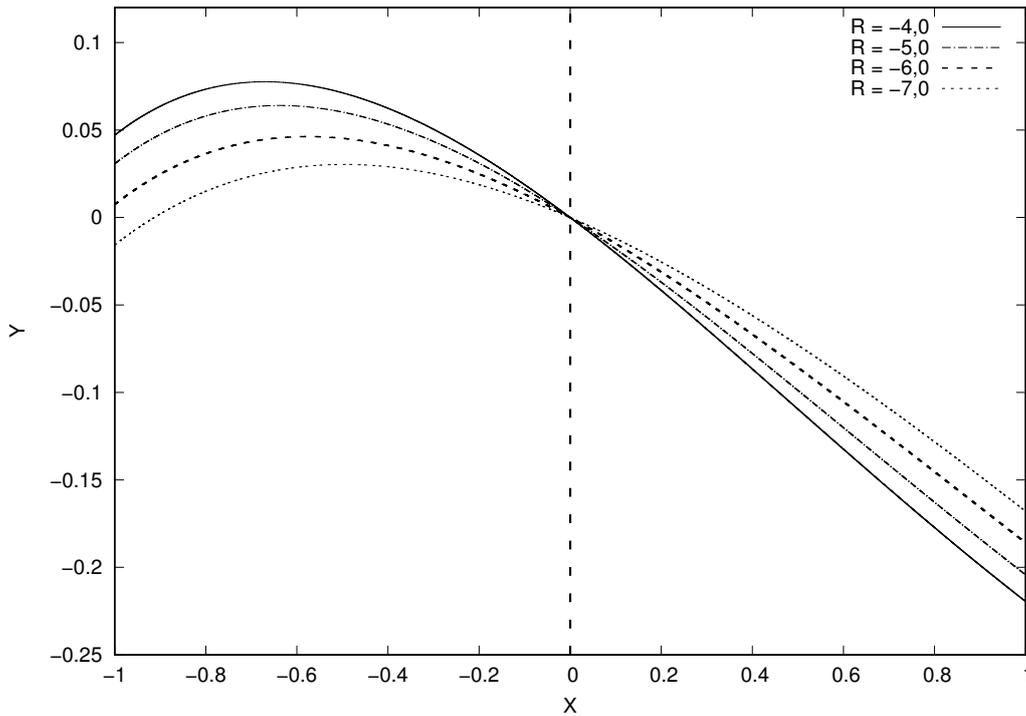


Figura 7.101 – Formatos da superfície livre em função da variação da posição espacial do ímã permanente. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados, $S = 7,0$ e $\alpha = \pi/2 + 0,20$. Para esta figura: $B_0 = 1/3$; $B_{0m} = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $2A = 5,0$; $2B = 5,0$ e $M_i/4\pi M_s = 5,0$.

intensidade dos efeitos magnéticos e, portanto, uma maior altura de deslocamento vertical é observada nestes casos, indicando que uma aproximação do ímã à superfície livre, seja ela horizontal ou vertical, tende a aumentar a intensidade dos efeitos magnéticos na interface.

As Figuras (7.96) e (7.98) apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da posição vertical S e horizontal R , respectivamente, para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados. Vê-se que $Y(-1) > Y(1)$, uma vez que o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção esquerda do menisco esteja sujeita a efeitos de pressões magnéticas mais intensos. As Figuras (7.96) e (7.98) também indicam que o grau de assimetria entre os lados esquerdo e direito da curva, isto é: $\Delta = Y(-1) - Y(1)$, aumenta à medida em que o ímã é aproximado da origem dos eixos coordenados. O mesmo ocorre com as derivadas no centro $(0,0;0,0)$, como mostra o detalhe das Figs. (7.96) e (7.98).

As Figuras (7.97) e (7.99) apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da posição vertical S e horizontal R , respectivamente, para quando o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados. Vê-se que $Y(1) > Y(-1)$, uma vez que o ímã encontra-se à direita da origem dos eixos coordenados, fazendo com que a porção direita do menisco esteja sujeita a efeitos de pressões magnéticas mais intensos. As Figuras (7.97) e (7.99) também indicam que o grau de

assimetria entre os lados direito e esquerdo da curva, isto é: $\Delta = Y(1) - Y(-1)$, aumenta à medida em que as dimensões do ímã permanente são aumentadas.

As Figuras (7.100) e (7.101), apresentam os formatos da superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a variação da posição vertical S e horizontal R, respectivamente, para quando o ímã encontra-se à esquerda da origem dos eixos coordenados e ângulo de contato $\alpha > \pi/2$. Verifica-se que os meniscos formados são tipicamente convexos, em contrapartida aos meniscos tipicamente côncavos observados para condições onde o ângulo de contato $\alpha < \pi/2$.

7.3.7 Análise do efeito da variação do ângulo de contato α no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre, para o caso mais geral onde a interface é formado por um ferrofluido e um fluido não-magnético, sob a influência de um campo magnético aplicado por um ímã permanente externo

Esta seção dedica-se à análise do efeito da variação do ângulo de contato α na altura de deslocamento vertical D bem como no formato da superfície livre formada.

O ângulo de contato é uma propriedade física do sistema líquido-sólido-gás em análise, variando à medida em que uma destas partes é modificada. Diante da impossibilidade de encontrar-se uma faixa de variação deste parâmetro precisa, o autor decidiu por variá-lo numa faixa arbitrária, de $\pi/2 - 0,92 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,44$, cobrindo ângulos tanto maiores quanto menores que $\pi/2$.

7.3.7.1 Resultados obtidos numericamente para a altura de deslocamento vertical para a análise do efeito da variação do ângulo de contato

Como explicitado acima, o ângulo de contato foi variado numa faixa de $\pi/2 - 0,92 \leq \alpha \leq \pi/2 + 0,44$. A Figura (7.102) apresenta os valores para a altura de deslocamento vertical D calculadas numericamente para esta faixa de valores.

Verifica-se a partir da Fig. (7.102) que, à medida em que o ângulo de contato α aumenta ($\pi/2 - 0,92 \rightarrow \pi/2 + 0,44$), as alturas de deslocamento vertical diminuem, até que não haja mais ascensão de fluido ($D > 0$), e sim involução ($D < 0$). Para as condições físicas analisadas, este comportamento se deu para um ângulo de contato $\alpha = \pi/2 + 0,265$.

A Figura (7.102) evidencia um comportamento interessante. Mesmo para ângulos de contato iguais ou superiores a $\pi/2$, foi possível deslocar-se verticalmente fluido para cima, em contraposição ao observado no limite assintótico onde os dois fluidos são considerados não-magnéticos, onde, para ângulos de contato superiores a $\pi/2$, as alturas de deslocamento vertical são negativas, causando a involução de fluido - estes resultados são

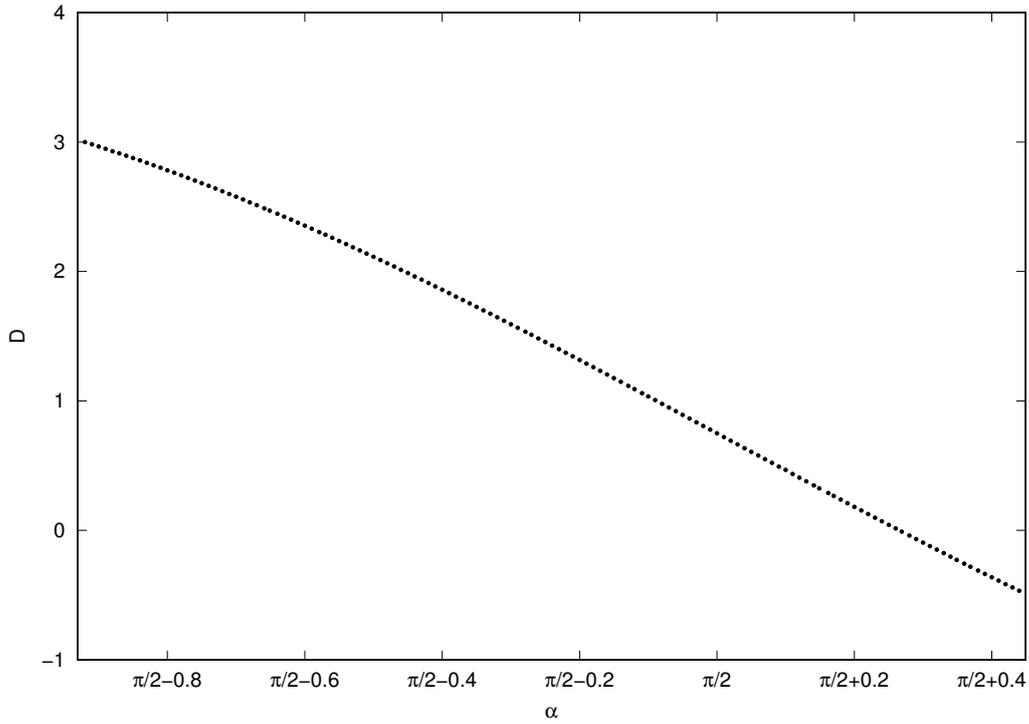


Figura 7.102 – Altura de deslocamento vertical em função do ângulo de contato. Para este gráfico: $Bo = 1/3$; $Bo_m = 1/2$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$.

evidenciados na seção 6.2.2.1-. Este comportamento é observado devido a presença dos efeitos magnéticos, que tendem a causar um aumento no salto de pressões na interface mesmo em condições adversas à ascensão de fluido, associados às pressões magnéticas. Os resultados apresentados na Fig. (7.102) estão em acordo com os apresentados por (GONTIJO et al., 2016) - Fig. (7.103) -, em uma análise feita para um campo magnético vertical.

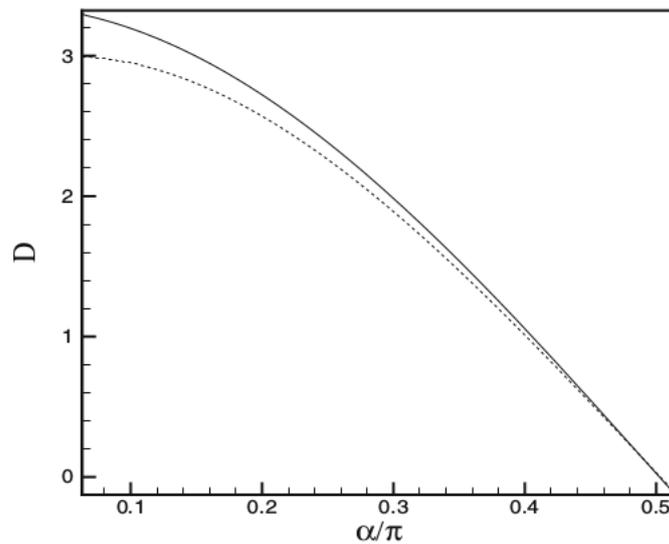


Figura 7.103 – Altura de equilíbrio como uma função do ângulo de contato α . A linha pontilhada representa a solução numérica. Para este gráfico: $\epsilon = 0$; $Bo = 3/10$; $\chi_0 = 1/10$; $\beta_0^* = 1/10$ e $Bo_m = 1/10$ (GONTIJO et al., 2016).

Observa-se na Fig. (7.102) que, mesmo para condições com uma pequena curvatura ($\alpha \sim \pi/2$), é possível realizar-se um deslocamento vertical de fluido para cima, devido a uma combinação de baixas pressões capilares com pressões magnéticas. Neste caso, o salto de pressão não é nulo na interface na presença de um campo magnético externo e, conseqüentemente, as componentes normais do campo não são contínuas na interface, de acordo com as condições de contorno magnéticas. Este resultado é evidenciado pela Eq. (4.25), que mostra que mesmo para condições onde as contribuições capilares sejam nulas, o fluido ainda pode elevar-se contra a gravidade devido à contribuição magnética. A ideia por trás seria promover o deslocamento da interface do fluido em capilares de diâmetro não necessariamente tão pequenos (e.x. meios porosos com altas permeabilidades) por efeitos de pressões magnéticas, uma vez que os efeitos de pressões capilares podem ser muito pequenos nestes casos.

Argumenta-se que um aumento na intensidade dos efeitos magnéticos tende a fazer com que o deslocamento vertical de fluido para cima seja observado para uma faixa de ângulos de contato ainda maiores. Abaixo segue uma pequena discussão sobre a influência do número de Bond magnético no aumento da faixa de ângulos de contato para um deslocamento vertical positivo.

A Tabela (7.12) apresenta os valores dos ângulos de contato para os quais a altura de deslocamento vertical D mudou de um valor positivo para um valor negativo, em função da variação do número de Bond magnético.

Tabela 7.12 – Ângulos de contato para mudança de sinal da altura de deslocamento vertical D em função do número de Bond magnético. Para esta tabela: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$.

Bo_m	α	Bo_m	α	Bo_m	α
0,10	$\pi/2 + 0,053$	0,50	$\pi/2 + 0,265$	0,90	$\pi/2 + 0,481$
0,20	$\pi/2 + 0,106$	0,60	$\pi/2 + 0,319$	1,00	$\pi/2 + 0,538$
0,30	$\pi/2 + 0,160$	0,70	$\pi/2 + 0,372$	1,25	$\pi/2 + 0,682$
0,40	$\pi/2 + 0,212$	0,80	$\pi/2 + 0,426$	1,50	$\pi/2 + 0,844$

A partir da Tab. (7.12) verifica-se que, à medida em que aumenta-se somente o número de Bond magnético, o ângulo de contato para o qual a altura de deslocamento vertical muda de um valor positivo para um valor negativo também aumenta. Um maior número de Bond magnético corresponde a um salto maior de pressões na interface, devido ao aumento da intensidade dos efeitos magnéticos, associados à pressão magnética, fazendo

com que seja possível deslocar-se fluido verticalmente para cima para uma faixa de ângulos de contato cada vez maior.

Os resultados obtidos evidenciam que sistemas com ângulos de contato α menores, são mais eficientes no deslocamento vertical de fluido.

7.3.7.2 Resultados obtidos numericamente para o formato da superfície livre para a análise do efeito da variação do ângulo de contato α

As Figuras (7.104) e (7.105) apresentam formatos de superfície livre obtidos a partir da solução numérica para a análise da variação dos ângulos de contato.

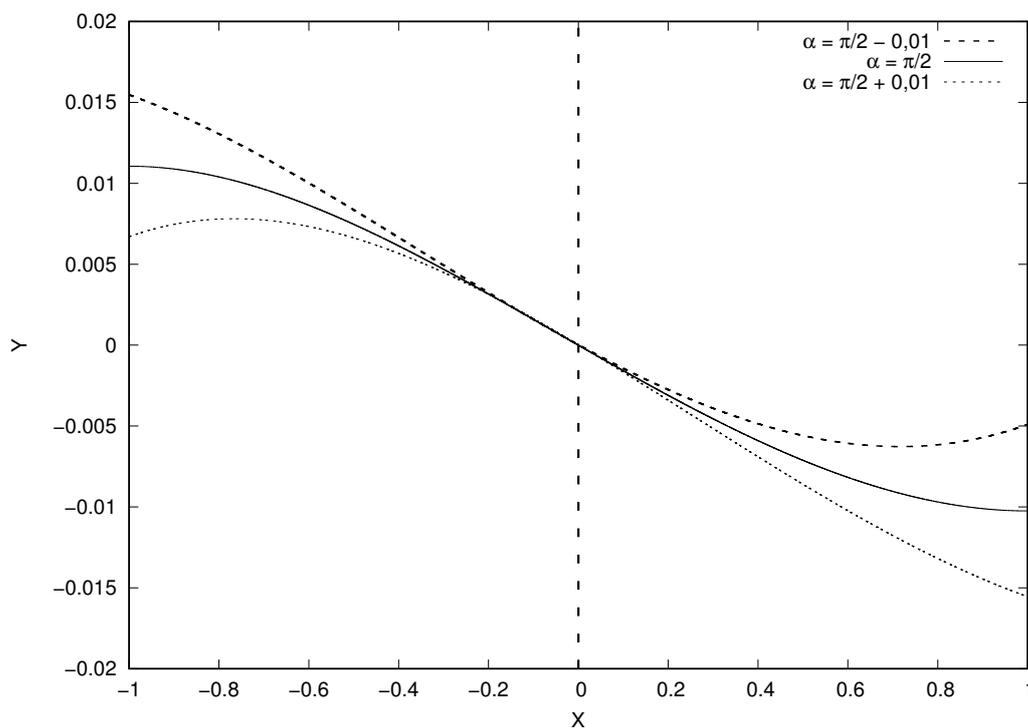


Figura 7.104 – Formatos da superfície livre para diferentes ângulos de contato. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $Bo_m = 1/2$. Para esta figura: $Bo = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$.

As Figuras (7.104) e (7.105) mostram que a variação do ângulo de contato α resulta em diferentes formatos para a superfície livre.

A Figura (7.104) apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se a esquerda da origem dos eixos coordenados, para a variação do ângulo de contato. Vê-se na Fig. (7.104) o momento em que o formato da superfície livre muda de um menisco côncavo para um menisco convexo, na passagem pelo ângulo de contato $\alpha = \pi/2$. Muito embora neste momento as alturas de deslocamento vertical obtidas tenham sido ambas positivas, devido à presença dos efeitos magnéticos, as curvas mudaram de formato

pela passagem pelo ângulo de contato $\alpha = \pi/2$. Verifica-se também o formato da superfície livre para um ângulo de contato $\alpha = \pi/2$.

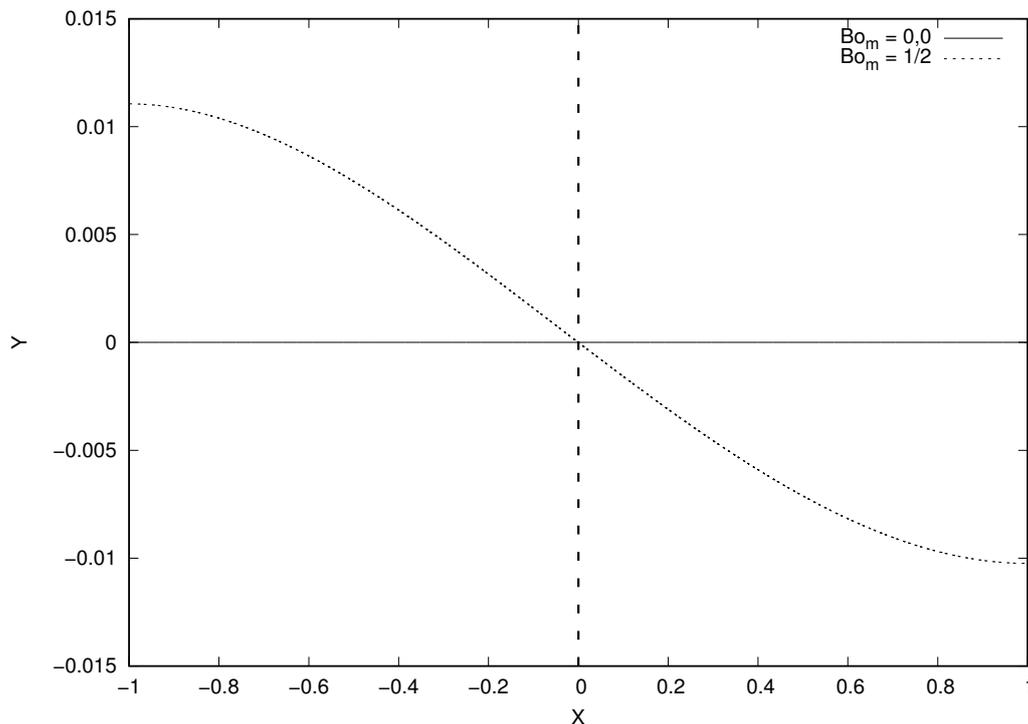


Figura 7.105 – Formatos da superfície livre para diferentes ângulos de contato. Ímã à esquerda da origem dos eixos coordenados e $\alpha = \pi/2$. Para esta figura: $B_o = 1/3$; $\chi_1 = 1,0$; $\chi_2 = 3,6 \times 10^{-7}$; $A = 5,0$; $B = 5,0$; $R = -13,0$; $S = 12,0$ e $M_i/4\pi M_s = 10,0$.

A Figura (7.105) apresenta os formatos da superfície livre obtidos para quando o ímã encontra-se a esquerda da origem dos eixos coordenados para um ângulo de contato $\alpha = \pi/2$. Vê-se que a curva obtida para o caso não-magnético - $B_{o_m} = 0$ -, é uma curva plana, uma vez que $\alpha = \pi/2$ e variações na curvatura são imperceptíveis, indicando não haver salto de pressões na interface, contudo, a curva obtida para o caso magnético - $B_{o_m} = 1/2$ -, apresenta variações em sua curvatura, em um perfil antissimétrico. Essa antissimetria se dá devido à presença dos efeitos magnéticos que, como já argumentado nas seções anteriores deste projeto, um aumento no grau de antissimetria é uma medida da intensidade destes efeitos. Deste modo, foi possível causar-se um deslocamento vertical positivo, em contrapartida ao deslocamento vertical nulo, obtido para o caso não-magnético.

7.4 Síntese dos resultados obtidos numericamente

Em suma, foi possível mostrar-se que a presença de um ferrofluido sob a ação de um campo magnético externo provocou um deslocamento vertical, em alguns casos, aproximadamente 180 vezes superior ao caso não-magnético. Mostrou-se que valores maiores para susceptibilidade magnética, dimensões do ímã permanente, intensidade do campo e número de Bond magnético provocam um deslocamento de fluido superior. Sistemas

com ângulos de contato menores, quando comparados com outros, também o fazem, assim como condições para baixos números de Bond. Também evidenciou-se que uma maior proximidade do ímã permanente à interface causa um deslocamento vertical maior. Apresentou-se resultados onde, mesmo para condições onde a interface possui curvatura muito pequena (e.x. poros com alta permeabilidade), ainda foi possível causar-se ascensão de fluido devido à ação das pressões magnéticas, o mesmo ocorrendo para sistemas com ângulos de contato superiores a $\pi/2$.

O aumento nas intensidades das variáveis magnéticas concernentes ao problema tendeu a causar um aumento na antissimetria das superfícies livres obtidas.

8 CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou-se relevante pois foi possível verificar-se condições físicas onde um maior deslocamento vertical de fluido em capilares pode ser obtido. A compreensão e o controle do deslocamento de fluidos em meios porosos por efeitos capilares é de alto interesse de indústrias específicas, principalmente a indústria petrolífera. O desejo em se realizar um trabalho de caráter científico também foi alcançado, uma vez que este trabalho está relacionado à publicações recentes em periódicos internacionais indexados pela CAPES, realizadas por professores do Grupo Vortex.

A análise teórica feita neste projeto permitiu a dedução de uma equação diferencial não linear que rege o formato da superfície livre formada na interface entre um ferrofluido e um fluido não-magnético contidos entre duas planas verticais paralelas, considerando a solução exata para um campo magnético irrotacional variável, aplicado por um ímã permanente arbitrariamente posicionado no espaço. Esta equação foi resolvida numericamente por integração direta usando um método de *Runge-Kutta* de quarta ordem, acoplado a um esquema de *Newton-Raphson*. O código numérico foi então validado frente a algumas soluções analíticas propostas. Tendo em vista os aspectos observados, foi mostrado que a solução numérica obtida é válida e consistente com a realidade física do problema. A solução esteve em perfeito acordo com as soluções analíticas propostas, nas condições onde as mesmas eram válidas

A influência da variação das variáveis físicas concernentes à física do problema no formato bem como na altura de deslocamento vertical da superfície livre foi avaliada. Primeiramente fez-se uma análise para o caso limite assintótico onde ambos os fluidos na interface são considerados não-magnéticos. Verificou-se que o aumento do número de Bond tendeu a diminuir as alturas de deslocamento vertical. Sistemas líquido-sólido-gás com ângulos de contato menores, quando comparados com outros, apresentaram um deslocamento maior. Para condições onde $\alpha > \pi/2$, um deslocamento vertical negativo foi observado - involução de fluido -, em contrapartida ao deslocamento vertical positivo - ascensão de fluido - obtido para condições onde $\alpha < \pi/2$. Os formatos das superfícies livres obtidos foram todos simétricos, sendo côncavos para condições onde $\alpha < \pi/2$ e convexos para condições onde $\alpha > \pi/2$. Sistemas com ângulo de contato $\alpha = \pi/2$ apresentaram um deslocamento vertical nulo e uma superfície livre plana.

Após a análise para o caso limite assintótico onde ambos os fluidos são considerados

não-magnéticos, fez-se a análise para o caso mais geral. Em suma, foi possível mostrar-se que a presença de um ferrofluido sob a ação de um campo magnético externo provocou um deslocamento vertical, em alguns casos, aproximadamente 180 vezes superior ao caso limite não-magnético. Evidenciou-se que o aumento da susceptibilidade magnética, das dimensões do ímã permanente, da intensidade do campo magnético e do número de Bond magnético tende a provocar um deslocamento vertical de fluido superior. Sistemas com ângulos de contato menores, quando comparados com outros, também o fizeram, assim como condições para baixos números de Bond, em resultado semelhante ao observado para o caso limite não-magnético. Também evidenciou-se que uma maior proximidade do ímã permanente à interface causa um deslocamento vertical maior. Estes resultados mostraram-se extremamente significativos, pois foi mostrado que, mesmo para condições onde a interface possui curvatura muito pequena (e.x. poros com alta permeabilidade), ainda foi possível causar-se ascensão de fluido devido à ação de pressões magnéticas, o mesmo ocorrendo para sistemas com ângulos de contato $\alpha > \pi/2$. Quanto às superfícies livres, mostrou-se que o aumento das intensidades das variáveis magnéticas concernentes ao problema tendeu a causar um aumento no grau de antissimetria, com assimetria presente mesmo para condições onde $\alpha = \pi/2$.

Medições experimentais de tensão superficial, massa específica e altura de deslocamento vertical de fluidos Newtonianos em capilares com diâmetros internos distintos também foram feitas, utilizando-se para tanto as instalações do Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do grupo Vortex da Universidade de Brasília. A partir destas medições, foi possível calcular-se ângulos de contato para estes fluidos em cada um dos tubos analisados. As condições do trabalho experimental foram então simuladas numericamente, e seus resultados comparados com as soluções analíticas apresentadas. Um grande acordo entre os resultados numéricos, analíticos e experimentais foi observado. Os resultados numéricos divergiram em no máximo 1,41% dos resultados experimentais enquanto que os resultados obtidos analiticamente pela solução para curvatura constante divergiram em no máximo 4,31%.

O autor sugere a leitura do artigo científico ([GONTIJO et al., 2016](#)), que foi tido como base para o desenvolvimento deste trabalho. Para um maior aprofundamento em Ferrohídrodinâmica, o autor sugere a leitura dos textos ([CUNHA, 2012](#)) e ([ROSENSWEIG, 1985](#)).

Apêndice A

Ímãs comerciais utilizados na análise apresentada na seção 6.3.4.1. Informações retiradas do catálogo do fabricante “*Supermagnete*” ([SUPERMAGNETE, 20-a](#)) e do endereço eletrônico do fabricante ([SUPERMAGNETE, 20-b](#)).

Tabela 9.1 – Características dos ímãs analisados. Informações retiradas do catálogo do fabricante “*Supermagnete*” (SUPERMAGNETE, 20–a) e do endereço eletrônico do fabricante (SUPERMAGNETE, 20–b).

Tipo	Dimensões [mm]	Magnetização	Br [T]	bHc [kA/m]	iHc [kA/m]	B × H [mOe]	T [°C]
Q-05-1.5-01-N	5,0 × 1,5 × 1,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
Q-05-2.5-1.5-HN	5,0 × 2,5 × 1,5	44H	1,32 - 1,36	860 - 1035	≥ 1353	42 - 44	≤ 120
Q-05-2.5-02-HN	5,0 × 2,5 × 2,0	44H	1,32 - 1,36	860 - 1035	≥ 1353	42 - 44	≤ 120
Q-05-04-01-G	5,0 × 4,0 × 1,0	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-05-04-1.5-N	5,0 × 4,0 × 1,5	N48	1,37 - 1,42	860 - 955	≥ 955	45 - 48	≤ 80
Q-CDM48-G	5,0 × 5,0 × 1,0	N48	1,37 - 1,42	860 - 955	≥ 955	45 - 48	≤ 80
Q-CDM50-G	5,0 × 5,0 × 1,2	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-05-05-02-G	5,0 × 5,0 × 2,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
Q-05-05-03-N52N	5,0 × 5,0 × 3,0	N52	1,42 - 1,47	860 - 955	≥ 955	48 - 53	≤ 65
Q-06-04-02-HN	6,0 × 4,0 × 2,0	44H	1,32 - 1,36	860 - 1035	≥ 1353	42 - 44	≤ 120
Q-07-06-1.2-G	7,0 × 6,0 × 1,2	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-08-04-03-N	8,0 × 4,0 × 3,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
Q-08-08-04-N	8,0 × 8,0 × 4,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
Q-10-03-02-HN	10,0 × 3,0 × 2,0	44H	1,32 - 1,36	860 - 1035	≥ 1353	42 - 44	≤ 120
Q-10-04-01-G	10,0 × 4,0 × 1,0	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-04-1.5-G	10,0 × 4,0 × 1,5	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-04-02-G	10,0 × 4,0 × 2,0	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-05-01-G	10,0 × 5,0 × 1,0	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-05-1.2-G	10,0 × 5,0 × 1,2	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-05-1.5-G	10,0 × 5,0 × 1,5	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-05-02-G	10,0 × 5,0 × 1,5	N50	1,40 - 1,46	860 - 955	≥ 955	47 - 51	≤ 80
Q-10-05-03-N	10,0 × 5,0 × 3,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
Q-10-10-01-N	10,0 × 10,0 × 1,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80
Q-10-10-1.2-N52N	10,0 × 10,0 × 1,2	N52	1,42 - 1,47	860 - 955	≥ 955	48 - 53	≤ 65
W-01-N	1,0 × 1,0 × 1,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
W-03-N	3,0 × 3,0 × 3,0	N45	1,32 - 1,37	860 - 955	≥ 955	43 - 45	≤ 80
W-04-N	4,0 × 4,0 × 4,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80
W-05-G	5,0 × 5,0 × 5,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80
W-06-N	6,0 × 6,0 × 6,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80
W-07-N	7,0 × 7,0 × 7,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80
W-10-N	10,0 × 10,0 × 10,0	N42	1,29 - 1,32	860 - 955	≥ 955	40 - 42	≤ 80

Referências

BASHTOVOI V.; BOSSIS G.; KUZHIR P.; REKS. A. *Magnetic field effect on capillary rise of magnetic fluids*. J Magn Magn Mater, n. 289, p. 376–378, 2005. Citado na página 11.

BASHTOVOI, V.; KUZHIR, P.; REKS, A. *Capillary ascension of magnetic fluids*. J Magn Magn Mater, n. 252, p. 265–267, 2002. Citado na página 10.

BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. New York: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1967. ISBN 0 521 09817 3. Citado na página 8.

BOUDOUVIS, A. G.; PUCHALLA, J. L.; SCRIVEN, L. E. *Interaction of capillary wetting and fringing magnetic field in ferrofluid systems*. J Colloid Interface Sci, n. 124, p. 677–687, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 1, 8, 9 e 10.

BRAGARD, J.; LEBON, G. *Capillary ascension in porous media: a scaling law*. Transp Porous Med, n. 16, p. 253–261, 1994. Citado 4 vezes nas páginas vi, 9, 10 e 11.

CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: AMGH Editora, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 104, 122 e 128.

CLARK, D. A.; EMERSON, D. W. *Notes on rocks magnetization characteristics in applied geophysical studies*. Exploration Geophysics (1991) 22, 547-555, 1991. Citado na página 68.

CUNHA, F. R. *Estática dos Fluidos - Notas de Aula*. [S.l.: s.n.], 20–. Citado na página 104.

CUNHA, F. R. *Fundamentos da Hidrodinâmica de Fluidos Magnéticos, Turbulência - Volume 8 (Capítulo de Livro)*. [S.l.]: EPTT, 2012. Citado 20 vezes nas páginas vi, 5, 6, 7, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 31, 64, 87, 94 e 130.

CUNHA, F. R.; SOBRAL, Y. D. *Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure driven flows of magnetic fluid in a cylindrical tube*. Physica A 343,36, 2004. Citado 3 vezes nas páginas vi, 6 e 7.

EISSMANN, P.-B.; LANGE, A.; ODENBACH, S. *Meniscus of a magnetic fluid in the field of a current-carrying wire: two dimensional numerical simulations*. Magnetohydrodynamics, n. 47, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.

FRANCISQUINI, E.; SCHOENMAKER, J.; SOUZA, J. A. *Nanopartículas magnéticas e suas aplicações*. 19— . Disponível em: <<http://professor.ufabc.edu.br/joseantonio.souza/wp-content/uploads/2015/05/Cap%C3%ADtulo-14-Nanopart%C3%ADculas-Magn%C3%A9ticas-e-suas-Aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas vi e 5. Acessado em 16/11/2016.

FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: PEARSON, 2007. ISBN 8 576 05087 0. Citado na página 44.

FURTADO A.; BATISTA E.; Spohr I.; Filipe. E. *Measurement of density using oscillation-type density meters. Calibration, traceability and uncertainties*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 116.

GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. *Experimental investigation on thermo-magnetic convection in cavities*. Journal of Nanoscience and Nanotechnology, Vol.12, 9198- 9207,2012, 2012. Citado na página 7.

GONTIJO R. G.; MALVAR S.;SOBRAL Y. D.;CUNHA F. R. *The influence of a magnetic field on the mechanical behavior of a fluid interface*. Meccanica - An International Journal of Theoretical and Applied Mechanics AIMETA, n. 51, 2016. Citado 19 vezes nas páginas viii, xii, 3, 12, 18, 20, 22, 25, 29, 30, 36, 39, 44, 60, 62, 64, 65, 99 e 130.

HUKE, B.; LUCKE, M. *Magnetic properties of colloidal suspensions of interacting magnetic particles*. Rep. Prog. Phys. 67 (2004) 1731-1768 - Institute of Physics Publishing, 2004. Citado na página 67.

HUNT, C. P.; MOSKOWITZ, B. M.; BENERJEE, S. K. *Magnetic properties of rocks and minerals*. Rock Physics and Phase Relations ; A Handbook of Physical Constants AGU Reference Shelf 3, 1995. Citado 2 vezes nas páginas viii e 68.

JOHN, T.; MAT, K.; STANNARIUS, R. *Meniscus of a ferrofluid around a vertical cylindrical wire carrying electric current*. Phys Rev E, n. 83, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 12.

MCCAIG, M.; CLEGG, A. G. *Permanent Magnets in Theory and Practice*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 1987. (New York). Citado 2 vezes nas páginas vi e 31.

POLEVIKOV, V.; TOBISKA, L. *Instability of magnetic fluid in a narrow gap between plates*. J Magn Magn Mater, n. 289, p. 379–381, 2005. Citado na página 11.

POZRIKIDIS, C. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. [S.l.]: CUP, 1992. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780521405027,0521405025. Citado na página 25.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Campus, 1982. Citado na página 69.

ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. New York: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1985. ISBN 0 521 25624 0. Citado 6 vezes nas páginas x, 4, 5,

20, 30 e 85.

ROSENSWEIG R. E.; ELBORAI S.; LEE S.-H.; ZAHN M. *Theory and measurements of ferrofluid meniscus shape in applied uniform horizontal and vertical magnetic fields*. J Magn Magn Mater, n. 289, p. 192–195, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 12, 18 e 130.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. D. R. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: Makron Books - PEARSON, 1996. ISBN 8 534 60204 2. Citado na página 44.

SCHERER, C.; NETO, A. M. F. *Ferrofluids: Properties and applications*. Brazilian Journal of Physics, n. 3, 2005. Citado na página 5.

SCIPP. *Surface tension*. University of California Santa Cruz, 19–. Disponível em: <<http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph5B/bubble.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas vi e 8. Acessado em 16/11/2016.

SOLOVYOVA ANNA Y.; GOLDINA OLGA A.; IVANOV ALEXEY O.; LEDEBEV ALEKSANDR V.; ELFIMOVA EKATERINA A. *The initial magnetic susceptibility of polydisperse ferrofluids: A comparison between experiment and theory over a wide range of concentration*. THE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS 145, 084909 (2016), 2016. Citado 3 vezes nas páginas ix, 69 e 72.

SUPERMAGNETE. *Cátologo fabricante - catalogue supermagnete.de - the worlds strongest magnets*. 20–. Disponível em: <<https://www.supermagnete.de/eng/catalog.pdf>>. Citado 7 vezes nas páginas ix, xv, 75, 76, 77, 134 e 135. Acessado em 19/05/2017.

SUPERMAGNETE. *Physical magnet data*. 20–. Disponível em: <https://www.supermagnete.de/eng/data_table.php>. Citado 5 vezes nas páginas ix, xv, 77, 134 e 135. Acessado em 19/05/2017.

SUPERMAGNETE. *What do the specifications n42, n45, n50, etc. mean?* 20–. Disponível em: <<https://www.supermagnete.de/eng/faq/What-do-the-specifications-N42-N45-N50-etc-mean>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 79. Acessado em 19/05/2017.

SUPERMAGNETE. *What does coercive field strength mean?* 20–. Disponível em: <<https://www.supermagnete.de/eng/faq/What-does-coercive-field-strength-mean>>. Citado na página 77. Acessado em 19/05/2017.

TARI A.; CHANTRELL R. W.; CHARLES S. W.; POPPLEWELL J. *The magnetic properties and stability of a ferrofluid containing f e $3 \ 0 \ 4$ particles*. Physica 97B (1979) 57-64 - North-Holland Publishing Company, 1978. Citado 3 vezes nas páginas viii, 68 e 72.

TOGINHO, F. D. O.; ANDRELLO, A. C. *Medição e propagação de erros*. Universidade Estadual de Londrina, 2009. Disponível em: <<http://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/aulas/lce5702/medicao.pdf>>. Citado na página 109. Acessado em 16/03/2017.

WIKIWAND. *Menisco (física)*. 19--. Disponível em: <[http://www.wikiwand.com/es/Menisco_\(f%C3%ADsica\)](http://www.wikiwand.com/es/Menisco_(f%C3%ADsica))>. Citado 2 vezes nas páginas vi e 9. Acessado em 16/11/2016.