Universidade de Brasília

FACULDADE UnB PLANALTINA

CIÊNCIAS NATURAIS

Uma Análise da Geometria Fractal

AUTOR: Marcelo da Silva Daga

ORIENTADOR: José Eduardo Castilho

Planaltina – DF

Junho 2017

Universidade de Brasília

FACULDADE UnB PLANALTINA

CIÊNCIAS NATURAIS

Uma análise da Geometria Fractal

AUTOR: Marcelo da Silva Daga

ORIENTADOR: José Eduardo Castilho

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora, como exigência parcial para a obtenção de título de Licenciado do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, da Faculdade UnB Planaltina, sob a orientação do Professor José Eduardo Castilho.

Planaltina - DF

Junho 2017

DEDICATÓRIA

Dedicamos este trabalho primeiramente à Deus, à minha Família, à minha filha Maria Sofia, Meu orientador, o Instituto Bancorbrás e a todos que me apoiaram nessa linda jornada.

UMA ANÁLISE DA GEOMETRIA FRACTAL

Marcelo da Silva Daga[1]

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso realizará uma revisão bibliográfica sobre a Geometria Fractal. Com isso, mostraremos a sua origem, as suas principais características, como são construídos, se podemos encontrá-los na natureza e suas aplicações. Na educação básica a Geometria Fractal pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com outras disciplinas, conforme será mostrado neste trabalho. Entretanto, o ensino da Geometria Fractal na educação básica não é explorado, dentre outros fatores, pela falta de conhecimento do professor.

Palavras-chave: Geometria Fractal, Geometria Euclidiana, Principais Características de Objetos Fractais.

SUMMARY

This work of conclusion of course will carry out a bibliographical revision on Fractal Geometry. With this, we will show its origin, its main characteristics, how they are constructed, if we can find them in nature and its applications. In basic education Fractal Geometry can be worked in an interdisciplinary way with other disciplines, as will be shown in this work. However, the teaching of Fractal Geometry in basic education is not explored, among other factors, by the teacher's lack of knowledge.

Keywords: Fractal Geometry, Euclidean Geometry, Main Characteristics of Fractional Objects

1. INTRODUÇÃO

A matemática sempre me despertou curiosidades, por isso a escolha do tema de conclusão de curso ser a geometria fractal. Entretanto, essa escolha aconteceu quando estava cursando uma disciplina de Cálculo na Universidade e o professor citou em uma das suas aulas a geometria fractal, como ela ocorria na natureza (formato das nuvens, as ramificações dos raios) e como poderiam se criar figuras geométricas seguindo alguns padrões, contudo podemos notar essas características nas obras geométricas: Curvas de Koch e Conjunto de Mandelbrot. Este tema não é objeto de estudo no Ensino Médio, mas estudos mostram (NASCIMENTO, 2012), que as atividades envolvendo a geometria fractal podem ser um facilitador no ensino dos conceitos geométricos.

A Geometria Fractal muitas vezes está presente no nosso cotidiano e passa despercebida pela falta de conhecimento, esse tema pode ser trabalhado de forma interdisciplinar com as disciplinas de Ciências Naturais, Matemática, Artes, Geografia e Biologia. Com isso, pode-se

---

1 Curso de Ciências Naturais - Faculdade UnB de Planaltina

demonstrar que a matemática está presente no mundo das pessoas e não somente nos livros didáticos.

Vivemos em uma época em que o avanço científico e tecnológico tem auxiliado na construção do conceito da Geometria Fractal, pois hoje em dia um computador pode resolver problemas que antes levaria dias para ser resolvido, como o software UltraFractal que consegue criar fractais com uma precisão excelente.

Dessa forma, este trabalho tem a visão de ajudar a esclarecer o conceito da Geometria Fractal, um tema que é pouco abordado nas escolas e também contribuir na divulgação desse assunto. Segundo Sebastião e Silva (1996, apud NUNES, 2006, p.7) "Ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltônico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não iluminam.". Segundo o autor, ensinar matemática não pode ser de qualquer forma, contudo devemos mostrar para os estudantes quais são as suas origens e suas aplicações, porque é uma forma de trabalhar com o senso crítico do aluno.

Nosso trabalho também contou com a ajuda de um software, chamado GeoGebra, para as construções de alguns fractais como a curva de Koch e a ilha de Koch. Este aplicativo tem uma interface simples e possui domínio público.

1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo fazer uma revisão Bibliográfica sobre a Geometria Fractal, onde abordaremos suas principais características e como pode ser explorada na educação básica e suas principais aplicações no nosso cotidiano.

1.1.2 Objetivo específico

Esclarecer o conceito da Geometria Fractal, baseado nessas três perguntas:

1. O que é um Fractal?
2. Quais são as suas características?
3. Quais as suas aplicações?

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Percepção do Infinito

A percepção do infinito é um assunto fundamental para darmos início à compreensão da Geometria Fractal. Por ser um conceito estritamente matemático, existe uma dificuldade em contextualizá-lo no dia a dia. Os conjuntos numéricos já trazem a ideia de infinito. O conjunto dos números naturais (0,1,2,3, …) se caracteriza por ser um conjunto infinito e enumerável, pois para cada número natural temos um sucessor $n+1$. Já no conjunto dos números reais, não podemos falar em sucessor, pois dado dois números reais distintos, x e y, existe o número real z tal que $x<z<y$.

A percepção do infinito foi bem explorada na arte de Escher, como podemos notar na xilogravura “Anjos e Demônios” mostrada na Figura 1.

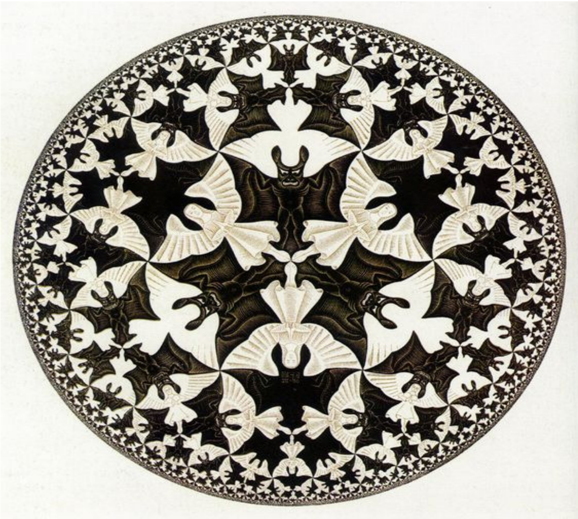


Figura 1 - “ Anjos e Demônios, 1960 ”

Fazendo uma análise da imagem acima, o artista começa a preencher o círculo pelo centro com figuras de um anjo contrapondo com a figura de um demônio e conforme vai se deslocando para a borda do círculo esses padrões vão se repetindo, porém, em tamanhos menores seguindo uma progressão geométrica. Transmitindo paras as pessoas que estão visualizando a percepção do infinito.

2.2 História da Geometria Fractal

Por muito tempo trabalhou-se com a Geometria Euclidiana, criada por Euclides de Alexandria por volta do ano 300 a.c, para buscar resolver os padrões matemáticos da natureza, pois acreditava-se que esta era a que melhor descrevia os fenômenos do nosso mundo. Porém, esta não era capaz de resolver alguns problemas, tais como as representações das estruturas do couve-flor, as nuvens e os raios. “As nuvens não são esferas, montanhas não são cones, as costas não são círculos e casca não é suave, nem relâmpago viaja em linha reta. ” (MANDELBROT,1977, p.14). Conforme Mandelbrot, estas formas não podem ser explicadas pela Geometria Euclidiana, pois apresentam uma maior complexidade.

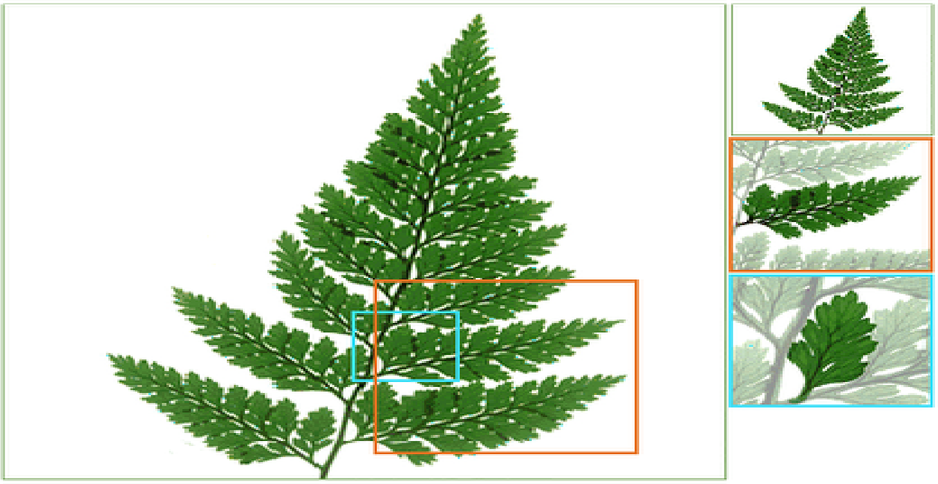


Figura 2 - “Feto um objeto da natureza Fractal”
Fonte: https://catiaosorio.wordpress.com/tag/fractais/ visto em 18/05/2017

Observando a imagem acima, podemos notar que esta possui características irregulares que por muitos anos não tinham respostas na Geometria Euclidiana e eram consideradas “monstros da matemática”. Entretanto o que é um Fractal?

A denominação fractal vem do latim “fractus’ que significa quebrado, fração e contextualiza uma nova geometria. O termo fractal e suas teorias foram propostos por Benoit Mandelbrot, em 1975, que é considerado o pai da Geometria Fractal. Entretanto, já existiam trabalhos de alguns matemáticos de meados do século XIX como: George Cantor e Helge Von Koch que criaram objetos matemáticos “monstros da matemática”, que posteriormente seriam chamados de objetos fractais.

Segundo Mandelbrot, o conceito de Fractal está correlacionado com a dimensão, pois um Fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão Hausdorf-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica (número inteiro que caracteriza a geometria de um objeto euclidiano – por exemplo: zero para um ponto, um para uma linha, etc.).

2.3 A Geometria Fractal na Educação Básica

A Geometria Fractal pode ser trabalhada de forma interdisciplinar nas escolas junto com as disciplinas de Matemática, Biologia, Geografia, Ciências Naturais e Artes. Com a finalidade de contextualizar os temas abordados em sala de aula.

> “ A abordagem da Geometria Fractal pode incrementar nas turmas da educação básica, proporcionando mais uma fonte motivacional no estudo de diversos conteúdos presentes nas propostas curriculares, tais como: padrões numéricos e geométricos; sequências e séries; progressões geométricas (PGs); problemas de contagem; perímetro e área de figuras planas; volume de sólidos geométricos; logaritmos; introdução ao conceito de limite. ” (MOREIRA, 2013, p.35)

De acordo com Moreira, a inserção da Geometria Fractal na Educação Básica vem para contribuir na formação acadêmica desses alunos, pois relaciona a matemática com a natureza, mostrando que tudo o que eles aprenderam como: perímetro, área, progressões geométricas e entre outros. Estão relacionados com o mundo em que vivemos.

> “ O uso de fractais em sala de aula provoca a quebra de paradigma que a matemática é uma ciência pronta. Como tem aplicações práticas e de fácil compreensão, e reconhecida a semelhança com diversos elementos da própria natureza, mostra que a matemática que é estudada é aplicável. Estimula o uso de computadores, provocando mais fascínio para quem ensina e para quem aprende. Mesmo que abordos em diferentes níveis, o uso da Geometria Fractal provoca nos alunos um olhar diferenciado no mundo que nos rodeia. ” (RABAY, 2013, P.101)

Segundo a autora, a Geometria Fractal é um tema que pode ser trabalhado na Educação Básica como uma forma de incentivar os alunos a aprenderem a matemática, demonstrando para eles as suas aplicações no cotidiano, com isso rompendo o paradigma que a matemática é uma ciência pronta.

> “ Temos a clareza que é um tema recente para a maioria dos professores de Matemática, pois em muitos cursos de licenciatura em Matemática não constam na grade curricular e nem nos livros didáticos, quando aparecem, são apenas de forma ilustrativa, sem a devida orientação de como desenvolver o trabalho. ” (NASCIMENTO, 2012, p.114)

Segundo o autor, ainda encontramos obstáculos para a inserção da Geometria Fractal na Educação Básicas, pois muitos professores de Matemática nunca ouviram falar dessa nova geometria em suas graduações.

Entretanto nesses últimos anos a inserção da Geometria Fractal vem sendo cobrada nas diretrizes curriculares tanto para o Ensino Médio e Fundamental. Como podemos observar em um vestibular da Universidade Federal do Paraná UFPR em 2008 foi cobrada uma questão envolvendo a Geometria Fractal, como podemos observar no trabalho de (NASCIMENTO, 2012).

3. CARACTERÍSTICAS DE UM OBJETO FRACTAL

Um objeto pode ser classificado como um fractal se possuir essas características: Auto semelhança, complexidade e dimensão. Eles podem ser encontrados na natureza como no floco de neve, relâmpagos, brócolis romanesco e na concha marinha. E também podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente por processos repetitivos como, por exemplo: A curva de Koch, a ilha de Koch etc. Vamos discutir essas características abaixo:

3.1 Auto semelhança

Uma figura é considerada auto semelhante, quando ampliamos ou diminuímos a sua escala e devido a esse processo as partes ampliadas ou reduzidas se assemelham com a figura no seu estado normal.

Entretanto, existem dois tipos de auto semelhança: a aproximada e a exata. Na natureza encontramos a auto semelhança aproximada, pois não conseguimos visualizar muitas escalas de ampliação como no caso do couve-flor, com isso devemos ter cuidado por essas partes possuírem as mesmas estruturas, porém não são réplicas exatas. Ao contrário do auto semelhança exata que só existe seguindo padrões da matemática, esta não se encontra na natureza.

3.2 Complexidade

A complexidade subentende-se o processo de construção de uma figura; é característico de um processo recursivo, onde cada etapa de criação segue um padrão que pode ser compreendido como um sub-procedimento do processo anterior. Contudo, a construção de um fractal matematicamente definido acarreta em uma quantidade infinita de procedimentos, o que leva a geração de uma estrutura infinitamente complexa.

3.3 Dimensão Fractal

Estamos acostumados a falar sobre a dimensão de Euclides, que está relacionada com o comprimento, largura e altura de um objeto. Como podemos notar um ponto possui dimensão 0, linhas possuem dimensão 1, superfície dimensão 2 e espaço dimensão 3.

Nessas representações de dimensões apresentam-se como números inteiros positivos como 0,1,2 e 3. Ao contrário da dimensão fractal que podem apresentar números inteiros e também números fracionários como: A dimensão fractal da bacia do rio amazonas 1,85; Dimensão fractal dos raios 1,51; Dimensão Fractal dos angiogramas dos rins 1,61. Como podemos observar na Figura 3.

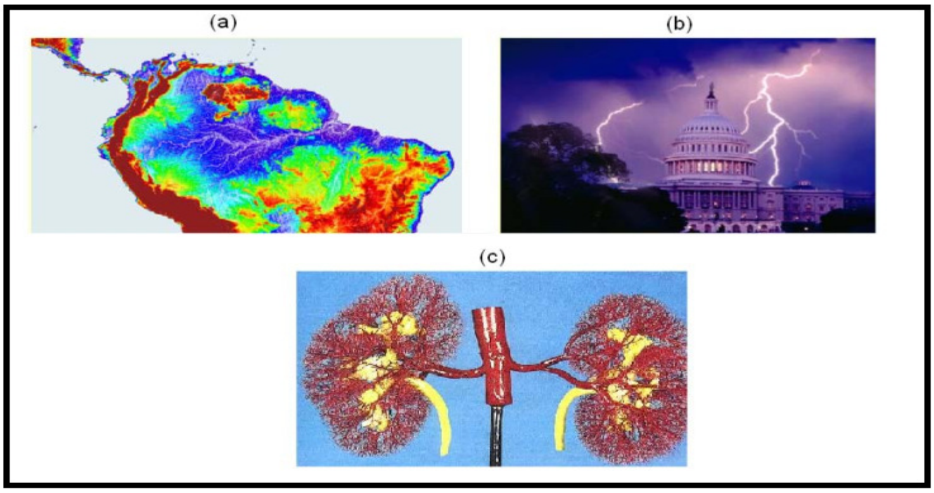


Figura 3 - *(a) Bacia do rio Amazonas obtidas pelo radar de altimetria ERS-1, com dimensão fractal 1.85 (www.esa.int). (b) Tempestade no Capitólio com raios cuja dimensão fractal é 1,51. (c) Sistema arterial dos rins com dimensão 1,61.*
Fonte: Assis, 2008, p.2.

Para a medição de objetos que possuem auto semelhança exata e aproximada, podemos calcular a sua Dimensão Fractal usando a relação de Hausdorff-Besicovitch que é dada pela seguinte formula:

$$D=\frac{\log n}{\log\frac{1}{R}}$$

Onde, D é a Dimensão, **n** é o número de partes geradas e **R** é o fator de redução.

4. FRACTAIS CLÁSSICOS

4.1 Curvas de Koch

O responsável pela criação das Curvas de Koch foi o matemático sueco Helge Von Koch. Que posteriormente deu origem a Ilha de Koch. Estas figuras geométricas possuem as mesmas características de construções, o que as diferem é que a curva de Koch tem como ponto de partida um segmento de reta, ao contrário da ilha de Koch que é composto por um triângulo equilátero.

A construção da curva de Koch primeiramente iniciará com um segmento de reta, com isso dividiremos esse segmento de reta em três partes iguais e construímos sobre cada segmento um novo triangulo equilátero, suprindo o lado da base. Com isto obtemos quatro segmentos de reta. Repetindo o processo para cada segmento novo obtemos a curva de Koch, como podemos observar nessas primeiras quatro etapas que estão representadas na Figura 4.

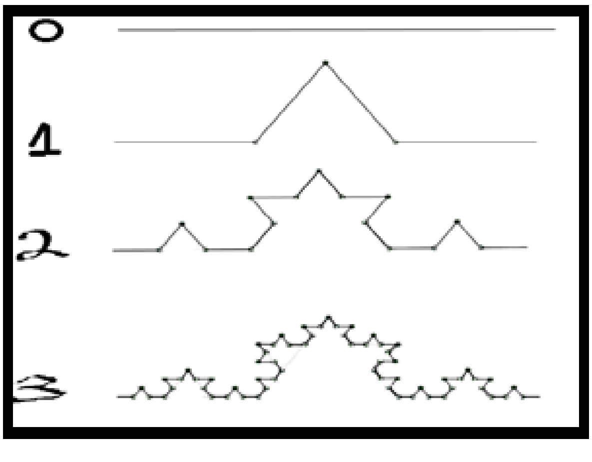


Figura 4 - Construção da Curva de Koch

A Construção da ilha de Koch começará com um triângulo equilátero, com isso dividiremos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada segmento um novo triangulo equilátero. Com a repetição indefinidamente desse processo obtemos a ilha de

Koch, como podemos observar nessas primeiras quatro etapas que estão representadas na figura 5.

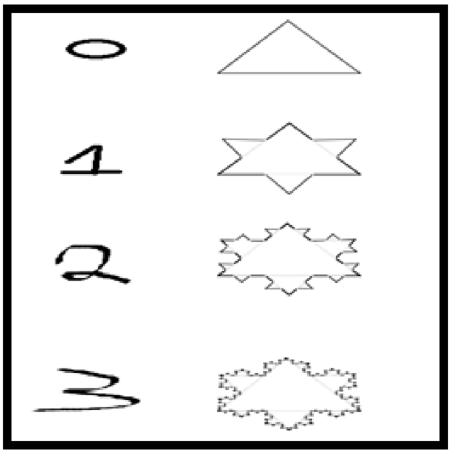


Figura 5 - Construção da Ilha de Koch

4.1.1 Curiosidade da Curva de Koch

Vamos apresentar algumas características sobre o processo de geração da Curva de Koch. Na figura acima podemos observar, que a cada passo a quantidade de lados cresce de acordo com a fórmula: l=$3x4^n$, quando $n \to +\infty$, enquanto o comprimento de cada lado diminui numa razão de C=$\frac{1}{3^n}$, quando $n \to +\infty$, conforme observamos na Tabela 1. O comportamento assintótico dessas medidas tende respectivamente para infinito e zero. Qual será o comportamento do comprimento total da curva? Para cada etapa o comprimento da curva será dada pela quantidade de lados vezes o seu comprimento, sendo: $\mathrm{R} = \mathrm{l} \times \mathrm{c} \ = \ 3\mathrm{x}\left(\frac{4}{3}\right)^{\mathrm{n}}$. Logo o comprimento da curva tende ao infinito, Ou seja, teremos uma curva de tamanho infinito que pode ser limitada numa região finita. Como este processo é repetido vamos fazer uma comparação na tabela abaixo do número de passos em ralação a quantidades de lados e comprimento dos lados.

Tabela 1. Relação de quantidade de lados por comprimento do lado

Números de passos (n)	Quantidade de lados l=$3x4^n$	Comprimento do lado C=$\frac{1}{3^n}$	Comprimento total da Curva $R = 3x\left(\frac{4}{3}\right)^n$
0	3 x4^0= 3	$\frac{1}{3^0} = 1{,}0000$	$3x\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 3{,}00$
1	3 x 4^1 = 12	$\frac{1}{3^1} = 0{,}3333$	$3x\left(\frac{4}{3}\right)^1 = 3{,}99$

2	$3 \text{ x } 4^2 = 48$	$\frac{1}{3^2} = 0{,}1111$	$3x\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 5{,}33$
3	$3 \text{ x } 4^3 = 192$	$\frac{1}{3^3} = 0{,}0373$	$3x\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 7{,}11$
. . .	. . .	. . .	. . .

4.1.2 Dimensão da Curva de Koch

Como podemos observar que cada interação gera 4 segmentos e que o fator de redução é $\frac{1}{3}$. Aplicando a formula de dimensão fractal temos:

$$n=4;R=\frac{1}{3} \rightarrow D=\frac{\log n}{\log \frac{1}{R}} \rightarrow D=\frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} \rightarrow D=1{,}26$$

4.2.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor também conhecido como “Poeira de Cantor” foi obtido por Cantor (1845-1918), para a obtenção desse fractal começamos com um segmento de reta unitário (0,1) com intervalo fechado, com isso, dividiremos esse segmento em três partes iguais: I=$\left(0,\frac{1}{3}\right)$ $U\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)U\left(\frac{2}{3},1\right)$, em seguida retiramos o terço médio $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Com isso ficamos com: I=$\left(0,\frac{1}{3}\right)U\left(\frac{2}{3},1\right)$, dessa forma repetindo esse processo em cada novo segmento de reta obtemos o conjunto de Cantor como pode ser observado na Figura 5 abaixo, os primeiros 4 passos :

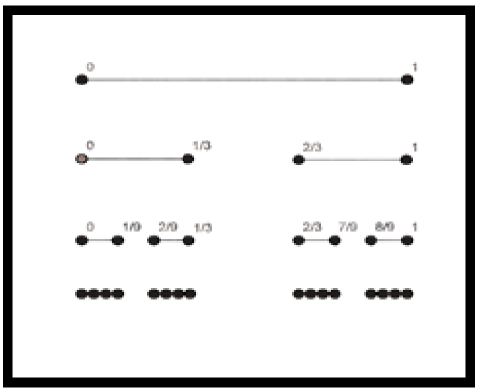


Figura 6 - Construção do Conjunto de Cantor

Observação: As figuras 3, 4 e 5 foram construídas através do software GeoGebra que é um aplicativo que possui uma plataforma que possibilita a criação de figuras geométricas. Este tem domínio público e vem ajudando vários professores no ensino de matemática.

4.2.2 Dimensão do Conjunto de Cantor

Como podemos observar que cada interação gera 2 segmentos e que o fator de redução é $\frac{1}{3}$. Aplicando a formula de dimensão fractal temos:

$$\text{n=2;R=}\frac{1}{3} \rightarrow \text{D=}\frac{\log n}{\log\frac{1}{R}} \rightarrow \text{D=}\frac{\log 2}{\log\frac{1}{\frac{1}{3}}} \rightarrow \text{D=0,63}$$

4.3 Conjunto de Julia

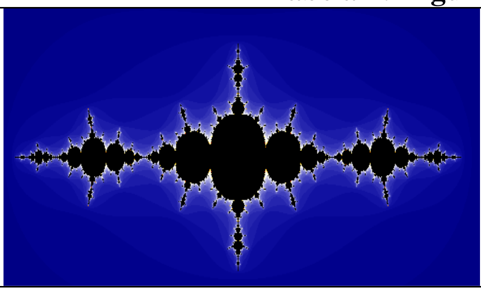
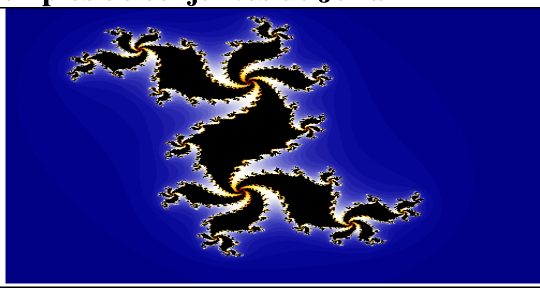
O matemático francês Gast On Maurice Julia (1893-1978) e Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) foram os responsáveis por introduzirem o que conhecemos atualmente como o Conjunto de Julia, que foi divulgado por volta de 1918. Aonde este conjunto surge da interação de funções complexas. Seja $Z_{n+1}=Z_n^2+c$, em que c seja um ponto fixo no plano complexo e aonde para cada ponto Z_0 resultara em uma função complexa, tendo assim uma sequências de números complexos (órbita de Z_0).

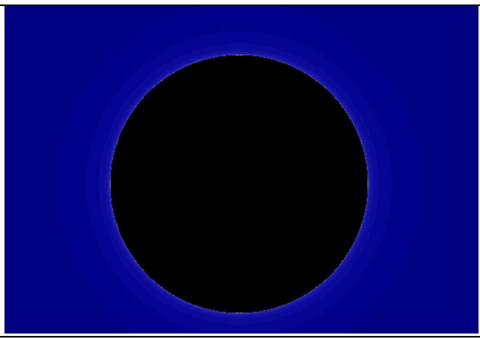
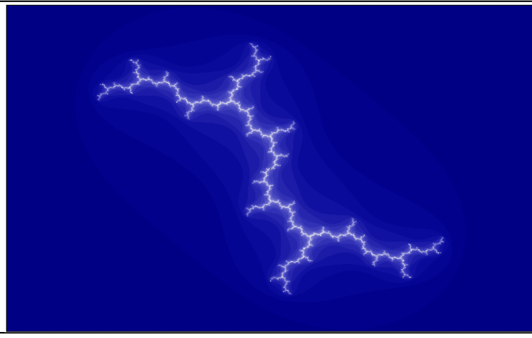
$$Z_0 \rightarrow Z_1=Z_0^2+c \rightarrow Z_2=Z_1^2+c \rightarrow \cdots$$

Se a órbita de Z_0 é atraída para o infinito (Z_0 é ponto escape), então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de Julia. O conjunto de todos esses pontos, dá origem ao conjunto de escape de c. Se a órbita de Z_0 é atraída para um círculo em torno da origem (Z_0 é ponto prisioneiro), então Z_0 pertence a algum conjunto de Julia. Logo, o conjunto de todos estes pontos da origem ao conjunto prisioneiro de **c**.

Com a ajuda do software UltraFractal construímos alguns conjuntos de Julia que podem ser observados na Tabela 2.

Tabela 2: Alguns exemplos de conjuntos de Julia

	
$c = -1{,}25 + 0i$	$c = 0{,}3 + 0{,}5i$

	
$c = 0$	$c = 0 + 1i$

4.4 Conjunto de Mandelbrot

A sua criação é definida pela função: $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$, onde (n) pertence aos naturais e (c) são números complexos. O Conjunto de Mandelbrot é definido como sendo o conjunto de todos os números complexos, que a partir de um certo número de interações de $Z_{n+1} = Z_n^2$, z não tende para o infinito. Com isso, iterando a função para cada ponto **c** do plano complexo, temos a seguinte sequência:

$$c \to c^2 + c \to (c^2 + c)^2 + c \to \cdots$$

Sugerindo alguns valores para **c** temos:

$c = 0$, temos:

$0 \to 0 \to 0 \to \cdots$

$c = -1$, temos:

$-1 \to 0 \to -1 \to \cdots$

$c = 5$, temos:

$5 \to 30 \to 905 \to \cdots$

Notamos em $\boldsymbol{c} = 0$, que a sequência converge para um ponto, em $\boldsymbol{c = -1}$, temos uma sequência periódica e que ambas são sequências limitadas, pois permanecem dentro do círculo. Com isso, as distâncias à origem se mantém finitas. Já em $c = 5$, podemos observar que a sequência é ilimitada. Dessa forma, cada vez mais vai se afastando da origem.

Lembrando que os conjuntos formados pelas sequências limitadas e ilimitadas preenchem todo o plano complexo e delimitam o conjunto de Mandelbrot, atribuindo uma cor para cada tipo de sequência.

Um aspecto interessante do conjunto de Mandelbrot é que podemos encontrar alguns conjuntos de Julia, bastando apenas alterar alguns pontos **c**. Como podemos observar na Figura 7.

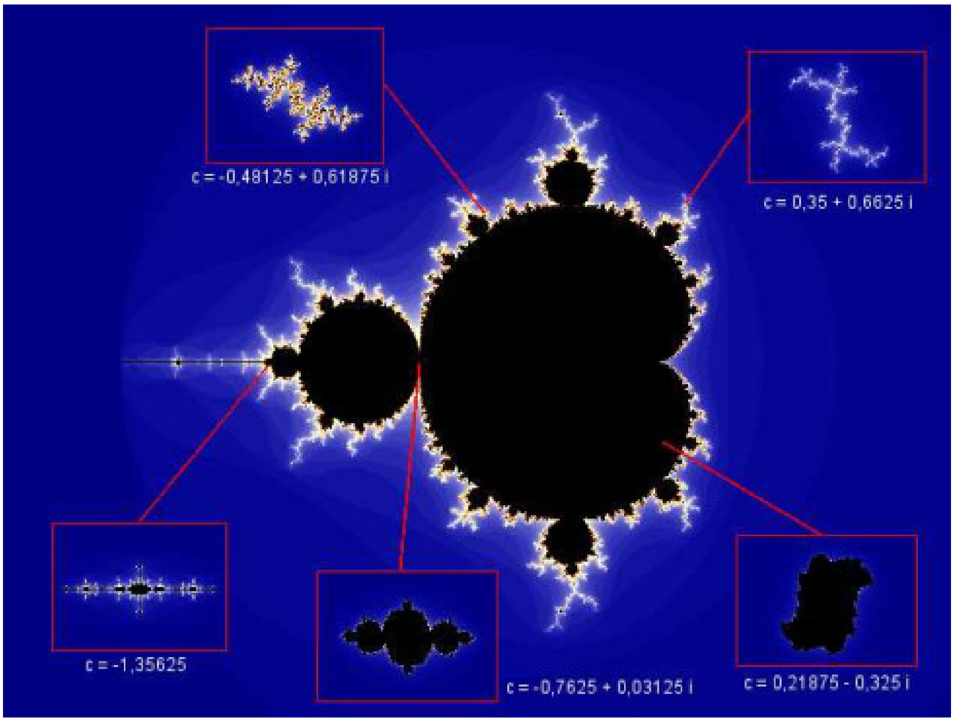


Figura 7 - Conjunto de Mandelbrot com um catálogo de conjuntos de Julia
Fonte: Nunes, 2006, p.51

5. APLICAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL

A aplicação do conceito da Geometria Fractal já vem sendo explorada pela economia na busca de encontrar padrões sobre o comportamento das bolsas de valores, na tecnologia a construção de antenas na forma de fractais, onde, estas são capazes de captar várias faixas de frequência. Na Medicina podemos encontrar a estrutura de alguns órgãos que seguem a Geometria Fractal tais como: A estrutura dos pulmões e as ramificações dos neurônios. Em estudos recentes mostram que a compreensão da Geometria Fractal pode ajudar no diagnóstico de câncer, uma vez que um órgão cancerígeno irá apresentar uma dimensão fractal diferente da encontrada em um órgão sadio. No ramo da Biologia podemos encontrar várias formas que seguem os padrões da Geometria Fractal como: as ramificações das árvores, as estruturas do couve-flor, do brócolis e a reprodução de coelhos.

6. DISCURSÃO E CONCLUSÃO

Dessa forma, este trabalho de revisão bibliográfica teve como finalidade divulgação dessa nova geometria, pois, estamos acostumados desde a educação básica somente com a Geometria Euclidiana, entretanto está não era capaz de explicar alguns fenômenos da natureza como as ramificações que os raios fazem; a estrutura do couve-flor e formato das nuvens. Com isso surge a Geometria Fractal que explica esses fenômenos que antes eram tidos como "monstros da matemática".

Como podemos notar a Geometria Fractal está presente no nosso cotidiano e a maioria das vezes passamos despercebidos por causa da falta de informação. Em um dia chuvoso quando olhamos para o céu vemos aquelas ramificações que os raios fazem; quando vamos ao supermercado é compramos um couve-flor, estamos diante de objetos fractais. Com isso, a importância do estudo da Geometria Fractal.

Na Educação Básica a Geometria Fractal pode ser trabalhada na área de Matemática e também de forma interdisciplinar com outras disciplinas tais como: Biologia, Ciências Naturais, Geografia e Artes. Dessa forma, podemos trabalhar o senso crítico desses alunos, contribuindo para a sua formação acadêmica.

Entretanto o ensino da Geometria Fractal vem sendo um obstáculo a ser superado pelos professores, pois a maioria nas suas graduações não estudaram essa nova geometria. Com isso, é sempre bom o educador buscar novos cursos de atualizações para que seus alunos sempre estejam atualizados sobre os assuntos.

.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSIS, Thiago A. et al**.** Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, 2008.

CÔRTES, Ivana R. C. **Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática.** 71 f. Tese (Mestrado) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

MANDELBROT, Benoit B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H Freeman and Company, 1977.

NASCIMENTO, Maristel et al. Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula da Educação Básica. **VIDYA**, v.32, n2, p113-132, Santa Maria, 2012.

NUNES, Raquel S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 78 f. Tese (Mestrado) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.

Prisma, Dimensões fractais de alguns objetos, Disponível em : <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico8.php >. Acesso em 28 de março de 2017.

RABAY, Yara S. F. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. 110 f. Tese (Mestrado) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2013.

uol, Imagens que desafiam os olhos, Disponível em: <http://www2.uol.com.br/vivermente/noticias/imagens_que_desafiam_os_olhos>. Acesso em 6 de abril de 2017.

?AHDUVIDO, Fractais: A chave do Universo, Disponível em: <http://ahduvido.com.br/fractais-a-chave-do-universo >. Acesso em 28 de março de 2017.