



**PROJETO DE GRADUAÇÃO 2**

**INCERTEZA EXPERIMENTAL DO  
MOMENTO DE INÉRCIA POLAR NO  
PÊNDULO TRIFILAR: APLICAÇÃO PARA  
PÁS EÓLICAS COMERCIAIS**

Por,

**Vinícius de Abreu Mendonça**

Brasília, 2 de janeiro de 2017

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# INCERTEZA EXPERIMENTAL DO MOMENTO DE INÉRCIA POLAR NO PÊNDULO TRIFILAR: APLICAÇÃO PARA PÁS EÓLICAS COMERCIAIS

Por,

**Vinícius de Abreu Mendonça**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Prof. Dr. Marcus Vinícius Girão de Moraes \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz \_\_\_\_\_

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup> Dianne Magalhães Viana \_\_\_\_\_

Brasília 2 de janeiro de 2017

# RESUMO

O presente trabalho realiza uma avaliação de incertezas do experimento do pêndulo trifilar para determinação de momento de inércia de rotação de pás eólicas utilizando a metodologia ISO-GUM. Para isso, ele inicia listando os métodos experimentais utilizados para determinar inércia de rotação e apresenta foco no modelo matemático do pêndulo trifilar. O modelo é resolvido a partir da solução de primeira ordem da equação governante e são propostas condições adequadas para evitar que ocorram erros sistemáticos significativos ao experimento. Então se explica a metodologia ISO-GUM que é aplicada em seguida ao problema. São feitos uma série de ensaios qualitativos em vídeo que avaliam o comportamento da bancada especificamente. Após modificações realizadas com o intuito de reduzir os erros e as incertezas presentes no sistema são ensaiados corpos de geometria conhecida, validando os resultados da bancada. Estes resultados servem como base para concluir sobre a inércia e suas incertezas em uma pá eólica ao final do trabalho. O método em vídeo prova ser capaz de fazer boas estimativas e se mostra bastante acurado. O método cronometrado demonstra ser uma boa solução de campo.

**Palavras-chaves:** Momentos de inércia de rotação. Pêndulo trifilar. Análise de incertezas. Mecânica de corpos rígidos.

# ABSTRACT

The present work makes an evaluation of the uncertainties of the experiment on the trifilar pendulum to determine the rotation moment of inertia of wind turbines using the ISO-GUM methodology. For this, it makes a list of experimental methods used to determine moments of inertia and then focus is the mathematical model of the trifilar pendulum. The governing equation is solved with a solution of first order making sure to avoid significant systematic errors occur to the experiment. Then the ISO-GUM methodology is explained and is applied to the problem. A series of qualitative video tests are performed that evaluate the behavior of the bench. After modifications made in order to reduce errors and uncertainties, it measure the moment of inertia on bodies of know geometry, validating the bench results. These results serve as a basis for concluding on the inertia and its uncertainties in a wind turbine at the end of the work. The video method proves to be able to make good estimates and show quite accurate. The timed method proves to be a good field solution.

**Key-words:** Moments of inertia. Trifilar Pendulum. Uncertainty measurement. Rigid-body mechanics.



# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Momento de inércia por um eixo arbitrário. . . . .	5
Figura 2.2 – Momento de inércia através do centro de gravidade. . . . .	5
Figura 2.3 – Descrição esquemática do pêndulo trifilar. <i>Fonte: Elaborada pelo autor.</i>	8
Figura 2.4 – Diagrama de corpo livre de um pêndulo multifilar, análise de um fio. . . . .	9
Figura 2.5 – Diagrama de corpo livre simplificado de um pêndulo multifilar. . . . .	10
Figura 2.6 – Forças sobre um pêndulo trifilar. . . . .	10
Figura 2.7 – Compatibilidade geométrica do pêndulo trifilar. . . . .	11
Figura 2.8 – Gráficos de $\sin \theta \sqrt{1 - 2A^2(1 - \cos \theta)}$ . . . . .	13
Figura 2.9 – Gráficos de $\sin \theta \sqrt{1 - 2A^2(1 - \cos \theta)}$ . . . . .	13
Figura 2.10–Detalhe das curvas de nível de $\sin \theta \sqrt{1 - 2(R/L)^2(1 - \cos \theta)}$ . . . . .	14
Figura 2.11–Detalhe do plot tridimensional de $\sin \theta \sqrt{1 - 2(R/L)^2(1 - \cos \theta)}$ . . . . .	14
Figura 2.12–Expansões em séries de Taylor de $f(\theta)$ . . . . .	15
Figura 2.13–Detalhes da razão entre $f(\theta)$ e suas aproximações . . . . .	16
Figura 2.14–Comparação entre a função da equação governante e a aproximação $p_3$ . . . . .	17
Figura 2.15–Comparação entre a função da equação governante e a aproximação $p_1$ . . . . .	18
Figura 4.1 – Barra rotacionando em torno de um eixo paralelo ao que passa pelo CG. . . . .	28
Figura 4.2 – Modelos de medição de R . . . . .	32
Figura 4.3 – Modelos de medição de R . . . . .	33
Figura 4.4 – Modelo de medição de L . . . . .	35
Figura 5.1 – Bancada do pêndulo trifilar. . . . .	42
Figura 5.2 – Modelo de pêndulo trifilar. . . . .	42
Figura 5.3 – Ajustes na horizontalidade da plataforma superior. . . . .	46
Figura 5.4 – Detalhe das montagens dos parafusos. . . . .	47
Figura 5.5 – Medidas da bancada realizadas no laboratório de metrologia. . . . .	47
Figura 5.6 – Ensaio de uma barra I. . . . .	48
Figura 5.7 – Vista superior do experimento com três barras. . . . .	48
Figura 5.8 – Sinal e sua Densidade Espectral de Potência. . . . .	52
Figura 5.9 – Perspectivas de cada ensaio. . . . .	54
Figura 5.10–Efeitos da perspectiva da câmera. . . . .	54

Figura 5.11–Efeito da ótica sobre o sinal. . . . .	55
Figura 5.12–Efeito do peso sobre o comprimento do fio. . . . .	57
Figura 5.13–Comparação entre $f(\theta)$ e suas aproximações de 1 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> ordem. . . . .	58
Figura 5.14–Detalhe da razão entre $f(\theta)$ e suas aproximações. . . . .	59
Figura 5.15–Efeito da amplitude sobre a medição do período . . . . .	59
Figura 5.16–Proposta de mecanismo de travamento. . . . .	60
Figura 6.1 – Medidas de $r$ realizada no ensaio posterior. . . . .	62
Figura 6.2 – Barras IJK utilizadas no experimento . . . . .	63
Figura 6.3 – Vista superior do experimento com três barras . . . . .	64
Figura 6.4 – Medidas dos períodos do cronômetro . . . . .	65
Figura 6.5 – Medidas dos períodos do cronômetro . . . . .	66
Figura 6.6 – Resultados obtidos a partir do vídeo . . . . .	68
Figura 6.7 – Detalhes dos resultados obtidos a partir do vídeo . . . . .	68
Figura 6.8 – Resultados obtidos a partir do cronômetro . . . . .	69
Figura 6.9 – Detalhes dos resultados obtidos a partir do cronômetro . . . . .	69
Figura 6.10–Percentual das incertezas associadas às medições $r = 10$ cm . . . . .	70
Figura 6.11–Detalhes dos resultados obtidos a partir do cronômetro . . . . .	71
Figura 6.12–Convergência dos períodos $T$ observados. . . . .	72
Figura 6.13–Incertezas relativas aos períodos $T$ da Bancada. . . . .	72
Figura 6.14–Percentual das incertezas associadas às medições $r = 28$ cm . . . . .	72
Figura 6.15–Pá eólica . . . . .	73
Figura 6.16–Medidas dos períodos do cronômetro . . . . .	75
Figura 6.17–Medidas dos períodos do cronômetro . . . . .	76
Figura 6.18–Convergência dos períodos no experimento da pá eólica. . . . .	77
Figura 6.19–Incertezas relativas aos períodos $T$ nos ensaios da pá eólica. . . . .	78
Figura A.1–Interface do programa CvMob . . . . .	85
Figura B.1–Gráfico da proposição de calibração . . . . .	87
Figura C.1–Sinais da bancada vazia . . . . .	88
Figura C.2–Espectro de potência da bancada vazia . . . . .	89
Figura C.3–Sinais da bancada com bloco IJK no centro . . . . .	90
Figura C.4–Espectro de potência da bancada com bloco IJK no centro . . . . .	91
Figura C.5–Sinais da bancada com os blocos IJK distantes 14 cm do centro . . . . .	92
Figura C.6–Espectro de potência da com os blocos IJK distantes 14 cm do centro . . . . .	93
Figura C.7–Sinais da bancada com os blocos IJK distantes 28 cm do centro . . . . .	94
Figura C.8–Espectro de potência com os blocos IJK distantes 28 cm do centro . . . . .	95
Figura C.9–Sinais da bancada com os blocos IJ distantes 10 cm do centro . . . . .	96
Figura C.10–Espectro de potência dos blocos IJ distantes 10 cm do centro . . . . .	97
Figura C.11–Sinais da bancada com a pá . . . . .	98
Figura C.12–Espectro de potência da bancada com a pá . . . . .	99

# LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Instrumentos utilizados no experimento 1. . . . .	44
Tabela 5.2 – Instrumentos utilizados nos ensaios posteriores. . . . .	49
Tabela 5.3 – Comparação dos períodos obtidos no CFTools e na PSD. . . . .	53
Tabela 5.4 – Condições dos ensaios. . . . .	53
Tabela 6.1 – Dados experimentais das barras . . . . .	63
Tabela 6.2 – Instrumentos utilizados nos ensaios finais . . . . .	63
Tabela 6.3 – Inércias das barras em diferentes posições . . . . .	66
Tabela 6.4 – Razão entre o resultado analítico e o resultado experimental . . . . .	67
Tabela 6.5 – Instrumentos utilizados nos ensaios finais . . . . .	73
Tabela 6.6 – Avaliações dos períodos . . . . .	76

# Lista de abreviaturas e siglas

BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
CAD	Computer-aided design
CG	Centro de gravidade
GDS	Grupo de Dinâmica de Sistemas
IEC	International Electrotechnical Commission
IFCC	International Federation for Clinical Chemistry
ISO	International Organization for Standardization
ISO-GUM	International Organization for Standardization - Guide to Uncertainty Measurements
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics
JCGM	Joint Committee for Guides in Metrology
OIML	International Organization of Legal Metrology
PSD	Power Spectral Density

# Lista de símbolos

$I$	Momento de inércia de rotação
$\alpha$	Ângulo que o fio faz com a vertical no pêndulo trifilar
$\rho$	Massa específica
$\theta$	Ângulo que descreve o movimento rotacional do pêndulo trifilar
$d$	Distância característica do movimento do pêndulo
$g$	gravidade
$H$	Altura do pêndulo trifilar
$h$	Distância característica do braço de alavanca do movimento do pêndulo
$L$	Comprimento do fio
$m$	Massa
$r$	Distância ao centro de rotação
$R$	Distância do fio ao centro igual das duas plataformas
$R_1$	Distância do fio ao centro da plataforma superior
$R_2$	Distância do fio ao centro da plataforma inferior
$T$	Tração em um fio
$X_i$	Grandeza de entrada
	Y Mensurando

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE GIRAÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE INÉRCIA ROTACIONAL</b>	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>MÉTODOS EXPERIMENTAIS PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE GIRAÇÃO</b>	<b>7</b>
<b>2.3</b>	<b>PÊNDULO TRIFILAR</b>	<b>7</b>
2.3.1	MODELO MATEMÁTICO DO PÊNDULO TRIFILAR	8
2.3.2	MODELO NÃO LINEAR	16
2.3.3	MODELO LINEAR	18
2.3.4	CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS	20
<b>3</b>	<b>AValiação DE INCERTEZAS - METODOLOGIA ISO GUM</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>MODELANDO A MEDIÇÃO</b>	<b>21</b>
3.1.1	AVAlIAÇÃO TIPO A DA INCERTEZA	22
3.1.2	AVAlIAÇÃO TIPO B DA INCERTEZA	24
<b>3.2</b>	<b>AVAlIAÇÃO DE INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA</b>	<b>25</b>
<b>3.3</b>	<b>INCERTEZA EXPANDIDA</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA ISO-GUM APLICADA AO PÊNDULO TRIFILAR</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>DETERMINAÇÃO DE INÉRCIA ROTACIONAL ANALÍTICA</b>	<b>28</b>
4.1.1	MODELO DOS DADOS DE ENTRADA	29
4.1.1.1	MODELO DA MASSA $m$	29
4.1.1.2	MODELO DOS COMPRIMENTOS, $b$ E $c$	30
4.1.1.3	MODELO DA DISTÂNCIA $r$	30
4.1.2	INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA $u_c(I)$ :	30
4.1.3	INCERTEZA EXPANDIDA $U$ :	31
<b>4.2</b>	<b>DETERMINAÇÃO DE INÉRCIA ROTACIONAL EXPERIMENTAL</b>	<b>31</b>
4.2.1	MODELO DOS DADOS DE ENTRADA	32

4.2.1.1	MODELO DA DISTÂNCIA R . . . . .	32
4.2.1.2	MODELO DOS COMPRIMENTOS $L_1$ E $L_2$ . . . . .	35
4.2.1.3	MODELO DAS MASSAS $m_1$ E $m_2$ : . . . . .	36
4.2.1.4	MODELO DOS PERÍODOS $T_1$ E $T_2$ . . . . .	37
4.2.1.5	MODELO DA GRAVIDADE $g$ . . . . .	38
4.2.2	INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA . . . . .	38
4.2.3	INCERTEZA EXPANDIDA . . . . .	39
	<b>5 ENSAIOS PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>5.1</b>	<b>DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO . . . . .</b>	<b>41</b>
5.1.1	DESCRIÇÃO DA BANCADA . . . . .	41
<b>5.2</b>	<b>ENSAIOS CRONOMETRADOS . . . . .</b>	<b>43</b>
5.2.1	INSTRUMENTOS . . . . .	44
5.2.2	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS . . . . .	44
5.2.3	PRIMEIRAS AVALIAÇÕES E CORREÇÕES DO EXPERIMENTO . . . . .	45
<b>5.3</b>	<b>ENSAIOS FILMADOS . . . . .</b>	<b>48</b>
5.3.1	INSTRUMENTOS . . . . .	49
5.3.2	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS . . . . .	49
5.3.3	AVALIAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O EXPERIMENTO FILMADO . . . . .	51
5.3.3.1	ANÁLISE DOS SINAIS . . . . .	51
5.3.3.2	EFEITOS DO POSICIONAMENTO DA CÂMERA . . . . .	53
5.3.3.3	EFEITOS DE PESO SOBRE A BANCADA . . . . .	56
5.3.4	EFEITOS DA AMPLITUDE DO MOVIMENTO SOBRE A AVALIAÇÃO DO PERÍODO . . . . .	57
5.3.5	PROPOSIÇÕES DE MODIFICAÇÃO NA BANCADA . . . . .	58
	<b>6 ENSAIOS FINAIS . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>6.1</b>	<b>EXPERIMENTO COM 3 BARRAS . . . . .</b>	<b>61</b>
6.1.1	MATERIAIS . . . . .	62
6.1.2	INSTRUMENTOS . . . . .	63
6.1.3	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS . . . . .	63
6.1.4	RESULTADOS . . . . .	66
6.1.4.1	INÉRCIA CALCULADA . . . . .	66
6.1.4.2	ANÁLISE DOS DADOS . . . . .	69
<b>6.2</b>	<b>CASO PRÁTICO - TURBINA EÓLICA . . . . .</b>	<b>73</b>
6.2.1	MATERIAL . . . . .	73
6.2.2	INSTRUMENTOS . . . . .	73
6.2.3	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAIS . . . . .	74
6.2.4	RESULTADO . . . . .	76
6.2.4.1	INÉRCIA CALCULADA . . . . .	76
6.2.5	ANÁLISE DOS DADOS . . . . .	77

<b>7 CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>84</b>
<b>ANEXO A – UTILIZAÇÃO DO CVMOB</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>ANEXO B – MÉTODOS ALTERNATIVOS DE MEDIÇÃO DO PÊN- DULO TRIFILAR</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>ANEXO C – SINAIS E ESPECTROS DE POTÊNCIA DOS EN- SAIOS</b> . . . . .	<b>88</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A determinação de propriedades como massa, centros de gravidade, e momentos de inércia de um corpo são de fundamental importância para o estudo de sua dinâmica. Estas propriedades são capazes de influenciar significativamente o desempenho de máquinas em geral e uma correta avaliação dessas propriedades e suas incertezas são fundamentais para a otimização dessas máquinas.

A principal propriedade em análise neste trabalho é a determinação do momento de inércia de rotação. Para certos componentes mecânicos essa propriedade é de difícil determinação analítica. Com o desenvolvimento de ferramentas computacionais, em alguns casos, é possível estimar esta propriedade para os componentes através de métodos numéricos. Ainda assim, diversas vezes existe a necessidade de averiguar se os valores estimados correspondem aos valores reais depois da manufatura do componente. Para isso é necessária a utilização de algum método experimental, método que possa ensaiar o componente em estudo.

O Grupo de Dinâmicas dos Sistemas - (UnB-FT/ENM/GDS) realiza estudos sobre o tema e possui alguns trabalhos já publicados sobre o tema.

Em um desses trabalhos, [da Silva \(2015\)](#) desenvolveu uma bancada de pêndulo trifilar e obteve o momento de inércia de rotação de uma turbina eólica e de uma turbina hidrocínética. No trabalho foi estimada uma inércia com uma diferença de 1,5% entre o resultado experimental e o modelo em CAD. O resultado obtido foi satisfatório, mas ainda havia a necessidade de se avaliar com maior rigor as incertezas associadas ao experimento.

O pêndulo trifilar é um método experimental para determinação de inércia de rotação com base em pequenas movimentações angulares. Ele é basicamente uma plataforma suspensa por três fios igualmente espaçados e com liberdade de oscilar em torno do seu centro. É possível determinar a inércia de um corpo ensaiado sobre ele a partir da diferença entre a inércia experimental do pêndulo com o corpo e a inércia experimental do pêndulo sozinho.

O presente trabalho faz um estudo sobre o pêndulo trifilar e foi proposto a partir dos resultados obtidos nos trabalhos anteriores. Ele faz a avaliação de incertezas utilizando a metodologia ISO-GUM ([JCGM, 2008](#)) para averiguar os resultados obtidos experimentalmente no pêndulo trifilar. Esta metodologia tem por objetivo padronizar a expressão

de incertezas de medições em todos os trabalhos e foi desenvolvida em conjunto por organizações de medição internacionais.

O trabalho tem como objetivo aplicar a metodologia ISO-GUM ao experimento do pêndulo trifilar para que se determine o momento de inércia de turbinas eólicas e suas respectivas incertezas. Devido à complexidade geométrica e características de manufatura, estes componentes se encaixam entre os que têm difícil estimativa de momento de inércia. Portanto o método é uma boa solução para este problema.

O trabalho foca inicialmente em propor um modelo matemático adequado ao problema do pêndulo trifilar. Com o modelo feito, é dada ênfase na solução linear do problema, caso mais comum aplicado em experimentos com o pêndulo trifilar. Esta solução linear é comparada ao modelo matemático proposto e é realizada uma breve análise matemática. O trabalho propõe algumas condições de realização do experimento que tentam minimizar os erros provocados pelas aproximações. Devido à essa aproximação realizada, de linearidade, esperasse que ocorra algum erro na determinação da inércia a partir deste método, então ainda é destacado que existe uma solução não-linear para o problema e que deve aproximar melhor ainda o resultado obtido no pêndulo através da comparação com o modelo matemático apresentado.

Faz um destaque à metodologia ISO-GUM, que fundamenta as avaliações de incerteza do problema. A partir dessa fundamentação a metodologia é aplicada ao experimento do pêndulo trifilar.

Inicialmente são realizados um conjunto de ensaios preliminares capturados em vídeo com o intuito de entender com clareza o funcionamento do pêndulo e a partir disso identificar possíveis fontes de incerteza. São obtidos uma série de resultados qualitativos sobre o experimento e sobre as medições.

Em seguida são propostos outros ensaios em definitivo tentando aproximar gradativamente a condição de uma pá eólica. Como uma pá eólica é um corpo com uma inércia grande e de massa relativamente pequena, foi proposto um conjunto de avaliações de outros corpos com inércia conhecida, que variavam de posição na bancada, aumentando assim a inércia dos corpos, mas mantendo a massa pequena e constante. Espera-se com isso, observar o comportamento da incerteza conforme se varia a inércia observada na bancada, mas mantendo-se as outras grandezas constantes. Estes ensaios foram filmados e cronometrados ao mesmo tempo pois cada uma das duas maneiras de medição apresentavam diferentes qualidades as quais se julgou ser positiva uma comparação dos resultados obtidos entre os modelos de medição.

Ao fim é ensaiado a pá eólica de onde se obtém os resultados finais do experimento.

Uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo do trabalho está descrita a seguir.

O próximo capítulo detalha como são estimados os momentos de inércia de giração

através de diversos métodos. São citados os modelos analíticos e também os modelos experimentais e debate-se a aplicabilidade de cada método. É dado um foco maior para o modelo do pêndulo trifilar, onde é demonstrada uma solução analítica do movimento dele, de onde se conclui que sob as devidas condições, seu movimento pode servir para analisar uma inércia de rotação a partir da aproximação de primeira ordem da equação do movimento encontrada.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia ISO-GUM a ser aplicada ao modelo. O método foi proposto pelo JCGM e se baseia na lei de propagação de incertezas. Lá estão dispostos os fundamentos do método, os tipos de incertezas e modelos aos quais se aplicam. Se discute como estas incertezas podem se combinar e se avalia um componente de incerteza combinando todas as grandezas do problema.

O quarto capítulo aplica a metodologia ISO-GUM às grandezas e equações do movimento do pêndulo trifilar. Para se ter uma melhor assimilação do método também foi aplicado às soluções analíticas dos corpos ensaiados. Descreve-se o que foi medido e os componentes de incerteza presentes no experimento.

O quinto capítulo aborda os experimentos preliminares. Lá estão mostrados os procedimentos de um ensaio com cronômetro e outro usando medição por imagem (vídeo). Também são descritas pequenas mudanças realizadas na bancada ao longo do trabalho e depois uma série de observações qualitativas sobre os experimentos realizados

No sexto capítulo são propostos um conjunto de ensaios e procedimentos adotados em definitivo para o experimento. São realizados experimentos com um conjunto de três barras em diferentes posições e são apresentados os resultados obtidos e suas respectivas incertezas e comparados com os resultados esperados. Em seguida é realizado o ensaio com a pá eólica de onde se obtém a sua inércia analítica.

O sétimo capítulo conclui sobre os resultados obtidos no trabalho.

# 2 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE GIRAÇÃO

O presente capítulo faz abordagens sobre o modelo analítico e o modelo experimental capazes de determinar a inércia de rotação de corpos rígidos e serve também como fundamentação teórica para os experimentos realizados para a determinação de momentos de inércia.

A determinação de propriedades como massa, centros de gravidade, e momentos de inércia de um corpo são de fundamental importância para o estudo de sua dinâmica. Estas propriedades são capazes de influenciar significativamente o desempenho de máquinas em geral e uma correta avaliação dessas propriedades e suas incertezas são fundamentais para a otimização dessas máquinas.

Schedlinski e Link (2001) citam métodos que servem para identificar estas propriedades. São listados os 10 parâmetros inerciais que um corpo rígido possui, a massa  $m$ , as coordenadas dos centros de gravidade  $x_{cg}$ ,  $y_{cg}$ ,  $z_{cg}$  e os momentos de inércia,  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  e  $I_{yz}$ . Eles dividem os métodos em métodos estáticos e métodos dinâmicos. Os métodos estáticos servem principalmente para a determinação de massas e centros de gravidade. Os métodos dinâmicos são capazes de identificar todos os 10 parâmetros inerciais ao mesmo tempo. Eles são divididos em:

- Métodos sem limitação de movimento de corpos rígidos
- Métodos baseados em movimentações angulares pequenas
- Métodos baseados em movimentações angulares muito pequenas e pequenas velocidades rotacionais

## 2.1 DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DE INÉRCIA ROTACIONAL

A inércia rotacional  $I$  de um corpo rígido  $C$  de massa  $m$  em relação a um eixo  $\hat{y}'$  qualquer conforme a Figura 2.1 pode ser encontrado analiticamente pela integral de

um elemento infinitesimal  $dm$  e o quadrado da distância  $r$  entre o elemento e o eixo. Isso resulta em:

$$I = \int_C r^2 dm \quad (2.1)$$

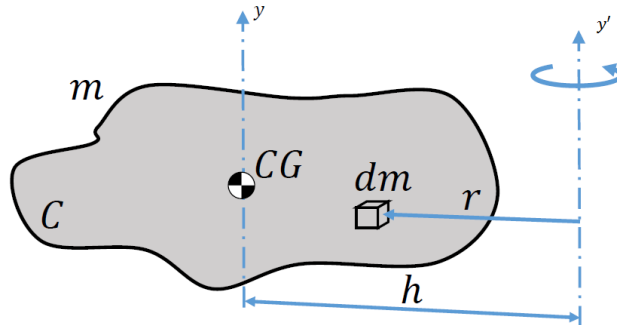


Figura 2.1 – Momento de inércia por um eixo arbitrário.

*Fonte: Elaborada pelo autor.*

Uma vez conhecida a geometria do corpo  $C(x, y, z)$  com massa específica  $\rho(x, y, z)$ , a Eq. (2.1) é expressa conforme a expressão abaixo:

$$I = \int_z \int_y \int_x (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (2.2)$$

A solução da Eq. (2.2) para um conjunto de eixos de coordenadas  $x', y', z'$  qualquer resulta em um tensor  $I$  com 6 componentes independentes representada matricialmente por:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A Figura 2.2 mostra o que acontece quando o corpo rotaciona em torno de seu próprio centro de gravidade.

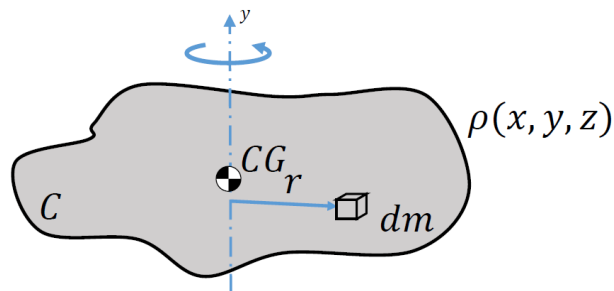


Figura 2.2 – Momento de inércia através do centro de gravidade.

*Fonte: Elaborada pelo autor.*

Quando a rotação ocorre em torno dos eixos de referência  $x$ ,  $y$ ,  $z$  centrados no centro de gravidade  $x_{CG}$ ,  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  do corpo, o tensor  $[I]$  de (2.3) se resume a um tensor diagonal, dado por:

$$[I]_{CG} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

As inércias  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  correspondem às inércias de giração do corpo  $C$  em torno de seu centro de gravidade. O teorema dos eixos paralelos relaciona as inércias das diagonais de (2.3) e (2.4) quando os eixos de referência no centro de gravidade são paralelos aos eixos de rotação.

$$I_{i'i'} = I_{ii} + mh^2 \quad (2.5)$$

Logo, segundo as expressões (2.2), (2.3) e (2.4), é necessário o conhecimento de várias propriedades do corpo analisado para determinar as inércias rotacionais de um corpo.

A geometria do corpo e as posições  $x_{CG}$ ,  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  precisam ser determinadas. Quando a geometria do corpo é complexa, a Eq. (2.2) resulta em difíceis soluções analíticas.

A distribuição de massa específica  $\rho(x, y, z)$  do corpo nem sempre é conhecida. Caso  $\rho$  varie ao longo de diferentes pontos do corpo, a estimativa da inércia torna-se uma tarefa difícil.

Assim a solução analítica é usada principalmente para modelos simples. É fácil determinar a geometria e a posição dos centros de gravidade de discos, esferas e barras homogêneas.

Alguns softwares de CAD conseguem determinar as inércias de corpos complexos resolvendo a Eq. (2.2) numericamente, baseados no conhecimento da geometria e da massa específica dados a priori. Estes dados a priori possuem incertezas associadas e produzem incertezas sobre a estimativa final.

Porém, em um corpo real, as inércias dos modelos CAD nem sempre correspondem às verdadeiras. As diferenças geométricas advindas dos processos de fabricação e os erros nas estimativas das propriedades dos materiais provocam diferenças entre os modelos reais e os computacionais.

Por isso é importante o desenvolvimento de um método que avalie diretamente as inércias rotacionais dos corpos. Devido as incertezas presentes em qualquer processo de medição, o Guia da Avaliação de Incertezas, (ingl, ISO-GUM), se faz necessário para efetuar a correta avaliação dessas incertezas.

## 2.2 MÉTODOS EXPERIMENTAIS PARA DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE GIRAÇÃO

Existem diversos métodos experimentais para avaliação da inércia de rotação de um corpo.

[Genta e Delprete \(1994\)](#) realiza uma análise de 9 métodos dinâmicos diferentes para determinação de momentos de inércia de corpos sólidos. O artigo classifica os métodos em métodos oscilatórios (baseados em movimentos de molas e pêndulos) e métodos de aceleração (baseados em conservação de energia).

### Métodos oscilatórios:

- Pêndulo torcional
- Mola linear
- Pêndulo físico
- Trilhos curvos
- Pendulo multifilar
- Centro de massa variável

### Métodos de aceleração:

- Rolamento
- Queda livre de peso
- "Run down - decaimento"

Ao final, conclui que os métodos oscilatórios possuem maior exatidão. Eles estão sujeitos a menos amortecimento e necessitam de instrumentação mais simples. Entre os métodos citados se destaca o método do pêndulo multifilar por ser simples e com alta exatidão. Ele consiste de um conjunto suspenso por fios capaz de descrever um movimento torcional periódico. Ao fim ele destaca o pêndulo trifilar como o pêndulo multifilar que contém menos erros experimentais e capaz de identificar com maior precisão a inércia rotacional de um corpo ensaiado sobre ele.

[Hou, Lu, Lao e Liu \(2009\)](#) propõe um método capaz de identificar os 10 parâmetros de inércia de um corpo a partir de um pêndulo trifilar montado com células de carga e contrapesos.

## 2.3 PÊNDULO TRIFILAR

O pêndulo trifilar básico é uma plataforma suspensa por três fios que tem três graus de liberdade. O seu modo torsional permite o ensaio para avaliação de inércia rotacional.

O experimento para avaliação de inércia rotacional consiste em uma comparação entre a inércia da bancada vazia, e a inércia da bancada com o corpo ensaiado no centro. De acordo com [du Bois, Lieven e Adhikari \(2009\)](#), pequenos desalinhamentos dos centros de massa geram discrepâncias muito pequenas na inércia medida.

O momento de inércia  $I$  de todo o conjunto suspenso pelo pêndulo trifilar pode ser avaliado a partir de um ensaio dinâmico.

A seguir uma abordagem matemática do problema:

### 2.3.1 MODELO MATEMÁTICO DO PÊNDULO TRIFILAR

O método convencional para avaliação de inércia no pêndulo trifilar realiza uma aproximação nos passos iniciais. Como este trabalho trata de avaliação de incertezas do pêndulo trifilar o autor julgou ser necessária uma maior compreensão do problema para evitar erros na execução do experimento. Por isso o autor desenvolveu esta seção com o intuito de avaliar o problema sem nenhuma aproximação nos estágios iniciais.

Um pêndulo trifilar é uma estrutura constituída de uma plataforma inferior suspenso por três fios fixados em uma base superior (Figura 2.3).

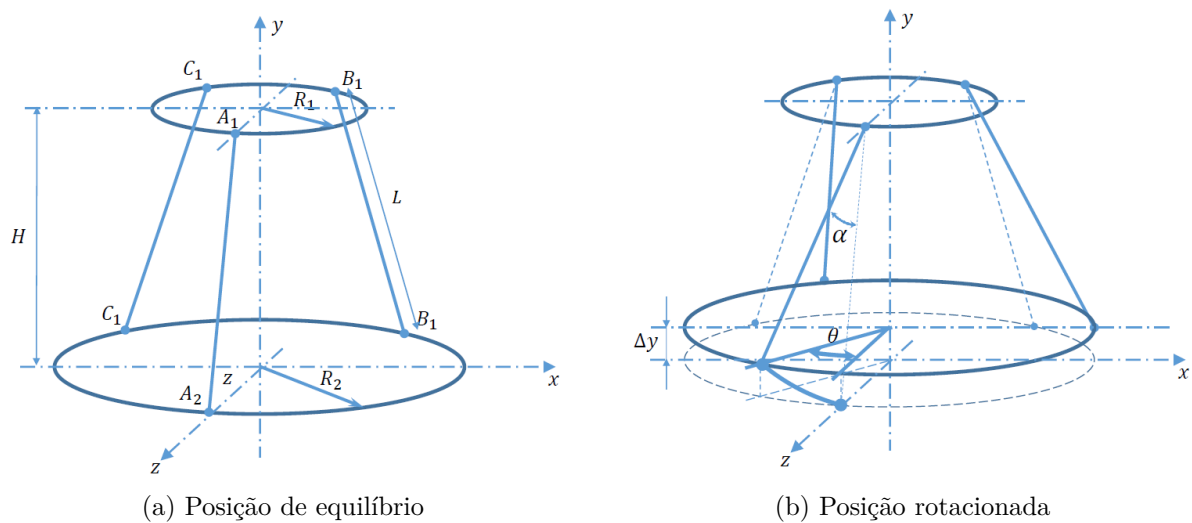


Figura 2.3 – Descrição esquemática do pêndulo trifilar. *Fonte: Elaborada pelo autor.*

A plataforma inferior possui uma massa  $m$ . Um fio  $a$  possui um comprimento  $L_a$  e sustenta um percentual  $m_a$  do total da massa  $m$ .

A distância entre a plataforma superior e a inferior é dada pela altura  $H$ . A distância entre o centro geométrico da plataforma superior aos fios é dada por  $R_1$ . Na inferior a mesma distância é dada por  $R_2$ . O conjunto suspenso possui uma inércia rotacional  $I$ .

Quando o sistema é rotacionado um pequeno ângulo da sua posição de equilíbrio, a plataforma inferior passa a oscilar em torno do eixo  $\hat{y}$  descrevendo um ângulo  $\theta(t)$ . A



altura varia ao longo do tempo sofrendo uma pequena variação de altura  $\Delta y(t)$ . O fio se desloca por um ângulo  $\alpha(t)$ .

Esse movimento oscilatório decorre da força gravitacional e das forças de tração dos fios agindo sobre a plataforma inferior.

As Figuras 2.4 e 2.5 mostram os diagramas de corpo livre de um pêndulo multifilar cujos raios  $R_1$  e  $R_2$  são iguais a  $R$ , neste caso, a altura entre as plataformas corresponde ao comprimento dos fios  $H = L$ . Elas evidenciam as forças que atuam em um dado fio  $a$  quando o mesmo é retirado da posição de equilíbrio.

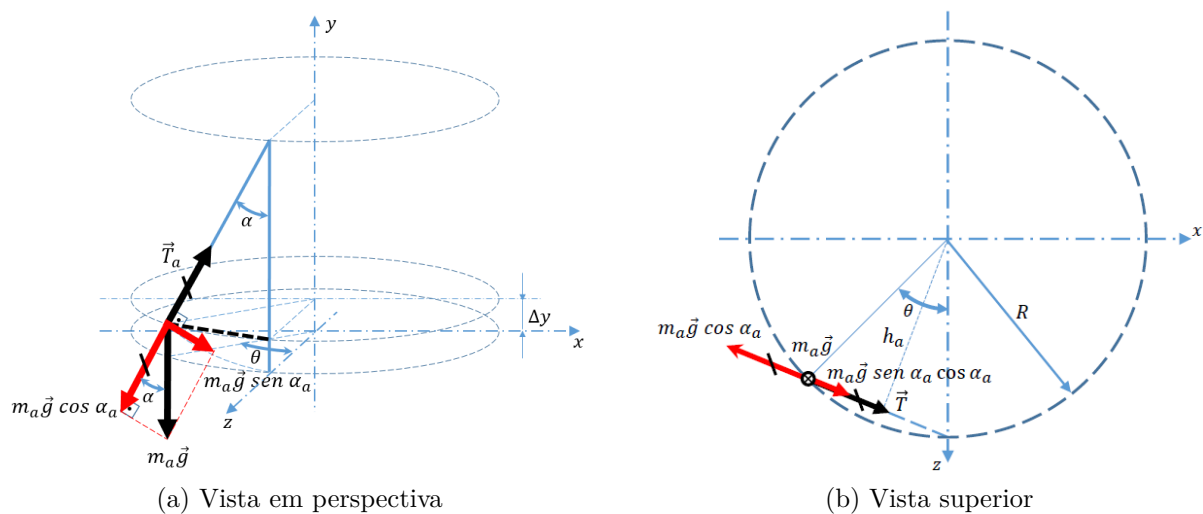


Figura 2.4 – Diagrama de corpo livre de um pêndulo multifilar, análise de um fio.

*Fonte: Elaborada pelo autor.*

Na Figura 2.4a o fio  $a$  exerce uma tração  $T_a$  sobre a plataforma inferior. A força gravitacional relativa a uma fração de massa  $m_a$  da plataforma inferior é dada por  $m_a g$ .

É possível decompor e simplificar essas forças como mostrado na Figura 2.5.

No caso de um pêndulo trifilar, todas as forças que atuam sobre a plataforma inferior estão mostradas na Figura 2.6.

Aplicando a segunda lei de Newton para forças e para torques obtêm-se:

$$\sum F_y = m\ddot{y} = m_a g \sin^2 \alpha_a + m_b g \sin^2 \alpha_b + m_c g \sin^2 \alpha_c \quad (2.6)$$

$$\sum T_y = I\ddot{\theta} = -m_a g \sin \alpha \cos \alpha_a h_b - m_b g \sin \alpha \cos \alpha_b h_a - m_c g \sin \alpha \cos \alpha_c h_c \quad (2.7)$$

Considerando-se as plataformas perfeitamente horizontais, que os fios tenham o mesmo comprimento  $L$  e as distâncias  $R$  sejam iguais para todos os fios. Os ângulos  $\alpha$  são todos iguais entre si (2.8). As distâncias  $h$  também são iguais entre si (2.9). O somatório dos produtos das massas pela gravidade será igual ao peso total da plataforma  $mg$  (2.10).

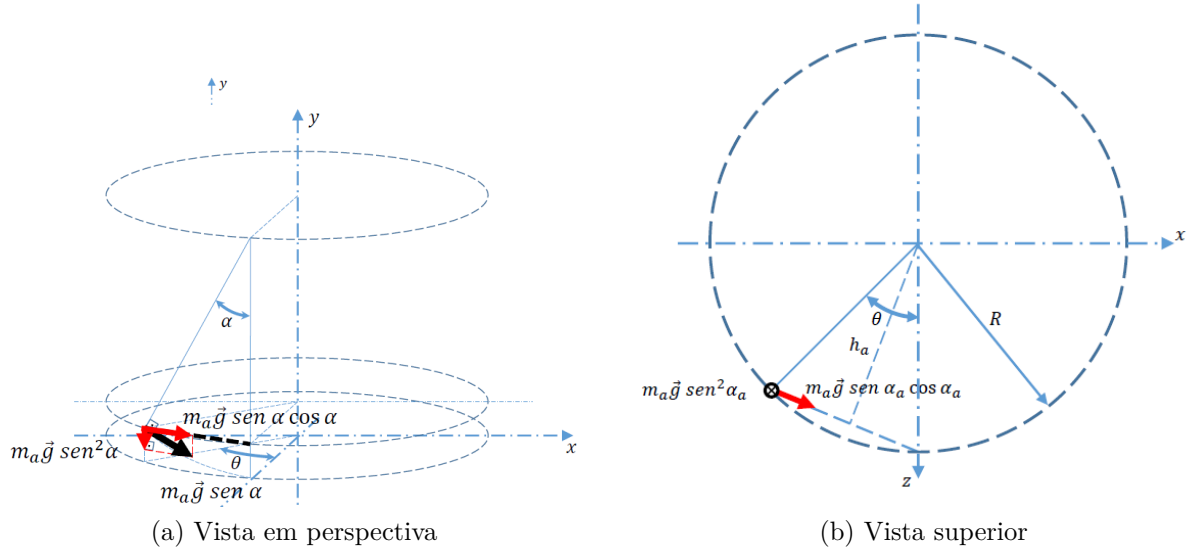


Figura 2.5 – Diagrama de corpo livre simplificado de um pêndulo multifilar.  
 Fonte: Elaborada pelo autor.

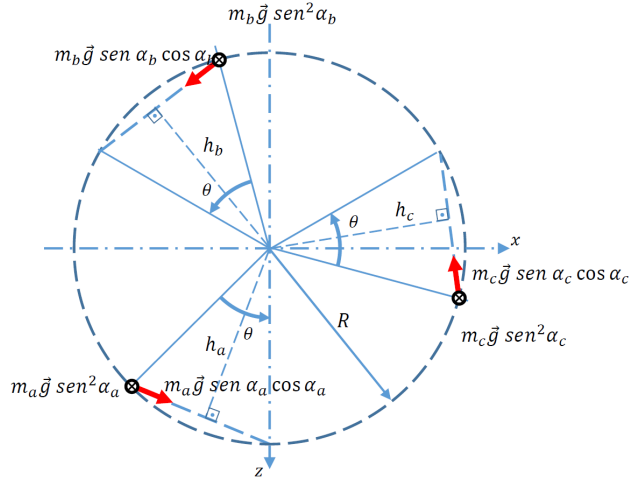


Figura 2.6 – Forças sobre um pêndulo trifilar.  
 Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\alpha_a = \alpha_b = \alpha_c = \alpha \quad (2.8)$$

$$h_a = h_b = h_c = h \quad (2.9)$$

$$m_a g + m_b g + m_c g = m g \quad (2.10)$$

Com isso as equações (2.6) e (2.7) podem ser reescritas como:

$$m\ddot{y} = m g \sin^2 \alpha \quad (2.11)$$

$$I\ddot{\theta} = -m g h \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.12)$$

É necessário desenvolver as relações geométricas que acontecem entre  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $H$ . A Figura 2.7 demonstra a condição geométrica que ocorre quando a plataforma inferior é rotacionada um ângulo arbitrário  $\theta$ .

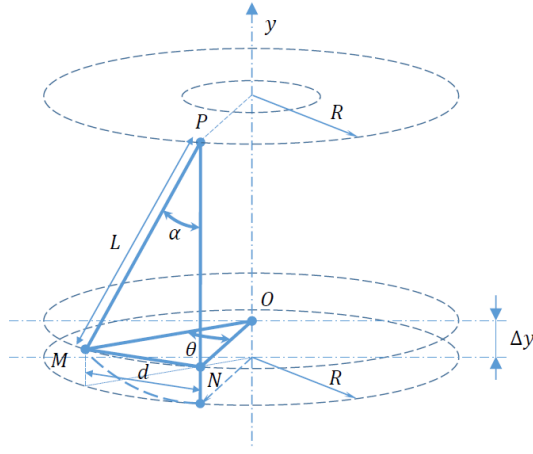


Figura 2.7 – Compatibilidade geométrica do pêndulo trifilar.  
*Fonte: Elaborada pelo autor.*

São importantes serem destacados dois triângulos na figura. Os triângulos  $MNO$  e  $MNP$ .

No triângulo  $MNP$  o seguimento  $d$  é dado por:

$$d = L \sin \alpha \quad (2.13)$$

E no triângulo  $MNO$  o mesmo segmento  $d$  é encontrado pela lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} d^2 &= R_1^2 + R_1^2 - 2R_1R_1 \cos \theta \\ d^2 &= 2R_1^2 - 2R_1^2 \cos \theta \\ d &= \sqrt{2R_1^2(1 - \cos \theta)} \\ d &= R_1 \sqrt{2(2 \sin^2(\theta/2))} \\ d &= 2R_1 \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Igualando as equações (2.13) e (2.14) obtém-se a relação direta entre os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{2R_1}{L} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.15)$$

Ainda no triângulo  $MNO$ , a sua altura  $h$  é dada por:

$$h = R_1 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.16)$$

Ao longo do movimento,  $h$  é sempre ortogonal à força. Portanto, o torque gerado será o produto da força com  $h$

Substituindo as relações (2.15) e (2.16) na Equação (2.12):

$$I\ddot{\theta} = -mgR_1 \frac{2R_1}{L} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \alpha \quad (2.17)$$

Da propriedade trigonométrica para ângulos duplos:

$$\sin\theta = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.17):

$$I\ddot{\theta} = -\frac{mgR_1^2}{L} \sin\theta \cos\alpha \quad (2.19)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação (2.15) que leva em consideração as relações entre os ângulos  $\alpha$  e  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= \frac{4R^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - \cos^2\alpha &= \frac{4R^2}{L^2} \left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) \\ \cos^2\alpha &= 1 - \frac{2R^2}{L^2} (1 - \cos\theta) \\ \cos\alpha &= \sqrt{1 - 2\left(\frac{R}{L}\right)^2 (1 - \cos\theta)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo o resultado de (2.20) em (2.19):

$$I\ddot{\theta} = -\frac{mgR^2}{L} \sin\theta \sqrt{1 - 2\left(\frac{R}{L}\right)^2 (1 - \cos\theta)} \quad (2.21)$$

A Equação (2.21) é a equação diferencial governante do movimento torcional do pêndulo trifilar, caracterizada pela existência de uma função não linear  $f(\theta, R/L)$ .

$$f(\theta, R/L) = \sin\theta \sqrt{1 - 2(R/L)^2 (1 - \cos\theta)} \quad (2.22)$$

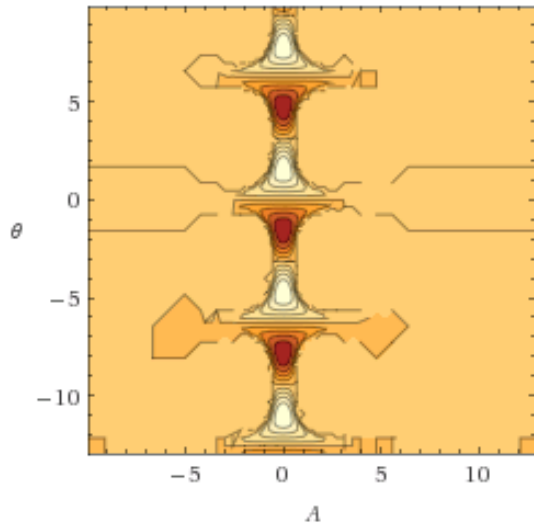
Uma breve análise da função  $f(\theta, R/L)$  é necessária para propor uma solução para o movimento do pêndulo. As Figuras 2.8 e 2.9 feitas com o software Wolfram|Alpha (2016) mostram o comportamento geral desta função para um valor  $R/L = A$ .

As Figuras 2.10 e 2.11 mostram com maior detalhe as curvas de nível e os gráficos em três dimensões das partes reais e imaginárias da função  $f(\theta, R/L)$  plotados no MATLAB.

Esta função é uma função periódica que se repete a cada  $360^\circ$ . Notam-se soluções completamente reais para determinados valores de  $\theta$  e  $R/L$  e soluções completamente imaginárias para os demais valores. Também se observa as simetrias em relação a  $R/L = 0$ ,  $f(R/L) = f(-R/L)$ , bem como em relação à origem em  $\theta = 0$ ,  $f(\theta) = -f(-\theta)$ .

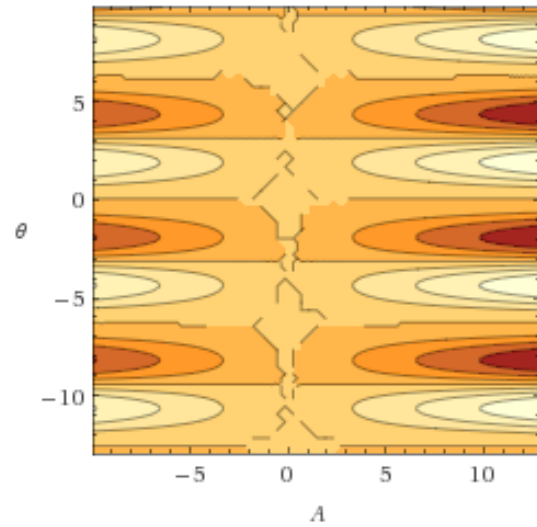
É importante destacar que as soluções reais ocorrem principalmente para valores de  $\theta$  pequenos e também para razões  $|R/L| < 0,5$ . Pode-se determinar experimentalmente qual é o valor de  $R/L$  de um dado pêndulo. Valores de  $R/L$  negativos não existem em

Real part



(a) Parte real

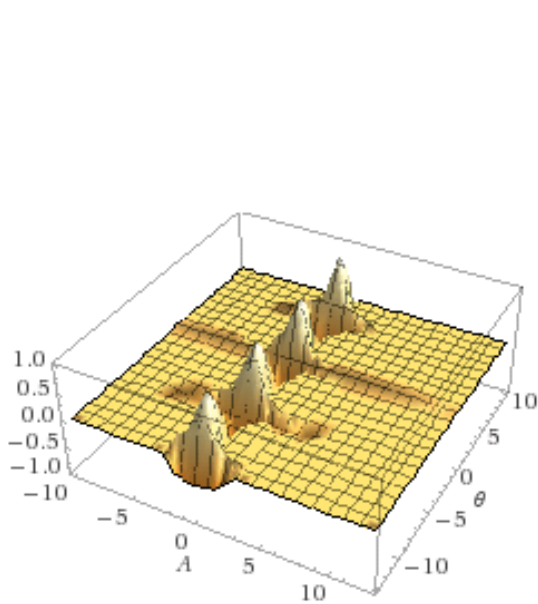
Imaginary part



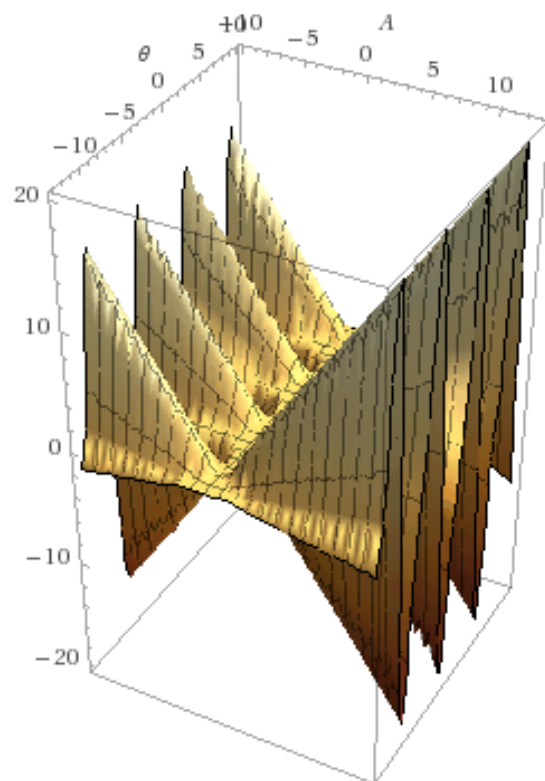
(b) Parte imaginária

Figura 2.8 – Gráficos de  $\sin \theta \sqrt{1 - 2A^2(1 - \cos \theta)}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor através do software Wolfram Alpha.



(a) Parte real



(b) Parte imaginária

Figura 2.9 – Gráficos de  $\sin \theta \sqrt{1 - 2A^2(1 - \cos \theta)}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor através do software Wolfram Alpha.

um pêndulo real. Quando  $R/L$  é igual à zero, a função se torna apenas  $f(\theta) = \sin(\theta)$ , um seno puro, tornando a equação governante idêntica a equação de um pêndulo simples.

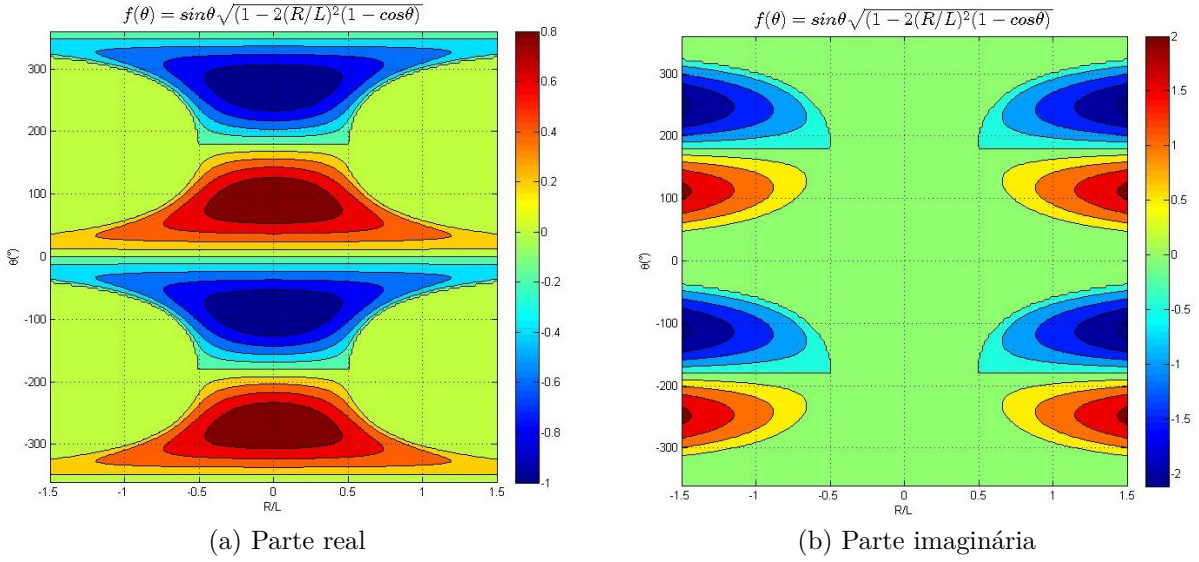


Figura 2.10 – Detalhe das curvas de nível de  $\sin \theta \sqrt{1 - 2(R/L)^2(1 - \cos \theta)}$ .  
*Fonte: Elaborada pelo autor através do software MATLAB.*

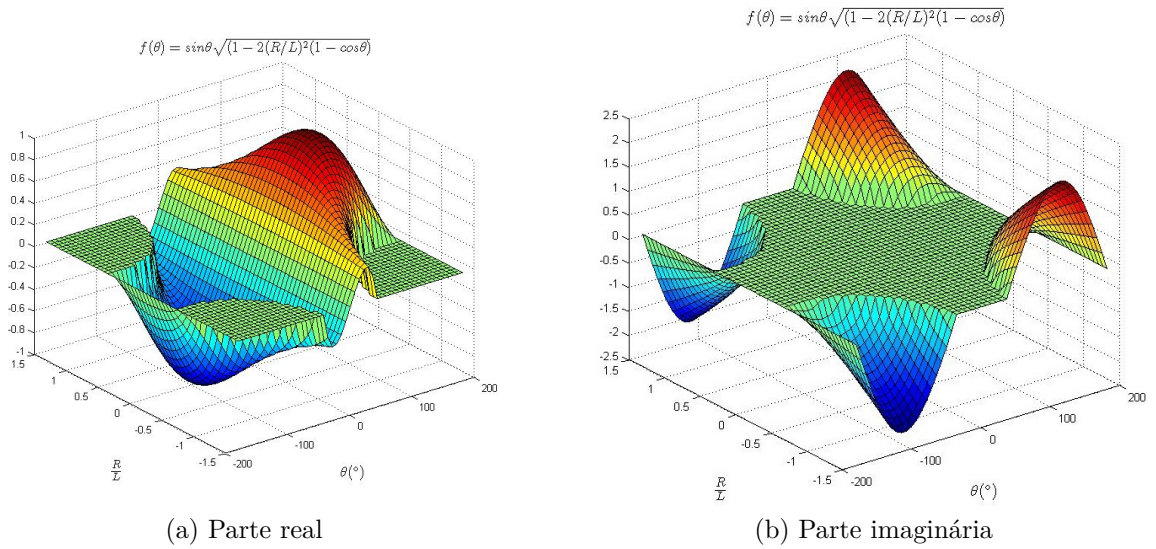


Figura 2.11 – Detalhe do plot tridimensional de  $\sin \theta \sqrt{1 - 2(R/L)^2(1 - \cos \theta)}$ .  
*Fonte: Elaborada pelo autor através do software MATLAB.*

A função  $f(\theta)$  ainda pode ser expandida em séries de Taylor em torno  $\theta = 0$ , obtendo-se assim apenas expoentes ímpares, observa-se diretamente que a função em análise é ímpar, condizendo com a sua simetria em relação à origem.

$$f(\theta) = \theta - a_1\theta^3 + a_2\theta^5 - \dots + a_n\theta^{2n+1} \quad (2.23)$$

Calculando os coeficientes  $a_n$ , (2.23) pode ser escrito como:

$$f(\theta) = \theta - \frac{1}{6}(3(R/L)^2 + 1)\theta^3 + \frac{1}{120}(-15(R/L)^4 + 15(R/L)^2 + 1)\theta^5 - \dots + a_n\theta^{2n+1} \quad (2.24)$$

A Figura 2.12 mostra a função  $f(\theta)$  e os polinômios de primeira e terceira ordem  $p_1$  e  $p_3$  que aproximam a função em torno  $\theta = 0$  com valores específicos de  $R/L$  feitos no



software Wolfram Alpha. Em 2.12a,  $R/L = 0,5$  e em 2.12b,  $R/L = 2,0$ . Fica evidente como a relação  $R/L$  influi no valor dos coeficientes da expansão (2.24). A comparação entre a função e os polinômios evidenciam a validade da aproximação  $f(\theta) \approx p_i$  para pequenos ângulos  $\theta$ .

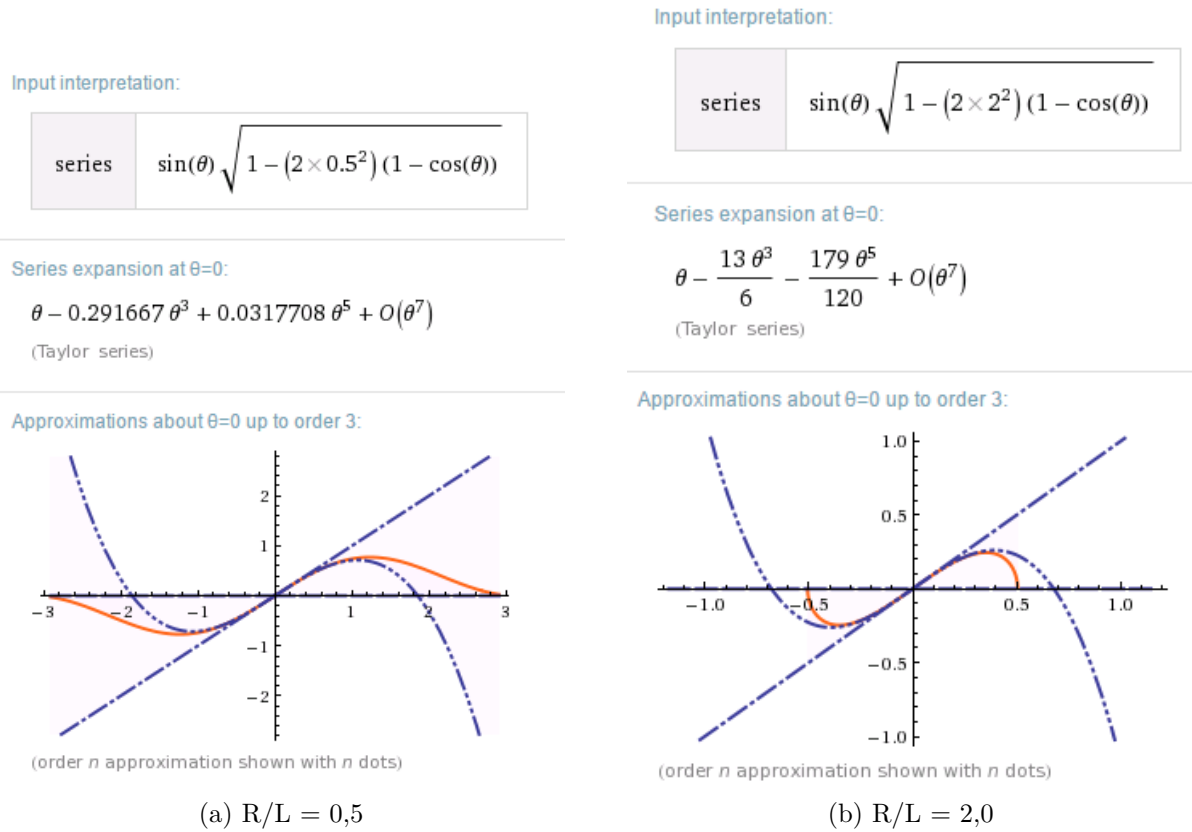


Figura 2.12 – Expansões em séries de Taylor de  $f(\theta)$   
 Fonte: Elaborada pelo autor através do software Wolfram Alpha.

A Figura 2.13 permite observar a relação da função  $f(\theta)$  com as suas aproximações de primeira  $p_1$  e de terceira ordem  $p_3$  para uma razão característica de um pêndulo trifilar cujo  $R/L = 0,170$ .

A partir disso, pode-se concluir que o sistema trata-se de um sistema não linear e caso o sistema seja excitado com uma amplitude suficientemente grande, é necessário utilizar aproximações de ordem superior para avaliação correta. Essas não linearidades tendem a gerar variações sobre os períodos medidos que passam a variar conforme a da amplitude do movimento. Com isso, quando o sistema é avaliado sob condições lineares de aproximação de primeira ordem ocorrem erros na determinação experimental da inércia de um corpo sobre o pêndulo trifilar.

Para a solução do sistema pode ser utilizado uma proposição não linear, advinda da equação de Duffing a partir da expansão do polinômio de terceira ordem. Ou então, a solução pode ser dada pela expansão de primeira ordem de  $f(\theta)$ , resultando em uma equação diferencial linear de fácil solução. As próximas duas subseções abordam um pouco de cada uma dessas soluções.

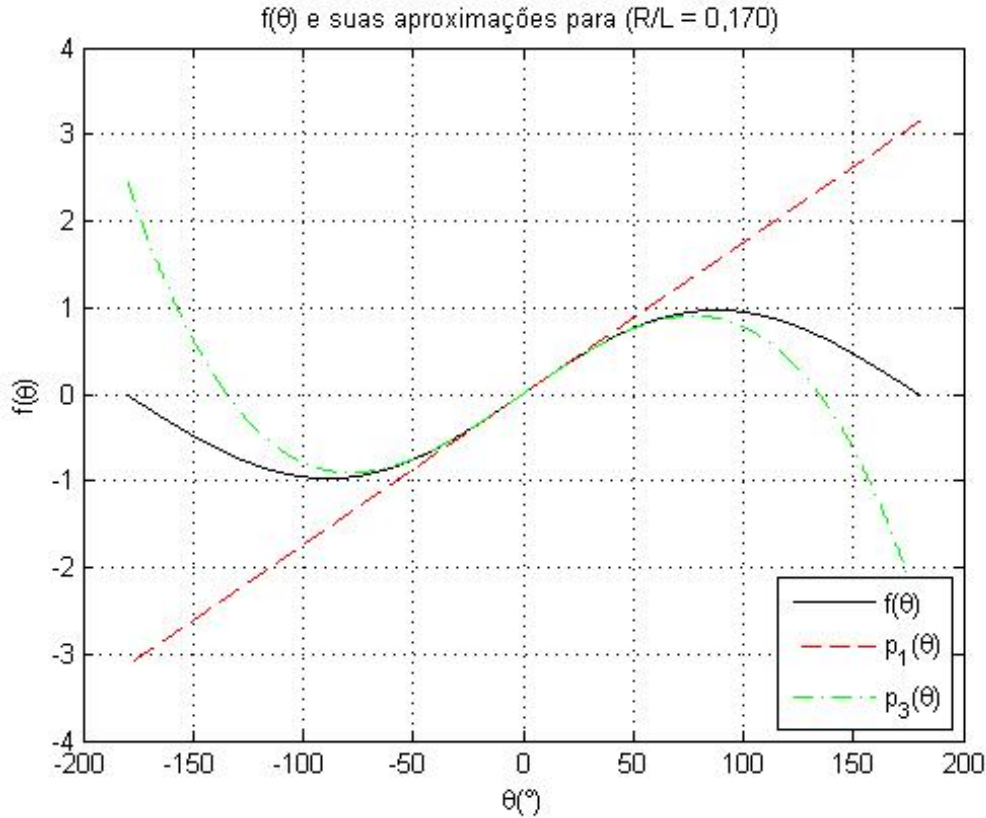


Figura 2.13 – Detalhes da razão entre  $f(\theta)$  e suas aproximações

### 2.3.2 MODELO NÃO LINEAR

Uma solução para o movimento do pêndulo seria utilizar a aproximação da expansão de  $f(\theta)$  em torno de  $\theta = 0$  dada pelo polinômio de terceiro grau  $p_3(\theta)$ :

$$f(\theta) \approx p_3(\theta) = \theta - \frac{1}{6} \left( 3(R/L)^2 + 1 \right) \theta^3 \quad (2.25)$$

Foi feita uma comparação entre  $p_3$  e  $f(\theta)$  demonstradas na figura 2.14.

As Figuras 2.14a e 2.14b correspondem respectivamente à função  $f(\theta)$  e ao polinômio  $p_3(\theta)$ . É possível ver que eles são muito semelhantes, porém nota-se uma pequena diferença crescente conforme  $\theta$  e  $R/L$  aumentam.

A Figura 2.14c corresponde a uma razão  $r_3$  entre a função  $f(\theta)$  e  $p_3(\theta)$ , enquanto 2.14d é um detalhe da mesma razão para menores ângulos  $\theta$ . É possível ver com mais nitidez a região onde essa razão é mais próxima de 1,000 e também as regiões onde essa aproximação começa a perder validade, onde  $0,997 < r_3 < 1,001$ . Ainda assim, ela representa regiões onde a solução de Duffing é uma excelente aproximação para o movimento do pêndulo, entre  $0^\circ < \theta < 20^\circ$  e  $0 < R/L < 1.1$ , onde  $0,9995 < r_3 < 1,0005$ .

Substituindo (2.25) em (2.21) resulta:

$$I\ddot{\theta} + \frac{mgR^2}{L} \left( \theta - \frac{1}{6} \left( 3(R/L)^2 + 1 \right) \theta^3 \right) = 0 \quad (2.26)$$



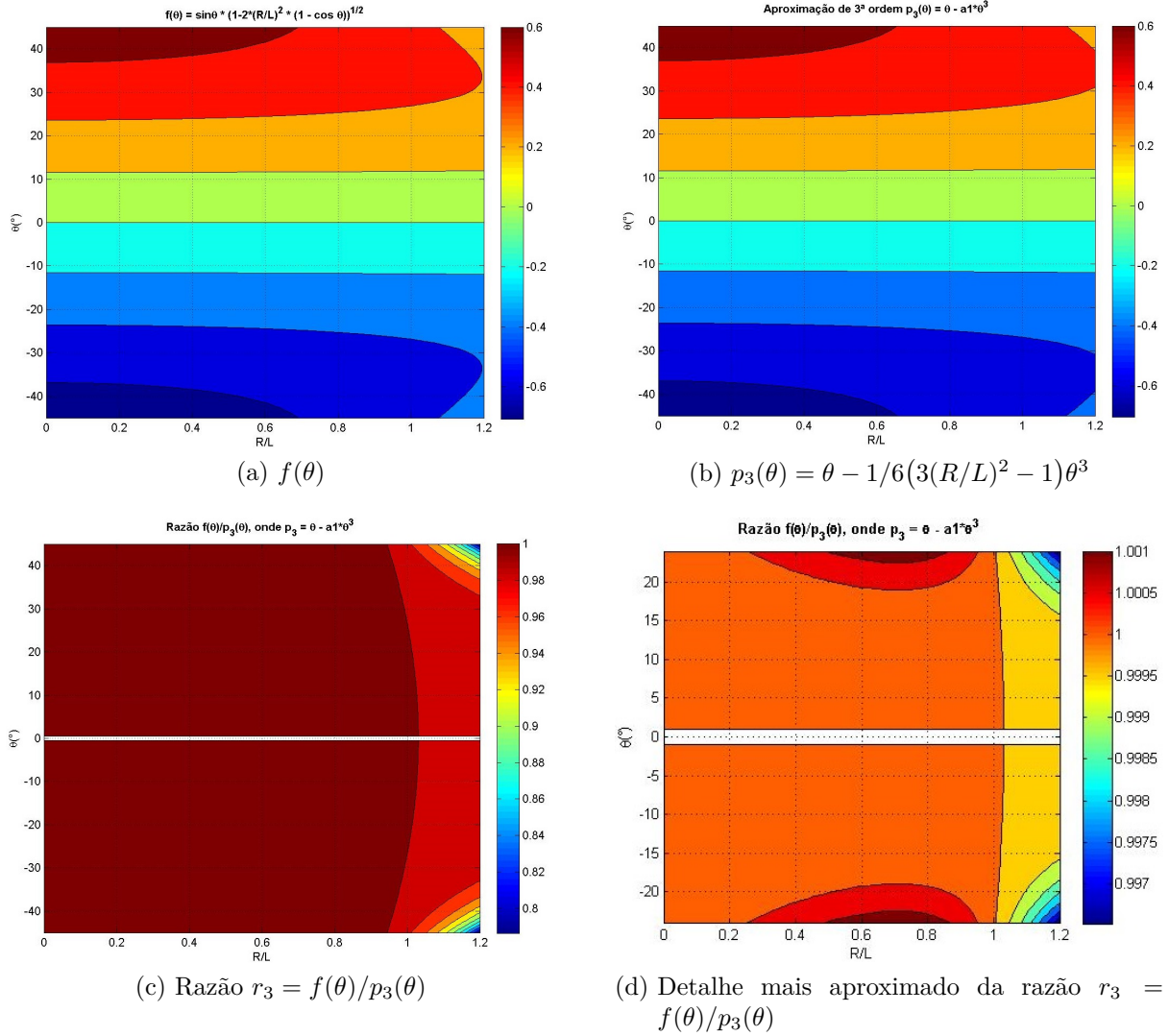


Figura 2.14 – Comparação entre a função da equação governante e a aproximação  $p_3$ .

*Fonte: Elaborada pelo autor.*

Essa equação corresponde à equação de Duffing sem amortecimento e sem forçamento com solução analítica a partir das funções elípticas de Jacobi.

Como a equação de Duffing nessas condições possui solução analítica, foram comparadas a função original  $f(\theta)$  com o polinômio de terceiro grau  $p_3(\theta)$ . A Figura 2.14 ilustra o quanto a aproximação de terceira ordem dada por (2.25) se aproxima da função  $f(\theta)$  original, e com isso deseja-se avaliar a validade dessa aproximação para a solução da equação (2.21).

Essa comparação, permite afirmar que a solução a partir da equação de Duffing é uma excelente aproximação da solução exata da equação governante do sistema (2.21) para pequenos ângulos e para razões  $R/L < 1$ .

### 2.3.3 MODELO LINEAR

A partir da Eq. (2.24), a função  $f(\theta)$  pode ser aproximada pelo polinômio de grau 1,  $p_1$ , para pequenos ângulos  $\theta$ , tal que:

$$f(\theta) \approx p_1 = \theta \quad (2.27)$$

De modo análogo ao feito no modelo não linear, foi realizada uma comparação da aproximação de primeira ordem  $p_1$  com a função  $f(\theta)$  de modo a verificar a validade desta aproximação em um certo domínio. A Figura 2.15 ilustra esta comparação.

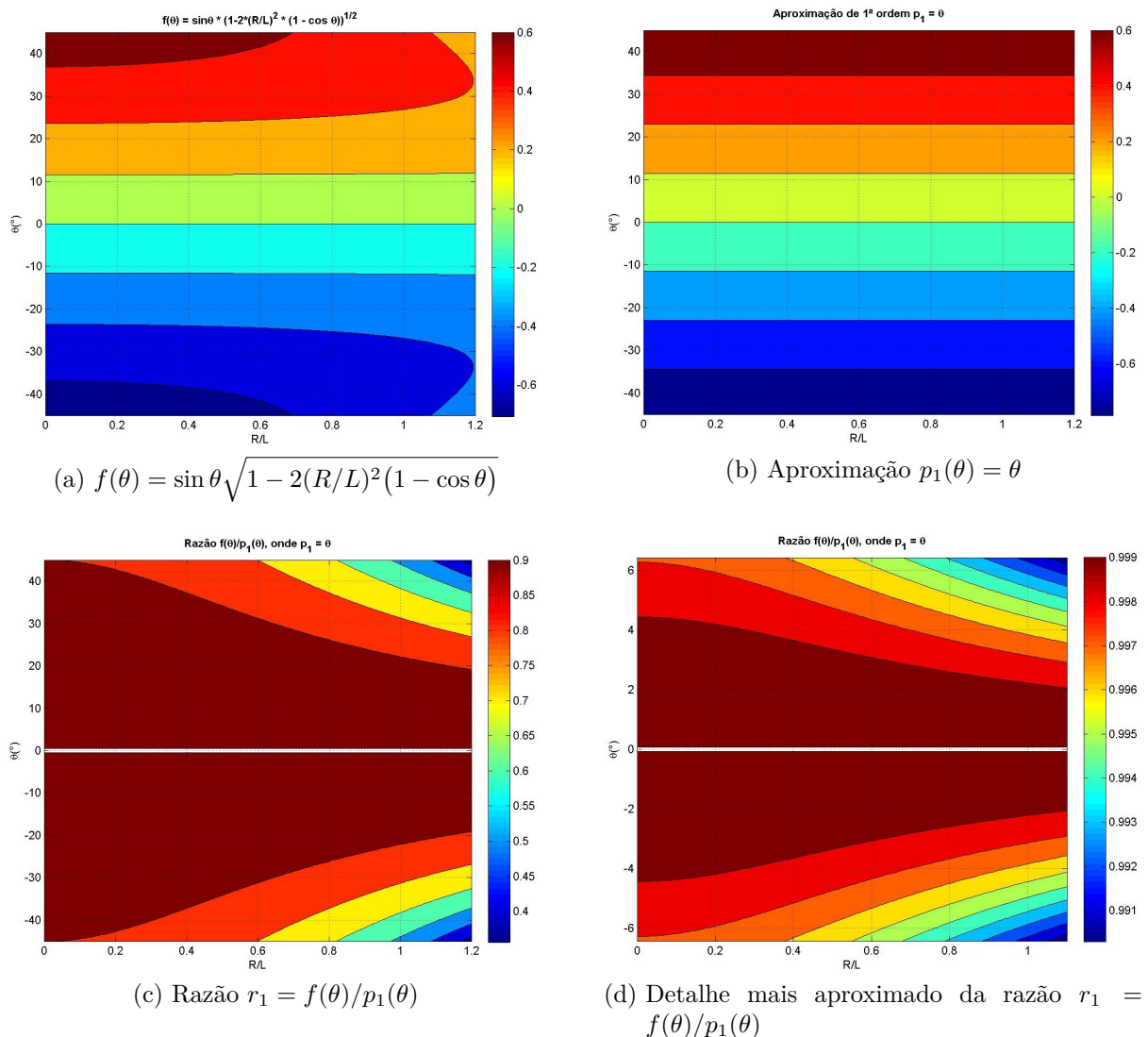


Figura 2.15 – Comparação entre a função da equação governante e a aproximação  $p_1$ .  
Fonte: Elaborada pelo autor.

2.15a e 2.15b correspondem respectivamente à função  $f(\theta)$  e ao polinômio  $p_1(\theta)$ . É possível notar que eles são muito parecidos próximos à  $\theta = 0$  e em  $R/L = 0$ , mas a semelhança diminui conforme  $R/L$  aumenta.

A Figura 2.15c corresponde à razão  $r_1$  entre a função  $f(\theta)$  e  $p_1(\theta)$ , enquanto 2.15d é um detalhe da mesma razão para menores ângulos  $\theta$ . É possível ver com clareza que existe

uma região onde essa razão é bem próxima à unidade. Também se vê as regiões onde essa aproximação começa a perder validade, onde  $r_1 < 0,90$ . Uma região onde a aproximação de primeira ordem é muito boa acontece em  $r_1 = 0,999$ . Essa região depende tanto de  $\theta$  quanto da razão  $R/L$ , mas ocorre principalmente para ângulos entre  $0^\circ < \theta < 2^\circ$  a  $4^\circ$ . Depreende-se que essa aproximação é melhor quanto menor for o ângulo do movimento.

Ao substituir a aproximação (2.27) em (2.21) a equação que modela o movimento do pêndulo trifilar fica na forma linear.

$$I\ddot{\theta} = -\frac{mgR_1^2}{L}\theta \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) possui solução simples. Assumindo que a posição angular  $\theta$  varia no tempo segundo uma função harmônica tem-se:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) \quad (2.29)$$

$$\dot{\theta}(t) = \theta_0 \omega \cos(\omega t) \quad (2.30)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.31)$$

Portanto, substituindo as Eqs. (2.29) e (2.31) em (2.28) obtemos:

$$\begin{aligned} -I\theta_0\omega^2 \sin(\omega t) &= -\frac{R^2mg}{L}\theta_0 \sin(\omega t) \\ I\omega^2 &= \frac{R^2mg}{L} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Isolando  $I$ :

$$I = \frac{R^2mg}{L\omega^2} \quad (2.33)$$

Ao se promover uma excitação no sistema, o pêndulo oscila em torno de seu centro de gravidade com frequência angular  $\omega$  e com um período  $T = 2\pi/\omega$  que pode ser medido. Reescrevendo a eq. (2.27) e substituindo  $\omega$ :

$$I = \frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L} \quad (2.34)$$

O pêndulo trifilar é capaz de avaliar experimentalmente a inércia  $I_i$  de um conjunto suspenso. Como ela é uma propriedade linear, é possível estimar a inércia  $I$  de um corpo ensaiado no pêndulo a partir da diferença entre a inércia  $I_2$  do conjunto da bancada com o corpo rígido em cima e a inércia  $I_1$  da bancada vazia :

$$I = I_2 - I_1 \quad (2.35)$$

As inércias  $I_1$  e  $I_2$  podem ser obtidas realizando dois ensaios e a partir das diferentes medições estimar o valor de  $I$ . A inércia da bancada sozinha é dada por:

$$I_1 = \frac{R^2m_1gT_1^2}{4\pi^2L_1} \quad (2.36)$$

A inércia da bancada mais o corpo é dada por:

$$I_2 = \frac{R^2(m_1 + m_2)gT_2^2}{4\pi^2 L_2} \quad (2.37)$$

Substituindo as eqs. (2.36) e (2.37) em (2.35):

$$I = \frac{R^2(m_1 + m_2)gT_2^2}{4\pi^2 L_2} - \frac{R^2 m_1 g T_1^2}{4\pi^2 L_1} \quad (2.38)$$

$$I = \frac{R^2 g}{4\pi^2} \left( \frac{m_1 T_1^2}{L_1} - \frac{(m_1 + m_2) T_2^2}{L_2} \right) \quad (2.39)$$

A Equação (2.39) é a principal equação utilizada no presente trabalho. Para que sejam determinados os momentos de inércia de diversos corpos, foram realizados um conjunto de ensaios aplicando-se a metodologia ISO-GUM. Assim pretende-se obter uma validação sobre as incertezas que estão presentes no experimento.

### 2.3.4 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Ao longo da demonstração, assumiu-se que  $R_1 = R_2$  e o termo  $R$  ficou ao quadrado, mas também é possível demonstrar que para  $R_1 \neq R_2$  a equação (2.34) assume a forma:

$$I = \frac{R_1 R_2 m g T^2}{4\pi^2 H} \quad (2.40)$$

onde  $H$  é a altura entre as duas plataformas.

Nos casos onde os raios superior e inferior são iguais,  $R_1 = R_2 = R$  então os valores das alturas e dos comprimentos dos fios se equivalem, de modo que  $H_1 = L_1$  e  $H_2 = L_2$ . A Equação (2.40) pode ser simplificada para a Eq. (2.34).

Há ainda um outro resultado descrito em [Genta e Delprete \(1994\)](#) onde são levados em consideração as massas dos fios  $m_w$ . Este resultado é importante pois existem duas bancadas de pêndulos trifilares no grupo GDS, uma com fios de náilon e outra com fios de cabos de aço. Na bancada com cabos de aço, a massa dos cabos terá maior influência na medição da inércia experimental. Este modelo pode ser simplificado ao de (2.39) com as devidas hipóteses.

$$I = m_2 \frac{g R_1 R_2}{4\pi^2 H} \left[ T_2^2 + \frac{m_1 + m_w}{m_2} (T_2^2 - T_1^2) \right] \quad (2.41)$$

Com isso, o método consiste na medição dos parâmetros  $I$ ,  $R$ ,  $m$ ,  $g$  e  $T$  a serem mensurados utilizando o método descrito na ISO-GUM

# 3 AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS - METODOLOGIA ISO GUM

A incerteza do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento do exato valor do mensurando.

Uma análise mais adequada de avaliação e expressão de incertezas, é fundamental no desenvolvimento de uma metodologia padrão. O conhecimento da incerteza e da faixa de confiança associada a um procedimento experimental é essencial na determinação de parâmetros físicos confiáveis. Esta metodologia foi desenvolvida em conjunto, por um grupo de trabalho composto de 7 organizações e, originando assim, o Guide to Uncertainty Measurement - Guia para medição de incertezas [JCGM \(2008\)](#).

Este capítulo resume os principais fundamentos presentes na ISO-GUM utilizadas ao longo deste trabalho. Com isso pretende-se avaliar as incertezas padrão e expandida dos momentos de inércia de diferentes corpos rígidos ensaiados na bancada experimental do pêndulo trifilar.

## 3.1 MODELANDO A MEDIÇÃO

Quando se pretende determinar um mensurando  $Y$ , nem sempre ele pode ser medido diretamente. Normalmente ele pode ser descrito por uma relação funcional  $f$  de  $N$  outras grandezas:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (3.1)$$

Para uma série de observações, o  $k$ -ésimo valor observado de  $X_i$  é dado por  $X_{i,k}$ . Portanto o  $k$ -ésimo termo de um comprimento  $L$  é dado por  $L_k$ .

Cada uma das grandezas de entrada  $X_1, X_2, \dots, X_N$  podem ser mensurandos independentes, sendo elas também relações funcionais de outras grandezas  $X_i = g_i(W_1, W_2, \dots, W_N)$ . Essas funções  $g_i$  podem levar em conta correções e fatores de correção para efeitos sistemáticos. Portanto,  $Y = f$  deve ser interpretada como a função que leva em conta todas as grandezas de entrada, incluindo todas as possíveis outras relações que possam contribuir

com um componente de incerteza significativo.

A ISO-GUM utiliza a notação  $X_i$  tanto para uma certa grandeza física quanto para sua respectiva variável aleatória. Isso advém do guia considerar que uma dada grandeza física pode ser caracterizada por um valor único resultante de uma densidade de probabilidade.

Uma estimativa do mensurando  $Y$ , dada por  $y$ , é obtida da Eq (3.1) a partir das estimativas de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Assim ela é dada por:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.2)$$

Se  $f$  for uma função linear, uma estimativa de  $y$  pode ser dada por:

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) \quad (3.3)$$

onde  $\bar{X}_i$  é a média aritmética das observações individuais  $X_{i,k}$ , ou seja,

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k} \quad (3.4)$$

Em outros casos, quando  $f$  é uma função não linear de  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , a melhor estimativa de  $y$  é obtida através da média de diferentes medições de  $Y$ , através da relação:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}) \quad (3.5)$$

Se  $f$  for uma função linear, ambas as estimativas se equivalem.

O desvio-padrão relativo a estimativa de saída  $y$  é chamado de **incerteza padrão combinada**  $u_c(y)$ , determinada a partir das incertezas de cada estimativa de entrada  $x_i$ , denominadas como **incerteza-padrão**  $u(x_i)$ .

As estimativas de entrada  $x_i$  e sua incerteza padrão associada são obtidas a partir da distribuição de valores possíveis da grandeza de entrada  $X_i$ . Uma série de observações  $X_{i,k}$  de  $X_i$  gera uma distribuição com uma avaliação do Tipo A. Uma distribuição a priori leva a uma avaliação do Tipo B

### 3.1.1 AVALIAÇÃO TIPO A DA INCERTEZA

Uma avaliação Tipo A da incerteza leva em conta a análise estatística de uma série de observações.

A ISO-GUM revisa algumas definições estatísticas que caracterizam distribuições de probabilidade. Os conceitos estão dispostos a seguir:

A **esperança** de uma variável aleatória corresponde ao valor médio esperado que ela assume após um número muito grande de observações  $n \rightarrow \infty$ . Para uma variável

aleatória discreta  $X$  com valores  $x_i$  e probabilidade  $p_i$  a esperança  $\mu$ , se existe, é:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \quad (3.6)$$

Para uma variável aleatória contínua  $X$  com a função densidade de probabilidade  $f(x)$ , a esperança  $\mu$ , se existe, é:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.7)$$

A **variância**  $\sigma^2$  de uma variável aleatória ou distribuição de probabilidade é:

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (3.8)$$

O seu **desvio-padrão**  $\sigma$  é dado pela raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \quad (3.9)$$

Normalmente, para uma grandeza  $q$  que varia aleatoriamente, a melhor estimativa para o valor esperado  $\mu_q$  é obtida a partir da **média aritmética**  $\bar{q}$  de uma certa amostra  $q_k$  com  $n$  **observações independentes**, sob as mesmas condições de medição.

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (3.10)$$

Os valores observados  $q_k$  são diferentes entre si devido a variações aleatórias. A **variância experimental**  $s^2(q_k)$  é:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2 \quad (3.11)$$

este valor e sua raiz quadrada, o **desvio-padrão experimental**  $s(\bar{q})$ , são indicativos da variabilidade de  $q_k$  em torno da média  $\bar{q}$ .

A variância da média é dada por:

$$\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n \quad (3.12)$$

A melhor estimativa da variância da média é dada pelo **variância experimental da média**.  $s^2(\bar{q})$

$$s^2(\bar{q}) = s(q_k)^2/n \quad (3.13)$$

este valor e o **desvio-padrão experimental da média**  $s(\bar{q})$  correspondem ao quanto a média  $\bar{q}$  estima bem a esperança  $\mu_q$  de  $q$ . Ambos os valores podem ser usados como uma medida da incerteza de  $\bar{q}$ .

A diferença entre  $s^2(\bar{q})$  e  $\sigma^2(\bar{q})$  é considerada quando se estabelece um intervalo de confiança. Se a distribuição de probabilidade de  $q$  for normal, a distribuição- $t$  relaciona a variância experimental da média  $s^2(\bar{q})$  e a variância da distribuição  $\sigma^2$ .

O teste  $\chi^2$  avalia se uma amostra  $X_i$  corresponde a uma distribuição normal. A partir das  $n$  observações, é possível obter uma função densidade de probabilidade que aproxima a distribuição normal a partir dos parâmetros de  $\chi^2$ .

Com isso, a partir de uma quantidade suficientemente grande de  $n$  observações repedidas e independentes, a grandeza de entrada  $\bar{q}$  fornece uma estimativa confiável da esperança  $\mu_q$  de  $q$ . A variância experimental da média  $s^2(\bar{q})$  fornece uma estimativa da variância da média da distribuição  $s^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ . Uma grandeza de entrada  $X_i$ , tem sua estimativa  $x_i = \bar{X}_i$ . A sua incerteza padrão é  $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$  com  $s$  obtida a partir da Eq. (3.13). As incertezas obtidas dessa maneira são chamadas de incertezas-padrão do Tipo A.

Caso o número de observações independentes seja ( $n \geq 23$ ) aplica-se a Eq. (3.13). Assim a incerteza-padrão do Tipo A  $u_A$  associada será:

$$u_A(x_i) = s(x_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \quad (3.14)$$

Há casos onde não é possível obter um número elevado de observações da mesma grandeza. Com isso as médias não são necessariamente a melhor estimativa da grandeza nem os desvios-padrão irão corresponder aos desvios observados.

Para ( $4 \leq n \leq 22$ )  $u_A$  Kacker e Jones (2003) recomenda utilizar a incerteza do tipo Bayesiana  $u_a(x_i) = u_{Bayes}$ .

$$u_A(x_i) = u_{ABayes}(x_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \quad (3.15)$$

Para ( $n \leq 3$ ) recomenda-se utilizar a expressão:

$$u_A(x_i) = \frac{X_{max} - X_{min}}{2\sqrt{3}} \quad (3.16)$$

que corresponde a uma janela retangular cujos extremos são  $X_{max}$  e  $X_{min}$

### 3.1.2 AVALIAÇÃO TIPO B DA INCERTEZA

Uma avaliação Tipo B da incerteza leva em conta outros meios que não uma análise estatística de uma série. Para uma estimativa de uma grandeza  $x(i)$  a variância estimada associada  $u^2(x_i)$  deve ser avaliada por julgamento científico baseando-se em todas as informações disponíveis sobre a variabilidade de  $X_i$ . Tal julgamento pode levar em conta:

- dados de medições anteriores;
- experiência ou conhecimentos gerais sobre o comportamento e propriedades dos materiais e instrumentos relevantes



- especificações dos fabricantes
- dados de certificados de calibração e outros certificados
- incertezas de dados de referência presentes nos manuais

Este tipo de incerteza é definido como uma incerteza do Tipo B  $u_B$ .

Por exemplo, em instrumentos de resolução digital, um estímulo que produz uma variação na indicação está situado com igual probabilidade em um intervalo dado por  $X - \delta x/2$  e  $X + \delta x/2$ . Isso resulta em uma distribuição de probabilidade retangular, cuja incerteza  $u(x)$  é dada por:

$$u_B(x) = \frac{\delta x}{\sqrt{3}} \quad (3.17)$$

Em instrumentos de resolução analógica, o operador tende a aproximar o valor da leitura para o valor mais próximo observado, portanto é mais provável o valor central da leitura ser o verdadeiro do que os valores excluídos. Com isso, uma distribuição triangular pode ser associada em torno do valor lido, a leitura realizada possui maior probabilidade de ser a verdadeira. A incerteza associada a esse tipo de distribuição é:

$$u_B(x) = \frac{\delta x}{\sqrt{6}} \quad (3.18)$$

## 3.2 AVALIAÇÃO DE INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA

O guia ISO-GUM trata todas as incertezas da mesma maneira e justifica isso a partir da lei de propagação de incertezas. A partir disso ele define a **variância combinada**  $u_c^2(y)$  para grandezas **correlacionadas** como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (3.19)$$

A **incerteza-padrão combinada**  $u_c(y)$  é a raiz quadrada positiva da variância combinada e corresponde a uma estimativa da dispersão dos valores que podem ser atribuídos ao mensurando Y.

A expressão (3.19) equivale ao primeiro termo da expansão em série de Taylor da lei de propagação de incertezas onde  $f$  é a relação funcional (3.2), cada componente  $u(x_i)$  é uma incerteza-padrão do Tipo A ou do Tipo B,  $u(x_i, x_j)$  é a covariância estimada entre  $x_i$  e  $x_j$ . O grau de correlação se caracteriza por pelo coeficiente de correlação estimado:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (3.20)$$

onde  $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$ . Se as estimativas de  $x_i$  e  $x_j$  são independentes,  $r(x_i, x_j) = 0$ . A variação de uma delas não influencia na variação esperada da outra. Quando isso acontece a expressão 3.19 se resume a:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (3.21)$$

As derivadas parciais  $\partial f / \partial x_i$  são definidos como os coeficientes de sensibilidade  $c_i$ . Eles relacionam como a grandeza de saída  $y$  varia de acordo com as estimativas  $x_i$  das grandezas de entrada. A expressão (3.21) pode ser reescrita como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (3.22)$$

onde

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i \quad (3.23)$$

$$u_i(y) = |c_i| u(x_i) \quad (3.24)$$

A partir disso é possível definir a incerteza-padrão combinada  $u_c(y)$  de um mensurando  $y$ .

A incerteza-padrão combinada é o principal parâmetro que expressa qualitativamente a incerteza de um resultado de uma medição. Porém a maioria das aplicações comerciais e industriais exigem que se defina um intervalo no qual uma grande quantidade de parcela dos resultados esteja concentrado.

### 3.3 INCERTEZA EXPANDIDA

A medida de incerteza que define um intervalo de confiança de uma série de amostras é dada pela **incerteza expandida**  $U$ . Ela é obtida a partir da multiplicação da incerteza-padrão combinada  $u_c(y)$  por um fator de abrangência  $k$ .

$$U = k u_c(y) \quad (3.25)$$

O fator de abrangência  $k$  é uma estimativa do fator de abrangência  $k_p$  verdadeiro que só pode ser obtido quando se conhece completamente as distribuições de probabilidade de cada uma das grandezas. Isso normalmente não é possível. Então existe uma recomendação para o cálculo de  $k_p$  com um nível de confiança aproximado  $p$ .

1. Primeiramente se obtém os valores de  $y$  e  $u_c(y)$ .

2. Depois o número de graus de liberdade  $v_{eff}$  deve ser obtido pela fórmula de Welch-Satterthwaite:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_c^4(y)}{v_i}} \quad (3.26)$$

Se  $u(x_i)$  é obtido a partir de uma avaliação do tipo A, obtida a partir de  $n$  observações independentes,  $v_i$  é igual a  $n - 1$ . No caso de um ajuste de mínimos quadrados de  $m$  parâmetros,  $v_i = n - m$ . Se  $u(x_i)$  é uma avaliação do tipo B, então ele é um valor conhecido, e  $v_i \rightarrow \infty$ .

3. Obtém-se o fator  $-t$ , para o nível de confiança  $p$  desejado a partir da tabela de t-Student. Se  $v_{eff}$  não for inteiro então deve-se interpolar os valores ou truncar para o menor inteiro.
4. Assume-se que  $k_p = t_p(v_{eff})$ .
5. Calcular  $U_p = k_p u_c(x_i)$

Após os cálculos de  $y$ ,  $u_c(y)$  e  $U$  os resultados devem ser relatados e os procedimentos de como  $y$  e  $y(c)$  foram obtidos devem ser descritos.

# 4 METODOLOGIA ISO-GUM APLICADA AO PÊNDULO TRIFILAR

Como descrito no capítulo 3, a metodologia ISO-GUM tem como objetivo uma padronização da avaliação de incertezas. Este capítulo está dividido em duas seções e trata da aplicação do método a um modelo analítico simples e ao modelo experimental.

Primeiramente o modelo analítico da inércia rotacional é avaliado para um conjunto de barras. As barras são analisadas para se obter os seus momentos de inércia  $I$  em torno de seus centros de gravidade conforme o modelo proposto em 2.1. Também são avaliadas, pelo teorema dos eixos paralelos para uma certa distância  $h$  do centro de gravidade. Deseja-se com isso, obter um conjunto de inercias rotacionais de referência com as respectivas incertezas avaliadas com a metodologia ISO-GUM a partir de um modelo simples.

Em seguida, a mesma metodologia é aplicada ao conjunto de ensaios experimentais. Estes ensaios avaliam as mesmas inércias do modelo analítico, porém, levam em conta o modelo experimental descrito em 2.3.3.

## 4.1 DETERMINAÇÃO DE INÉRCIA ROTACIONAL ANALÍTICA

A figura 4.1 ilustra as grandezas necessárias para calcular o momento de inércia rotacional de uma barra em torno de um eixo qualquer.

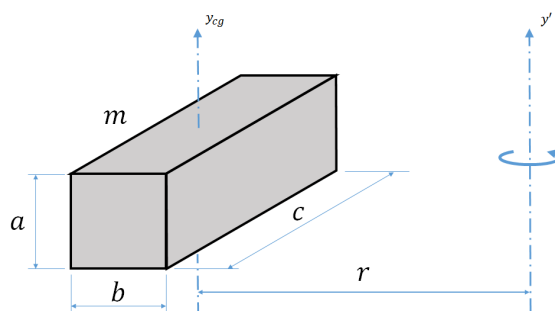


Figura 4.1 – Barra rotacionando em torno de um eixo paralelo ao que passa pelo CG.

Seja o mensurando  $I_{yy}$  o momento de inércia analítico de um corpo rígido que rotaciona com seu centro de gravidade em torno de um eixo  $\hat{y}$ , então a solução analítica da equação (2.2) é um modelo para a obtenção de  $I_{yy}$ . Seja este corpo uma barra de densidade uniforme  $\rho$ , massa  $m$ , altura  $a$ , base  $b$  e comprimento  $c$ , a sua inércia  $I_{yy}$  será dada por uma  $f(m, b, c)$ :

$$f(m, b, c) = I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \quad (4.1)$$

Caso este mesmo corpo rotacione em torno de um outro eixo paralelo a  $\hat{y}$  e a uma distancia  $r$  do mesmo, então o seu momento de inércia será dado pelo teorema dos eixos paralelos, Eq. (2.5) resultando em:

$$f(m, b, c, r) = I_{ana} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + mr^2 \quad (4.2)$$

Os ensaios experimentais propostos avaliaram diferentes inércias a partir da variação da posição  $r$  de um conjunto de barras. O modelo (4.2) será avaliado com a metodologia ISO-GUM para diferentes valores experimentais de  $r$ .

Do capítulo 3, seja  $I_{yy}$  um mensurando  $Y$ , o valor da estimativa  $y$  considerando um modelo linear, é dada por (3.3) a partir das médias de cada grandeza. Isso implica em:

$$y = I_{ana} = \frac{1}{12}\bar{m}(\bar{b}^2 + \bar{c}^2) + \bar{m}r^2 \quad (4.3)$$

A inércia de três barras  $I$ ,  $J$  e  $K$  em torno de um eixo pelo centro de gravidade conjunto dos três é dada por:

$$I_{IJK} = I_I + I_J + I_K \quad (4.4)$$

Os modelos dos dados de entrada estão descritos a seguir:

#### 4.1.1 MODELO DOS DADOS DE ENTRADA

Para a aplicação do modelo ISO-GUM ao procedimento experimental, é importante modelar adequadamente as grandezas de entrada  $X_i$  da relação funcional  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$

##### 4.1.1.1 MODELO DA MASSA $m$

As três barras  $I$ ,  $J$  e  $K$  tiveram as massas medidas separadamente.

As massas das barras  $I$ ,  $J$  e  $K$  são dadas respectivamente por:

$$m_I, m_J, m_K. \quad (4.5)$$

##### Fontes de incerteza

$u(m_r)$ . As medidas  $m$  foram avaliadas separadamente na balança. A cada uma das massas medidas foi atribuída uma incerteza  $u(m_r)$  de uma distribuição de probabilidade retangular, incerteza do Tipo B associada a resolução da balança digital.

#### 4.1.1.2 MODELO DOS COMPRIMENTOS, $b$ E $c$

Foram avaliadas três barras  $I$ ,  $J$  e  $K$  de altura  $a$ , base  $b$  e comprimento  $c$ , conforme mostrado na Figura 4.1. A medida  $a$  não está inclusa na equação do modelo (4.3).

##### Fontes de incerteza:

$u(b_r)$  e  $u(c_r)$  : As medidas  $a$  e  $b$  foram avaliadas com um paquímetro. A medida  $c$  foi avaliada com uma trena. A cada uma dessas grandezas foi atribuída uma distribuição de probabilidade triangular, incerteza do Tipo B associada as resoluções dos instrumentos analógicos.

$u(\bar{b})$  e  $u(\bar{c})$  : Foram realizadas 6 medições de cada grandeza. Houveram variações em torno de uma média, foram atribuídas a elas uma incerteza do Tipo A a partir da Eq. (3.15).

$$u_c(b) = \left( u^2(b_r) + u^2(\bar{b}) \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

$$u_c(c) = \left( u^2(c_r) + u^2(\bar{c}) \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

#### 4.1.1.3 MODELO DA DISTÂNCIA $r$

A distância  $d$  foi demarcada na bancada com um conjunto de esquadros, uma régua e uma lapiseira 0.9 mm.

$$r = R - d \quad (4.8)$$

##### Fontes de Incerteza:

$u(R)$ : A incerteza de  $R$  está descrita adiante no modelo experimental.

$u(d_r)$ : A incerteza de  $d$  é a incerteza da resolução da régua utilizada para marcar a posição que o bloco deveria ficar. Tipo B. Devido ao posicionamento do centro de massa dentro na posição marcada, foi estabelecida uma distribuição retangular de probabilidade.

**Incerteza padrão** Os módulos dos coeficientes de sensibilidade  $c_i$  de (4.8) são todos iguais a 1. A incerteza-padrão combinada  $u(r)$  é dada por:

$$u(r) = \left( u^2(R) + u^2(d) \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA $u_c(I)$ :

Aplicando a avaliação de incertezas-padrão combinadas (3.19) à equação (4.3) a variância padrão  $u_c^2(I)$  será dada por:

$$u_c^2(I) = \left( \frac{\partial I}{\partial m} \right)^2 u^2(m) + \left( \frac{\partial I}{\partial b} \right)^2 u^2(b) + \left( \frac{\partial I}{\partial c} \right)^2 u^2(c) + \left( \frac{\partial I}{\partial r} \right)^2 u^2(r) \quad (4.10)$$

Sejam os coeficientes de sensibilidade  $c_i$  dados por  $\partial I/\partial x_i$ :

$$c_1 = \left( \frac{\partial I}{\partial m} \right) = \frac{b^2 + c^2}{12} + r^2 \quad (4.11)$$

$$c_2 = \left( \frac{\partial I}{\partial b} \right) = \frac{mb}{6} \quad (4.12)$$

$$c_3 = \left( \frac{\partial I}{\partial c} \right) = \frac{mc}{6} \quad (4.13)$$

$$c_4 = \left( \frac{\partial I}{\partial r} \right) = 2mr \quad (4.14)$$

Portanto a incerteza-padrão combinada  $u_c(I)$  será dada por:

$$u_c(I) = \left( c_1^2 u^2(m) + c_2^2 u^2(b) + c_3^2 u^2(c) + c_4^2 u^2(r) \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

Que também pode ser escrita como:

$$u_c(I) = \left( u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

Onde  $u_i = c_i u(x_i)$ .

### 4.1.3 INCERTEZA EXPANDIDA $U$ :

O número de graus de liberdade é obtido a partir de:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(I)}{\frac{u_1^4}{v_1} + \frac{u_2^4}{v_2} + \frac{u_3^4}{v_3} + \frac{u_4^4}{v_4}} \quad (4.17)$$

A partir do valor de  $v_{eff}$  é obtido um coeficiente  $k_p$  para  $p = 95\%$  na tabela de  $-t$  de student. A incerteza expandida do modelo analítico é dada por

$$U_{95} = k_p u_c(I) \quad (4.18)$$

## 4.2 DETERMINAÇÃO DE INÉRCIA ROTACIONAL EXPERIMENTAL

O modelo aplicado para determinar o momento de inércia experimental de um objeto sobre um pêndulo trifilar dado pela equação 2.39.

$$y = I_{yy} = \frac{R^2 g}{4\pi^2} \left[ \frac{(m_2 + m_1) T_2^2}{L_2} - \frac{m_1 T_1^2}{L_1} \right]; \quad (4.19)$$

A figura 4.2 representa as grandezas de entrada  $x_i$  necessárias para obtenção experimental do momento de inércia rotacional  $I$  de um corpo sobre a bancada. São necessários

determinar os comprimentos  $L$  e  $R$  referentes aos comprimentos dos fios e suas distâncias ao centro geométrico da bancada. Também é preciso medir as massas da bancada individual  $m_1$  e do corpo a ter a inércia avaliada  $m_2$ . Em seguida mede-se os períodos  $T_1$  e  $T_2$  que a bancada demora para efetuar um ciclo. A aceleração da gravidade local corresponde a  $g$ .

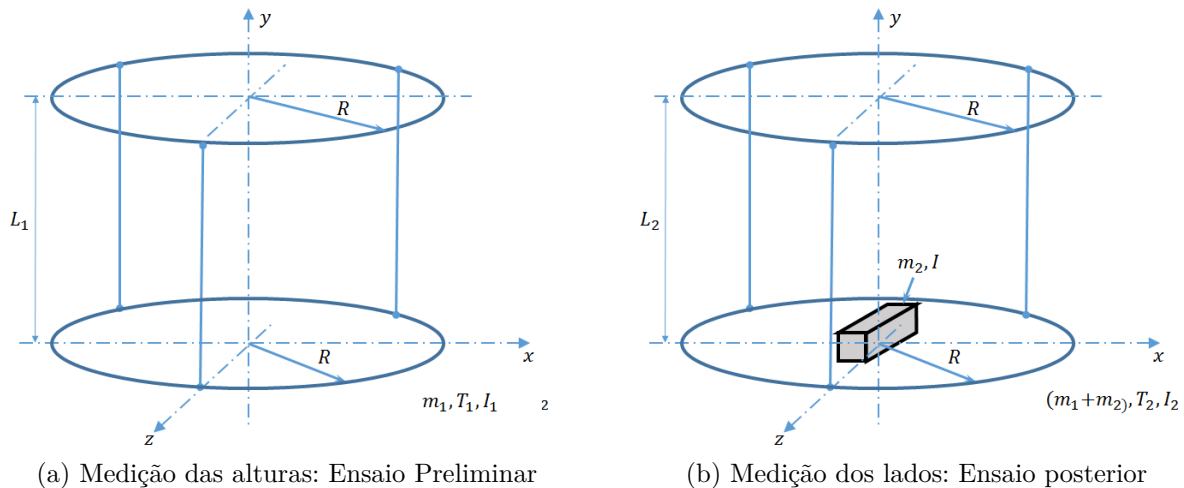


Figura 4.2 – Modelos de medição de  $R$

## 4.2.1 MODELO DOS DADOS DE ENTRADA

Para a aplicação do modelo ISO-GUM ao procedimento experimental, é importante modelar adequadamente as grandezas de entrada  $X_i$  da relação funcional  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$

Esta seção descreve o modelo de cada uma das grandezas de entrada e

O correto modelo de cada uma das grandezas de entrada é de fundamental importância para que seja efetuada a melhor estimativa do mensurando  $Y$ . Esta seção se destina a listar os modelos matemáticos aplicados e suas fontes de incerteza associadas.

### 4.2.1.1 MODELO DA DISTÂNCIA $R$

Ao longo do experimento, a distância  $R$  foi avaliada de duas maneiras. A primeira foi a realização feita no ensaio preliminar. A segunda foi a avaliação dos outros ensaios.

A primeira avaliação levou em consideração as alturas  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  do triângulo ABC, conforme a Figura 4.3a, que podiam ser medidas diretamente. Considerando o triângulo formado na base como equilátero, as medidas das alturas correspondem exatamente às medidas das medianas  $med_a$ ,  $med_b$  e  $med_c$ . Com este modelo, são feitas as três medições, multiplica-se por  $2/3$ , valor que corresponde à posição do encontro das medianas. Assume-se que o valor de  $R$  seja dado pela média das três medidas:

$$R = \frac{h_a + h_b + h_c}{3} = \frac{2(med_a + med_b + med_c)}{9} \quad (4.20)$$



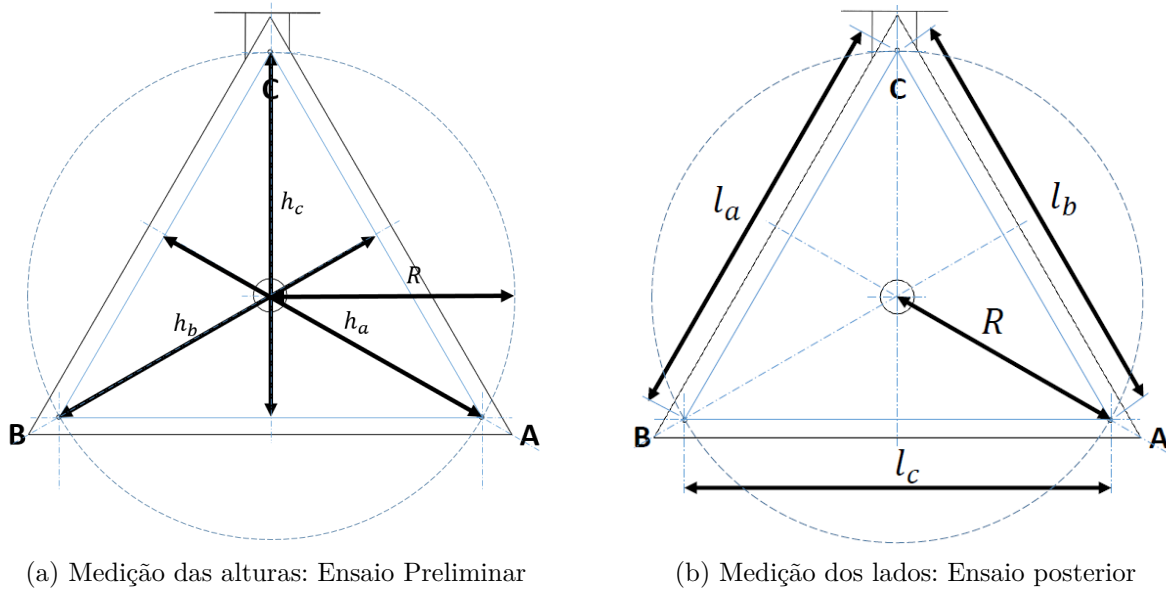


Figura 4.3 – Modelos de medição de R

Dos resultados iniciais da medição observou-se que as alturas  $h_a$ ,  $h_b$ , e  $h_c$  eram levemente diferentes entre elas. Isso implica que a aproximação de que o triângulo  $ABC$  equilátero poderia não ser uma boa aproximação. A equação (4.20) pode ser uma boa estimativa para o valor de  $\bar{R}$  porém a estimativa da incerteza dessa medição tende a ser grande, uma vez que ela é dada por apenas 3 medições independentes e diferentes.

Com o breve conhecimento obtido dos resultados preliminares, concluiu-se que a grandeza de entrada ( $R$ ) era uma grandeza de fundamental importância para a avaliação da incerteza.

Foi proposta uma segunda avaliação. Levou-se em consideração realizar uma medida direta dos lados  $l_a$ ,  $l_b$  e  $l_c$  do triângulo  $ABC$  conforme mostrado na Figura 4.3b. A partir disso, são determinados os valores das medianas  $med_k$  do triângulo  $ABC$ . Isso seria um meio de diminuir as incertezas  $u(R)$ . Esta medida foi realizada no Laboratório de Metrologia do SG09 - Engenharia Mecânica - UnB com um braço de medição por coordenadas. Este modelo aproxima melhor o valor de  $\bar{R}$  a partir das médias das medianas

$$med_a = \frac{1}{2} \sqrt{2l_b^2 + 2l_c^2 - l_a^2} \quad (4.21)$$

$$\bar{R} = \frac{med_a + med_b + med_c}{3} \quad (4.22)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{9} \left( \sqrt{2l_b^2 + 2l_c^2 - l_a^2} + \sqrt{2l_a^2 + 2l_c^2 - l_b^2} + \sqrt{2l_a^2 + 2l_b^2 - l_c^2} \right) \quad (4.23)$$

#### Fontes de incerteza

- Ensaio preliminar:

$u(\bar{h})$ : Incerteza associada a variação das alturas. Avaliação do tipo A conforme a Eq. 3.16.

$u(h_r)$ : Incerteza associada à resolução da trena utilizada. Avaliação do tipo B

- Ensaio posterior:

$u(\bar{l})$ : Incerteza associada a medição das medianas. Avaliação do tipo A conforme 3.16.

$u(l_r)$ : Incerteza do tipo B associada à resolução do instrumento de medição. A incerteza da medição realizada é uma incerteza expandida  $U_{95} = 0,06mm$ . Assumindo um fator de abrangência  $k_p = 1,9604$  determina-se a incerteza padrão associada.

- Ambos ensaios

$u(R_o)$ : Incerteza do tipo B devido à folga entre os furos e os fios que suspendem a bancada. O fio tem uma espessura nominal de 0,90 mm. O furo tem largura de 1mm. Como o movimento acontece para pequenos ângulos, o fio fica livre pra assumir qualquer posição dentro do furo. Devido à isso, não é possível determinar com certeza qual é o ponto onde o fio se apoia durante o ensaio dinâmico. Foi atribuída uma distribuição retangular da largura do furo.

### Correção para o efeito da incerteza $u(R_o)$

Considerando a montagem da bancada, os três fios estão montados com parafusos voltados para a parte interna da plataforma inferior. Com isso, a tendência é que o fio fique apoiado na parte do furo que é voltada para o centro da plataforma. Como foram medidas as distâncias dos centros dos furos, a correção proposta é subtrair metade do diâmetro do furo da distância  $\bar{R}$  e ignorar a incerteza  $u(R_o)$ .

$$R = \bar{R} - r_{furo} \quad (4.24)$$

### Incerteza-padrão

- Ensaio preliminar:

$$u(R) = \left( u^2(\bar{R}) + u^2(R_o) \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

$$u(R) = \left( \frac{2}{9}(u^2(h) + u^2(h) + u^2(h)) + u^2(R_o) \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

$$u(R) = \left( \frac{2}{3}u^2(h) + u^2(R_o) \right)^{1/2} \quad (4.27)$$

- Ensaio posterior:

Considerando que as incertezas nos comprimentos dos lados são muito pequenas, foram desconsiderados os erros  $u(\bar{l})$  e  $u(l_r)$ . Com os valores de  $l_a$ ,  $l_b$  e  $l_c$  foram calculadas

as medianas e a incerteza associada a elas  $u(\bar{med})$  é devido a variação do seu comprimento.  $u(\bar{R})$  foi calculada pela média das medianas vezes  $2/3$ .

$$u(med) = \frac{(med_{MAX} - med_{MIN})}{\sqrt{12}} \quad (4.28)$$

$$u(R) = \left( \frac{2}{3}u^2(med) + u^2(R_1) \right)^{1/2} \quad (4.29)$$

#### 4.2.1.2 MODELO DOS COMPRIMENTOS $L_1$ E $L_2$

Como a bancada experimental é montada com fios de náilon, quando é colocado algum objeto sobre a bancada, os fios esticam, e o comprimento  $L$  de cada um deles aumenta. Por isso é necessário medir o comprimento de cada fio antes e depois do conjunto de ensaios realizados. As medidas dos comprimentos dos fios entre as plataforma superior e inferior estão mostrados na Figura 4.4.

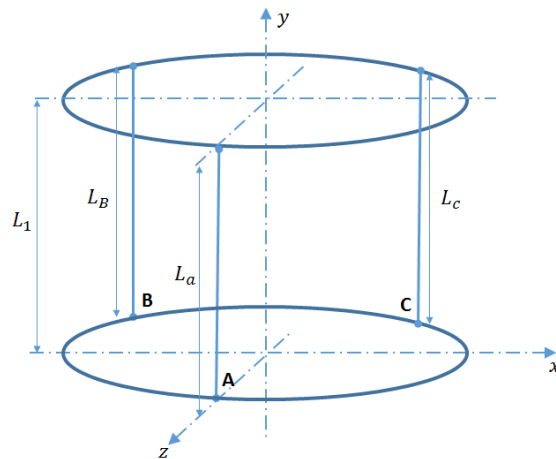


Figura 4.4 – Modelo de medição de  $L$

Uma breve avaliação geométrica dessas medidas  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$  leva à conclusão que para pequenas inclinações das plataformas superior e inferior, a média entre eles  $\bar{L}$  corresponde à distância entre os centros geométricos das duas. Portanto a estimativa  $L$  é uma boa estimativa para o valor de  $L$ .

#### Fontes de incerteza

$u(\bar{L})$ : Devido à imprecisões na montagem da bancada, os fios terminam tendo comprimentos diferentes. Isso gera um valor médio  $\bar{L}$  dos fios e uma incerteza associada a eles.

$u(L_r)$ : Incerteza associada à resolução do instrumento de medição. Avaliação do tipo B. Distribuição retangular

$u(L_o)$ : Um efeito semelhante ao que ocorre para o raio  $R$  devido à folga entre o furo e o fio ocorre para estimar os comprimentos dos fios. A plataforma superior tem uma

espessura  $e_1 = 15mm$  e a inferior  $e_2 = 11mm$ . Como não é possível afirmar em que local os fios têm contato com a plataforma faz-se uma avaliação do Tipo B com distribuição retangular entre de  $e_1 + e_2 = 26mm$

### Correção para a incerteza $u(L_o)$

O movimento do pêndulo trifilar ocorre para pequenos ângulos  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $15^\circ$ . Os ângulos  $\alpha$  são menores ainda e variam entre  $0^\circ$  e  $3^\circ$ . Dados os diâmetros dos furos e o diâmetro dos fios, os fios têm liberdade para variar entre  $0^\circ$  e  $5^\circ$  na parte plataforma superior e entre  $0^\circ$  e  $7^\circ$  na plataforma inferior. Isso indica que os pontos de contato entre os fios e as plataformas deve ocorrer na parte de cima da plataforma superior e na parte de baixo da plataforma inferior. Por isso, as medidas  $L$  indicadas na Figura 4.4 devem ser somadas também as espessuras das plataformas. De modo que:

$$L = \bar{L} + e_1 + e_2 \quad (4.30)$$

$u(e_1)$  e  $u(e_2)$ : As incertezas das espessuras das placas são desprezíveis em relação ao comprimento total do fio.

### Incerteza-padrão:

$$u(L_1) = \left( u^2(\bar{L}_1) + u^2(L_{1r}) \right)^{1/2} \quad (4.31)$$

$$u(L_2) = \left( u^2(\bar{L}_2) + u^2(L_{2r}) \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

#### 4.2.1.3 MODELO DAS MASSAS $m_1$ E $m_2$ :

A massa  $m_1$  é a massa do conjunto suspenso. A massa  $m_2$  é a massa do objeto a ser colocado no pêndulo. Ambas são medidas separadamente na mesma balança.

### Fontes de incerteza:

$u(\bar{m}_1)$ : Quando se mediu a massa da placa suspensa pela primeira vez, notou-se que ela variou de forma instável apresentando valores dentro de uma certa faixa. Os parafusos que prendiam os fios à placa não estavam muito bem fixados, e em algumas medições podem ter ficados suspensos pelos fios e seus pesos não terem sido medidos na balança. Para solucionar isso os parafusos foram fixados na parte inferior da bancada. Depois foram efetuadas outras medições. A massa variou em uma certa faixa, mas numa faixa de valores bem menor do que a faixa da variação anterior.

$u(m_r)$ : Incerteza associada à resolução digital da balança. Avaliação do tipo B com distribuição retangular.

### Inceteza-padrão:

$$u(m_1) = \left( u^2(\bar{m}_1) + u^2(m_r) \right)^{1/2} \quad (4.33)$$

$$u(m_2) = u(m_r) \quad (4.34)$$

#### 4.2.1.4 MODELO DOS PERÍODOS $T_1$ E $T_2$

Quando o pêndulo é posto pra oscilar pode-se medir o intervalo de tempo que ele demora para efetuar um certo número de oscilações com um cronômetro. Este foi o procedimento adotado no ensaio preliminar.

Outra possibilidade é filmar os ensaios com um alvo de referência e depois analisar o sinal obtido no programa CvMob. Este foi o procedimento dos ensaios posteriores.

#### Fontes de incerteza

$u(\bar{T})$ : Os períodos têm durações bem diferentes quando se mede com o cronômetro. Isso porque é um método que depende do operador. Para reduzir este efeito é possível registrar a duração de um conjunto de vários períodos e com isso obter uma menor variância no resultado.

$u(T_r)$ : O cronômetro possui alta resolução, porém a câmera tem uma taxa de aquisição de 30 fps. Isso resulta em uma resolução de 0,033 segundos. Se forem avaliados período por período do sinal vão haver estimativas ruins dos tempos. Esta é uma incerteza do Tipo A.

$u(f)$ : Um meio de evitar a baixa resolução da amostra, é utilizar métodos computacionais para avaliar as frequências presentes no sistema. A partir delas pode-se estimar um período.

#### Análise de tendência

Com a análise do sinal é possível avaliar como o período  $T$  varia com  $\theta$ . A partir disso é possível avaliar a tendência dos períodos para um conjunto de ensaios.

### Inceteza-padrão

$$u(T_1) = \left( u^2(\bar{T}_1) + u^2(T_1 r) \right)^{1/2} \quad (4.35)$$

$$u(T_2) = \left( u^2(\bar{T}_2) + u^2(T_2 r) \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

#### 4.2.1.5 MODELO DA GRAVIDADE $g$

Segundo o certificado de medição, a aceleração da gravidade no Laboratório de Termociências e Metrologia dinâmica, medida em 1994, é:

$$g = 9,7808439 \pm 0,0000005m/s^2 \quad (4.37)$$

$$u(g) = 0,0000005m/s^2 \quad (4.38)$$

#### 4.2.2 INCERTEZA-PADRÃO COMBINADA

Aplicando o modelo de avaliação de incertezas padrão combinada equação (??) à equação do momento momento de inércia  $I_{yy}$  de um corpo

$$u(I)^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 u(R)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial g}\right)^2 u(g)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial m_1}\right)^2 u(m_1)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial m_2}\right)^2 u(m_2)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T_1}\right)^2 u(T_1)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T_2}\right)^2 u(T_2)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial L_1}\right)^2 u(L_1)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial L_2}\right)^2 u(L_2)^2 \quad (4.39)$$

Os coeficientes de sensibilidade  $c_i$  são dados por:

$$c_1 = \frac{\partial I}{\partial R} = \frac{Rg}{2\pi^2} \left[ \frac{(m_2 + m_1)T_2^2}{L_2} - \frac{m_1T_1^2}{L_1} \right] \quad (4.40)$$

$$c_2 = \frac{\partial I}{\partial g} = \frac{R^2}{4\pi^2} \left[ \frac{(m_2 + m_1)T_2^2}{L_2} - \frac{m_1T_1^2}{L_1} \right] \quad (4.41)$$

$$c_3 = \frac{\partial I}{\partial m_1} = \frac{R^2g}{4\pi^2} \left[ \frac{T_2^2}{L_2} - \frac{T_1^2}{L_1} \right] \quad (4.42)$$

$$c_4 = \frac{\partial I}{\partial m_2} = \frac{R^2g}{4\pi^2} \left[ \frac{T_2^2}{L_2} \right] \quad (4.43)$$

$$c_5 = \frac{\partial I}{\partial T_1} = -\frac{R^2g}{2\pi^2} \left[ \frac{m_1T_1}{L_1} \right] \quad (4.44)$$

$$c_6 = \frac{\partial I}{\partial T_2} = \frac{R^2g}{2\pi^2} \left[ \frac{(m_2 + m_1)T_2}{L_2} \right] \quad (4.45)$$

$$c_7 = \frac{\partial I}{\partial L_1} = \frac{Rg}{4\pi^2} \left[ \frac{m_1T_1^2}{L_1^2} \right] \quad (4.46)$$

$$c_8 = \frac{\partial I}{\partial L_2} = -\frac{Rg}{4\pi^2} \left[ \frac{(m_2 + m_1)T_2^2}{L_2^2} \right] \quad (4.47)$$

A equação (4.39) pode ser então reescrita como:

$$u_c = \left( c_1^2 u^2(R) + c_2^2 u^2(g) + c_3^2 u^2(m_1) + c_4^2 u^2(m_2) + c_5^2 u^2(T_1) + c_6^2 u^2(T_2) + c_7^2 u^2(L_1) + c_8^2 u^2(L_2) \right)^{1/2} \quad (4.48)$$

Ou ainda:

$$u_c = \left( u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2 \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

onde  $u_i = c_i u(x_i)$

### 4.2.3 INCERTEZA EXPANDIDA

O número de graus de liberdade é obtido a partir de:

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(I)}{\frac{u_1^4}{v_R} + \frac{u_2^4}{v_g} + \frac{u_3^4}{v_{m_1}} + \frac{u_4^4}{v_{m_2}} + \frac{u_5^4}{v_{T_1}} + \frac{u_6^4}{v_{T_2}} + \frac{u_7^4}{v_{L_1}} + \frac{u_8^4}{v_{L_2}}} \quad (4.50)$$

A partir dele deve-se determinar o coeficiente na tabela de  $t$ --Student e avaliar o valor do coeficiente  $k_p$  para o nível de confiança  $p$ .

## 5 ENSAIOS PRELIMINARES

Durante a primeira parte deste trabalho foram realizados alguns experimentos com o intuito inicial de compreender o funcionamento da bancada e assim identificar as fontes de incerteza bem como possíveis erros experimentais que podem acontecer durante o experimento.

É possível determinar o momento de inércia de um conjunto suspenso por um pêndulo trifilar através da equação (2.34). Esta equação informa que o momento de inércia  $I$  de um certo corpo sobre o pêndulo trifilar é dado por uma função  $f$ :

$$I = f(R_1, R_2, m_1, m_2, g, L_1, L_2, T_1, T_2) \quad (5.1)$$

O procedimento experimental consiste em realizar 2 ensaios básicos: medir as grandezas e executar um ensaio com a bancada vazia. Depois deve-se medir as grandezas novamente e executar o ensaio com o corpo sobre a bancada. Esses resultados devem ser avaliados em  $f$ .

Com base nisso durante a primeira etapa do trabalho foram realizados um conjunto de ensaios preliminares. O experimento foi avaliado de duas maneiras distintas, ensaio cronometrado e ensaios em vídeo.

Os ensaios cronometrados, foram realizados para obter uma estimativa inicial e obter uma maior compreensão do funcionamento da bancada. Com estes ensaios foi possível avaliar possíveis fontes de incertezas e tentar corrigi-las. Também pôde-se fazer uma primeira avaliação de resultados e incertezas. Foram propostas algumas correções ao experimento.

Foram realizados um conjunto de novos ensaios. Estes ensaios foram todos filmados e seus vídeos analisados com o software CvMob 3.5 para se realizar uma melhor avaliação dos resultados e incertezas do experimento. Uma descrição do funcionamento do software CvMob está feita no anexo A. Espera-se entender mais claramente a dinâmica do sistema e identificar erros sistemáticos. Com os resultados, foram propostas outras soluções para erros sistemáticos.

A descrição do experimento e os procedimentos experimentais do ensaio preliminar cronometrado e dos ensaios posteriores filmados estão descritos neste capítulo.



Alguns destes ensaios obtiveram resultados qualitativos importantes para a avaliação do experimento aos quais também estão relatados neste capítulo.

## 5.1 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Esta seção aborda a realização do experimento cronometrado. Ela descreve o experimento realizado, os instrumentos, os ensaios propostos, as execuções dos experimentos e indicando o que deve ser medido e de que maneira.

O experimento para medição da inércia de rotação com o pêndulo trifilar é relativamente simples. É possível realizá-lo mesmo em uma bancada montada com pouco cuidado e obter resultados satisfatórios utilizando apenas um conjunto de instrumentos comuns e de fácil acesso, tais como um cronômetro, uma trena e uma balança.

O conceito básico do experimento é realizar um conjunto de medições geométricas e de períodos de oscilação a fim de estimar o momento de inércia experimental  $I$  de um corpo rígido utilizando a equação (2.39).

$$I = \frac{R^2 g}{4\pi^2} \left( \frac{m_1 T_1^2}{L_1} - \frac{(m_1 + m_2) T_2^2}{L_2} \right) \quad (5.2)$$

Para isso foi utilizada a bancada do pêndulo trifilar mostrada na Figura 5.1 do Laboratório de Vibrações do bloco G (UnB-FT/ENM/GDS). A mesma bancada foi utilizada por ??) que obteve resultados bem próximos dos esperados. Foram avaliadas as inércias de uma barra, de um rotor de uma turbina hidrocínética e de um rotor de uma turbina eólica.

Outro aspecto importante deste capítulo é que os experimentos foram realizados levando em consideração principalmente a avaliação das incertezas de modo que permitisse a correta utilização da metodologia ISO-GUM. A metodologia aplicada é a descrita no capítulo 4.

### 5.1.1 DESCRIÇÃO DA BANCADA

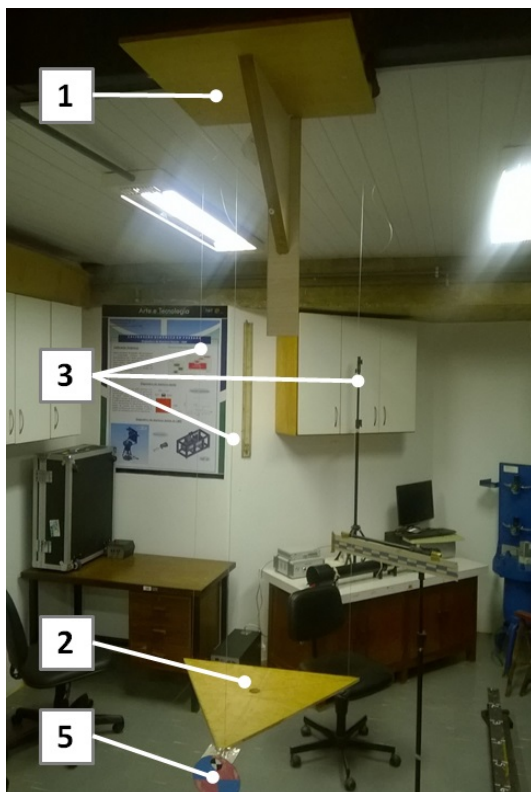
A bancada experimental foi desenvolvida e montada na própria Universidade de Brasília. Ela é mostrada na Figura 5.2 e é composta por:

1. Plataforma quadrada superior de madeira.
2. Plataforma triangular inferior de madeira.
3. Fios de náilon.
4. Parafusos.

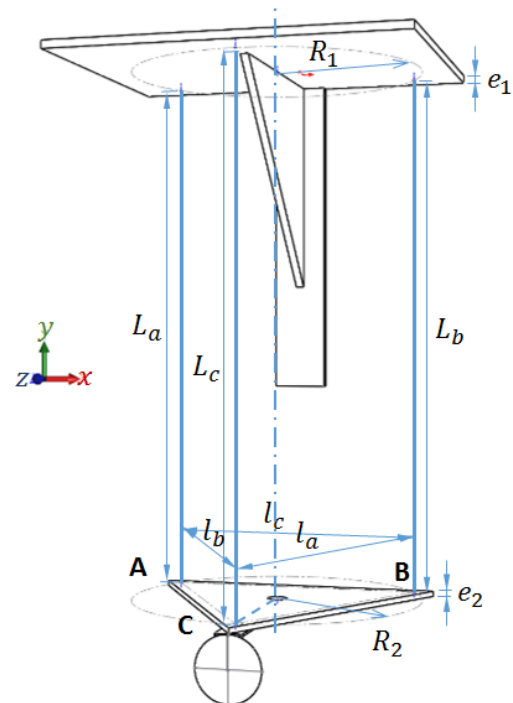


Figura 5.1 – Bancada do pêndulo trifilar.

5. Alvo para processamento de imagens.



(a) Foto da bancada experimental



(b) Representação da bancada experimental

Figura 5.2 – Modelo de pêndulo trifilar.

A Figura 5.2b mostra um esquema da bancada experimental e algumas das medições que devem ser realizadas no experimento: os comprimentos dos fios  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$ , as

distâncias entre os fios,  $l_a$ ,  $l_b$  e  $l_c$ , a massa da bancada  $m_1$  e os raios de giração  $R_1$ ,  $R_2$ .

A plataforma superior é montada em uma viga no teto do laboratório e é composta por uma base quadrada de madeira, com espessura nominal  $e_1 = 15 \text{ mm}$ , e por um conjunto de dois apoios parafusados à base superior, um retangular e um outro triangular. Eles têm as funções de auxiliar a montagem da plataforma ao teto e de servir como contrapeso para o correto posicionamento da plataforma.

A montagem ao teto foi feita utilizando um par de parafusos com arruelas fixando a base quadrada à uma viga no teto do laboratório. Para o correto posicionamento, foram colocados na parte da frente pequenos apoios de madeira entre a viga e a base. O peso na parte de trás da plataforma fica em balanço, e o ajuste da altura é feito ao se apertar e folgar cada um dos parafusos. Isso permite que se nivele a base superior na posição horizontal.

Há três furos de  $1 \text{ mm}$  por onde passam três fios de náilon que ficam presos na parte superior por nós e parafusos. Estes fios suspendem a plataforma triangular inferior e ficam presos na parte de baixo da plataforma também com nós e parafusos.

Os fios de náilon são fios de pesca de espessura nominal  $0,90 \text{ mm}$ . De acordo com a informação do fabricante estes fios suportam cargas de cerca de  $36,1 \text{ kgf}$ . Cada um dos fios possuem comprimento  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$ .

A plataforma inferior, é composta por uma base de madeira triangular de espessura nominal  $e_2$  igual a  $11 \text{ mm}$ . Essa base foi feita para ser um triângulo equilátero. Nela está fixado por fita adesiva um suporte de papelão e um disco circular que serve como alvo de referência para captura de imagens. Esta plataforma devidamente montada possui uma massa  $m_1$  e inércia  $I_1$ .

Na base inferior foi feito um furo com diâmetro nominal de  $3/4$  de polegada. Foram feitos também três furos de  $1 \text{ mm}$  nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  que deveriam ter a mesma distância entre eles, formando assim um triângulo equilátero de lados  $l_a$ ,  $l_b$  e  $l_c$  conforme a Figura 5.2b. Os furos na parte superior foram executados em um mesmo processo, onde as duas placas de madeira estavam juntas e presas por fixadores mecânicos. Portanto as distâncias  $R_1$  e  $R_2$  foram consideradas iguais a  $R$  ao longo de todo experimento.

As medições citadas foram realizadas e avaliadas segundo a ISO-GUM para que fossem avaliados os momentos de inércia de um corpo ensaiado na bancada.

## 5.2 ENSAIOS CRONOMETRADOS

Esta seção descreve o experimento realizado, a bancada experimental, os instrumentos, os ensaios propostos, as execuções dos experimentos e faz análises sobre o que deve ser medido e de que maneira. Além disso, são feitas proposições de correções e ajustes ao experimento para se obter melhores resultados.

O primeiro ensaio foi realizado sob as exatas condições em que a bancada se encontrava, no dia 26/04/2016, após um longo período de inatividade da mesma. Foi avaliada a inércia rotacional de uma barra. O objetivo deste ensaio era realizar um primeiro experimento que serviria de base para o desenvolvimento de outros possíveis ensaios. Ao final do experimento foram levantadas uma série de hipóteses sobre o que poderia ocorrer no experimento.

O ensaio consistiu em medir as grandezas de comprimento do experimento com uma trena. Realizar 5 repetições do experimento com a bancada vazia medindo com um cronômetro avaliando 10 períodos em cada repetição. Medir as massas da bancada suspensa  $m_1$  e da barra a ser avaliada  $m_2$ . Colocar o objeto na bancada e realizar outras 5 repetições de 10 períodos.

### 5.2.1 INSTRUMENTOS

Os instrumentos utilizados no ensaio preliminar estão relacionados na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Instrumentos utilizados no experimento 1.

<b>Instrumento</b>	<b>Marca</b>	<b>Tipo</b>	<b>Resolução</b>
Trena	Irwin	5m	1mm
Balança digital	Toledo 9094c/5		2g
Cronômetro	Celular Motorola Razr D2	App Stopwatch and Timer - Jupiter Apps	1ms
Paquímetro	Lee Tools	15 cm	0,02mm

### 5.2.2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Procedimentos experimentais realizados no ensaio preliminar:

1. Identificar e registrar data, hora, temperatura e a aceleração da gravidade do laboratório.
2. Separar, identificar e registrar os instrumentos experimentais a serem utilizados
3. Retirar a plataforma triangular do encaixe na base superior e coloca-la em posição de equilíbrio.
4. Observar se há algum tipo de erro na montagem da bancada.
5. Garantir que a plataforma esteja na posição horizontal. Efetuar os ajustes para a regulagem de altura de cada fio ajustando os nós fios aos parafusos na parte inferior da plataforma suspensa até que fique na posição horizontal. Usar um nível de bolha para garantir isso.

6. Medir os comprimentos dos fios  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$  com uma trena.
7. Medir os comprimentos das três medianas  $med_a$ ,  $med_b$  e  $med_c$  do triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  onde estão os fios.
8. Excitar a bancada dando dois toques leves e simultâneos nas pontas da base inferior de modo a obter o movimento de torção do pêndulo.
9. Aguardar o movimento oscilatório estabilizar.
10. Com um cronômetro, efetuar a medição do tempo que o pêndulo demora para executar 10 períodos completos,  $10T_1$ .
11. Repetir 5 vezes o anterior.
12. Medir a massa  $m_1$  da bancada suspensa com uma balança. É necessário leva-la até a posição do pêndulo e colocá-la sobre uma mesa plana. Se necessário utilize algum objeto para que a balança alcance a plataforma. Foram efetuadas 4 medições. Tare a balança antes da medição.
13. Medir a massa  $m_2$  do objeto a ter a inércia avaliada.
14. Posicionar o objeto na bancada com o seu centro de gravidade o mais próximo possível do centro geométrico da plataforma inferior
15. Com um cronômetro, efetuar a medição do tempo que o conjunto demora para executar 10 períodos completos,  $10T_2$ .
16. Repetir 5 vezes o passo anterior
17. Medir as dimensões da barra com um paquímetro.
18. Observar possíveis falhas no procedimento e na bancada.
19. Guardar os instrumentos, prender a base inferior ao suporte e efetuar análise inicial dos resultados obtidos

### 5.2.3 PRIMEIRAS AVALIAÇÕES E CORREÇÕES DO EXPERIMENTO

Foram observadas algumas falhas no experimento. Foi realizado um conjunto de correções.

- A bancada é suspensa por fios de pesca de náilon. Estes fios são altamente extensíveis. Quando foi realizado o procedimento 3. a bancada foi colocada na posição de equilíbrio, porém os fios estavam consideravelmente deformados e não se estendiam completamente.

*Correção realizada: Para que isso não influenciasse nos resultados, tentou-se esticar o fio que estava deformado apertando e deslizando um par de chaves de fenda contra*

o mesmo, fazendo um movimento de subida e descida nas regiões mais deformadas. O fio ficou mais esticado mas ainda estava um pouco deformado em algumas regiões.

- Os comprimentos dos fios variam quando se coloca um objeto sobre a bancada devido à extensibilidade dos fios. Não se notou isso inicialmente.

*Correção realizada: Foi incluído um passo entre os procedimentos 14 e 15 para que se reavalie o comprimento do fio quando um objeto for colocado sobre a bancada.*

- A medida individual dos comprimentos de cada fio  $L_k$  tiveram três valores diferentes, variando em 24 mm entre os máximos, indicando que a plataforma superior estava inclinada para um lado.

*Correção realizada: A bancada foi desmontada da viga superior e foi observado que um dos parafusos era muito grosso e curto, implicando em um difícil aperto e um curso pequeno. Os apoios que estavam entre a viga e a base quadrada eram diferentes entre eles. Trocou-se o parafuso por um mais fino e comprido e os apoios por outros mais finos com espessuras iguais. Com uma furadeira, foi aumentado o diâmetro por onde os parafusos precisavam passar na madeira. Com isso a plataforma se ajustou mais facilmente e permitiu uma regulagem mais simples e de maior qualidade. Passou-se a ser necessário apenas apertar ou folgar um pouco os parafusos para o ajuste da horizontalidade da bancada superior.*



(a) Ajuste em torno do eixo  $\hat{z}$



(b) Ajuste em torno do eixo  $\hat{x}$

Figura 5.3 – Ajustes na horizontalidade da plataforma superior.

- As massas medidas da plataforma apresentaram um valor que também variava bastante, e isso não era esperado. Observou-se que os três parafusos na parte inferior não possuíam uma posição bem definida, eles apenas eram colocados aproximadamente na posição e se dava um nó. Essa indefinição da posição do parafuso também influencia o resultado do período em cada um dos ensaios realizados. Quando se realizava uma medição do peso da plataforma, o parafuso algumas vezes ficava suspenso e em outras não, gerando um erro de medição.

*Correção realizada: Com uma furadeira, foram feitos pequenos furos na parte inferior da base com um diâmetro suficiente para poder rosquear o parafuso à madeira. Com isso se garante que os pesos dos parafusos são sempre avaliados.*





(a) Antes



(b) Depois

Figura 5.4 – Detalhe das montagens dos parafusos.

- O ensaio medindo os períodos com um cronômetro depende diretamente da habilidade do operador. Ele é de fácil execução e conforme se aumenta o número de períodos o resultado melhora. Porém ele depende do operador e não é capaz de informar muitas outras coisas sobre o experimento.

*Correção realizada: Para ter uma melhor avaliação do que ocorria durante o experimento, foi definido que os ensaios seriam filmados e as imagens processadas com o programa CV Mob. Este programa é capaz de retornar uma série de dados a respeito da trajetória, velocidade e aceleração de um ponto filmado.*

- Uma primeira análise concluiu que a incerteza relacionada às distâncias  $R_i$  dos fios ao centro de gravidade poderia ter forte influência no resultado experimental.

*Correção realizada: A plataforma inferior foi desmontada e levada ao laboratório de metrologia, onde foram realizadas medições das distâncias entre os furos com uma braço articulado de medição por coordenadas, a partir daí, foram recalculadas as distância  $R_i$ .*



(a) Medições da plataforma inferior



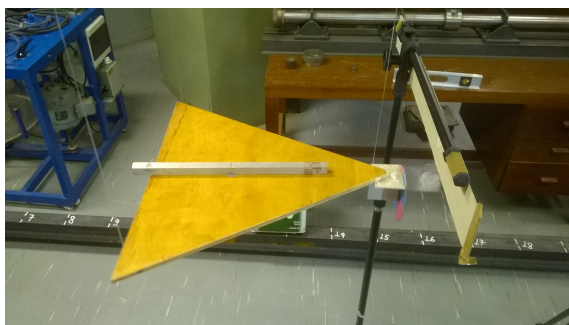
(b) Braço articulado Arm 100 - Romer

Figura 5.5 – Medidas da bancada realizadas no laboratório de metrologia.

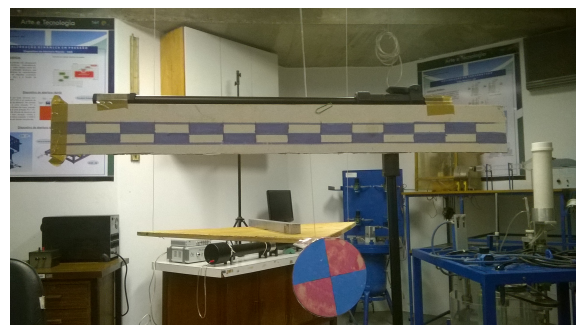
### 5.3 ENSAIOS FILMADOS

Após as correções na bancada e adoção de novos procedimentos foram realizados uma série de outros ensaios. O objetivo era obter ainda mais conhecimento sobre o experimento e levantar mais informações sobre as incertezas presentes. O conjunto dos diferentes ensaios realizados estão listados a seguir:

- Medição da inércia rotacional de uma barra. Foi realizado o mesmo ensaio preliminar cronometrado, porém com um procedimento filmado para avaliar a inércia da mesma barra e sua incerteza. Conforme a figura 5.6.



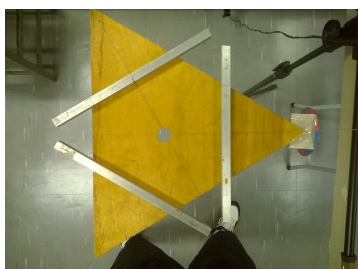
(a) Barra I sobre a bancada



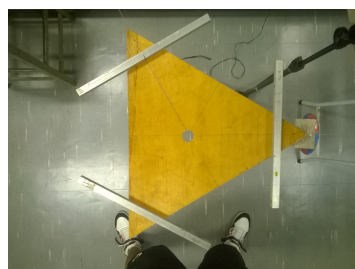
(b) Experimento realizado com a barra I

Figura 5.6 – Ensaio de uma barra I.

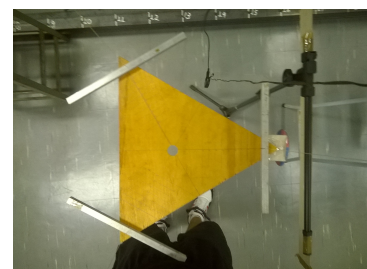
- Efeitos que a distância da câmera ao alvo tem sobre o sinal obtido. Foram realizados alguns ensaios partindo da hipótese de que a ótica do sistema poderia afetar o sinal obtido nos vídeos.
- Efeitos da variação da inércia. Foram fixados os parâmetros  $L$  e  $m_2$  ao se colocar três barras semelhantes, igualmente espaçadas entre elas, e foram variadas as distâncias do centro de gravidade  $r$  conforme a Figura 5.7. Essa mudança afeta diretamente os períodos de oscilação. Pretende-se avaliar como isso afeta os resultados.



(a)  $r = 15$  cm



(b)  $r = 24$  cm



(c)  $r = 28$  cm

Figura 5.7 – Vista superior do experimento com três barras.

- Relação entre a frequência pendular e a frequência torcional do pêndulo. Ao longo dos ensaios, foi observada uma frequência no espectro que se mantinha quase sempre



constante. Foram feitos um conjunto de ensaios para avaliar se existia alguma relação explícita entre essa frequência e a frequência de movimento torcional. Este mesmo experimento também avaliou como massas grandes afetam a bancada.

- Ensaio da pá eólica. Para uma avaliação prática, a pá eólica foi ensaiada sobre a bancada para que fosse determinado o seu momento de inércia.

### 5.3.1 INSTRUMENTOS

Nestes ensaios foram utilizados os seguintes instrumentos:

Tabela 5.2 – Instrumentos utilizados nos ensaios posteriores.

Instrumento	Marca	Tipo	Resolução
Trena	Brasfort	3m	1mm
Balança digital	Toledo	9094c/5	2g
Paquímetro	Lee Tools	15 cm	0,02mm
Câmera	Celular Microsoft Lumia 532	app câmera	1/30s
Braço articulado de medição por coordenadas	Romer	Arm 100	-

O braço artilulado possui uma incerteza expandida de  $60 \mu m$  com probabilidade de abrangência de 95% e fator de abrangência  $k = 2,28$

### 5.3.2 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os procedimentos experimentais realizados nos ensaios filmados bem semelhantes aos dos ensaios cronometrados, mudando principalmente o modo de medição e alguns detalhes, como o corpo a ser colocado sobre a bancada, e o modo de excitação.

1. Identificar e registrar data, hora e temperatura do laboratório.
2. Separar, identificar e registrar os instrumentos experimentais a serem utilizados.
3. Retirar a plataforma triangular do encaixe na base superior e coloca-la em posição de equilíbrio.
4. Observar se há algum tipo de erro na montagem da bancada.
5. Com uma balança medir a massa  $m_1$  da bancada suspensa. É necessário leva-la até a posição do pêndulo e colocá-la sobre uma mesa plana. Caso necessário utilize algum objeto para que a balança alcance a plataforma. Efetue a tara da balança antes da medição. Efetue uma série de medições e observe se ocorrem variações significavas. Foram efetuadas 4 medições.

6. Medir as massas  $m_2$  dos corpos a serem ensaiados.
7. Devolver a mesa e a balança para aos locais de origem.
8. Certificar e garantir que tanto a plataforma inferior quanto a superior estejam na posição horizontal. Efetuar os ajustes para a regulagem de altura de cada fio apertando ou folgando os parafusos sob a plataforma até obter uma horizontalidade satisfatória.
9. Montar o referencial de calibração ao suporte. Posiciona-lo com cuidado para que ele fique no mesmo plano vertical do alvo, ortogonal ao eixo de visão da câmera, o mais centralizado possível à imagem da câmera.
10. Montar a câmera em um suporte na posição horizontal. Posicionar de frente para o alvo a uma distância suficiente para que se possa observar toda a escala do referencial de calibração. Quando possível, garanta que a câmera fique na mesma altura do alvo da bancada. Mantenha a imagem do alvo centralizada na tela da câmera. Utilize alguma função de grade de enquadramento de mira para auxiliar no ajuste caso o aparelho possua essa função.
11. Meça a distância da câmera ao alvo.
12. Deixar a bancada livre ou colocar o objeto/conjunto de objetos a serem ensaiados sobre ela, conforme o tipo de ensaio a se realizar. O objeto deve ser colocado com o seu centro de gravidade o mais próximo possível do centro geométrico da plataforma inferior.
13. Medir os comprimentos dos fios  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$  com uma trena.
14. Excitar a bancada dando dois toques leves e simultâneos nas pontas da base inferior de modo a obter o movimento de torção do pêndulo com pequenos ângulos.
15. Aguardar o sistema estabilizar o movimento oscilatório torcional. Caso o movimento translacional do pêndulo esteja muito forte, é possível amortecer-lo com algum objeto ou com o dedo através do furo central sem atrapalhar o movimento torcional.
16. Filmar o ensaio por um intervalo de 30 a 90 segundos. (este intervalo está definido desta maneira, para que se realize uma avaliação posterior do tempo adequado de filmagem)
17. Repetir os passos 13. a 18. por uma quantidade  $n$  de ensaios. É importante tomar cuidado para não alterar as condições de filmagem e de calibração durante estes ensaios.
18. Medir as propriedades geométricas do objeto.
19. Observar possíveis falhas no procedimento e na bancada.

20. Guardar os instrumentos, prender a base inferior ao suporte e efetuar análise inicial dos resultados obtidos

### 5.3.3 AVALIAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O EXPERIMENTO FILMADO

Nos vídeos foi possível observar alguns detalhes sobre o comportamento dinâmico do sistema. A partir dos sinais obtidos é possível avaliar o espectro de potência e observar as frequências presentes.

As principais observações realizadas estão descritas nessa seção.

#### 5.3.3.1 ANÁLISE DOS SINAIS

Com o intuito de avaliar a informação contida nos sinais, foi aplicado o Método de Welch para obter as densidades espectrais de potência de cada sinal.

Uma primeira impressão foi de que o que estava contido nos espectros de potência não tinham muitas informações a respeito das frequências. A frequência de amostragem da câmera é relativamente baixa, 30 Hz, e os intervalos de tempo filmados eram relativamente curtos. Isso resultava em um espectro com pouca resolução conforme a Figura 5.8a. Tanto os espectros obtidos na janela retangular quanto na janela Hanning continham alguns picos, mas não era possível avaliar exatamente as frequências nas quais eles ocorriam.

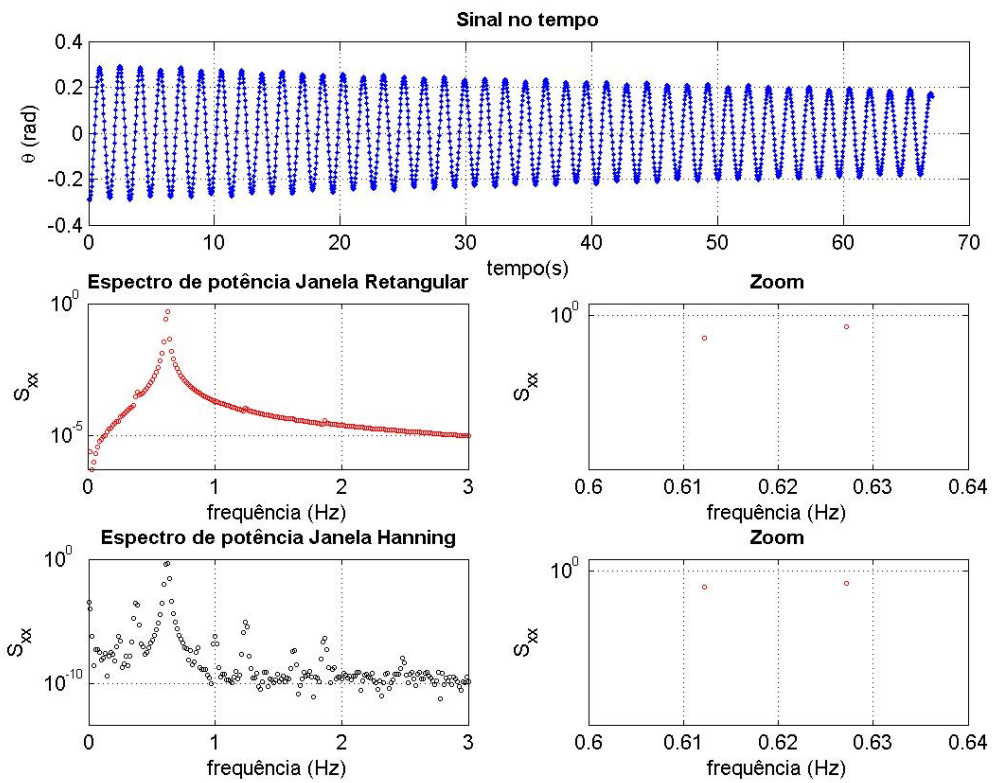
Os vídeos eram de tamanhos diferentes. Uma primeira tentativa realizada foi tentar cortar os sinais deixando-os do mesmo tamanho e tirar uma média entre eles. Porém isso não fazia diferença nenhuma nas frequências observadas. Somavam-se os sinais com baixa resolução e se obtinham densidades espectrais na mesma resolução. Além disso cortar todos os sinais obtidos de modo a torná-los do mesmo tamanho levaria a uma perda de informação indesejada.

Tentou-se também correlacionar os sinais de X e Y, mas os resultados eram semelhantes. A adição de zeros ao sinal também não foi eficaz.

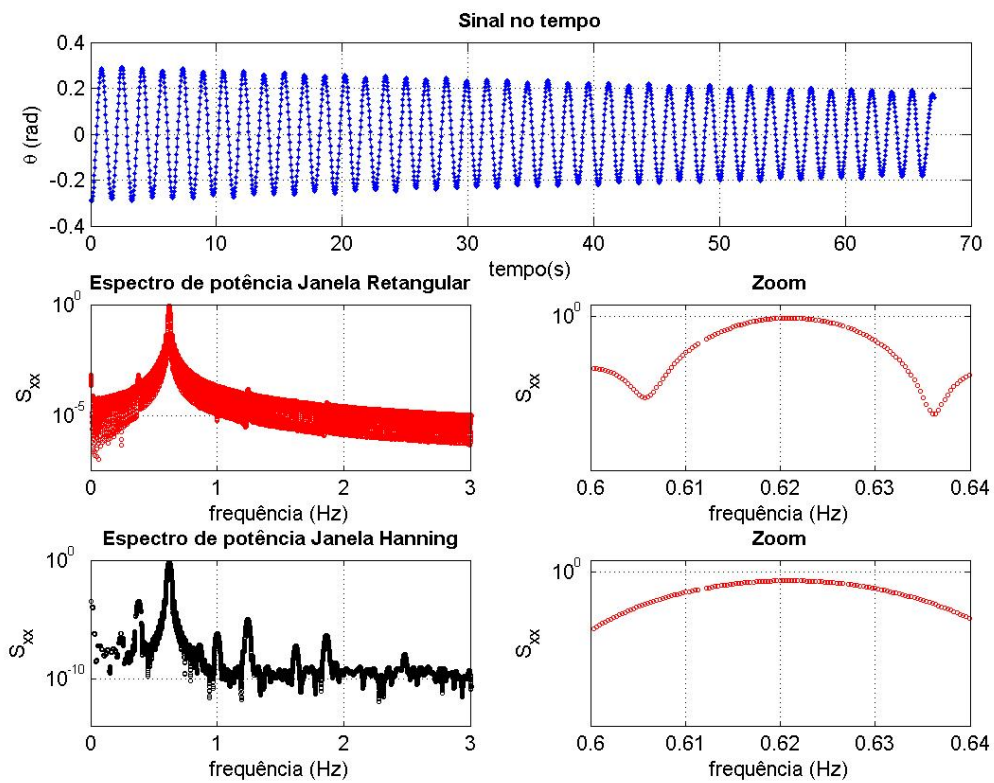
A solução adotada, foi criar um laço no programa MATLAB que cortava o último dado do sinal a cada iteração. Com isso o sinal era janelado de várias maneiras e seus respectivos gráficos eram plotados na mesma figura. O resultado está demonstrado na Figura 5.8.

O laço guardava o vetor com o maior pico e sua respectiva frequência. O intuito era janelar um sinal específico contendo um número de períodos próximo a um valor inteiro, assim, aconteceria o melhor janelamento do sinal e aquele pico teria a maior amplitude entre as frequências observadas.

Nos espectros se observou claramente a presença um pico em uma frequência principal, um segundo pico, praticamente constante para qualquer corpo ensaiado, e alguns



(a) 1 iteração



(b) 46 iterações

Figura 5.8 – Sinal e sua Densidade Espectral de Potência.

harmônicos da frequência principal. Esta frequência foi adotada para estimar os períodos dos sinais. Uma comparação com as frequências obtidas na ferramenta CFTools está mostrada na tabela 5.3.

Ensaio	01	02	03	04	05	06	07	08
$f_{PSD}$	0,6207	0,6221	0,6226	0,6217	0,6218	0,6220	0,6212	0,6188
$f_{CFTool}$	0,6209	0,6225	0,6230	0,6222	0,6222	0,6222	0,6215	0,6195
$f_{PSD}/f_{cftool}$	1,0003	1,0006	1,0006	1,0008	1,0006	1,0003	1,0005	1,0011

Tabela 5.3 – Comparação dos períodos obtidos no CFTools e na PSD.

Uma tendência observada é que para um conjunto de sinais sob as mesmas condições, os picos com maior amplitude possuíam uma frequência levemente mais baixa que os picos de menor amplitude. Esta observação foi levada em consideração mais adiante para avaliar a tendência da estimativa  $T$ .

A presença da frequência translacional no espectro é outro fato a se destacar. Podem ocorrer situações onde os dois picos estão muito próximos, com isso a frequência de interesse sofreria algum tipo de interferência. Além disso, esta frequência possui relação direta com os parâmetros geométricos do sistema. Uma melhor avaliação dela pode levar a determinação destes parâmetros e não seriam necessárias algumas medições.

### 5.3.3.2 EFEITOS DO POSICIONAMENTO DA CÂMERA

Todo o conjunto de dados dos ensaios com a bancada vazia foram obtidos a partir dos 8 ensaios especificados na tabela 5.4.

Ensaio	Distância da câmera(m)	Camera utilizada	Resolução
1, 2, 3, 4	0,64	Celular Lumia 532	30
5, 6, 7	1,96	Celular Lumia 532	30
8	0,62	Câmera digital Nikon D90	30

Tabela 5.4 – Condições dos ensaios.

Os sinais obtidos e seus espectros de potência estão mostrados no anexo ??

Na Figura 5.9 estão os frames dos vídeos ilustrando a condição de cada ensaio.

Os sinais dos ensaios 5, 6 e 7 aparentaram ter um maior amortecimento. Um ajuste dos picos revela que este amortecimento é no mínimo 2 vezes maior que os outros sinais. Por outro lado o formato do sinal é semelhante nos três casos.

A partir disso levantou-se duas hipóteses. Uma que o sinal estava com pouca resolução devido a variação de perspectiva. Outra seria de que o amortecimento realmente era maior e que os picos estavam sendo achatados devido a algum efeito ótico quando o vídeo é analisado de perto. As duas situações são mostradas na Figura 5.10



(a) Câmera próxima - Ensaios 1, 2, 3 e 4

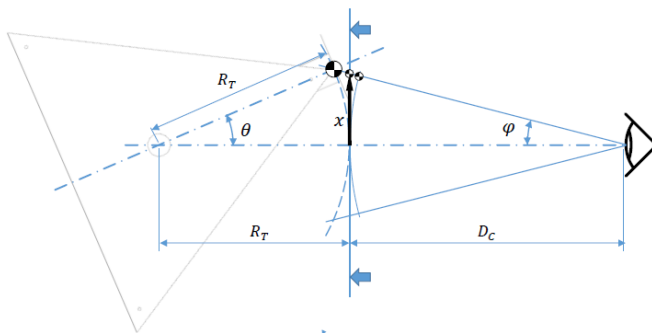


(b) Câmera distante - Ensaios 5, 6 e 7

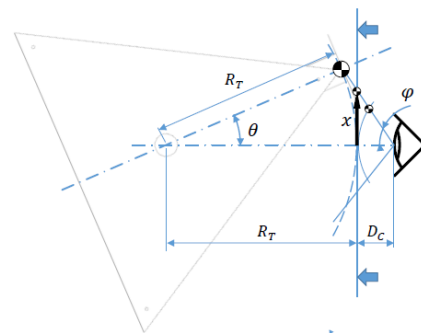


(c) Outra câmera - Ensaio 8

Figura 5.9 – Perspectivas de cada ensaio.



(a) Câmera distante



(b) Câmera próxima

Figura 5.10 – Efeitos da perspectiva da câmera.

Os sinais obtidos em  $X$  pelo CvMob foram convertidos em sinais em  $\theta$  com as seguintes considerações:

- A partir da entrada dos dados na calibração o conjunto software e câmera percebe a imagem como um plano perfeito. A partir disso se obtém a trajetória.
- O eixo central da câmera fica perfeitamente alinhado com o alvo.
- São conhecidas as distâncias  $R_T$  e  $D_c$ .

A partir da geometria da Figura 5.10 se estabeleceu uma relação entre  $\theta$  e  $x$ :

$$\varphi = \tan^{-1}(x/D_c) \quad (5.3)$$

da lei dos senos:

$$\frac{R_t + D_c}{\sin(\pi - \varphi - \theta)} = \frac{R_t}{\sin \varphi} \quad (5.4)$$

$$\sin(\pi - \varphi - \theta) = \frac{R_t + D_c}{R_t} \sin \varphi \quad (5.5)$$

$$\sin(\varphi + \theta) = \frac{R_t + D_c}{R_t} \sin \varphi \quad (5.6)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{R_t + D_c}{R_t} \sin \varphi \right) - \varphi; \quad (5.7)$$

Substituindo 5.3 em 5.7 obtêm-se a relação explícita entre  $\theta$  e  $x$ .

Estas equações foram aplicadas ao sinal  $x$  para se obter uma estimativa mais real do deslocamento angular  $\theta$ .

Um fato interessante a se notar é o efeito dessa mudança sobre as densidades espectrais de potência. Esta correção eliminou alguns harmônicos, conforme indica a Figura 5.11. Indicando que eles apareciam por alguma relação da perspectiva da câmera.

Uma interpretação feita é de que os picos estavam sendo disfarçados pelo efeito da perspectiva do movimento. Devido a isso, apareciam frequências múltiplas da frequência fundamental com baixa amplitude, de maneira similar o que se espera ver em uma série de Fourier que aproxima uma onda quadrada.

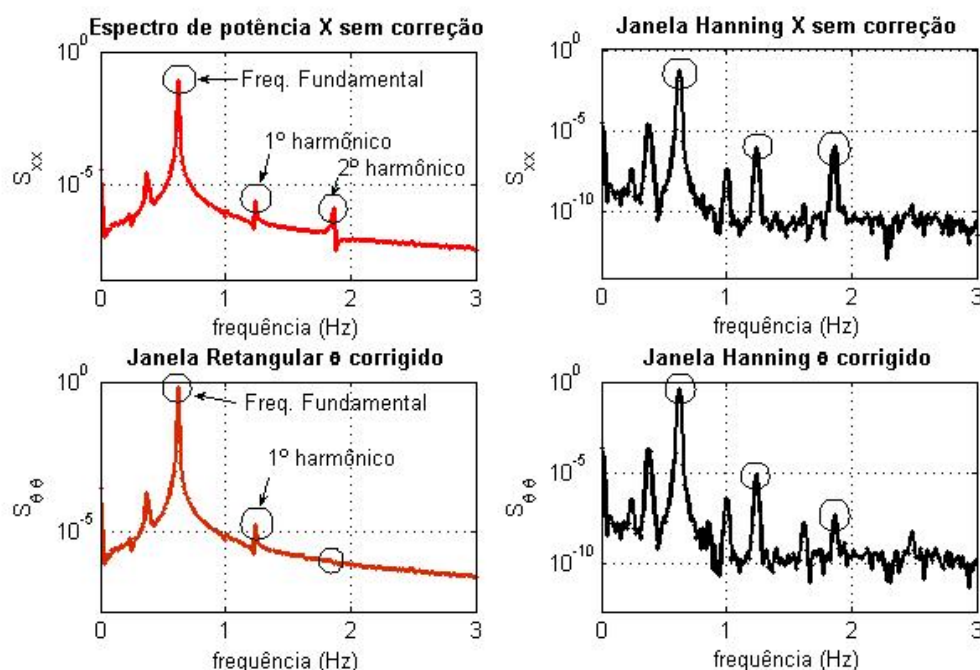


Figura 5.11 – Efeito da ótica sobre o sinal.

Como o pêndulo trifilar é um sistema com apenas três graus de liberdade, os harmônicos realmente não deveriam aparecer no espectro do movimento de  $\theta$ . Com isso, a



presença dos harmônicos no espectro corrigido pode ser uma maneira de avaliar o quanto um sinal representa bem o movimento real do sistema.

Os espectros dos vídeos realizados de longe continham muito ruído. Indicando que provavelmente ele não é uma boa representação do movimento real do sistema. A forma do sinal parece sofrer o mesmo tipo de corte devido à baixa resolução nos três ensaios. Porém o vídeo ainda foi bom para estimar as frequências do sistema.

Outro fator que pode ser observado é com relação ao ensaio 8. A câmera possui um tipo de lente que aparentemente distorce muito mais a imagem do que a câmera dos outros ensaios. No CvMob não há nenhuma opção de calibração para o tipo de lente que é usada e isso pode distorcer um sinal. O nível de ruído no sinal desta câmera foi maior que nos outros ensaios realizados em uma mesma distância. Provavelmente a correção aplicada não serve para este ensaio.

Dos dados analisados se conclui ser melhor filmar de perto do que filmar de longe, bastando para isso aplicar as devidas correções aos efeitos de perspectiva da filmagem.

### 5.3.3.3 EFEITOS DE PESO SOBRE A BANCADA

Alguns ensaios em vídeo foram realizados para observar o efeito da movimentação translacional do pêndulo. Não se concluiu nada além do que foi observado nos espectros com relação à essa frequência em específico. Porém, uma característica da bancada inesperada e importante apareceu. Os comprimentos  $L$  de cada um dos fios estavam aumentando durante o ensaio dinâmico, fato que não estava sendo levado em consideração durante a formulação do problema.

Estes ensaios foram realizados com cargas mais elevadas do que as das barras. Cargas de 5kg e 10 kg. Foram medidos os comprimentos dos fios antes e depois de 5 ensaios com cada peso. Observou-se que o comprimento medido do fio antes do ensaio não era o mesmo que depois do ensaio. Havia uma variação de cerca de 20  $mm$  entre as duas medições. Algo durante o experimento variou o comprimento  $L$  dos fios. Isso implica em uma variação significativa dos períodos  $T$  em cada ensaio. Como o período é o principal parâmetro do experimento, ensaios com grandes cargas obtinham resultados com erro, pois a estimativa dos períodos não condizia com o comprimento do fio que deveria ser constante para uma série de ensaios.

Os vídeos foram analisados e se observou uma variação de  $y$  conforme acontecia o experimento até que ele se estabilizasse. A figura 5.12 mostra o comportamento de  $y$  relativo a sua posição inicial de quando começa o vídeo. É possível notar, ao longo dos sucessivos ensaios, uma diferença entre a posição  $y$  inicial e  $y$  final em cada um dos ensaios. Essa diferença se soma sucessivamente até resultar nos 20  $mm$  observados na medição do comprimento do fio. Como cada ensaio possui um comprimento de fio característico diferente um do outro, os períodos tendem a ser diferentes, e a média não corresponde à



melhor estimativa de  $T$ .

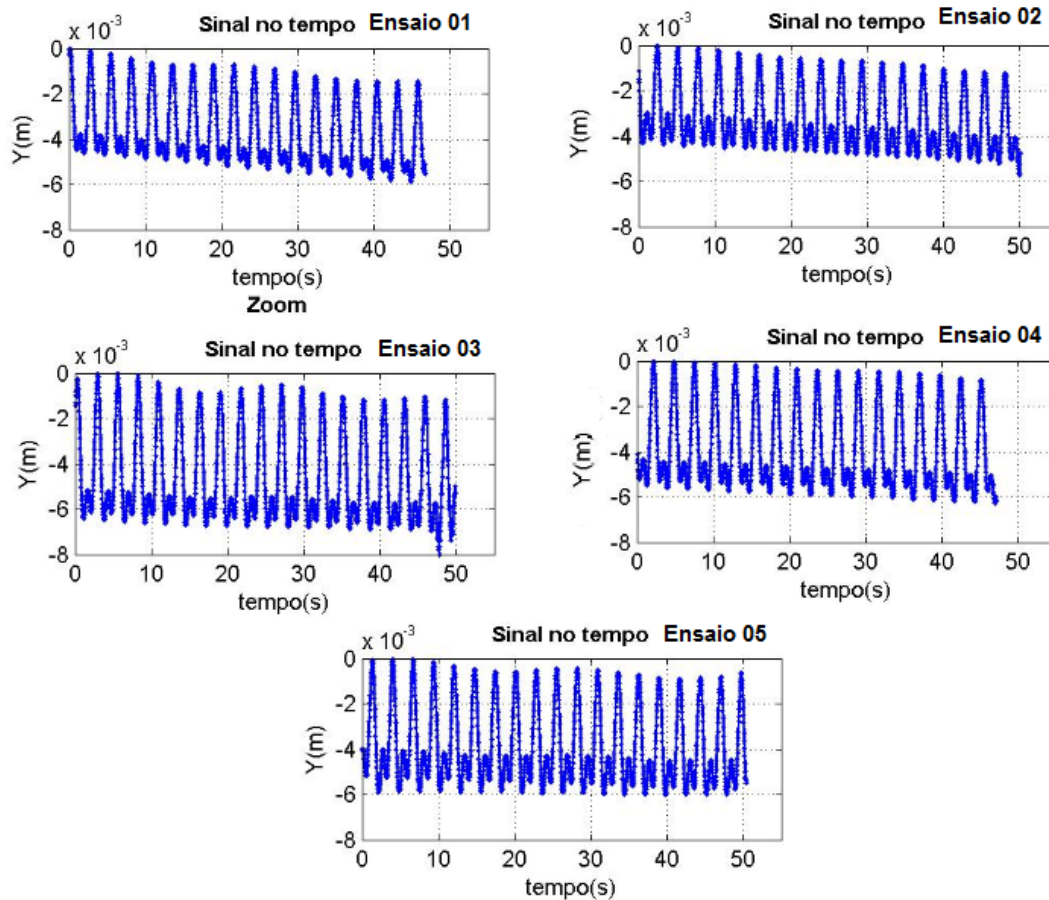


Figura 5.12 – Efeito do peso sobre o comprimento do fio.

### 5.3.4 EFEITOS DA AMPLITUDE DO MOVIMENTO SOBRE A AVALIAÇÃO DO PERÍODO

As avaliações da perspectiva da câmera permitiram obter sinais mais confiáveis sobre o movimento do pêndulo. A partir disso, foi feita uma avaliação dos períodos presentes no sinal, observando as sucessivas medições de período pico a pico e realizando uma média de um número de sinais.

Observando o que acontece com a função não linear no ponto onde  $R/L = 0,170$  é possível notar que a aproximação de primeira ordem fica cada vez pior conforme se aumenta a amplitude do movimento. As figuras 5.14 e 5.13 evidenciam a razão entre a função não linear e as suas aproximações de 1ª e 3ª ordem.

Outro detalhe que também deve ser destacado na figura 5.13, é que, embora a solução de primeira ordem seja uma boa aproximação para pequenos ângulos, equivalendo a 99,9% para ângulos até  $4.2^\circ$ , ela só é absolutamente verdadeira para  $\theta = 0^\circ$ . Por outro lado a solução de terceira ordem, parece ser praticamente idêntica à função original para amplitudes de movimento do pêndulo de até  $\theta \approx 20^\circ$ .

Nota-se que a aproximação de primeira ordem aproxima menos a função conforme a amplitude do movimento aumenta. Isso implica que os períodos observados podem não ser necessariamente os esperados conforme a eq (2.39). Isso pôde ser observado nos dados contidos na figura 5.15, conforme a amplitude do movimento diminuía, havia uma tendência dos períodos medidos a se estabilizarem em torno de um valor. Porém antes disso, com a amplitude maior, esses períodos eram ligeiramente maiores, fato que decorre da não linearidade do sistema.

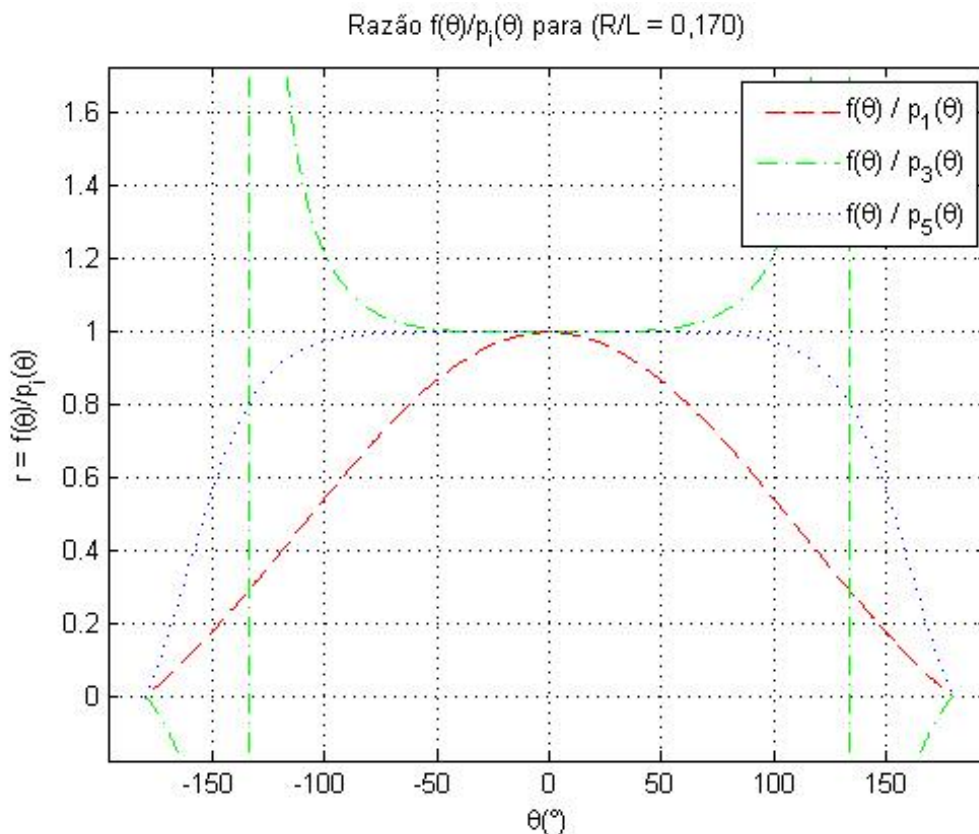


Figura 5.13 – Comparação entre  $f(\theta)$  e suas aproximações de 1ª, 3ª e 5ª ordem.

Depreendeu-se disso, que deveriam ser realizados ensaios com amplitude de movimento torcional inferior a  $5^\circ$  nos ensaios posteriores.

### 5.3.5 PROPOSIÇÕES DE MODIFICAÇÃO NA BANCADA

Com os resultado qualitativos obtidos dos ensaios em vídeo, foram propostas outras correções para a bancada. A proposta inicial adotada foi a de desenvolver um mecanismo de fácil ajuste de altura e que pudesse apertar o fio, eliminando a folga.

Tentou-se adaptar um mecanismo de uma lapiseira 0.9 conforme a figura 5.16, que seria rosqueada na posição dos furos e seria capaz de prender os fios ao se ativar e travar o sistema, semelhante a um ajuste de comprimento de um grafite na mesma lapiseira. Uma vez que o fio estivesse na posição adequada seria colocada uma trava no sistema que apertaria ainda mais o fio, e o impediria de descer.

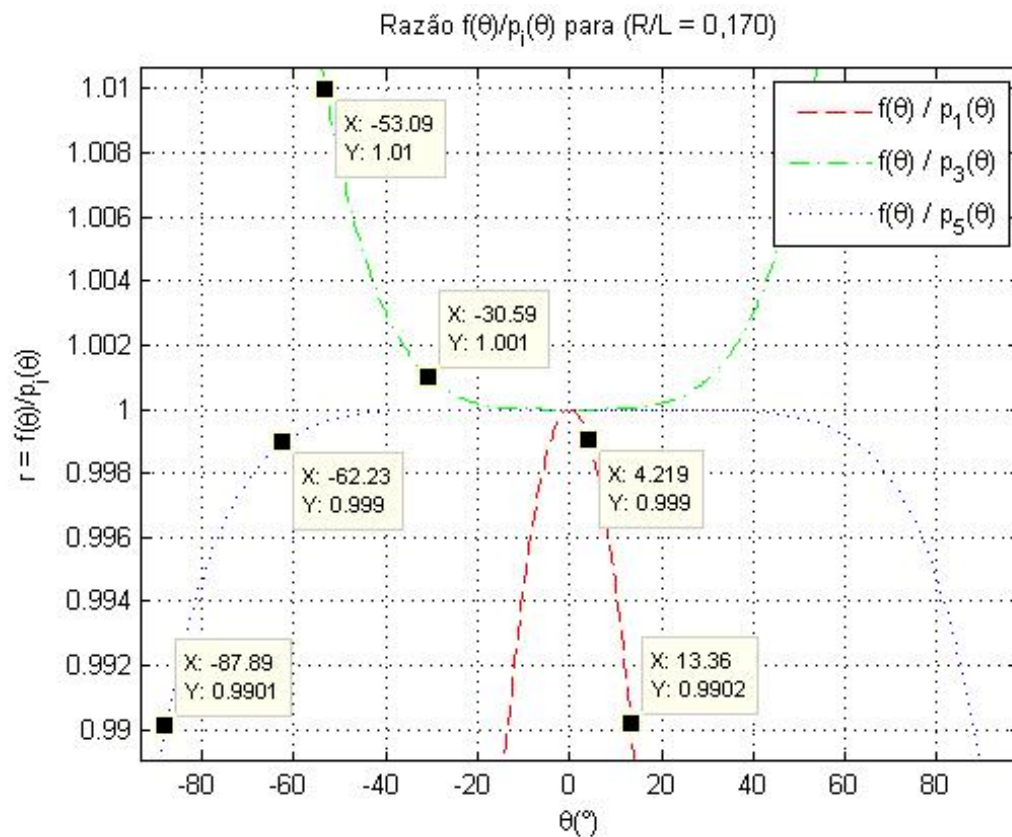


Figura 5.14 – Detalhe da razão entre  $f(\theta)$  e suas aproximações.

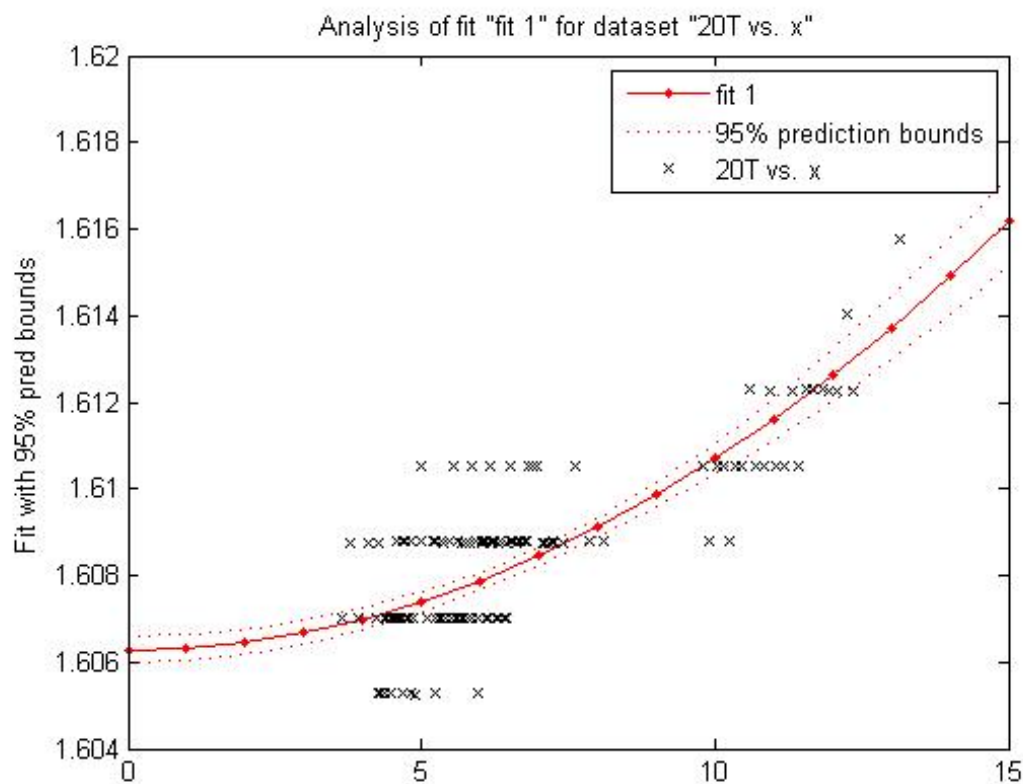


Figura 5.15 – Efeito da amplitude sobre a medição do período



(a)



(b)

Figura 5.16 – Proposta de mecanismo de travamento.

Esse sistema encontrou dificuldades técnicas na montagem. A madeira do protótipo era mais macia que a das bancadas e possibilitava de a trava entrar com uma certa interferência, mas sem danificar o mecanismo da lapiseira. Na montagem dos mecanismos à bancada, o encaixe das travas forçava muito o mecanismo da lapiseira, e estes se quebraram na maioria dos casos.

Foi então proposta uma outra solução, que pretendia eliminar os efeitos elásticos do náilon, a aparente fluência dele, e a folga no furo. Foi então trocado o fio por um fio de varal, ligeiramente mais grosso, e feita de aço internamente. O fio passou pelos furos com uma certa dificuldade, indicando a redução da folga.

Uma segunda bancada também foi montada, utilizando um fio de pesca de aço muito fino e leve. Os furos desta bancada foram feitos com brocas  $0,5\text{ mm}$  tentando-se minimizar a incerteza da posição que o fio ocupava.

## 6 ENSAIOS FINAIS

A partir dos resultados observados no capítulo anterior, foram realizados mais um conjunto de ensaios para avaliar as inércias rotacionais de corpos sobre o pêndulo trifilar.

Foi utilizada uma metodologia onde seria possível cronometrar e filmar o experimento ao mesmo tempo. Esta metodologia e seus resultados estão descritos neste capítulo.

Para reduzir os efeitos gerados a partir das não-linearidades do sistema tomou-se cuidado em garantir que fossem realizados ensaios com amplitudes inferiores a  $5^\circ$ . Estes efeitos influenciavam diretamente no períodos observados, com isso, espera-se diminuir a incerteza associada à variância dos períodos medidos.

Espera-se avaliar o quanto as medições do cronômetro e dos ensaios em vídeo podem ser diferentes entre si. Essa comparação se fazia necessária devido à presença de outras frequências acontecendo simultaneamente no sistema, advindas das translações nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Deseja-se comparar as duas medições. Além disso, os resultados obtidos com o cronômetro eram relativamente bons e demandavam muito menos tempo para processamento dos dados.

Foram feitos dois tipos de experimento. Em um deles variava-se o momento de inércia a partir da mudança da posição de três barras com momento de inércia conhecido. Se obtiveram os momentos de inércia de algumas posições e a incerteza associada. Em seguida o experimento avaliou o exemplo prático de uma pá eólica. Foram determinados o momento de inércia e a incerteza associada.

### 6.1 EXPERIMENTO COM 3 BARRAS

O experimento com as três barras consiste no princípio básico de calcular a diferença entre a inércia da bancada vazia e a inércia da bancada carregada.

Ele foi realizado com o intuito de se obter um referencial para a avaliação da pá eólica. A partir deste ensaio, seria possível observar o modo como o erro associado e a incerteza experimental variavam conforme um conjunto de corpos de massa pequena aumentava a sua inércia. Assim, conforme as barras aumentavam o seu momento de inércia, elas ficam mais semelhantes à pá eólica testada, que possuía grande momento de inércia e uma massa relativamente pequena. Essa avaliação comparativa serve também

para a validação dos resultados obtidos, uma vez que a pá eólica não possui um modelo ao qual se possa comparar os resultados.

Para isso, foi proposto um experimento filmado e cronometrado ao mesmo tempo, avaliando um conjunto de barras semelhantes e em diferentes posições sobre a bancada experimental.

Inicialmente mede-se a inércia da bancada vazia. Em seguida, as três barras são dispostas em posições variadas sobre a bancada conforme a Figura 6.1, variando-se assim o momento de inércia  $I_{IJK}$  do conjunto sobre a bancada. Com isso as massas  $m_2$  e os comprimentos dos fios  $L_2$  seriam constantes. Espera-se obter outros períodos  $T_2$  para cada posição  $r$  que as barras ocupam.

A figura 6.1 ilustra as medidas que foram consideradas para a determinação analítica das inércias das barras. O comprimento  $d$  é o parâmetro de entrada do experimento. Ele foi desenhado sobre a bancada com variações de 2 cm entre cada posição. Os desenhos sobre a bancada foram feitos com esquadros, régua e uma lapizeira 0,9 mm. Devido às imprecisões na escala e também no posicionamento de cada barra, foi atribuída uma incerteza às posições das barras, dada por  $u(r)$ .

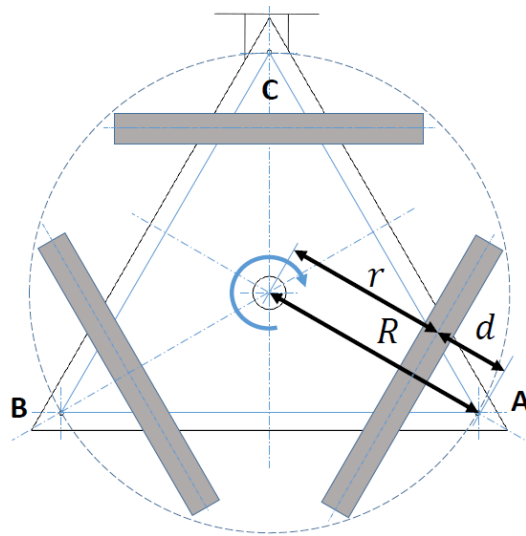


Figura 6.1 – Medidas de  $r$  realizada no ensaio posterior.

### 6.1.1 MATERIAIS

Foram utilizadas três barras de alumínio conforme a Figura 6.2. Elas foram identificadas ao longo do experimento como barras  $I$ ,  $J$  e  $K$ . Os parâmetros medidos de massa  $m$ , altura  $a$ , largura  $b$  e comprimento  $c$  de cada uma estão mostradas na tabela 6.1.

As três barras possuem massas e características geométricas muito semelhantes. Para os ensaios descritos nesta seção, considerou-se que os centros de gravidade das barras ficaria exatamente no centro geométrico das três barras. Para realização dos cálculos, as





Figura 6.2 – Barras IJK utilizadas no experimento

Tabela 6.1 – Dados experimentais das barras

Barra	I	J	K
a [m]	0,0190	0,0190	0,0190
b [m]	0,0190	0,0190	0,0190
c [m]	0,398	0,399	0,3965
m [kg]	0,38707	0,38590	0,38542

inércias analíticas de cada barra e suas respectivas incertezas foram calculadas individualmente e somadas utilizando a metodologia ISO-GUM.

## 6.1.2 INSTRUMENTOS

Nestes ensaios foram utilizados os instrumentos presentes na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Instrumentos utilizados nos ensaios finais

Instrumento	Marca	Tipo	Resolução
Trena	Brasfort	3m	1mm
Balança digital	Ohaus	Adventurer ARD110	0,01g
Paquímetro	Lee Tools	15 cm	0,02mm
Câmera	Celular Microsoft Lumia 532	app câmera	1/30s
Cronômetro	Celular Samsung	app StopWatch	0,01s
Braço articulado de medição por coordenadas	Romer	Arm 100	-

O braço articulado possui uma incerteza expandida de  $60 \mu m$  com probabilidade de abrangência de 95% e fator de abrangência  $k = 2,28$

## 6.1.3 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Os procedimentos experimentais deste ensaio são semelhantes aos dos ensaios do capítulo anterior. Porém este procedimento inclui a realização da medição tanto por vídeo quanto por cronômetro ao mesmo tempo. A câmera também foi posicionada bem próxima ao alvo de referência  $\approx 20 \text{ cm}$ . Tomou-se o cuidado de evitar ângulos superiores à  $5^\circ$ .

1. Identificar e registrar data, hora e temperatura do laboratório.

2. Separar, identificar e registrar os instrumentos experimentais a serem utilizados.
3. Retirar a plataforma triangular do encaixe na base superior e colocá-la em posição de equilíbrio.
4. Observar se há algum tipo de erro na montagem da bancada.
5. Com uma balança medir a massa  $m_1$  da bancada suspensa. É necessário leva-la até a posição do pêndulo e colocá-la sobre uma mesa plana. Caso necessário utilize algum objeto para que a balança alcance a plataforma. Efetue a tara da balança antes da medição. Efetue uma série de medições e observe se ocorrem variações significativas. Foram efetuadas 4 medições.
6. Medir as massas  $m_I$ ,  $m_J$  e  $m_K$  das respectivas barras  $I$ ,  $J$  e  $K$ .
7. Devolver a mesa e a balança para aos locais de origem.
8. Certificar e garantir que tanto a plataforma inferior quanto a superior estejam na posição horizontal. Efetuar os ajustes para a regulagem de altura de cada fio.
9. Montar a câmera em um suporte na posição horizontal. Posiciona-la de frente para o alvo a uma distância suficiente para que se possa observar o diâmetro do alvo inteiro no vídeo. Ele será o parâmetro para calibração do CvMob. Quando possível, garanta que a câmera fique na mesma altura do alvo da bancada. Mantenha a imagem do alvo centralizada na tela da câmera. Utilize alguma função de grade de enquadramento de mira para auxiliar no ajuste caso o aparelho possua essa função.
10. Medir a distância da câmera ao alvo.
11. Deixar a bancada livre ou então colocar o conjunto de objetos a serem ensaiados sobre ela, variando a posição das barras conforme o tipo de ensaio a se realizar como ilustrado na Figura 6.3.

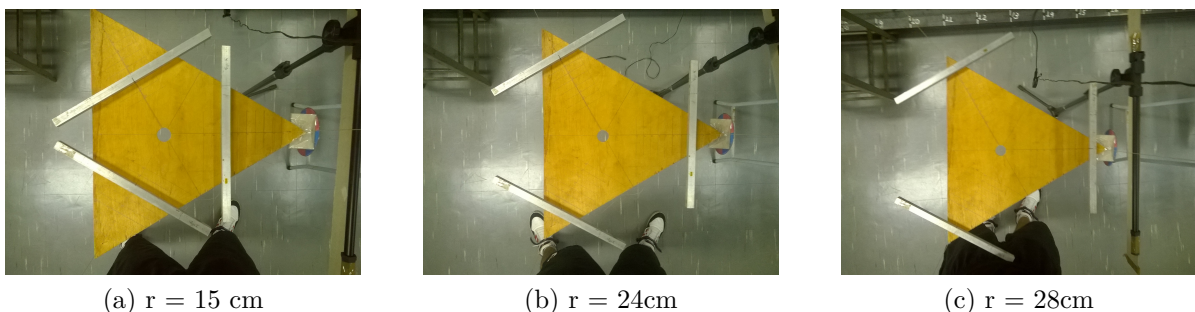


Figura 6.3 – Vista superior do experimento com três barras

12. Medir os comprimentos dos fios  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$  com uma trena.
13. Preparar o aplicativo do cronômetro em um celular e o da câmera no outro.



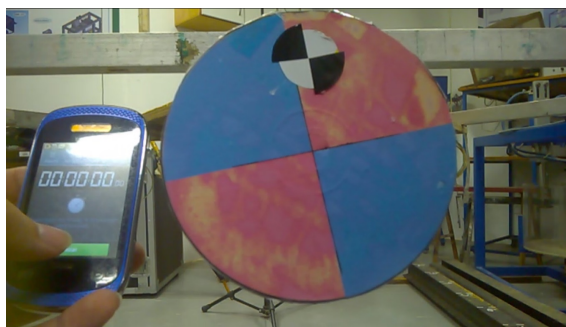


Figura 6.4 – Medidas dos períodos do cronômetro

14. Preparar para iniciar a filmar e cronometrar o experimento conforme a Figura 6.4
15. Excitar a bancada dando dois toques leves e simultâneos nas pontas da base inferior de modo a obter o movimento de torção do pêndulo com pequenos ângulos.
16. Esperar um pouco para o sistema estabilizar o movimento oscilatório torcional. Caso o movimento de pêndulo simples esteja muito forte, é possível amortecê-lo com algum objeto ou com o dedo através do furo central sem atrapalhar o torcional.
17. Iniciar a filmagem.
18. Disparar o cronômetro no início de um ciclo observado.
19. Contar 5 períodos, marcar o tempo com a função "volta".
20. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 10 períodos.
21. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 15 períodos.
22. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 20 períodos.
23. Interromper a filmagem.
24. Registrar os tempos obtidos com uma foto do celular que estava filmando conforme a Figura 6.5. Deste modo os vídeos e os tempos cronometrados ficam ordenados e é possível efetuar a análise posterior (no caso o celular salvava os arquivos com a hora e a data que foram criados).
25. Repetir os passos 13 a 24. por 10 vezes. É importante tomar cuidado para não alterar as condições de filmagem e de calibração durante estes ensaios.
26. Alterar o posicionamento dos corpos da bancada caso se deseje avaliar outras condições de ensaio. Retornando assim ao passo 12.
27. Medir as propriedades geométricas dos objetos.

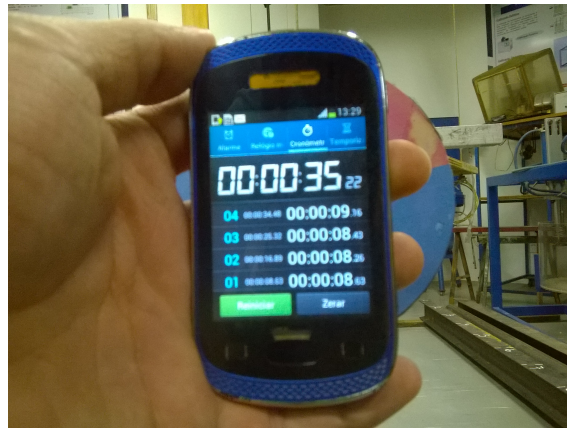


Figura 6.5 – Medidas dos períodos do cronômetro

28. Observar possíveis falhas no procedimento e na bancada.

Foram realizados 10 ensaios com a bancada vazia, 10 ensaios com as três barras no centro da bancada, 10 ensaios com as barras à 14 cm do centro da bancada e 10 ensaios com as barras à 28 cm do centro da bancada

## 6.1.4 RESULTADOS

Após o conjunto de ensaios realizados, foram calculadas as inércias das três barras sobre a bancada em diferentes posições com relação ao centro da bancada.

### 6.1.4.1 INÉRCIA CALCULADA

As inércias calculadas, utilizando tanto o método em vídeo, quanto o método com o cronômetro, e suas respectivas incertezas padrão estão mostradas na Tabela 6.3. O método do cronômetro aqui demonstrado avaliou um total de 20 períodos em cada ensaio.

Tabela 6.3 – Inércias das barras em diferentes posições

			Analítico	Experimental (espectro)	Experimental (cronometro)
(r= 0 cm)	I	[kg.m <sup>2</sup> ]	1,53E-02 ± 1,8E-05 0,12%	1,52E-02 ± 1,0E-04 0,68%	1,54E-02 ± 1,82E-04 1,18%
(r= 14 cm)	I	[kg.m <sup>2</sup> ]	3,80E-02 ± 2,2E-04 0,57%	3,74E-02 ± 1,29E-04 0,35%	3,77E-02 ± 3,34E-04 0,88%
(r= 28 cm)	I	[kg.m <sup>2</sup> ]	1,06E-01 ± 4,3E-04 0,41%	1,02E-01 ± 3,33E-04 0,33%	1,02E-01 ± 7,73E-04 0,75%

A Tabela 6.4 mostra a razão entre os resultados analíticos e os resultados experimentais obtidos.

Esperava-se que o método com o vídeo aproximasse com precisão os resultados analíticos. Encontrou-se erros de 0,51%, 0,79% e 3,64 entre os resultados experimentais

Tabela 6.4 – Razão entre o resultado analítico e o resultado experimental

	$I_{ana}/I_{expcrvideo}$	$I_{ana}/I_{expcrono}$
( $r= 0$ cm)	100,76%	99,49%
( $r= 14$ cm)	101,73%	100,79%
( $r= 28$ cm)	103,61%	103,64%

e os resultados analíticos. [Genta e Delprete \(1994\)](#) afirmam que o erro obtido no pêndulo trifilar seria inferior a 1%. Um detalhe que vale a pena ser destacado é que o maior erro observado ocorreu quando a barra estava a 28 cm, posição esta, que fazia com que a barra encostasse no fio, podendo assim ter gerado algum erro de execução no experimento ao fazer-se variar o comprimento do fio.

Nos experimentos realizados com o cronômetro, os resultados observados foram bem semelhantes aos experimentos realizados por vídeo. A incerteza observada era ligeiramente maior, como era de se esperar devido à imprecisão humana do operador do cronômetro. Ainda assim os resultados observados são bons e a incerteza observada máxima foi de 1,18%.

Destes resultados depreende-se que os dois métodos obtêm bons resultados. O erro observado é semelhante nos dois casos. A incerteza é menor no ensaio realizado por vídeo. Uma avaliação importante a ser destacada é que o método utilizando o cronômetro necessita de muito menos tempo para processamento dos dados e pode ser executado com um instrumento bem simples, sendo uma ferramenta mais prática e barata para avaliações em campo. Observa-se também uma tendência de diminuição das incertezas conforme se aumenta o momento de inércia do corpo ensaiado. Isto colabora para a realização deste ensaio em turbinas eólicas grandes, que possuem grande inércia.

Os gráficos dos resultados do vídeo estão mostrados na [Figura 6.6](#) e em maior detalhe na [Figura 6.7](#). Já os gráficos dos resultados do cronômetro estão mostrados nas [Figuras 6.8](#) e com maior detalhe em [6.9](#).

Com exceção do experimento com as barras distantes 28 cm, os experimentos foram bem satisfatórios e as incertezas observadas estavam dentro dos limites esperados, conforme demonstrado nas [Figuras 6.9a](#) e [6.9b](#).

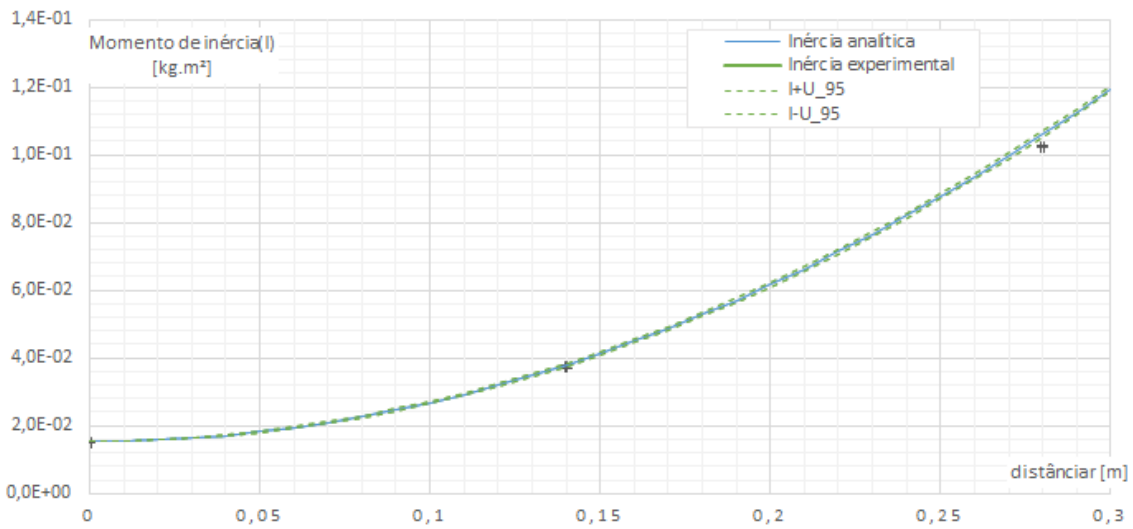
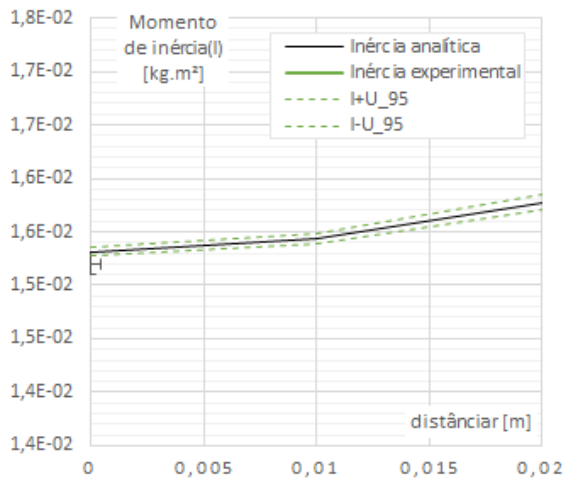
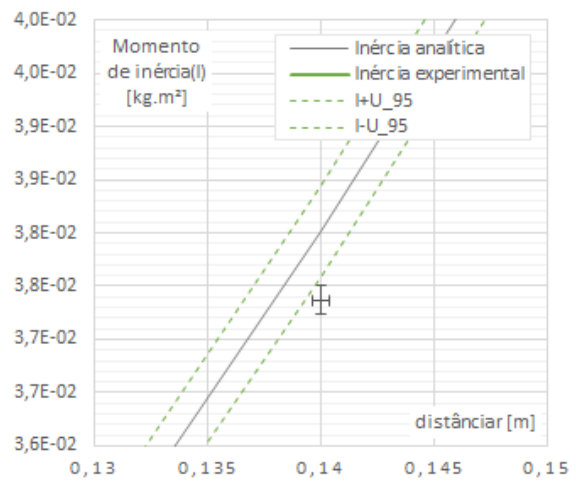


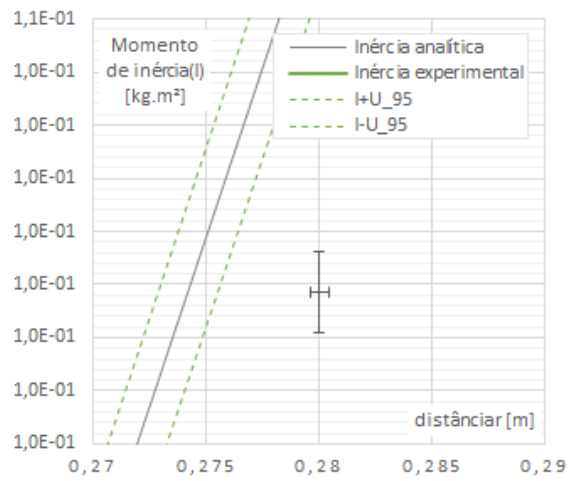
Figura 6.6 – Resultados obtidos a partir do vídeo



(a)  $r = 0$  cm



(b)  $r = 14$  cm



(c)  $r = 28$  cm

Figura 6.7 – Detalhes dos resultados obtidos a partir do vídeo

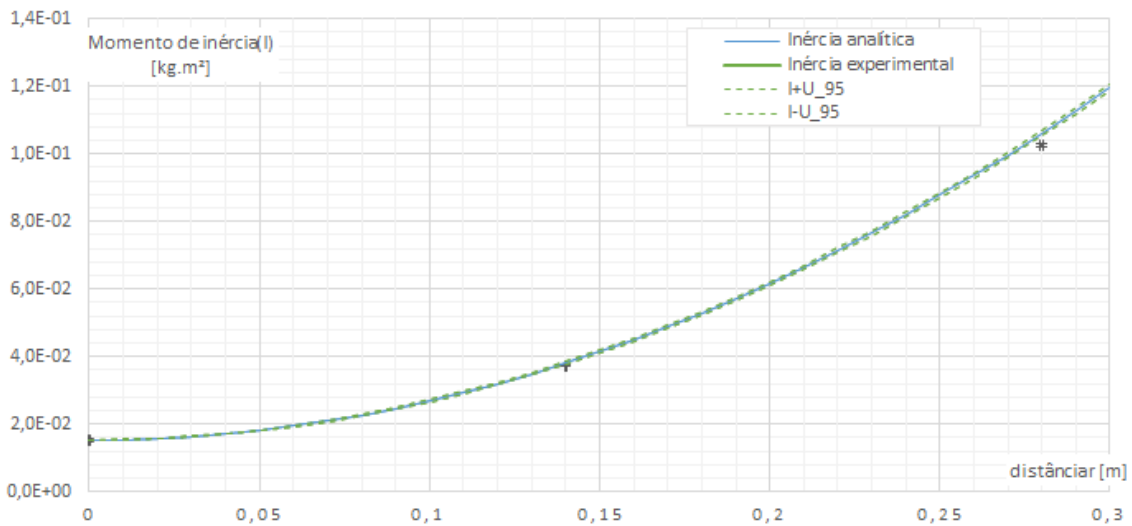
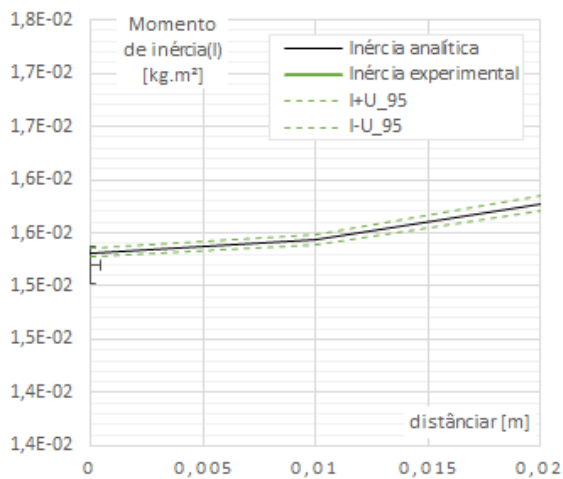
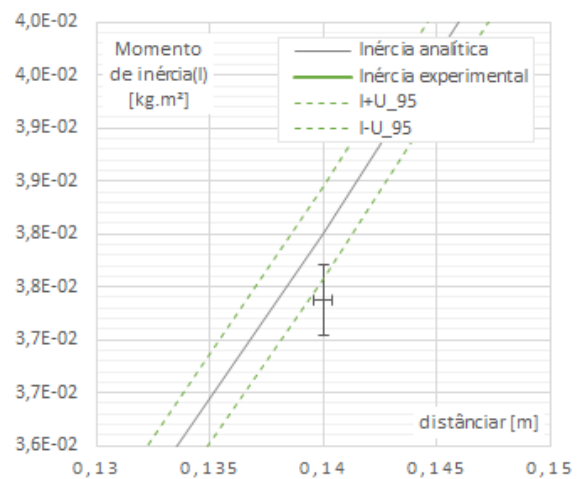


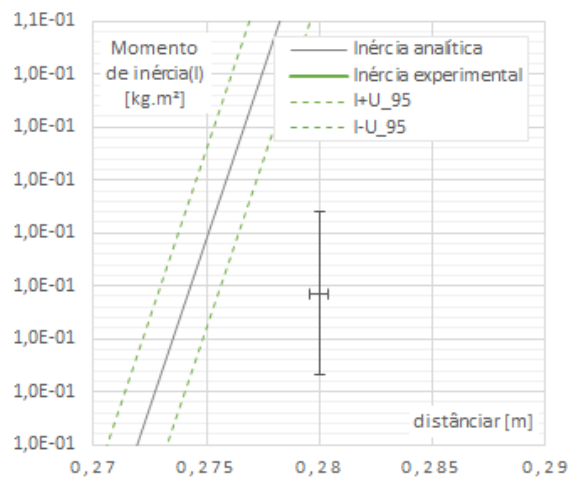
Figura 6.8 – Resultados obtidos a partir do cronômetro



(a)  $r = 0$  cm



(b)  $r = 14$  cm



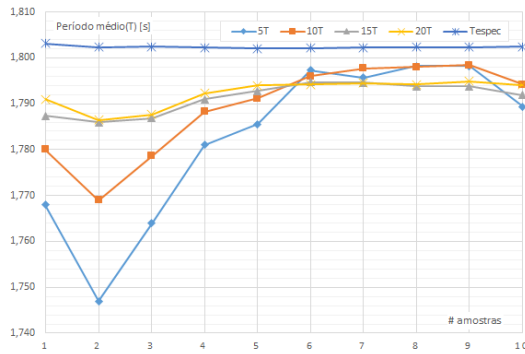
(c)  $r = 28$  cm

Figura 6.9 – Detalhes dos resultados obtidos a partir do cronômetro

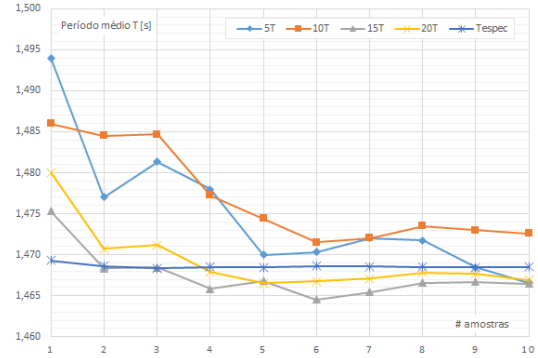
#### 6.1.4.2 ANÁLISE DOS DADOS

Uma breve análise da convergência dos períodos pode ser feita para as medições realizadas. A Figura 6.10 demonstra o modo que a estimativa dos períodos varia conforme

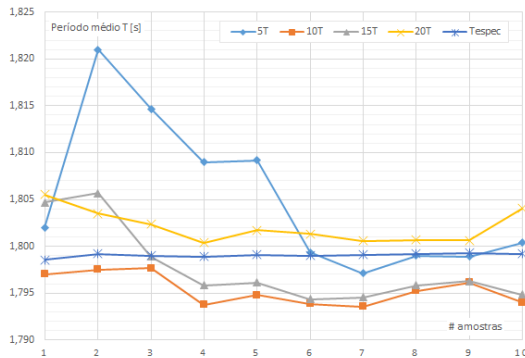
se aumenta a quantidade de ensaios realizados. Nesta figura estão ilustradas as convergências dos períodos para as diferentes medições realizadas no cronômetro com 5, 10, 15 e 20 períodos. Também estão mostradas as medições realizadas através dos vídeos utilizando o espectro de potência do sinal.



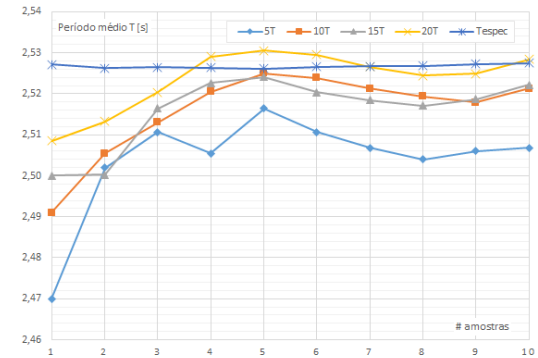
(a) Bancada vazia



(b) Blocos na posição  $r = 0$  cm



(c) Blocos na posição  $r = 14$  cm

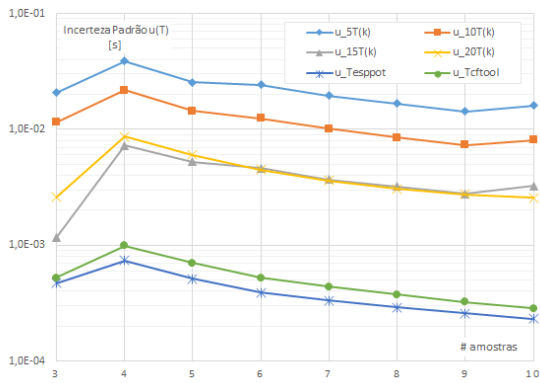


(d) Blocos na posição  $r = 28$  cm

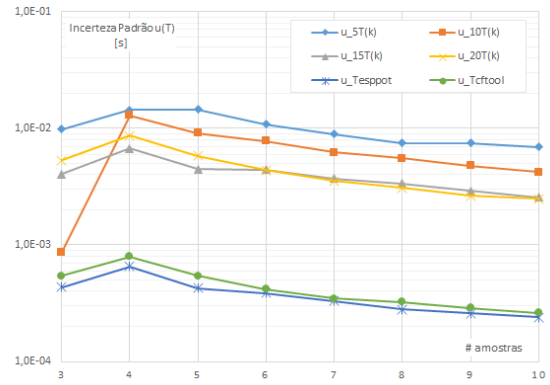
Figura 6.10 – Percentual das incertezas associadas às medições  $r = 10$  cm

O período medido através do vídeo é praticamente constante, e varia muito pouco conforme se aumenta o número de amostras. Os períodos observados no cronômetro tendem a convergir para uma região próxima ao período observado nas medições a partir do vídeo a partir de cerca de 8 amostras. Como observado nos resultados, a estimativa obtida a partir das medições do cronômetro são bem próximas às medições de vídeo.

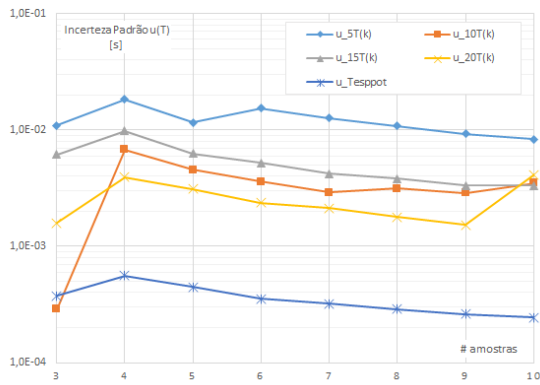
Com a avaliação dos períodos pode-se avaliar o comportamento das variâncias de cada ensaio, conforme se aumenta o número de amostras. A Figura 6.11 mostra esta relação. É possível observar de forma clara a incerteza variando nos ensaios. Quanto menos períodos avaliados, maior a incerteza. A incerteza da avaliação de 15 períodos é muito semelhante à incerteza da avaliação de 20 períodos.



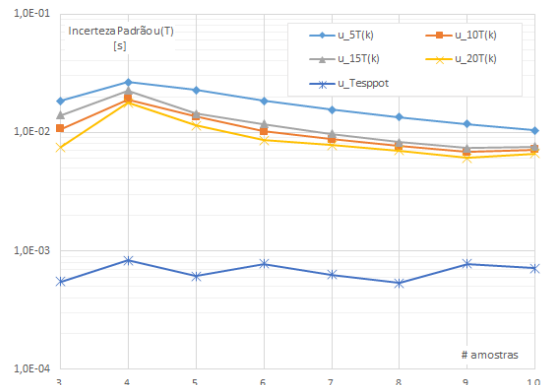
(a) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras na bancada vazia



(b) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras com os blocos IJK no centro



(c) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras com os blocos IJK distantes 14 cm



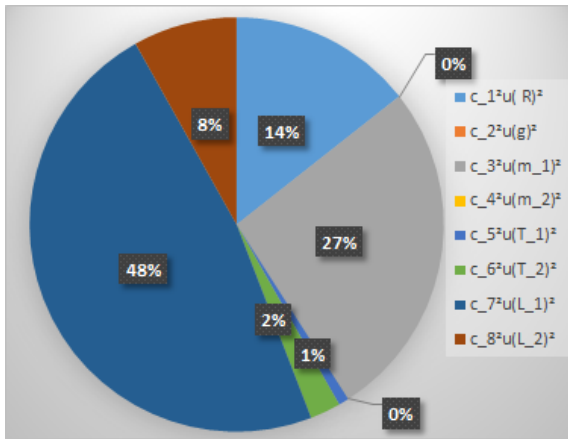
(d) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras com os blocos IJK distantes 28 cm

Figura 6.11 – Detalhes dos resultados obtidos a partir do cronômetro

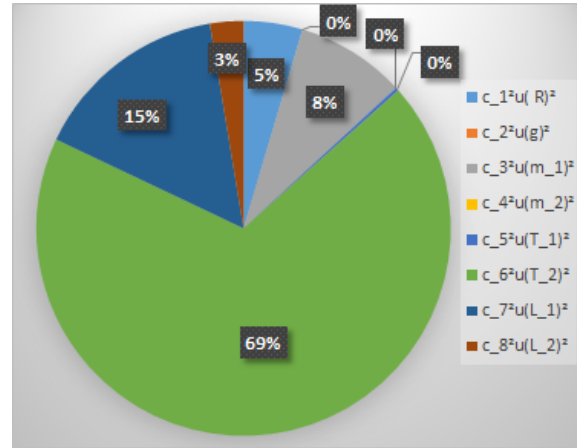
A partir dos resultados obtidos foi possível determinar o percentual das variância de cada grandeza de entrada que contribuíam para a variância padrão combinada de cada ensaio. As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 demonstram o percentual da influência de cada uma das variâncias das grandezas têm na variância padrão combinada observada nos diferentes ensaios. Nessas figuras, as imagens (a) correspondem aos medições dos ensaios em vídeo e as imagens (b) correspondem as medições cronometradas

É possível avaliar que a variância observada nos períodos medidos é muito mais significativa nos ensaios cronometrados que nos ensaios em vídeo.

As principais variâncias padrão observadas nestes ensaios são as variâncias devido aos diferentes tamanhos de  $R$  observados, às diferentes medições da massa  $m_1$ , devido às diferentes medições dos períodos  $T_2$ , ocorrendo principalmente nos ensaios cronometrados e os diferentes comprimentos dos fios  $L_1$  e  $L_2$ .

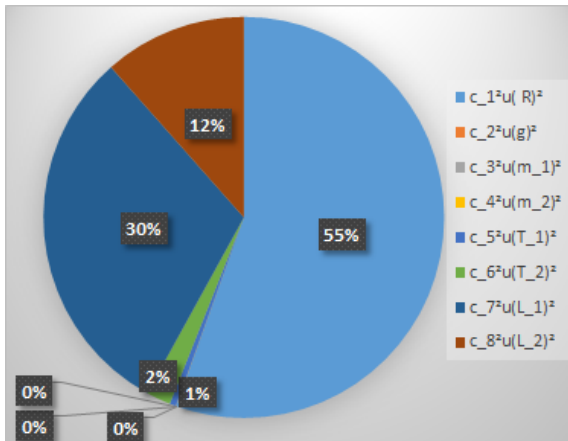


(a) Variâncias do ensaio em vídeo

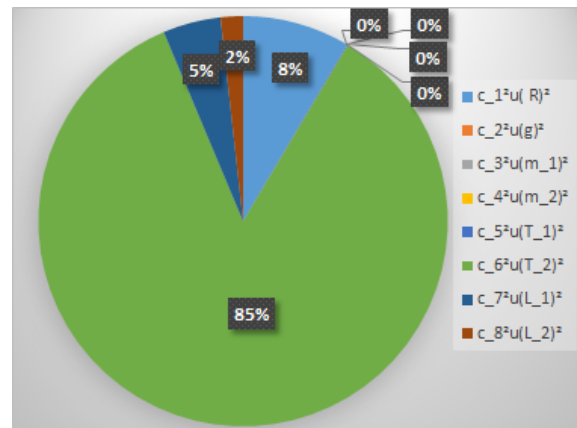


(b) Variâncias do ensaio cronometrado

Figura 6.12 – Convergência dos períodos T observados.

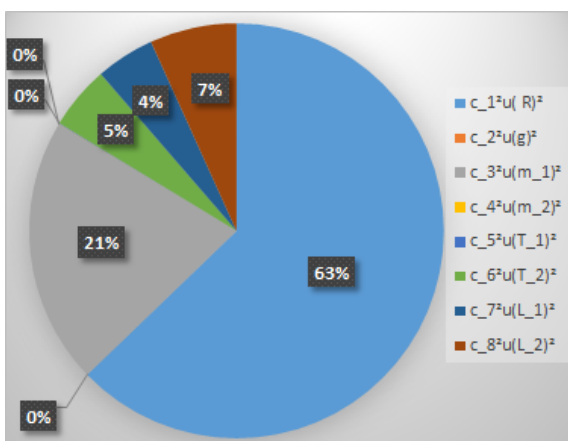


(a) Variâncias do ensaio em vídeo

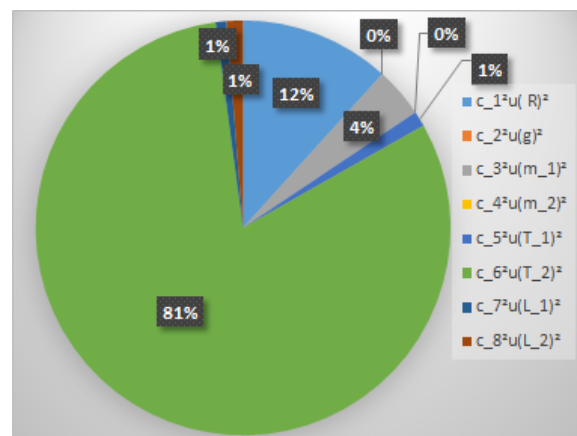


(b) Variâncias do ensaio cronometrado

Figura 6.13 – Incertezas relativas aos períodos T da Bancada.



(a) Variâncias do ensaio em vídeo



(b) Variâncias do ensaio cronometrado

Figura 6.14 – Percentual das incertezas associadas às medições  $r = 28$  cm



## 6.2 CASO PRÁTICO - TURBINA EÓLICA

Foi estudado o momento de inércia de uma turbina eólica formada por três pás utilizando o pêndulo trifilar para um exemplo prático.

O experimento é o mesmo realizado nas sessões anteriores. Avalia-se a inércia  $I_1$  da bancada vazia, em seguida avalia-se a inércia  $I_2$  da bancada junto com a turbina. A partir da diferença das duas se obtém a inércia  $I$  da turbina eólica. O momento de inércia do conjunto de pás é dado pela Equação 6.1

$$I = \frac{R^2 g}{4\pi^2} \left( \frac{m_1 T_1^2}{L_1} - \frac{(m_1 + m_2) T_2^2}{L_2} \right) \quad (6.1)$$

### 6.2.1 MATERIAL

No ensaio do caso prático foi utilizada uma turbina eólica com três pás de fibra de carbono montadas em uma estrutura de alumínio, conforme a Figura 6.15.



Figura 6.15 – Pá eólica

### 6.2.2 INSTRUMENTOS

Nestes ensaios foram utilizados os seguintes instrumentos:

Tabela 6.5 – Instrumentos utilizados nos ensaios finais

<b>Instrumento</b>	<b>Marca</b>	<b>Tipo</b>	<b>Resolução</b>
Trena	Brasfort	3m	1mm
Balança digital	Ohaus	Adventurer ARD110	0,01g
Câmera	Celular Microsoft Lumia 532	app câmera	1/30s
Cronômetro	Celular Samsung	app StopWatch	0,01s
Braço articulado de medição por coordenadas	Romer	Arm 100	-

### 6.2.3 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAIS

Os procedimentos experimentais deste ensaio são muito semelhantes aos da seção anterior com exceção ao passo 6, onde se mede a massa da turbina, ao passo 12, onde foi incluída a turbina eólica no lugar das barras de alumínio dos ensaios do capítulo anterior e aos passos 26 e 27 que foram excluídos.

1. Identificar e registrar data, hora e temperatura do laboratório.
2. Separar, identificar e registrar os instrumentos experimentais a serem utilizados.
3. Retirar a plataforma triangular do encaixe na base superior e coloca-la em posição de equilíbrio.
4. Observar se há algum tipo de erro na montagem da bancada.
5. Com uma balança medir a massa  $m_1$  da bancada suspensa. É necessário leva-la até a posição do pêndulo e colocá-la sobre uma mesa plana. Caso necessário utilize algum objeto para que a balança alcance a plataforma. Efetue a tara da balança antes da medição. Efetue uma série de medições e observe se ocorrem variações significativas. Foram efetuadas 4 medições.
6. Medir a massa  $m_p$  do conjunto de pás.
7. Devolver a mesa e a balança para aos locais de origem.
8. Certificar e garantir que tanto a plataforma inferior quanto a superior estejam na posição horizontal. Efetuar os ajustes para a regulagem de altura de cada fio.
9. Montar a câmera em um suporte na posição horizontal. Posiciona-la de frente para o alvo a uma distância suficiente para que se possa observar o diâmetro do alvo inteiro no vídeo. Ele será o parâmetro para calibração do CvMob. Quando possível, garanta que a câmera fique na mesma altura do alvo da bancada. Mantenha a imagem do alvo centralizada na tela da câmera. Utilize alguma função de grade de enquadramento de mira para auxiliar no ajuste caso o aparelho possua essa função.
10. Meça a distância da câmera ao alvo.
11. Deixar a bancada livre ou então colocar a turbina eólica no centro da bancada com cuidado de aproximar o centro de gravidade da pá com o centro geométrico da bancada.
12. Medir os comprimentos dos fios  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_c$  com uma trena.
13. Preparar o aplicativo do cronômetro em um celular e o da câmera no outro.
14. Preparar para iniciar a filmar e cronometrar o experimento.

15. Excitar a bancada dando dois toques leves e simultâneos nas pontas da base inferior de modo a obter o movimento de torção do pêndulo com pequenos ângulos.
16. Esperar um pouco para o sistema estabilizar o movimento oscilatório torcional. Caso o movimento de pêndulo simples esteja muito forte, é possível amortecê-lo com algum objeto ou com o dedo através do furo central sem atrapalhar o torcional.
17. Iniciar a filmagem.
18. Disparar o cronômetro no início de um ciclo observado.
19. Contar 5 períodos, marcar o tempo com a função "volta".
20. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 10 períodos.
21. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 15 períodos.
22. Contar mais outros 5 períodos. Marcar o tempo com a função "volta". Total de 20 períodos.
23. Interromper a filmagem.
24. Registrar os tempos obtidos com uma foto do celular que estava filmando conforme a Figura 6.16. Deste modo os vídeos e os tempos cronometrados ficam ordenados e é possível efetuar a análise posterior (no caso o celular salvava os arquivos com a hora e a data que foram criados).

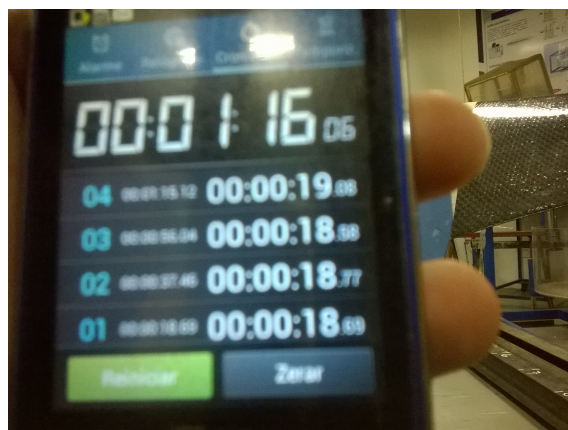


Figura 6.16 – Medidas dos períodos do cronômetro

25. Repetir os passos 13 a 24, por 10 vezes. É importante tomar cuidado para não alterar as condições de filmagem e de calibração durante estes ensaios.
26. Observar possíveis falhas no procedimento e na bancada.

## 6.2.4 RESULTADO

Efetuada os cálculos da inércia rotacional da pá eólica para o cronômetro e para a análise de imagem foram obtidos os seguintes resultados descritos Tabela 6.6

### 6.2.4.1 INÉRCIA CALCULADA

Tabela 6.6 – Avaliações dos períodos

Turbina eólica	I	[kg.m <sup>2</sup> ]	Experimental (espectro)		Experimental (cronometro)	
			Valor	Erro	Valor	Erro
			2,63E-01	± 1,03E-04 0,04%	2,63E-01	± 9,30E-04 0,35%

A Figura 6.17 compara os resultados obtidos pelos dados do cronômetro e pelos dados do ensaio em vídeo.

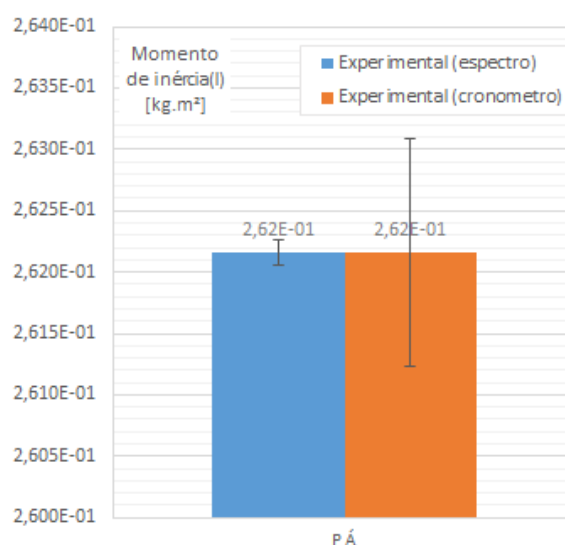


Figura 6.17 – Medidas dos períodos do cronômetro

Não há um modelo analítico ao qual a pá possa ser comparada. Os ensaios realizados com as barras foram feitos com o intuito de avaliar como o pêndulo se comporta aumentando a inércia sobre ele e mantendo os outros parâmetros constantes. A partir disso é possível obter uma avaliação inicial de um possível erro existente no experimento com a pá eólica, que é um corpo de massa pequena e inércia grande.

As barras apresentaram um erro máximo de 3,6% nos ensaios com corpos espaçados sobre a bancada e um erro de 0,76% para um corpo no centro da bancada.

Devido o experimento proposto também possuir algumas incertezas associadas ao posicionamento do conjunto sobre a bancada, o erro de 3,6% entre o resultado analítico e experimental pode estar associado a alguma falha na execução dos experimentos. Uma hipótese provável advém da nova montagem da bancada. É possível ter ocorrido uma variação da inércia da base inferior entre os experimentos com a bancada vazia e com as

barras, devido à nova montagem dos fios que a suspende. Os fios podem variar de posição, afetando assim a inércia da bancada vazia e promovendo um ensaio com erro. Outra fonte de erro também pode vir da não consideração das massas dos fios.

Assumindo que possa ter ocorrido erros nas realizações dos experimentos, Ainda assim, o primeiro resultado indica o erro de 0,76% entre os resultados experimentais e analíticos, ficando dentro da margem de erro esperada.

## 6.2.5 ANÁLISE DOS DADOS

Uma breve análise da convergência dos períodos pode ser feita para as medições realizadas. A Figura 6.10 demonstra o modo que a estimativa dos períodos varia conforme se aumenta a quantidade de ensaios realizados. Nesta figura estão ilustradas as convergências dos períodos para as diferentes medições realizadas no cronômetro com 5, 10, 15 e 20 períodos. Também estão mostradas as medições realizadas através dos vídeos utilizando o espectro de potência do sinal.

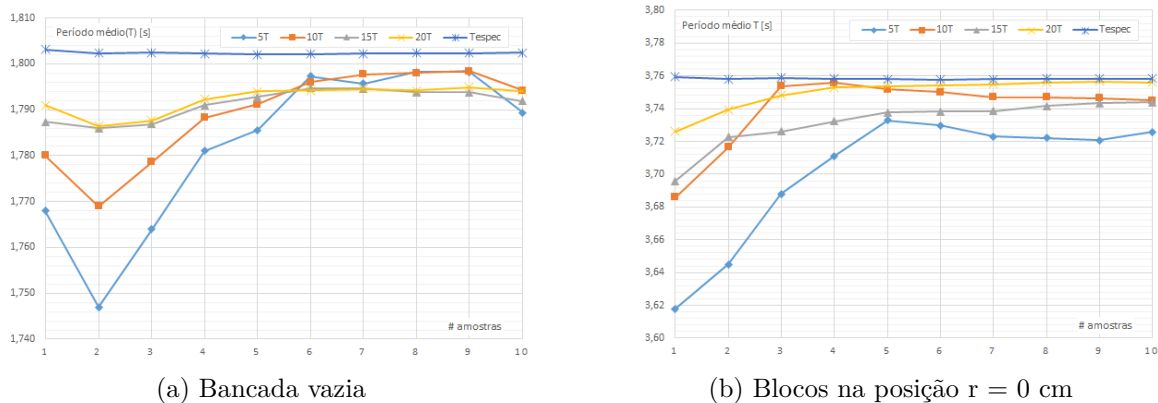
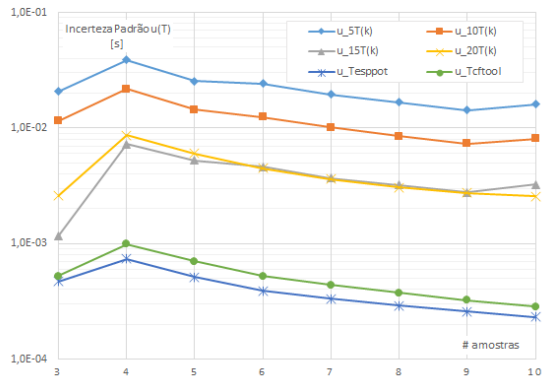


Figura 6.18 – Convergência dos períodos no experimento da pá eólica.

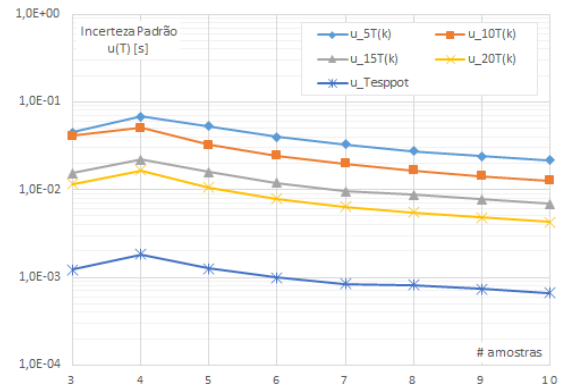
O período medido através do vídeo é praticamente constante, e varia muito pouco conforme se aumenta o número de amostras. Os períodos observados no cronômetro tendem a convergir para uma região próxima ao período observado nas medições por vídeo a partir de cerca de 8 amostras. Como observado nos resultados, a estimativa obtida a partir das medições do cronômetro são bem próximas às medições de vídeo.

Com a avaliação dos períodos pode-se avaliar o comportamento das variâncias de cada ensaio, conforme se aumenta o número de amostras. A Figura 6.11 mostra esta relação. É possível observar de forma clara a incerteza variando nos ensaios. Quanto menos períodos avaliados, maior a incerteza. A incerteza da avaliação de 15 períodos é muito semelhante à incerteza da avaliação de 20 períodos.

A partir disso, se conclui que são necessários bem menos ensaios em vídeo para obter uma incerteza melhor que a incerteza do cronômetro. Ainda assim, a estimativa feita



(a) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras na bancada vazia



(b) Mudança na variância dos períodos com o número de amostras com os blocos IJK no centro

Figura 6.19 – Incertezas relativas aos períodos T nos ensaios da pá eólica.

pele cronômetro é tão boa quanto a do vídeo. Conforme o quantidade total de tempo para realizar o ensaio aumenta, melhor fica o resultado do cronômetro. Então

## 7 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou a metodologia ISO-GUM aplicada ao ensaio experimental para determinação de inércias de rotação do pêndulo trifilar.

O objetivo inicial do trabalho de entender bem o funcionamento do pêndulo e dos equipamentos relacionados ao experimento pôde ser alcançado com sucesso.

Inicialmente, ao se propor um modelo matemático ao movimento do pêndulo trifilar, pôde-se concluir que a aproximação de primeira ordem seria boa para pequenos ângulos, mas ao se adotar essa aproximação, a solução da equação diferencial governante do sistema teria algum erro conforme a amplitude do movimento aumentava. Então, a partir da análise inicial observou-se que para determinada proporção entre a altura  $L$  e o raio  $R$  de um pêndulo trifilar existem ângulos máximos que aproximam a função da equação governante com 99,9% de similaridade. Espera-se que ocorra um pequeno erro no experimento devido à essa aproximação utilizando ângulos nessa faixa. Observou-se também que essa razão no pêndulo não precisa ser necessariamente tão grande, uma vez que a amplitude do movimento influencia mais no erro do que a proporção do pêndulo. Logo seria possível desenvolver um pêndulo mais baixo.

Por outro lado, se mostrou que a aproximação de terceira ordem é excelente para pequenos ângulos e aproxima muito bem a função presente na equação governante do sistema. Espera-se que o erro dessa solução seja muito próximo de zero, fazendo o pêndulo um método excelente para determinar momentos de inércia. Essa solução não foi aplicada ao experimento.

Alguns tópicos levantados permitem que sejam estudadas mais a fundo as características do movimento do pêndulo trifilar. A solução analítica do modelo matemático, possibilita avaliar aproximações de ordem superior do movimento do pêndulo. Com isso pôde-se analisar sua influência na determinação do momento de inércia rotacional. A solução analítica também permitiu observar que a razão entre o raio de rotação  $R$  e o comprimento  $L$  do pêndulo é um parâmetro de vital importância para que o pêndulo consiga estimar as inércias com precisão.

Foi aplicada a metodologia ISO-GUM ao problema. Se identificou que a comparação entre a inércia da bancada carregada e a da bancada vazia realizada separadamente com cada uma possuindo a sua incerteza individual, acarretaria uma incerteza maior que

a real, uma vez que existem termos correlacionados nas duas expressões. Por tanto foi utilizada uma equação só, com todos os termos, e com isso não haveria necessidade de avaliar individualmente as correlações entre os termos.

A primeira parte do trabalho fez observações sobre o comportamento dinâmico do pêndulo trifilar. Foram realizados uma série de ensaios qualitativos para averiguação da bancada e puderam ser observados alguns detalhes que ocorriam especificamente na bancada montada.

A análise espectral, possibilitou observar outras frequências presentes no movimento do pêndulo. Avaliou-se ao fim que elas não tinham tanta influência nas medições realizadas pelos métodos. Também se avaliou que as amplitudes presentes no espectro correspondiam às frequências obtidas a partir do método dos mínimos quadrados do CF-Tools.

Algumas considerações não faziam tanto efeito sobre a medição final, como os efeitos da ótica do vídeo, mas serviam para ter um sinal do movimento mais limpo e claro, com uma amplitude melhor definida. Seria possível observar o que ocorreria caso o sistema tivesse maior amortecimento.

Em um outro ensaio foi possível observar que o comprimento do fio aumentava quando se ensaiava um corpo pesado na bancada, e isso implicava diferentes resultados em ensaios que deveriam estar sob as mesmas condições.

Um resultado interessante pôde ser observado experimentalmente na amplitude do movimento. Devido à não linearidade do sistema as amplitudes dos movimentos estavam relacionadas com os períodos observados, e isso condiz com o esperado pelo modelo matemático. Então foram propostos ensaios com menor amplitude de movimento, dentro da região que correspondia à 99,9% de semelhança entre a função da equação governante e a aproximação de primeira ordem. Essa proposição deveria diminuir o erro do método e a variância entre os resultados observados.

Ao fim dos experimentos preliminares foram propostas modificações à bancada com o objetivo de diminuir ainda mais as incertezas do experimento. A modificação do mecanismo de engaste do fio proposta na primeira parte do trabalho falhou. Porém a modificação final realizada, adotou um cabo de aço de maior diâmetro e resolveu tanto a incerteza devido a folga do furo, quanto o problema devido à extensibilidade do fio.

Com os resultados do estudo preliminar da bancada foram realizados um conjunto de ensaios, com maior rigor e uma metodologia experimental desenvolvida com base nos resultados previamente observados. Foi feita assim uma avaliação do comportamento da bancada sobre diferentes tipos de medição.

Esperava-se que as principais fontes de incerteza seriam devido aos períodos  $T_1$  e  $T_2$  observados e à distância  $R$  entre os fios e o centro da bancada.

Os resultados observados com a medição por cronômetro foram bem satisfatórios,



após 10 ensaios, ele foi uma boa estimativa da inércia com uma incerteza relativa pequena. Se observou que a incerteza relativa diminuía conforme se aumentava a inércia do corpo estudado, mas se mantinham os outros parâmetros. Essas incertezas relativas foram de 1,18%, 0,88% e 0,75%. Fato que poderia ser esperado, mas isso implica que a incerteza relativa da pá, seria menor ainda. Logo esse poderia ser um método com aplicações de campo. Observou-se no ensaio da pá eólica uma incerteza relativa de 0,35%. Esse tipo de ensaio não necessita de processamento de imagens dos vídeos, e pode ser realizado mais rápido.

Os experimentos em vídeo tiveram uma variância baixa, indicando que um pequeno número de ensaios seria bastante para avaliar inércias na bancada do pêndulo trifilar com boa acuidade. A incerteza observada nesse método foi devido principalmente às medições de outras grandezas. A incerteza dos períodos foi muito pequena e implicou em uma incerteza combinada pequena também.

Os resultados finais foram bons, porém alguns foram maiores que 1% discordando do resultado descrito nas referências. Acredita-se que nesse ensaio, algum erro experimental possa ter ocorrido que modificou a bancada. Os novos fios colocados não foram propriamente fixados à bancada, e podem variar de um ensaio para o outro, variando a inércia da bancada e gerando erro no resultado obtido.

Novos estudos buscando melhorar ainda mais o método podem ser realizados nas duas bancadas desenvolvidas. Embora não tenha sido possível realizar os ensaios na segunda bancada, esta bancada possui fios pouco extensíveis e muito finos, montados em furos com pouca folga. Espera-se que os resultados sejam mais confiáveis nela. Poderia ser montada sobre ela um sistema de controle de altura e de horizontalidade, possibilitando assim realizar ensaios independentes com menos erros e obter a incerteza das inércias avaliadas na bancada por meio de outros tipos de ensaio.

Os erros observados podem ser justificados por pequenos erros de montagem, tais como não conseguir garantir a horizontalidade das plataformas superiores e inferiores, bem como não se conseguir criar uma bancada perfeitamente simétrica.

Ao fim, conclui-se que o método empregado é simples, acurado e fácil de ser executado. Os erros observados, bem como as incertezas talvez podem ser minimizados em uma bancada melhor montada, com maior precisão. Os resultados obtidos para aplicações em turbinas eólicas tendem a ser melhores que os obtidos em corpos de baixa inércia e massa grande. Soluções de ordem superior do problema seriam melhores ainda. O pêndulo trifilar já é um método bem utilizado para este tipo de medição.

Outras sugestões de trabalho, poderiam verificar o erro em pêndulo trifilar com fios mais curtos, pois esse seria um pêndulo que ocupa menos espaço. Ou ainda obter outros parâmetros como centros de gravidade e momentos de inércia em torno de outros eixos a partir dos outros modos de oscilar do pêndulo, como seus movimentos translacionais. Avaliar o efeito da não-linearidade do pêndulo, a partir da solução da equação de Duffing.

Um outro estudo interessante, seria o caso de as trajetórias dos pontos de fixação do pêndulo trifilar executassem perfeitamente um movimento de cicloide. Talvez fosse necessário uma outra montagem para isso ocorrer, porém, se isso for possível, em um pêndulo com tal característica, o período independeria da condição inicial e da amplitude do movimento, logo não haveria erro na aproximação de primeira ordem realizada.

# Referências

DA SILVA, R. B. A. Avaliação da inércia de giração em rotores de turbinas eólicas. 2015. Citado na página 1.

JCGM. *Evaluation of Measurement Data - A Guide to Measurement Uncertainty - (GUM 1995 with minor corrections.)*. [S.l.], 2008. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 21.

SCHEDLINSKI, C.; LINK, M. A survey of current inertia parameter identification methods. *Mechanical systems and signal processing*, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 189–211, 2001. Citado na página 4.

GENTA, G.; DELPRETE, C. Some considerations on the experimental determination of moments of inertia. *Meccanica*, Springer, v. 29, n. 2, p. 125–141, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 7, 20 e 67.

HOU, Z. C.; LU, Y. N.; LAO, Y. X.; LIU, D. A new trifilar pendulum approach to identify all inertia parameters of a rigid body or assembly. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 1270–1280, 2009. Citado na página 7.

DU BOIS, J. L.; LIEVEN, N. A.; ADHIKARI, S. Error analysis in trifilar inertia measurements. *Experimental Mechanics*, Springer, v. 49, n. 4, p. 533–540, 2009. Citado na página 8.

WOLFRAM|ALPHA. Wolfram Alpha LLC, 2016. Disponível em: <[https://www.wolframalpha.com/input/?i=sin\(theta\)\\*sqrt\(1-2\\*A%5E2\(1-cos\(theta\)\)\)](https://www.wolframalpha.com/input/?i=sin(theta)*sqrt(1-2*A%5E2(1-cos(theta))))>. Citado na página 12.

KACKER, R.; JONES, A. On use of bayesian statistics to make the guide to the expression of uncertainty in measurement consistent. *Metrologia*, v. 40, n. 5, p. 235–248, 2003. Citado na página 24.

PENA, N.; CREDIDIO, P.; BCAL, F. L. C.; CUNHA, L. et al. Instrumento livre para medidas de movimento. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, n. 3, p. 3505, 2013. Citado na página 85.

KORR, A. L. *Systems for measuring moments of inertia*. Google Patents, 1963. US Patent 3,106,091. Disponível em: <[https://www.google.com.br/patents/US3106091?dq=trifilar+pendulum&hl=pt-PT&sa=X&sqi=2&pj=1&ved=0ahUKEwjP0fP5i\\_DRAhVGOiYKHdjKAuQQ6AEIGjAA](https://www.google.com.br/patents/US3106091?dq=trifilar+pendulum&hl=pt-PT&sa=X&sqi=2&pj=1&ved=0ahUKEwjP0fP5i_DRAhVGOiYKHdjKAuQQ6AEIGjAA)>. Citado na página 87.

# Anexos

# A UTILIZAÇÃO DO CVMOB

O CvMob é um software de código aberto criado por pesquisadores da Universidade Federal da Bahia junto com a OpenCv e a Qt libraries. Ele é capaz de realizar análises de trajetória, variações angulares, velocidades e outras variáveis cinemáticas a partir de um vídeo.

A utilização deste software em ensaios dinâmicos proporciona grande facilidade de execução, avaliação e registro dos ensaios realizados. A partir dos vídeos, é possível tanto observar diretamente o que ocorreu durante a execução de um ensaio, quanto obter um conjunto de dados a partir dele. Como o ensaio é feito sem contato, o sistema avaliado não é afetado pela adição de massas de acelerômetros ou outros sensores que alteram as características dinâmicas do sistema. Com isso, este software tem um grande potencial para avaliação de incertezas em ensaios dinâmicos.

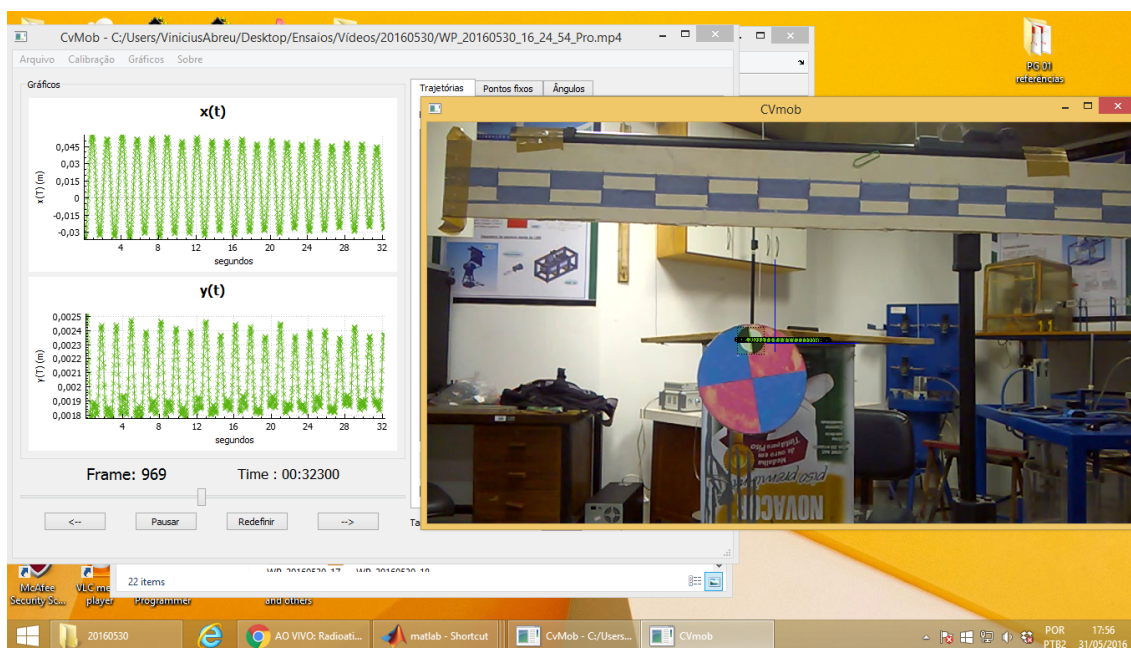


Figura A.1 – Interface do programa CvMob

Pena, Credidio, BCal, Cunha (2013) conclui que o software é uma ferramenta válida e aplicável em experimentos de física com uma margem de erro inferior a 5% nas medidas efetuadas.

Foi utilizada a ultima versão disponível do CvMob na presente data, o CvMob 3.5.

A Figura A.1 mostra a utilização e a interface do programa. No canto superior esquerdo estão as abas de comando. O vídeo é aberto em uma outra janela. Sobre ele, a trajetória do ponto em análise é destacada por pontos verdes. As trajetórias  $x(t)$  e  $y(t)$  do ponto são mostradas em verde e nos gráficos à esquerda da tela. Ao fim do processo, pode-se exportar os conjuntos de dados obtidos para um arquivo do tipo file.

Além das trajetórias, o programa também computa as velocidades  $v$ ,  $v_x$  e  $v_y$ , as acelerações  $a$ ,  $a_x$  e  $a_y$ , os ângulos dados a partir de três pontos e  $V_x vs X$  e  $V_y vs Y$ .

O procedimento para operar o CvMob consiste em:

1. Filmar um vídeo com um referencial e ao menos um ponto a ser avaliado,
2. Abrir o vídeo com o software CvMob em um computador,
3. Efetuar a calibração
  - Indicar dois pontos de calibração,
  - Informar a distância real entre eles,
  - Informar se deve ser avaliado ou não o efeito da distorção da câmera.
  - Quando sim, deverá ser informando a distância da câmera ao plano de referência adotado.
4. Marcar um ponto para ser a origem dos eixos coordenados, confirmar este ponto na aba calibração.
5. Indicar os pontos que terão sua trajetória avaliada.
6. Apertar em reproduzir

A partir dos dados importados do CvMob, serão feitas uma série de análises para as determinações dos períodos, frequências angulares, análise da trajetória em  $x$  e em  $y$  e também observações diversas sobre o experimento.

# B MÉTODOS ALTERNATIVOS DE MEDIÇÃO DO PÊNULO TRIFILAR

Outra possibilidade de medição dos resultados no mesmo pêndulo é a partir da Equação (2.34) substituindo o valor de  $R^2g/4\pi L$  por um valor  $K$  obtêm-se a seguinte expressão:

$$I_{zz} = KmT^2 + C \quad (\text{B.1})$$

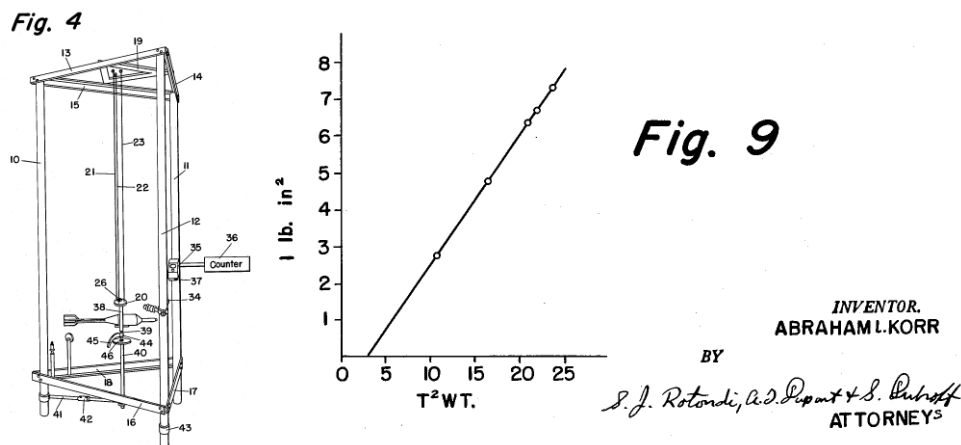


Figura B.1 – Gráfico da proposição de calibração

Este modelo é proposto em uma patente [KORR \(1963\)](#). Efetuando uma série de ensaios utilizando corpos com inércias conhecidas, determinando corretamente suas incertezas, é possível traçar uma curva de calibração do ensaio em um determinado intervalo, e comparar os dois resultados obtidos, avaliando-se assim as incertezas dos dois métodos. Neste segundo método é necessário estimar apenas as inércias dos corpos e os períodos, reduzindo-se assim a quantidade de parâmetros que necessitam ser medidas em cada ensaio.

# C SINAIS E ESPECTROS DE POTÊNCIA DOS ENSAIOS

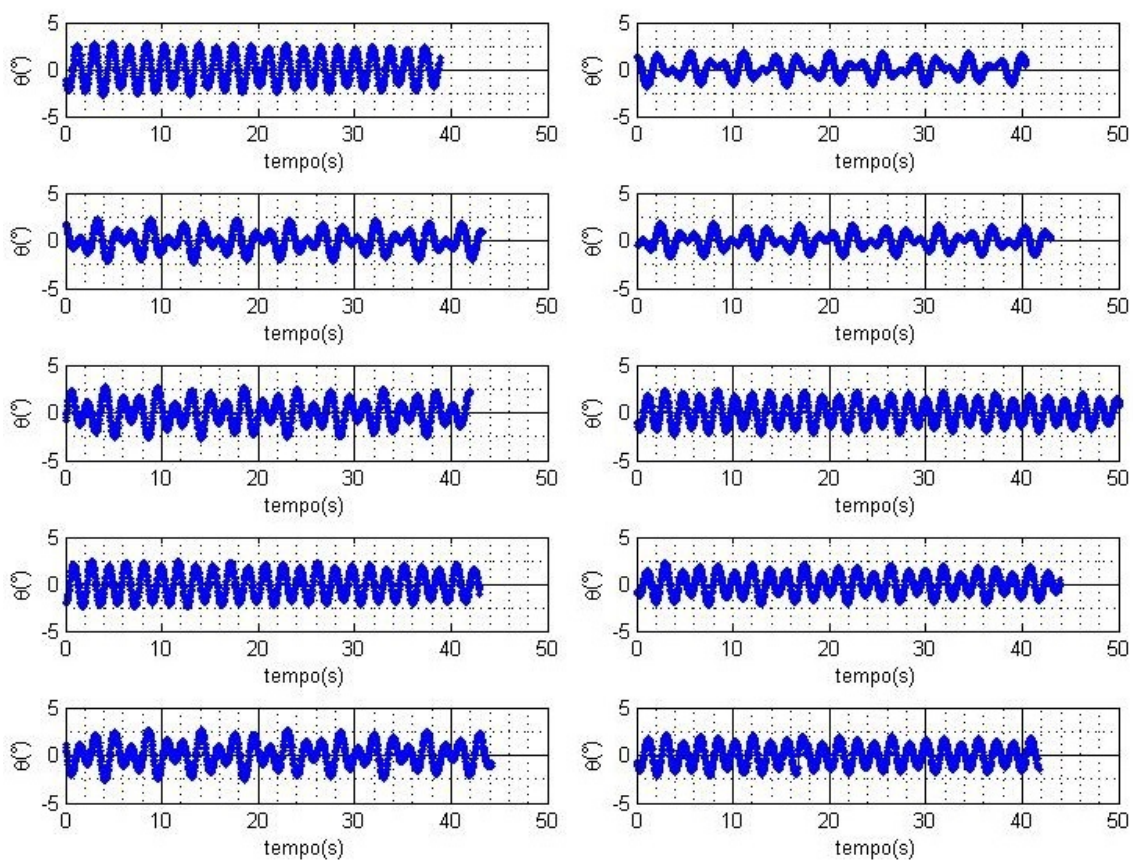


Figura C.1 – Sinais da bancada vazia



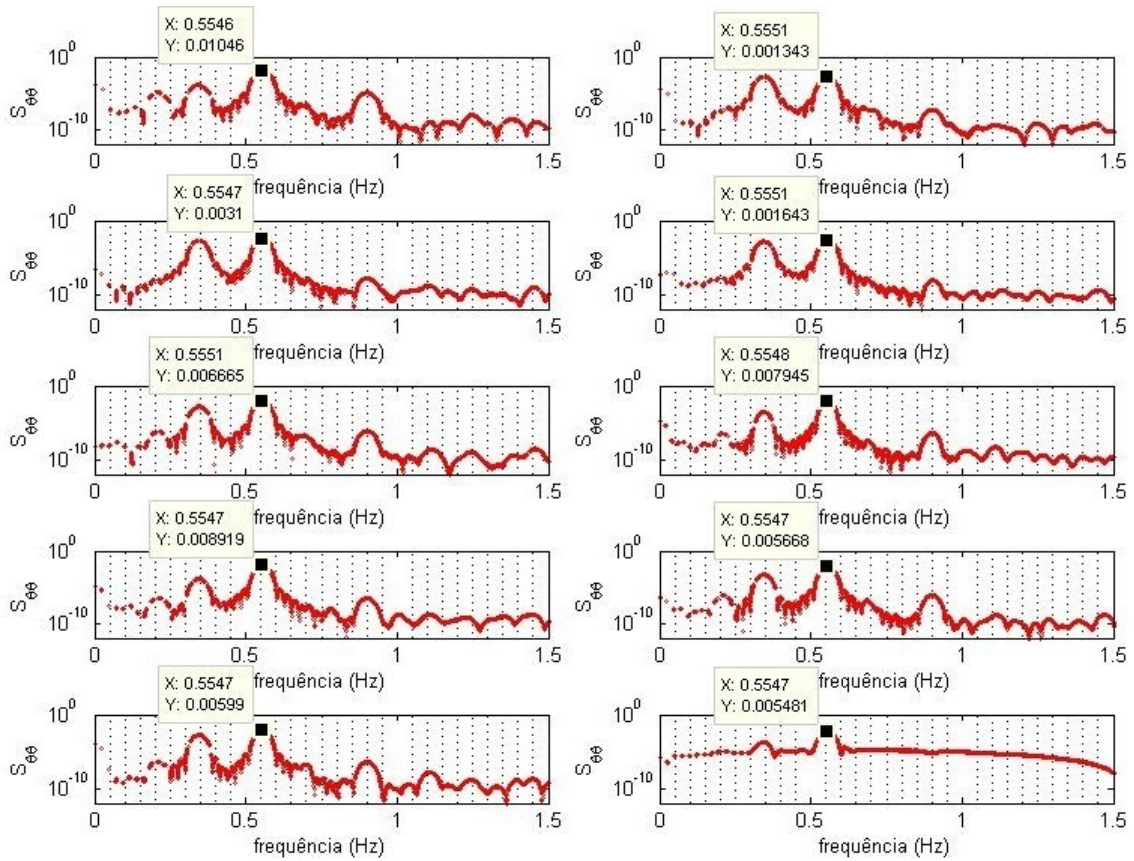


Figura C.2 – Espectro de potência da bancada vazia

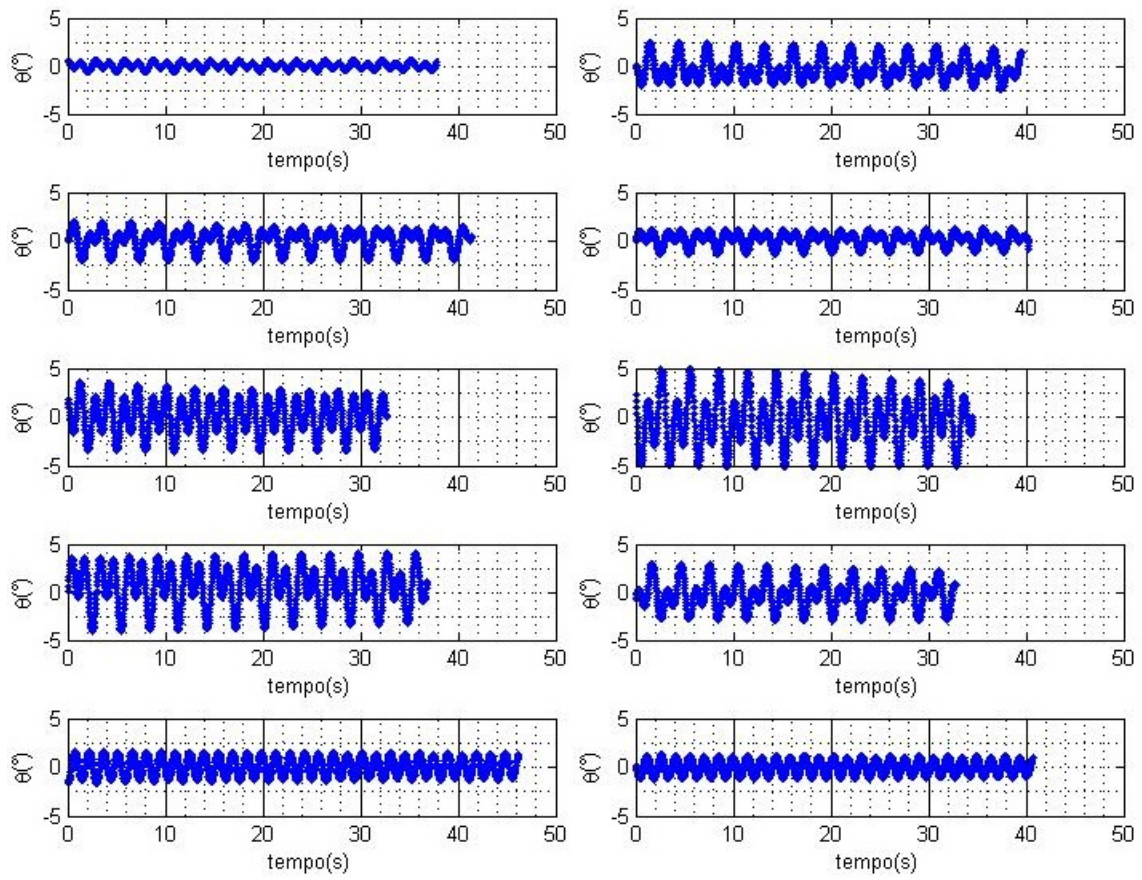


Figura C.3 – Sinais da bancada com bloco IJK no centro

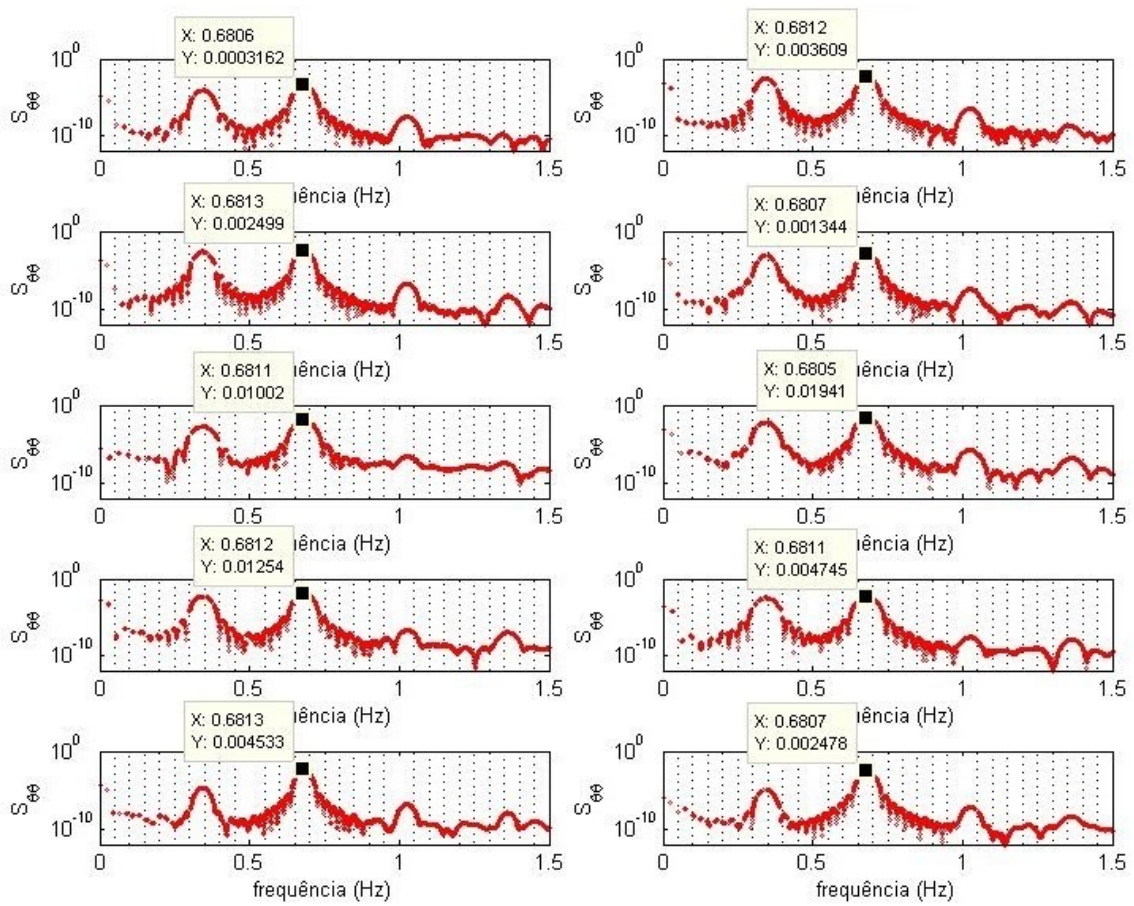


Figura C.4 – Espectro de potência da bancada com bloco IJK no centro



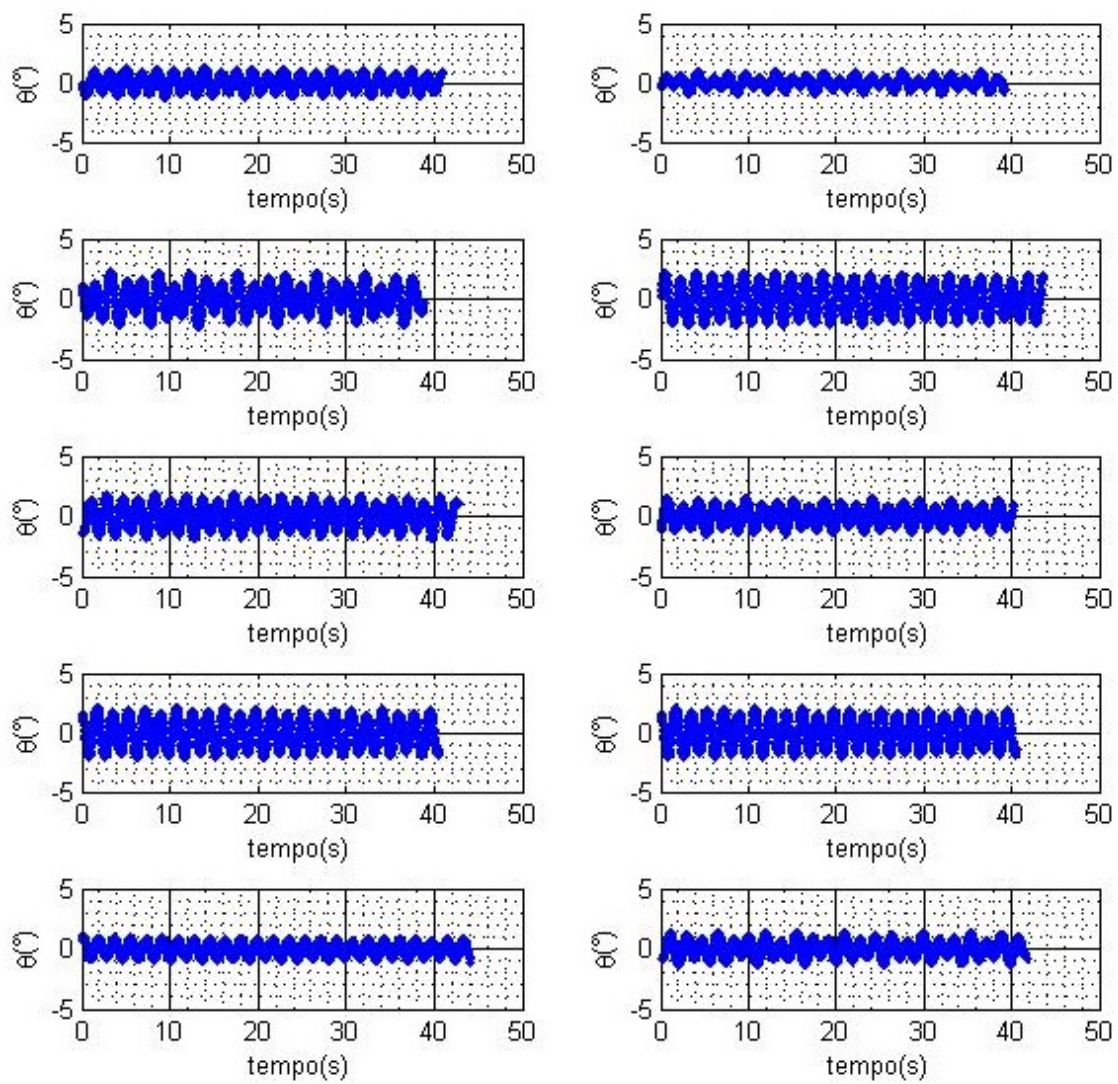


Figura C.5 – Sinais da bancada com os blocos IJK distantes 14 cm do centro

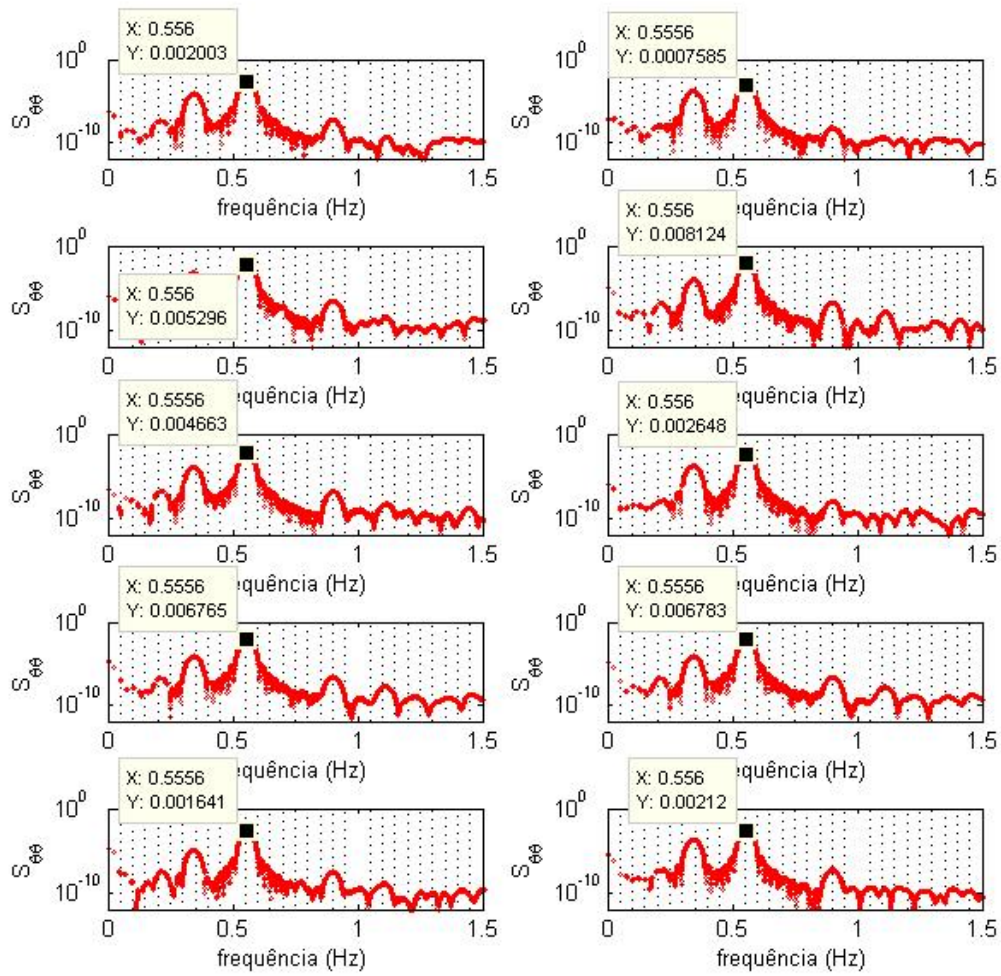


Figura C.6 – Espectro de potência da com os blocos IJK distantes 14 cm do centro

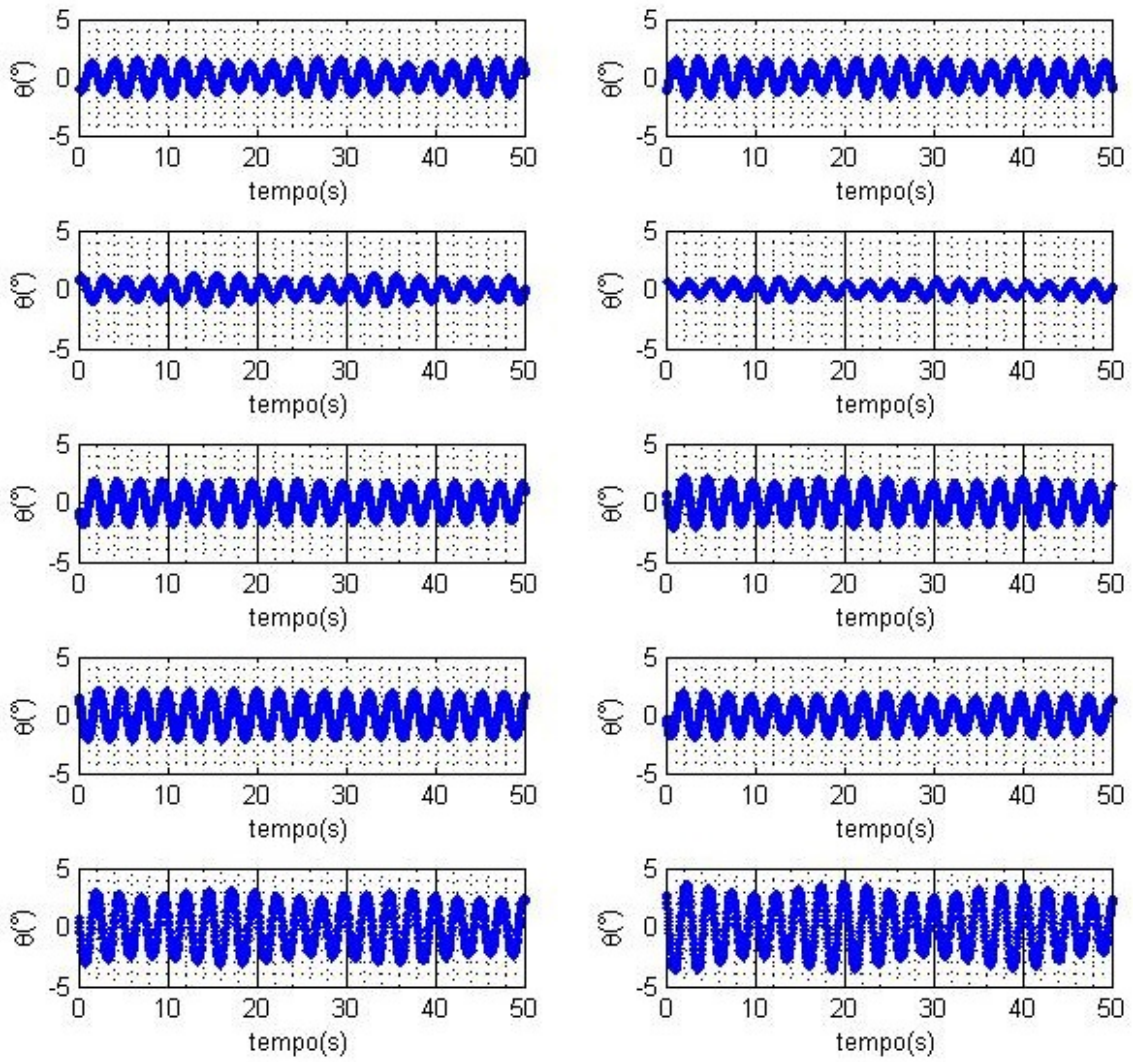


Figura C.7 – Sinais da bancada com os blocos IJK distantes 28 cm do centro



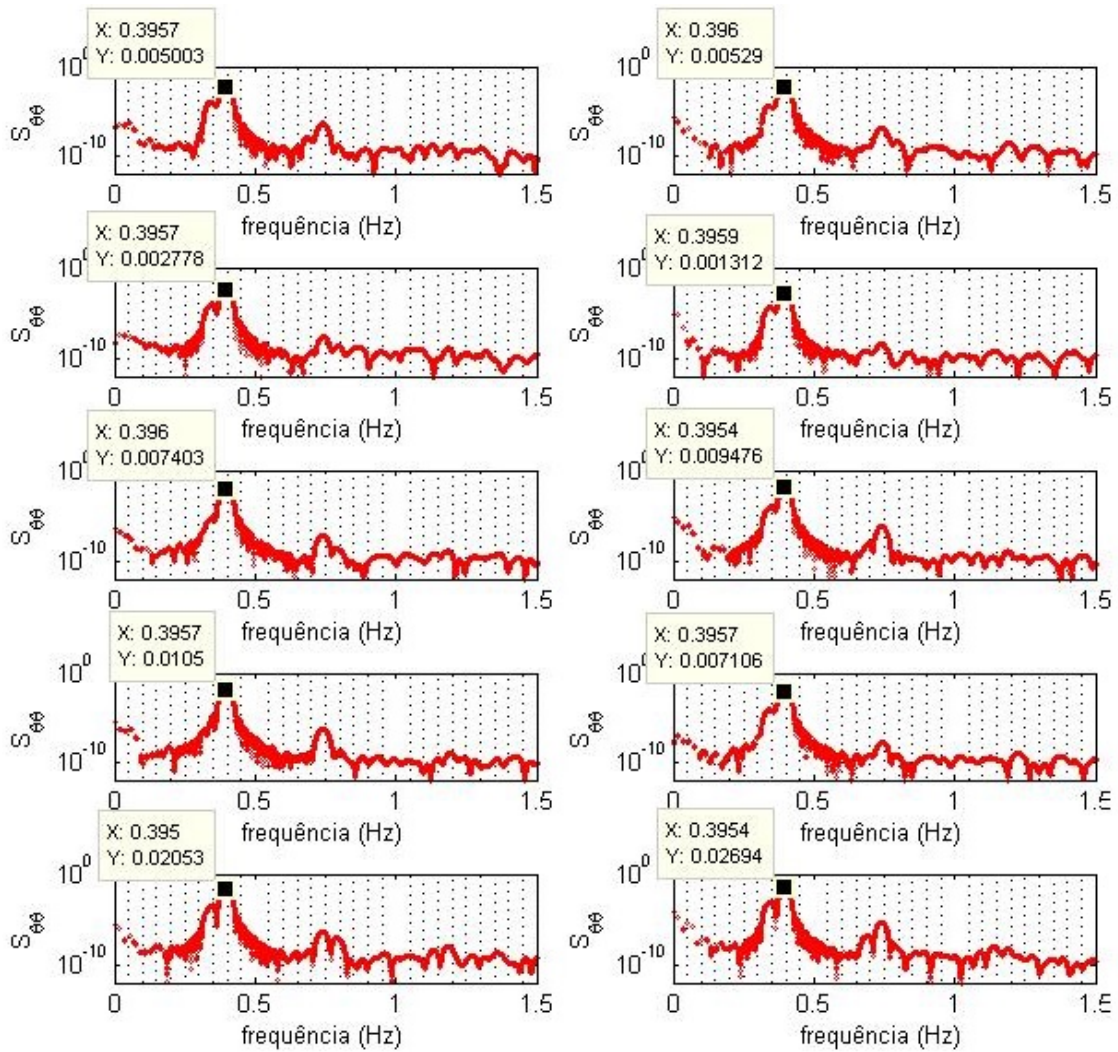


Figura C.8 – Espectro de potência com os blocos IJK distantes 28 cm do centro

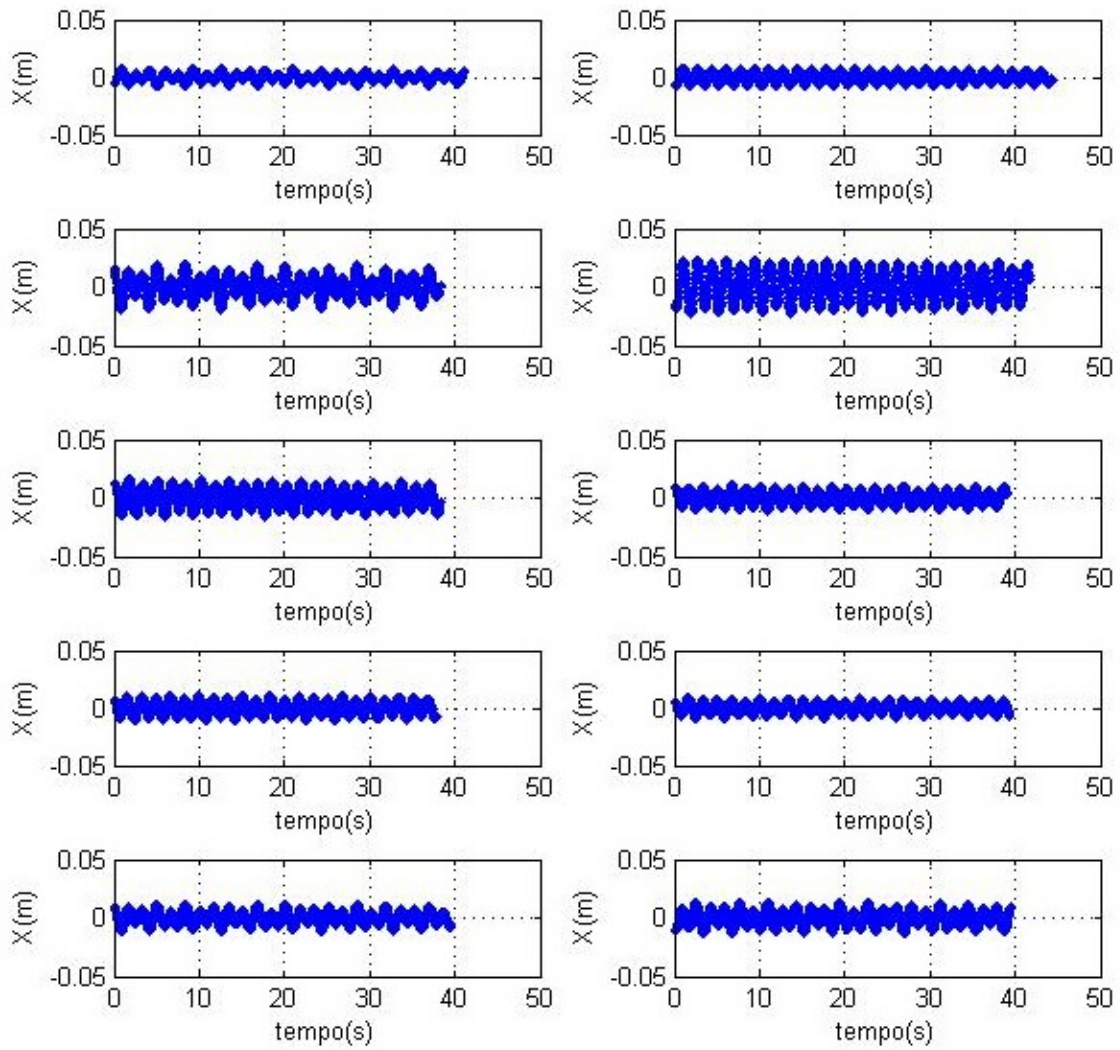


Figura C.9 – Sinais da bancada com os blocos IJ distantes 10 cm do centro



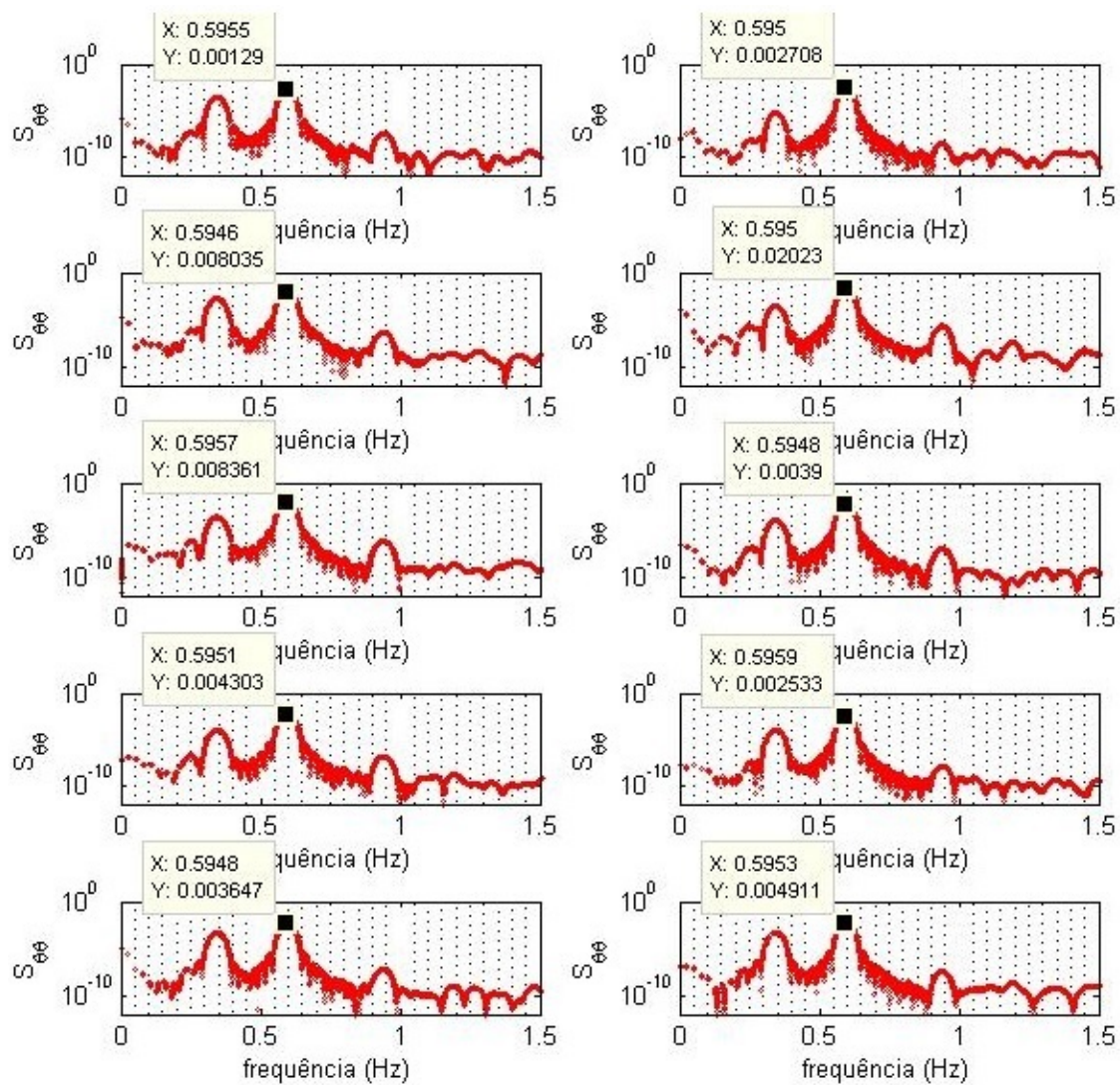


Figura C.10 – Espectro de potência dos blocos IJ distantes 10 cm do centro

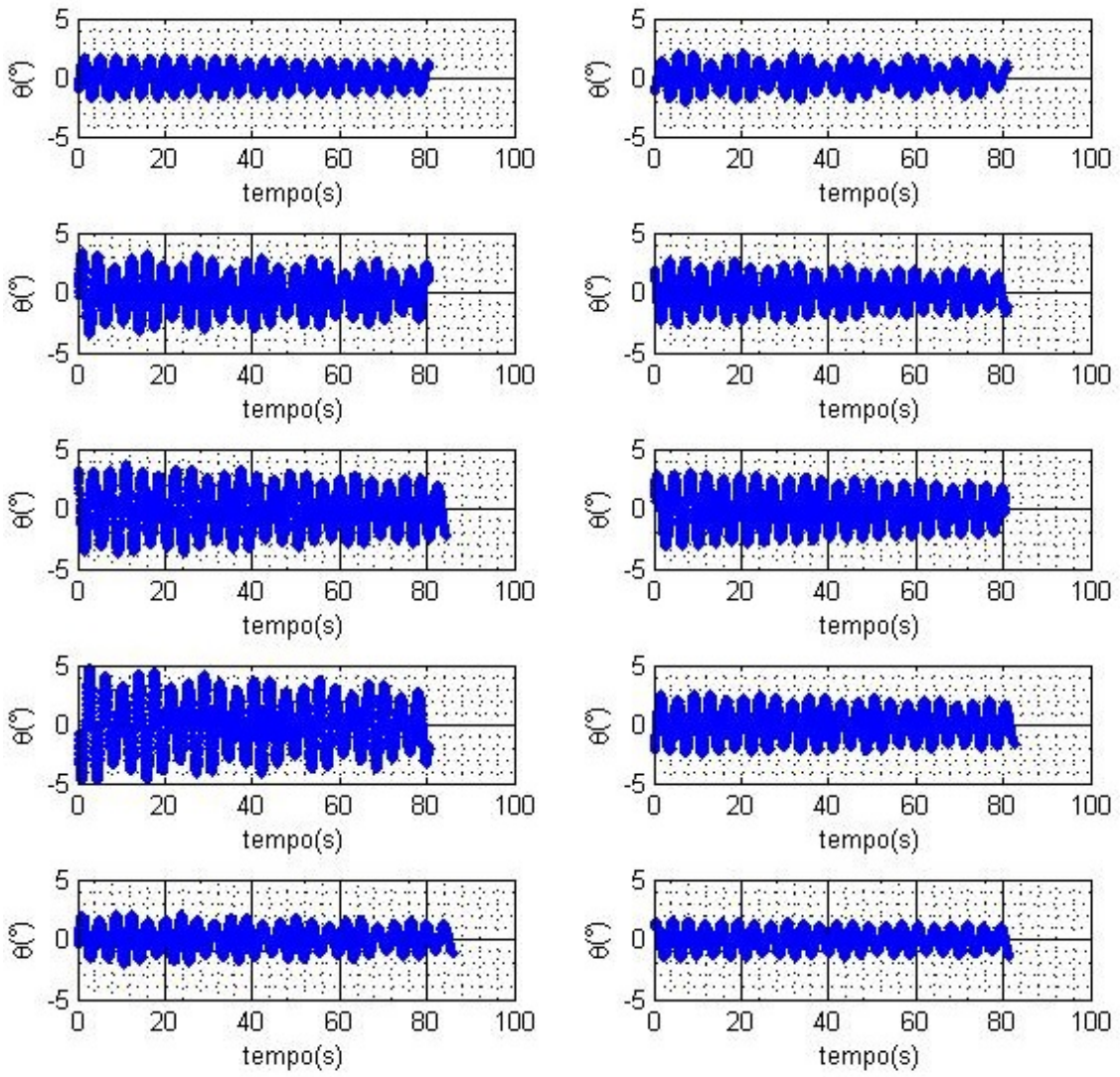


Figura C.11 – Sinais da bancada com a pá

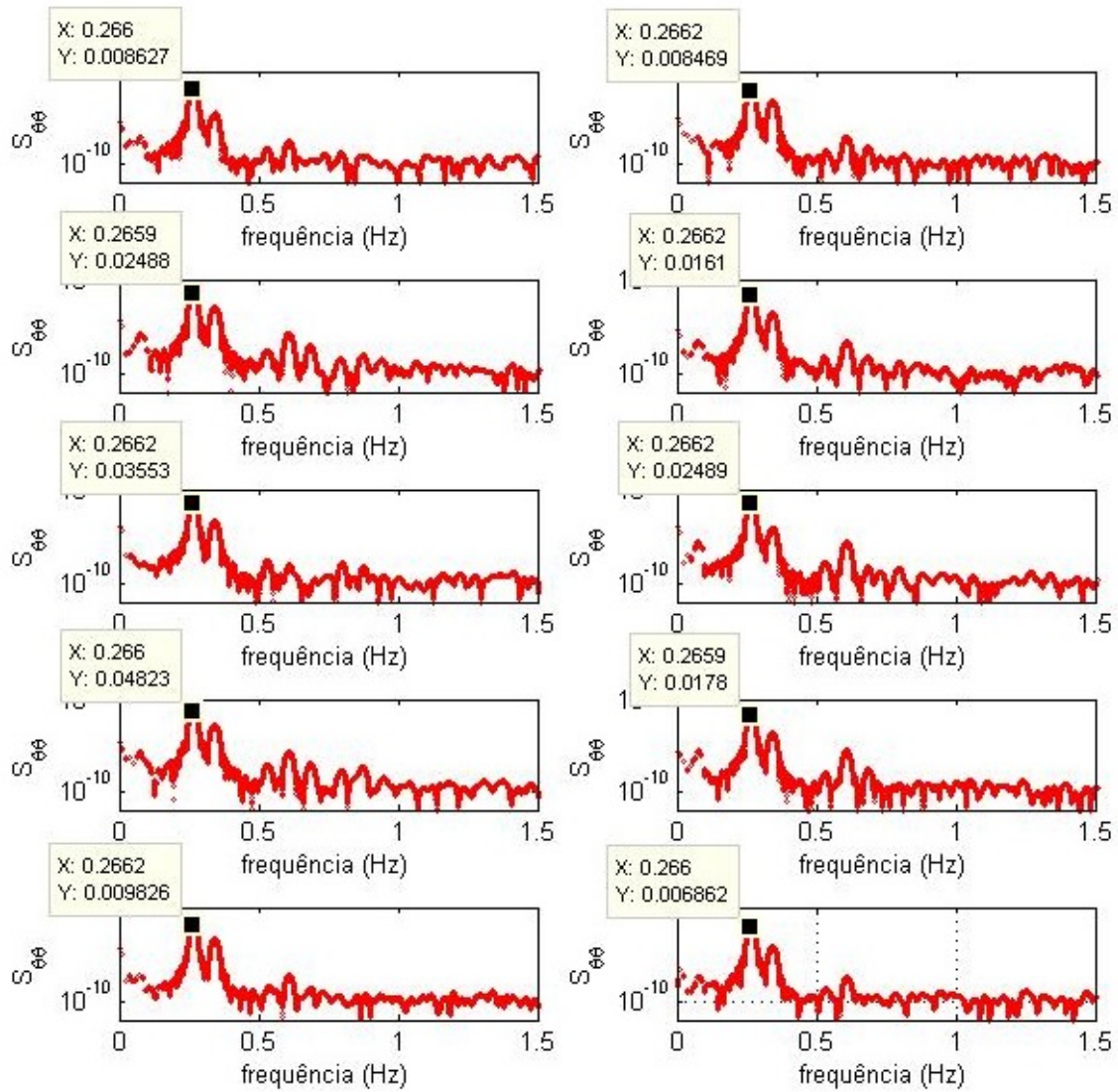


Figura C.12 – Espectro de potência da bancada com a pá