



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE
TRUNCAMENTO BALANCEADO

YUSSEF GUARDIA ISMAEL ACLE
ORIENTADOR: FRANCISCO DAMASCENO FREITAS

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

BRASÍLIA, 7 DE JULHO DE 2016



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE
TRUNCAMENTO BALANCEADO

YUSSEF GUARDIA ISMAEL ACLE

ORIENTADOR: FRANCISCO DAMASCENO FREITAS

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

BRASÍLIA/DF: 7 DE JULHO - 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE
TRUNCAMENTO BALANCEADO

YUSSEF GUARDIA ISMAEL ACLE

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO
ELETRICISTA.

APROVADA POR:

Prof. Francisco Damasceno Freitas, Dr. (ENE-UnB)
(Orientador)

Prof. Kleber Melo e Silva, Dr. (ENE-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Renato Alves Borges, Dr. (ENE-UnB)
(Examinador Interno)

BRASÍLIA/DF, 7 DE JULHO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

ACLE, YUSSEF GUARDIA ISMAEL

REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS
DE TRUNCAMENTO BALANCEADO.

[Distrito Federal] 2016.

xvii, 137 páginas, 297 mm (ENE/FT/UnB, Engenheiros Eletricistas, 2016).

Monografia de Graduação - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Redução de Ordem

2. Truncamento Balanceado

3. Métodos ADI

4. Projeção em subespaços de Krylov

I. ENE/FT/UnB

II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Acle, Y. G. I. (2016). REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE TRUNCAMENTO BALANCEADO. Monografia de Graduação, Publicação ENE/2016, Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 137 páginas.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Yussef Guardia Ismael Acle

TÍTULO: REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE TRUNCAMENTO BALANCEADO

GRAU / ANO: Engenheiro Eletricista / 2016

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta monografia de graduação e para emprestar tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Yussef Guardia Ismael Acle

Brasília – DF

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado em honra a

José Ismael Acle

Amne Acle de Ismael

Lazaro Francisco Guardia

Conceição Aparecida Dorta Guardia

AGRADECIMENTOS

Agradeço pela oportunidade de participar deste curso de Engenharia Elétrica, que me forneceu esta importante formação acadêmica. Agradeço ao Professor Francisco Damasceno, por me aceitar para este trabalho em tempos muito sombrios, e por me orientar neste desafio. Agradeço aos professores desta banca examinadora, pelas contribuições que poderão agregar a este trabalho.

Agradeço aos meus pais, os quais nada impediu que tudo me provessem. Espero que este trabalho possa expressar minha gratidão. Agradeço a minha irmã, por me mostrar a importância da paciência e da manutenção da saúde.

Agradeço ao passado e ao futuro, por determinarem o presente.

Yussef

REDUÇÃO DE MODELO VIA TÉCNICAS DE TRUNCAMENTO BALANCEADO

AUTOR: Yussef Guardia Ismael Acle

ORIENTADOR: FRANCISCO DAMASCENO FREITAS

**Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica – Universidade de
Brasília.**

BRASÍLIA/DF: 7 DE JULHO - 2016.

Palavras-chave: Redução de Ordem de Modelo, Sistemas de Potência,
Truncamento Balanceado, Métodos ADI, Métodos de Projeção em
Subespaços de Krylov, MATLAB, Matriz Jacobiana Aumentada, Ope-
rações com Matrizes Esparsas

RESUMO

Este trabalho investiga duas técnicas utilizadas para a obtenção de modelos reduzidos. Ambas são fundamentadas no cálculo de gramianas de baixo rank, as quais servem de base para a determinação de sistemas balanceados e truncados. As técnicas baseadas no cálculo de fatores ADI e em projeção em subespaço de Krylov são especialmente estudadas. Diversos testes são apresentados visando avaliar o desempenho das técnicas. Em particular, estudos de sensibilidade de alguns parâmetros que afetam a precisão dos modelos são realizados.

Os testes são efetuados em vários modelos lineares de sistemas de potência, geralmente utilizados para a avaliação de estabilidade a pequenas perturbações de um sistema de potência.

Os resultados apresentados na forma de resposta em frequência, resposta no tempo e de autovalores ilustram a eficácia das técnicas de redução de modelos estudadas neste trabalho.

MODEL REDUCTION VIA BALANCED TRUNCATION TECHNIQUES

AUTHOR: Yussef Guardia Ismael Acle

SUPERVISOR & ADVISOR: FRANCISCO DAMASCENO FREITAS

Concluding Work of Electrical Engineering Undergraduate Degree – University of Brasília.

BRASÍLIA/DF: JULY, 7 - 2016.

Keywords: Model Order Reduction, Power Systems, Balanced Truncation, ADI methods, Krylov subspaces projection methods, MATLAB, Augmented Jacobian Matrix , Sparse Matrix Operations

ABSTRACT

This study investigates two techniques used for obtaining reduced models. Both are based on the calculation of low rank gramians, which are the basis for the determination of balanced and truncated systems. The techniques based on the ADI factors calculation and on projection on Krylov subspaces are especially studied. Several tests are presented to evaluate the performance of those techniques. In particular, sensitivity studies of some parameters that affect the accuracy of the models are executed.

Tests are performed at several linear models of power systems typically used for the evaluation of small disturbance stability of a power system.

The results presented in the form of frequency response, time response and eigenvalues illustrate the effectiveness of the model reduction techniques studied in this work.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | MOTIVAÇÃO E ESTADO DA ARTE | 1 |
| 1.2 | OBJETIVOS DESTES TRABALHOS | 3 |
| 1.3 | VISÃO GERAL DO TRABALHO | 4 |
| 1.4 | ORGANIZAÇÃO DO TEXTO | 6 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 7 |
| 2.1 | MATRIZES E AUTOVALORES | 7 |
| 2.2 | ORTONORMALIZAÇÃO E DECOMPOSIÇÕES MATRICIAIS | 8 |
| 2.3 | REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS E SISTEMA DESCRITOR . . | 11 |
| 2.4 | ESPARSIDADE DE MATRIZES E OPERAÇÕES IMPLÍCITAS | 13 |
| 2.5 | ESTABILIDADE E EQUAÇÃO MATRICIAL DE LYAPUNOV | 17 |
| 2.6 | TRUNCAMENTO BALANCEADO DE FORMA GERAL | 18 |
| 2.7 | SADPA E DEFLAÇÃO | 23 |
| 3 | MÉTODO ADI | 25 |
| 3.1 | <i>Alternating Direction Implicit</i> (ADI) | 25 |
| 3.2 | MELHORIAS DO MÉTODO DE TRABALHOS ANTERIORES | 26 |
| 3.3 | OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS ADI | 31 |
| 4 | MÉTODO EKS | 32 |
| 4.1 | SUBESPAÇOS DE KRYLOV | 32 |
| 4.2 | O MÉTODO EKS | 33 |
| 4.3 | VARIANTES DO MÉTODO EKS | 38 |
| 4.3.1 | COM RELAÇÃO ÀS OPERAÇÕES MATRICIAIS | 38 |
| 4.3.2 | COM RELAÇÃO À DECOMPOSIÇÃO SVD | 39 |
| 4.3.3 | ORTONORMALIZAÇÃO | 41 |
| 5 | RESULTADOS DE TESTES COMPUTACIONAIS | 42 |
| 5.1 | CONDIÇÕES DE REALIZAÇÃO DOS TESTES | 42 |
| 5.2 | TESTES APENAS COM O MÉTODO EKS | 46 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2.1 | OPERAÇÕES IMPLÍCITAS VERSUS EXPLÍCITAS | 46 |
| 5.2.2 | VARIANTES EKS | 55 |
| 5.2.3 | VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS | 65 |
| 5.2.4 | TESTES COM OUTRAS ORTONORMALIZAÇÕES | 80 |
| 5.2.5 | DIFERENTES FORMAS DE SVD | 87 |
| 5.2.6 | COMBINAÇÃO HÍBRIDA COM SADPA | 90 |
| 5.2.7 | COMPARAÇÃO COM OUTROS SUBESPAÇOS DE KRYLOV | 98 |
| 5.3 | TESTES APENAS COM O MÉTODO ADI | 107 |
| 5.3.1 | TEMPO E QUALIDADE COM E SEM O CÁLCULO DOS PARÂMETROS ADI | 107 |
| 5.3.2 | VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS ADI | 111 |
| 5.4 | TESTES COMPARATIVOS: MÉTODO ADI vs. MÉTODO EKS | 113 |
| 5.4.1 | TESTES COM CASO 1 | 113 |
| 5.4.2 | TESTES COM CASO 17 | 120 |
| 5.5 | RELAXAÇÃO DE HIPÓTESE SOBRE O SHIFT α | 125 |
| 6 | CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS | 131 |
| 6.1 | CONCLUSÕES GERAIS | 131 |
| 6.2 | SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS | 133 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 134 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Casos-exemplos utilizados nos testes | 43 |
| 5.2 | Shifts utilizados de forma padrão | 44 |
| 5.3 | 6 polos capturados pelo SADPA e seus respectivos resíduos (caso 17) . | 90 |
| 5.4 | 36 polos capturados pelo SADPA e seus respectivos resíduos (caso 17) . | 91 |
| 5.5 | Tempo médio de processamento (em segundos) do CASO 1. | 113 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Estrutura matricial de A | 14 |
| 2.2 | Estrutura matricial de A_a | 14 |
| 5.1 | Tempo para Jacobian em função da ordem do sistema. | 45 |
| 5.2 | Tempo para cálculo da matriz de estados por ordem de sistema. | 47 |
| 5.3 | Tempo para recuperação das matrizes B e C por ordem de sistema. | 47 |
| 5.4 | Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 1). | 49 |
| 5.5 | Tempo de processamento na inversão matricial (caso 1). | 49 |
| 5.6 | Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 1). | 50 |
| 5.7 | Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 3). | 50 |
| 5.8 | Tempo de processamento na inversão matricial (caso 3). | 51 |
| 5.9 | Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 3). | 51 |
| 5.10 | Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 11). | 52 |
| 5.11 | Tempo de processamento na inversão matricial (caso 11). | 52 |
| 5.12 | Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 11). | 53 |
| 5.13 | Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 17). | 53 |
| 5.14 | Tempo de processamento na inversão matricial (caso 17). | 54 |
| 5.15 | Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 17). | 54 |
| 5.16 | Tempo de processamento da graminiana X_B | 56 |
| 5.17 | Tempo de processamento da graminiana X_C | 56 |
| 5.18 | Tempo de processamento da graminiana X_B , apenas variantes. | 57 |
| 5.19 | Tempo de processamento da graminiana X_C , apenas variantes. | 57 |
| 5.20 | IER no cálculo de X_B para cada variante. | 58 |
| 5.21 | IER no cálculo de X_C para cada variante. | 58 |
| 5.22 | Resposta em frequência para cada variante (caso 1). | 60 |
| 5.23 | Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 1). | 60 |
| 5.24 | Resposta em frequência para cada variante (caso 2). | 61 |
| 5.25 | Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 2). | 61 |
| 5.26 | Resposta em frequência para cada variante (caso 11). | 62 |
| 5.27 | Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 11). | 62 |
| 5.28 | Tempo de processamento do MOR para cada variante. | 63 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.29 | IER no cálculo do MOR para cada variante. | 64 |
| 5.30 | IERTP no cálculo do MOR para cada variante. | 64 |
| 5.31 | Sensibilidade da resposta em frequência para diferentes shifts (caso 1). . . | 66 |
| 5.32 | Módulo do erro da resposta em frequência (caso 1). | 66 |
| 5.33 | Sensibilidade da fase para diferentes shifts (caso 1). | 67 |
| 5.34 | Defasagem entre FOM e MOR para diferentes shifts (caso 1). | 67 |
| 5.35 | Polos do sistema para diferentes shifts (caso 1). | 68 |
| 5.36 | Polos do sistema para diferentes shifts (caso 1), imagem aumentada. . . | 68 |
| 5.37 | IER em função do shift α (caso 1). | 69 |
| 5.38 | Resposta em frequência para diferentes valores de w (caso 1). | 71 |
| 5.39 | Erro em frequência para diferentes valores de w (caso 1). | 71 |
| 5.40 | Sensibilidade da fase para diferentes valores de w (caso 1). | 72 |
| 5.41 | Defasagem entre FOM e MOR para diferentes valores de w (caso 1). . . | 72 |
| 5.42 | Polos do sistema para diversos w (caso 1). | 73 |
| 5.43 | Polos do sistema para diversos w (caso 1), imagem aumentada. | 73 |
| 5.44 | Tempo de processamento do MOR para diversos w (caso 1). | 74 |
| 5.45 | IER para diversos w (caso 1). | 75 |
| 5.46 | IERTP para diversos w (caso 1). | 75 |
| 5.47 | Resposta em frequência para diferentes ordens de MOR (caso 1). | 77 |
| 5.48 | Módulo do erro da resposta em frequência (caso 1). | 77 |
| 5.49 | Sensibilidade da fase para diferentes ordens de MOR (caso 1). | 78 |
| 5.50 | Defasagem entre FOM e MOR para diferentes ordens de MOR (caso 1). . | 78 |
| 5.51 | Polos do sistema para diferentes ordens de MOR (caso 1). | 79 |
| 5.52 | IER em função da ordem k do MOR (caso 1). | 79 |
| 5.53 | Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 1). . . | 81 |
| 5.54 | Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 1). | 81 |
| 5.55 | Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 5). . . | 82 |
| 5.56 | Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 5). | 82 |
| 5.57 | Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 11). . . | 83 |
| 5.58 | Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 11). | 83 |
| 5.59 | Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 17). . . | 84 |
| 5.60 | Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 17). | 84 |
| 5.61 | Tempo de processamento para diferentes ortonormalizações. | 85 |
| 5.62 | IER para diferentes ortonormalizações. | 86 |
| 5.63 | IERTP para diferentes ortonormalizações. | 86 |
| 5.64 | Tempo de processamento do SVD pela ordem do sistema. | 87 |
| 5.65 | Os $2w$ valores singulares para diferentes formas de SVD (caso 1). | 88 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.66 | Erro relativo dos $2w$ valores singulares (caso 1). | 88 |
| 5.67 | Resposta em frequência com SVD por Cholesky (caso 1). | 89 |
| 5.68 | Erro em frequência com SVD por Cholesky (caso 1). | 89 |
| 5.69 | 6 polos do sistema capturados pelo SADPA (caso 17). | 92 |
| 5.70 | 36 polos do sistema capturados pelo SADPA (caso 17). | 92 |
| 5.71 | Resposta em frequência com e sem SADPA (caso 2). | 94 |
| 5.72 | Erro em frequência com e sem SADPA (caso 2). | 94 |
| 5.73 | Resposta em frequência com e sem SADPA (caso 13). | 95 |
| 5.74 | Erro em frequência com e sem SADPA (caso 13). | 95 |
| 5.75 | Resposta em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.261$ (caso 17). | 96 |
| 5.76 | Erro em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.261$ (caso 17). | 96 |
| 5.77 | Resposta em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.8$ (caso 17). | 97 |
| 5.78 | Erro em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.8$ (caso 17). | 97 |
| 5.79 | Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 1). | 99 |
| 5.80 | Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 1). | 99 |
| 5.81 | Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 1). | 100 |
| 5.82 | Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 11). | 100 |
| 5.83 | Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 11). | 101 |
| 5.84 | Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 11). | 101 |
| 5.85 | Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 13). | 102 |
| 5.86 | Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 13). | 102 |
| 5.87 | Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 13). | 103 |
| 5.88 | Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 17). | 103 |
| 5.89 | Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 17). | 104 |
| 5.90 | Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 17). | 104 |
| 5.91 | Tempo de processamento para diferentes subespaços | 105 |
| 5.92 | IER para diferentes subespaços | 106 |
| 5.93 | IERTP para diferentes subespaços | 106 |
| 5.94 | Resposta em frequência com e sem c.p. (caso 1) | 108 |
| 5.95 | Erro em frequência com e sem c.p. (caso 1) | 108 |
| 5.96 | Resposta no domínio do tempo com e sem c.p. (caso 1) | 109 |
| 5.97 | Erro no domínio do tempo com e sem c.p. (caso 1) | 109 |
| 5.98 | Polos do sistema com e sem c.p. (caso 1) | 110 |
| 5.99 | Erro em frequência com e sem c.p. (caso 1), c.p. ruim | 110 |
| 5.100 | IER em função de $-\mu_1$ (caso 1) | 111 |
| 5.101 | IER em função de $-\mu_1$ e $-\mu_2$ (caso 1) | 112 |
| 5.102 | IER em função de $-\mu_1$ e $-\mu_2$ (caso 1), curvas de nível | 112 |

| | |
|--|-----|
| 5.103 IER em função do shift α (caso 1), com $w = 80$ | 114 |
| 5.104 IER em função do shift α (caso 1), com $w = 100$ | 114 |
| 5.105 IER em função do shift α (caso 1), com $w = 120$ | 115 |
| 5.106 Resposta em frequência com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$ | 116 |
| 5.107 Erro em frequência com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$ | 116 |
| 5.108 Resposta no tempo com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$ | 117 |
| 5.109 Erro no tempo com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$ | 117 |
| 5.110 Polos do sistema com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$ | 118 |
| 5.111 Erro em frequência com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$ | 118 |
| 5.112 Erro no tempo com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$ | 119 |
| 5.113 Polos do sistema com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$ | 119 |
| 5.114 Resposta em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$ | 121 |
| 5.115 Erro em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$ | 121 |
| 5.116 Resposta no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$ | 122 |
| 5.117 Erro no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$ | 122 |
| 5.118 Polos do sistema com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$ | 123 |
| 5.119 Erro em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$ | 123 |
| 5.120 Erro no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$ | 124 |
| 5.121 Polos do sistema com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$ | 124 |
| 5.122 IER em função do shift α (caso 1), com $w = 80$ | 126 |
| 5.123 Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 1), com $w = 80$ | 128 |
| 5.124 Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 1), com $w = 80$ | 128 |
| 5.125 Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 2), com $w = 80$ | 129 |
| 5.126 Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 2), com $w = 80$ | 129 |
| 5.127 Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 17), com $w = 80$ | 130 |
| 5.128 Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 17), com $w = 80$ | 130 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

| | |
|--------------------------------------|--|
| M | Matriz genérica |
| A, B, C, D | Matrizes de estado, entrada, saída e de transmissão direta |
| \mathbf{x} | Vetor de variáveis de estado |
| $\dot{\mathbf{x}}$ | Derivada de \mathbf{x} no tempo |
| \mathbf{u} | Vetor de entradas |
| \mathbf{y} | Vetor de saídas |
| \mathbf{z} | Vetor de variáveis algébricas |
| f | Frequência em Hz |
| $H(s)$ | Resposta em frequência com variável s |
| $J_1, J_2, J_3,$ $J_4, B_1, B_2,$ | Matrizes esparsas da representação descritora |
| C_1, C_2, D_a | |
| A_a, B_a, C_a | Matrizes esparsas aumentadas da representação descritora |
| X_B, X_C | Matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade |
| T_L, T_R | Matrizes de transformação de ordem esquerda e direita |
| $A_R, B_R,$ C_R, D_R | Representação do MOR em espaço de estados |
| k | |
| $A_S, B_S,$ C_S, D_S | Sistema originado dos polos e resíduos capturados pelo SADPA |
| Z_B, Z_C | |
| | Fatores de Cholesky das matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade |
| H^+, H^- | Matrizes de <i>Ritz</i> referentes a A e A^{-1} |
| k^+, k^- | Número de valores de <i>Ritz</i> referentes a A e A^{-1} |
| \mathcal{K}_w^E | Subespaço estendido de Krylov de dimensão $2w$ |
| V_B, V_C | Matrizes de projeção nos subespaços de Krylov, de controlabilidade e observabilidade |

| | |
|------------|---|
| T | Projeção da matriz de estado nos subespaços de Krylov |
| Y_B, Y_C | Soluções das equações de Lyapunov, de controlabilidade e observabilidade, projetadas nos subespaços de Krylov |

Símbolos Gregos

| | |
|-------------|--|
| σ_i | i -ésimo valor singular |
| μ_i | O i -ésimo parâmetro ADI |
| α | Shift ou deslocamento realizado para estabilizar sistemas |
| λ_i | Autovalor i |
| ω | Frequência angular, em rad/s |
| β | Valor de shift para funcionamento da fatoração de Cholesky |

Siglas

| | |
|-----------|---|
| FOM | <i>Full Order Model</i> |
| MOR | Modelo de Ordem Reduzida |
| CEPEL | Centro de Pesquisas de Energia Elétrica |
| SADPA | <i>Subspace Accelerated Dominant Pole Algorithm</i> |
| SVD | <i>Singular Value Decomposition</i> |
| ADI | <i>Alternate Direction Implicit</i> |
| LR-ADI | <i>Low Rank ADI</i> |
| LRCF-ADI | <i>Low Rank Cholesky Factors ADI</i> |
| SLRCF-ADI | <i>Sparse LRCF-ADI</i> |
| EKS | <i>Extended Krylov Subspace</i> |
| TKS | <i>Traditional Krylov Subspace</i> |
| IKS | <i>Inverse Krylov Subspace</i> |
| QRI | Decomposição QR inexata |
| TP | Tempo de Processamento (em segundos) |
| IER | Índice de Erro Relativo |
| IERTP | Índice de Erro Relativo com Tempo de Processamento |
| MATLAB | Matrix Laboratory, <i>software</i> interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico |
| PACDYN | Programa de Análise Linear e Controle do Amortecimento de Oscilações em Sistemas de Potência |
| PSS | <i>Power System Stabilizers</i> |
| pu | Por unidade |
| SEP | Sistema Elétrico de Potência |

Capítulo 1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E ESTADO DA ARTE

Os sistemas elétricos de potência, quando modelados em determinado ponto de operação, levam a representações lineares que podem incluir centenas, milhares e inclusive dezenas de milhares de estados [1, 2]. A análise desses modelos, para fins de estabilidade, controle, resposta em frequência e no tempo, etc., pode demandar muito tempo de processamento, ou até mesmo se tornar inviável. Por isso a importância da redução de ordem de tais modelos, gerando modelos de ordens significativamente inferiores aos originais, mas com comportamento e respostas praticamente iguais aos do sistema original (FOM, *Full Order System*). Esses modelos são conhecidos como modelos de ordem reduzida (MOR).

Muitas técnicas existem para a redução de ordem de sistemas lineares. Entre as mais contempladas na literatura científica estão o truncamento modal [3–9] e o truncamento balanceado [3, 7, 10–17], o qual será assunto deste trabalho.

Truncamento modal consiste na identificação dos polos dominantes de um sistema original e na constituição de um MOR com esses polos e seus respectivos resíduos. Um dos métodos mais eficientes para o cálculo exato dos polos dominantes é o *Subspace Accelerated Dominant Pole Algorithm*, ou SADPA [9]. Este algoritmo tem sido utilizado em diversos trabalhos e frequentemente adaptado e combinado a outros métodos. Uma desvantagem dos métodos de truncamento modal, em comparação com métodos de truncamento balanceado, está na necessidade do cálculo de um número maior de polos para a realização do sistema reduzido, além de demandar considerável tempo de processamento [7].

Truncamento balanceado não objetiva o cálculo exato dos polos dominantes do sistema original, mas sim um MOR de ordem bastante reduzida e com alta fidedignidade de respostas e comportamento em relação ao original. Entre os métodos de truncamento balanceado mais competitivos destacados na literatura se encontram os métodos que envolvem fatores *Alternate Direction Implicit* (ADI) [3, 10–12] e os

métodos baseados em projeções em subespaços de Krylov [13–17]. Estes dois métodos para o truncamento balanceado são capazes de realizar a redução de ordem em tempos inferiores ao do truncamento modal, por exemplo, e ainda mantêm relativa qualidade no desempenho dos MORs gerados, o que torna necessária uma comparação entre ambos os métodos, ADI e de projeção em subespaços de Krylov, uma das finalidades principais deste trabalho.

O truncamento balanceado se inicia pela resolução de um par de equações matriciais de Lyapunov, de controlabilidade e de observabilidade. As soluções das equações de Lyapunov X_B e X_C são chamadas de matrizes gramianas de controlabilidade e de observabilidade, respectivamente. Em seguida, são computados os valores singulares de Hankel pela decomposição SVD (do inglês, *Singular Value Decomposition*) do produto $X_B^* X_C$. O truncamento balanceado ocorre no sentido de desprezar os valores de Hankel de menor magnitude. As matrizes de vetores singulares à direita e à esquerda são ajustadas em tamanho de acordo com o truncamento e utilizadas para a obtenção do MOR por meio do truncamento balanceado de raiz quadrada [3, 12, 17].

A diferença entre os métodos ADI e de projeções de Krylov está na forma em que se resolve numericamente o conjunto de equações de Lyapunov, e, em alguns casos, no formato da decomposição SVD. O cálculo das matrizes gramianas pode ser efetuado por meio da resolução direta (exata) de equações de Lyapunov ou de forma iterativa, em que apenas uma aproximação da gramiana - explorando seu baixo rank -, é utilizada. O cálculo direto é bastante custoso do ponto de vista computacional, ou mesmo inviável. Este aspecto motivou diversas pesquisas por técnicas que proporcionassem soluções mais eficientes [3, 7, 10–20]. Neste sentido, foram propostos métodos iterativos baseados em projeções de subespaços de Krylov e truncamento balanceado de baixo rank. Estes últimos, definidos com base nos denominados fatores ADI.

O método ADI [3, 10–12, 18–20] propõe um método iterativo com o uso de deslocamentos, ou shifts, da matriz de estados, e de sua transposta, com os parâmetros ADI. Um conjunto de trabalhos acrescentou aperfeiçoamentos para melhorar o desempenho deste método: LR-ADI [10–12, 19, 20], LRCF-ADI [3, 20], SLRCF-ADI [3, 21], que trazem a fatoração de Cholesky das matrizes gramianas, reordenamento dos parâmetros ADI e uso de estruturas matriciais esparsas e cálculos implícitos.

Já o método de projeções de Krylov [13–17] consiste em utilizar matrizes de

projeção com colunas ortonormais entre si para projetar as duas equações de Lyapunov em determinado subespaço de Krylov, diminuindo as dimensões das matrizes nas equações. O principal subespaço que será considerado neste trabalho é da forma

$$\mathcal{K}_w^E(A, B) = \{B, A^{-1}B, AB, A^{-2}B, \dots, A^{(w-1)}B, A^{-w}B\} \quad , \quad (1.1)$$

o subespaço estendido de Krylov (EKS). As equações de Lyapunov projetadas são rapidamente resolvidas por métodos tradicionais, como Bartels-Stewart [22, 23], e uma projeção inversa leva as soluções obtidas ao domínio original. Tais soluções não são exatamente as matrizes gramianianas, mas normalmente constituem boa aproximação. Aperfeiçoamentos do método têm sido realizados, inclusive o uso de estruturas esparsas e cálculos implícitos [24–26].

1.2 OBJETIVOS DESTA TRABALHO

O presente trabalho tem a finalidade de dar continuidade aos estudos de redução de ordem de modelos de potência por truncamento balanceado, com realização de simulações que permitam comparar o desempenho de diferentes técnicas encontradas na literatura e possíveis adaptações e combinações. Especificamente, serão comparados os métodos ADI e os métodos de projeção em subespaços de KRYLOV.

Em termos mais específicos, os objetivos são:

- O levantamento teórico dos métodos ADI e de projeção no EKS, para a redução de ordem pelo truncamento balanceado. Enquanto o método ADI se encontra mais desenvolvido e consolidado na literatura científica, o método de projeção no EKS deve ser analisado e, se possível, deve incorporar adaptações e melhorias que o tornem apto a competir com o método ADI em níveis equiparáveis;
- Realização de testes buscando avaliar o desempenho de cada método em diferentes circunstâncias. Dada a grande quantidade de variantes que o método EKS pode assumir, cada uma deve ser testada e avaliada em busca das melhores opções para otimizar o método, frente ao método ADI;
- Realização de testes comparativos entre o método ADI e o método EKS. Em condições semelhantes de processamento, os dois métodos devem ser confrontados e avaliados pelas suas capacidades em reduzir modelos com qualidade e baixo custo computacional.

1.3 VISÃO GERAL DO TRABALHO

Em comparação com os métodos de truncamento modal, os métodos de redução de ordem por truncamento balanceado podem gerar MORs em menos tempo e de ordens menores. O truncamento balanceado requer a solução de um par de equações matriciais de Lyapunov, etapa que demanda mais tempo e esforço computacional em todo o processo de redução de ordem. Os métodos tradicionais de resolução de equações de Lyapunov se tornam ineficazes para sistemas FOM de grande ordem. Por isso, são utilizados métodos que obtêm soluções aproximadas para as matrizes gramianianas, com precisão satisfatória e em tempo viável. No desenvolvimento deste trabalho dois destes métodos foram abordados:

- O método ADI, que utiliza os fatores ADI em um processo iterativo bastante otimizado que explora o uso de fatores de baixo *rank* de Cholesky para aproximar as matrizes gramianianas;
- O método EKS, que projeta o par de equações de Lyapunov no subespaço estendido de Krylov, de menor ordem, o que permite a utilização de métodos convencionais para rapidamente resolver as equações projetadas. Em seguida, essas soluções sofrem uma projeção inversa para o domínio original e constituem boas aproximações para as matrizes gramianianas.

Em ambos os métodos, buscou-se utilizar a representação dos sistemas na forma descritora com matrizes esparsas. Desta forma, as operações matriciais necessárias são realizadas de forma implícita, sem a necessidade do cálculo e armazenamento da matriz de estado densa, ou de sua inversa. Além disso, a fatoração LUPQR é utilizada para melhorar o desempenho das operações realizadas implicitamente.

Os parâmetros intrínsecos a cada um destes métodos são avaliados quanto ao impacto de seus valores no desempenho do MOR gerado. Em especial, é verificado que menores valores para o shift α trazem melhores resultados.

Quanto ao método EKS, uma grande parte do tempo de processamento é consumida no processo reortonormalização necessário para construir as matrizes de projeção ao subespaço EKS. O uso da decomposição QR é utilizado como padrão para esta reortonormalização, porém o processo de Gram-Schmidt é utilizado como

alternativa, resultando mais rápido que o QR. Ainda, é proposto um esquema de reortonormalização que intercala iterações, o QR inexato, ou QRI. Verificou-se que o QRI a 2 poupa muito tempo de processamento e gera resultados com qualidade satisfatória.

Quanto à decomposição SVD, o método ADI aproveita bem as suas soluções de baixo rank de fatores de Cholesky para realizar uma decomposição SVD otimizada. Já o método EKS se torna ineficiente se utilizar o SVD no formato original. Duas alternativas são utilizadas para o cálculo eficiente do SVD neste método. A primeira consiste em fabricar fatores de Cholesky com base nas soluções de Lyapunov no subespaço EKS e utilizar as matrizes de projeção para torná-los de baixo *rank*. A segunda alternativa consiste em projetar o formato original utilizado no SVD à esquerda e à direita com as matrizes de projeção (V_B , V_C). Esta última opção resulta mais rápida e gera os valores singulares mais próximos do formato original.

Uma combinação híbrida pode ser realizada entre o método de truncamento modal pelo SADPA e o método de truncamento balanceado EKS. Embora o tempo consumido nesta combinação seja elevado, é possível alcançar uma melhora no desempenho a baixas frequências do MOR resultante.

Quando os métodos ADI e EKS são comparados entre si, o ADI gera MORs com qualidades superiores, embora o EKS possa ser configurado para consumir tempos menores. Em sistemas FOM que possuem, em sua resposta em frequência, picos de grande magnitude e larga banda, o método EKS não consegue reduzir o sistema de forma satisfatória, enquanto que o método ADI pode conseguir, se adequadamente ajustado.

Por fim, é avaliada a possibilidade de se realizar a redução de ordem em sistemas que não estejam estáveis (conforme teoria), ou seja, com valor de shift α (ou $\alpha - \mu_{\min}$) quase nulo. De fato, esta relaxação de hipótese permitiu que ambos os métodos fornecessem MORs com qualidades superiores, em especial para a região de baixas frequências. Entre os dois métodos, o ADI sofreu o melhor aprimoramento com esta relaxação de hipótese.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este relatório possui 6 capítulos. Além deste capítulo introdutório, os seguintes capítulos são:

- **Capítulo 2**, em que são apresentados os conceitos teóricos gerais considerados essenciais para o entendimento do assunto desenvolvido nos capítulos seguintes;
- **Capítulo 3**, em que é realizado um levantamento teórico geral do método ADI e as melhorias que recebeu em trabalhos anteriores, assim como descrições e observações sobre sua forma de operação;
- **Capítulo 4**, em que é realizado um levantamento teórico de trabalhos anteriores para o método EKS, assim como são apresentadas algumas possíveis variações e formas de implementar o método, por meio de algoritmos descritivos e proposições com desenvolvimento próprio;
- **Capítulo 5**, em que são apresentados os principais resultados computacionais das comparações e análises de desempenho para os dois métodos. As seções dos resultados foram divididas de forma a acompanhar uma relativa progressão da complexidade e importância dos resultados obtidos;
- **Capítulo 6**, em que são discutidas as conclusões deste trabalho e são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem a finalidade de apresentar os principais conceitos e bases teóricas para o bom entendimento do tema desenvolvido neste trabalho.

2.1 MATRIZES E AUTOVALORES

Seja uma matriz genérica M com n linhas e m colunas, ou seja, $M \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Um elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de M será denotado por (m_{ij}) . Seguem algumas definições que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

O *rank*, ou posto, da matriz M é o menor entre o máximo número de linhas linearmente independentes entre si e o máximo número de colunas linearmente independentes entre si [27, 28]. Ou seja, $\text{rank} = \min(\dim(L_n), \dim(C_m))$, em que L_n e C_m são, respectivamente, os subespaços de maior dimensão que podem ser gerados pelas linhas e colunas de M .

A transposta de M , denotada M^T , consiste no rearranjo dos elementos de M de forma que, para cada linha i e coluna j de M^T , o elemento (m_{ij}^T) seja igual a (m_{ji}) de M . A transposta conjugada de M , denotada M^* , é a matriz resultante após se obter o conjugado complexo elemento a elemento de M^T .

Uma matriz é simétrica se $M = M^T$, o que obriga que M seja matriz quadrada, ou seja, com mesmo número de linhas e colunas.

A inversa de uma matriz quadrada $M_{n \times n}$, denotada M^{-1} , é tal que $MM^{-1} = M^{-1}M = I_{n \times n}$. A matriz identidade de ordem n será representada por $I_{n \times n}$. A inversa de M existe e é única se o *rank* de M é igual a n , ou seja, completo, o que é equivalente à condição do determinante de M ser não nulo.

Uma matriz é ortogonal se $M^T M = M M^T = I_{n \times n}$, válido também somente para

matrizes quadradas. Para os casos complexos, se uma matriz de norma unitária possui inversa igual à sua transposta conjugada, $M^* = M^{-1}$, é chamada de unitária.

O espaço nulo \mathcal{N} de uma matriz quadrada $M_{n \times n}$ é definido da seguinte forma: $\mathcal{N}(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx = \mathbf{0}\}$. Em outras palavras, é o espaço que engloba todas as soluções do sistema linear homogêneo para a matriz M. A seguinte propriedade é válida: $rank(M) + dim(\mathcal{N}(M)) = n$.

Os autovalores λ_i de uma matriz quadrada M são as soluções para a equação:

$$\det(\lambda I - M) = 0 \quad (2.1)$$

O polinômio $p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ é chamado de polinômio característico de M. O maior valor absoluto entre os autovalores é chamado de raio espectral de M. Para determinado autovalor λ_i de M, se existir um vetor não nulo x_i que satisfaça $(\lambda_i I - M)x_i = 0$, então x_i é chamado de autovetor (à direita) de M associado ao autovalor λ_i .

Uma matriz quadrada M é positiva definida se $x^T M x > 0$, para todo vetor $x \neq \mathbf{0}$. Neste caso, todos os autovalores de M são positivos. De forma análoga, chama-se matriz negativa definida se $x^T M x < 0$ para todo vetor $x \neq \mathbf{0}$, com autovalores todos negativos.

A norma-2 de um vetor, também chamada de norma euclidiana, é definida da seguinte forma [27]: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{dim(x)} (x_i)^2}$. Para matrizes, a norma-2 é da forma $\|x\|_2 = \sqrt{\sigma(M)}$, em que $\sigma(M)$ é o maior autovalor de $M^T M$.

2.2 ORTONORMALIZAÇÃO E DECOMPOSIÇÕES MATRICIAIS

Processo de Gram-Schmidt

O processo de ortonormalização de Gram-Schmidt gera uma base de vetores ortonormais entre si baseado na projeção sucessiva de novos vetores da base em vetores já pertencentes à base. Inicialmente, é definido o operador de projeção vetorial:

$$proj_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad (2.2)$$

Em seguida, a partir de um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ não ortogonais entre si, o processo é seguido da seguinte forma [27]:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1, & e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2), & e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3), & e_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&\vdots & & \vdots \\
u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k), & e_k &= \frac{u_k}{\|u_k\|}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Enquanto que a base gerada $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ é ortogonal, a base gerada $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ é ortonormal.

Em termos computacionais, normalmente é utilizado o processo de Gram-Schmidt modificado para trazer estabilidade numérica. Neste processo, o termo calculado da forma $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k)$ em realidade é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u_k^{(1)} &= v_k - \text{proj}_{u_1}(v_k), \\
u_k^{(2)} &= u_k^{(1)} - \text{proj}_{u_2}(u_k^{(1)}), \\
&\vdots \\
u_k^{(k-2)} &= u_k^{(k-3)} - \text{proj}_{u_{k-2}}(u_k^{(k-3)}), \\
u_k^{(k-1)} &= u_k^{(k-2)} - \text{proj}_{u_{k-1}}(u_k^{(k-2)}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Decomposição QR

A fatoração QR [27, 29] expressa uma matriz $M_{n \times m}$ como $M = QR$. A matriz Q é uma matriz unitária em $\mathbb{R}^{n \times n}$ e R é uma matriz triangular superior em $\mathbb{R}^{n \times m}$ [27, 29]. Ainda existe a decomposição QR econômica, em que se $n > m$, apenas as m primeiras colunas de Q e as m primeiras linhas de R são computadas. Esta fatoração será utilizada para ortonormalizar entre si as colunas de determinada matriz.

Decomposição LUPQR

A decomposição LUPQR [24] consiste em uma extensão da fatoração LU de uma matriz, em que $M = LU$, L é uma matriz triangular inferior e U é triangular superior.

Conforme padronizado em documentação de Matlab [29], a fatoração LUPQR é da forma $P(R^{-1}M)Q = LU$ e só é feita para matrizes M esparsas não nulas, conforme é explicado na seção 2.4. Rescrevendo-se os termos obtém-se:

$$M = RP^{-1}LUQ^{-1}. \quad (2.5)$$

A matriz L é triangular inferior, U é triangular superior, P e Q são matrizes de permutação e R é uma matriz diagonal de escala. Este tipo de fatoração será revisto na seção 2.4.

Fatoração de Cholesky

A fatoração de Cholesky [3,27] tradicionalmente realiza a decomposição na forma $M = LL^*$, em que L é uma matriz triangular inferior. Para que a fatoração funcione e seja única, M deve ser positiva definida.

Ainda há a decomposição de M em fatores de Cholesky de baixo rank, da forma $M = ZZ^*$. Neste trabalho, esta decomposição será feita da seguinte forma: dada matriz $M_{n \times n}$ e o fator de Cholesky de baixo rank $Z_{n \times m}$, com $n \gg m$, é utilizada uma transformação matricial com uma matriz $V_{n \times m}$ de forma que $M = VYV^T$ e em seguida é feita a fatoração: $M = Vchol(Y)V^T = VLL^TV^T = (VL)(VL)^T = ZZ^T$. O operador $chol(\)$ indica a decomposição de Cholesky.

Decomposição SVD

A decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) [3,27,28] normalmente é utilizada em abordagens de aproximação para resolução de sistemas lineares não inversíveis por conta das matrizes não serem quadradas, no sentido de minimizar o erro quadrático desta aproximação. O interesse de se utilizar SVD neste trabalho está na obtenção dos valores singulares (de Hankel, como será explicado em seções posteriores).

Dada a matriz $M_{n \times m}$, a decomposição inicia-se pelo problema de autovalores e autovetores de MM^T :

$$\det(\lambda I - MM^T) = 0, \quad (2.6)$$

$$(\lambda_i I - MM^T)x_i = 0. \quad (2.7)$$

A raiz quadrada dos autovalores de MM^T leva aos valores singulares de M , denotados por $\sigma(M)$, ou seja, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. A decomposição SVD de M é dada na forma:

$$M = U\Sigma V^* \quad (2.8)$$

em que $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e ambas são ortonormais. As colunas de U e de V são chamadas de vetores singulares à esquerda e vetores singulares à direita, respectivamente. Além disso, os autovetores x_i obtidos na eq. 2.7 formam as colunas da matriz U . A matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ possui elementos não nulos apenas em sua diagonal principal e estes correspondem aos valores singulares de M , dispostos em ordem decrescente do canto superior esquerdo ao canto inferior direito de Σ .

2.3 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS E SISTEMA DESCRITOR

Um sistema linear invariante no tempo, com n estados, m entradas, q saídas, pode ser representado na forma de espaço de estados Σ_{SS} [3]:

$$\Sigma_{ss} \equiv \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada (ou de controle) e $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saída; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado ou de sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de saída e $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$ é a matriz de transmissão direta. Com auxílio da transformada de Laplace, a função de transferência ou resposta em frequência associada ao sistema (2.9) é definida por $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

É possível mostrar que, para a representação em espaços de estados, os autovalores do sistema, obtidos em $\det(sI - A) = 0$, são iguais aos polos de sua função de transferência, caso não tenha cancelamento exato de polos com zeros. O conhecimento da posição dos autovalores ou polos de um sistema é de fundamental importância para a análise de estabilidade.

Assim, os n autovalores representam os modos naturais do sistema e aparecem na resposta temporal como $e^{\lambda_n t}$ [30]. Eles podem ser reais ou complexos. Se forem complexos e o sistema físico for real, como no caso dos sistemas de potência, os autovalores sempre aparecem em pares conjugados.

A resposta de um sistema é composta por uma resposta natural e uma resposta forçada [30]. Quando o sistema apresenta todos os seus autovalores reais negativos, a resposta natural do sistema decresce exponencialmente e o valor final da saída será o da resposta forçada, adequadamente modificada em magnitude e fase. Se apresentar um autovalor complexo conjugado, com a parte real negativa, esse modo oscilará com amplitudes que decrescem exponencialmente em torno da resposta forçada. Nesse caso, com o tempo a resposta forçada será dominante. Por fim, se o sistema apresentar um autovalor real positivo, ou com parte real positiva, a resposta do sistema cresce exponencialmente e nunca tende à resposta forçada, o que caracteriza um sistema instável.

Os estados representados no vetor de estados \mathbf{x} constituem o conjunto, normalmente mínimo, de variáveis necessárias para representar o comportamento dinâmico do sistema linear. A representação de sistema descritor acrescenta ainda variáveis adicionais que não trazem acréscimo de informação a respeito da dinâmica do sistema, mas apenas explicitam informações de conexões e relações, entre grandezas, que não armazenam energia ao longo do tempo. Estas são as n_z variáveis algébricas do sistema. A representação na forma descritora é da seguinte forma [3]:

$$\Sigma_J \equiv \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= J_1 \mathbf{x}(t) + J_2 \mathbf{z}(t) + B_1 \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} &= J_3 \mathbf{x}(t) + J_4 \mathbf{z}(t) + B_2 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_1 \mathbf{x}(t) + C_2 \mathbf{z}(t) + D_a \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é um vetor de variáveis algébricas e $J_1 [n \times n]$, $J_2 [n \times n_z]$, $J_3 [n_z \times n]$, $J_4 [n_z \times n_z]$, $B_1 [n \times m]$, $B_2 [n_z \times m]$, $C_1 [q \times n]$, $C_2 [q \times n_z]$, e $D_a [q \times m]$ são matrizes esparsas de tamanho adequado. Para sistemas de potência reais, J_4 é sempre *inversível* [5,31]. As matrizes J_i também são chamadas de matrizes jacobianas em razão de serem resultado da aproximação linear de primeiro grau no processo de linearização. Neste trabalho, será utilizada a linearização adotada no aplicativo PacDyn [30,32].

Denotando o vetor de estados aumentado por $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{bmatrix}^T$, pode-se rescrever Σ_J :

$$\Sigma_J \equiv \begin{cases} E \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n_z} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n} & \mathbf{0}_{n_z \times n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + D_a \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

Define-se a matriz jacobiana aumentada A_a e as matrizes aumentadas B_a e C_a :

$$A_a = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As matrizes da representação em espaço de estados podem ser recuperadas a partir das matrizes $J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2, C_1, C_2$, e D_a por meio de [3]:

$$\begin{aligned} A &= J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3, & B &= B_1 - J_2 J_4^{-1} B_2, \\ C &= C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3, & D &= D_a - C_2 J_4^{-1} B_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4 ESPARSIDADE DE MATRIZES E OPERAÇÕES IMPLÍCITAS

Matrizes esparsas são aquelas que possuem uma grande quantidade de elementos nulos [25, 26]. Convenciona-se que matrizes esparsas possuam menos de 1% de seus elementos não nulos. Conforme pode ser visto na Figura 2.1, a matriz de estados A de determinado sistema de potência é muito densa, com cerca de 41.121% de elementos não nulos. Em contrapartida, a matriz jacobiana aumentada A_a possui cerca de 0.06824% de elementos não nulos e certamente é esparsa, como pode ser visto na Figura 2.2.

Além disso, sua estrutura matricial e posição dos elementos não nulos não é completamente aleatória, mas apresenta certos padrões que permitem tirar vantagem em determinadas operações.

Na representação de espaço de estados de sistemas de potência, a matriz de estados A frequentemente é densa, com poucos elementos nulos. Em muitos casos, dada a elevada ordem das matrizes de sistemas elétricos de potência, o cálculo de operações de inversão (A^{-1}) e produtos matriciais se tornam dispendiosos e provavelmente inviáveis no âmbito numérico-computacional. Uma alternativa que tem sido amplamente utilizada na literatura científica trata-se do uso de estruturas matriciais esparsas da representação na forma descritora para a realização das mesmas operações mencionadas, apenas de uma forma diferente, chamada implícita.

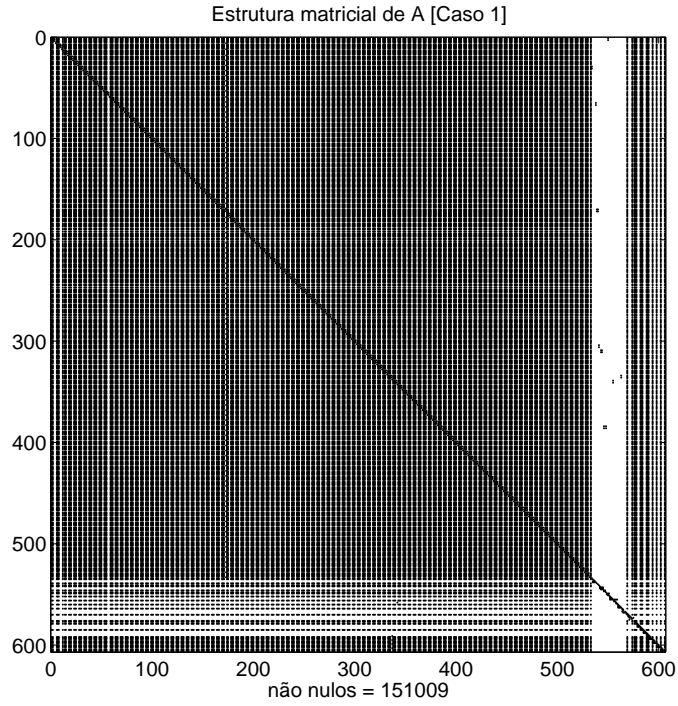


Figura 2.1: Estrutura matricial de A .

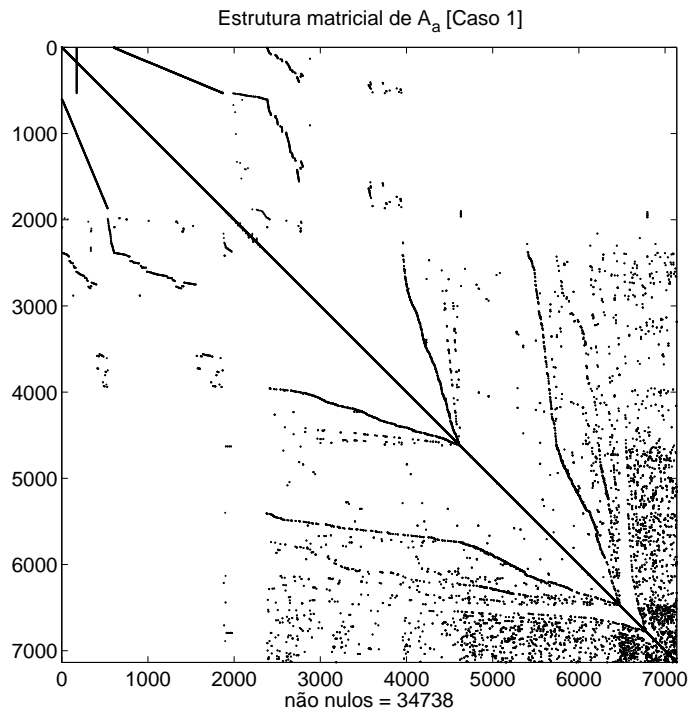


Figura 2.2: Estrutura matricial de A_a .

Enquanto que as operações ditas explícitas são realizadas diretamente na forma AV e $A^{-1}V$, as operações implícitas utilizam as matrizes esparsas da representação

descritora $(J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2, C_1, C_2, \text{ e } D_a)$, como visto nas equações 2.10. Desta forma, não há o cálculo e armazenamento de A ou A^{-1} nas operações implícitas. Uma otimização para o desempenho das operações implícitas é o uso de determinadas fatorações, como a LUPQR [24].

A seguir será apresentado como realizar as operações de multiplicação e inversão matricial de forma implícita.

Inversão Matricial

Para a inversão matricial, inicia-se com a forma explícita $X = A^{-1}B$, em que se deseja calcular X , o que implica no sistema linear $AX = B$. Com base na eq. 2.14, substitui-se para A e B :

$$(J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3)X = (B_1 - J_2 J_4^{-1} B_2). \quad (2.15)$$

Ou melhor,

$$J_1 X + J_2 J_4^{-1} (-J_3 X + B_2) = B_1 \quad (2.16)$$

Criando-se a variável intermediária $\Gamma = J_4^{-1}(-J_3 X + B_2)$, chega-se a

$$J_1 X + J_2 \Gamma = B_1, \quad (2.17)$$

$$J_3 X + J_4 \Gamma = B_2. \quad (2.18)$$

Agrupando-se em forma matricial, obtém-se [3]:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

O sistema linear na eq. 2.19 é rapidamente resolvido e, como a solução desejada é $X_{n \times n}$, e não $\begin{bmatrix} X & \Gamma \end{bmatrix}^T$, faz-se:

$$X_{n \times n} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n_z} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n} & \mathbf{0}_{n_z \times n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

No caso de ser necessária uma operação da forma $X = A^{-1}V$, em que V não possui uma forma descritora como B_a , pode-se utilizar, em lugar da eq. 2.19, a eq. 2.21:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0}_{n_z \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A operação de inversão matricial pode ser ainda mais otimizada agora que são utilizadas matrizes esparsas. Deve-se realizar a fatoração LUPQR [24] de A_a , ou seja, $A_a = R_{aa}P_{aa}^{-1}L_{aa}U_{aa}Q_{aa}^{-1}$, com subíndice aa, e em seguida:

$$A_a \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = R_{aa}P_{aa}^{-1}L_{aa}U_{aa}Q_{aa}^{-1} \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = B_a. \quad (2.22)$$

A solução será da forma

$$X = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n_z} \\ \mathbf{0}_{n_z \times n} & \mathbf{0}_{n_z \times n_z} \end{bmatrix} Q_{aa}U_{aa}^{-1}L_{aa}^{-1}P_{aa}R_{aa}^{-1}B_a. \quad (2.23)$$

Os procedimentos para inversão matricial envolvendo a matriz C são análogos pois será utilizada da forma $X = A^{-T}C^T$, em que o superíndice $-T$ indica operação de inversão e transposição da matriz.

Multiplicação Matricial

Para a multiplicação matricial, inicia-se com a forma explícita $X = AB$, em que se deseja calcular X. Com base na eq. 2.14, substitui-se para A e B:

$$X = (J_1 - J_2J_4^{-1}J_3)(B_1 - J_2J_4^{-1}B_2). \quad (2.24)$$

Apesar de se utilizar a matriz A de forma implícita, na multiplicação matricial convém recuperar as matrizes B e C do espaço de estados, já que esta recuperação demanda pouco esforço computacional e pouco tempo. A recuperação inicia-se pela fatoração LUPQR de J_4 , ou seja, $J_4 = R_{j4}P_{j4}^{-1}L_{j4}U_{j4}Q_{j4}^{-1}$, com subíndice j4, e em seguida:

$$B = B_1 - J_2J_4^{-1}B_2 = B_1 - J_2Q_{j4}U_{j4}^{-1}L_{j4}^{-1}P_{j4}R_{j4}^{-1}B_2, \quad (2.25)$$

$$C = C_1 - C_2J_4^{-1}J_3 = C_1 - \left[R_{j4}^{-T}P_{j4}^T L_{j4}^{-T}U_{j4}^{-T}Q_{j4}^T C_2^T \right]^T J_3. \quad (2.26)$$

em que o superíndice $-T$ indica operação de inversão e transposição da matriz. Uma vez recuperadas as matrizes B e C, a multiplicação é simplesmente conduzida da seguinte forma:

$$X = J_1B - J_2J_4^{-1}J_3B. \quad (2.27)$$

Novamente, a decomposição LUPQR [24] pode ser utilizada para melhorar o desempenho dos cálculos:

$$X = J_1 B - J_2 Q_{j4} U_{j4}^{-1} L_{j4}^{-1} P_{j4} R_{j4}^{-1} J_3 B. \quad (2.28)$$

Os procedimentos para multiplicação pela matriz C são análogos pois será utilizada da forma $X = A^T C^T$. O mesmo é observado pela multiplicação por qualquer matriz genérica V , de dimensões adequadas.

2.5 ESTABILIDADE E EQUAÇÃO MATRICIAL DE LYAPUNOV

Seja um sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ aproximado linearmente pela forma:

$$\dot{x} = Ax(t) \quad (2.29)$$

Um primeiro método para verificação da estabilidade de sistemas lineares passa pelo conceito de modos estáveis e instáveis do próprio sistema. No caso de variáveis contínuas, os autovalores instáveis de A se localizam à direita no plano complexo (polos sobre o eixo imaginário $j\omega$ levam a uma situação marginalmente estável, e são chamados de autovalores críticos). Já no caso discreto, a instabilidade é verificada pela presença de polos na região externa a um círculo unitário, no domínio Z . Esta metodologia de análise de estabilidade é referenciada como primeiro método de Lyapunov [23, 28].

O segundo método de Lyapunov consiste no estudo do comportamento de determinadas funções de campo vetorial que, para a estabilidade, devem assintoticamente atingir algum ponto de equilíbrio e permanecer em determinada vizinhança deste ponto de equilíbrio, a partir de certo instante de tempo.

A estabilidade de Lyapunov é enunciada a seguir [23, 28].

“Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico invariante no tempo é estável se existe uma função escalar de Lyapunov $L(x)$ continuamente diferenciável, de forma que, ao longo de toda e qualquer trajetória do sistema o seguinte é satisfeito:”

$$L(x) > 0, \quad L(0) = 0 \quad (2.30)$$

$$\dot{L}(x) = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \dot{x} \leq 0. \quad (2.31)$$

Normalmente, a função de Lyapunov utilizada é da forma quadrática $L(x) = x^T P x$, em que P é uma matriz simétrica positiva definida e invariante no tempo.

Para sistemas lineares, dado que as condições nas eq. 2.30 e eq. 2.31 devem valer para qualquer estado do sistema na eq. 2.29, pode-se desenvolver:

$$\begin{aligned} \dot{L}(x) &= \frac{d(x^T P x)}{dt} = \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \\ &= (Ax)^T P x + x^T P Ax = \\ &= x^T A^T P x + x^T P Ax = \\ &= x^T (A^T P + P A) x \\ &= -x^T Q x \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que foi definido $A^T P + P A = -Q$, e Q deve ser positivo definido para que $\dot{L}(x) < 0$. Se for possível encontrar uma matriz P positiva definida que leve a estes resultados, o sistema é estável segundo concepção de Lyapunov. Encontrar P é equivalente a encontrar a solução da equação

$$A^T P + P A = -Q, \quad (2.33)$$

chamada de equação algébrica matricial de Lyapunov, na forma contínua. Todas as matrizes da eq. 2.33 são quadradas e de mesmas dimensões que A .

Se a matriz $A \in \mathbb{R}_{n \times n}$ possui todos os seus autovalores com parte real negativa, ou seja, se é negativa definida, a eq. 2.33 possui uma única solução P positiva definida [23]. Neste caso, a solução P pode ser escrita da seguinte forma:

$$P = \int_0^\infty e^{A\tau} Q e^{A^T \tau} d\tau. \quad (2.34)$$

2.6 TRUNCAMENTO BALANCEADO DE FORMA GERAL

Nesta seção o truncamento balanceado na redução de ordem é descrito de forma generalizada, com propósito de apresentar como o método tem sido utilizado conforme

concepção deste trabalho. É importante ressaltar que a técnica de truncamento balanceado não objetiva a obtenção dos valores exatos de polos do sistema original (FOM), como é feito em truncamento modal, mas sim criar um MOR de ordem muito reduzida com polos que podem ou não coincidir com os polos do FOM. Em geral alguns polos coincidem, como os de maior resíduo.

Dado um sistema linear representado na forma de espaço de estados, ou na forma descritora, conforme seção 2.3, o primeiro passo é resolver um par de equações de Lyapunov, uma de controlabilidade e outra de observabilidade. A solução P da eq. 2.33 foi renomeada de X_B e X_C , respectivamente. Estas soluções são chamadas de matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade, respectivamente. Enquanto a equação de controlabilidade possui $Q = BB^T$, a equação de observabilidade, em estrutura transposta, possui $C^T C$ em lugar de Q e A^T em lugar de A , em referência à eq. 2.33.

$$AX_B + X_B A^T = -BB^T \quad (2.35)$$

$$A^T X_C + X_C A = -C^T C. \quad (2.36)$$

O par de equações 2.35 e 2.36 pode ser resolvido por métodos tradicionais, como Bartels-Stewart [22]. Contudo, em razão da elevada ordem dos sistemas que serão reduzidos, os métodos tradicionais se tornam ineficazes por demandarem tempo de processamento muito elevado. Esta é a razão de se utilizar outros métodos, como o EKS e ADI, para a solução rápida das equações de Lyapunov, mesmo que estas soluções sejam aproximadas.

Uma vez obtidas as soluções X_B e X_C , é realizada a decomposição SVD do produto $X_B^* X_C$ com a finalidade de obter os valores singulares de Hankel.

Em contraposição com a seção 2.2, a decomposição SVD será expressa na forma $X_B^* X_C = U_B \Sigma U_C^*$, em lugar da forma padrão $U \Sigma V^*$, apenas uma mudança de escrita. Dado que $X_B^* X_C$ é uma matriz quadrada de ordem n , pode-se escrever:

$$X_B^* X_C = \begin{bmatrix} ub_{11} & ub_{12} & \dots & ub_{1n} \\ ub_{21} & ub_{22} & \dots & ub_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ub_{n1} & ub_{n2} & \dots & ub_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} uc_{11} & uc_{12} & \dots & uc_{1n} \\ uc_{21} & uc_{22} & \dots & uc_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ uc_{n1} & uc_{n2} & \dots & uc_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (2.37)$$

em que (ub_{ij}) e (uc_{ij}) são os elementos de U_B e U_C , respectivamente, e $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ são os n valores singulares de Hankel, dispostos na diagonal de Σ de forma decrescente.

Após a obtenção dos valores singulares de Hankel, é realizado o truncamento até o k -ésimo maior valor singular, o que definirá a ordem $k \ll n$ do MOR,

$$\begin{aligned}
 U_B^k &= \begin{bmatrix} ub_{11} & ub_{12} & \dots & ub_{1k} \\ ub_{21} & ub_{22} & \dots & ub_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ub_{n1} & ub_{n2} & \dots & ub_{nk} \end{bmatrix} & \Sigma_k &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} \\
 U_C^k &= \begin{bmatrix} uc_{11} & uc_{12} & \dots & uc_{1k} \\ uc_{21} & uc_{22} & \dots & uc_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ uc_{n1} & uc_{n2} & \dots & uc_{nk} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Em seguida, são construídas as matrizes de transformação de ordem esquerda $T_L(n \times k)$ e de transformação de ordem direita $T_R(n \times k)$, tal que $T_L^T T_R = I_{k \times k}$ [3]:

$$\begin{aligned}
 T_L &= \text{real}(X_B) U_B^k \Sigma_k^{-1/2} \\
 T_R &= \text{real}(X_C) U_C^k \Sigma_k^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

em que $\text{real}(X)$ é apenas a parte real de X , pois as matrizes de transformação de ordem devem ser reais.

Finalmente, o MOR é montado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 A_R &= T_L^T A T_R, \\
 B_R &= T_L^T B, \\
 C_R &= C T_R, \\
 D_R &= D
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

O Algoritmo 1 resume o procedimento geral para o truncamento balanceado [3].

Algorithm 1 / Algoritmo 1: Truncamento balanceado de forma geral.

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A, B, C, D) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2, C_1, C_2, D_a$), ordem k do MOR.

SAIDA: MOR na representação de espaço de estados (A_R, B_R, C_R, D_R)

- 1: Inicialização (fatorações, cálculo de parâmetros e cálculos iniciais).
- 2: Resolução das equações de Lyapunov com a obtenção das matrizes gramianas X_B e X_C .

$$AX_B + X_B A^T = -BB^T$$

$$A^T X_C + X_C A = -C^T C$$

- 3: Decomposição SVD de $X_B^* X_C$.

$$U_B \Sigma U_C^* = X_B^* X_C$$

- 4: Truncamento após o k -ésimo maior valor singular de Hankel:

$$U_B^k = U_B(:, 1:k) \quad \Sigma_k = \Sigma(1:k, 1:k) \quad U_C^k = U_C(:, 1:k)$$

- 5: Cálculo das matrizes de transformação de ordem reais T_L e T_R como

$$T_L = \text{real}(X_B) U_B^k \Sigma_k^{-1/2} \text{ e } T_R = \text{real}(X_C) U_C^k \Sigma_k^{-1/2},$$

em que $\Sigma_k^{-1/2}$ corresponde à matriz com o inverso da raiz quadrada de elemento a elemento de Σ_k .

- 6: Montagem do MOR (A_R, B_R, C_R e D_R):

$$A_R = T_L^T A T_R,$$

$$B_R = T_L^T B,$$

$$C_R = C T_R,$$

$$D_R = D$$

Conforme concebido teoricamente, o truncamento balanceado requer que o sistema a ser reduzido seja estável. Contudo, muitos sistemas elétricos de potência, quando linearizados em certo ponto de operação, ocasionalmente geram modelos que podem incluir alguns poucos modos instáveis de parte real positiva não muito grande. Isto se torna ainda mais acentuado quando não são incluídos dispositivos que foram projetados para estabilizar a rede elétrica, como os PSS (*Power System Stabilizers*).

Um artifício que tem sido utilizado em outros trabalhos [3, 17, 21, 33] consiste em realizar um pequeno deslocamento/shift α na variável s da transformada de Laplace, de forma que $s = \rho + \alpha$. Pode ser mostrado que, ao se realizar esta operação, o plano complexo na variável ρ possui os seus polos deslocados à esquerda, em direção à estabilidade. Em termos da representação de espaço de estados, a única alteração consiste em realizar um deslocamento/shift na matriz de estados, tal que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_\alpha \mathbf{x} + B\mathbf{u} = (A - \alpha I_{n \times n})\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.41)$$

é um sistema estável, para um valor adequado de α , maior que a parte real do polo mais instável.

Após esta operação, a redução de ordem ocorre sobre este novo sistema e após obtido o MOR $(A_{R\alpha}, B_R, C_R, D_R)$, é realizado um deslocamento/shift inverso da matriz $A_{R\alpha}$:

$$A_R = A_{R\alpha} + \alpha I_{k \times k}. \quad (2.42)$$

Outra opção é simplesmente reconstruir o MOR com as eq. 2.40 utilizando a matriz A original sem shift.

No caso da representação da forma descritora, o shift é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A - \alpha I &= J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 - \alpha I = \\ (J_1 - \alpha I) - J_2 J_4^{-1} J_3 &= J_{1\alpha} - J_2 J_4^{-1} J_3, \end{aligned} \quad (2.43)$$

ou seja, basta realizar o shift na matriz J_1 . No shift inverso, a eq. 2.42 pode ser utilizada, ou simplesmente utilizar J_1 original, sem shift.

Normalmente, quando há polos instáveis nos modelos a serem reduzidos, estes polos possuem resíduos associados relativamente elevados. Consequentemente, o MOR geralmente incorpora fielmente as instabilidades do FOM, sem maiores dificuldades.

2.7 SADPA E DEFLAÇÃO

O SADPA [9] (do inglês, *Subspace Accelerated Dominant Pole Algorithm*) é um algoritmo que calcula de forma iterativa os polos dominantes e seus respectivos resíduos de sistemas de alta ordem. O processo requer pelo menos uma condição inicial de shift para direcionar o SADPA aos polos de interesse, o número de polos desejados e a tolerância desejada para a convergência do método. Para mais informações a respeito dos detalhes deste algoritmo, consultar [9].

Neste trabalho, com vistas a verificar se há melhora na qualidade final da redução de ordem, foi implementado uma combinação híbrida entre SADPA e o método EKS. Nesta combinação, inicialmente o algoritmo SADPA é utilizado para encontrar polos e resíduos de interesse, normalmente os polos instáveis e de maior resíduo, os quais são utilizados para deflacionar o sistema original e tentar eliminar o efeito de tais polos nos sinais de saída do sistema. Em seguida, o sistema deflacionado pode passar pela redução de ordem, em lugar do sistema original.

Embora o objetivo inicial desta combinação híbrida tenha sido uma tentativa falha de estabilizar o sistema sem a necessidade do shift α , percebeu-se que pode haver uma melhora na qualidade da redução de ordem com o uso de tal combinação híbrida. A seguir, o processo de deflação é descrito com mais detalhes.

Inicialmente utiliza-se o SADPA para capturar alguns polos de interesse e seus respectivos resíduos. Estes polos capturados incluem aqueles instáveis do FOM, e podem incluir também os de maior resíduo, responsáveis pela presença de picos de magnitude nas respostas em frequência. Com tais polos e seus resíduos identificados, é utilizada uma construção simples para representar os mesmos em espaço de estados, de ordem n_S , em que o subíndice S indica o sistema obtido pelos polos capturados pelo SADPA:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_S(t) = A_S \mathbf{x}_S + B_S \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_S(t) = C_S \mathbf{x}_S + D_S \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.44)$$

Considerando $D_S = D = 0$, sem perda de generalidade, deseja-se obter um sistema deflacionado cuja saída corresponda à diferença entre a saída do sistema original, representado conforme seção 2.3, e a saída $\mathbf{y}_S(t)$, ou seja,

$$\mathbf{y}_{DFL} = \mathbf{y}_{FOM} - \mathbf{y}_S = C\mathbf{x} - C_S\mathbf{x}_S = \begin{bmatrix} C & -C_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = C_{DFL}\mathbf{x}_{DFL} \quad (2.45)$$

em que o subíndice DFL indica o sistema deflacionado.

A partir da eq. 2.45, é escrita a deflação pela expansão das matrizes do sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{DFL}(t) = (A_{DFL})\mathbf{x}_{DFL} + (B_{DFL})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n \times n_S} \\ \mathbf{0}_{n_S \times n} & A_S \end{bmatrix} \mathbf{x}_{DFL} + \begin{bmatrix} B \\ B_S \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{DFL}(t) = \begin{bmatrix} C & -C_S \end{bmatrix} \mathbf{x}_{DFL} \end{cases} \quad (2.46)$$

De fato, o sistema deflacionado posiciona polos muito próximos (a depender da precisão numérica do SADPA) a polos de interesse do sistema original, como os polos instáveis, com a diferença de atribuir, a estes novos polos, resíduos de valor oposto aos resíduos dos polos do FOM, na tentativa de cancelar os efeitos de polos instáveis na saída do sistema, por exemplo. Em princípio, os polos instáveis continuam no semiplano complexo direito, o que não dispensa o uso do deslocamento/shift α .

O sistema deflacionado representado na equação 2.46 pode sofrer a redução de ordem, em lugar do sistema original. Testes a respeito disso foram feitos no capítulo 5.

Capítulo 3 MÉTODO ADI

Neste capítulo será abordado o método ADI, apresentando-se as principais melhorias e otimizações do método provenientes de trabalhos anteriores. Ao final do capítulo, uma seção está reservada para discutir acerca dos parâmetros ADI e como podem ser obtidos.

3.1 *Alternating Direction Implicit* (ADI)

Originalmente, o *Alternating Direction Implicit* (ADI) é um método iterativo de diferenças finitas para a solução numérica de equações diferenciais parciais, com a vantagem de simplificar o problema ao resolver, em passos alternados, a diferenciação com respeito a cada variável [34].

O desenvolvimento explicitado será apenas da equação de Lyapunov de controlabilidade $AX_B + X_B A^T = -BB^T$. Analogamente, os resultados podem ser diretamente estendidos para a equação de observabilidade.

A equação de controlabilidade possui a seguinte forma iterativa ADI [3, 10, 11, 18], com $i = 1, 2, \dots, i_{max}$:

$$\begin{aligned} (A + \mu_i I)X_{(i-1/2)} &= -X_{(i-1)}(A^T - \mu_i I) - BB^T \\ (A + \mu_i I)X_i^* &= -X_{(i-1/2)}^*(A^T - \mu_i I) - BB^T \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que $\mu_i \in \mathbb{C}^-$ é o i -ésimo de J parâmetros ADI de shift. O algoritmo inicia com $i = 0$ e $X = \mathbf{0}_{n \times n}$. Se o número de iterações for maior que o número J de parâmetros ADI, estes são utilizados ciclicamente, ou seja, na i -ésima iteração, é utilizado μ_k , com $k = i \bmod J$.

Embora os parâmetros ADI também realizem um deslocamento/shift na matriz A (ou J_1 , no caso implícito), estes não devem ser confundidos com o shift α utilizado com o propósito de estabilizar o sistema. Essencialmente, a função dos parâmetros

ADI é realizar um condicionamento para a realização do processo iterativo, como apresentado nas equações 3.1.

Desenvolvendo-se as equações 3.1,

$$X_{(i-1/2)} = -(A + \mu_i I)^{-1} X_{(i-1)} (A^T - \mu_i I) - (A + \mu_i I)^{-1} B B^T \quad (3.2)$$

$$X_i = -(A^T - \mu_i I)^* X_{(i-1/2)} (A + \mu_i I)^{-*} - B B^T (A + \mu_i I)^{-*} \quad (3.3)$$

Substituindo-se a eq. 3.2 na eq. 3.3,

$$\begin{aligned} X_i = & (A^T - \mu_i I)^* (A + \mu_i I)^{-1} X_{(i-1)} (A^T - \mu_i I) (A + \mu_i I)^{-*} + \\ & + (-\mu_i - \mu_i^*) (A + \mu_i I)^{-1} B B^T (A + \mu_i I)^{-*} \end{aligned} \quad (3.4)$$

O processo iterativo nas equações 3.1 é equivalente a [3, 12]:

$$X_i = A_{\mu_i} X_{(i-1)} A_{\mu_i}^* - 2\rho_i A_i^{-1} B B^T A_i^{-*}, \quad (3.5)$$

em que $A_{\mu_i} = (A^T - \mu_i I)^* (A + \mu_i I)^{-1}$, $A_i = (A + \mu_i I)$ e $\rho_i = \text{real}(\mu_i)$, [3].

O termo A_{μ_i} corresponde à transformação espectral de Cayley [35], que mapeia a transformação conforme do semiplano complexo esquerdo para um disco unitário, também utilizada para transformar a equação de Lyapunov contínua na forma discreta [23]. Para a convergência do método, o raio espectral de A_{μ_i} deve ser menor que 1, logo os parâmetros ADI são essenciais para a velocidade de convergência do método [10, 23]. A forma como são obtidos é discutida na seção 3.3.

3.2 MELHORIAS DO MÉTODO DE TRABALHOS ANTERIORES

O método ADI sofre diversas adaptações e melhorias ao longo dos anos. Uma delas consiste em observar que as soluções X_B e X_C possuem baixo rank e são simétricas [10, 12, 19], o que permite a escrita da gramiana X como o produto de fatores de Cholesky de baixo rank [3, 10, 19]:

$$X_i = Z_i Z_i^*. \quad (3.6)$$

Em [10–12, 19, 20] é mostrado, com a substituição da eq. 3.6 na eq. 3.5, que pode-se chegar ao chamado CF-ADI (do inglês, *Cholesky Factor ADI*):

$$Z_1 = \sqrt{-2\rho_1}(A + \mu_1 I)^{-1}B, \quad (3.7)$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} A_{\mu_i} Z_{(i-1)} & \sqrt{-2\rho_i}(A + \mu_i I)^{-1}B \end{bmatrix}.$$

em que $Z_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e m é o número de colunas de B , ou número de entradas do sistema. Este algoritmo é muito mais eficiente ao lidar com os fatores de Cholesky em lugar das matrizes $X_{n \times n}$. Contudo, da forma como aparece nas equações 3.7, o termo $A_{\mu_i} Z_{(i-1)}$ é crítico, pois $Z_{(i-1)}$ aumenta m colunas a cada iteração.

O problema com o termo $A_{\mu_i} Z_{(i-1)}$ é resolvido em [20], com um reordenamento dos parâmetros ADI e a inserção de um passo intermediário, de forma a tornar constante o número de colunas nas operações matriciais antes de aumentar Z_i . Este método é referido como LRCF-ADI (do inglês, *low-rank Cholesky Factor ADI*):

$$Z_1 = T_1 = \sqrt{-2\rho_1}(A + \mu_1 I)^{-1}B,$$

$$T_i = \sqrt{\frac{-\rho_i}{-\rho_{(i-1)}}} [T_{(i-1)} - \gamma_i(A + \mu_i I)^{-1}T_{(i-1)}], \quad (3.8)$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_{(i-1)} & T_i \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3, \dots, i_{max}$$

em que $\gamma_i = \mu_i + \mu_{(i-1)}^*$ [3, 12].

Uma maior otimização do método ADI é realizada adaptando-se o LRCF-ADI para operações implícitas com matrizes esparsas [3, 21]. Este é o chamado SLRCF-ADI (do inglês, *sparse LRCF-ADI*). São utilizadas as matrizes da forma descritora, conforme vistas nas seções 2.3 e 2.4. Os parâmetros ADI atuam de forma semelhante ao shift α , deslocando apenas a matriz J_1 . Os termos como $(A + \mu_1 I)^{-1}B$ e $(A + \mu_i I)^{-1}T_{(i-1)}$ são calculados de forma implícita, genericamente chamados de M:

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_1 I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_i I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

e, em seguida, são utilizados nas expressões em (3.8). Para maior otimização, a fatoração LUPQR pode ser utilizada, já que as matrizes envolvidas são esparsas. Ver seção 2.4.

Os Algoritmos 2 e 3 apresentam, de forma resumida, a forma como foram calculados Z_B e Z_C neste trabalho.

O Algoritmo 4 apresenta como o método ADI foi empregado no truncamento balanceado, neste trabalho.

Algorithm 2 / Algoritmo 2: Cálculo de Z_B , em que $X_B = Z_B Z_B^T$.

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A, B) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2$), parâmetros ADI ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J$) reais ou em pares complexos conjugados, número máximo de iterações (i_{max}).

SAIDA: Fator de Cholesky de baixo rank da gramiana de controlabilidade (Z_B).

- 1: Inicialização com fatorações LUPQR de A_a , se houver.
- 2: Cálculo pela equações 3.8, 3.9 e 3.10.

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_1 I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = T_1 = \sqrt{-2\rho_1} M.$$

Para $i = 2, \dots, i_{max}$

$$\mu_i = \mu_{(i \bmod J)},$$

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_i I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_i = \sqrt{\frac{-\rho_i}{-\rho_{(i-1)}}} [T_{(i-1)} - \gamma_i M],$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_{(i-1)} & T_i \end{bmatrix}.$$

Fim

Algorithm 3 / Algoritmo 3: Cálculo de Z_C , em que $X_C = Z_C Z_C^T$.

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A, C) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, C_1, C_2$), parâmetros ADI ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J$) reais ou em pares complexos conjugados, número máximo de iterações (i_{max}).

SAIDA: Fator de Cholesky de baixo rank da gramianiana de observabilidade (Z_C).

- 1: Inicialização com fatorações LUPQR de A_a^T , ou transposição de cada fator LUPQR de A_a .
- 2: Cálculo pela equações 3.8, 3.9 e 3.10.

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_1 I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = T_1 = \sqrt{-2\rho_1} M.$$

Para $i = 2, \dots, i_{max}$

$$\mu_i = \mu_{(i \bmod J)},$$

$$\begin{bmatrix} J_1 + \mu_i I & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \\ \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_i = \sqrt{\frac{-\rho_i}{-\rho_{(i-1)}}} [T_{(i-1)} - \gamma_i M],$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_{(i-1)} & T_i \end{bmatrix}.$$

Fim

Algorithm 4 / Algoritmo 4: Truncamento Balanceado com Método ADI conforme utilizado neste trabalho.

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A,B,C,D) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2, C_1, C_2, D_a$), parâmetros ADI ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J$), número máximo de iterações (i_{max}), ordem k do MOR, shift α .

SAIDA: MOR na representação de espaço de estados (A_R, B_R, C_R, D_R).

- 1: Inicialização (fatorações, shift com α , cálculo de parâmetros (ADI) e cálculos iniciais).
- 2: Cálculo de Z_B e Z_C pelos Algoritmos 2 e 3.
- 3: Decomposição SVD de $Z_B^* Z_C$.

$$U_B \Sigma U_C^* = Z_B^* Z_C$$

- 4: Truncamento após o k -ésimo maior valor singular de Hankel:

$$U_B^k = U_B(:, 1:k) \quad \Sigma_k = \Sigma(1:k, 1:k) \quad U_C^k = U_C(:, 1:k)$$

- 5: Cálculo das matrizes de transformação de ordem T_L e T_R como

$$T_L = \text{real}(Z_B) U_B^k \Sigma_k^{-1/2} \text{ e } T_R = \text{real}(Z_C) U_C^k \Sigma_k^{-1/2},$$

- 6: Montagem do MOR (A_R, B_R, C_R e D_R), com operações matriciais explícitas ou implícitas (seção 2.4):

$$A_R = T_L^T A T_R,$$

$$B_R = T_L^T B,$$

$$C_R = C T_R,$$

$$D_R = D$$

3.3 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS ADI

Os parâmetros ADI assumem vital função no método, pois impactam diretamente na taxa de convergência das iterações, se convergir. Há diferentes técnicas que buscam os parâmetros ótimos e subótimos [10, 11, 19, 20, 36–42].

Uma forma tradicional [3, 10, 18, 19, 42] se baseia na resolução de um problema de mini-max

$$\min_{\{\mu_1, \dots, \mu_J\}} \left\{ \max_{x \in \mathcal{R}} \left| \prod_{j=1}^J \frac{\mu_j^* - x}{\mu_j + x} \right| \right\} \quad (3.11)$$

em que $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^-$, e \mathcal{R} contém os autovalores da matriz de estados estável A .

Um procedimento heurístico [10, 11, 25] para resolver o problema da eq. 3.11 consiste em utilizar o processo de Arnoldi [43] para estimar os autovalores dominantes de A . Basicamente, gera-se uma matriz de projeção $V_{n \times w}$ ($w \ll n$), cujas colunas, ortonormais entre si, formam uma base em um subespaço conveniente, comumente o subespaço de Krylov (ver cap. 4). A partir de então, uma matriz de *Ritz* é obtida por

$$H_{w^+ \times w^+}^+ = (V_{w^+ \times n}^T) A_{n \times n} V_{n \times w^+} \quad (3.12)$$

e, como a dimensão de H^+ é reduzida, rapidamente são computados os seus autovalores, chamados de valores de *Ritz* estáveis, para A estável. Estes w^+ autovalores aproximam os w^+ maiores (em magnitude) polos de A . O mesmo processo é feito para A^{-1} :

$$H_{w^- \times w^-}^- = (V_{w^- \times n}^T) A_{n \times n}^{-1} V_{n \times w^-} \quad (3.13)$$

em que os w^- autovalores de H^- são também valores estáveis de *Ritz* e aproximam os w^- menores (em magnitude) polos de A . Os $(w^+ + w^-)$ valores de *Ritz* compõem \mathcal{R} . O número $(w^+ + w^-)$ deve ser maior que $2J$ para se obter J parâmetros ADI.

Uma alternativa para o cálculo dos parâmetros ADI seria a possibilidade do próprio usuário do método fixar manualmente os valores $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J$ de interesse. Essa escolha de valores pode ser baseada na experiência do usuário, na análise de picos da resposta em frequência do sistema, ou simplesmente arbitrária. Desta forma, pode-se poupar tempo de processamento e esforço computacional se a escolha dos parâmetros for adequada.

Capítulo 4 MÉTODO EKS

Este capítulo objetiva a apresentação do método EKS tal como foi utilizado neste trabalho e nos testes computacionais. Serão apontados as principais formulações do método e serão levantadas as diferentes variantes e possibilidades do EKS, na tentativa de se avaliar qual destas variantes podem melhorar o desempenho e qualidade da redução de ordem.

4.1 SUBESPAÇOS DE KRYLOV

Semelhante ao conceito do método da potência [27], que aproxima os autovalores de maiores magnitudes de uma matriz M , e do método da potência inversa, que se aproxima dos menores autovalores de M , os subespaços de Krylov tradicional e inverso são utilizados em métodos iterativos modernos para aproximar os maiores e menores autovalores, respectivamente.

O subespaço original de Krylov, de dimensão w , é da forma [14, 17, 26, 33, 44]:

$$\mathcal{K}_w(A, B) = \{B, AB, \dots, A^{w-1}B\} , \quad (4.1)$$

neste trabalho este subespaço será referido por *Traditional Krylov Subspace (TKS)*.

O subespaço inverso de Krylov, de dimensão w , é da forma [14, 17, 33]:

$$\mathcal{K}_w(A^{-1}, B) = \{B, A^{-1}B, A^{-2}B, \dots, A^{-(w-1)}B\} , \quad (4.2)$$

neste trabalho este subespaço será referido por *Inverse Krylov Subspace (IKS)*.

A ideia de combinar as vantagens de ambos os subespaços influenciou uma composição com ambos, denominada subespaço estendido de Krylov, ou **EKS** (*do inglês, Extended Krylov Subspace*), da forma [14, 17, 33]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_w^E(A, B) &= \mathcal{K}_w(A, B) + \mathcal{K}_w(A^{-1}, B) = \\ &= \{B, A^{-1}B, AB, A^{-2}B, \dots, A^{(w-1)}B, A^{-w}B\} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

O EKS é formado a partir do par de vetores $[B \ A^{-1}B]$ e gerado pelo par de sequências de potências positivas e negativas de A premultiplicando B , que deve ter apenas uma coluna (caso isso não seja o caso, uma das colunas de B é selecionada). Neste trabalho, a dimensão de $\mathcal{K}_w^E(A, B)$ será convencionada como $2w$, com w elementos para cada sequência de potências de A . Alerta-se para não confundir o termo EKS com o método EKS, que utiliza o EKS para projetar o problema de estabilidade de Lyapunov, e assim realizar a redução de ordem pelo truncamento balanceado.

4.2 O MÉTODO EKS

O método EKS se baseia no uso de matrizes V , com colunas ortonormais entre si, que projetam a equação de Lyapunov, com matrizes de ordem n , para um outro domínio de menor dimensão em que uma solução aproximada possa ser obtida para a equação de Lyapunov, com menor custo computacional e de tempo. Em seguida, uma projeção inversa da solução retorna ao domínio n -dimensional. Neste trabalho, o domínio de destino da projeção é o subespaço estendido de Krylov, de dimensão $2w$, já que é gerado tanto pela sequência de potências positivas, de dimensão w , como pela sequência de potências negativas da matriz de estado, de dimensão w .

Para o funcionamento correto deste método, as matrizes de projeção devem ter colunas ortonormais entre si, no sentido de que $V^T V = I_{2w \times 2w}$ e as colunas de $V_{(n \times 2w)}$ geram uma base no subespaço estendido de Krylov. Por simplicidade as colunas da matriz de projeção, $V_{(n \times 2w)}$, são chamadas de vetores de Krylov. O desenvolvimento a seguir é realizado com a equação de Lyapunov de controlabilidade, mas pode ser diretamente estendido para a equação de observabilidade.

A matriz de projeção V_B , em que o subíndice B se refere à equação de controlabilidade, é construída pelo acúmulo de colunas oriundas de sucessivas operações nos moldes de AB e $A^{-1}B$. Estas operações podem ser otimizadas aproveitando-se as melhorias que as operações implícitas e a fatoração LUPQR trouxeram ao método ADI. O processo é baseado no de Arnoldi [25, 43] e requer, a cada iteração, uma reortogonalização dos vetores de Krylov entre si. A maior parcela do tempo de processamento está nas sucessivas reortogonalizações na construção de V_B .

Uma vez obtida V_B , de dimensões $(n \times 2w)$, esta é usada para projetar a equação de Lyapunov $AX_B + X_B A^T = -BB^T$ no subespaço estendido de Krylov. Definindo-se

$TV^T = V^T A$ e $E = V^T B$, e temporariamente omitindo-se o subíndice B , é feita a projeção [14, 17, 33]

$$\begin{aligned}
V^T(AX + XA^T)V &= -V^T(BB^T)V \\
V^TAXV + V^TXA^TV &= -V^TB(V^TB)^T \\
TV^TXV + V^TX(V^TA)^T &= -EE^T \\
T(V^TXV) + (V^TXV)T^T &= -EE^T
\end{aligned} \tag{4.4}$$

O termo (V^TXV) é substituído por Y , e assim, tem-se a equação de Lyapunov projetada no subespaço de Krylov:

$$TY + YT^T = -EE^T. \tag{4.5}$$

A equação 4.5 possui dimensões reduzidas ($2w \times 2w$) e pode ser resolvido por meios tradicionais, como Bartels-Stewart [22, 23]. A solução Y_B é reprojeta para o domínio original da seguinte forma:

$$\hat{X}_B = V_B Y_B V_B^T. \tag{4.6}$$

em que \hat{X}_B consiste em uma aproximação de X_B e não o seu valor exato, justamente porque a projeção V não é uma transformação de similaridade [27], mas reduz a ordem das matrizes para $2w \ll n$. Portanto, há um resíduo da forma $R = A\hat{X}_B + \hat{X}_B A^T + BB^T$. Deve-se impor a seguinte condição ao resíduo:

$$V^T R V = \mathbf{0}_{2w \times 2w}. \tag{4.7}$$

ou seja, a projeção do resíduo R no subespaço de Krylov deve ser nula. Esta é a chamada condição de *Galerkin* [14, 17, 33].

Os Algoritmos 5 e 6 apresentam a forma de calcular as matrizes gramianas X_B e X_C pelo método EKS, conforme concepção deste trabalho. Muitas das instruções destes algoritmos estão descritas em palavras em lugar de equações porque há diferentes formas de se realizar os mesmos passos, o que será objeto de discussão da seção 4.3 e de testes computacionais no capítulo 5.

O Algoritmo 7 apresenta, de forma generalizada, como o método EKS foi empregado no truncamento balanceado, neste trabalho.

Algorithm 5 / Algoritmo 5: Cálculo de X_B .

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A, B) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2$), número máximo de pares de vetores de Krylov (w).

SAIDA: Aproximação da matriz gramianiana de controlabilidade (\hat{X}_B).

1: Inicialização com fatorações LUPQR de A_a e de J_4 , se houver.

2: Cálculo da matriz de projeção V_B .

- Cálculo de $M_2 = A^{-1}B$ por operações explícitas ou implícitas.

$$V_B^{(1)} = \begin{bmatrix} B & M_2 \end{bmatrix}$$

Ortonormalização das colunas de $V_B^{(1)}$ entre si.

- **Para** $j = 2, \dots, w$

Seleção das duas últimas colunas de $V_B^{(j)}$:

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = V_B^{(j)}(:, 2w-1:2w)$$

Cálculo de $M_1 = AV_1$ e $M_2 = A^{-1}V_2$ por operações explícitas ou implícitas.

$$V_B^{(j)} = \begin{bmatrix} V_B^{(j-1)} & M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

Ortonormalização das colunas de $V_B^{(j)}$ entre si.

Fim

3: Projeção de A e B :

$$T = V_B^T A V_B$$

$$E = V_B^T B$$

4: Solução da equação de Lyapunov por meios tradicionais (Bartels-Stewart):

$$T Y_B + Y_B T^T = -E E^T$$

5: Projeção inversa para obter solução aproximada \hat{X}_B :

$$\hat{X}_B = V_B Y_B V_B^T$$

Algorithm 6 / Algoritmo 6: Cálculo de X_C .

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A, C) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, C_1, C_2$), número máximo de pares de vetores de Krylov (w).

SAIDA: Aproximação da matriz gramianiana de observabilidade (\hat{X}_C).

- 1: Inicialização com fatorações LUPQR de A_a , ou A_a^T , e de J_4 , se houver.
- 2: Cálculo da matriz de projeção V_C .

- Cálculo de $M_2 = A^{-T}C^T$ por operações explícitas ou implícitas.

$$V_C^{(1)} = \begin{bmatrix} C^T & M_2 \end{bmatrix}$$

Ortonormalização das colunas de $V_C^{(1)}$ entre si.

- **Para** $j = 2, \dots, w$

Seleção das duas últimas colunas de $V_C^{(j)}$:

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = V_C^{(j)}(:, 2w-1:2w)$$

Cálculo de $M_1 = A^T V_1$ e $M_2 = A^{-T} V_2$ por operações explícitas ou implícitas.

$$V_C^{(j)} = \begin{bmatrix} V_C^{(j-1)} & M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

Ortonormalização das colunas de $V_C^{(j)}$ entre si.

Fim

- 3: Projeção de A^T e C^T :

$$T = V_C^T A^T V_C$$

$$E = V_C^T C^T$$

- 4: Solução da equação de Lyapunov por meios tradicionais (Bartels-Stewart):

$$T Y_C + Y_C T^T = -E E^T$$

- 5: Projeção inversa para obter solução aproximada \hat{X}_C :

$$\hat{X}_C = V_C Y_C V_C^T$$

Algorithm 7 / Algoritmo 7: Truncamento Balanceado com Método EKS conforme utilizado neste trabalho.

ENTRADA: Matrizes do sistema na representação de espaço de estados (A,B,C,D) ou descritora ($J_1, J_2, J_3, J_4, B_1, B_2, C_1, C_2, D_a$), número máximo de pares de vetores de Krylov (w), ordem k do MOR, shift α .

SAIDA: MOR na representação de espaço de estados (A_R, B_R, C_R, D_R).

- 1: Inicialização (fatorações, shift com α , cálculos iniciais).
- 2: Cálculo de \hat{X}_B e \hat{X}_C pelos Algoritmos 5 e 6.
- 3: Decomposição SVD (ver seção 4.3.2).
- 4: Truncamento após o k -ésimo maior valor singular de Hankel:

$$U_B^k = U_B(:, 1:k) \quad \Sigma_k = \Sigma(1:k, 1:k) \quad U_C^k = U_C(:, 1:k)$$

- 5: Cálculo das matrizes de transformação de ordem T_L e T_R (ver seção 4.3.2).
- 6: Montagem do MOR (A_R, B_R, C_R e D_R), com operações matriciais explícitas ou implícitas (seção 2.4):

$$A_R = T_L^T A T_R,$$

$$B_R = T_L^T B,$$

$$C_R = C T_R,$$

$$D_R = D$$

4.3 VARIANTES DO MÉTODO EKS

Nesta seção serão apresentadas diferentes alternativas para alguns dos passos nos Algoritmos 5, 6 e 7. Estes serão objeto de testes computacionais no capítulo 5.

4.3.1 COM RELAÇÃO ÀS OPERAÇÕES MATRICIAIS

As operações matriciais utilizadas no laço de cálculo da matriz de projeção V , nos algoritmos 5 e 6, podem ser realizadas da forma explícita ou implícita, conforme discutido nas seções 2.2 e 2.4. Para melhor categorização e comparação, realizada no cap. 5, foram definidas quatro variantes com relação às operações matriciais utilizadas: A, B, C e D, descritas a seguir.

Variante A

Todas as operações matriciais realizadas são explícitas, inclusive nas multiplicações de projeção ($T = V^T AV$). Isto é vantajoso quando já se possui a matriz de estados A e sua inversa armazenados. Caso contrário, deve-se calcular $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$, o que pode se tornar inviável para sistemas FOM de ordens muito elevadas. Esta variante segue em oposição ao que é indicado pela literatura científica, mas é colocada aqui como referência de comparação com as demais variantes.

Variante B

Todas as operações realizadas são implícitas. A matriz de estados A não é calculada nem armazenada, o que confere uma redução no tempo de processamento. Esta variante vai ao encontro do que é realizado nos métodos ADI, otimizados pelo uso de apenas cálculos implícitos com matrizes esparsas. Cabe observar que no cálculo de V_C utiliza-se também a decomposição LUPQR de A_a^T .

Variante C

Nesta variante, calcula-se a matriz A por meio de $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$ e utiliza-se esta matriz apenas nas multiplicações matriciais de forma direta e explícita, o que pode ou não conferir em uma vantagem, enquanto a inversão matricial é realizada como na

variante B. Cabe observar que no cálculo de V_C utiliza-se também a decomposição LUPQR de A_a^T .

Variante D

Idem à variante C, com a diferença de não realizar a decomposição LUPQR de A_a^T , mas aproveitar a fatoração LUPQR de A_a da seguinte forma:

$$\text{Como } A_a = R_{aa} P_{aa}^{-1} L_{aa} U_{aa} Q_{aa}^{-1} ,$$

$$A_a^T = Q_{aa}^{-T} U_{aa}^T L_{aa}^T P_{aa}^{-T} R_{aa}^T , \quad (4.8)$$

$$A_a^T \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = Q_{aa}^{-T} U_{aa}^T L_{aa}^T P_{aa}^{-T} R_{aa}^T \begin{bmatrix} X \\ \Gamma \end{bmatrix} = C_a^T .$$

Pode-se afirmar que as variantes C e D são híbridos das variantes A e B.

4.3.2 COM RELAÇÃO À DECOMPOSIÇÃO SVD

Conforme visto na seção 4.2 nos Algoritmos 5, 6 e 7, o método EKS, conforme concebido neste trabalho, calcula as matrizes gramianas X_B e X_C (ou suas aproximações), e não fatores de Cholesky de baixo rank como visto no método ADI. A decomposição SVD no método EKS pode ser realizada sobre $X_B^* X_C$. Contudo, conforme será visto nos testes computacionais do cap. 5, $X_B^* X_C$ possui dimensões $(n \times n)$ e isto pode tornar a decomposição SVD muito lenta e inclusive inviável, para sistemas de ordens muito elevadas.

Observa-se que as matrizes de ordem n , quando projetadas no subespaço estendido de Krylov, passam a ter ordem $2w \ll n$. Em lugar de computar os n valores singulares de Hankel, para depois truncar até o k -ésimo maior valor singular (e os correspondentes vetores singulares), há a possibilidade de apenas computar os $2w$ maiores valores singulares de Hankel, e depois realizar o truncamento até σ_k , já que, em geral, $k < 2w \ll n$. Neste trabalho, são indicadas duas formas de realizar isto.

Uma primeira forma consiste no artifício de criar fatores de Cholesky Z_B^{chol} e Z_C^{chol}

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_B &= Z_B^{chol} (Z_B^{chol})^T = V_B \text{chol}(Y_B) V_B^T = V_B L_B L_B^T V_B^T = \\
&= V_B L_B (V_B L_B)^T \Rightarrow Z_B^{chol} = V_B L_B , \\
\hat{X}_C &= Z_C^{chol} (Z_C^{chol})^T = V_C \text{chol}(Y_C) V_C^T = V_C L_C L_C^T V_C^T = \\
&= V_C L_C (V_C L_C)^T \Rightarrow Z_C^{chol} = V_C L_C ,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e, em seguida, realizar a decomposição SVD de $(Z_B^{chol})^* (Z_C^{chol})$.

Após realizada a decomposição SVD nesta primeira forma, o truncamento é realizado normalmente, conforme Algoritmo 7. Entretanto, é alterada a construção das matrizes de transformação de ordem:

$$\begin{aligned}
T_L &= \text{real}(Z_B^{chol}) U_B^k \Sigma_k^{-1/2} \\
T_R &= \text{real}(Z_C^{chol}) U_C^k \Sigma_k^{-1/2} .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Contudo, a decomposição de Cholesky em (4.9) requer que Y_B e Y_C sejam positivas definidas, o que pode requerer um shift adicional β de magnitude na ordem de grandeza do shift α utilizado, desde que α seja grande o suficiente. Em outras palavras, nas equações 4.9 deve-se substituir $\text{chol}(Y_B)$ por $\text{chol}(Y_B + \beta I_{2w \times 2w})$ e $\text{chol}(Y_C)$ por $\text{chol}(Y_C + \beta I_{2w \times 2w})$, em que $\beta \approx \alpha$, para grandes valores de α , o que pode se tornar um inconveniente.

Uma segunda forma de calcular os $2w$ maiores valores singulares de Hankel, sem necessidade de fatorar as matrizes Y_B e Y_C , é utilizar as matrizes de projeção V_B e V_C , já calculadas, para projetar $\hat{X}_B^* \hat{X}_C$ no subespaço de Krylov e obter aproximações pelos fatores Z_B^{proj} e Z_C^{proj} desta projeção:

$$\begin{aligned}
&V_B^T (\hat{X}_B^* \hat{X}_C) V_C = \\
&(\hat{X}_B V_B)^* (\hat{X}_C V_C) = \\
&(Z_B^{proj})^* (Z_C^{proj}) .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

E, como $\hat{X}_B = V_B Y_B V_B^T$, $\hat{X}_C = V_C Y_C V_C^T$ e $V^T V = I_{2w \times 2w}$, (4.11) é equivalente a

$$\begin{aligned}
&(\hat{X}_B V_B)^* (\hat{X}_C V_C) = \\
&(V_B Y_B V_B^T V_B)^* (V_C Y_C V_C^T V_C) = \\
&(V_B Y_B)^* (V_C Y_C) = \\
&(Z_B^{proj})^* (Z_C^{proj}) .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

A decomposição SVD para (4.11, 4.12) é feita sobre o termo $(Z_B^{proj})^*(Z_C^{proj}) = (\hat{X}_B V_B)^*(\hat{X}_C V_C) = (V_B Y_B)^*(V_C Y_C)$. O truncamento é realizado normalmente, conforme Algoritmo 7. Novamente, é alterada a forma de construção das matrizes de transformação de ordem:

$$\begin{aligned} T_L &= real(Z_B^{proj}) U_B^k \Sigma_k^{-1/2} \\ T_R &= real(Z_C^{proj}) U_C^k \Sigma_k^{-1/2} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3.3 ORTONORMALIZAÇÃO

Como padrão para os testes realizados no capítulo 5, foi utilizada a decomposição QR como meio de ortonormalizar as colunas da matriz de projeção V , conforme seção 2.2.

O processo de Gram-Schmidt, visto na seção 2.2, também pode ser utilizado, desde que em sua forma modificada computacionalmente estável. Pela forma como é implementado, normalmente este processo é mais rápido que a decomposição QR. Contudo, ocasionalmente podem surgir erros de arredondamento e outros que acarretem na não completa ortogonalidade entre os vetores de Krylov, ou norma não unitária. Para refinamento da ortonormalização, assim que for obtida a matriz de projeção $V_{n \times 2w}$, é realizada *uma* decomposição QR desta.

Neste trabalho é sugerida uma terceira opção de ortonormalização. Nos laços de cálculo da matriz de projeção V , nos Algoritmos 5 e 6, as ortonormalizações são realizadas em cada uma das w iterações. Neste trabalho sugere-se a opção de realizar a decomposição QR não a cada iteração, mas a cada $2, 3, \dots, g$ iterações, enquanto que nas demais iterações apenas são acumuladas as colunas M_1 e M_2 em V . Entretanto, se g for muito grande, há o risco de V perder rank, dadas as sucessivas potências, positivas e negativas, de A se acumulando sequencialmente nas colunas de V sem nenhuma ortonormalização até completar o bloco de g iterações. Caso isso aconteça, o método falha completamente. Esta forma de lidar com a ortonormalização será denominada decomposição QR Inexata, ou simplesmente **QRI** a cada g iterações.

Capítulo 5 RESULTADOS DE TESTES COMPUTACIONAIS

Este capítulo tem por finalidade apresentar os principais resultados obtidos de testes e simulações computacionais, a partir da implementação dos métodos expostos nas seções anteriores.

5.1 CONDIÇÕES DE REALIZAÇÃO DOS TESTES

Os testes computacionais e simulações foram realizados em software Matlab [29]. O equipamento utilizado foi microcomputador com Intel Core i7-2600 e 16 GB de memória RAM.

Foram utilizados 17 casos-exemplos de sistemas elétricos de potência. Os dados destes sistemas foram gerados pelo software PacDyn, do CEPEL [30,32]. Um programa código denominado “Jacobian” foi utilizado para converter esses dados para o formato de matrizes esparsas da representação em sistema descritor, conforme descrito nas seções 2.3 e 2.4. Muitos trabalhos propuseram e utilizaram critérios de parada para a redução de ordem, seja na ordem do MOR, seja no números de vetores de Krylov utilizados nas matrizes de projeção [3, 10–12, 14, 18, 33], etc. Neste trabalho, estes critérios não foram utilizados a princípio, optando-se por fixar os valores como a ordem final do MOR e o número de vetores, para possibilitar uma comparação equiparável entre diferentes métodos de truncamento balanceado.

A Tabela 5.1 apresenta, para cada um dos casos-exemplos, a ordem n de sua matriz de estados, o número de variáveis algébricas n_z , o número de polos iguais a (ou aproximadamente) zero e os polos instáveis, quando houver. Para a contagem do número de polos iguais a zero foram considerados os polos localizados dentro de um disco de centro em zero e raio de 10^{-10} rad/s. Observa-se que os casos 3 a 5, 10, 11, 15 e 16 são intrinsicamente estáveis, logo teoricamente não necessitariam de shifts para a realização da redução de ordem. Contudo, devido a questões numéricas, um pequeno deslocamento faz-se necessário em alguns deles, para que o processo funcione adequadamente.

Tabela 5.1: Casos-exemplos utilizados nos testes

| Caso | Ordem | n_z | N^{e} de polos no zero | Polos instáveis |
|------|-------|-------|---------------------------------|--|
| 1 | 606 | 6529 | 0 | 0.002944659 |
| 2 | 839 | 7461 | 0 | $0.029865618 + 4.878972432i$ $0.029865618 - 4.878972432i$ $0.000215704 + 0.010636917i$ $0.000215704 - 0.010636917i$ |
| 3 | 1142 | 8593 | 0 | <i>nenhum</i> |
| 4 | 1450 | 9815 | 0 | <i>nenhum</i> |
| 5 | 1693 | 11582 | 0 | <i>nenhum</i> |
| 6 | 1678 | 11548 | 0 | $0.160010275 + 4.488225381i$ $0.160010275 - 4.488225381i$ |
| 7 | 1678 | 11548 | 0 | $0.159846281 + 4.487523441i$ $0.159846281 - 4.487523441i$ $0.095176660 + 1.351525102i$ $0.095176660 - 1.351525102i$ |
| 8 | 1998 | 13068 | 1 | 0.000308627658 |
| 9 | 2476 | 14385 | 5 | 0.002821871 |
| 10 | 3077 | 18051 | 7 | <i>nenhum</i> |
| 11 | 3078 | 18050 | 8 | <i>nenhum</i> |
| 12 | 2477 | 14384 | 5 | $0.001346598 + 0.020750447i$ $0.001346598 - 0.020750447i$ |
| 13 | 1999 | 13067 | 1 | $0.000274466 + 0.020813489i$ $0.000274466 - 0.020813489i$ |
| 14 | 607 | 6528 | 0 | 0.002722180 |
| 15 | 1143 | 8592 | 0 | <i>nenhum</i> |
| 16 | 1694 | 11581 | 0 | <i>nenhum</i> |
| 17 | 5727 | 34639 | 15 | $0.250253566 + 4.940138949i$ $0.250253566 - 4.940138949i$ $0.085618498 + 4.901881565i$ $0.085618498 - 4.901881565i$ |

Observa-se que os casos da Tabela 5.1 com maior número de polos instáveis e polos na origem trazem maiores dificuldades para a redução de ordem, sendo o CASO 17 o mais complexo dos apresentados. Além disso, ressalta-se que sistemas elétricos de potência podem fornecer modelos lineares com ordens ainda maiores.

Como padrão, os testes com método EKS e ADI terão parâmetros ($w = 120$ e $k = 40$), ($\mu_J = \{-1/15, -0.7, -6, -13, -200\}$, $i_{max} = 200$ e $k = 40$), respectivamente. Os parâmetros ADI foram ajustados manualmente. Caso não seja informado o contrário, estes são os parâmetros que foram utilizados nos testes. A Tabela 5.2 apresenta, para cada um dos casos-exemplos, o deslocamento/shift α padrão utilizado nos testes computacionais. A menos que seja dito o contrário, os testes que foram realizados utilizaram esses valores de shift para estabilizar os sistemas instáveis e, inclusive, para assegurar estabilidade numérica.

Tabela 5.2: Shifts utilizados de forma padrão

| Caso | Shift utilizado | Caso | Shift utilizado | Caso | Shift utilizado |
|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|
| 1 | 0.0029451594 | 2 | 0.02988 | 3 | 0 |
| 4 | 0 | 5 | 0 | 6 | 0.18 |
| 7 | 0.2 | 8 | 0.004 | 9 | 0.01 |
| 10 | 0 | 11 | 0.001 | 12 | 0.0025 |
| 13 | 0.00038 | 14 | 0.01 | 15 | 0 |
| 16 | 0 | 17 | 0.251 | | |

Os resultados deste capítulo serão apresentados em forma de tabelas, resposta e erro em frequência para o intervalo entre $\omega = 10^{-2}rad/s$ e $\omega = 10^2rad/s$ (em maioria, de magnitude, pois nos testes realizados foi verificado que a resposta da fase possui comportamento análogo ao de magnitude, para as mesmas faixas de frequência), resposta no tempo ao degrau de amplitude 0.1 pu, erro na resposta ao degrau, e alocação dos polos dos sistemas FOM e MOR.

Como índices para a avaliação do tempo de construção do MOR e da qualidade das respostas do MOR em relação ao sistema original (FOM), convencionou-se o uso dos indicativos de qualidade descritos a seguir.

TEMPO DE PROCESSAMENTO (TP): com o uso do Matlab, trata-se apenas da simples aferição do tempo requerido na geração do MOR desde a inicialização do método de redução de ordem até a montagem das matrizes de ordem reduzida. Não inclui o tempo despendido no programa “Jacobian”, apresentado na fig. 5.1.

ÍNDICE DE ERRO RELATIVO (IER): seja H_{FOM} e H_{MOR} algum tipo de resposta do sistema FOM e MOR, respectivamente, seja no domínio do tempo ou da frequência, para as mesmas formas de entradas. O IER é utilizado para tentar representar numericamente uma espécie de erro relativo entre o desempenho do MOR e do FOM. O IER é calculado da seguinte forma:

$$IER = \frac{\|H_{FOM} - H_{MOR}\|}{\|H_{FOM}\|}, \quad (5.1)$$

em que $\| \cdot \|$ é a norma-2 do vetor H , em cada caso. No caso, o erro é relativo porque compara a norma da diferença entre H_{FOM} e H_{MOR} com a referência, no caso H_{FOM} .

ÍNDICE DE ERRO RELATIVO COM TP (IERTP): na tentativa de reunir as informações de IER e de tempo de processamento para gerar o MOR, este índice representa o produto destas duas quantidades, no sentido em que quanto menor for o IER e menor for o tempo de processamento, menor será o IERTP.

$$IERTP = IER \times TP, \quad (5.2)$$

em que TP é o tempo de processamento para gerar o MOR.

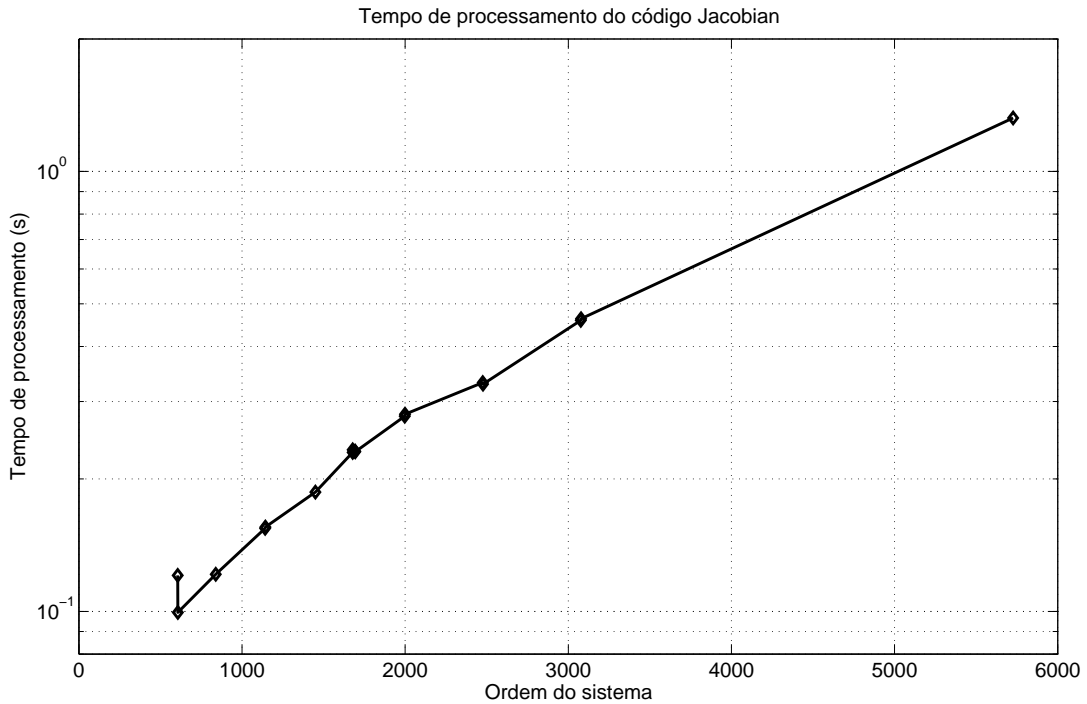


Figura 5.1: Tempo para Jacobian em função da ordem do sistema.

5.2 TESTES APENAS COM O MÉTODO EKS

Nesta parte do capítulo serão apresentados os resultados dos testes conduzidos somente relacionados ao método EKS.

5.2.1 OPERAÇÕES IMPLÍCITAS VERSUS EXPLÍCITAS

Esta subseção visa comparar o desempenho das operações matriciais nos moldes de AV e $A^{-1}V$, realizadas implicitamente e explicitamente, conforme visto na seção 2.4.

Primeiramente, é apresentado o tempo demandado para se calcular a matriz de estados A a partir de $A = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$, com e sem fatoração LUPQR de J_4 . A Figura 5.2 permite realizar duas observações: primeiro, quanto maior o sistema, maior será o inconveniente de se calcular A e maior será a desvantagem de se utilizar operações explícitas; segundo, o uso de fatoração LUPQR diminuiu de forma considerável e consistente o TP, em cerca de uma ordem de grandeza.

Em seguida, é apresentado o tempo para recuperação das matrizes B e C . A fig. 5.3 indica que a recuperação de ambas as matrizes requer apenas alguns milissegundos, o que viabiliza a utilização das próprias matrizes B e C nos métodos de redução.

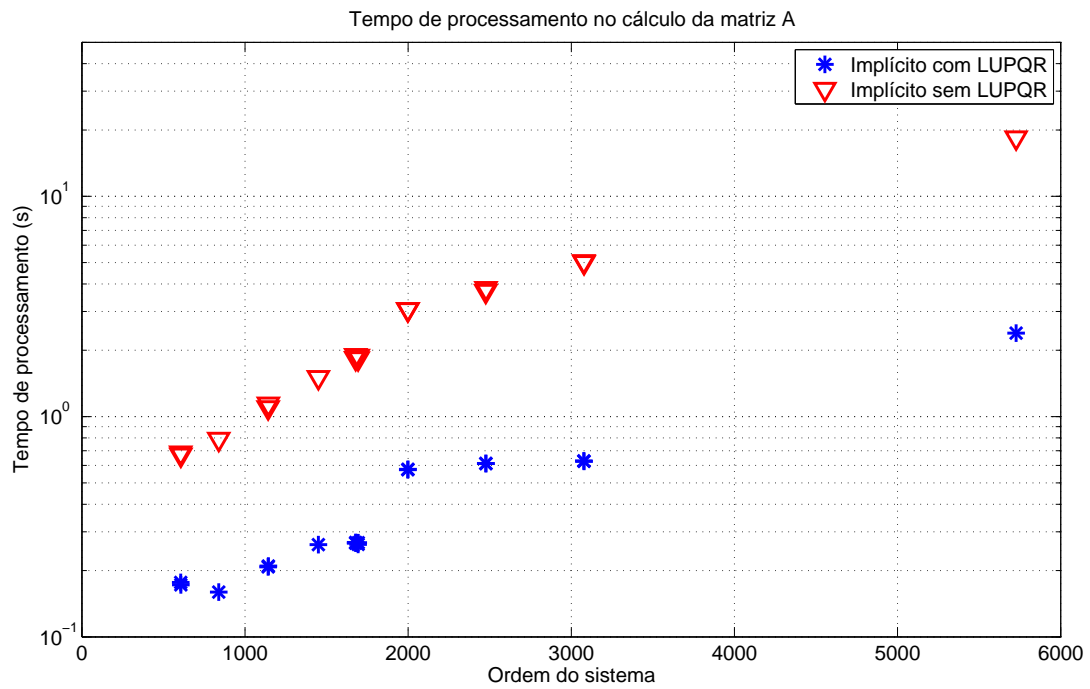


Figura 5.2: Tempo para cálculo da matriz de estados por ordem de sistema.

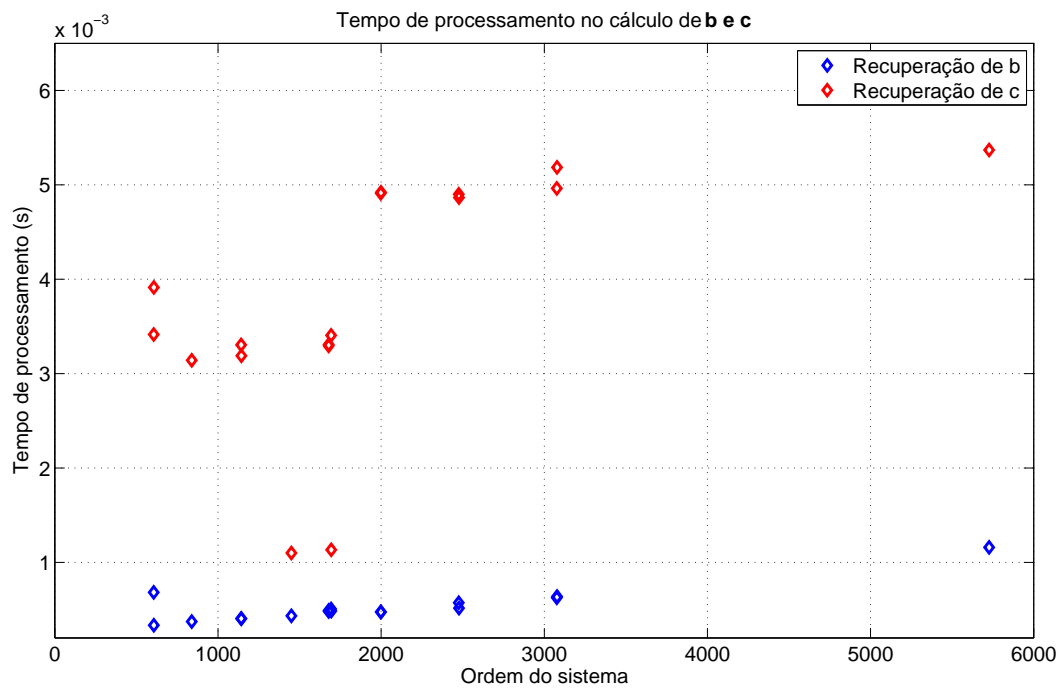


Figura 5.3: Tempo para recuperação das matrizes B e C por ordem de sistema.

Para avaliar o desempenho das operações implícitas e explícitas a cada iteração dentro do laço de cálculo da matriz de projeção V_B , conforme Algoritmo 5, são apresentados o TP e erro relativo nas figuras 5.4 a 5.15, para os CASOS 1, 3, 11, 17. O erro relativo é calculado de forma semelhante ao IER, mas utilizando como referência os resultados das operações explícitas, para se avaliar se realmente os resultados calculados implicitamente geram os mesmos resultados. Em outras palavras, sejam AV e $A^{-1}V$ as operações matriciais avaliadas. Se essas operações forem realizadas tanto na forma explícita como implícita, o erro relativo é obtido por:

$$(\text{Erro})_{\text{inversão}} = \frac{\|(A^{-1}V)_{\text{EXPLICITA}} - (A^{-1}V)_{\text{IMPLICITA}}\|}{\|(A^{-1}V)_{\text{EXPLICITA}}\|}, \quad (5.3)$$

$$(\text{Erro})_{\text{multiplicação}} = \frac{\|(AV)_{\text{EXPLICITA}} - (AV)_{\text{IMPLICITA}}\|}{\|(AV)_{\text{EXPLICITA}}\|}. \quad (5.4)$$

Conforme figs. 5.4, 5.7, 5.10 e 5.13, a multiplicação matricial aparenta ser ligeiramente mais rápida se realizada de forma explícita, para os casos de menor ordem, 1 e 3. Entretanto, conforme a ordem do sistema aumenta, essa vantagem desaparece e, inclusive, a forma implícita resulta mais rápida para o CASO 17.

Conforme esperado para a inversão matricial, nos moldes de $A^{-1}V$, a forma implícita apresenta substancial vantagem no TP, para todos os casos testados, como pode ser observado nas figs. 5.5, 5.8, 5.11 e 5.14.

Em relação ao erro relativo, as figs. 5.6, 5.9, 5.12 e 5.15 indicam que as operações de multiplicação implícita geram resultados com erro relativo de cerca de 10^{-15} em relação aos resultados da forma explícita, enquanto que as inversões implícitas levam a erros entre 10^{-7} e 10^{-11} , a depender do caso. A razão para o erro ser maior nas inversões está relacionado ao maior número de operações intermediárias realizadas na forma implícita, como fatorações de A_a , em comparação com a multiplicação implícita.

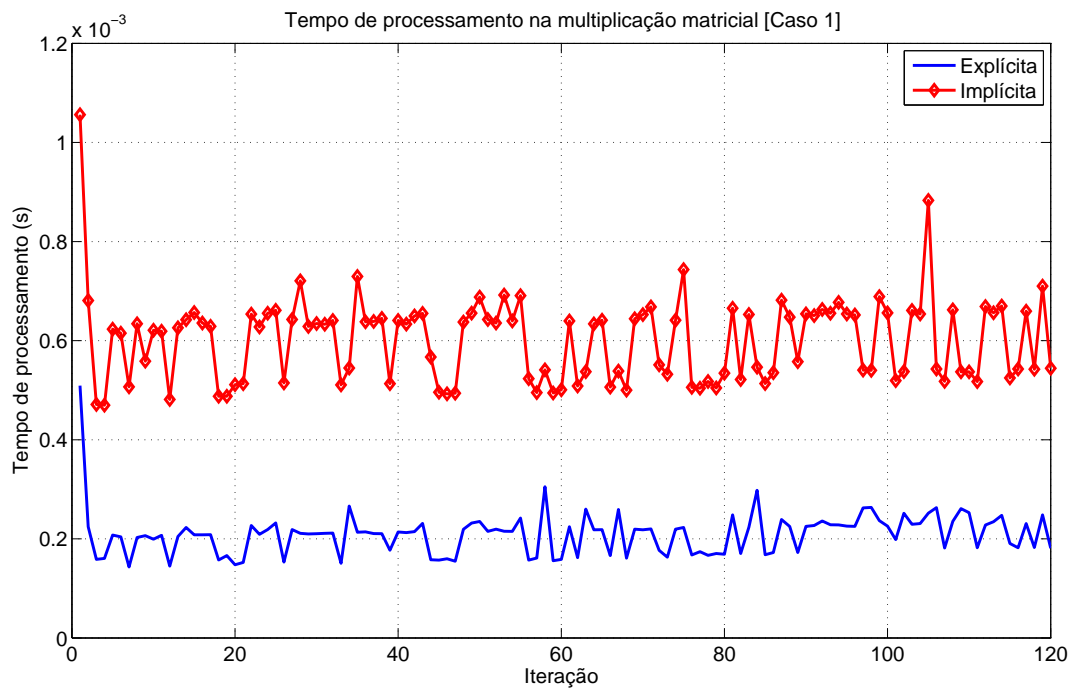


Figura 5.4: Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 1).

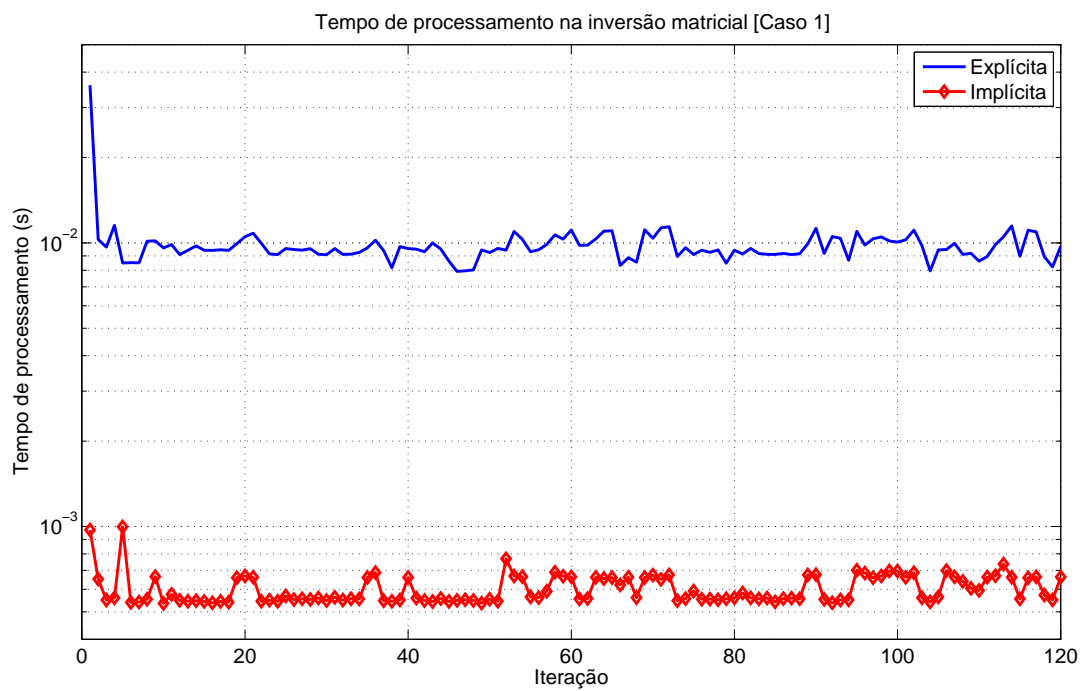


Figura 5.5: Tempo de processamento na inversão matricial (caso 1).

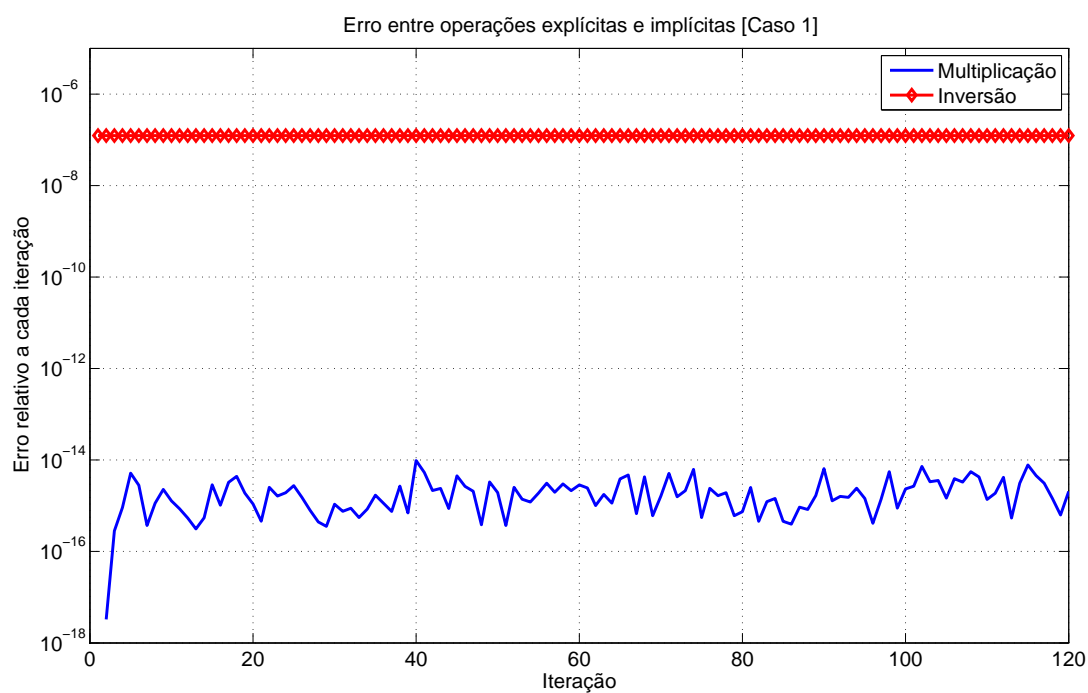


Figura 5.6: Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 1).

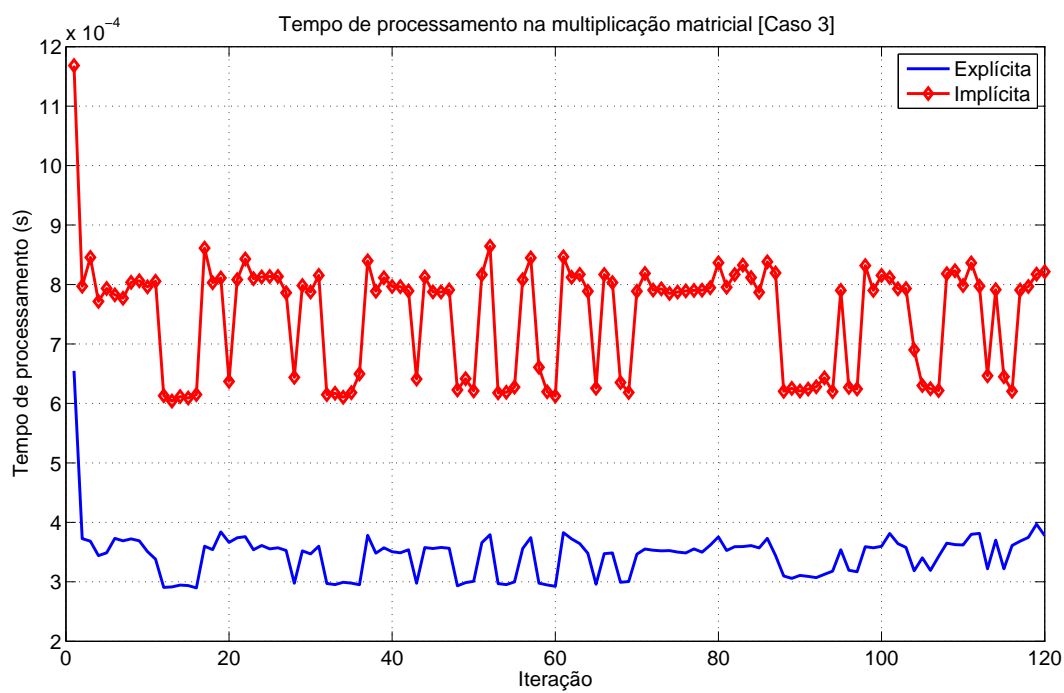


Figura 5.7: Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 3).

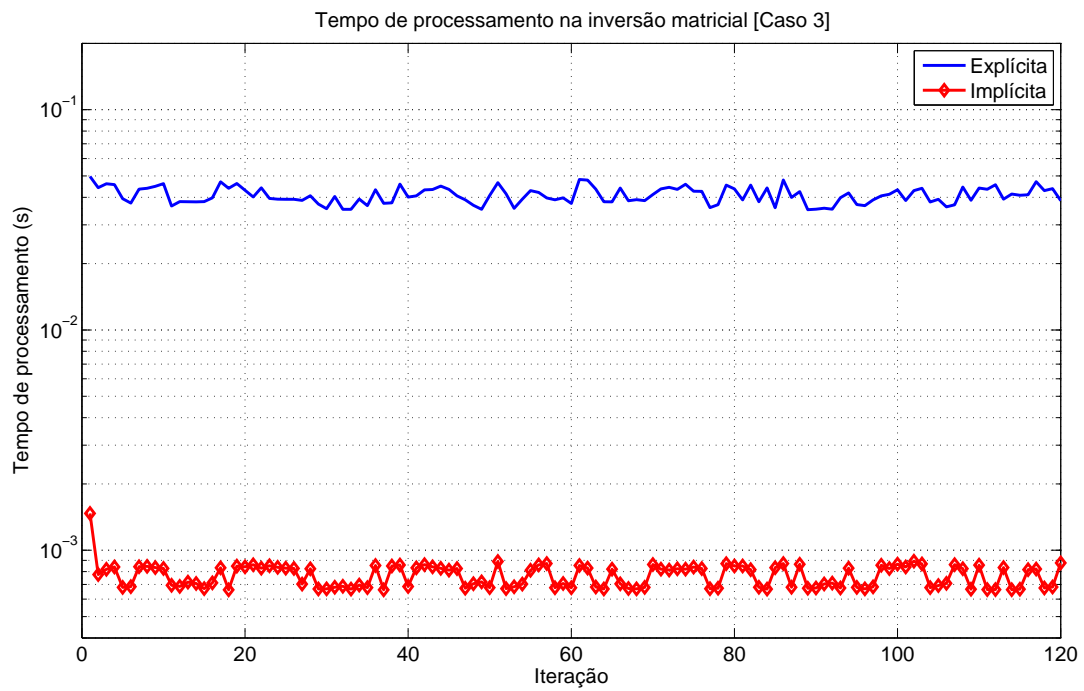


Figura 5.8: Tempo de processamento na inversão matricial (caso 3).

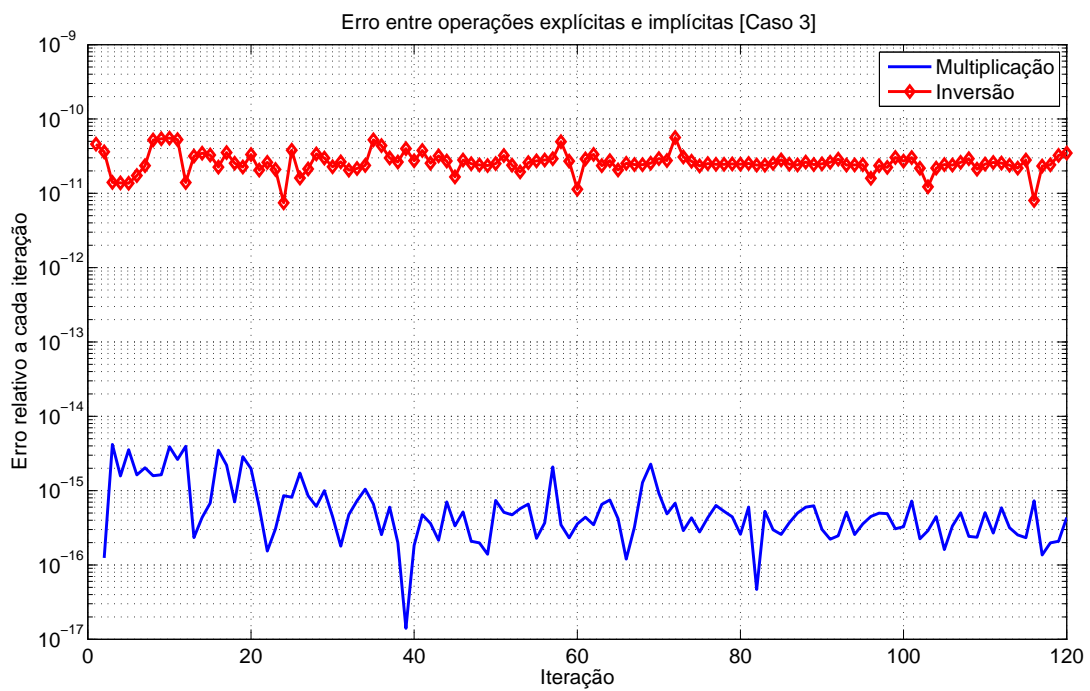


Figura 5.9: Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 3).

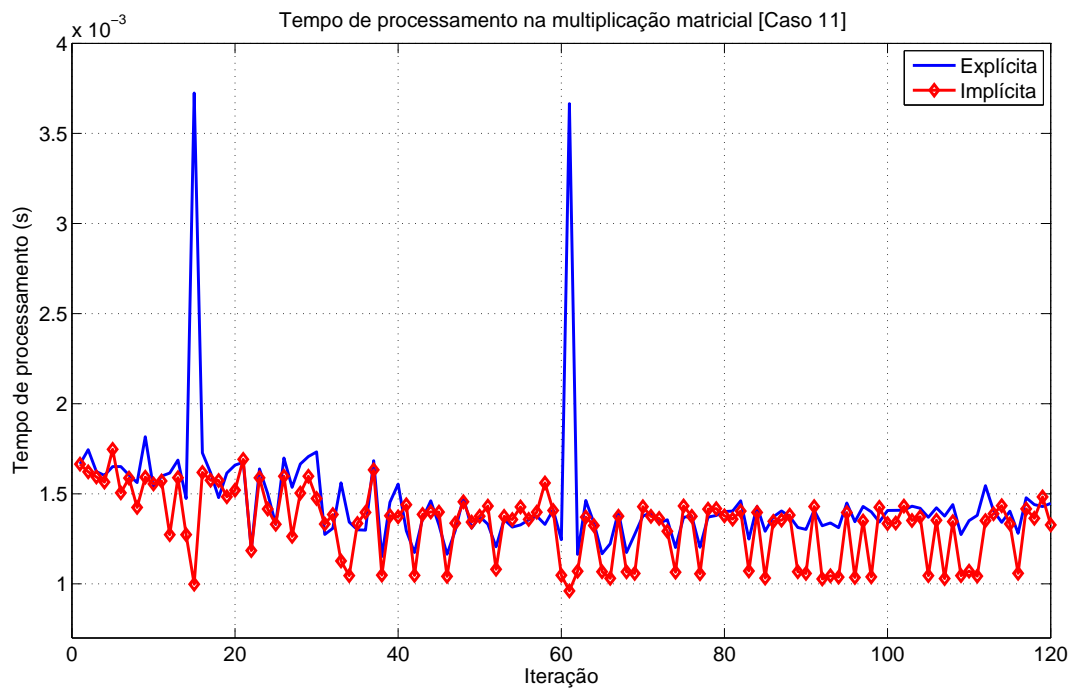


Figura 5.10: Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 11).

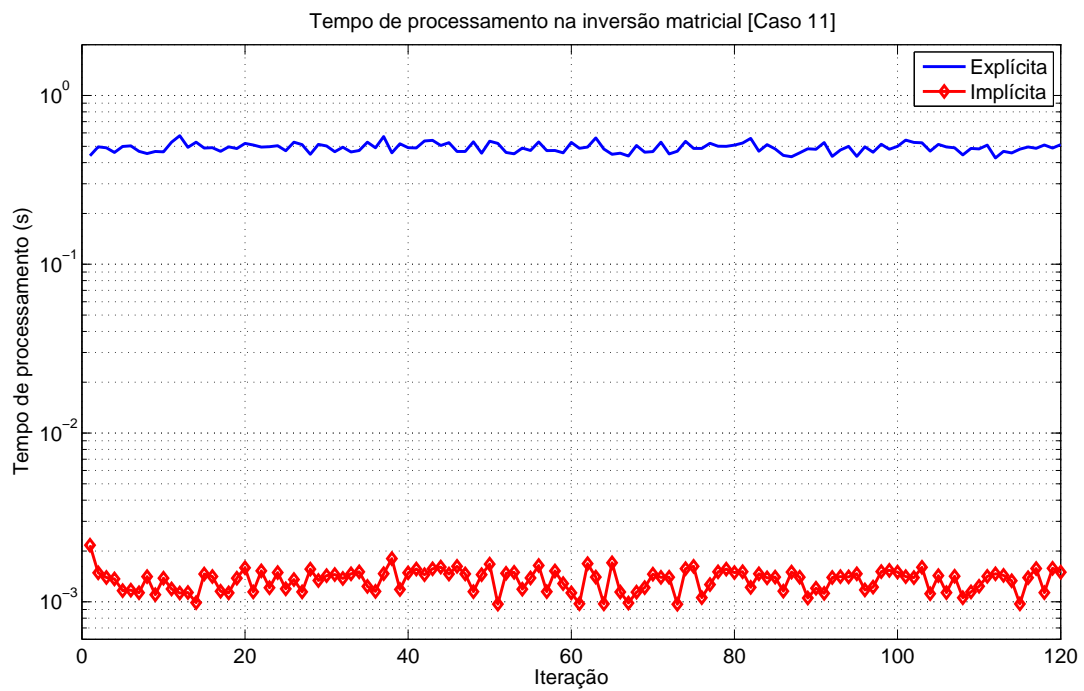


Figura 5.11: Tempo de processamento na inversão matricial (caso 11).

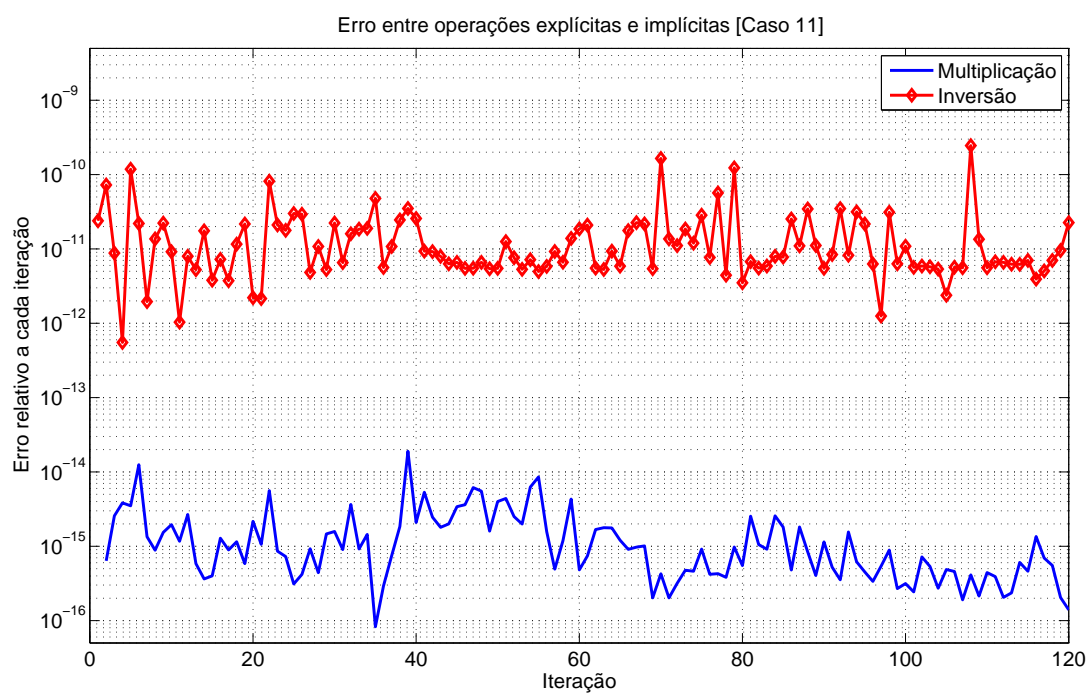


Figura 5.12: Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 11).

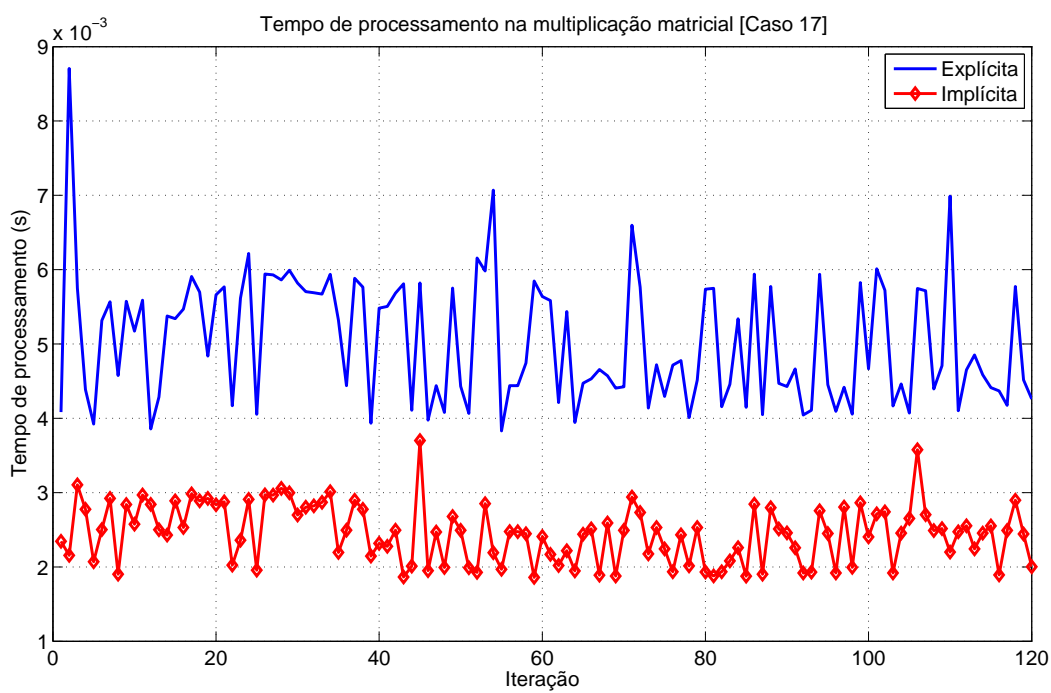


Figura 5.13: Tempo de processamento na multiplicação matricial (caso 17).

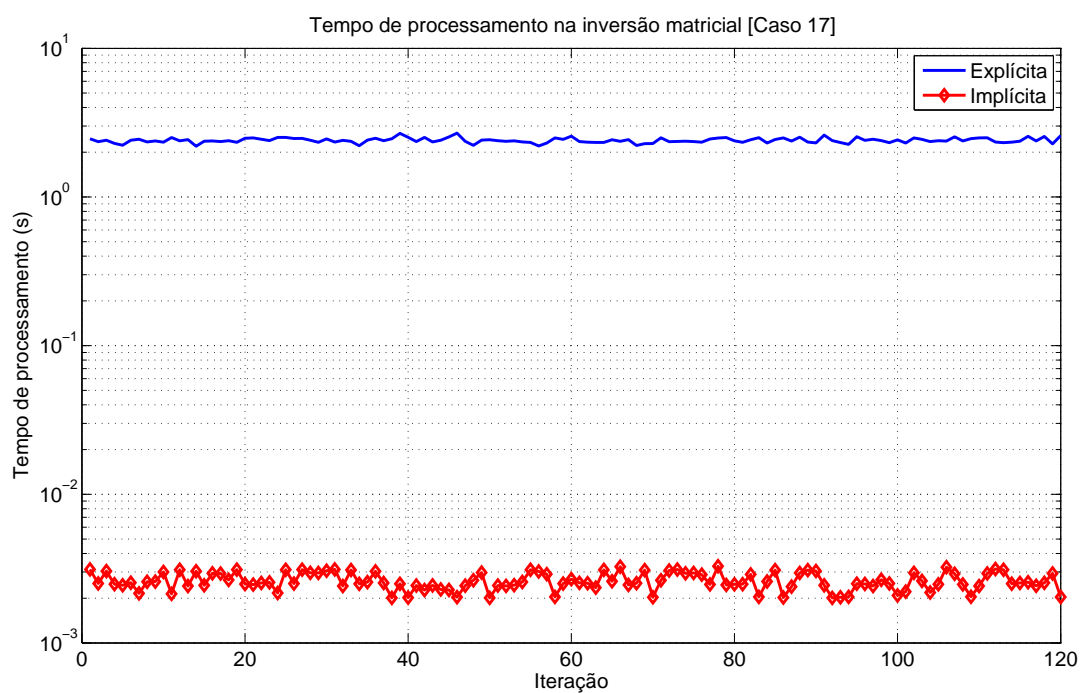


Figura 5.14: Tempo de processamento na inversão matricial (caso 17).

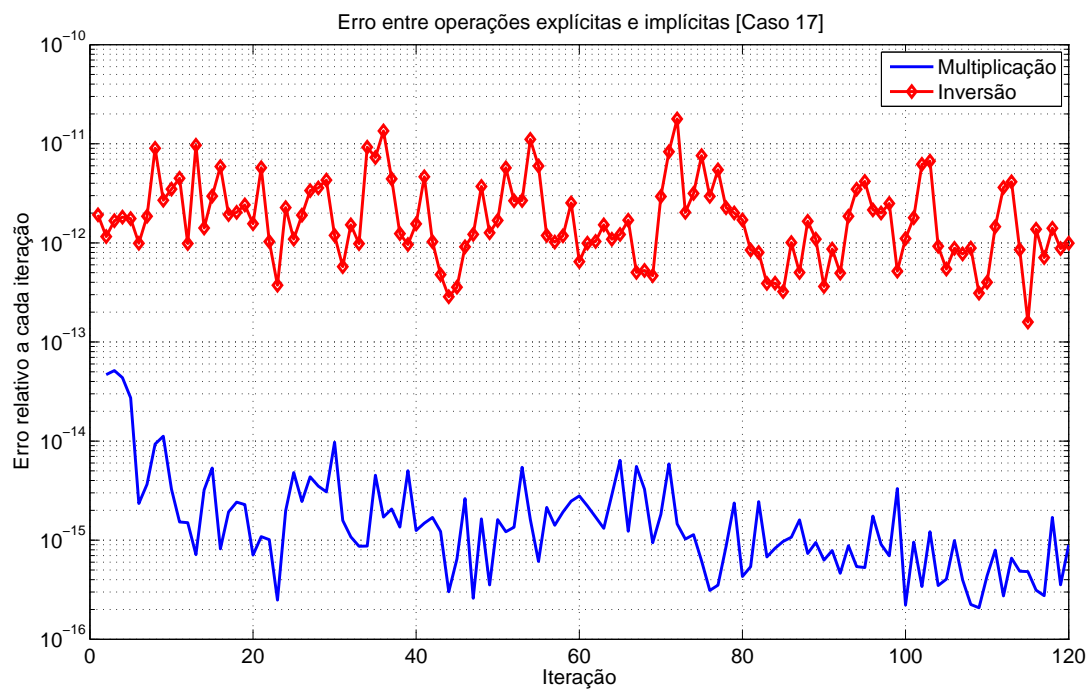


Figura 5.15: Erro relativo entre op. explícitas e implícitas (caso 17).

5.2.2 VARIANTES EKS

O objetivo desta subseção é avaliar o desempenho das variantes A, B, C e D, propostas na seção 4.3.

Primeiramente, será avaliado o desempenho de cada variante no cálculo de cada graminiana X_B e X_C , conforme Algoritmos 5 e 6, para todos os CASOS. As figs. 5.16 e 5.17 apresentam o TP para cada variante e o TP do cálculo pelo método convencional Bartels-Stewart [22, 23], como referência de comparação. Quanto maior a ordem do sistema, mais o tempo demandado pelo método convencional se torna inviável.

Para melhor comparação entre apenas as variantes, a curva de referência é retirada nas figs. 5.18 e 5.19. Em ambas as figuras, o desempenho das variantes A, C e D é melhor que a variante B para sistemas de menores ordens. Entretanto, conforme se aumenta a ordem do sistema, a variante A visivelmente possui desempenho pior que as demais, enquanto que a variante B é ligeiramente melhor que as variantes C e D. Dado que as variantes C e D são híbridos das variantes A e B, elas apresentam um desempenho que tenta agrupar as vantagens de multiplicação explícita da variante A para sistemas de baixa ordem e as vantagens de inversão implícita da variante B.

As figs. 5.20 e 5.21 apresentam o IER no cálculo de cada graminiana X_B e X_C , para todos os CASOS, em que a referência é o cálculo pelo método convencional Bartels-Stewart. O importante nestas figuras não é a forma das curvas e sim a comparação entre elas, dado que cada CASO responde com melhores ou piores IER. As variantes C e D tendem a possuir o mesmo IER que a variante A, enquanto que a variante B é ligeiramente melhor no cálculo de X_C , mas não no cálculo de X_B . O sistema de maior ordem, CASO 17, gerou maior IER entre as variantes e a referência, o que pode indicar que a referência já não funciona bem para esse sistema de ordem alta.

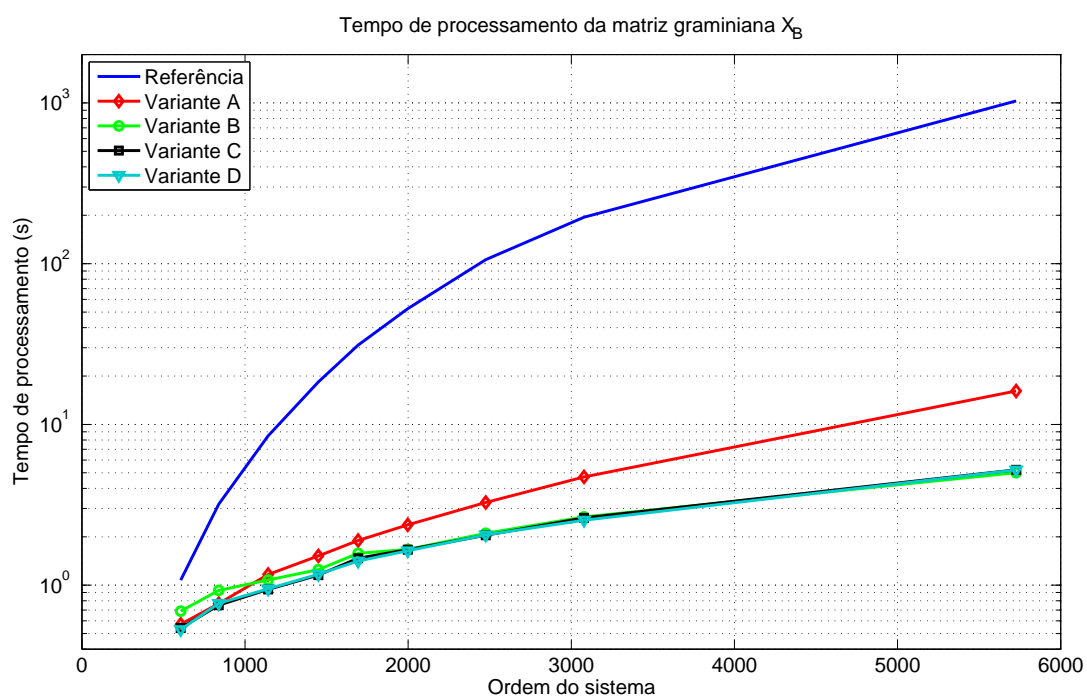


Figura 5.16: Tempo de processamento da graminiana X_B .

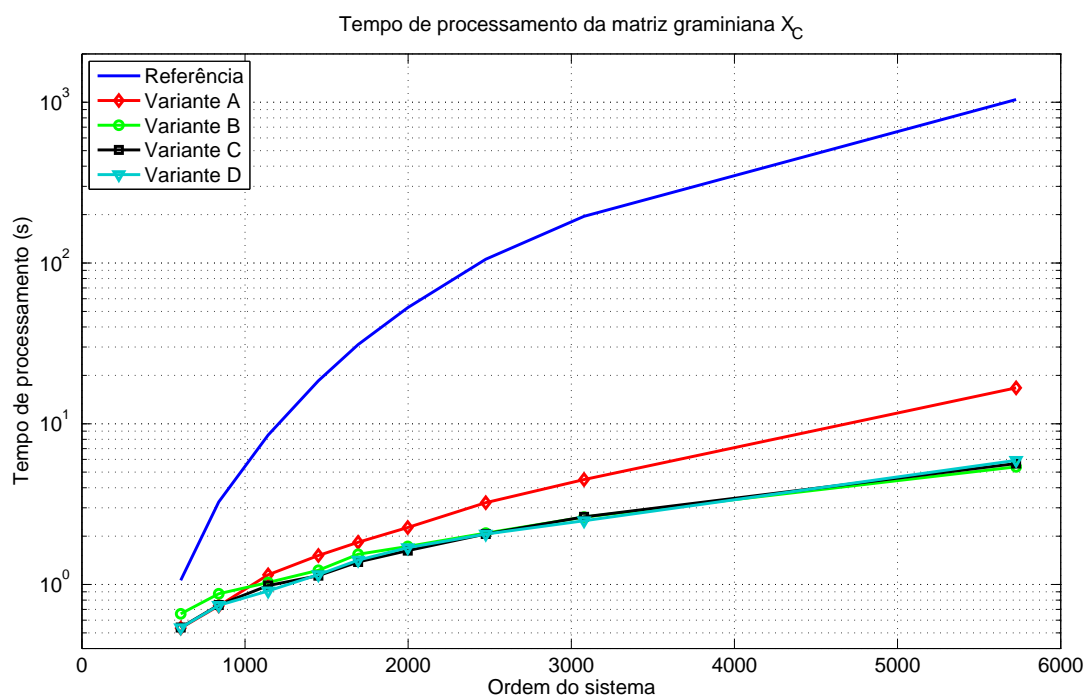


Figura 5.17: Tempo de processamento da graminiana X_C .

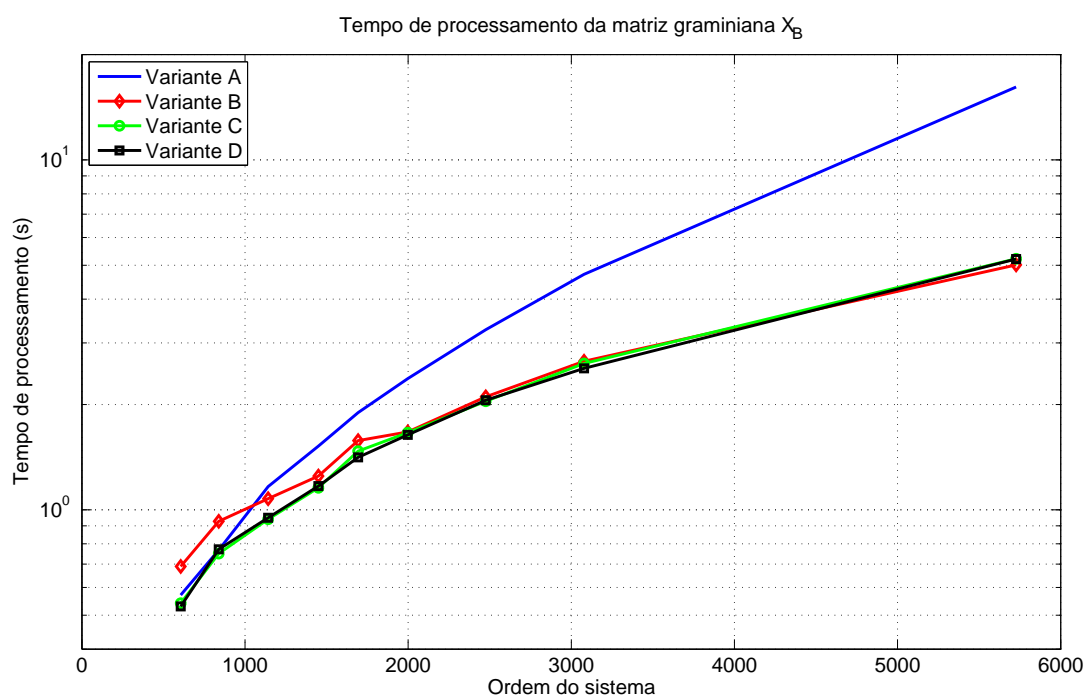


Figura 5.18: Tempo de processamento da gramianiana X_B , apenas variantes.

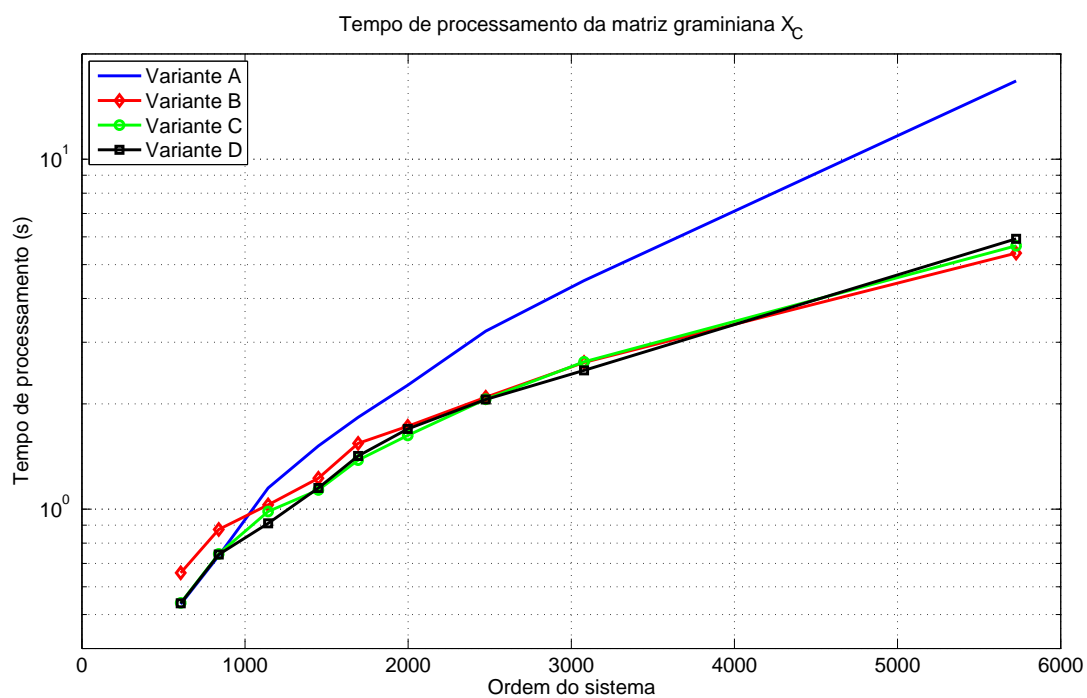


Figura 5.19: Tempo de processamento da gramianiana X_C , apenas variantes.

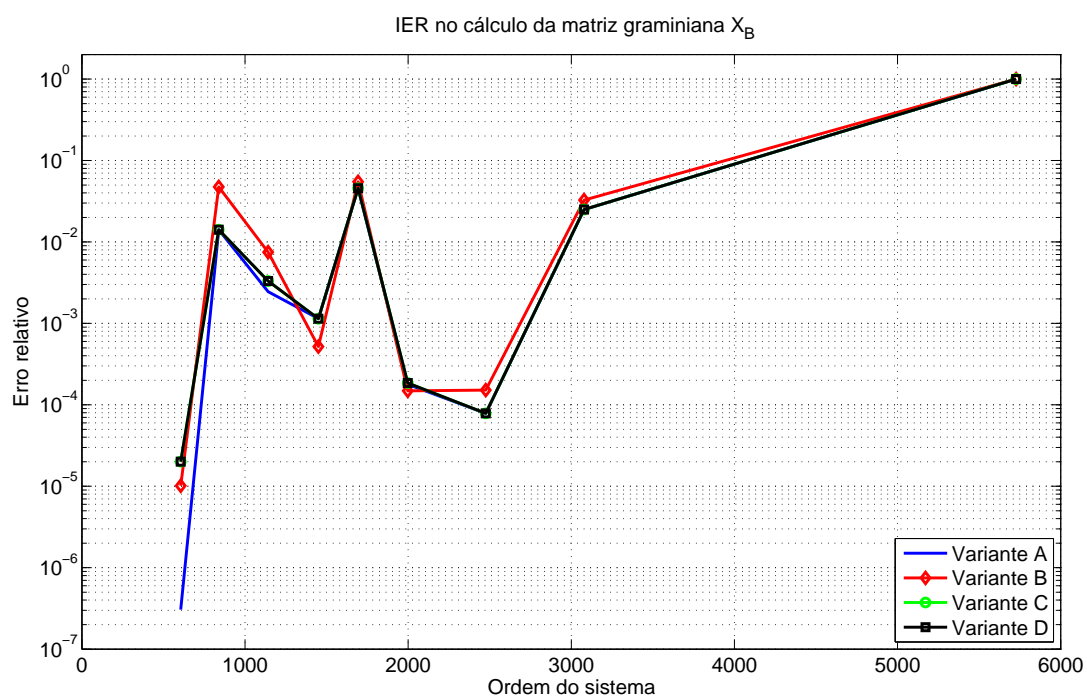


Figura 5.20: IER no cálculo de X_B para cada variante.

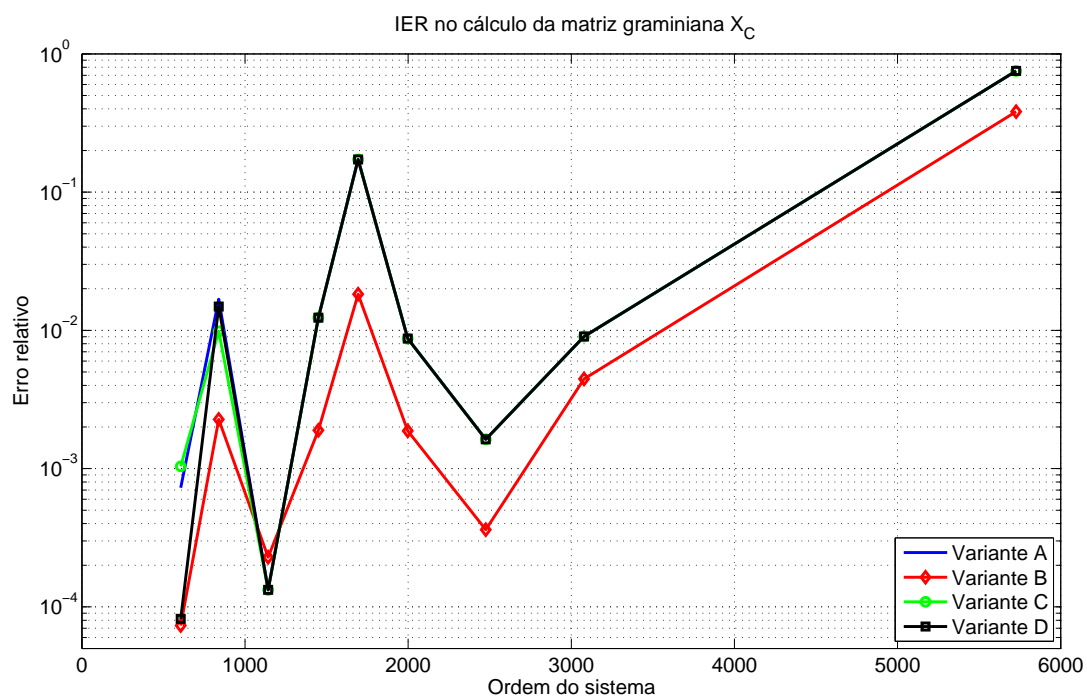


Figura 5.21: IER no cálculo de X_C para cada variante.

Em seguida, avalia-se o desempenho de cada variante na redução do sistema FOM, não apenas no cálculo de cada gramiana, mas do início até a geração do MOR.

Embora na fig. 5.22 não se possa visualmente distinguir as curvas das variantes na resposta em frequência (magnitude) do CASO 1, a fig. 5.23 permite comparar o erro em frequência entre as variantes. A variante B apresenta erro ligeiramente menor na maior parte da faixa de frequências, mas as quatro variantes apresentam alguns picos no intervalo entre 4 e 10 rad/s, mesmo que sejam picos de -15 dB.

As figs. 5.24 e 5.25 apresentam os mesmos tipos de gráficos de resposta e erro em frequência, para o CASO 2. Em ambas as figuras é possível observar que todas as variantes possuem um significativo erro em baixas frequências, associado ao pico de baixa frequência que existe na resposta original do FOM, o qual dificulta a redução de ordem dado que existe um shift α mínimo necessário para estabilizar o sistema (ver seção 5.2.3). Quanto ao erro em frequência, as quatro variantes possuem desempenho semelhante, que tende a melhorar nas frequências mais altas.

O CASO 11 também é avaliado nas figuras 5.26 e 5.27. Embora alguma diferença entre as curvas não seja observável na fig. 5.26, os erros são visualizados na fig. 5.27. As quatro variantes possuem desempenhos semelhantes, sendo que as variantes A e B tiveram desempenhos um pouco melhor em algumas faixas de frequência. Todas as variantes possuem um grande erro na faixa entre 2 e 10 rad/s, muito provavelmente devido ao grande pico de larga banda que existe na resposta do FOM da fig. 5.26. Grandes magnitudes na resposta em frequência tendem a ser acompanhados por grandes erros nos MORs associados.

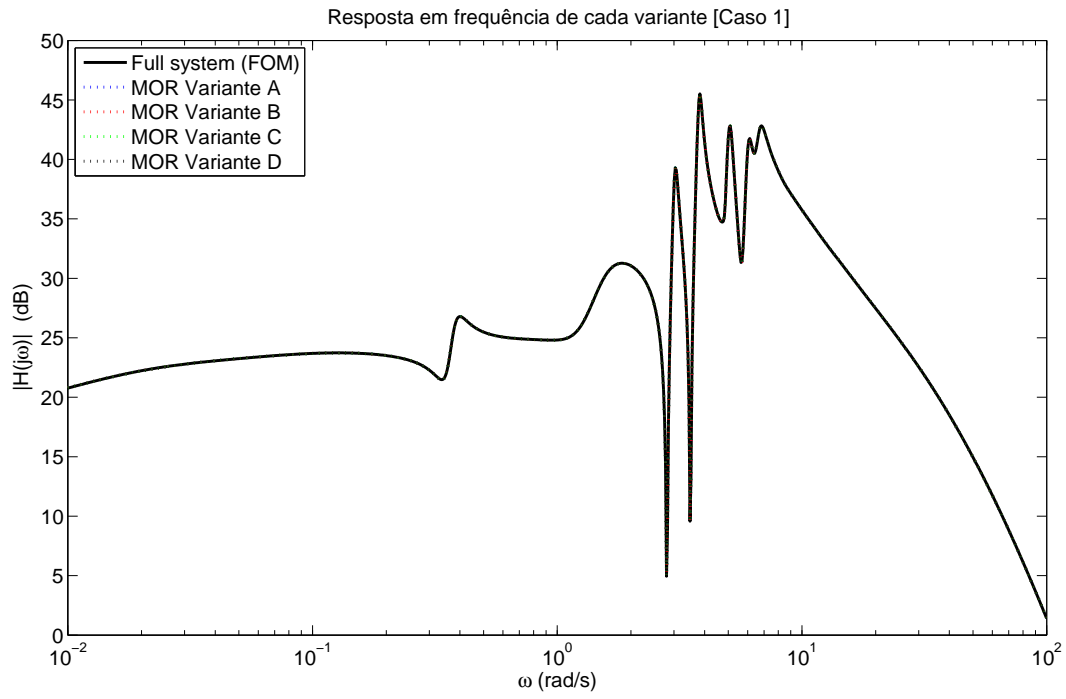


Figura 5.22: Resposta em frequência para cada variante (caso 1).

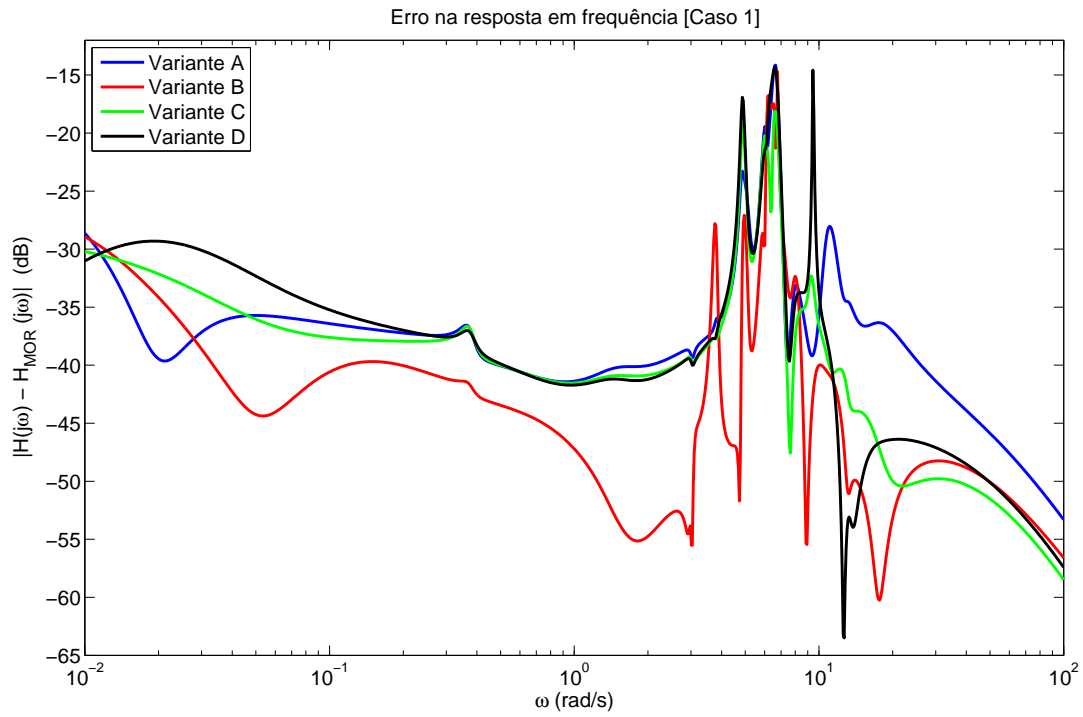


Figura 5.23: Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 1).

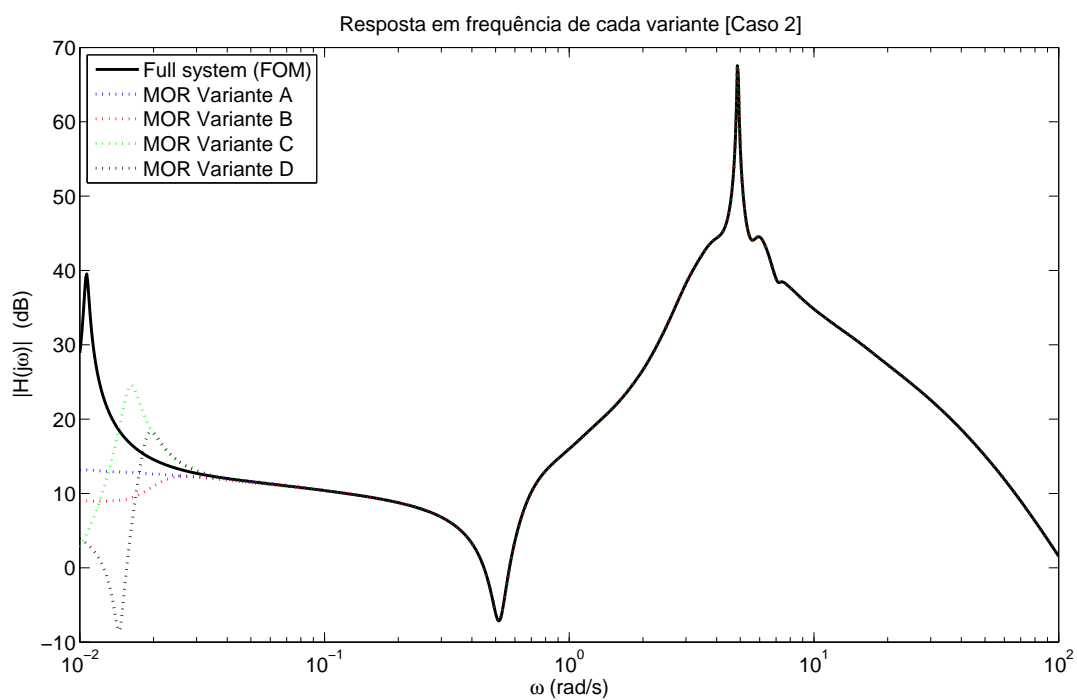


Figura 5.24: Resposta em frequência para cada variante (caso 2).

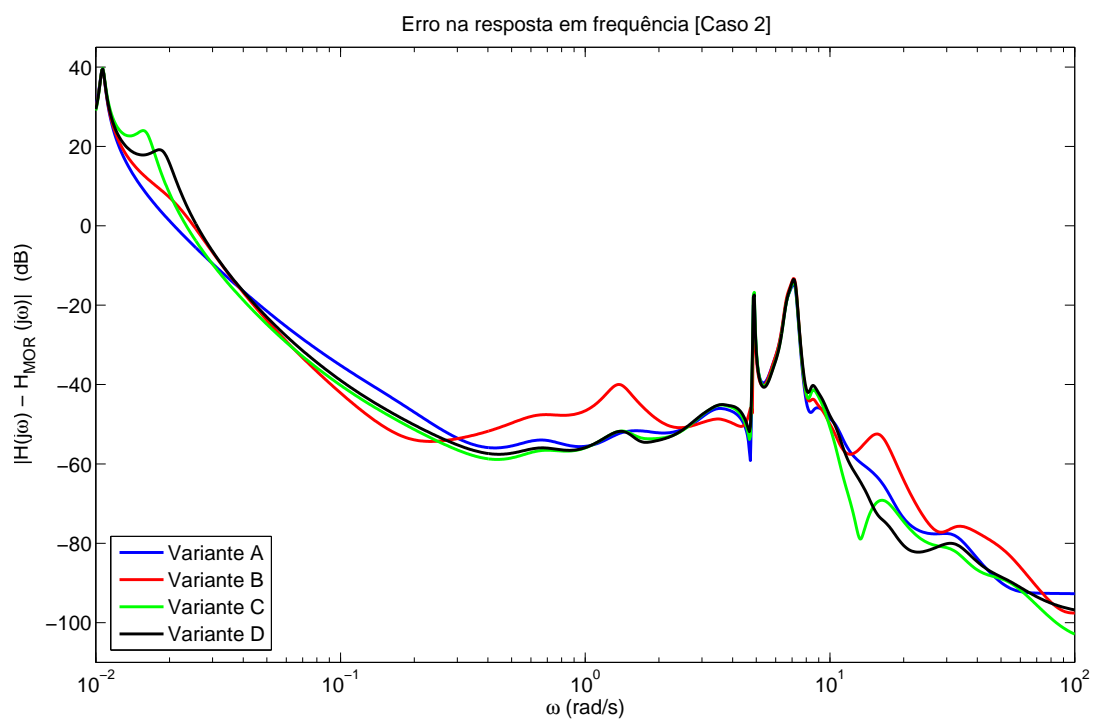


Figura 5.25: Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 2).

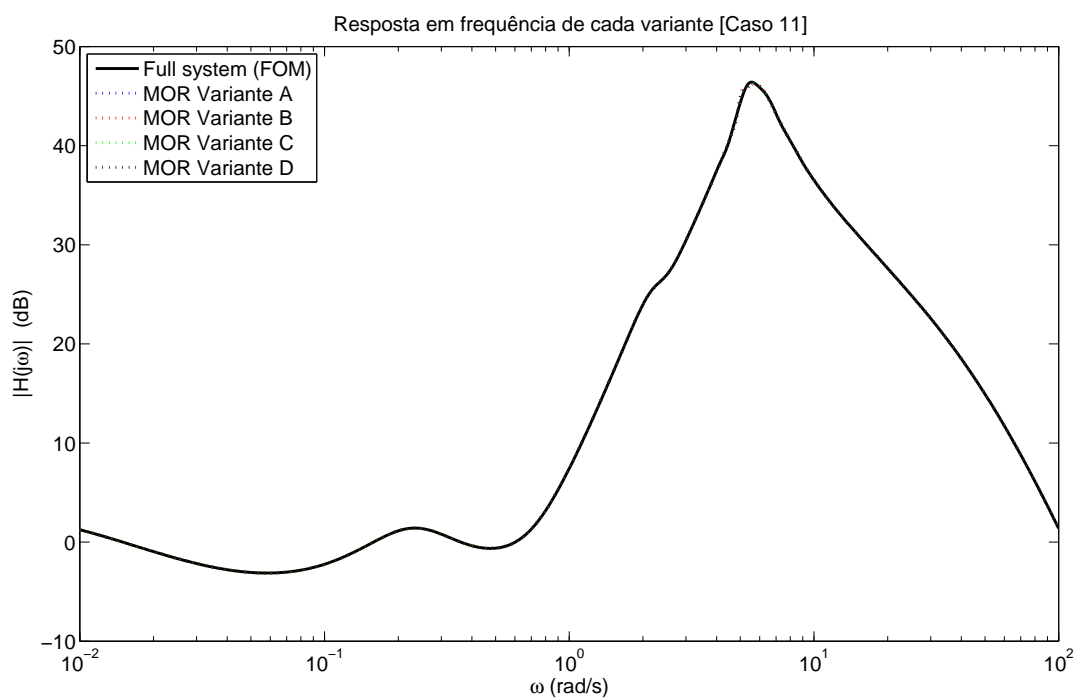


Figura 5.26: Resposta em frequência para cada variante (caso 11).

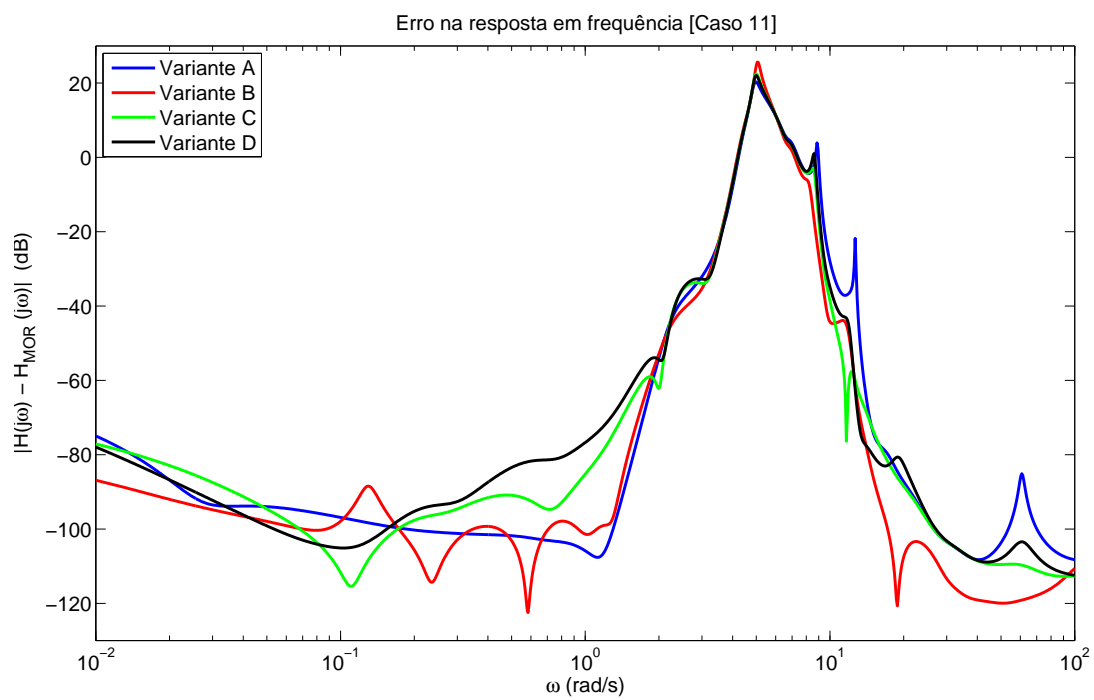


Figura 5.27: Erro na resposta em frequência para cada variante (caso 11).

Utilizando-se os CASOS 1, 2, 3, 4, 9, 11, 16 e 17, são avaliados os TP, IER e IERTP do processo total de redução de ordem para cada variante, conforme figuras 5.28 a 5.30.

De acordo com a fig. 5.28, a variante A resultou em maior TP que as demais, enquanto que a variante B resultou mais rápida, já que apenas utiliza operações implícitas. As variantes C e D ficaram em uma posição intermediária. Já na fig. 5.29, o desempenho das variantes é semelhante, sendo que em alguns casos a variante A resultou em IER ligeiramente superior, e em outros a variante B resultou em maior IER.

Segundo a fig. 5.30, que tenta estabelecer uma ponderação entre TP e IER, a variante B resultou em menor IERTP, para os casos de maiores ordens. Além disso, é visível que, a despeito de ter melhor IER, o maior IERTP da variante A torna esta opção um pouco menos atrativa. As variantes C e D são convenientes para os casos de média e baixa ordens. Durante o restante deste trabalho, os testes com método EKS foram conduzidos utilizando-se as variantes B e C.

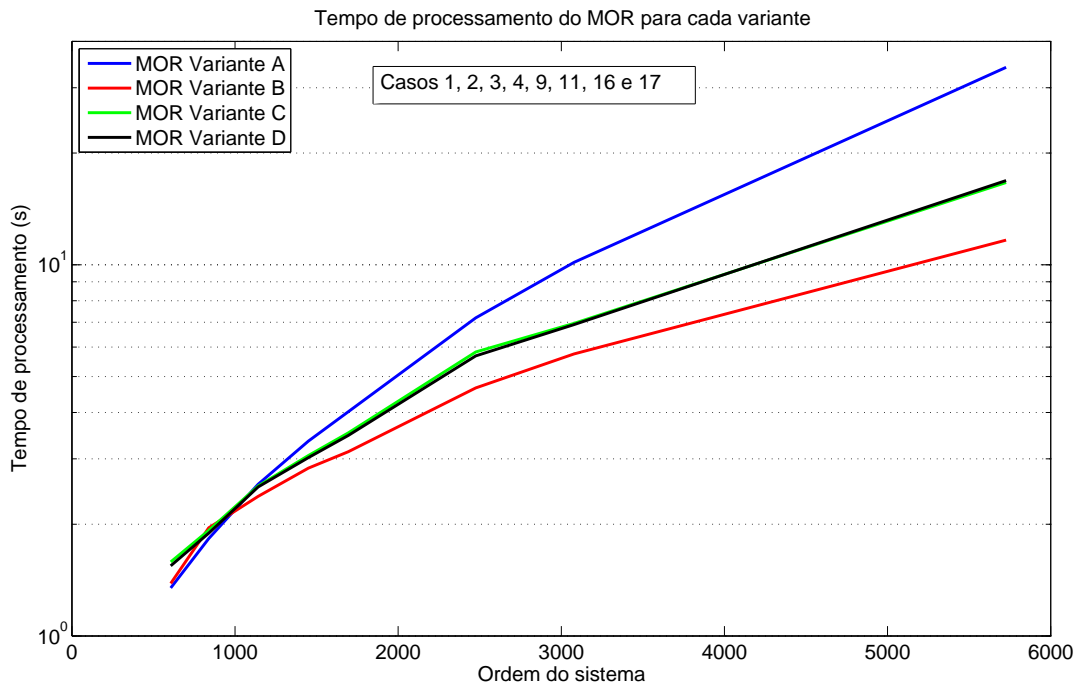


Figura 5.28: Tempo de processamento do MOR para cada variante.

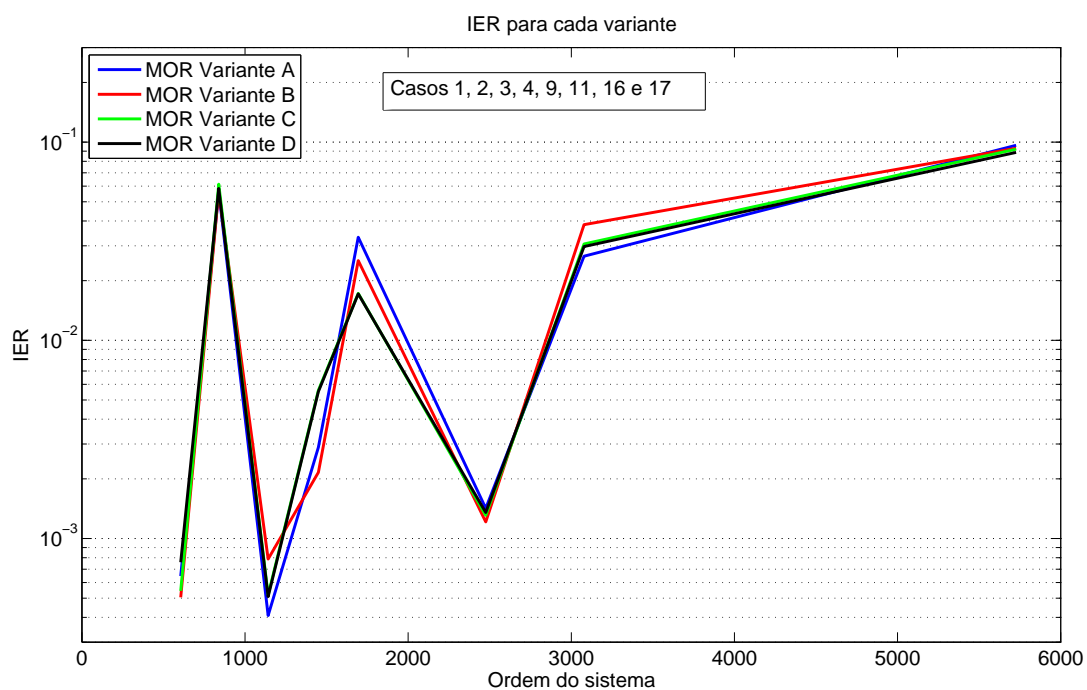


Figura 5.29: IER no cálculo do MOR para cada variante.

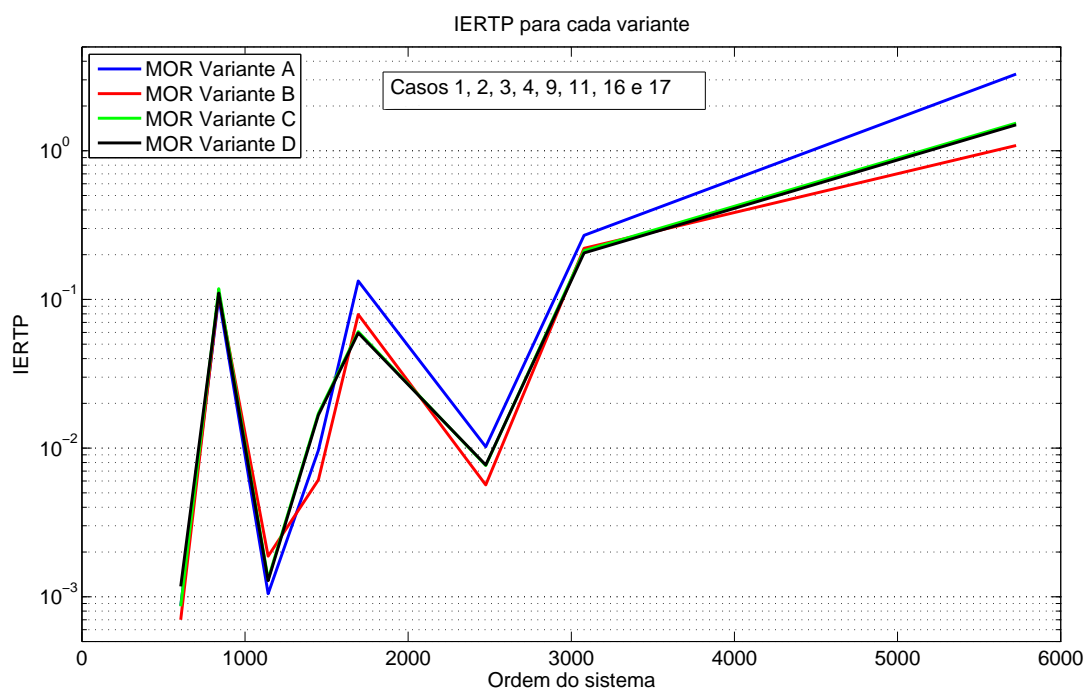


Figura 5.30: IERTP no cálculo do MOR para cada variante.

5.2.3 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

A finalidade desta subseção é verificar o comportamento do método EKS com a variação de parâmetros constitutivos do mesmo, como o shift α , o número $2w$ de vetores de Krylov e a ordem k do MOR.

Sensibilidade ao shift α

Com o CASO 1, é avaliada a qualidade da redução de ordem para os seguintes shifts α : 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.0029451594, sendo este último praticamente o valor mínimo necessário para que o sistema deslocado ainda seja estável (ver Tabela 5.2). Os resultados são apresentados na forma de resposta em frequência (magnitude e fase), e polos do sistema, nas figuras 5.31 a 5.36.

Na fig. 5.31 é visto que, à medida que o shift α diminui, a curva do MOR adere à curva original do FOM a uma frequência inferior, até aderir por completo no menor shift. Já a fig. 5.32 apresenta o erro em frequência para cada shift, em que os maiores shifts levam a maiores erros em baixa frequência, enquanto que os menores shifts tentam distribuir esse erro para todas as frequências. Isso ocorre pela razão de que um elevado valor de shift α prioriza a redução de ordem para as frequências mais altas.

As figuras 5.33 e 5.34 apresentam a resposta de fase e desvio de fase em frequência, e apresentam comportamento análogo ao observado nas figuras de magnitude, inclusive para as mesmas faixas de frequências.

As figuras 5.35 e 5.36 apresentam os polos do sistema. Observa-se que os menores shifts geraram polos de MOR mais próximos dos polos estáveis do FOM que se localizam perto do zero, o que está de acordo com o observado nas figuras anteriores.

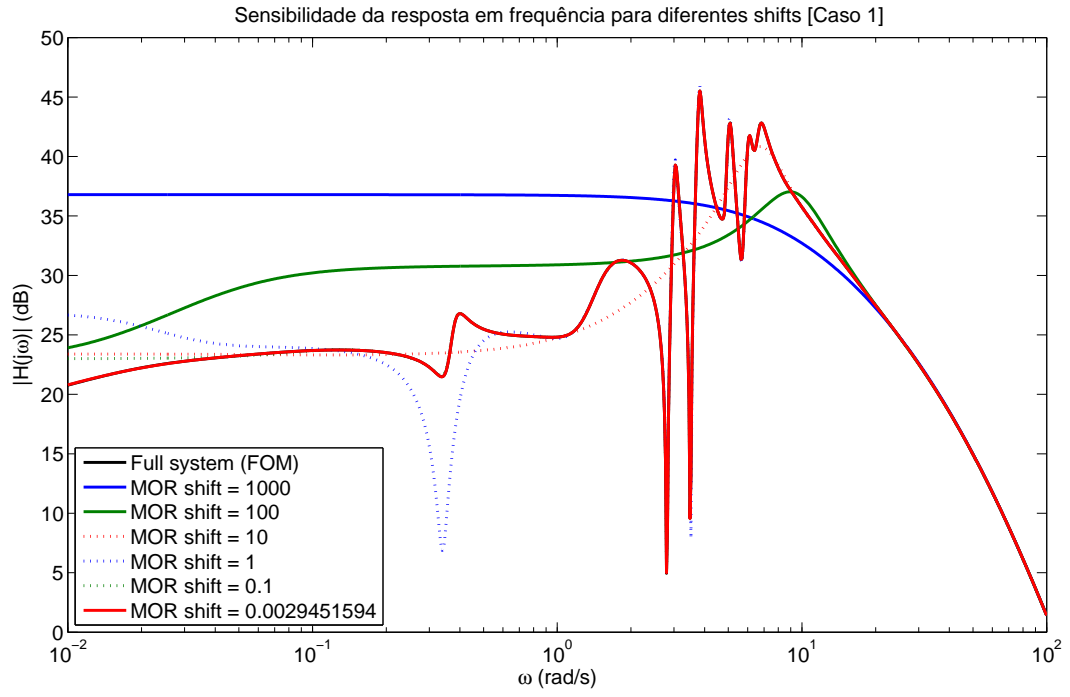


Figura 5.31: Sensibilidade da resposta em frequência para diferentes shifts (caso 1).

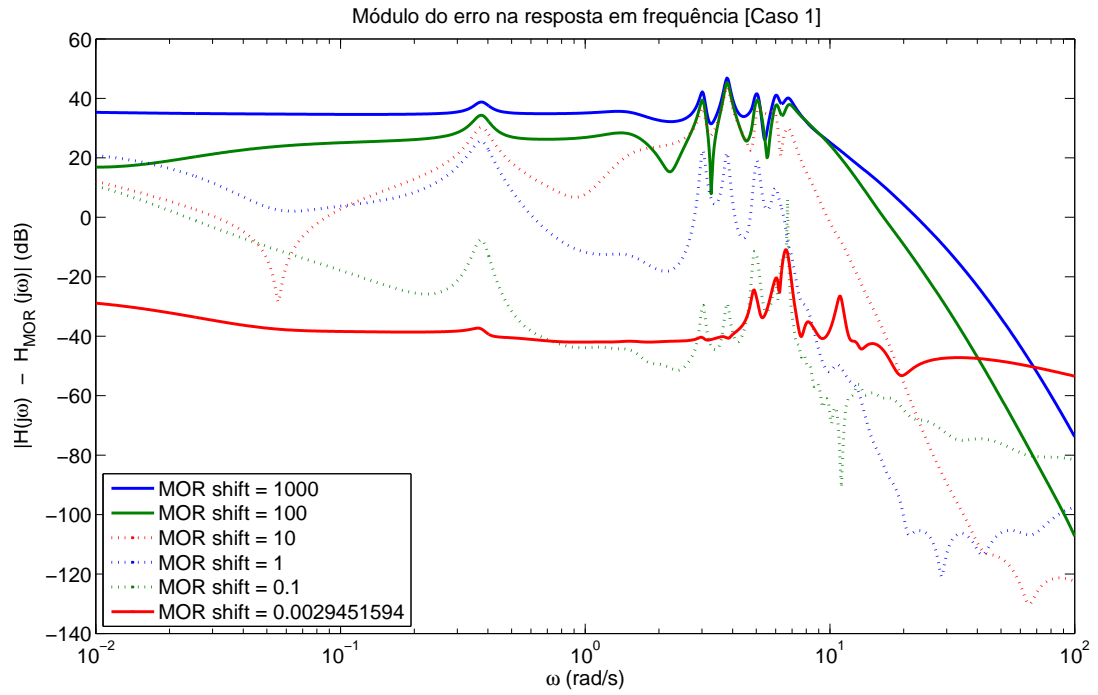


Figura 5.32: Módulo do erro da resposta em frequência (caso 1).

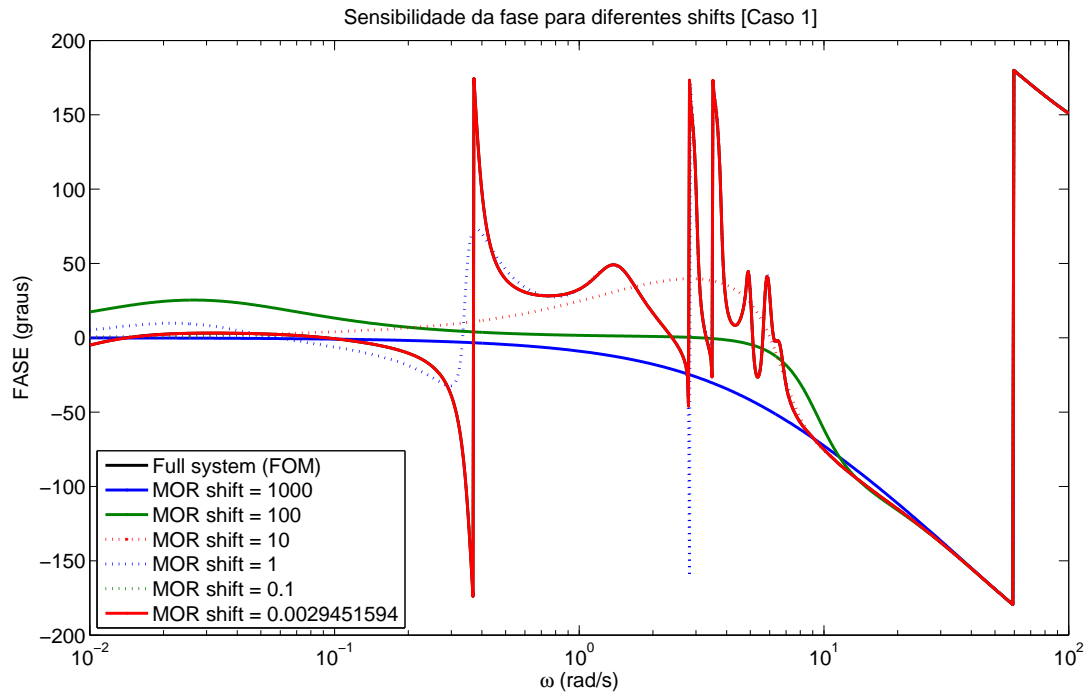


Figura 5.33: Sensibilidade da fase para diferentes shifts (caso 1).

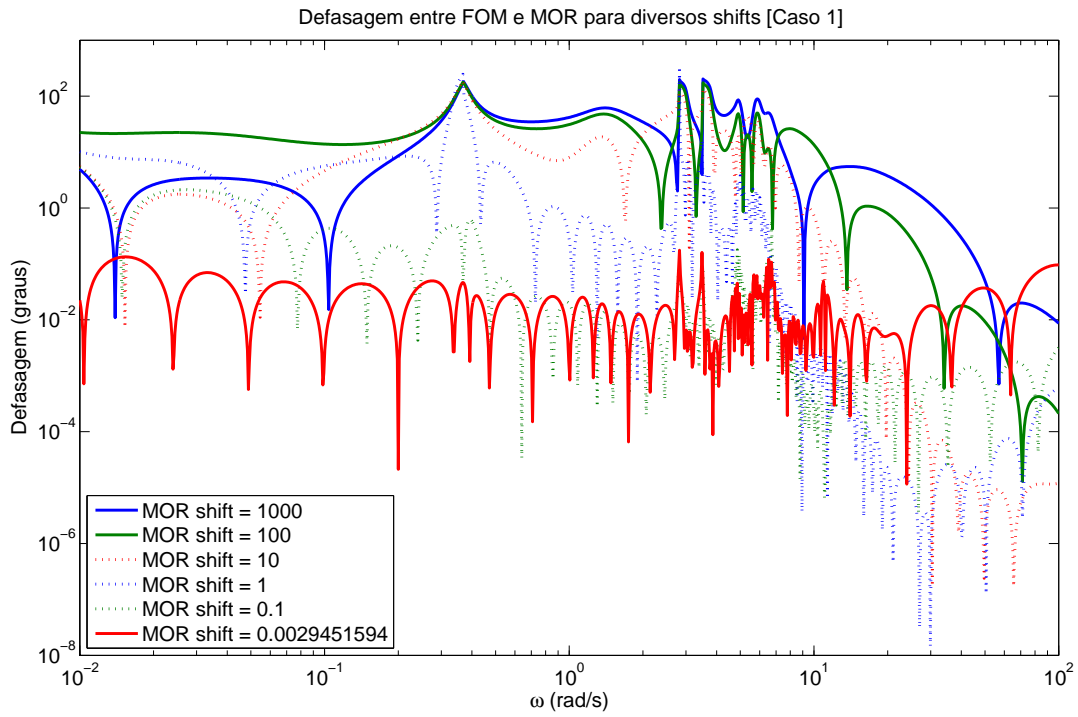


Figura 5.34: Defasagem entre FOM e MOR para diferentes shifts (caso 1).

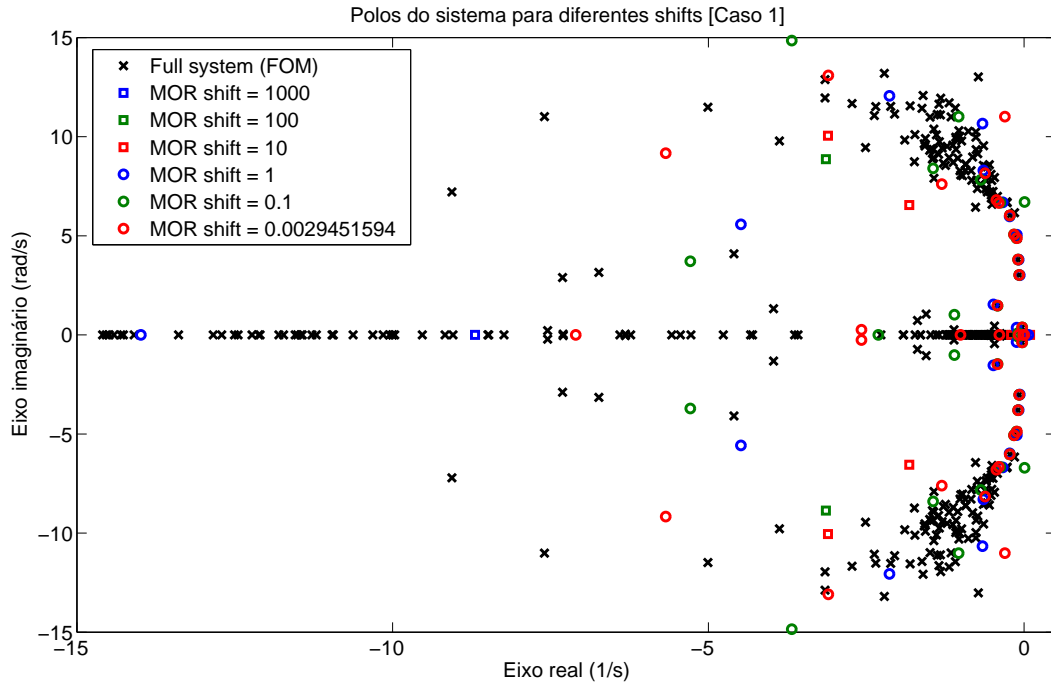


Figura 5.35: Polos do sistema para diferentes shifts (caso 1).

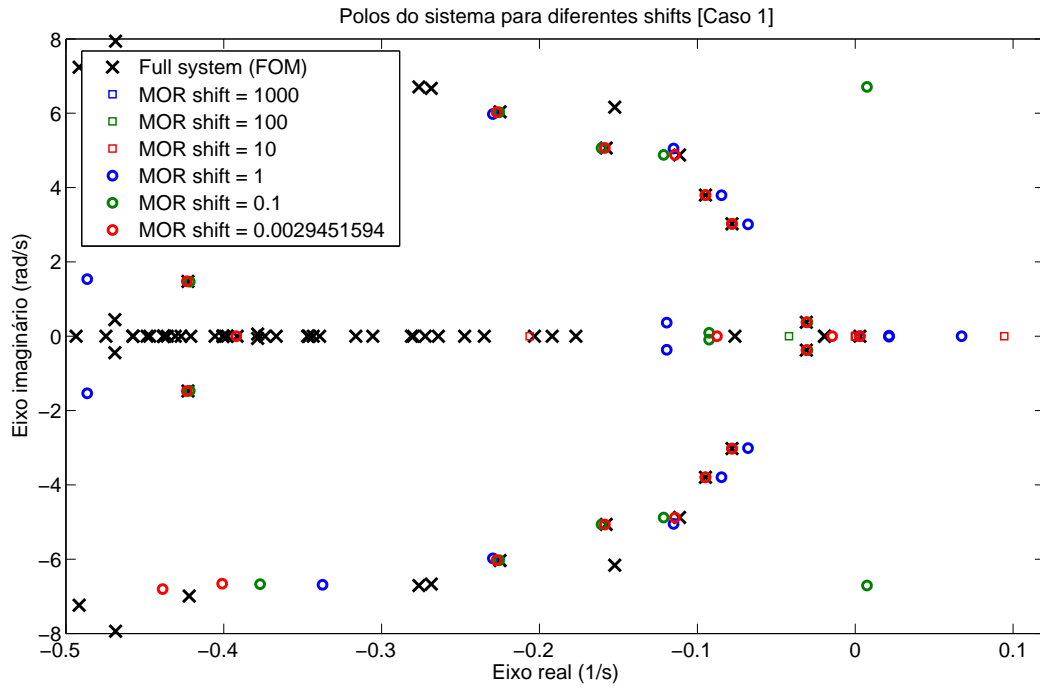


Figura 5.36: Polos do sistema para diferentes shifts (caso 1), imagem aumentada.

Por fim, a Figura 5.37 apresenta a evolução do IER desde o mínimo valor de shift α que garante a estabilização do sistema até o valor de $\alpha = 1000$. Pode-se visualizar que a redução gradativa do shift leva a um menor, e melhor, IER. A única restrição se encontra nos shifts muito próximos ao valor do polo instável real do FOM. Neste caso, o método não consegue reduzir o sistema deslocado com polo no zero, o que cria um alto pico de IER.

Cabe ressaltar que a diminuição do valor de shift α utilizado tende a melhorar a qualidade do MOR nas frequências mais baixas. Entretanto, a existência de um limite inferior para α , como sendo o mínimo valor teórico necessário para se estabilizar o sistema, pode impedir que se atinja uma qualidade satisfatória, especialmente nas menores frequências.

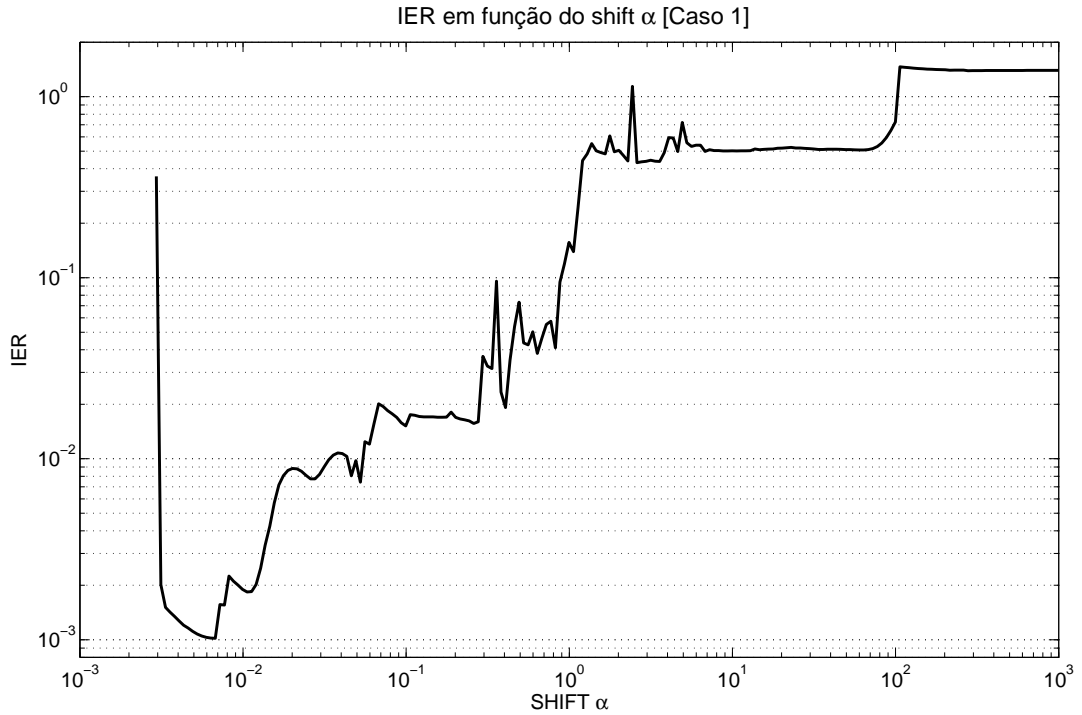


Figura 5.37: IER em função do shift α (caso 1).

Sensibilidade ao número w de pares de vetores de Krylov

Nesta subseção será avaliado como a redução de ordem é afetada pelo número de vetores de Krylov, ou seja, a dimensão $2w$ em que são projetadas as equações de Lyapunov, como visto no capítulo 4. Esta análise apresentou algumas dificuldades inerentes aos métodos, pois a qualidade do MOR é dependente não apenas do valor de w de forma desacoplada, mas de w e do shift α utilizado. Os testes foram conduzidos com $\alpha = 0.0030$.

As figuras 5.38 a 5.43 apresentam o desempenho da redução de ordem do CASO 1 para os seguintes valores de w : 40, 80, 120 e 160.

A resposta de magnitude em frequência, fig. 5.38, indica que a redução com $w = 40$ não foi boa. Para confirmar isso, a fig. 5.39 apresenta o erro em frequência e, embora as baixas e mais altas frequências possuam baixo erro, a seleção $w = 40$ acarretou em um excessivo pico de erro exatamente onde estão os picos na resposta em frequência do FOM. Os valores de w iguais a 80, 120 e 160 geraram erros semelhantes, com algumas diferenças em baixa frequência por influência do shift α .

As figuras 5.40 e 5.41 apresentam a resposta de fase e desvio de fase em frequência, e apresentam comportamento análogo ao observado nas figuras de magnitude, inclusive para as mesmas faixas de frequências.

Os polos do sistema são vistos nas figuras 5.42 e 5.43 e, novamente, o pior resultado está em $w = 40$, em que o MOR apresenta polos de baixa frequência mal alocados, enquanto que os demais se aproximam bastante dos polos originais do FOM.

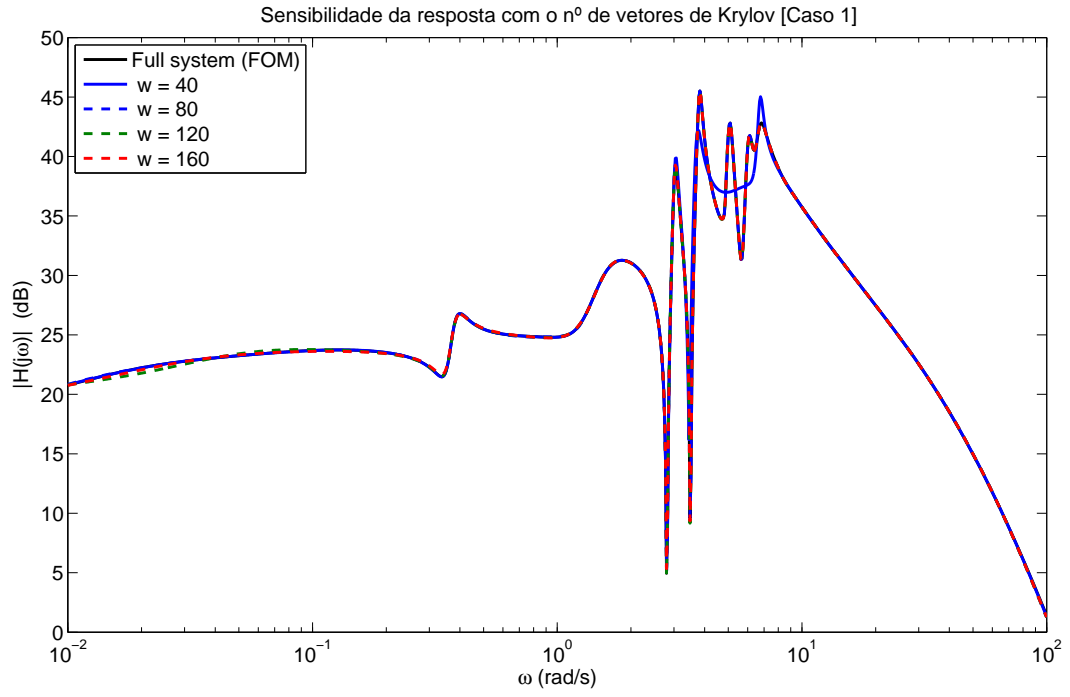


Figura 5.38: Resposta em frequência para diferentes valores de w (caso 1).

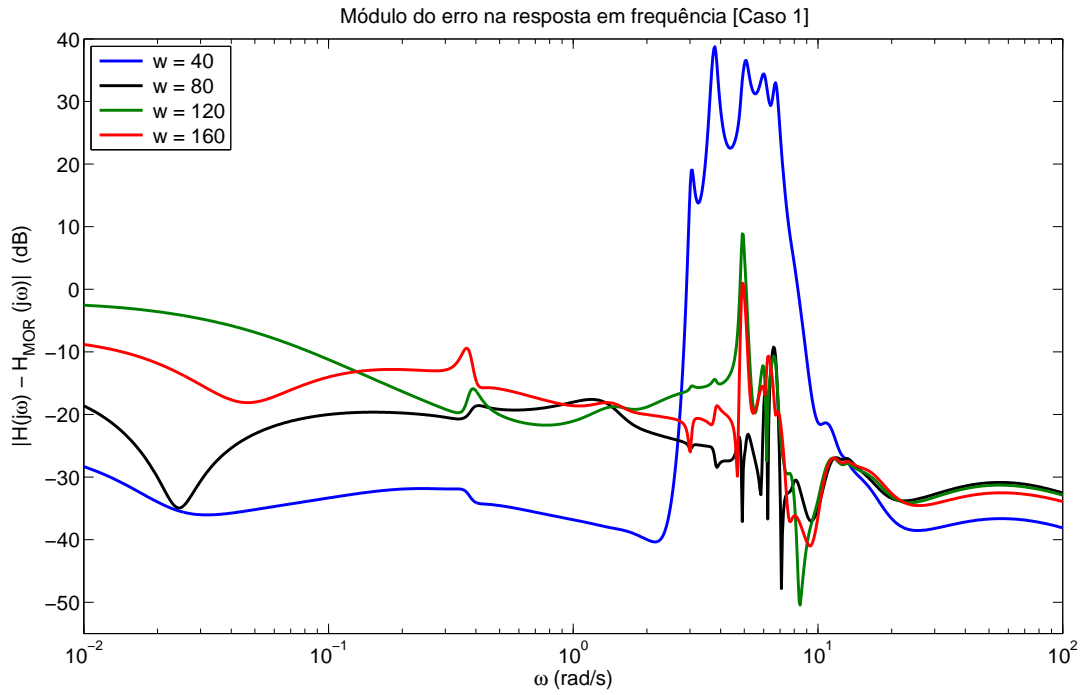


Figura 5.39: Erro em frequência para diferentes valores de w (caso 1).

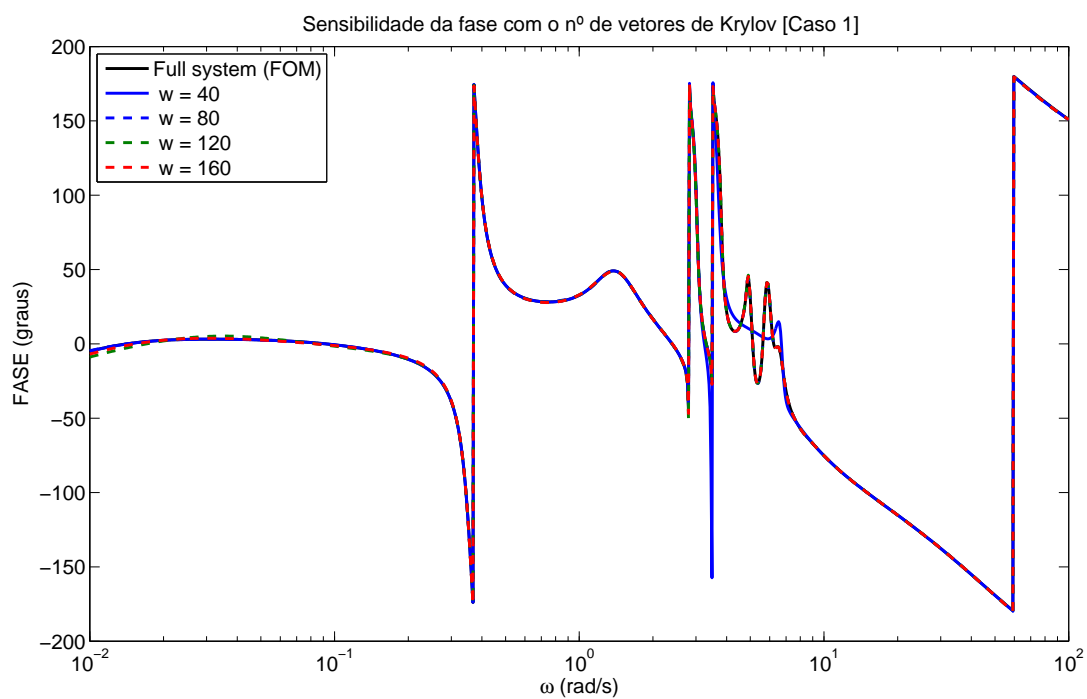


Figura 5.40: Sensibilidade da fase para diferentes valores de w (caso 1).

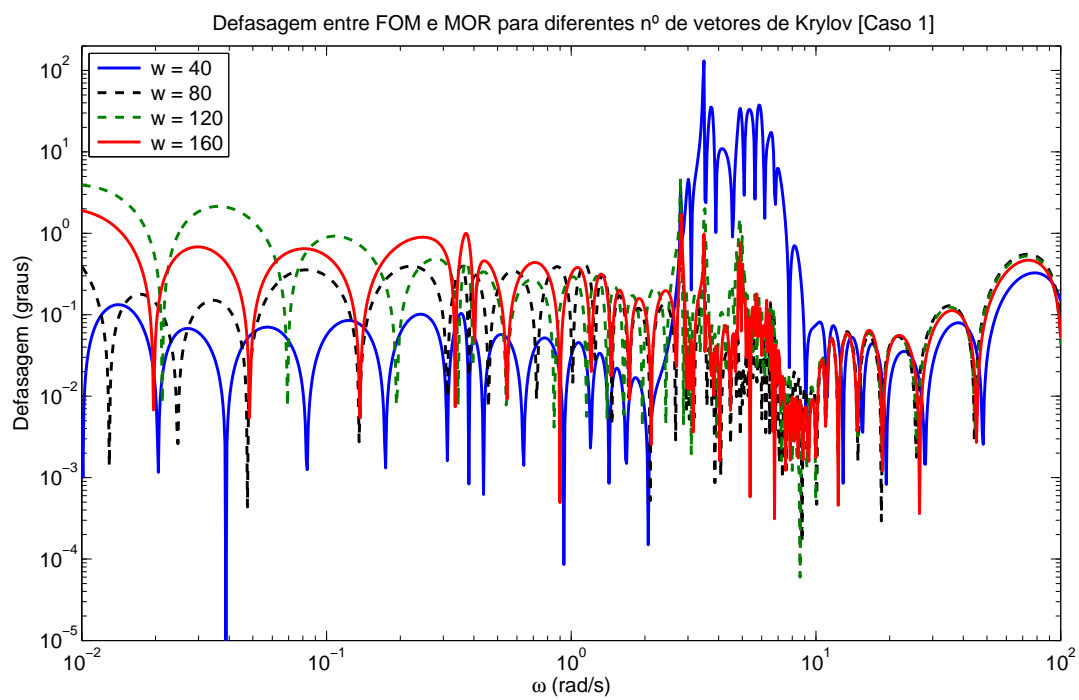


Figura 5.41: Defasagem entre FOM e MOR para diferentes valores de w (caso 1).

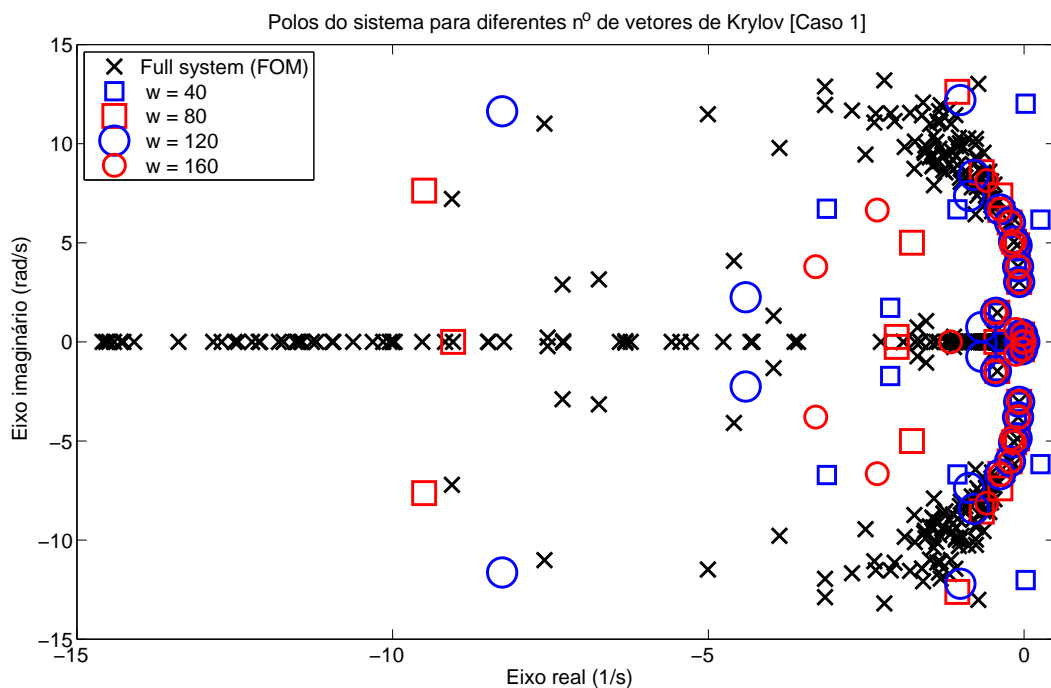


Figura 5.42: Polos do sistema para diversos w (caso 1).

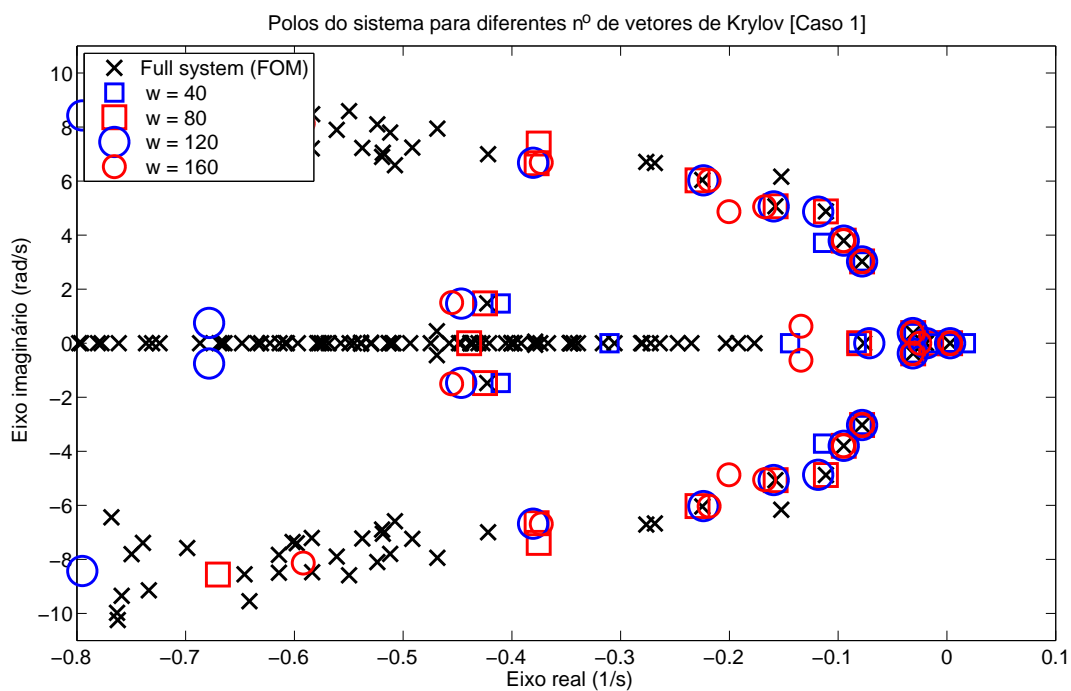


Figura 5.43: Polos do sistema para diversos w (caso 1), imagem aumentada.

Em seguida, variando-se o valor de w de 40 até 160, são verificados o TP, IER e IERTP nas figuras 5.44 a 5.46.

Conforme esperado, na fig. 5.44 é visto que o aumento de w leva a um crescente TP, especialmente devido ao aumento do número de reortonormalizações realizadas na construção de V_B e V_C , conforme Algoritmos 5 e 6.

Na Figura 5.45, o desempenho melhor é observado na faixa entre $w = 60$ e $w = 140$. Contudo, ponderando-se TP e IER, o IERTP da fig. 5.46 resultou melhor no intervalo $w = 60$ a $w = 120$, para o CASO 1.

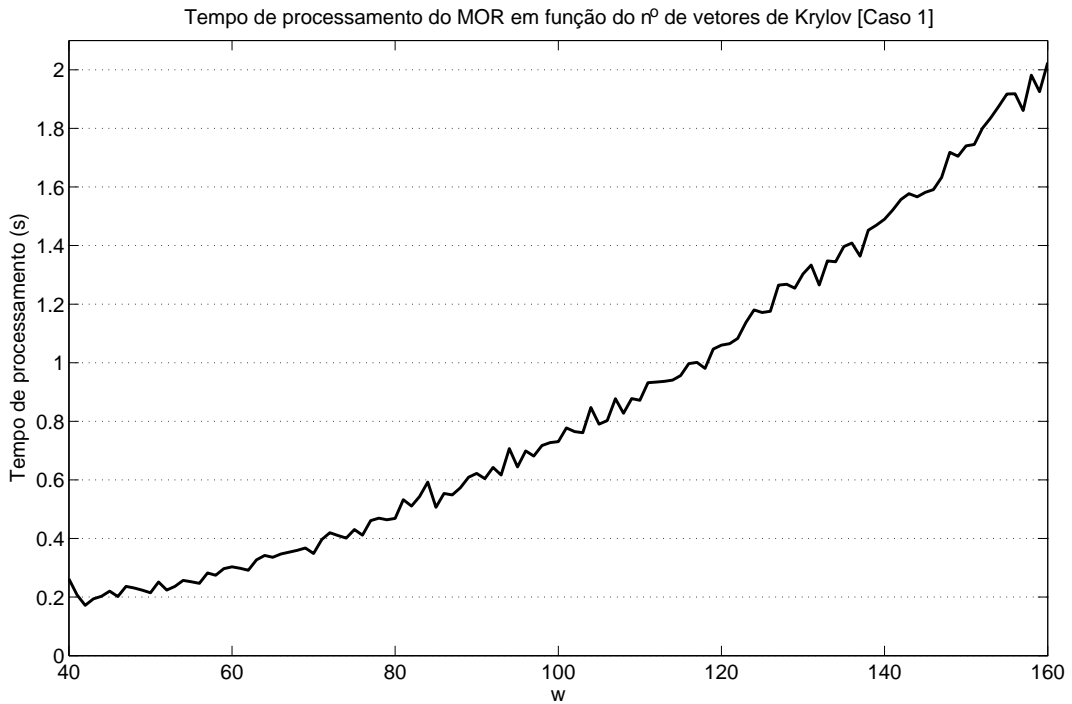


Figura 5.44: Tempo de processamento do MOR para diversos w (caso 1).

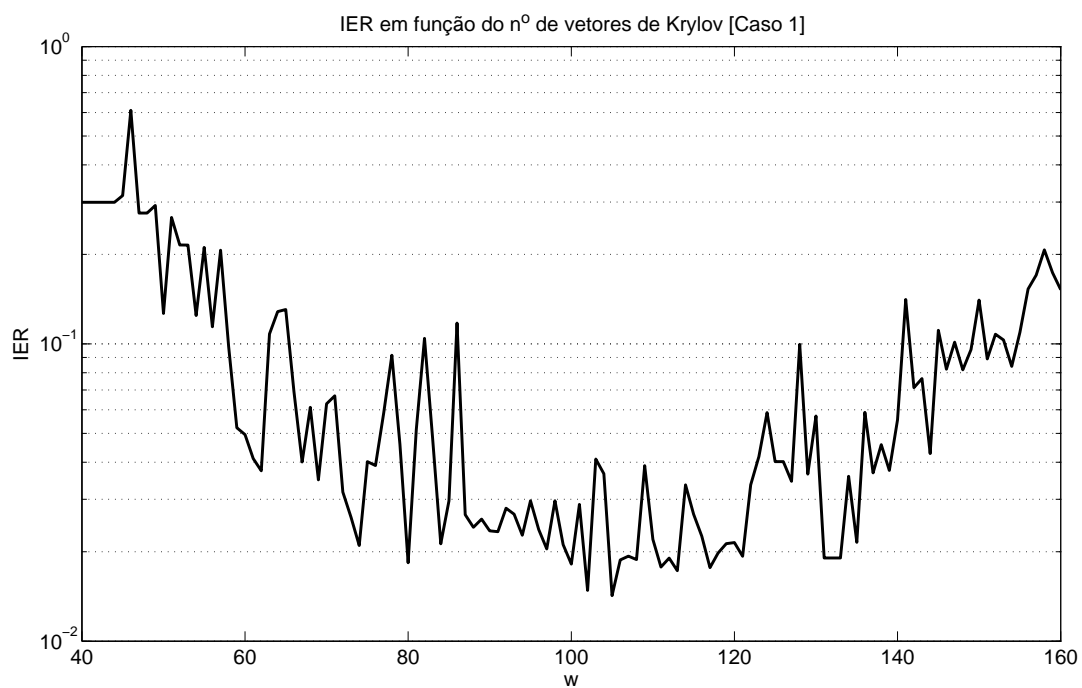


Figura 5.45: IER para diversos w (caso 1).

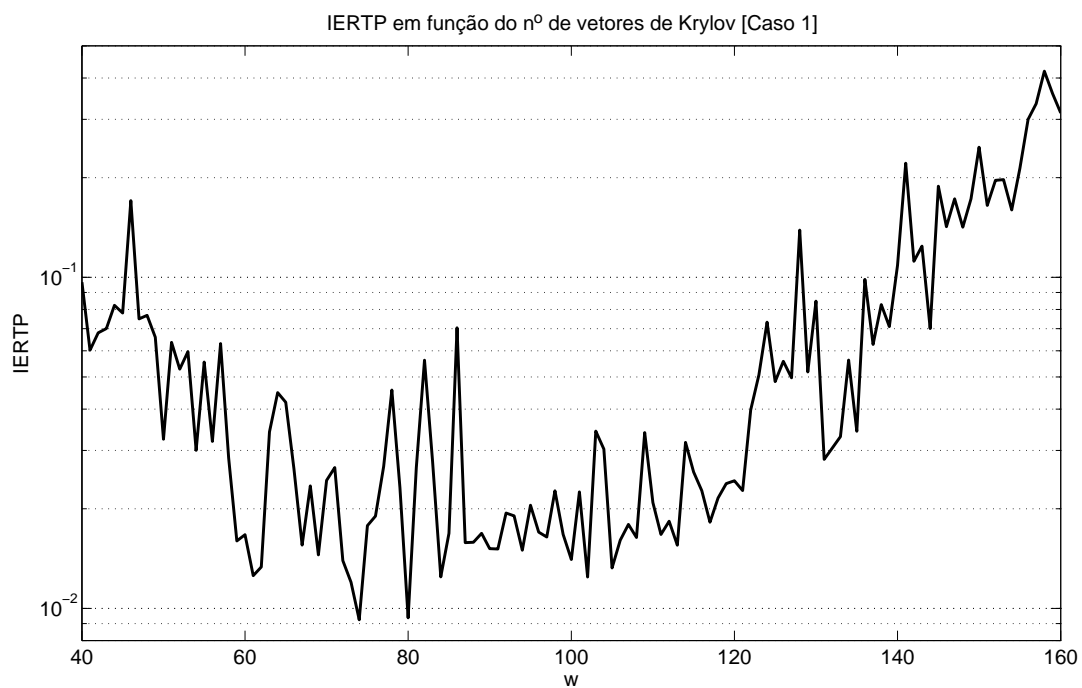


Figura 5.46: IERTP para diversos w (caso 1).

Sensibilidade à ordem k do MOR

Uma vez obtidos os valores singulares de Hankel, o valor k do truncamento irá determinar a ordem do MOR e a sua qualidade. O objetivo desta subseção é verificar como a qualidade final do MOR é influenciada pela escolha de k .

As figuras 5.47 a 5.51 apresentam os resultados para os seguintes valores de k : 1, 10, 20, 40, 60 e 100, para o CASO 1.

A resposta de magnitude em frequência e o respectivo erro são apresentados nas figs. 5.47 e 5.48. Os valores de k iguais a 1, 10 e 20 resultaram em reduções de ordem de baixa qualidade, enquanto que os valores de 60 e 100 foram os melhores. O valor de 40 forneceu um MOR de qualidade muito boa, com erro quase tão baixo quanto nos MORs de ordem 60 e 100. Conforme observado para o CASO 1, sistemas de potência dificilmente serão bem representados por modelos com apenas 1, 2, \dots , 10 polos. Dada a complexidade que estes sistemas podem assumir, o MOR pode necessitar atingir ordens em torno de 40 ou 50 para um desempenho satisfatório mínimo.

As figuras 5.49 e 5.50 apresentam a resposta de fase e desvio de fase em frequência, e apresentam comportamento análogo ao observado nas figuras de magnitude, inclusive para as mesmas faixas de frequências.

Os polos do sistema são vistos na fig. 5.51. O MOR de ordem 1 tem seu único polo sobre o polo instável do FOM, provavelmente devido ao seu alto resíduo. Os MORs de ordem 10 e 20 não conseguem se aproximar bem dos polos de baixa frequência do FOM, enquanto que os de ordem 40, 60 e 100 o fazem.

Por fim, a fig. 5.52 apresenta a evolução do IER em função da variação de k de 1 a 100. Inicialmente o IER decresce com o aumento de k , mas aproximadamente a partir de $k = 50$ o valor de IER aparenta não variar, o que indica que aumentar o valor de k a partir desse valor não acarretará em um MOR de melhor qualidade.

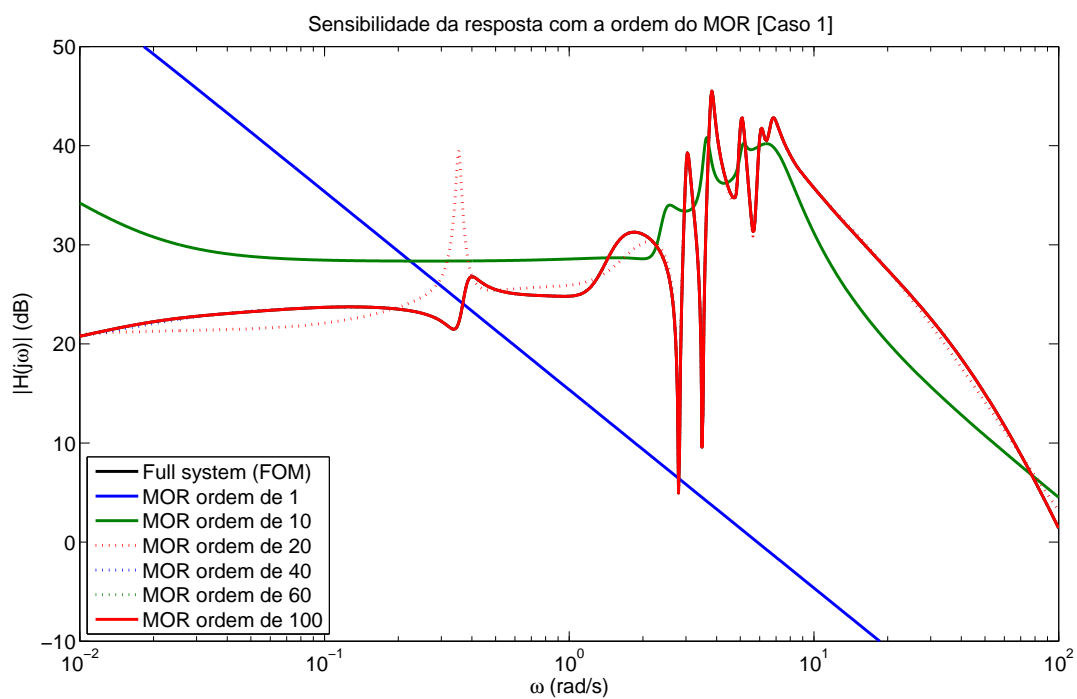


Figura 5.47: Resposta em frequência para diferentes ordens de MOR (caso 1).

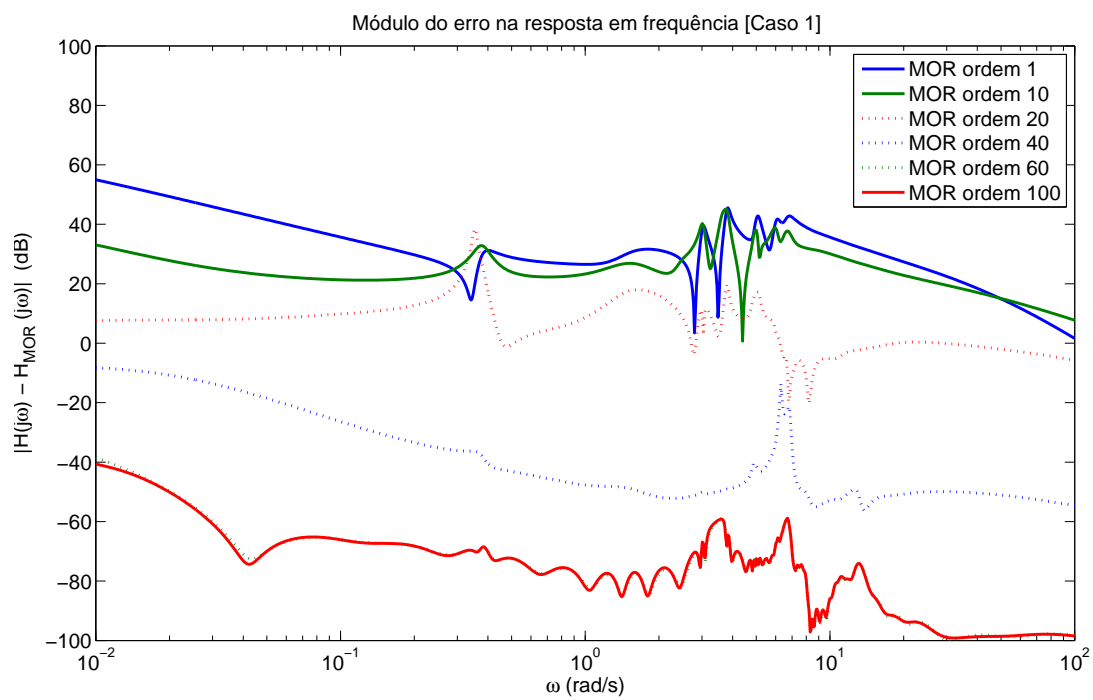


Figura 5.48: Módulo do erro da resposta em frequência (caso 1).

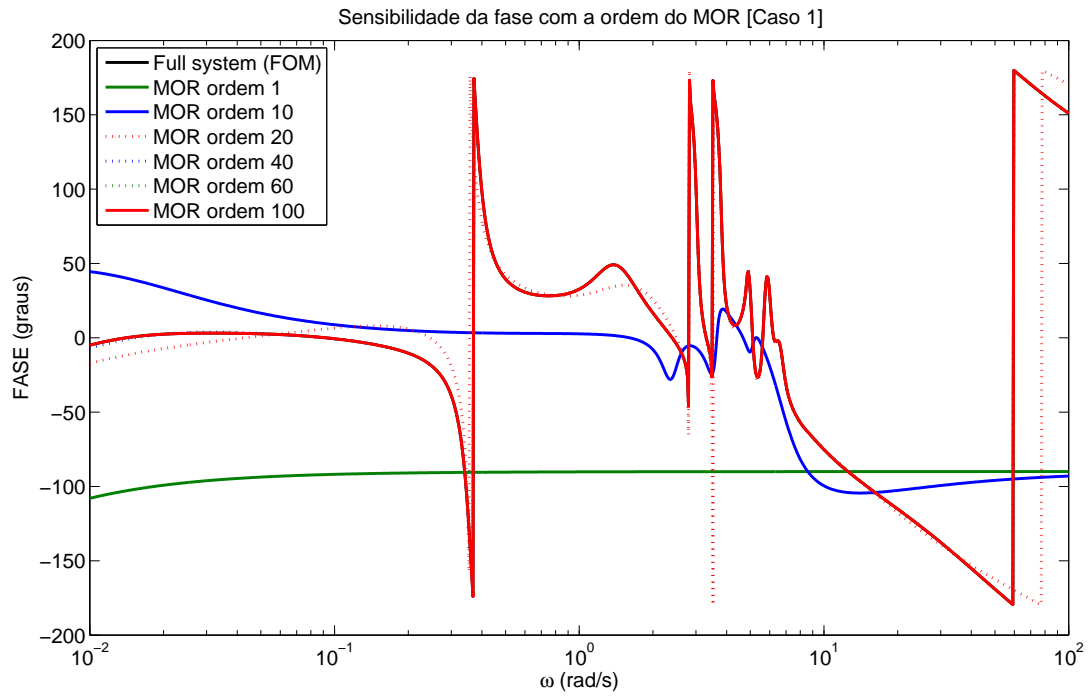


Figura 5.49: Sensibilidade da fase para diferentes ordens de MOR (caso 1).

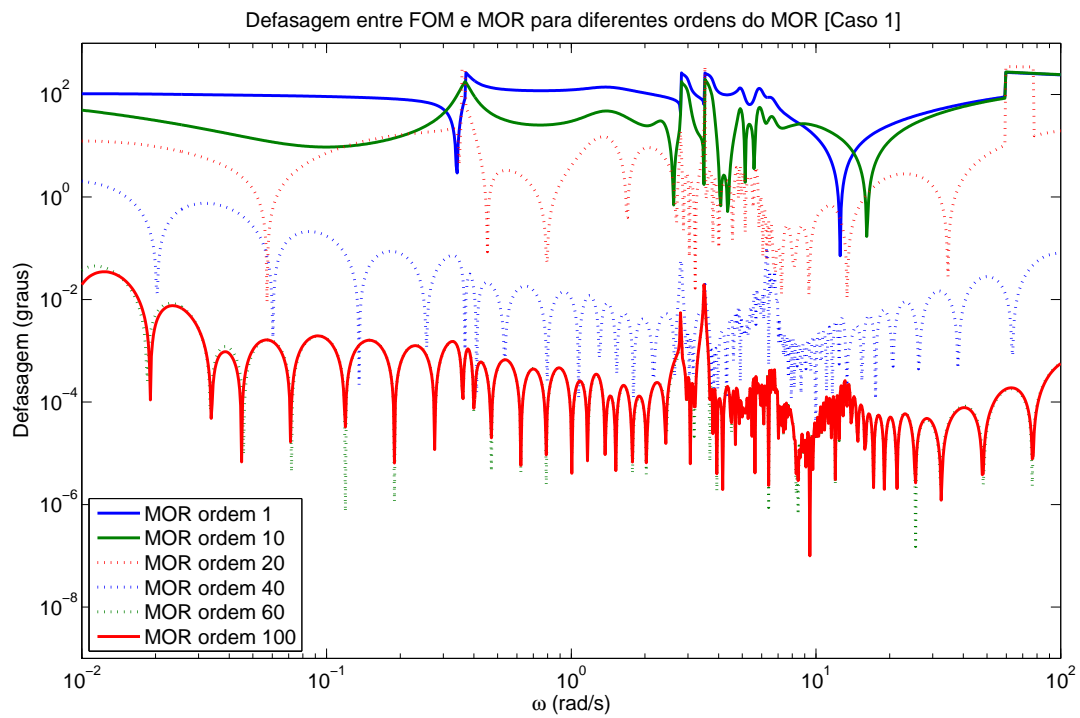


Figura 5.50: Defasagem entre FOM e MOR para diferentes ordens de MOR (caso 1).

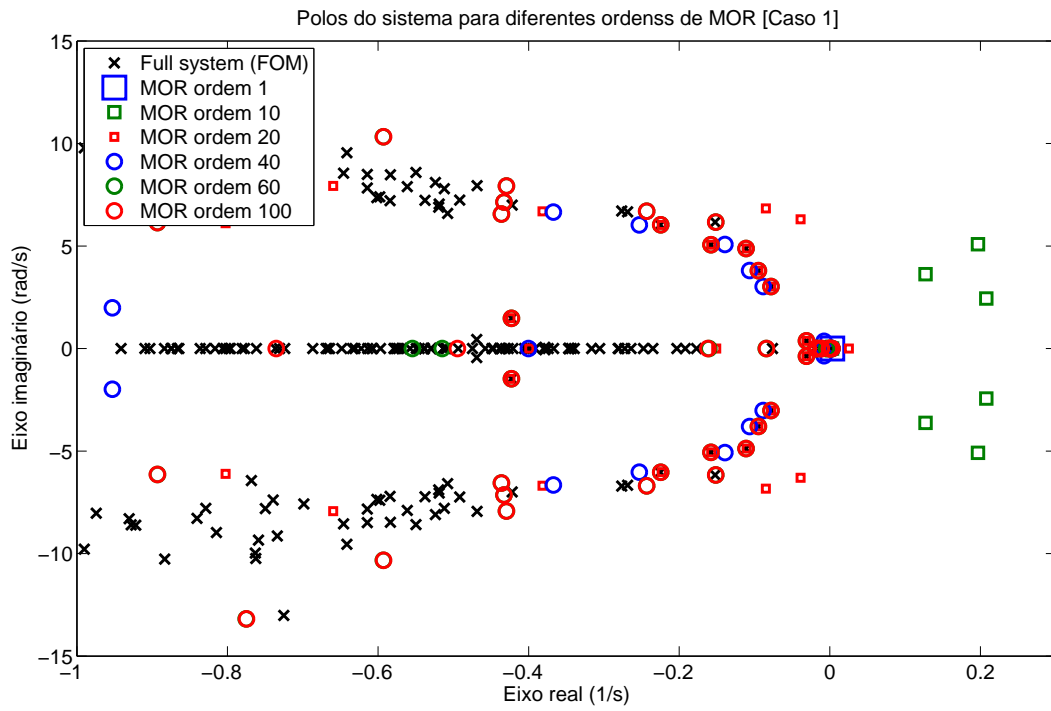


Figura 5.51: Polos do sistema para diferentes ordens de MOR (caso 1).

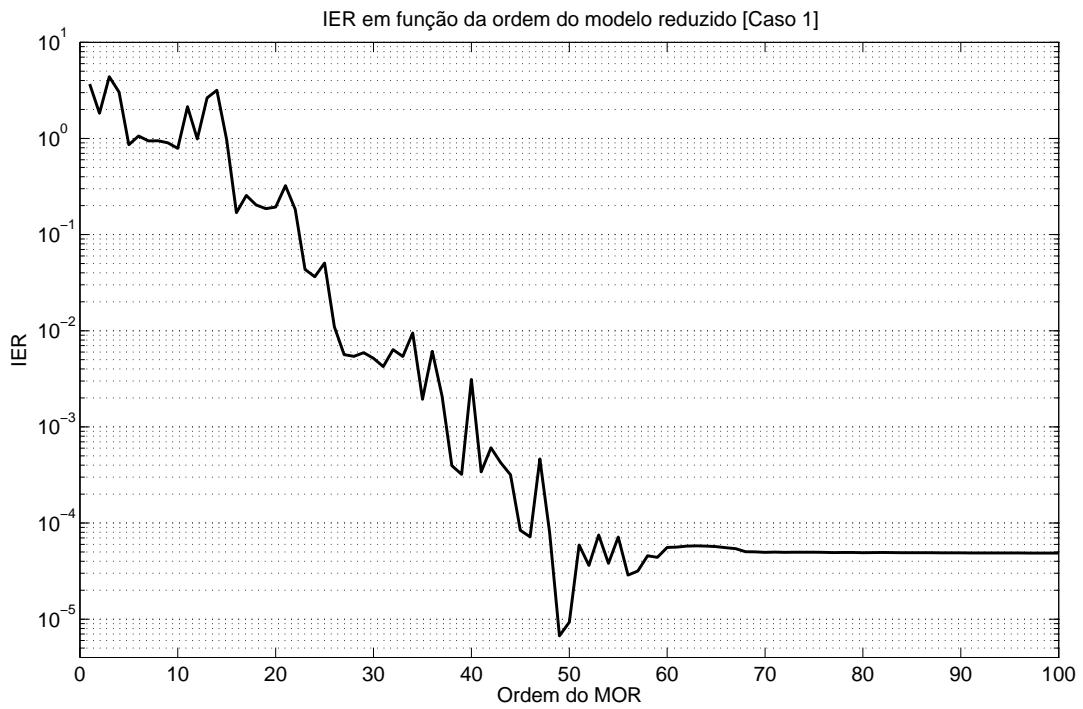


Figura 5.52: IER em função da ordem k do MOR (caso 1).

5.2.4 TESTES COM OUTRAS ORTONORMALIZAÇÕES

Em referência à seção 4.3.3, esta subseção avaliará o desempenho da redução de ordem com as seguintes formas de ortonormalização: decomposição QR, processo de Gram-Schmidt, QRI a cada 2 iterações, QRI a cada 3 iterações e QRI a cada 4 iterações. Foram utilizados nos testes os CASOS 1, 5 11 e 17.

Iniciando-se pelo CASO 1, a resposta em frequência e o respectivo erro são apresentados nas figuras 5.53 e 5.54. Embora o QRI a 4 tenha apresentado um grande pico de erro, o QRI a 2 e QRI a 3 tiveram os melhores desempenhos.

O CASO 5, apresentado nas figuras 5.55 e 5.56, também teve o QRI a 4 como pior resultado. Entre os melhores desempenhos estão o QRI a 2 e a decomposição QR. O grande pico do FOM na fig. 5.55 reflete o grande erro existente nas mesmas frequências, para todas as ortonormalizações.

Valem as mesmas observações para o CASO 11, apresentado nas figuras 5.57 e 5.58, com a diferença de que obtiveram melhor resultado o QRI a 2 e o processo de Gram-Schmidt.

As figuras 5.59 e 5.60 apresentam a resposta em frequência e o respectivo erro para o CASO 17. Todos os cinco MORs apresentaram um grande pico no erro, mas o pior pico foi com QRI a 4. Além disso, há um grande erro em baixa frequência, provavelmente devido ao grande shift utilizado, conforme Tabela 5.2. O processo de Gram-Schmidt e o QRI a 3 geraram bons resultados fora da região do pico ou de baixa frequência.

A razão de o QRI a 4 não ser muito bom provavelmente se deve ao grande intervalo de iterações em que o método de construção das matrizes V_B e V_C permanece sem reortonormalizar suas colunas. Pelo visto, 4 iterações sem reortonormalização é um número suficiente para deteriorar muito a qualidade do MOR.

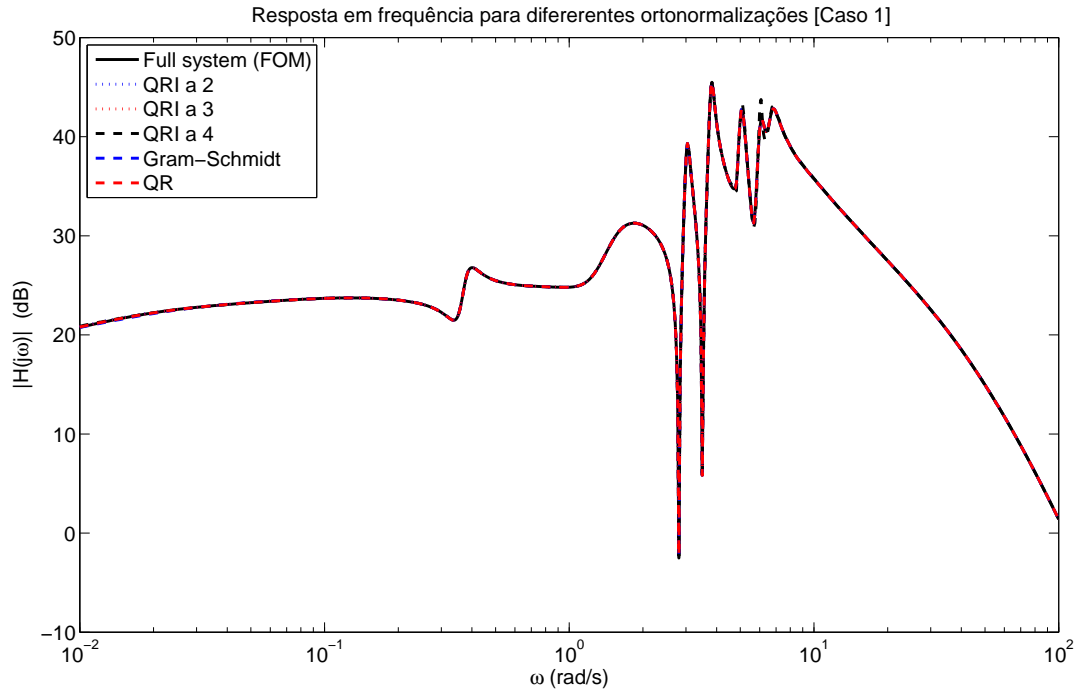


Figura 5.53: Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 1).

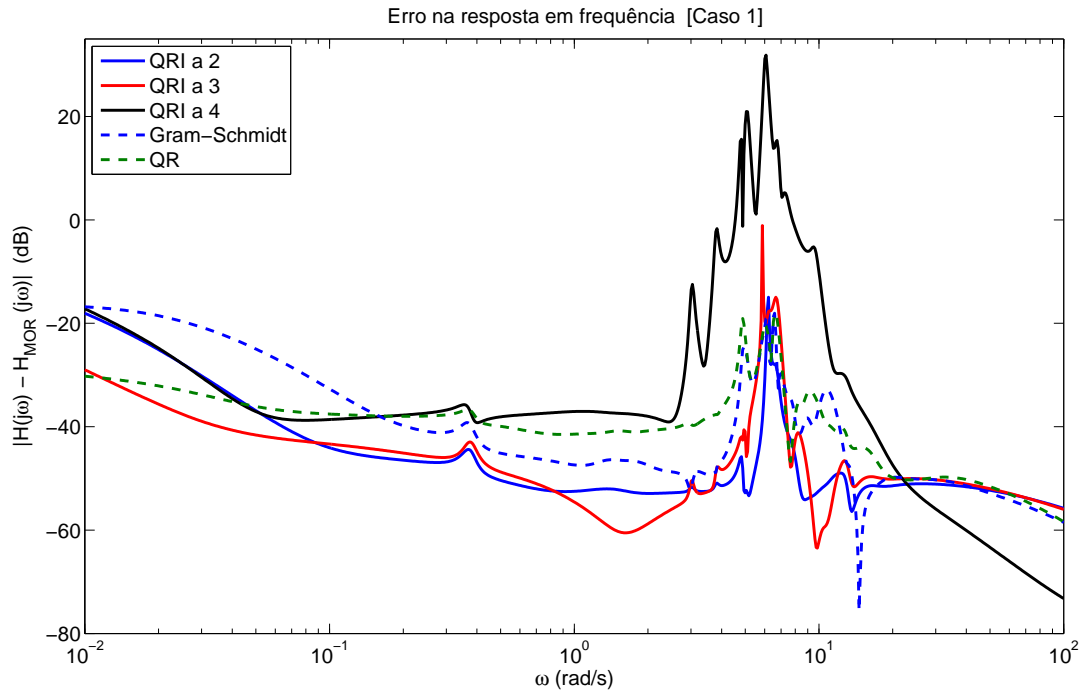


Figura 5.54: Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 1).

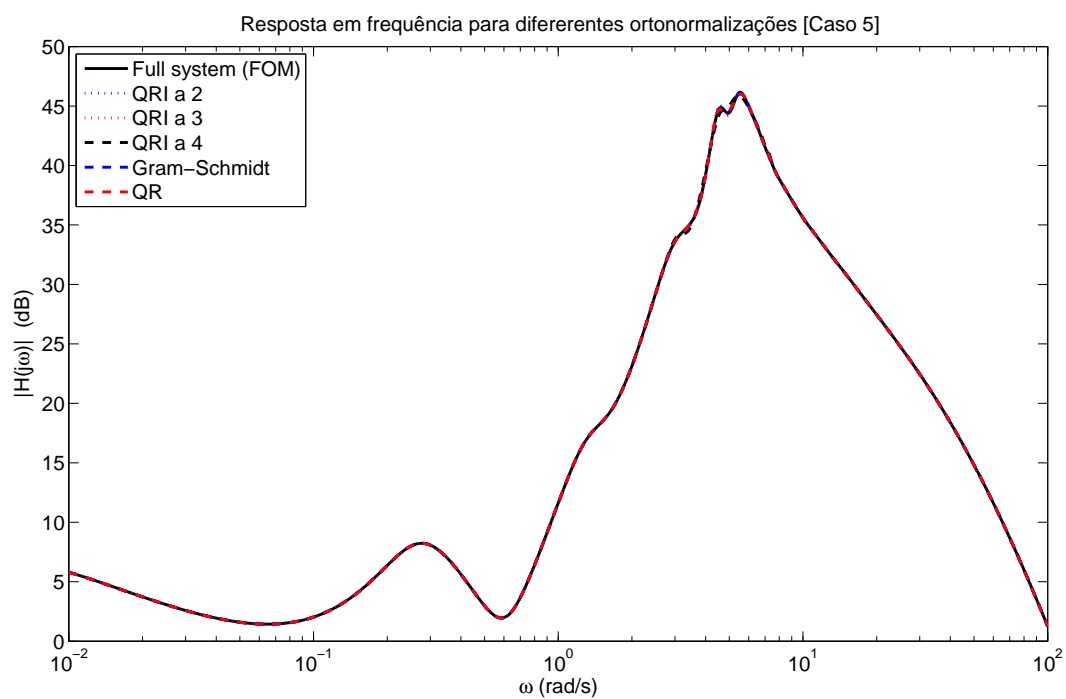


Figura 5.55: Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 5).

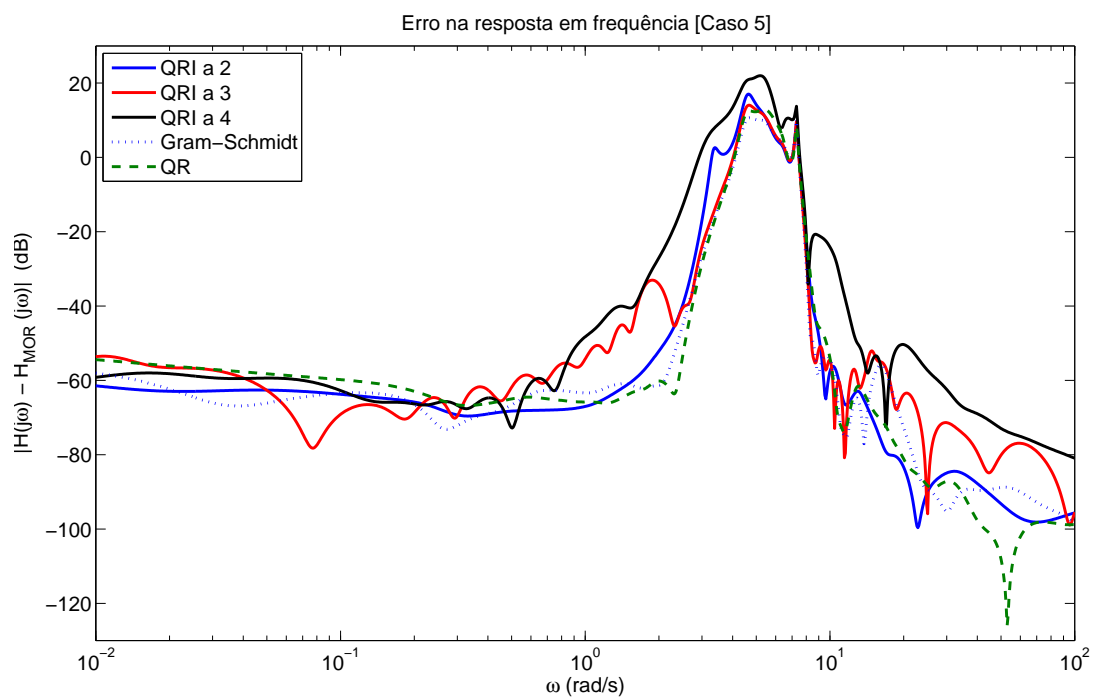


Figura 5.56: Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 5).

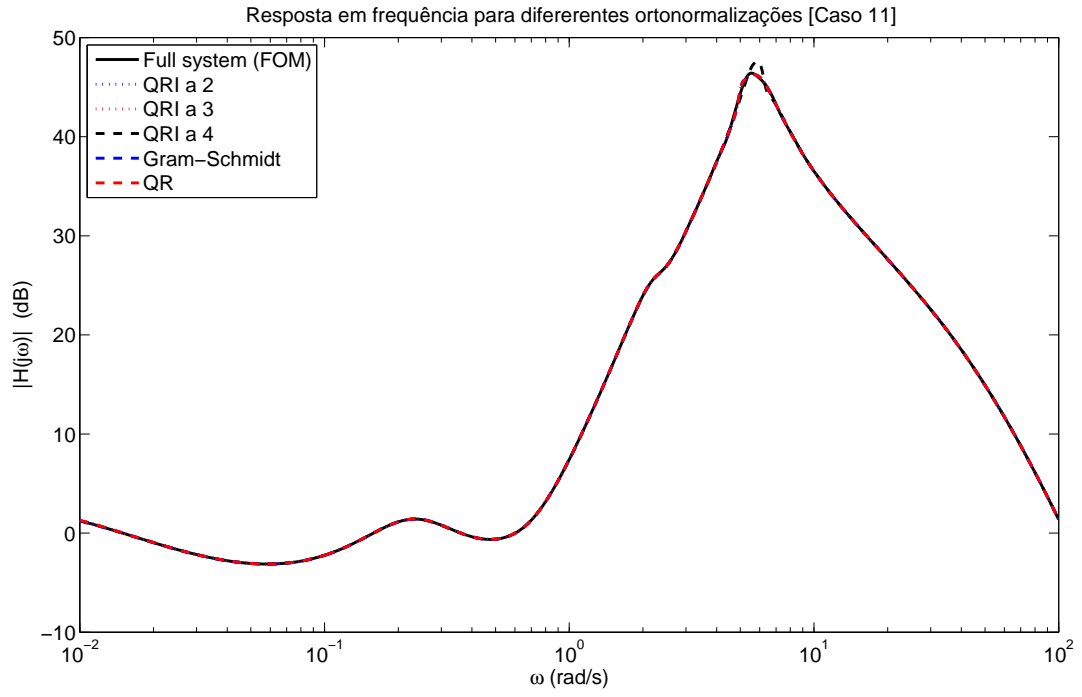


Figura 5.57: Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 11).

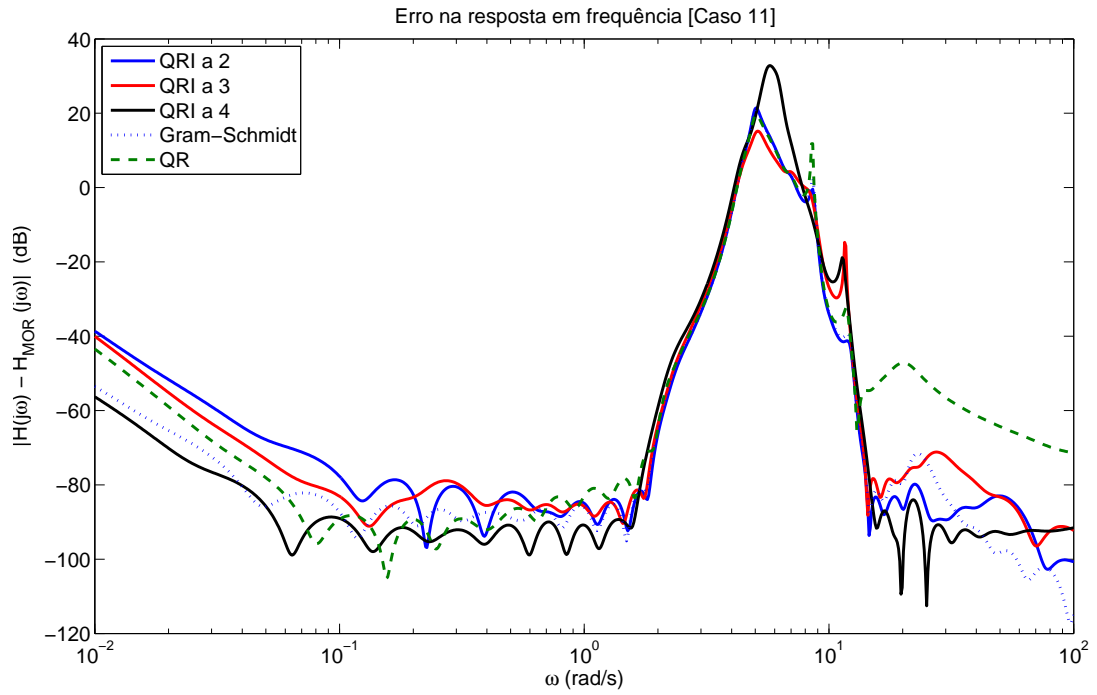


Figura 5.58: Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 11).

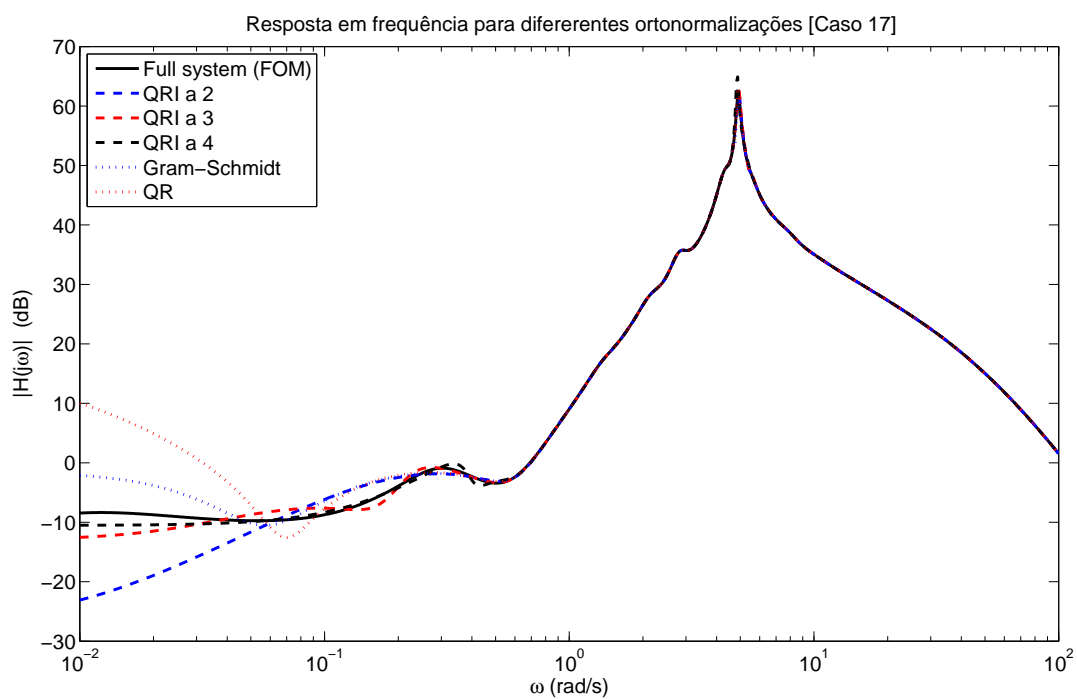


Figura 5.59: Resposta em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 17).

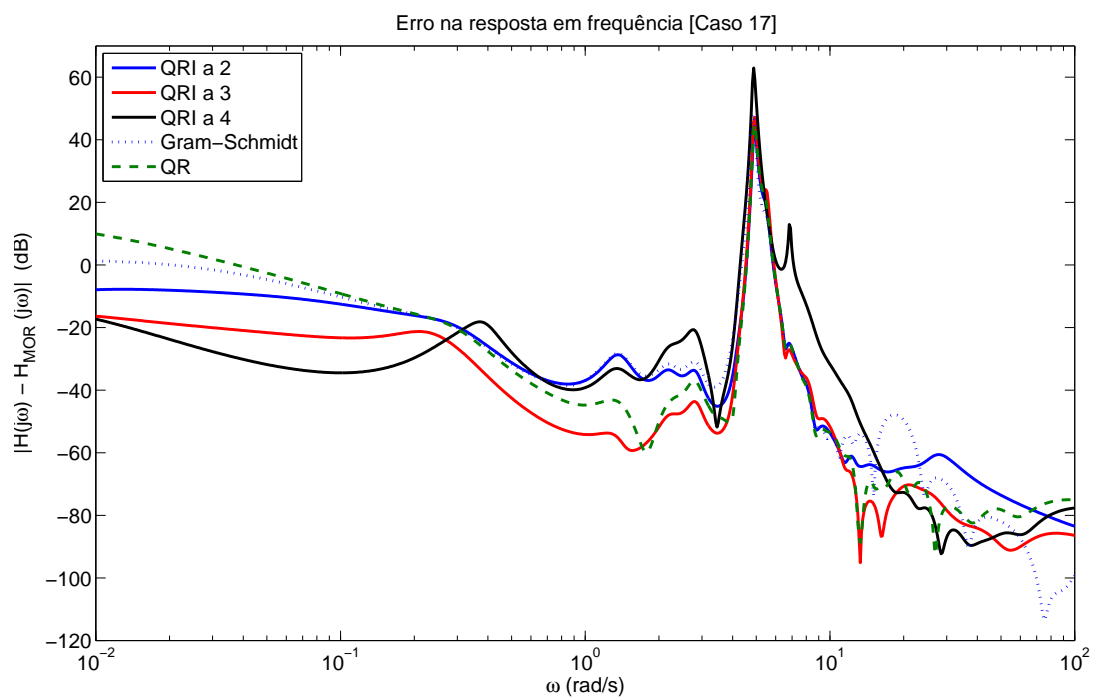


Figura 5.60: Erro em frequência para diferentes ortonormalizações (caso 17).

Utilizando-se os mesmos CASOS 1, 5, 11 e 17, são avaliados o TP, IER e IERTP pela ordem do sistema, nas figs. 5.61 a 5.63.

Conforme esperado, na fig. 5.61 a decomposição QR é a mais lenta e $TP(QRI\ a\ 2) > TP(QRI\ a\ 3) > TP(QRI\ a\ 4)$, já que mais processos de reortnormalizações são evitados. O processo de Gram-Schmidt permaneceu em uma posição intermediária entre o QRI a 2 e o QRI a 3.

O QRI a 4 apresentou pior IER na fig. 5.62, enquanto que os melhores foram a decomposição QR, o QRI a 2 e o QRI a 3. Quanto ao IERTP na fig. 5.63, os melhores resultados foram do QRI a 2 e QRI a 3, que possuem boas combinações de IER e TP.

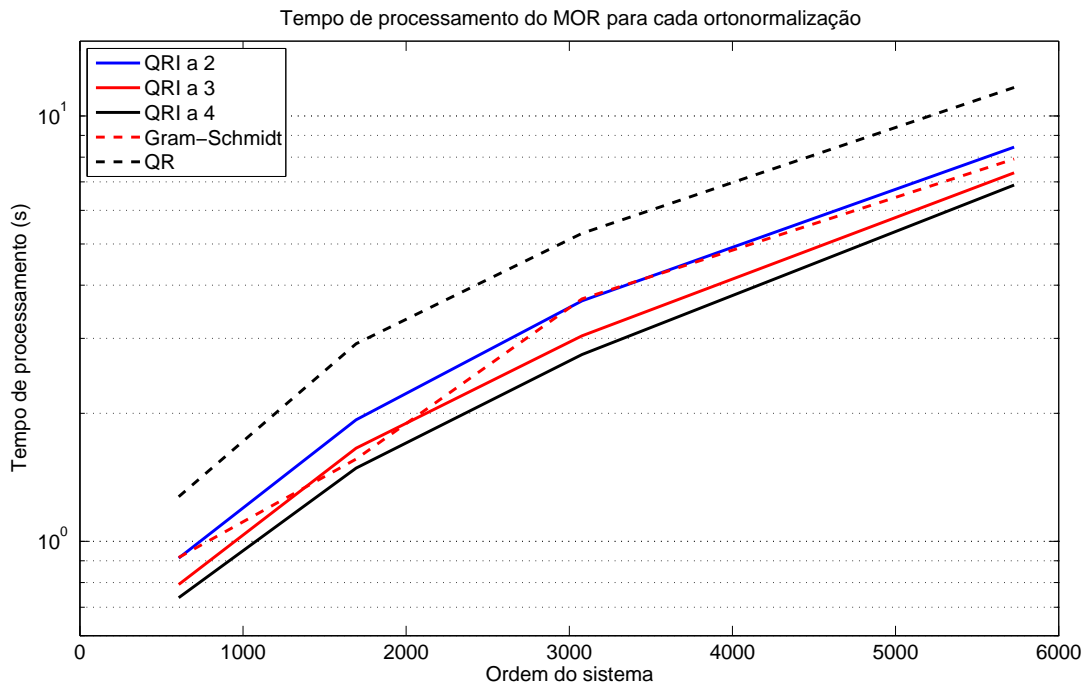


Figura 5.61: Tempo de processamento para diferentes ortonormalizações.

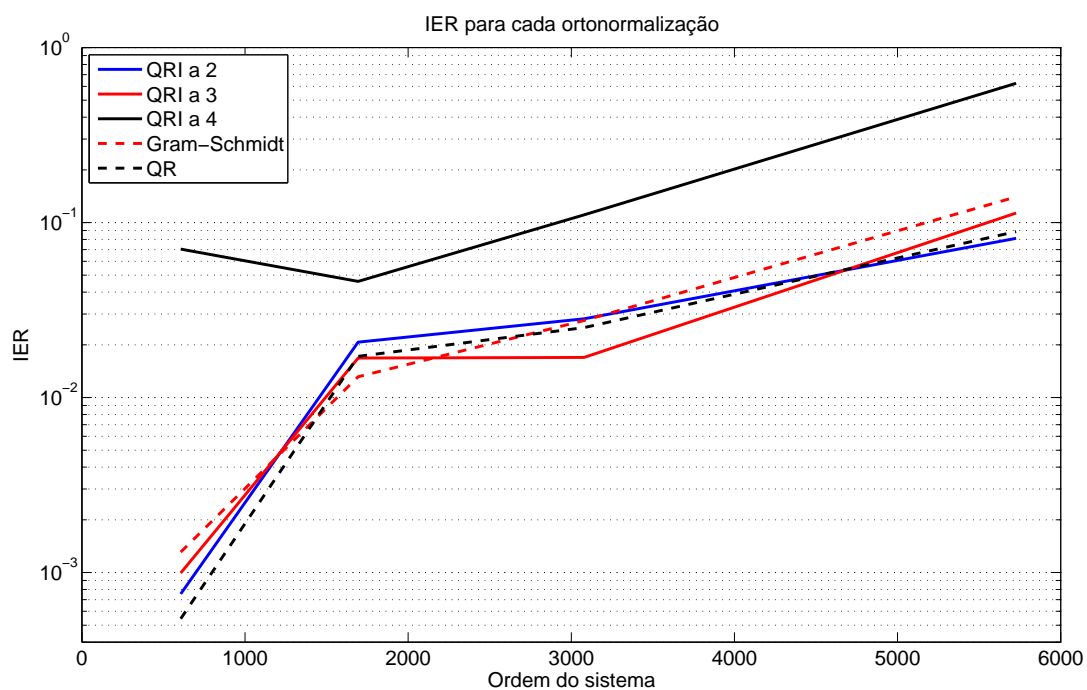


Figura 5.62: IER para diferentes ortonormalizações.

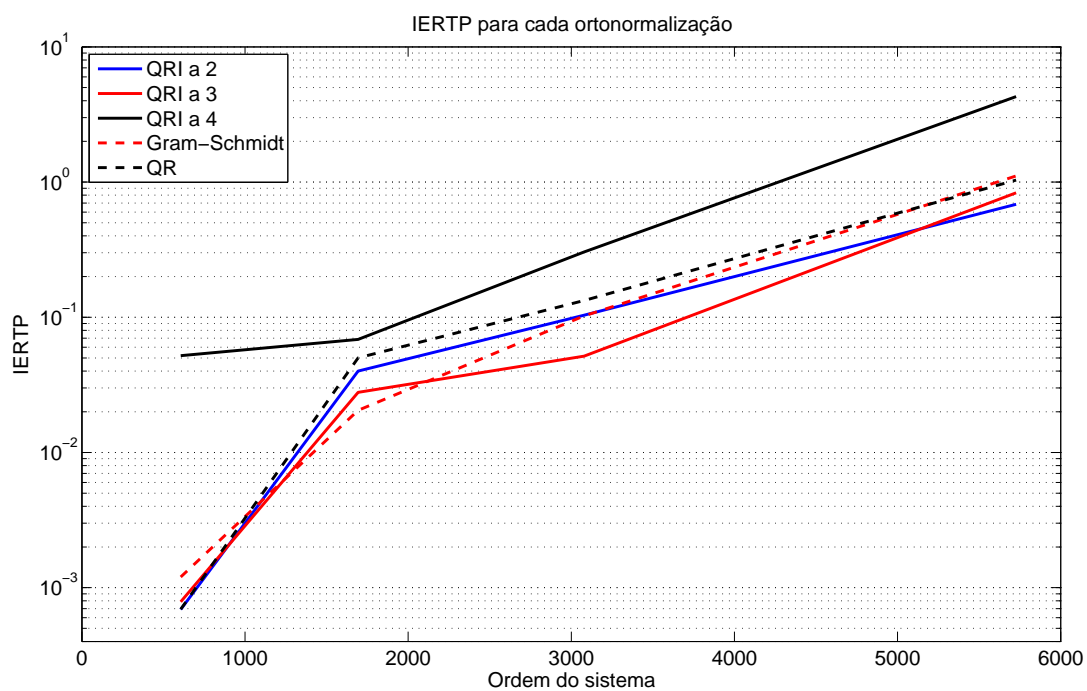


Figura 5.63: IERTP para diferentes ortonormalizações.

5.2.5 DIFERENTES FORMAS DE SVD

Com base na seção 4.3.2, esta subseção tem por fins a comparação da decomposição SVD realizada na forma original, na forma fatorada por Cholesky e na forma que utiliza as matrizes de projeção V_B e V_C . Inicialmente, é apresentado o TP da decomposição SVD para todos os CASOS, na fig. 5.64. O formato original claramente é inviável para sistemas de grandes ordens. Por outro lado, SVD por projeção se mostrou o mais rápido.

Em seguida, é realizada a redução de ordem do CASO 1 pelas três formas de SVD. A fig. 5.65 apresenta os $2w$ ($w = 120$) maiores valores singulares de Hankel obtidos pelas três formas de SVD. Os valores obtidos pelo SVD de projeção aparentam coincidir com o SVD original, o que é confirmado na fig. 5.66, que mostra o baixo erro relativo entre as duas formas. Entretanto, os valores singulares obtidos no SVD por Cholesky destoam significativamente dos valores do SVD original. Além disso, observou-se que o SVD por Cholesky requer altos valores de shift α para poder funcionar, já que depende de Y_B e Y_C serem positivas definidas.

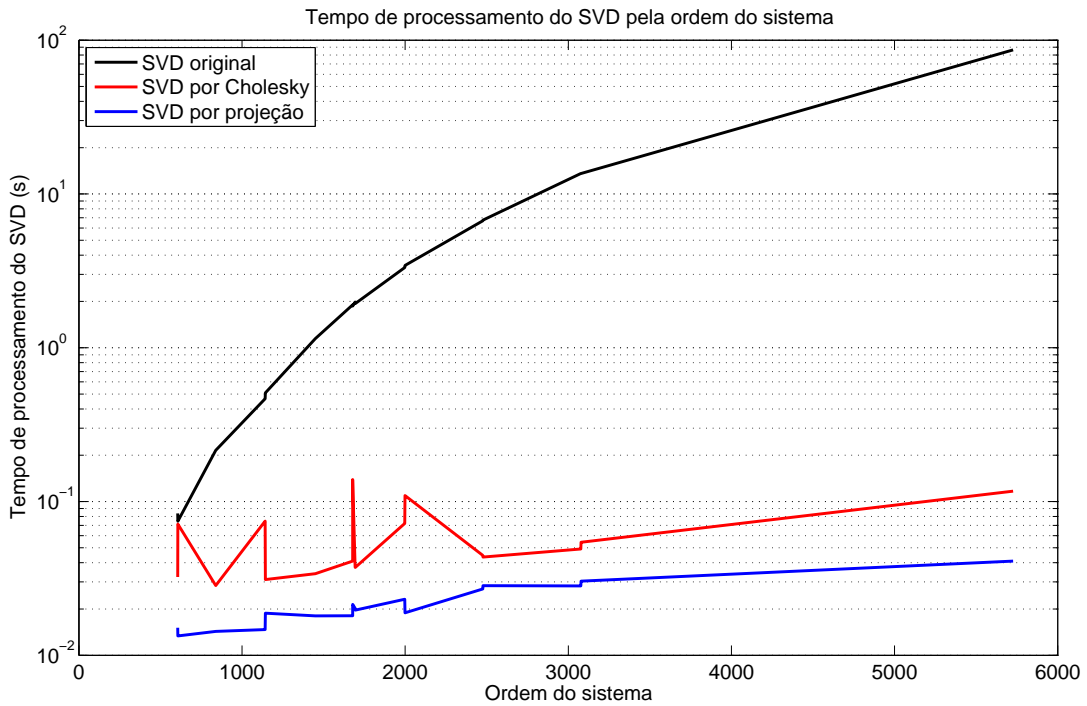


Figura 5.64: Tempo de processamento do SVD pela ordem do sistema.

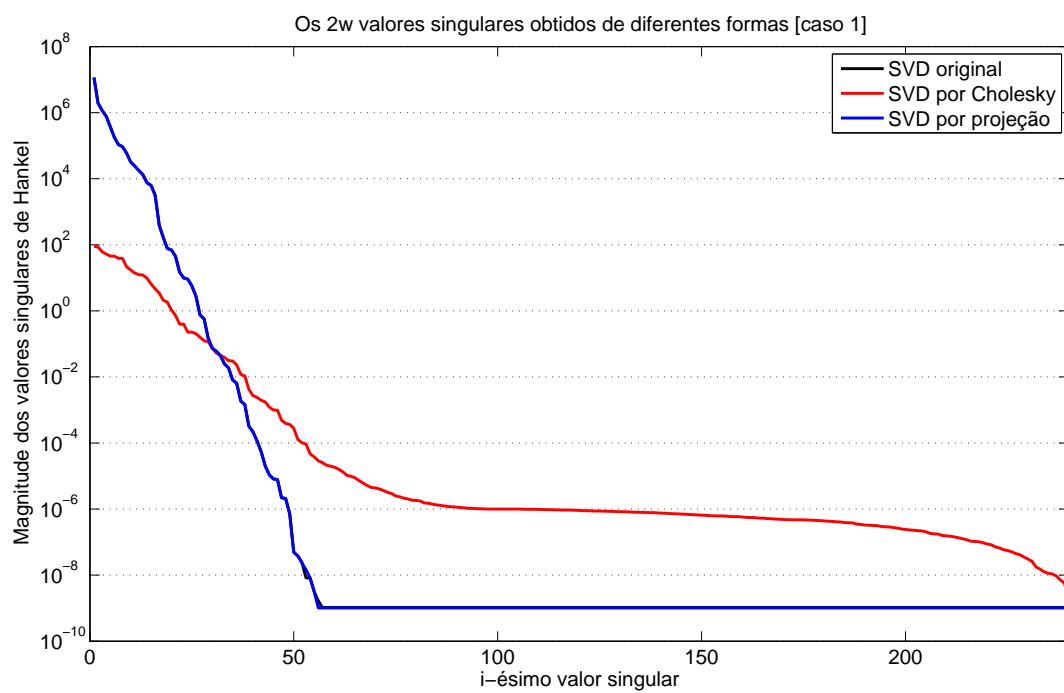


Figura 5.65: Os $2w$ valores singulares para diferentes formas de SVD (caso 1).

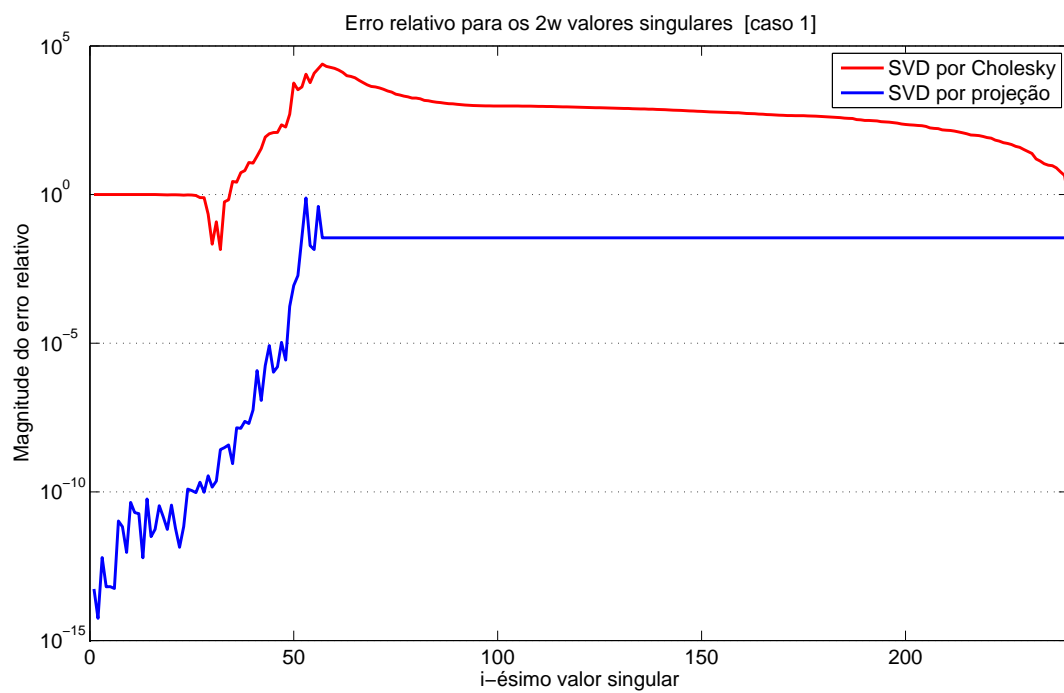


Figura 5.66: Erro relativo dos $2w$ valores singulares (caso 1).

O fato de os valores singulares de Hankel obtidos no SVD por Cholesky serem diferentes não impede a redução de ordem, como pode ser visto nas figuras 5.67 e 5.68. Para $\alpha = 0.01$ utilizado, o erro em frequência entre FOM e MOR é mais do que satisfatório.

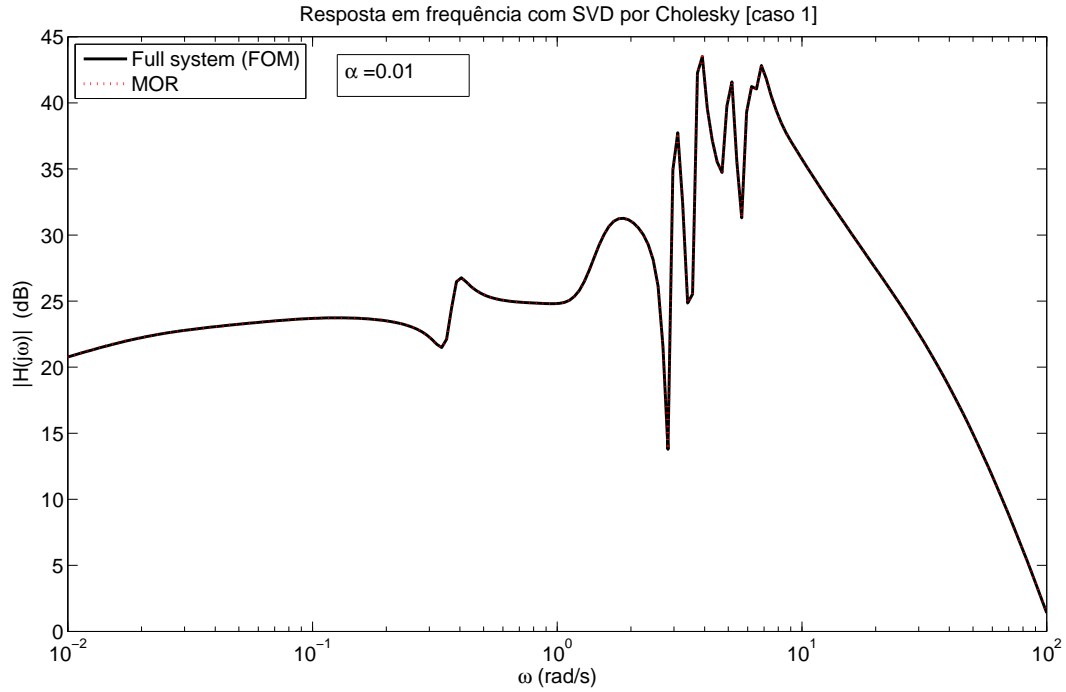


Figura 5.67: Resposta em frequência com SVD por Cholesky (caso 1).

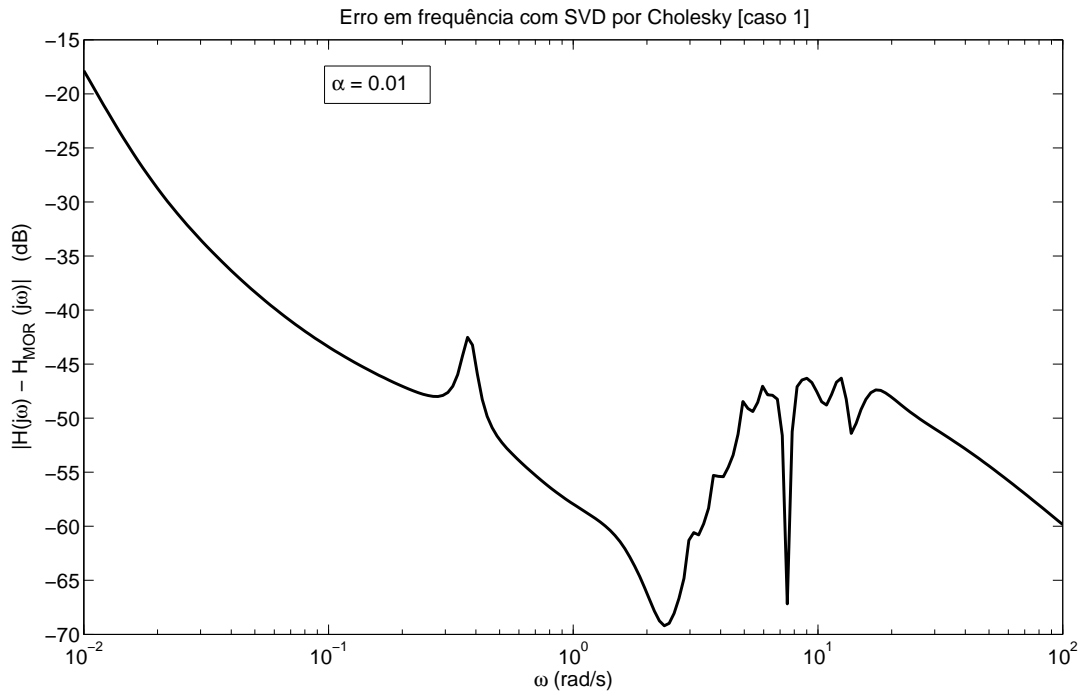


Figura 5.68: Erro em frequência com SVD por Cholesky (caso 1).

5.2.6 COMBINAÇÃO HÍBRIDA COM SADPA

A finalidade dos testes desta subseção é verificar a qualidade da combinação híbrida do método EKS com o SADPA, como visto na seção 2.7.

Inicialmente são verificados tempo e qualidade dos polos capturados pelo SADPA. Para o CASO 17, o SADPA foi executado com precisão de 10^{-12} , com o vetor $s_0 = \{(10^{-15}), (i10^{-15}), (0.085618 + 4.9019i), (0.25025 + 4.9401i), (i10^{-15}), (10^{-15})\}$ de condições iniciais de busca dos polos. Primeiramente foram pedidos 6 polos, apresentados na Tabela 5.3, juntamente com os respectivos resíduos. O tempo para o SADPA encontrá-los foi de 11.31195 segundos.

Tabela 5.3: 6 polos capturados pelo SADPA e seus respectivos resíduos (caso 17)

| Polos capturados | Resíduo |
|---|--|
| 0.0856184980763 - 4.90188156474i | 112.664586649 - 4.375098176181i |
| 0.0856184980763 + 4.90188156474i | 112.664586649 + 4.375098176181i |
| -0.0105993110522217 | 0.00689445699910059 |
| -0.00731344982604621 | -0.0036913004358479 |
| -0.00776504305564836 | -0.00344573105742217 |
| -0.00159938539714115 | -0.000032555808893897 |

Como não foram capturados todos os polos instáveis, o SADPA foi novamente executado e pediu-se 36 polos, com mesma precisão e vetor s_0 de condições iniciais. A Tabela 5.4 apresenta estes polos e seus resíduos, em que aparecem destacados os polos instáveis e alguns polos próximos ao zero, mas que não estão no zero. O tempo de execução foi de 51.63316 segundos. Em comparação, os métodos de redução de ordem por truncamento balanceado necessitam de poucos segundos para gerar o MOR.

As figuras 5.69 e 5.70 apresentam os diagramas de polos do FOM e dos polos capturados pelo SADPA. Como pode ser visto, o SADPA teve dificuldades de encontrar o par de polos instáveis $0.2502535655201 \pm 4.940138948596i$ já que possuem menor resíduo que o outro par de polos instáveis. Além disso, nenhum dos 15 polos no zero foi capturado. Isto significa que o SADPA precisa ser adequadamente inicializado para busca dos polos próximos a zero, tarefa que está fora do escopo desta pesquisa. Estas desvantagens e o grande tempo demandado pelo SADPA não o tornam competitivo contra os demais métodos de redução de ordem.

Tabela 5.4: 36 polos capturados pelo SADPA e seus respectivos resíduos (caso 17)

| Polos capturados | Resíduo |
|--|--|
| -8.35273497889124 + 2.26822271463154i | 11.9564374808606 - 373.541442646309i |
| -8.35273497889124 - 2.26822271463154i | 11.9564374808606 + 373.541442646309i |
| 0.0856184980763 - 4.90188156474i | 112.664586649 - 4.375098176181i |
| 0.0856184980763 + 4.90188156474i | 112.664586649 + 4.375098176181i |
| -0.33181429562147 + 4.33337110066305i | -36.9845817084879 + 81.4137839910555i |
| -0.33181429562147 - 4.33337110066305i | -36.9845817084879 - 81.4137839910555i |
| -7.51816824377237 + 3.37867599689625i | 7.98934548187433 - 152.640752789314i |
| -7.51816824377237 - 3.37867599689625i | 7.9893454818743 + 152.640752789314i |
| -0.34309499683851 + 4.36746879623433i | 24.411836584231 - 46.1713006484242i |
| -0.34309499683851 - 4.36746879623433i | 24.411836584231 + 46.1713006484242i |
| 0.2502535655201 + 4.940138948596i | 5.527876529253 + 40.081223347779i |
| 0.2502535655201 - 4.940138948596i | 5.527876529253 - 40.081223347779i |
| -8.3491435706885 + 1.97567757006448i | -15.5560245895195 - 67.9569540948477i |
| -8.3491435706885 - 1.97567757006448i | -15.5560245895195 + 67.9569540948477i |
| -0.41934028433295 + 5.55914736930459i | 13.9075022102342 - 12.1666790565301i |
| -0.41934028433295 - 5.55914736930459i | 13.9075022102342 + 12.1666790565301i |
| -0.0105993110522217 | 0.00689445699910059 |
| -0.00731344982604621 | -0.0036913004358479 |
| -0.00776504305564836 | -0.00344573105742217 |
| -0.55086579917574 + 6.35588602435039i | 2.09818033798145 - 1.00995718447041i |
| -0.55086579917574 - 6.35588602435039i | 2.09818033798145 + 1.00995718447041i |
| -0.658449999306999 + 6.63433073887915i | 2.2973496179545 + 0.370077582012017i |
| -0.658449999306999 - 6.63433073887915i | 2.2973496179545 - 0.370077582012017i |
| -0.662770439463135 - 6.62652992028138i | -0.296650953388341 - 1.46296191446148i |
| -0.662770439463135 + 6.62652992028138i | -0.296650953388341 + 1.46296191446148i |
| -0.825912084501224 + 8.25947377966112i | -1.8331227718751 + 0.129755338525921i |
| -0.825912084501224 - 8.25947377966112i | -1.8331227718751 - 0.129755338525921i |
| -0.554935069489101 - 6.37405563387394i | 1.09315336637133 + 0.578253348635443i |
| -0.554935069489101 + 6.37405563387394i | 1.09315336637133 - 0.578253348635443i |
| -0.433746526696563 + 6.57162091726743i | -0.526403752586632 - 0.162814348178254i |
| -0.433746526696563 - 6.57162091726743i | -0.526403752586632 + 0.162814348178254i |
| -0.822507753279262 + 8.22237948805547i | -0.0848538595420937 - 0.41694545809717i |
| -0.822507753279262 - 8.22237948805547i | -0.0848538595420937 + 0.41694545809717i |
| -0.324045413798339 + 6.7011534965306i | 0.292901540771613 - 0.145102400188915i |
| -0.324045413798339 - 6.7011534965306i | 0.292901540771612 + 0.145102400188915i |
| -0.00159938539714115 | -0.000032555808893897 |

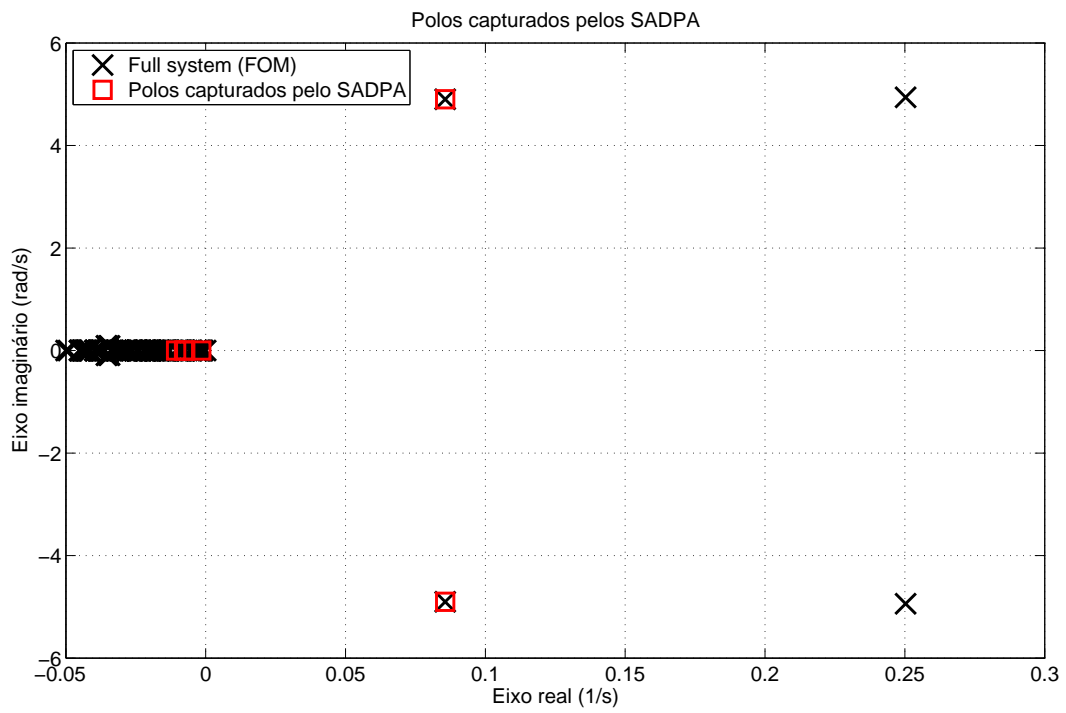


Figura 5.69: 6 polos do sistema capturados pelo SADPA (caso 17).

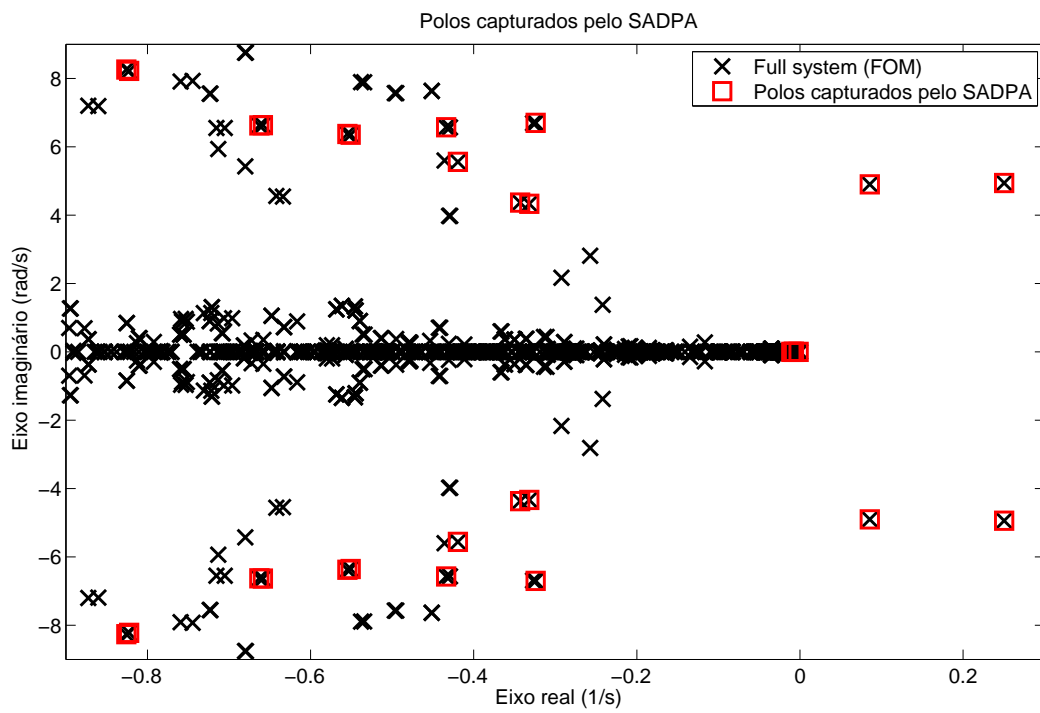


Figura 5.70: 36 polos do sistema capturados pelo SADPA (caso 17).

Em seguida, foram realizados testes da combinação híbrida do método EKS com SADPA, com os CASOS 2, 13 e 17. Em realidade, o SADPA apenas foi utilizado para capturar os polos instáveis desses sistemas, que foram transformados em um sistema (A_S, B_S, C_S, D_S) , conforme seção 2.7, e utilizados na deflação do FOM original pela expansão de suas matrizes.

As figs. 5.71 e 5.72 apresentam os resultados para o CASO 2, com $\alpha = 0.2988$. Sem o SADPA, o MOR não acompanha o pico de baixa frequência do FOM. Contudo, com o auxílio do SADPA, o novo MOR possui o erro reduzido neste pico de baixa frequência. O termo *SADPA inicial* se refere à resposta em frequência e o erro em frequência do sistema (A_S, B_S, C_S, D_S) . Na fig. 5.71, o *SADPA inicial* se adere bem ao pico de baixa frequência e ao pico existente em frequência mais alta. De fato, o erro em frequência do *SADPA inicial*, fig. 5.72, é exatamente a resposta em frequência do sistema deflacionado $y_{DFL} = y_{FOM} - y_S$, que passará pela redução de ordem.

As mesmas observações valem para o CASO 13 ($\alpha = 0.00038$), nas figs. 5.73 e 5.74, com a diferença de que o *SADPA inicial* se adere apenas ao pico de baixa frequência, pouco interferindo com o pico de larga banda na frequência mais alta.

O CASO 17, contudo, não gerou bons resultados para $\alpha = 0.251$. De fato, pelas figs. 5.75 e 5.76, a combinação com o SADPA piorou completamente o desempenho do MOR. Entretanto, para $\alpha = 0.8$, as figs. 5.77 e 5.78 mostram que a combinação com o SADPA melhorou um pouco o erro no pico de banda larga, às custas de um erro maior em outras frequências.

Pode-se concluir que, embora a combinação híbrida com o SADPA não seja competitiva em razão do longo TP demandado pelo SADPA, esta combinação pode ser utilizada para melhorar a qualidade final do MOR, especialmente melhorando a resposta em baixa frequência em que existem picos no FOM. O processo funciona melhor para altos valores de α .

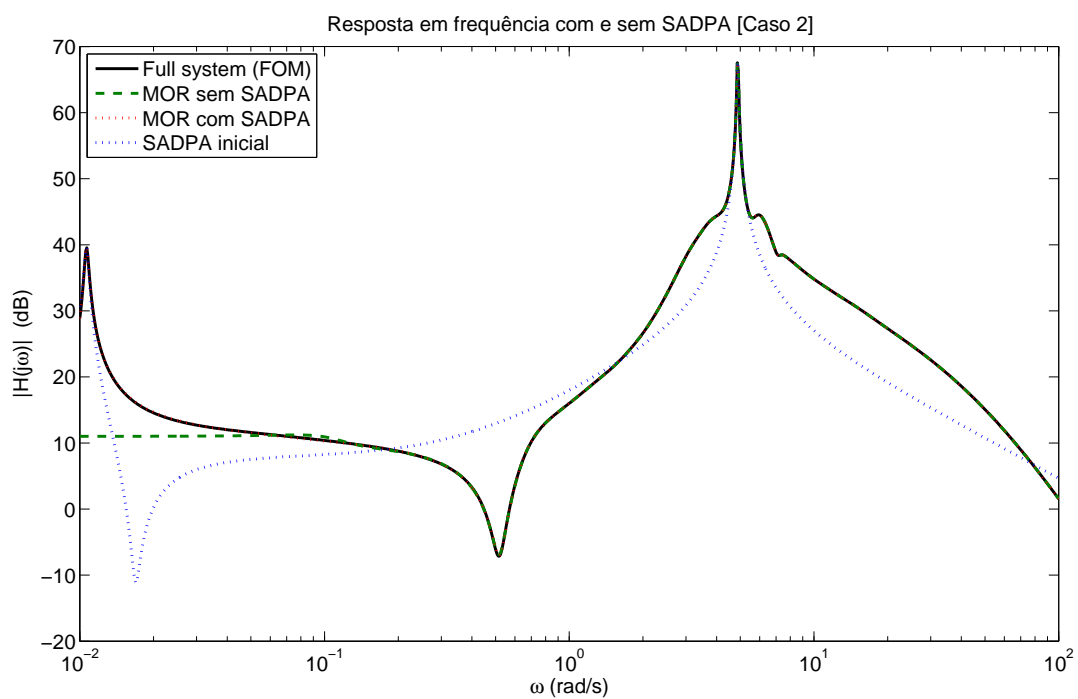


Figura 5.71: Resposta em frequência com e sem SADPA (caso 2).

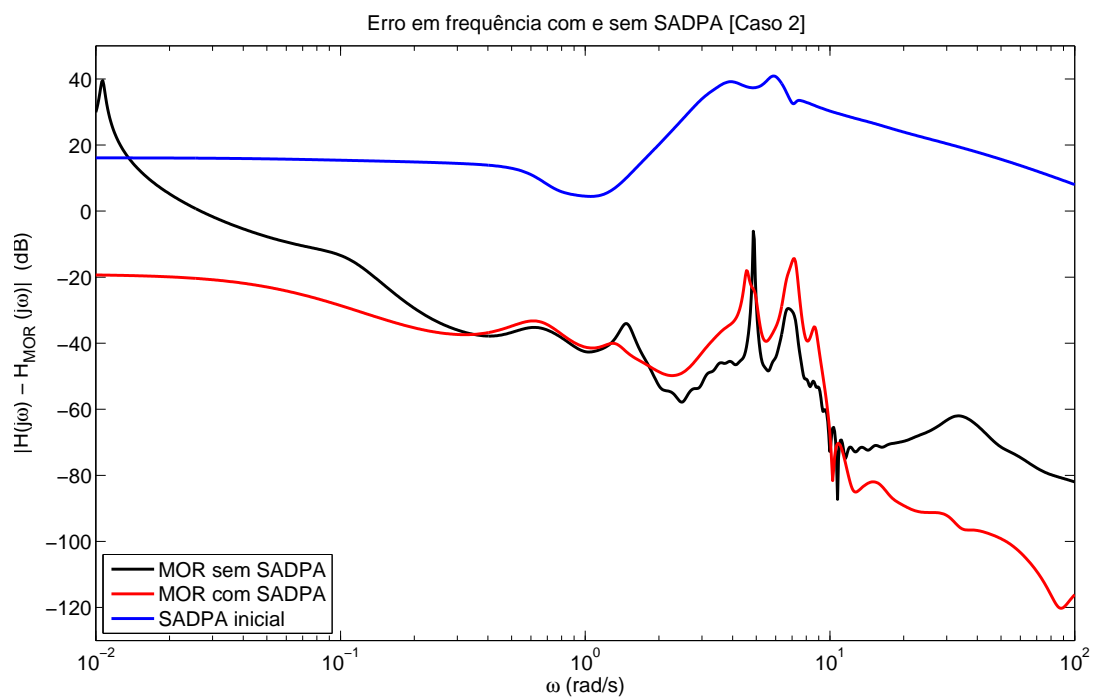


Figura 5.72: Erro em frequência com e sem SADPA (caso 2).

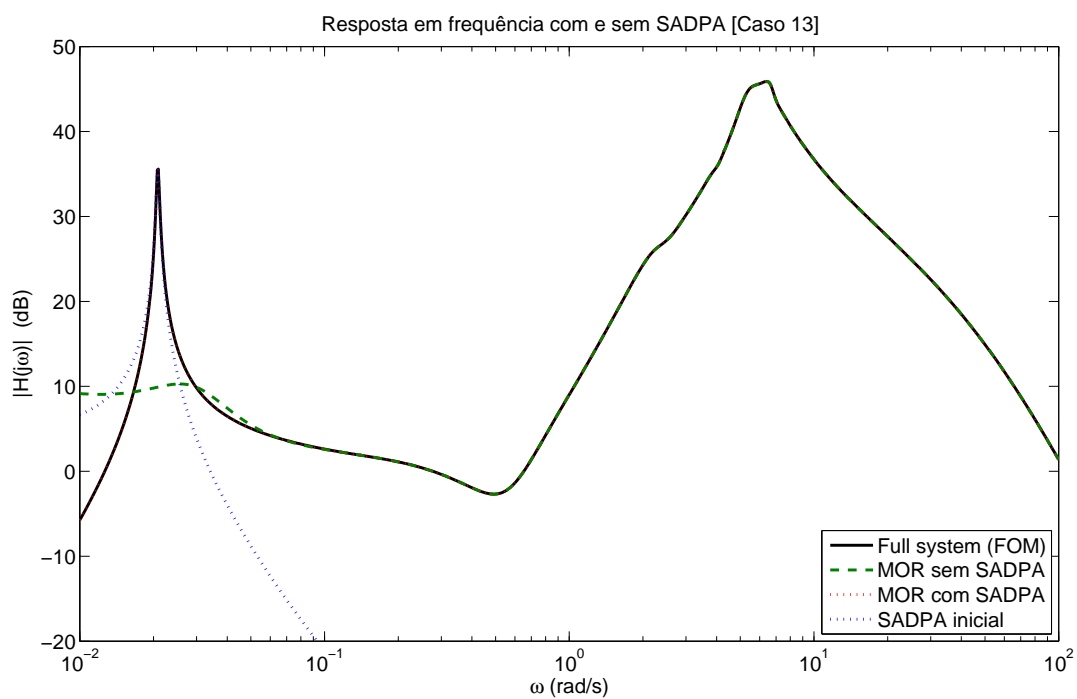


Figura 5.73: Resposta em frequência com e sem SADPA (caso 13).

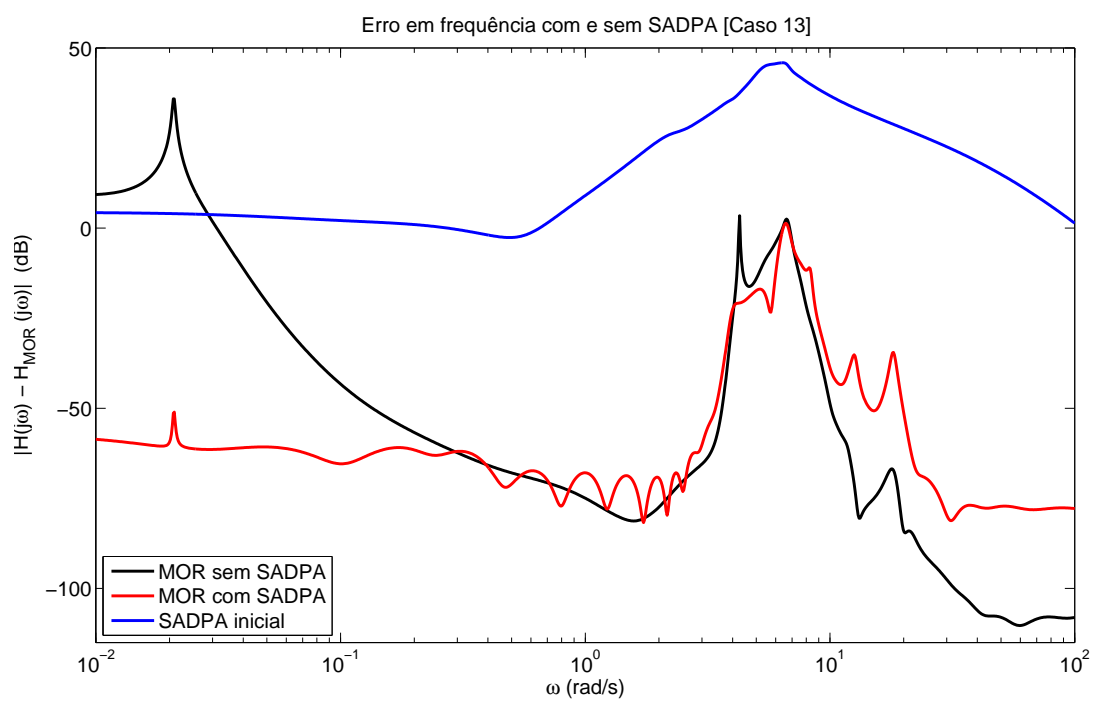


Figura 5.74: Erro em frequência com e sem SADPA (caso 13).

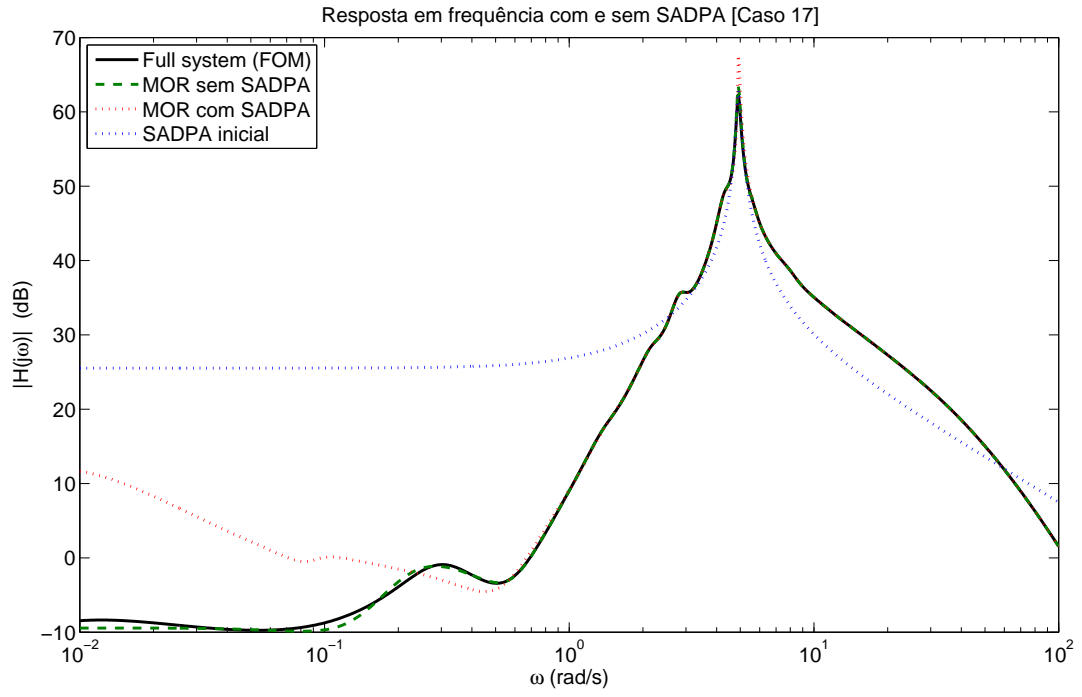


Figura 5.75: Resposta em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.261$ (caso 17).

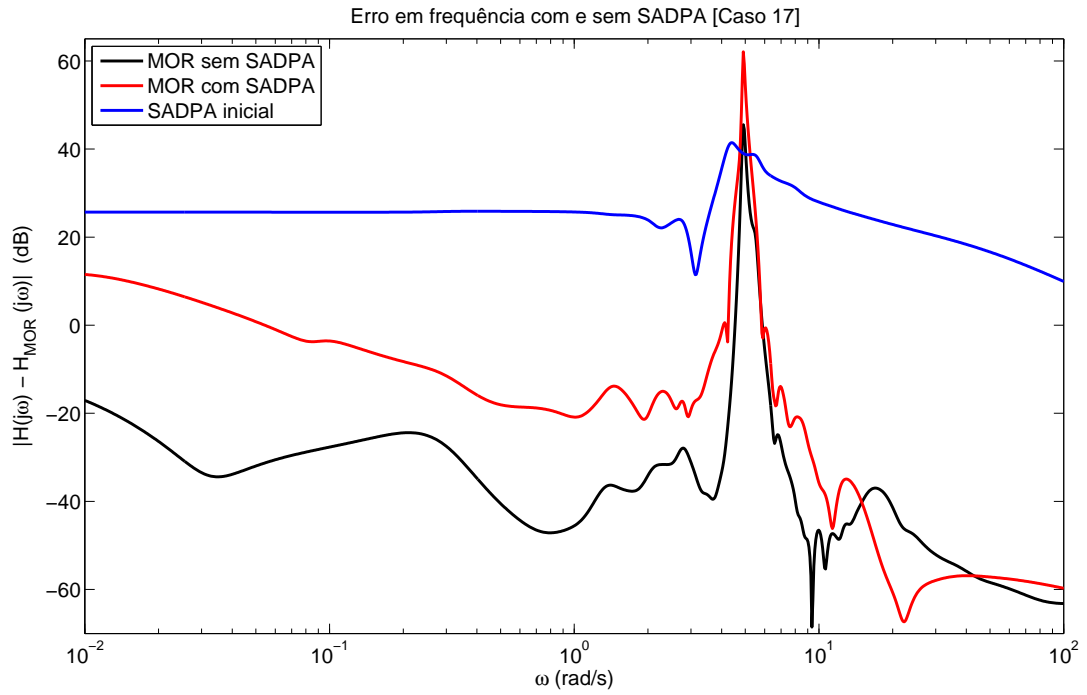


Figura 5.76: Erro em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.261$ (caso 17).

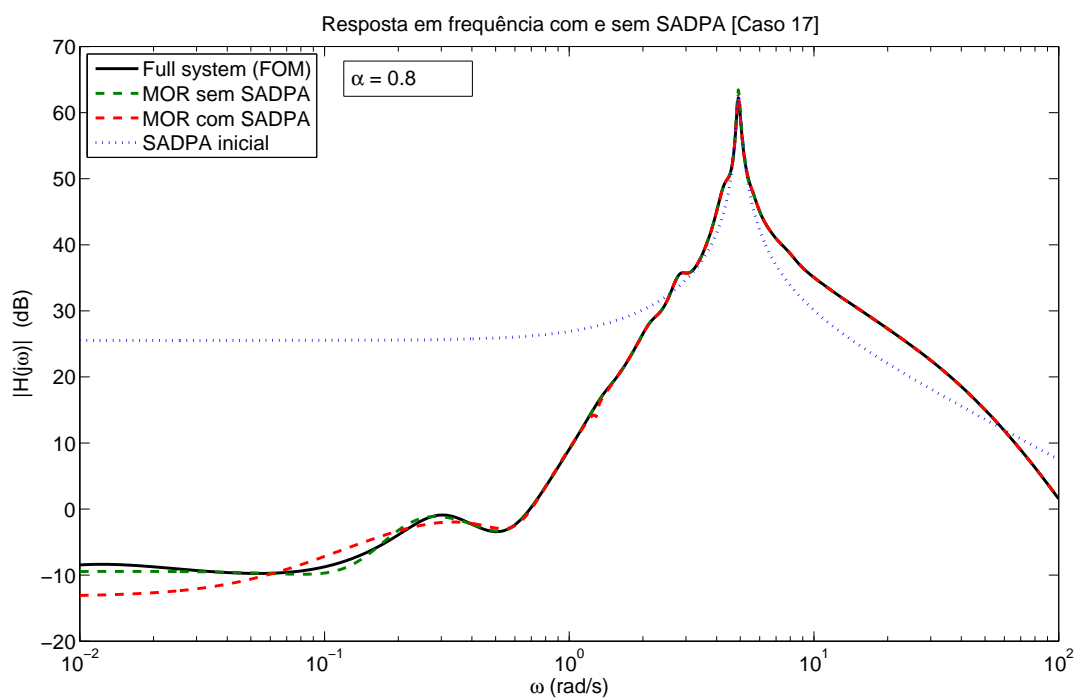


Figura 5.77: Resposta em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.8$ (caso 17).

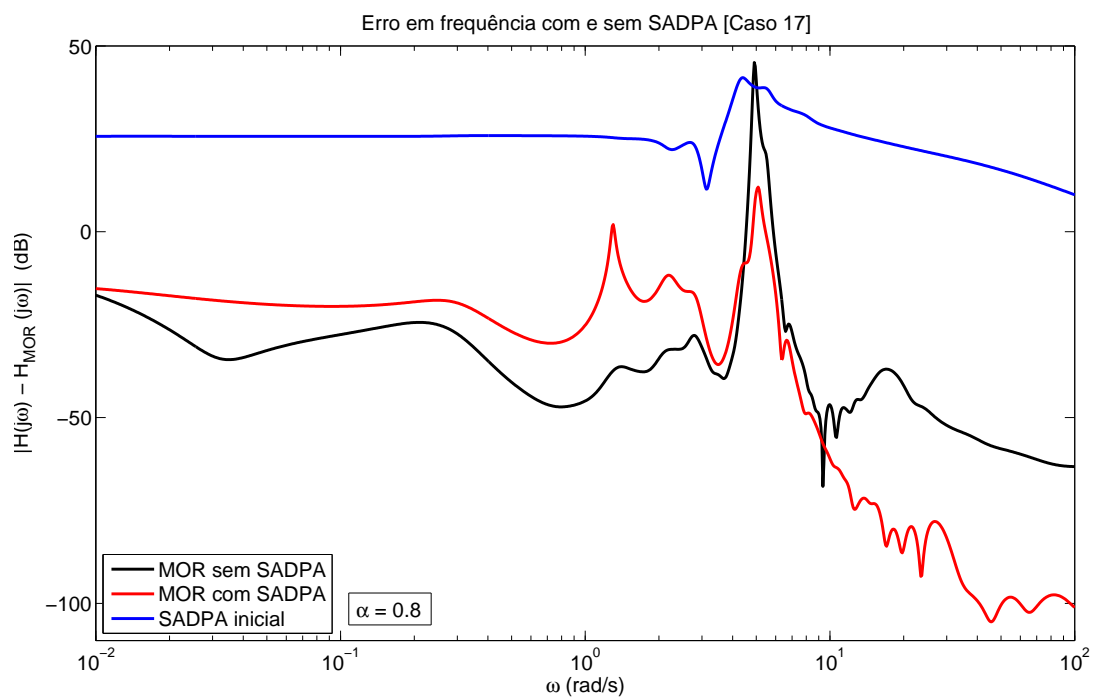


Figura 5.78: Erro em frequência com e sem SADPA $\alpha = 0.8$ (caso 17).

5.2.7 COMPARAÇÃO COM OUTROS SUBESPAÇOS DE KRYLOV

Realizou-se uma comparação do método EKS com os métodos de projeção nos subespaços tradicional (TKS) e inverso (IKS) de Krylov.

Os resultados para o CASO 1 são apresentados nas figs. 5.79 a 5.81. Enquanto que o TKS possui um alto erro em baixas frequências e o IKS possui desempenho inverso, sendo pior em altas frequências, o EKS tende a permanecer em uma posição intermediária, com erros satisfatórios em baixas e altas frequências. O mesmo pode ser visto nos polos da fig. 5.81, já que o TKS possui dificuldade em alocar os seus polos nos polos de baixa frequência do FOM, inclusive ignorando o polo instável.

As mesmas observações podem ser realizadas de forma mais acentuada para os resultados do CASO 11, nas figuras 5.82 a 5.84. Os comportamentos complementares do TKS e IKS estão bastante destacados nas figs. 5.82 e 5.83. Os polos de EKS e do IKS coincidem com muitos dos polos de baixa frequência do FOM, ao contrário do TKS, como pode ser visto na fig. 5.84.

As mesmas observações do CASO 11 valem para o CASO 13, mostrado nas figuras 5.85 a 5.87.

No CASO 17, o IKS apresentou resultado melhor que o TKS na maior parte das frequências, enquanto que o EKS permaneceu em uma posição intermediária. Contudo, o pico de banda larga do FOM causou um grande pico de erro nos três MORs, conforme figs. 5.88 e 5.89. Na figura 5.90 é visto que os polos do TKS estão mal alocados para baixas frequências, enquanto que o IKS e o EKS tendem a coincidir com os polos do FOM.

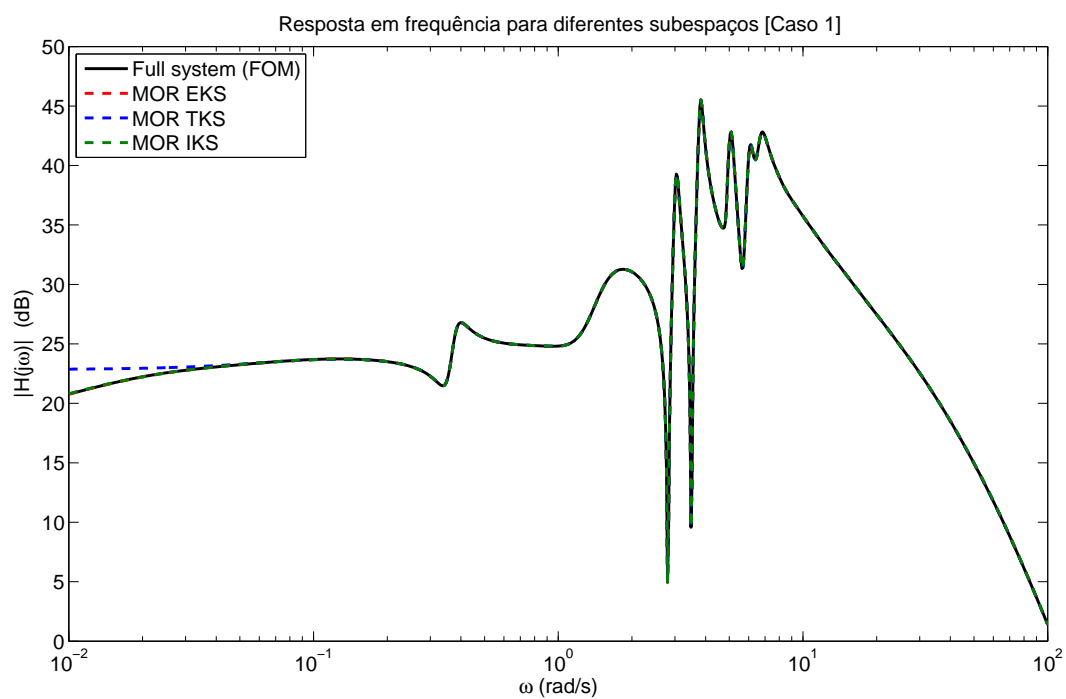


Figura 5.79: Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 1).

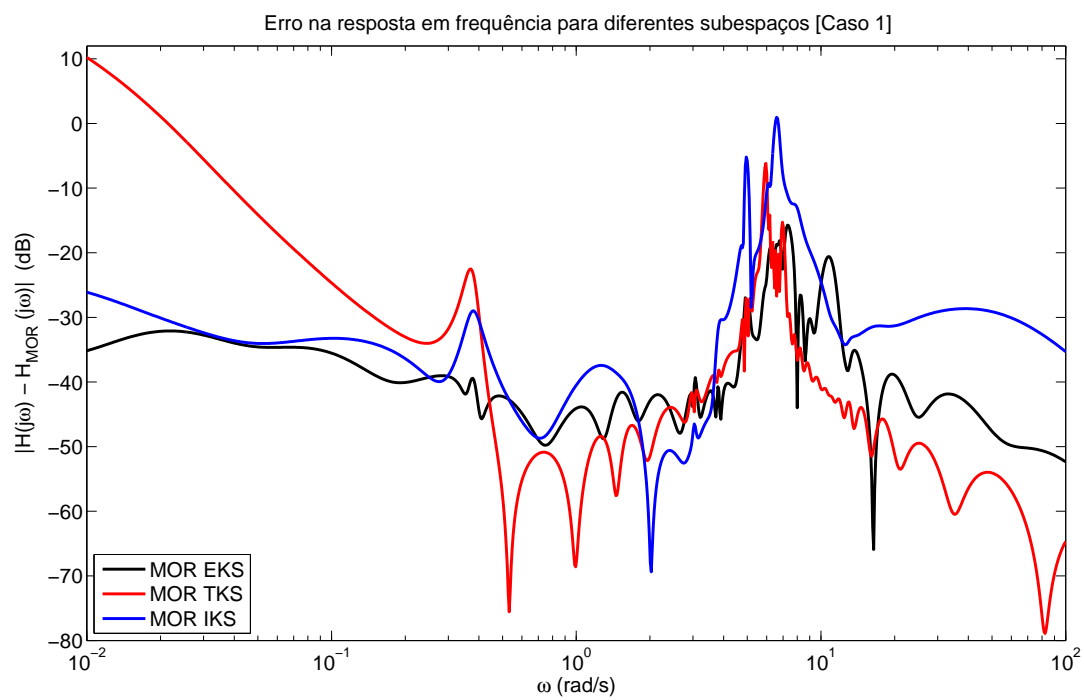


Figura 5.80: Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 1).

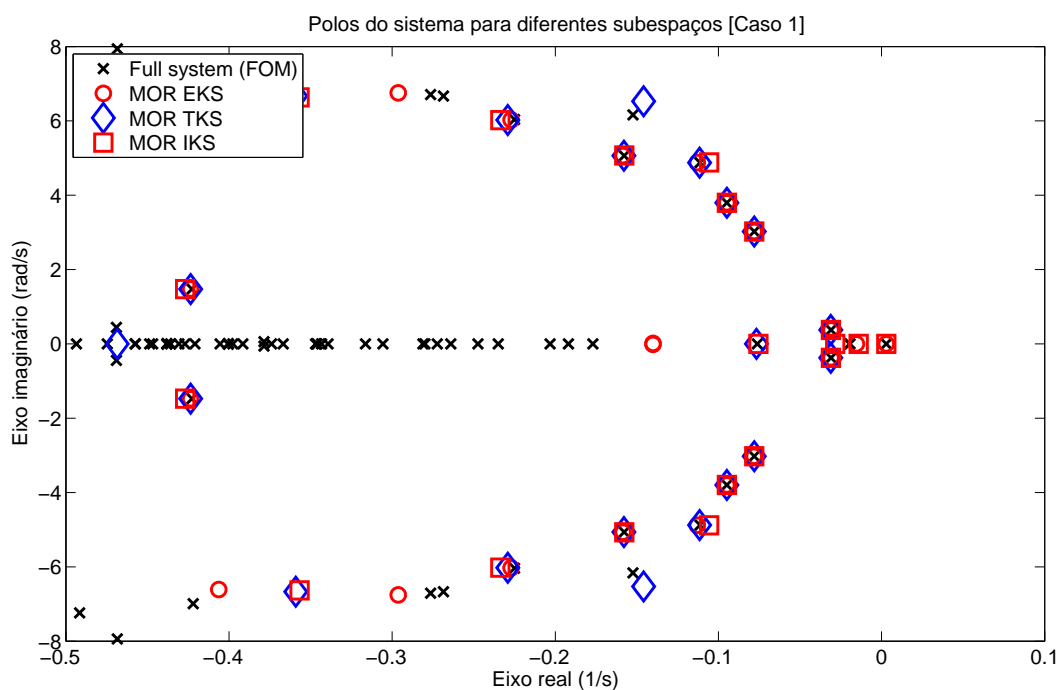


Figura 5.81: Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 1).

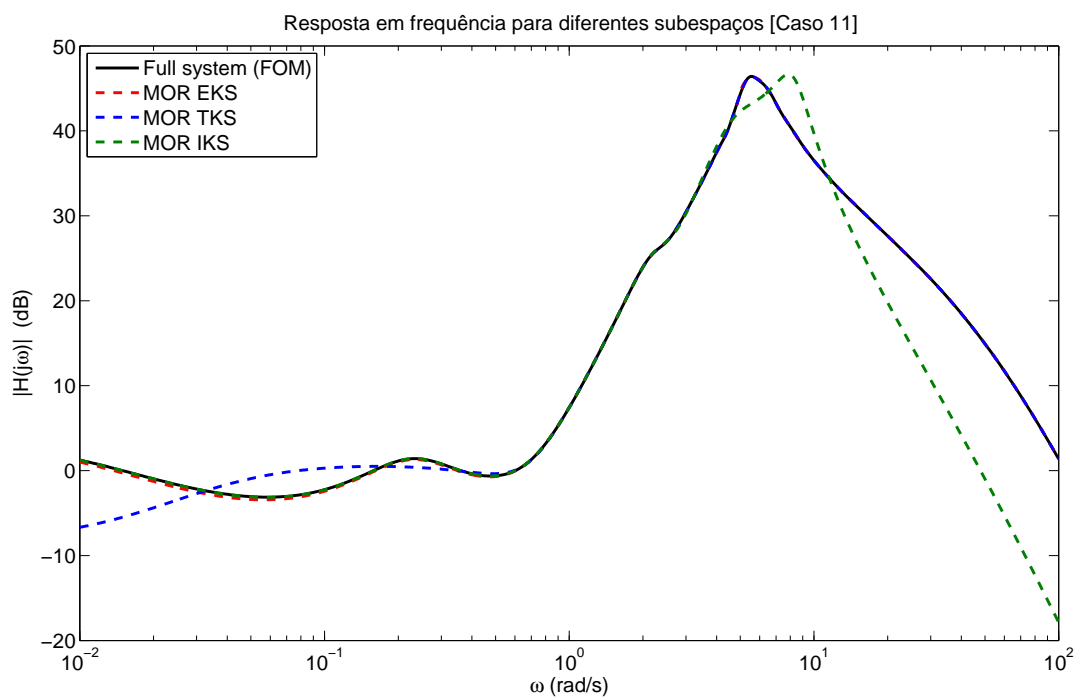


Figura 5.82: Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 11).

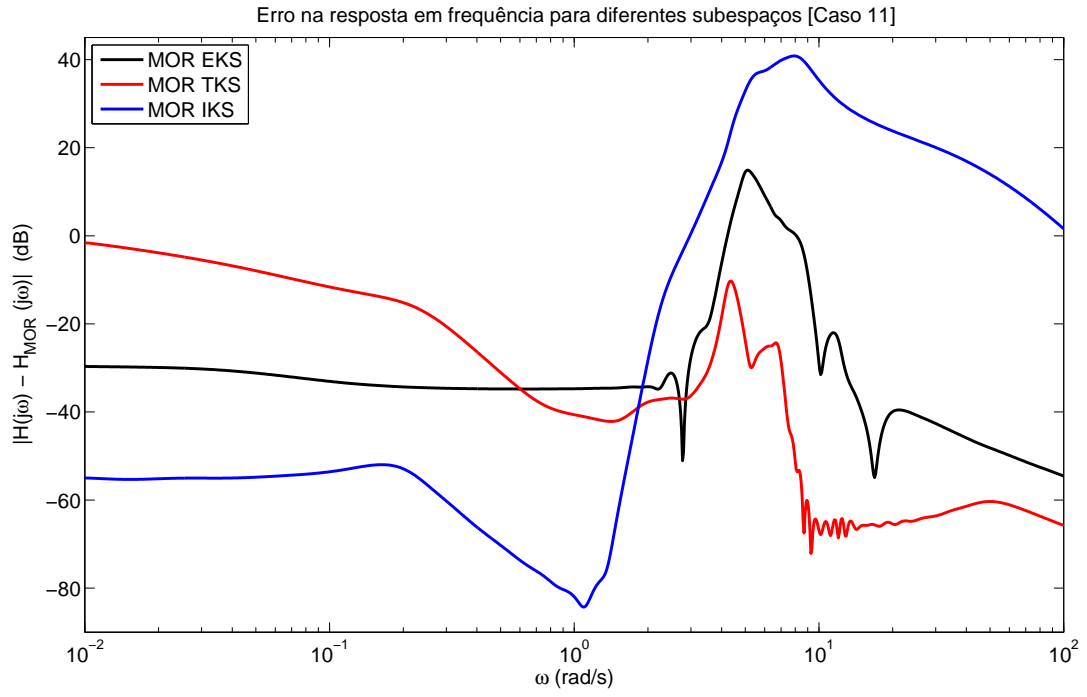


Figura 5.83: Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 11).

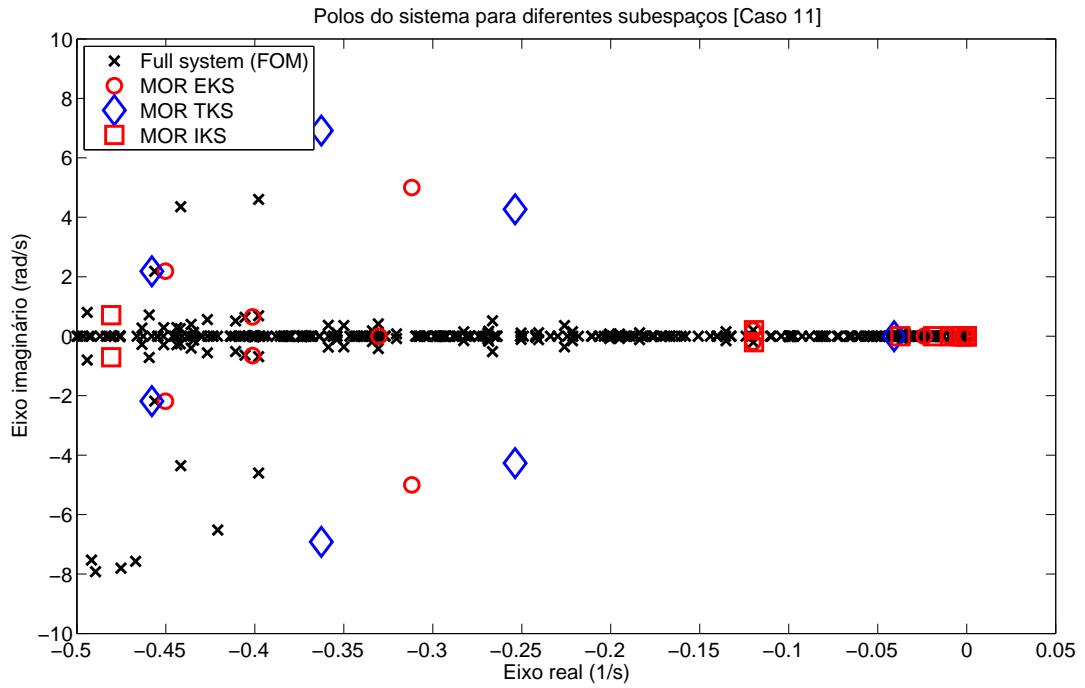


Figura 5.84: Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 11).

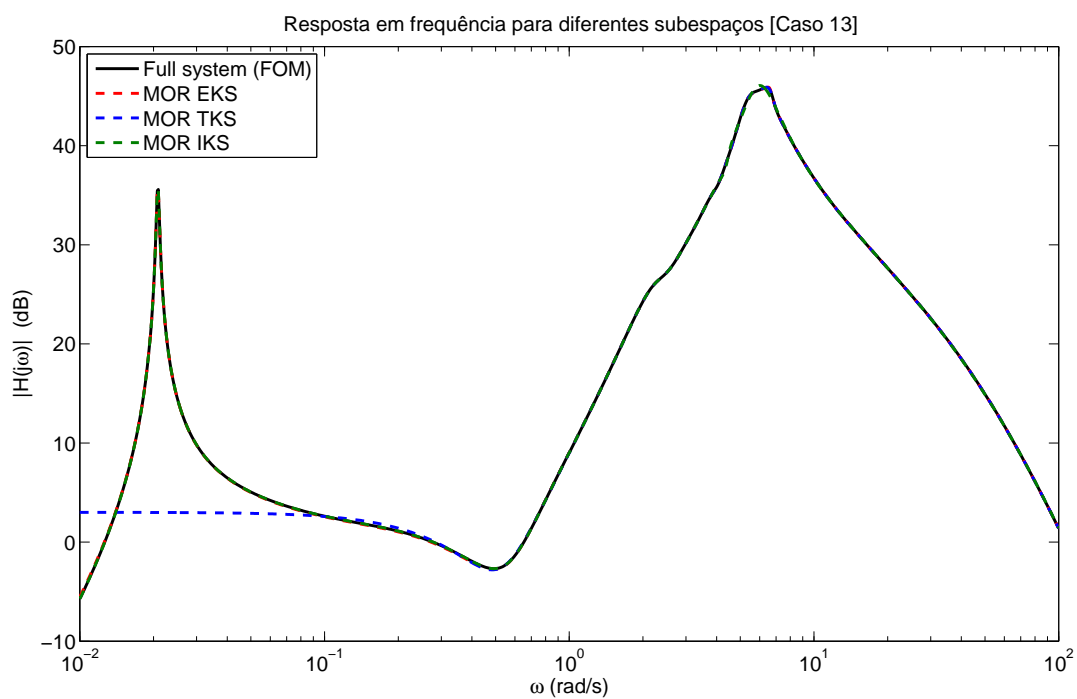


Figura 5.85: Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 13).

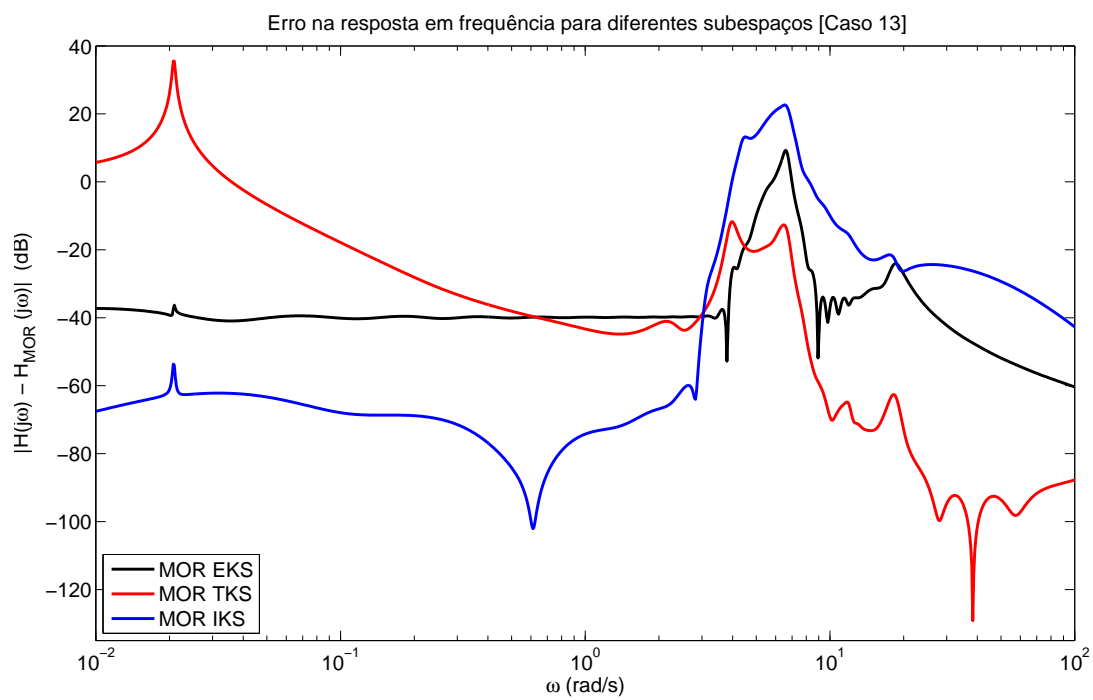


Figura 5.86: Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 13).

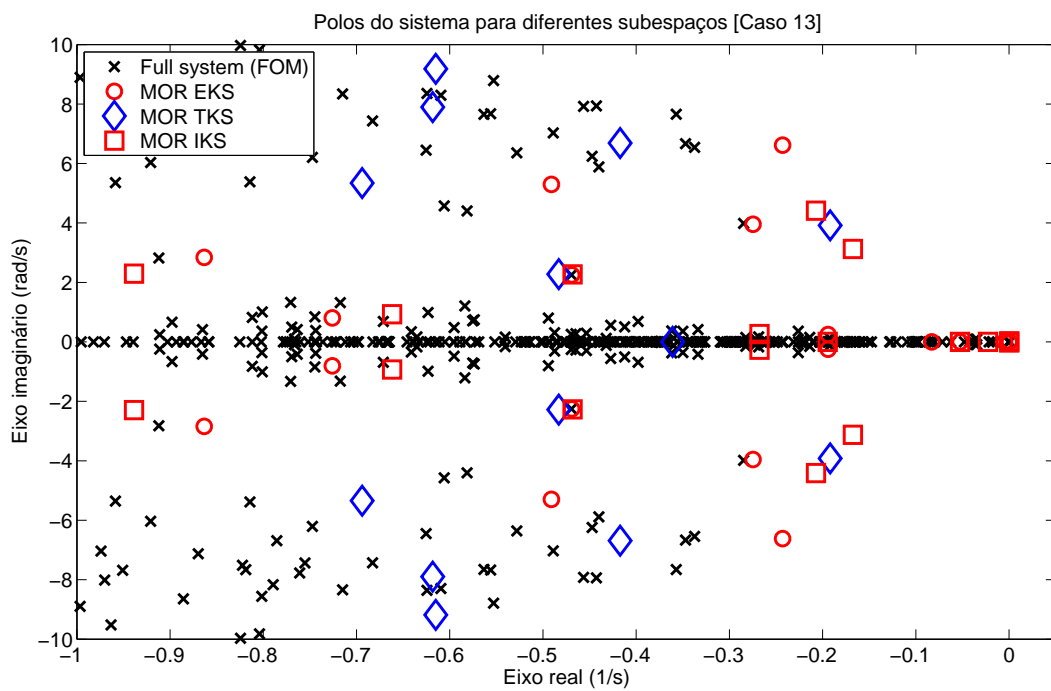


Figura 5.87: Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 13).

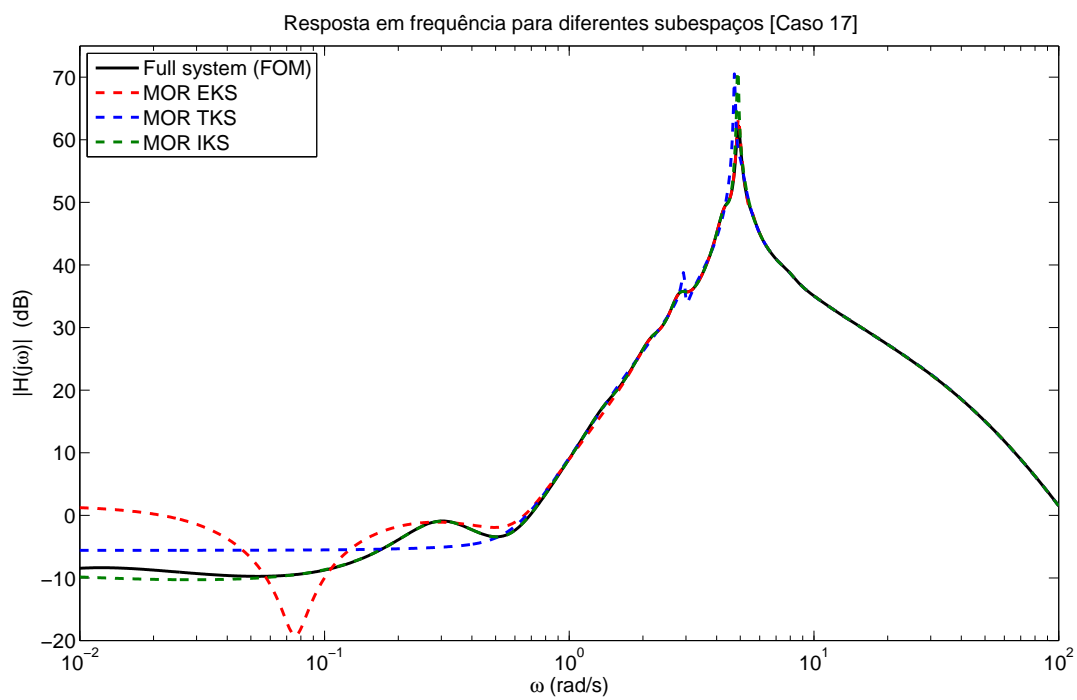


Figura 5.88: Resposta em frequência para diferentes subespaços (caso 17).

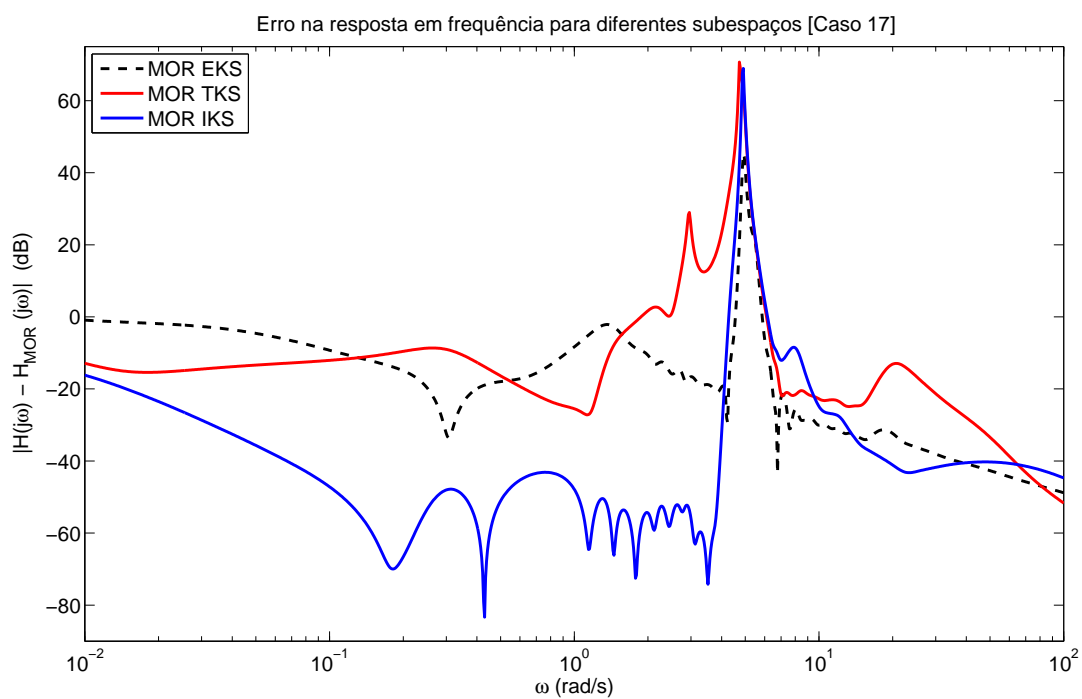


Figura 5.89: Erro em frequência para diferentes subespaços (caso 17).

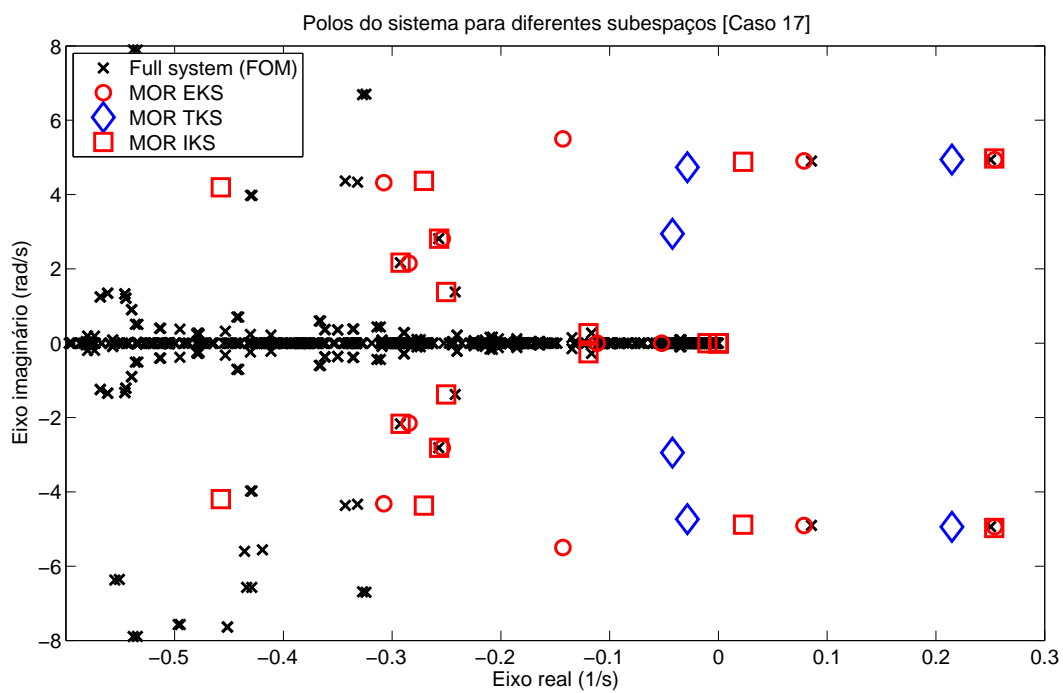


Figura 5.90: Polos do sistema para diferentes subespaços (caso 17).

Utilizando-se os mesmos CASOS 1, 11, 13 e 17, são avaliados o TP, IER e IERTP para diferentes subespaços, com resultados nas figs. 5.91 a 5.93.

Na fig. 5.91 é observado que o IKS é mais rápido que os demais, visto que somente utiliza inversões matriciais implícitas, mais rápidas que as multiplicações matriciais explícitas, pois a variante C foi utilizada.

Em relação ao IER e IERTP, das figuras 5.92 e 5.93, o EKS obteve melhor resultado na maior parte dos casos, ao combinar as vantagens em altas e baixas frequências do TKS e do IKS, respectivamente.

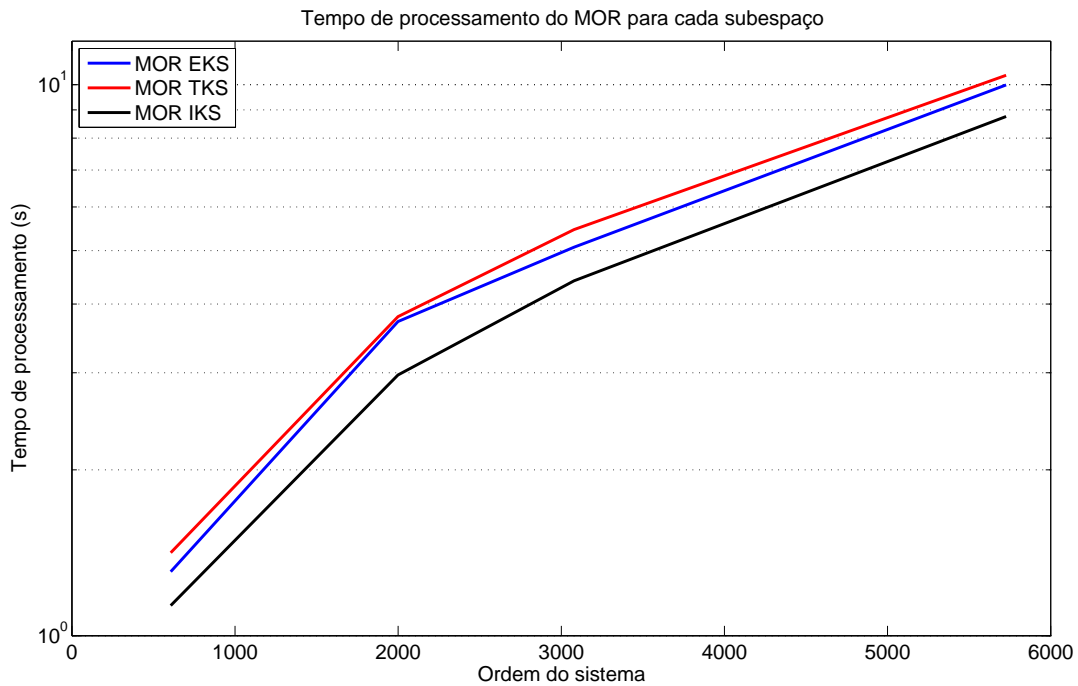


Figura 5.91: Tempo de processamento para diferentes subespaços

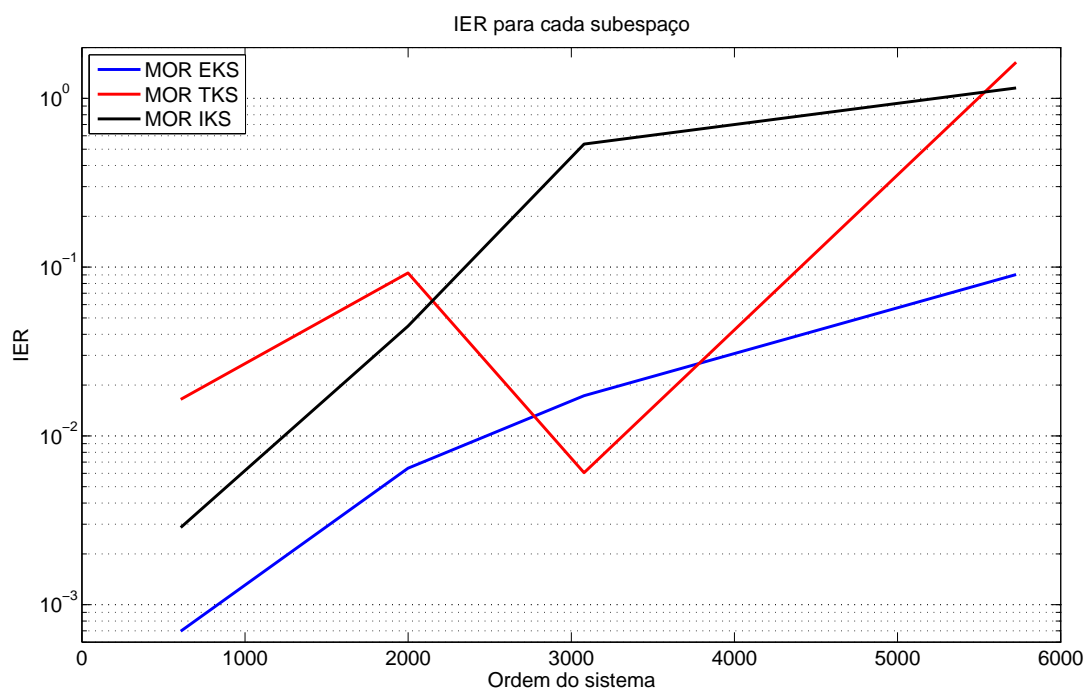


Figura 5.92: IER para diferentes subespaços

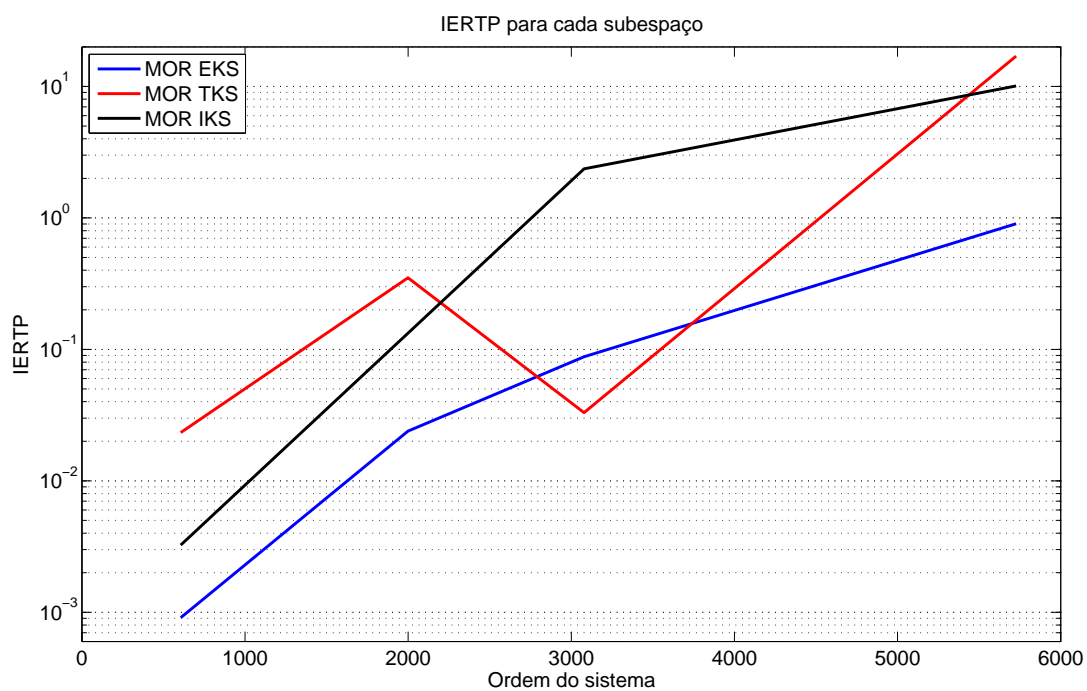


Figura 5.93: IERTP para diferentes subespaços

5.3 TESTES APENAS COM O MÉTODO ADI

Nesta parte do capítulo serão apresentados os resultados de alguns testes conduzidos com o método ADI.

5.3.1 TEMPO E QUALIDADE COM E SEM O CÁLCULO DOS PARÂMETROS ADI

Nesta subseção é verificada a possibilidade de se ajustar manualmente os parâmetros ADI sem a necessidade dos cálculos dos mesmos, conforme descrito na seção 3.3. Os parâmetros ADI ajustados manualmente são os mesmos do padrão, $\mu_J = \{-1/15, -0.7, -6, -13, -200\}$.

Para o cálculo dos parâmetros ADI é utilizado código baseado no Lyapack [10,11], que utiliza o processo de Arnoldi com k^+ valores de *Ritz* referentes a A e k^- valores de *Ritz* referentes a A^{-1} , para calcular L_0 parâmetros ADI. Nos testes foram utilizados apenas parâmetros ADI reais, negativos.

Para $k^+ = 20$, $k^- = 10$ e $L_0 = 5$, e denotando ADI c.p. para referir ao método ADI **com o cálculo dos parâmetros**, os parâmetros calculados para o CASO 1 foram: $\mu_J = \{-0.0198089452803852, -0.0198089452803852, -4.82874047316625, -4.82874047316625, -101.931417154135\}$. O tempo total da redução de ordem neste caso foi 4.173801189954431 s. Enquanto isso, o tempo total foi de 0.898733797227442 s com o ajuste manual dos parâmetros. Foi utilizado shift $\alpha = 0.012$. As figuras 5.94 a 5.98 apresentam o desempenho dos dois MORs. Embora as curvas nas figs. 5.94 e 5.96 aparentam ser visualmente coincidentes, as curvas de erro podem ser analisadas nas figs. 5.95 e 5.97. Em termos de resposta em frequência e no tempo, são muito semelhantes, sendo o MOR obtido com parâmetros ajustados manualmente (sem c.p.) ligeiramente pior. Na fig. 5.98, os polos de ambos os MORs estão alocados em configuração semelhante.

Para diminuir o tempo do c.p., utilizou-se $k^+ = 10$, $k^- = 5$ e $L_0 = 5$, o que levou a um tempo de 2.212092623644 s para gerar o MOR. A fig. 5.99 apresenta apenas o erro em frequência. Embora o ADI c.p. tenha sido um pouco mais rápido do que antes, o desempenho de seu MOR está muito inferior ao ADI sem c.p., pois apresenta uma região com grande erro em frequência.

Os valores de k^+ e k^- devem ser suficientemente grandes para o cálculo resultar em bons parâmetros ADI, embora o consumo de tempo seja grande. Para poupar esse tempo de processamento, o usuário pode ajustar manualmente os parâmetros de seu interesse, e obter bons resultados de MOR.

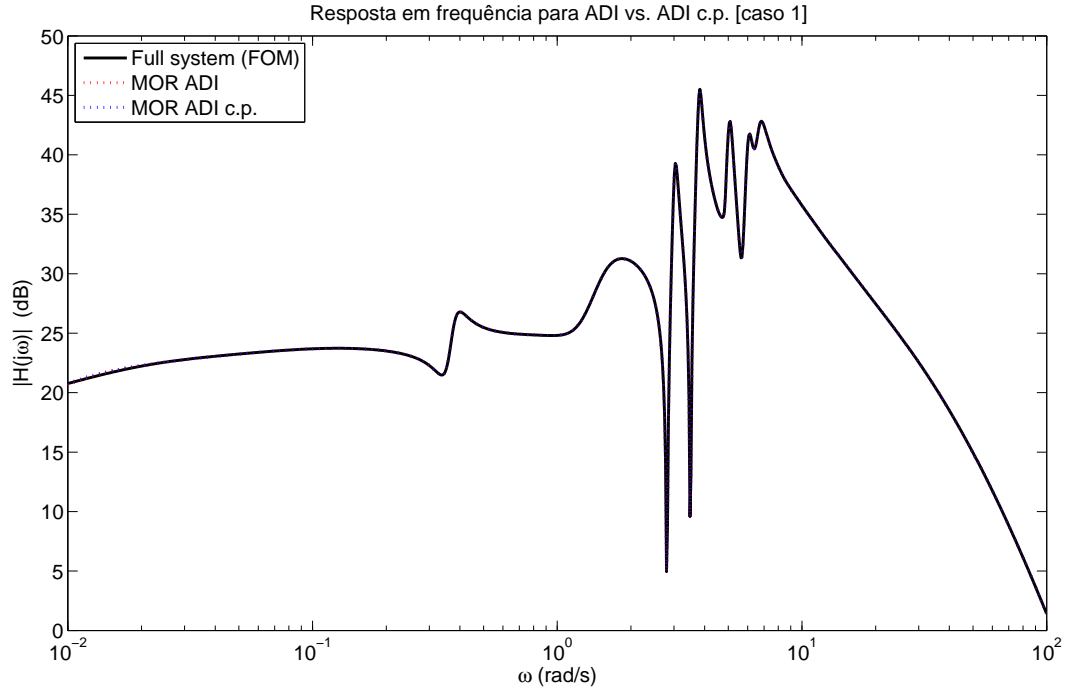


Figura 5.94: Resposta em frequência com e sem c.p. (caso 1)

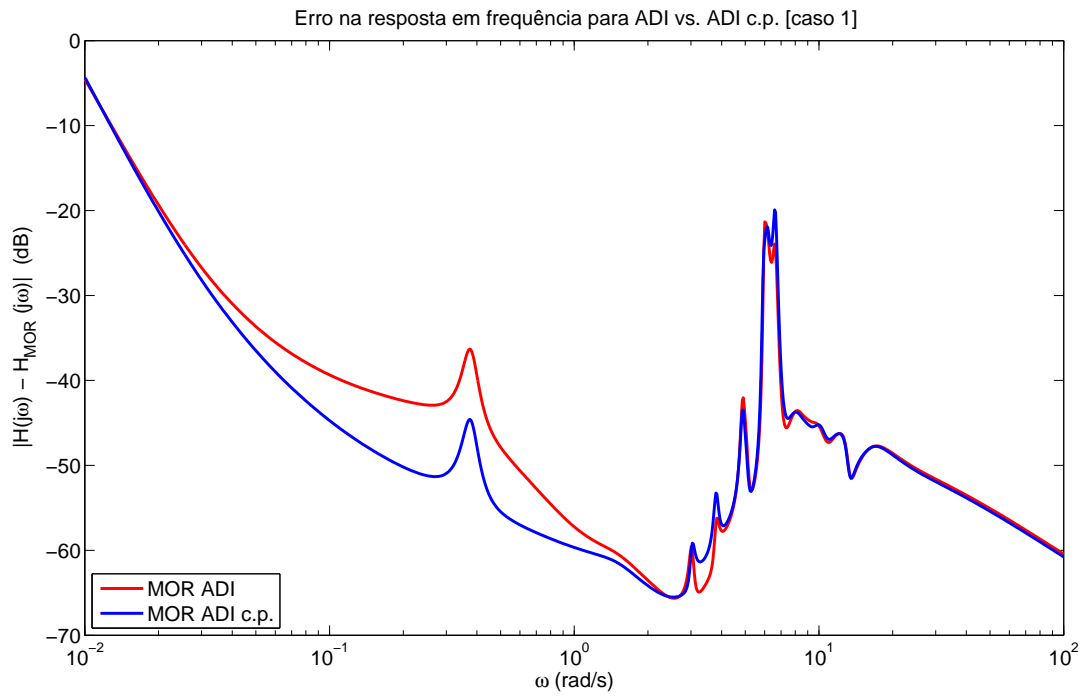


Figura 5.95: Erro em frequência com e sem c.p. (caso 1)

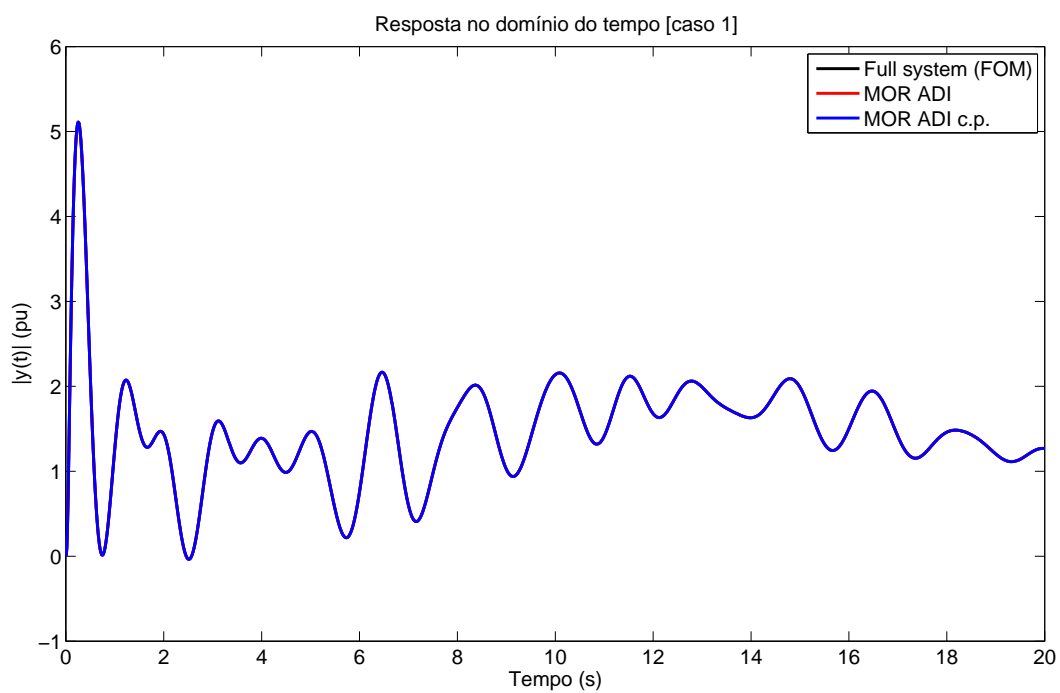


Figura 5.96: Resposta no domínio do tempo com e sem c.p. (caso 1)

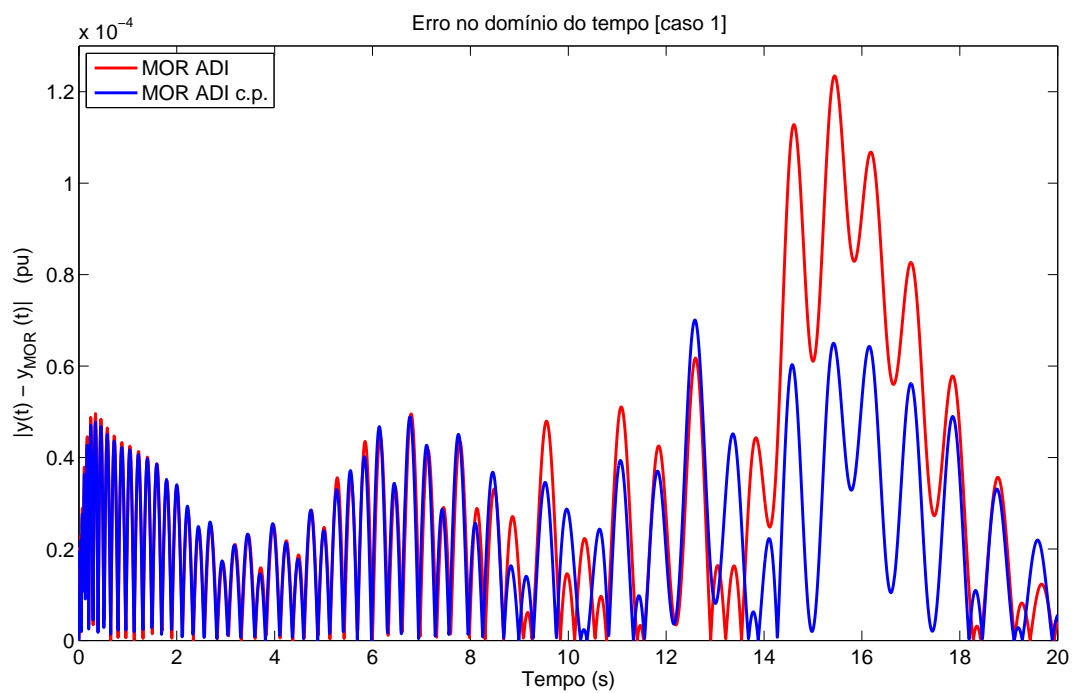


Figura 5.97: Erro no domínio do tempo com e sem c.p. (caso 1)

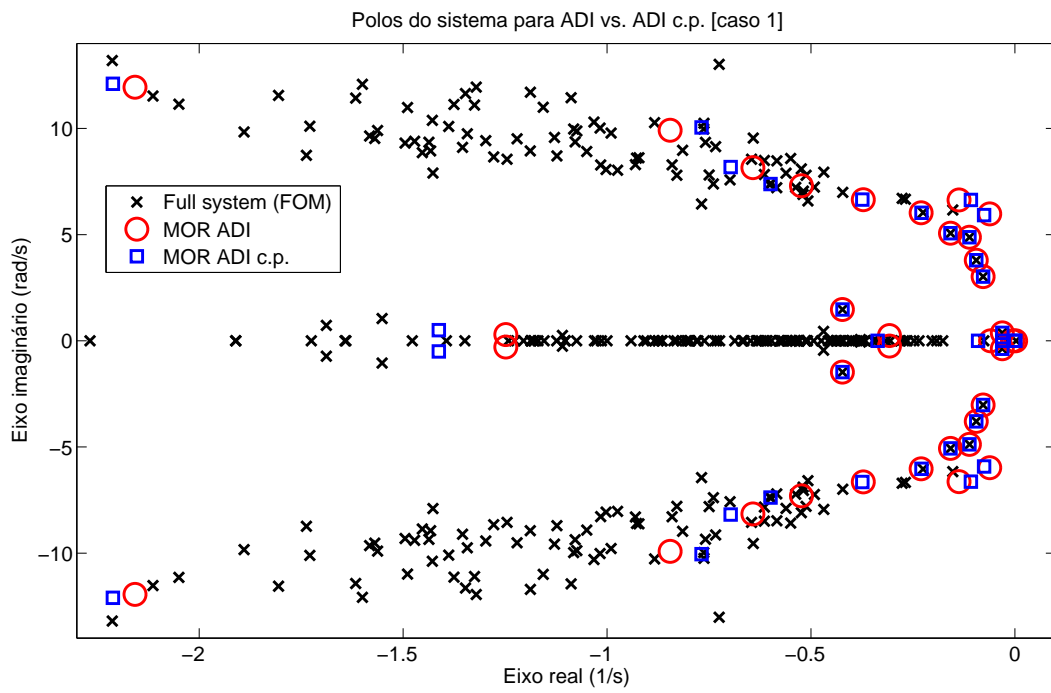


Figura 5.98: Polos do sistema com e sem c.p. (caso 1)

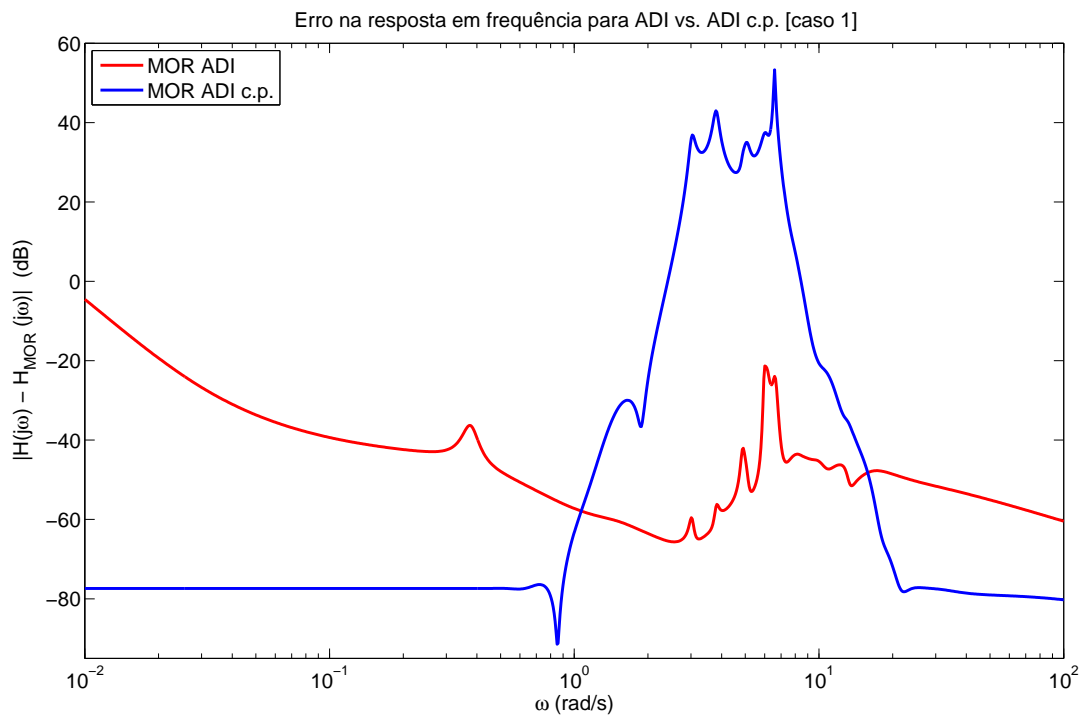


Figura 5.99: Erro em frequência com e sem c.p. (caso 1), c.p. ruim

5.3.2 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS ADI

O objetivo desta subseção é verificar a evolução do IER com a variação dos parâmetros ADI. Foram realizadas a variação do método ADI utilizando um parâmetro μ_1 e a variação simultânea de dois parâmetros, μ_1 e μ_2 . O CASO 1 foi utilizado nos testes, com shift α fixo igual ao da Tabela 5.2.

A fig. 5.100 apresenta o IER em função de $-\mu_1$, para facilitar a visualização. Para o caso em que se utiliza um parâmetro ADI, o CASO 1 resulta melhor na faixa entre $-\mu_1 = 0.3$ e $-\mu_1 = 3$.

A fig. 5.101 apresenta o IER em função de $-\mu_1$ e $-\mu_2$, de forma conjunta. Para melhor visualização, as curvas de nível da fig. 5.101 são colocadas na fig. 5.102, em que a região em branco é a de menor IER. É visível uma relativa simetria para a região de escolha de $-\mu_1$ e de $-\mu_2$.

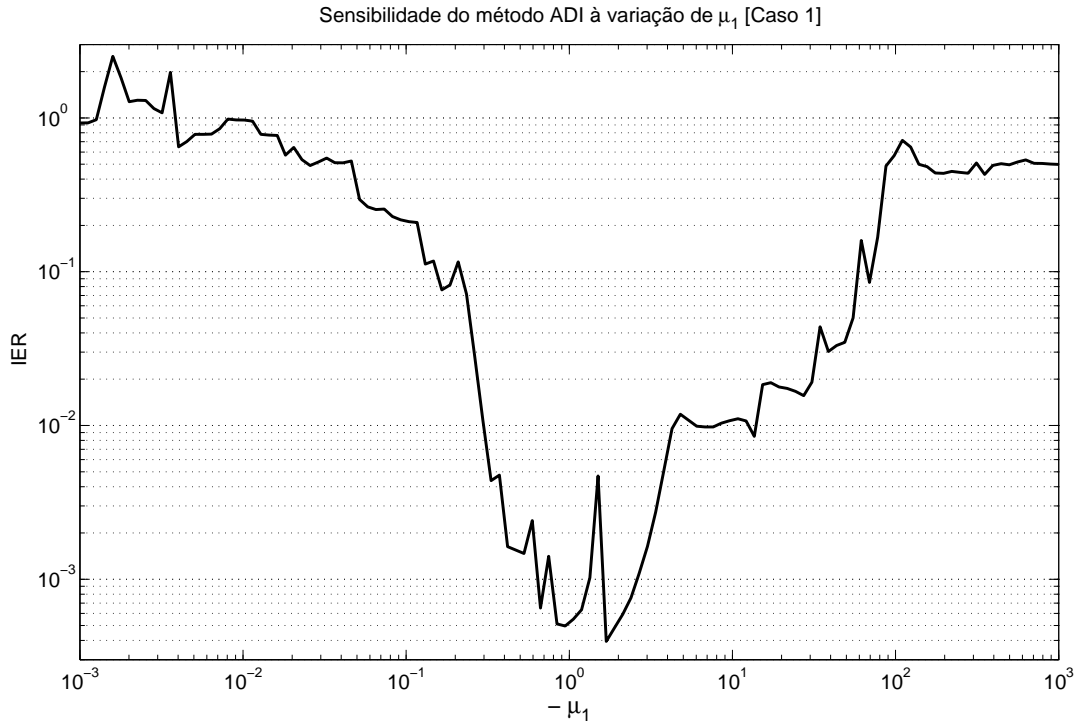


Figura 5.100: IER em função de $-\mu_1$ (caso 1)

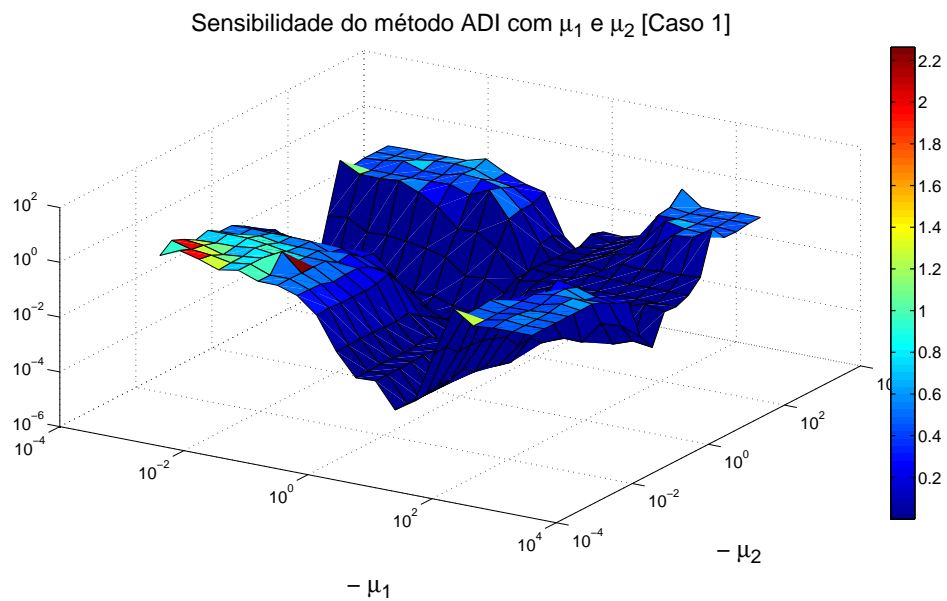


Figura 5.101: IER em função de $-\mu_1$ e $-\mu_2$ (caso 1)

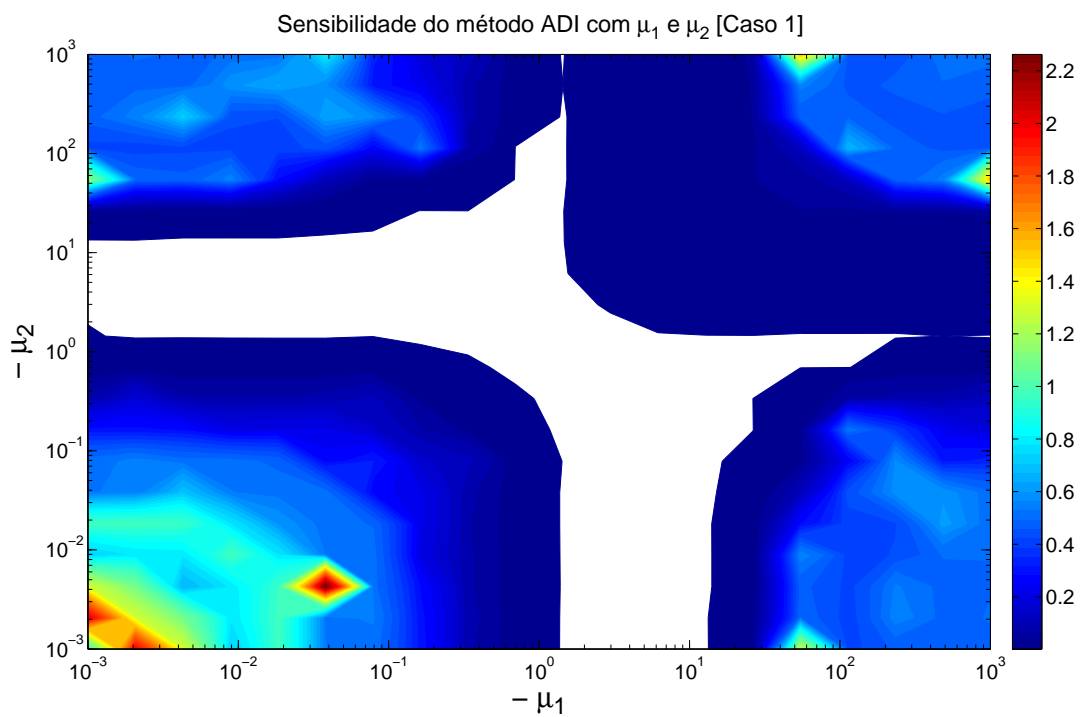


Figura 5.102: IER em função de $-\mu_1$ e $-\mu_2$ (caso 1), curvas de nível

5.4 TESTES COMPARATIVOS: MÉTODO ADI vs. MÉTODO EKS

Nesta seção são apresentados os resultados de comparações diretas entre o método EKS e o método ADI.

5.4.1 TESTES COM CASO 1

Utilizando o CASO 1, o método ADI com os parâmetros padrões da seção 5.1 é comparado ao método EKS em seis condições: QRI a 2 e QRi a 3, com $w = 80, 100$ e 120 . A Tabela 5.5 apresenta o tempo médio de processamento da redução de ordem, com 200 amostras para cada situação, dos métodos utilizados nas comparações com o CASO 1. O Método EKS com decomposição QR, por ser mais lento, somente é competitivo com $w = 80$, em que demanda um tempo médio de 0.667711284454345 segundo, também para 200 amostras.

Tabela 5.5: Tempo médio de processamento (em segundos) do CASO 1.

| Método | EKS com $w = 80$ | EKS com $w = 100$ | EKS com $w = 120$ |
|-------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| ADI | 0.812500942597607 | 0.827019350268070 | 0.828086721981736 |
| EKS QRI a 2 | 0.526317617869730 | 0.734721803123180 | 0.997949165771098 |
| EKS QRI a 3 | 0.494150308295459 | 0.676691480898890 | 0.865609764590751 |

Em seguida, é realizada uma variação no shift α tanto para o método ADI como para o método EKS em suas diferentes configurações. A fig. 5.103 apresenta a evolução do IER em função do shift α para o método ADI e para o método EKS QRI a 2 e QRI a 3, com $w = 80$. De bônus, a curva do EKS com decomposição QR também é apresentada. Nesta figura é visto que os métodos EKS disputam com o método ADI pelo menor IER, embora o método ADI seja melhor na maior parte das vezes. O QRI a 3 forneceu valores de IER não tão bons, enquanto que a curva do QRI a 2 permanece coincidente à curva do QR com exceção para a região de baixos valores de α . Novamente, os métodos EKS enfrentam um pico de IER nas proximidade do $\alpha_{critico}$ pois, neste caso, surge um polo no zero no sistema deslocado. O ADI não possui este problema.

As figs. 5.104 e 5.105 apresentam o mesmo tipo de curvas, agora com $w = 100$ e $w = 120$, respectivamente. A curva da decomposição QR não é colocada. As

observações feitas para a fig. 5.103 podem ser mantidas. As diferenças são que um valor de w mais alto permite ao método EKS atingir valores de IER ligeiramente melhores para α pequeno, mas a um grande custo de TP, como pode ser visto na Tabela 5.5.

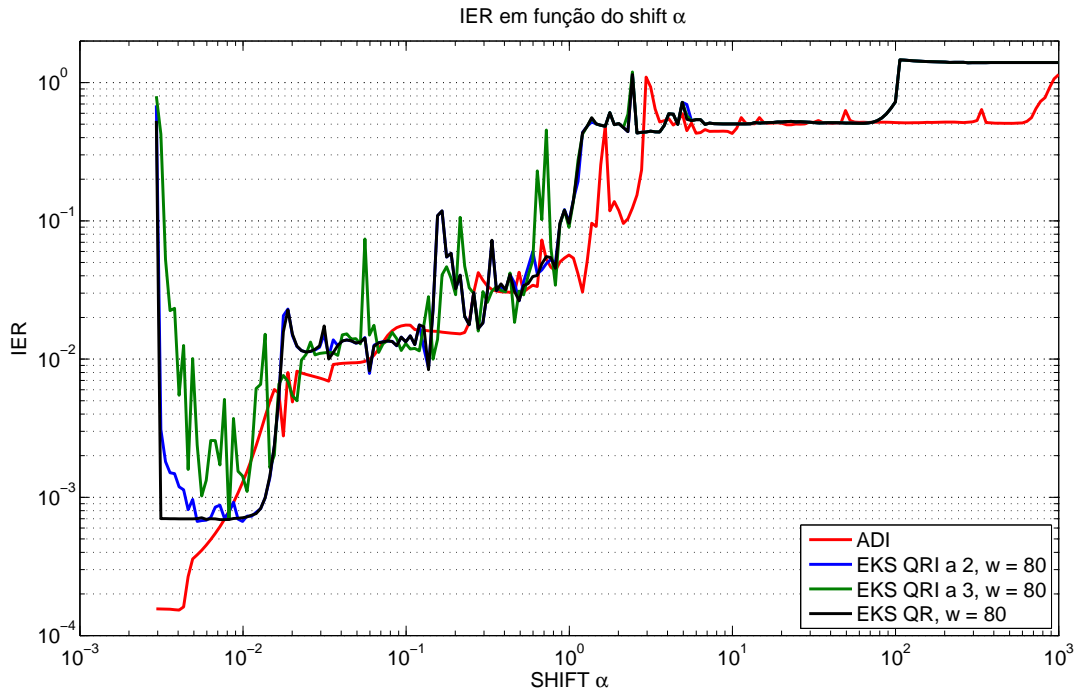


Figura 5.103: IER em função do shift α (caso 1), com $w = 80$

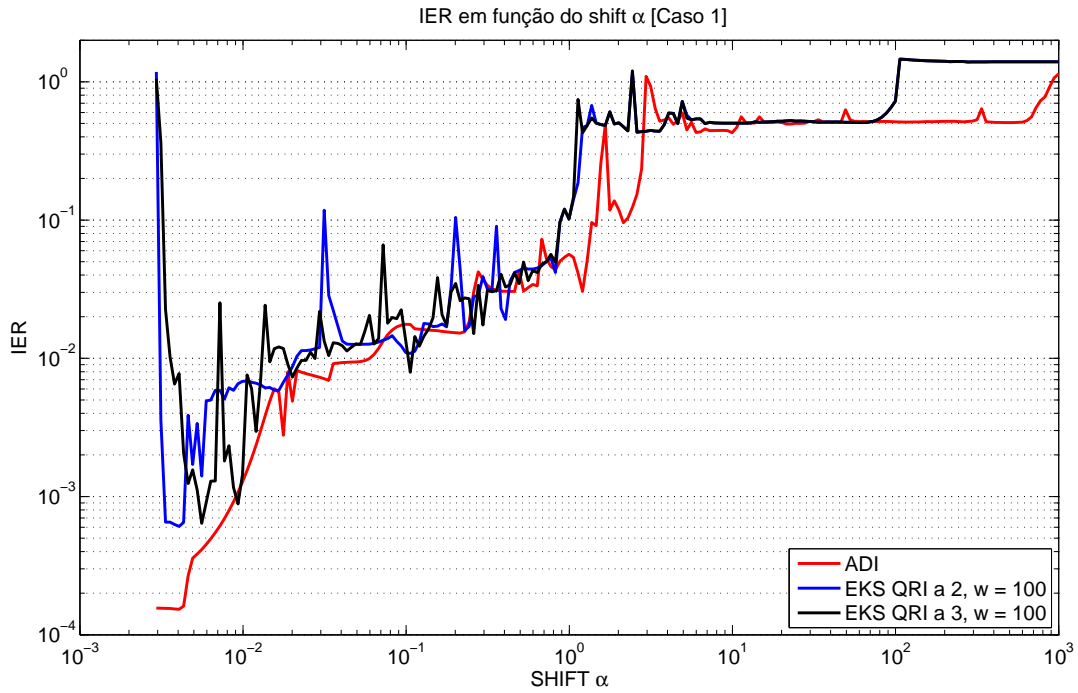


Figura 5.104: IER em função do shift α (caso 1), com $w = 100$

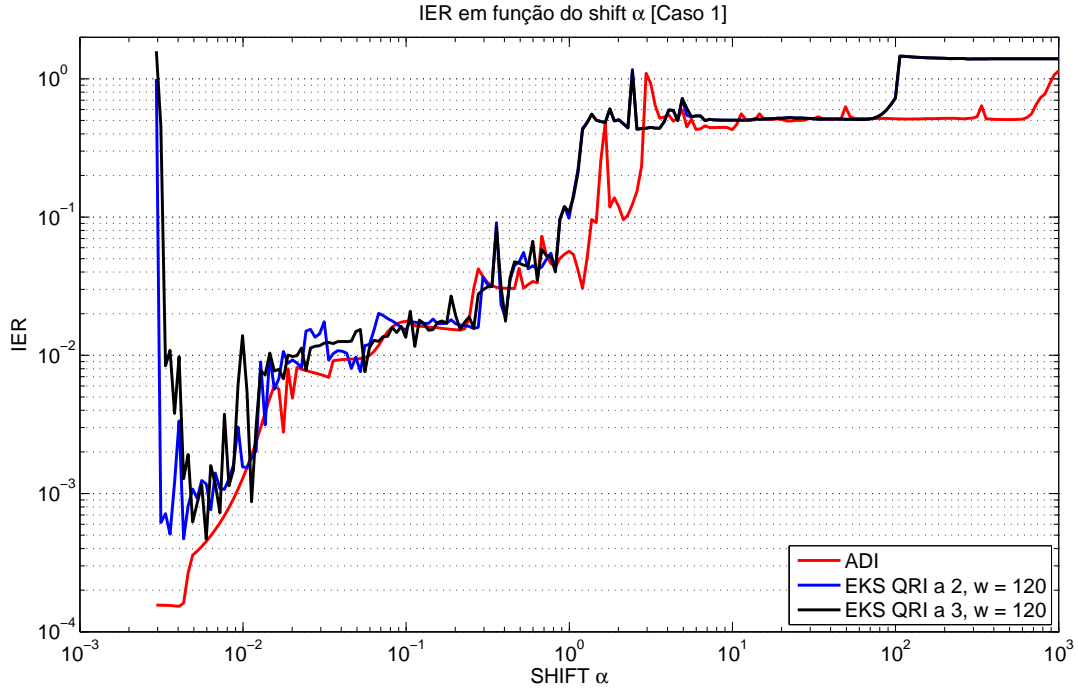


Figura 5.105: IER em função do shift α (caso 1), com $w = 120$

As figuras 5.106 a 5.110 apresentam o desempenho da redução de ordem entre o método ADI e o método EKS QRI a 2 com $w = 80$, para $\alpha = 0.0031$.

Com relação à resposta em frequência, figs. 5.106 e 5.107, o método EKS apresenta erro menor em altas frequências que o método ADI, mas seu desempenho é inferior em baixas frequências e no pico do FOM entre 5 e 10 rad/s. Em relação à resposta ao degrau de 0.1 pu, figs. 5.108 e 5.109, o desempenho do EKS é melhor que o ADI no início e se deteriora ao passar do tempo, o que está em concordância ao seu erro maior em baixa frequência, visto na fig. 5.107. A figura 5.110 apresenta os polos do sistema. Ambos os métodos possuem seus polos de baixa frequência bem alocados, com os polos do ADI ligeiramente mais próximos dos polos de baixa frequência do FOM.

Alterando-se o valor de α para 0.012, as figuras 5.111 a 5.113 apresentam os resultados de erro em frequência, no tempo, e polos do sistema. Como pode ser observado, o desempenho de ambos os métodos se degradou. Contudo, o EKS possui um erro menor em frequência, com a exceção do pico, e permanece mais tempo com erro abaixo do ADI na fig. 5.112, comparada à fig. 5.109. As configurações de polos na fig. 5.113 pouco se alteraram em relação à fig. 5.110, mas agora o método ADI possui polos mais afastados dos valores ideais, o que confere a vantagem para o método EKS.

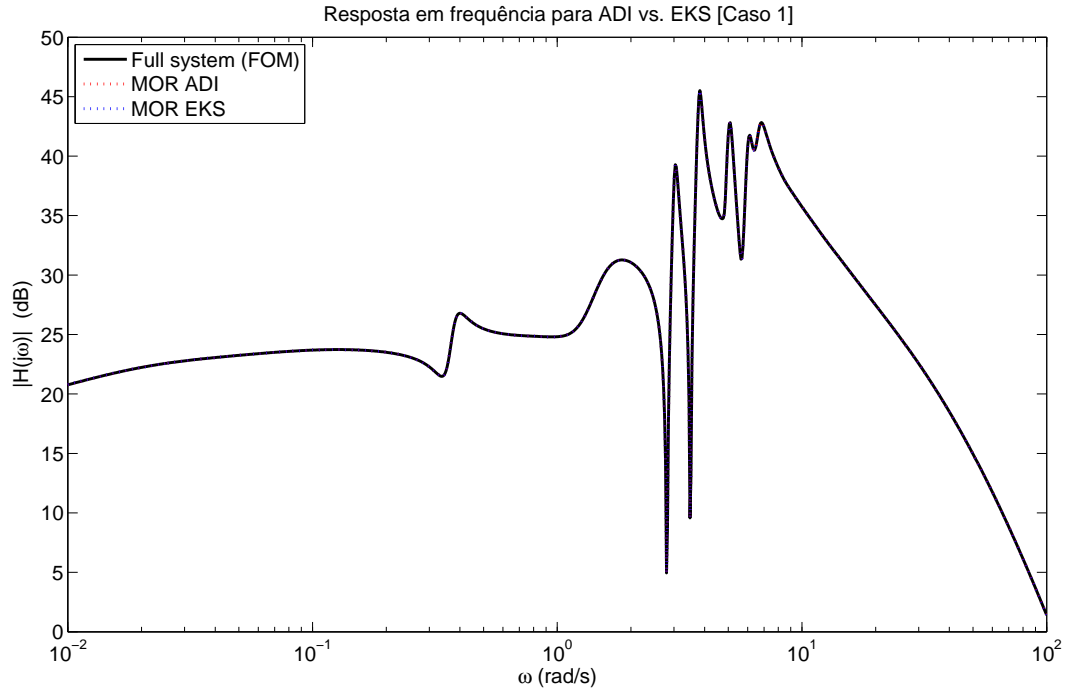


Figura 5.106: Resposta em frequência com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$

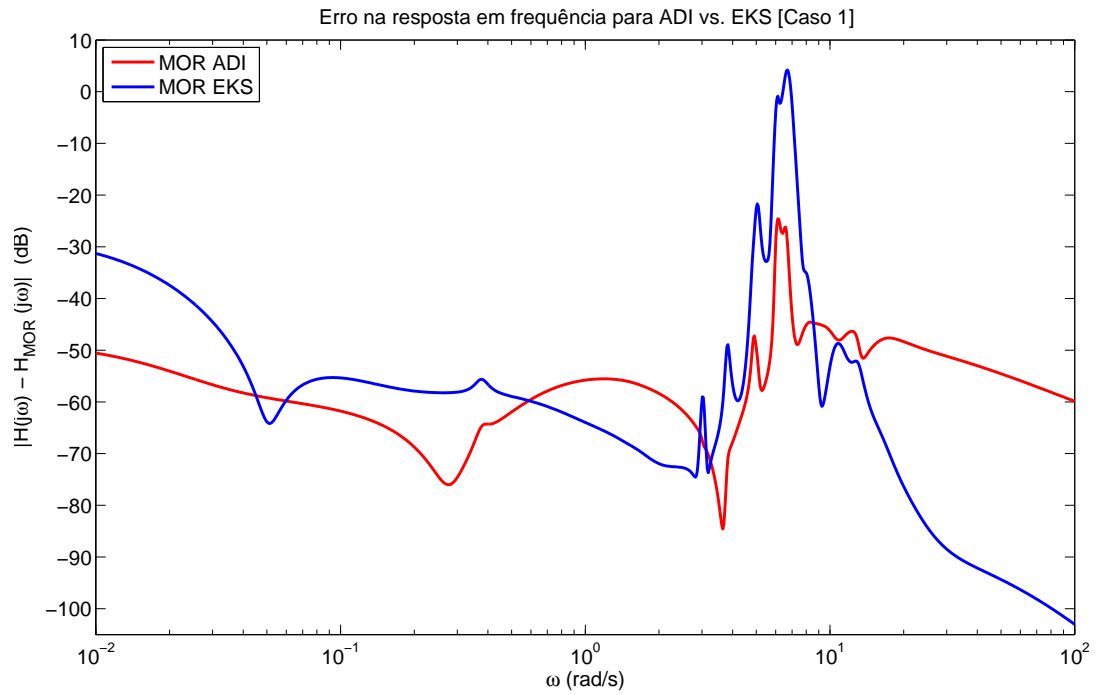


Figura 5.107: Erro em frequência com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$

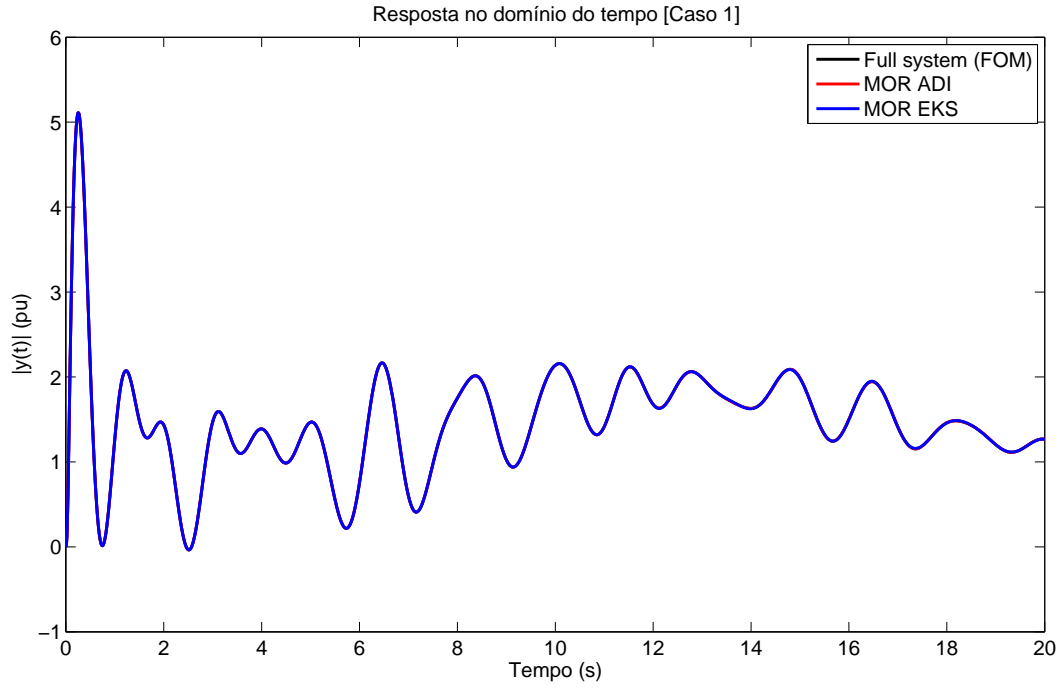


Figura 5.108: Resposta no tempo com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$

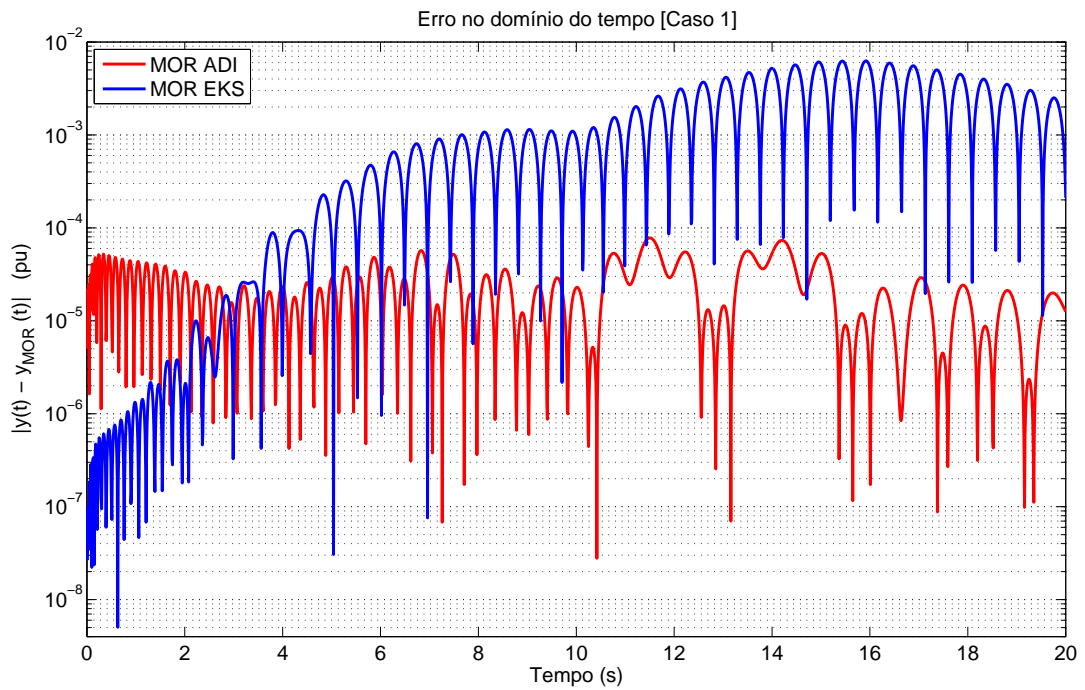


Figura 5.109: Erro no tempo com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$

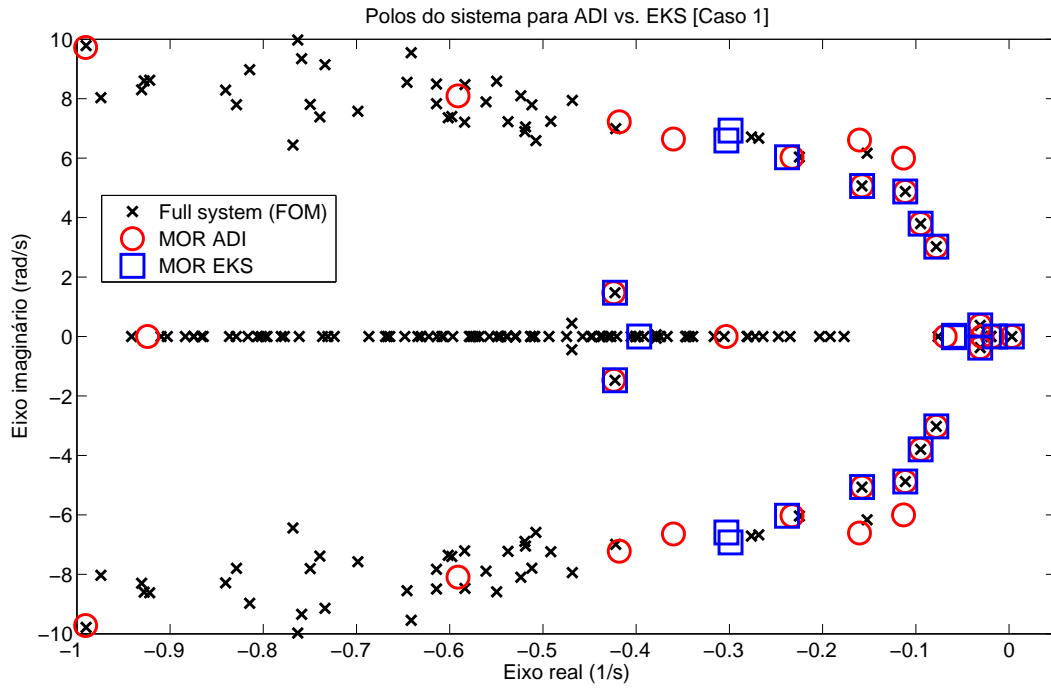


Figura 5.110: Polos do sistema com $\alpha = 0.0031$ (caso 1), com $w = 80$

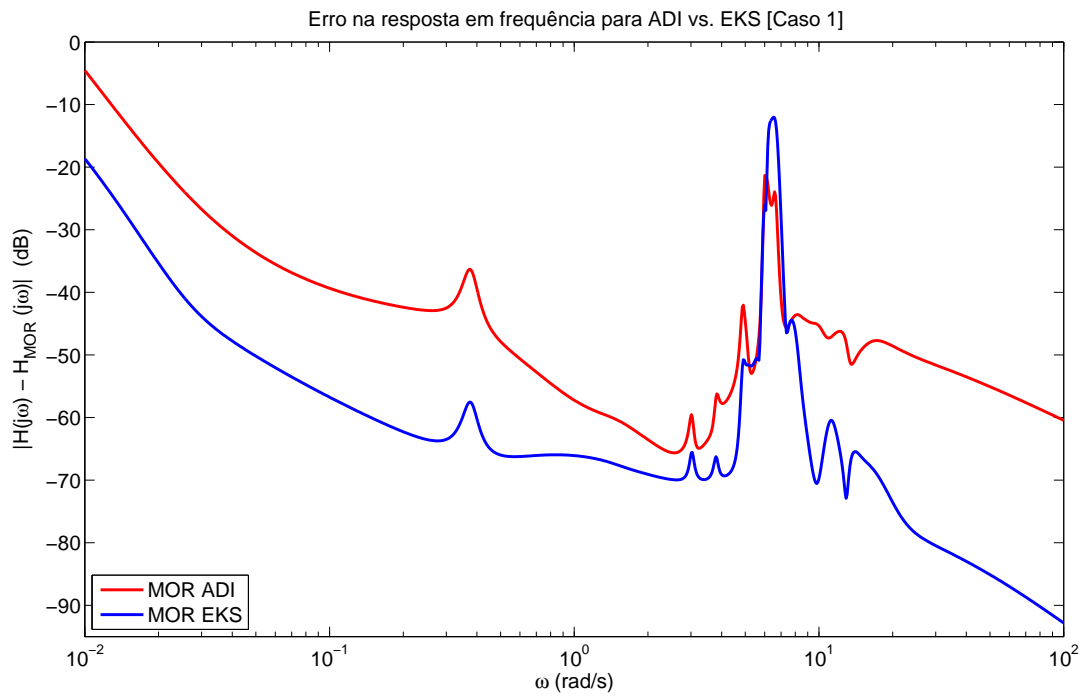


Figura 5.111: Erro em frequência com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$

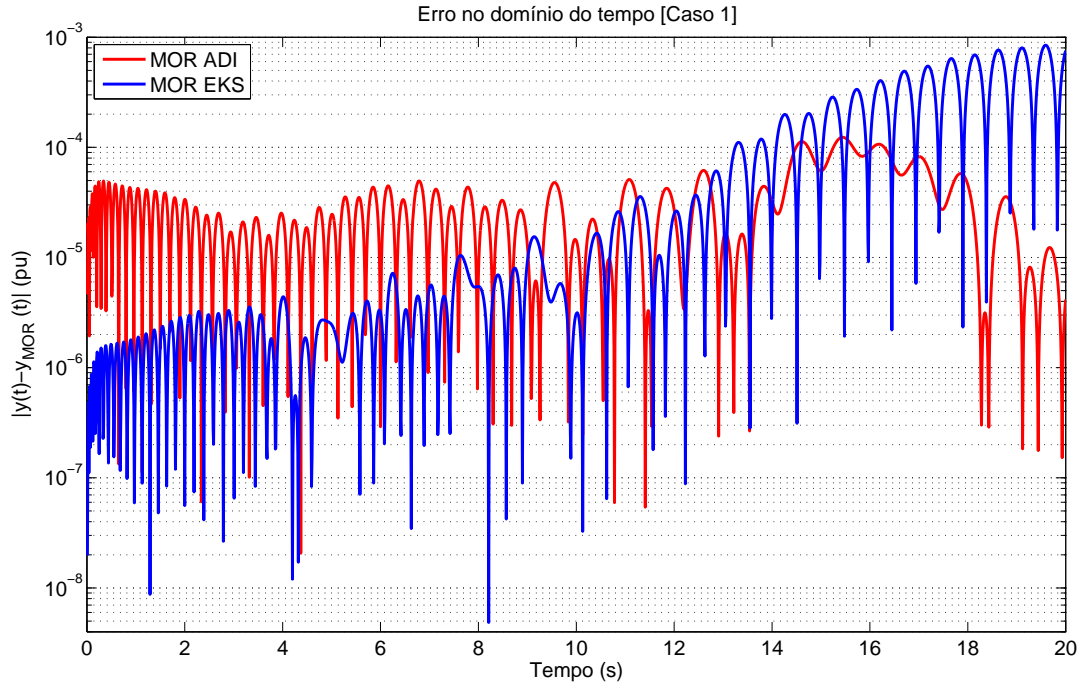


Figura 5.112: Erro no tempo com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$

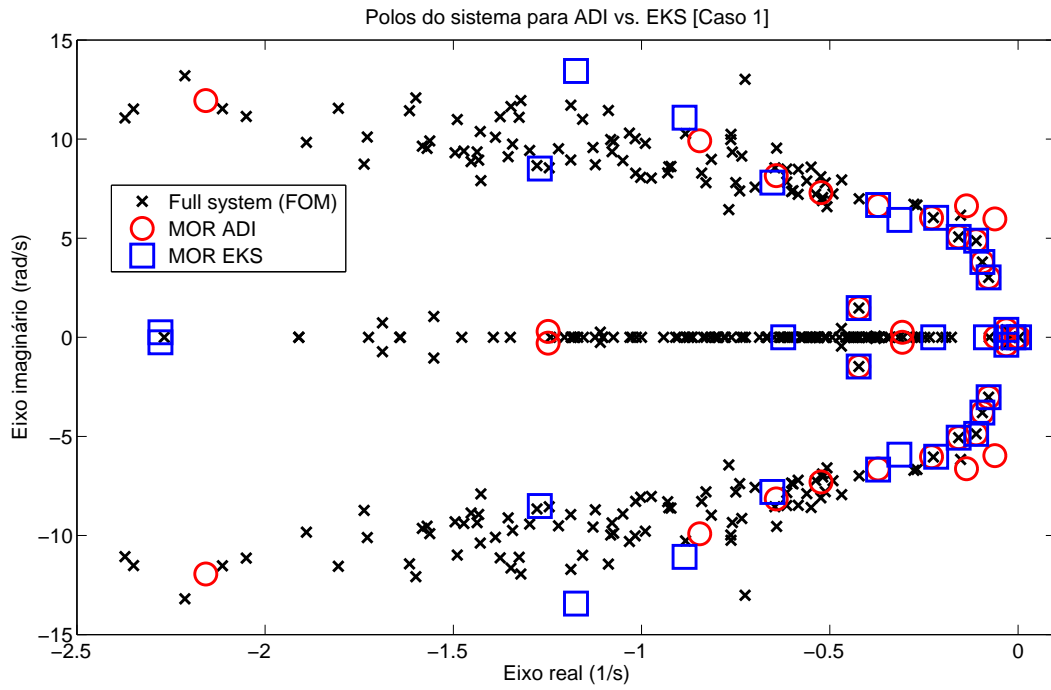


Figura 5.113: Polos do sistema com $\alpha = 0.012$ (caso 1), com $w = 80$

5.4.2 TESTES COM CASO 17

Nesta subseção são apresentados os resultados referentes ao CASO 17, que conforme já visto em testes anteriores, é um sistema difícil de reduzir, em especial devido ao seu pico de banda larga do FOM na resposta em frequência.

Inicialmente, para $\alpha = 0.35$, são comparados os métodos ADI e EKS QRi a 2, $w = 100$. O método ADI demandou TP igual a 5.714325596474586 s, enquanto que o EKS, 6.157882350115873 s. As figs. 5.114 a 5.118 ilustram os resultados obtidos.

Pelas figs. 5.114 e 5.115, é visível que ambos os métodos geram MORs com significativo erro em baixa frequência, além do pico de erro que coincide com o pico de larga banda do FOM. O desempenho do EKS apenas é melhor nas frequências médias.

Na resposta ao degrau, figs. 5.116 e 5.117, o método ADI possui desempenho superior em todos os momentos, com exceção dos instantes iniciais. De qualquer forma, observa-se na figura 5.116 que os MORs gerados respondem de forma muito semelhante (inclusive nos transitórios) ao sistema original FOM do CASO 17, o qual tem um comportamento notoriamente instável no domínio do tempo.

Os polos alocados pelo EKS na fig. 5.118 não possuem alocação tão boa como os polos do ADI.

Para diminuir o TP do EKS, o mesmo teste foi realizado com $w = 80$. O método ADI demandou TP igual a 5.7392523504760996 s, enquanto que o EKS, 4.530364669012140 s.

Contudo, o ganho em velocidade levou a erros maiores. As figs. 5.119 a 5.121 mostram que o erro em frequência do EKS piorou na região do pico, o erro ao degrau se deteriorou significativamente e os polos alocados pelo EKS mal conseguem sequer aproximar bem os polos instáveis do FOM, tarefa bem realizada pelo método ADI. Todas estas observações confrontam as declarações em [17] de que o método EKS é muito mais veloz que o método ADI, com qualidade equiparável.

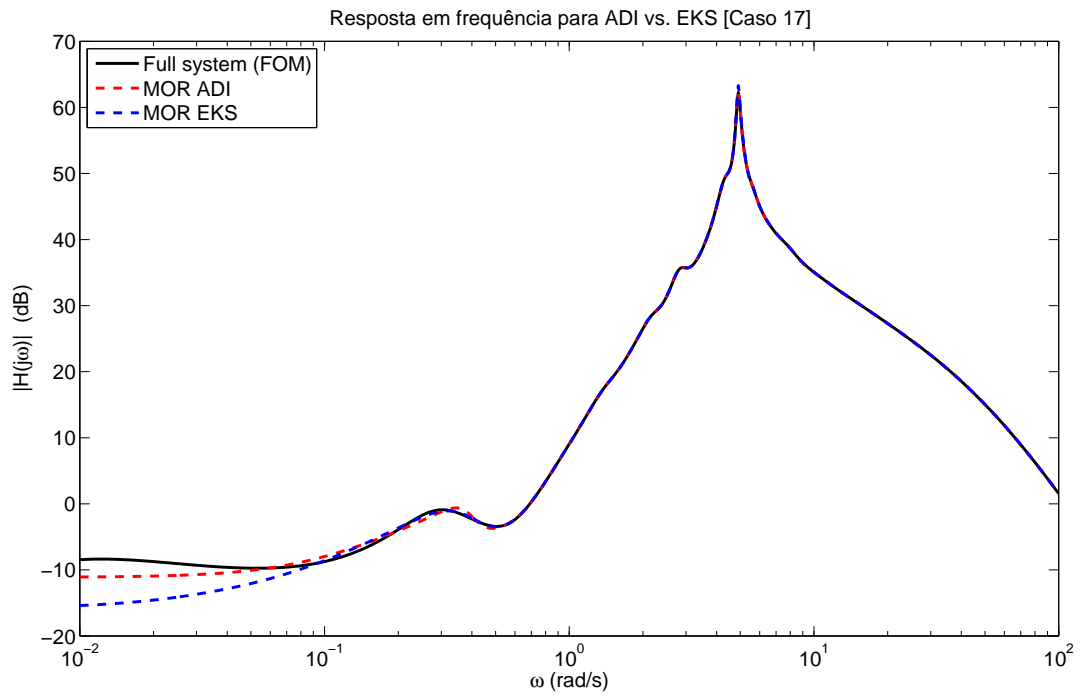


Figura 5.114: Resposta em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$

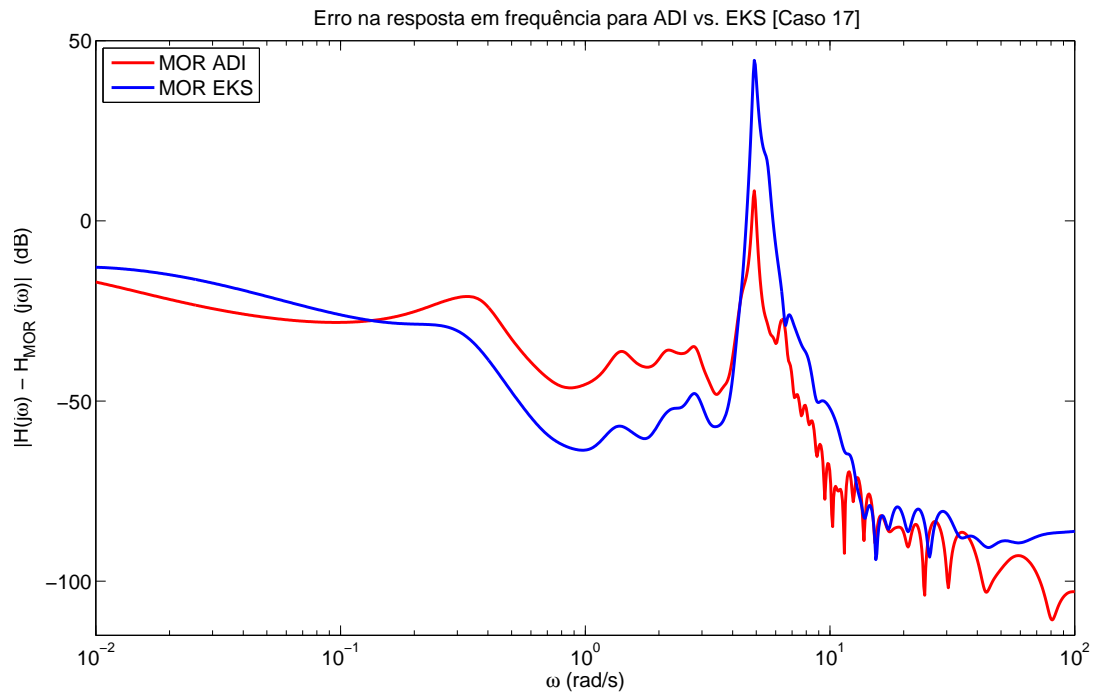


Figura 5.115: Erro em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$

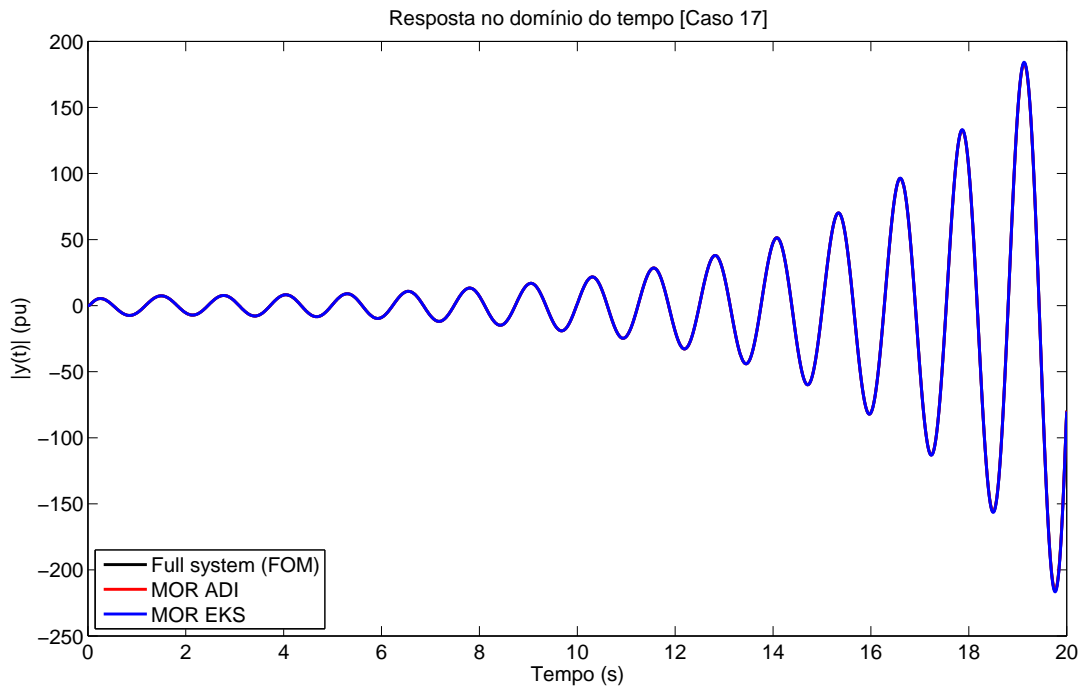


Figura 5.116: Resposta no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$

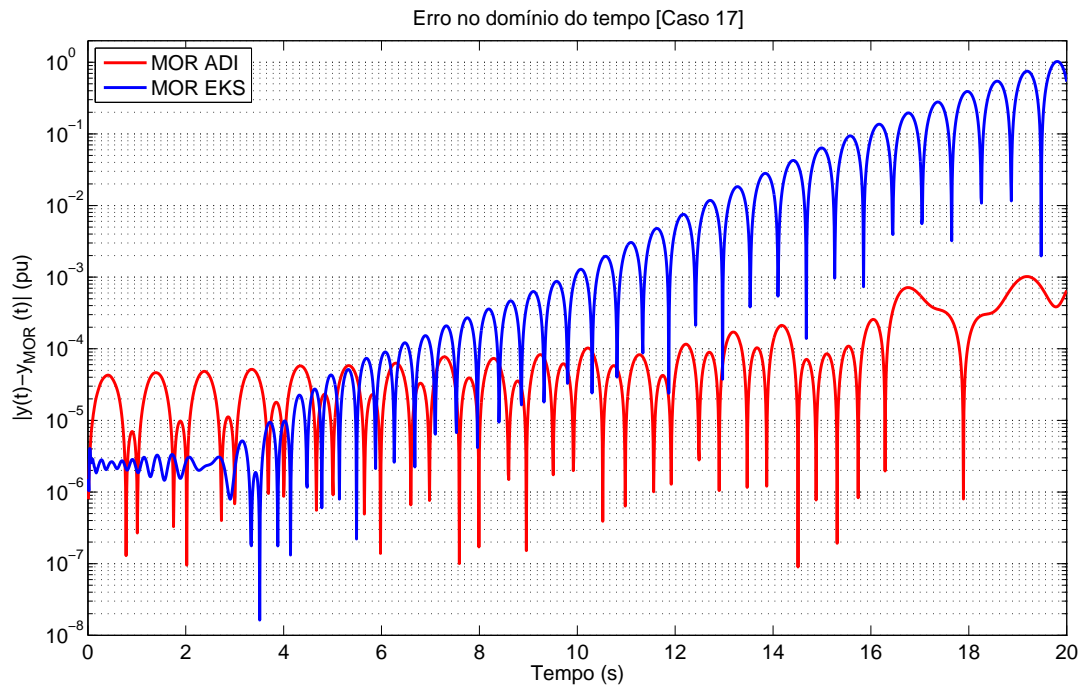


Figura 5.117: Erro no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$

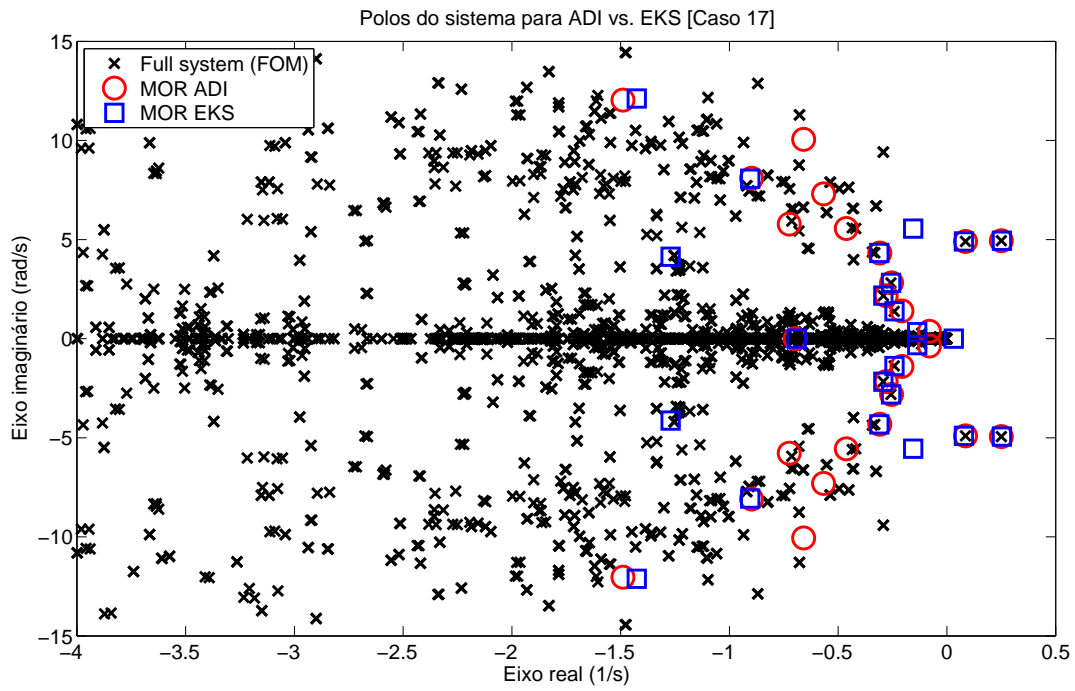


Figura 5.118: Polos do sistema com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 100$

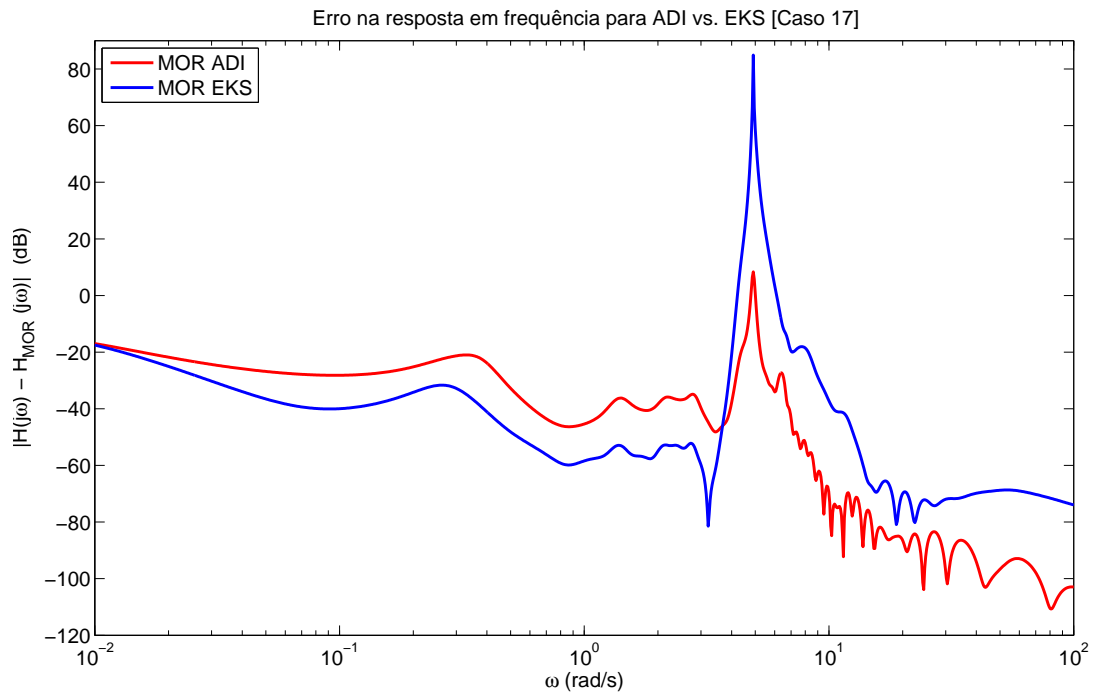


Figura 5.119: Erro em frequência com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$

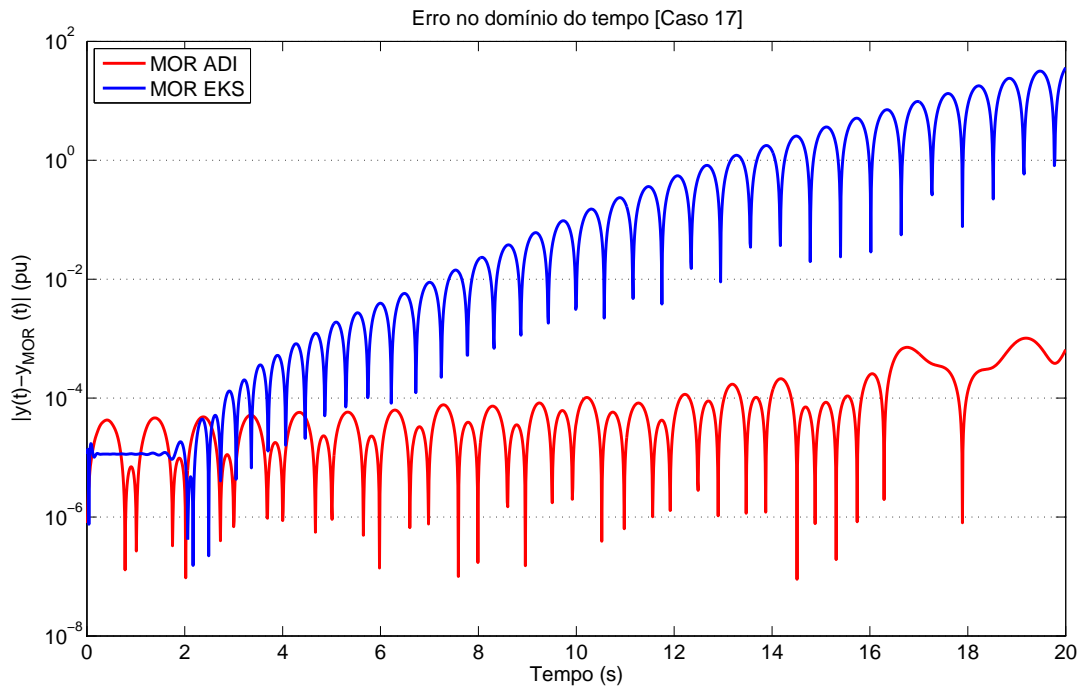


Figura 5.120: Erro no tempo com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$

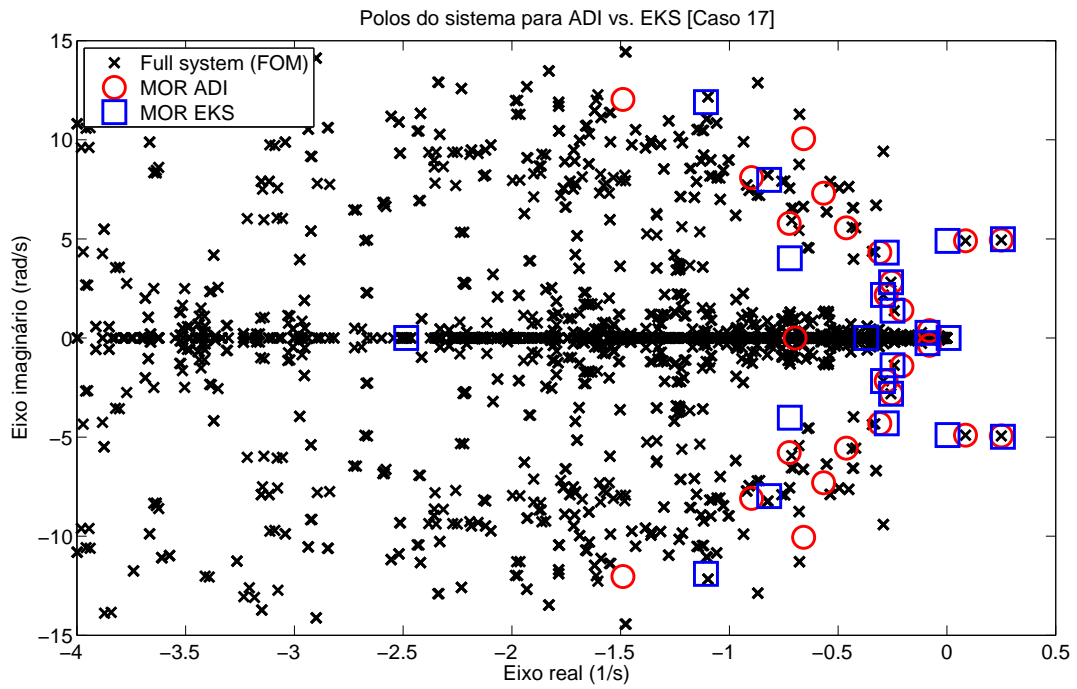


Figura 5.121: Polos do sistema com $\alpha = 0.35$ (caso 17), com $w = 80$

5.5 RELAXAÇÃO DE HIPÓTESE SOBRE O SHIFT α

Durante todas as seções anteriores deste trabalho, considerou-se a hipótese de $\alpha_{min} > \alpha_{critico}$ em que $\alpha_{critico}$ é a parte real do polo mais instável, no método EKS. Para o método ADI, sendo μ_{min} o menor parâmetro ADI em magnitude, considerou-se $(\text{Shift})_{min} = \alpha_{min} - \mu_{min} > \alpha_{critico}$, já que tanto o shift α como os parâmetros ADI efetuam deslocamentos nos polos de A .

Durante os testes computacionais, percebeu-se que o código ainda realizava a redução de ordem mesmo que a hipótese não fosse verdadeira, para valores tão baixos quanto $\alpha = 10^{-10} rad/s$, no caso EKS, e $\alpha - \mu_{min} = 10^{-10}$. Em outras palavras, verificou-se o funcionamento dos métodos EKS e ADI com matrizes de estado não negativas definidas, ou matrizes gramianas não positivas definidas. Isso contraria a teoria, como visto no capítulo 2.

Uma possível explicação para esse acontecimento pode estar relacionada à forma como as equações de Lyapunov são resolvidas numericamente. Retomando a eq. 2.34 da seção 2.5, a solução da equação de Lyapunov pode ser escrita da forma:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} Q e^{A^T \tau} d\tau. \quad (5.5)$$

Como as operações computacionais são resolvidas numericamente, esta solução pode ser escrita da seguinte forma:

$$P = \sum_{i=0}^{T_e} f_i(e^{A\tau} Q e^{A^T \tau}) \Delta\tau. \quad (5.6)$$

Em que T_e é algum tempo muito grande utilizado no processo de integração numérica, e $f_i(\cdot)$ é alguma função utilizada na integração.

Como T_e não é infinito e o passo de integração não é nulo, é possível que a integração numérica consiga processar sistemas instáveis com certa tolerância, sem que o próprio processo de integração se desestabilize. Neste caso, os modos instáveis podem ser observados ao final, nas soluções obtidas numericamente. Como o tempo T_e deve ser um número grande, ele impõe um limite inferior ao shift de frequência α , ou $(\alpha - \mu_{min})$, bem abaixo do valor crítico necessário para estabilizar o sistema, segundo a teoria. Pelo que foi visto nos testes, um valor de $10^{-10} rad/s$ está acima desse limite inferior, pois

a redução de ordem ainda funciona. Ainda assim, a redução de ordem não funciona com um valor exato $\alpha = 0$.

A figura 5.122 apresenta a evolução do IER para valores de α entre 10^{-10} e 10^{-2} . São apresentadas as curvas do método ADI, e do EKS, com $w = 80$, para o QRI a 2, QRI a 3 e o QR.

A curva do QRI a 3 apresentou os piores resultados, enquanto o QRI a 2 se aproximou mais da curva do QR, sendo que esta última tendeu a permanecer com IER constante para baixos valores de shift α . A curva do método ADI também permaneceu constante, com menor IER de todos.

Em razão da escala logarítmica utilizada, o pico visto nas figs. 5.103 a 5.105, quando α coincide com o valor do polo instável do CASO 1, não é bem visualizado por possuir base estreita, a não ser no QRI a 3, pois nele o pico possui base mais larga.

Pode-se concluir que a utilização de valores tão baixos de α pode melhorar a qualidade do MOR, caso a redução seja possível.

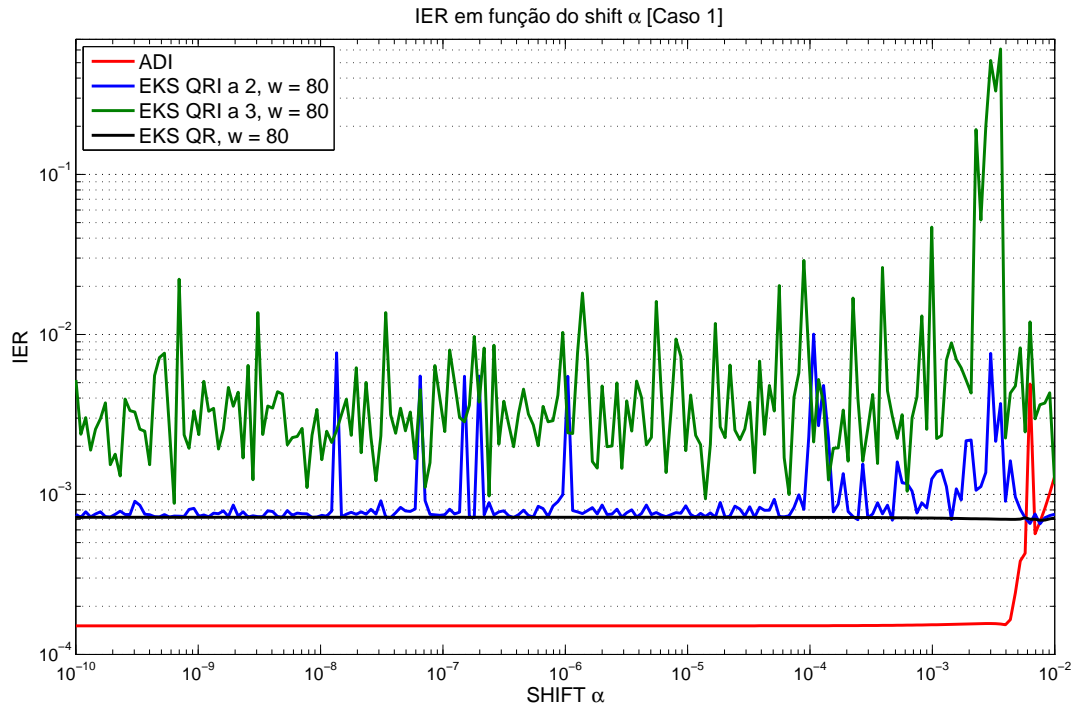


Figura 5.122: IER em função do shift α (caso 1), com $w = 80$

Utilizando-se $\alpha = 10^{-10}$ e $\mu_J = \{0, -0.7, -6, -13, -200\}$, para o método ADI, o CASO 1 é testado. As figs. 5.123 e 5.124 apresentam a resposta e o erro em frequência. Como pode ser observado, o desempenho de ambos os métodos melhorou substancialmente, especialmente na região de baixas frequências. O método ADI teve erro menor em quase todas as frequências, menos nas mais altas.

Em relação ao CASO 2, as figs. 5.125 e 5.126 apresentam os resultados de frequência, para os mesmos parâmetros utilizados no teste anterior. Na faixa de baixa frequência, ambos os métodos obtiveram melhora significativa, sem a necessidade de uma combinação híbrida com SADPA. Contudo, na região do pico de frequência mais alta, o EKS possui grande erro, enquanto o ADI permanece com erros mínimos.

O CASO 17 também é avaliado, com resultados apresentados nas figs. 5.127 e 5.128. Ambos os métodos possuem resposta em baixa frequência melhorada. Entretanto, o EKS apresentou um elevado erro na região de médias frequências e no pico de banda larga. O método ADI, por outro lado, gerou um MOR de excelente qualidade.

Aparentemente, a redução do valor de α resultou melhor para o método ADI que o método EKS.

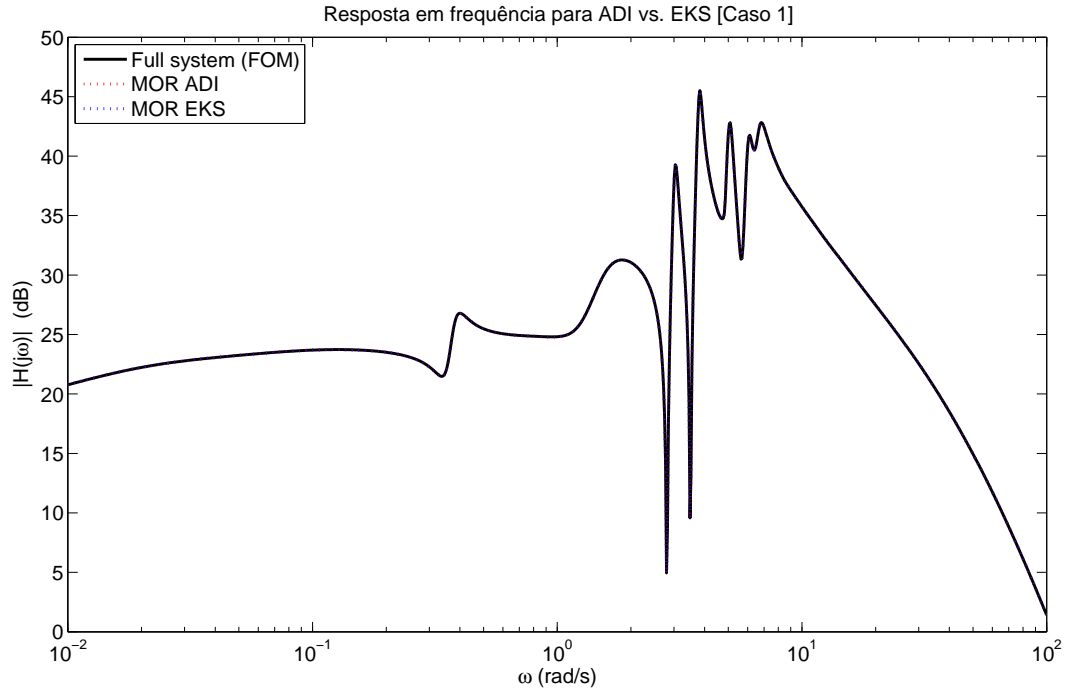


Figura 5.123: Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 1), com $w = 80$

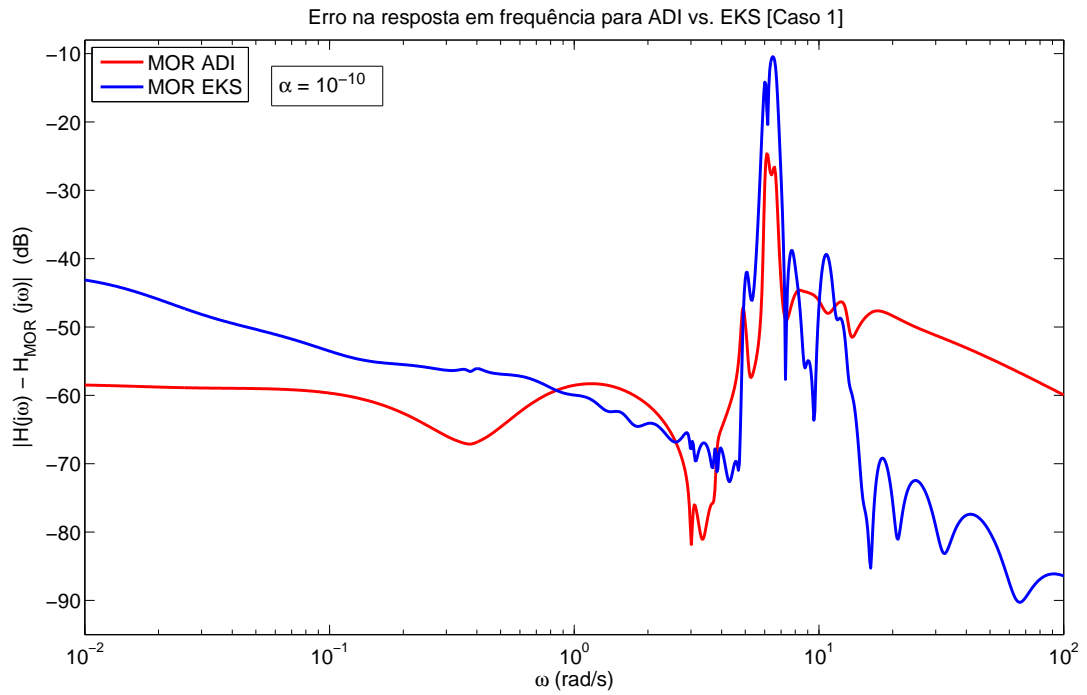


Figura 5.124: Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 1), com $w = 80$

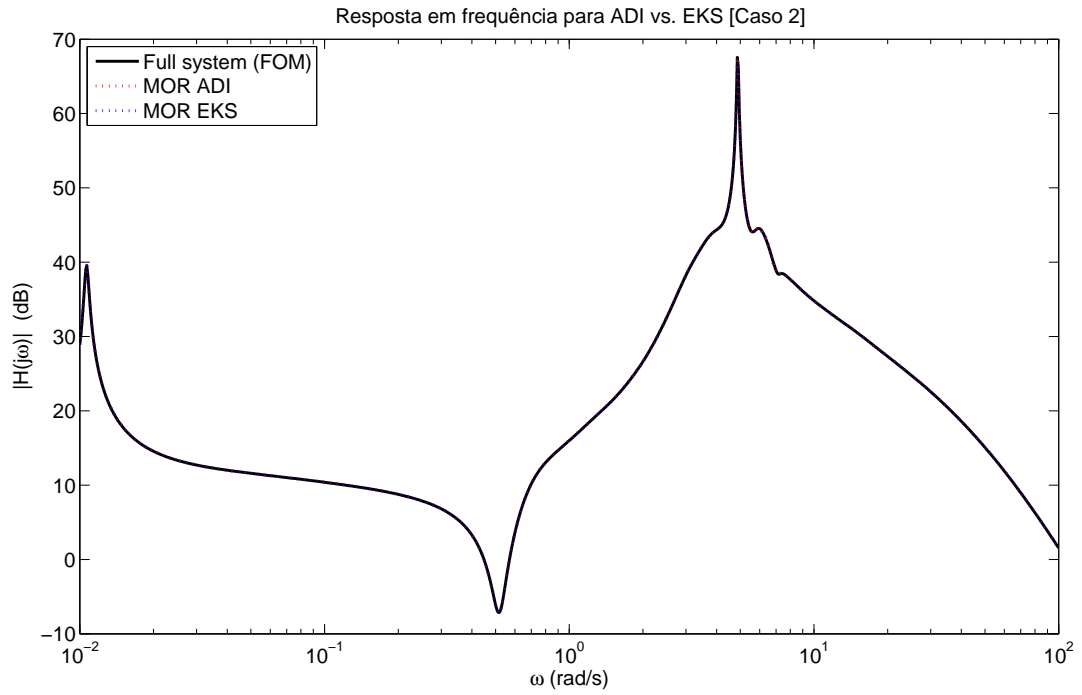


Figura 5.125: Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 2), com $w = 80$

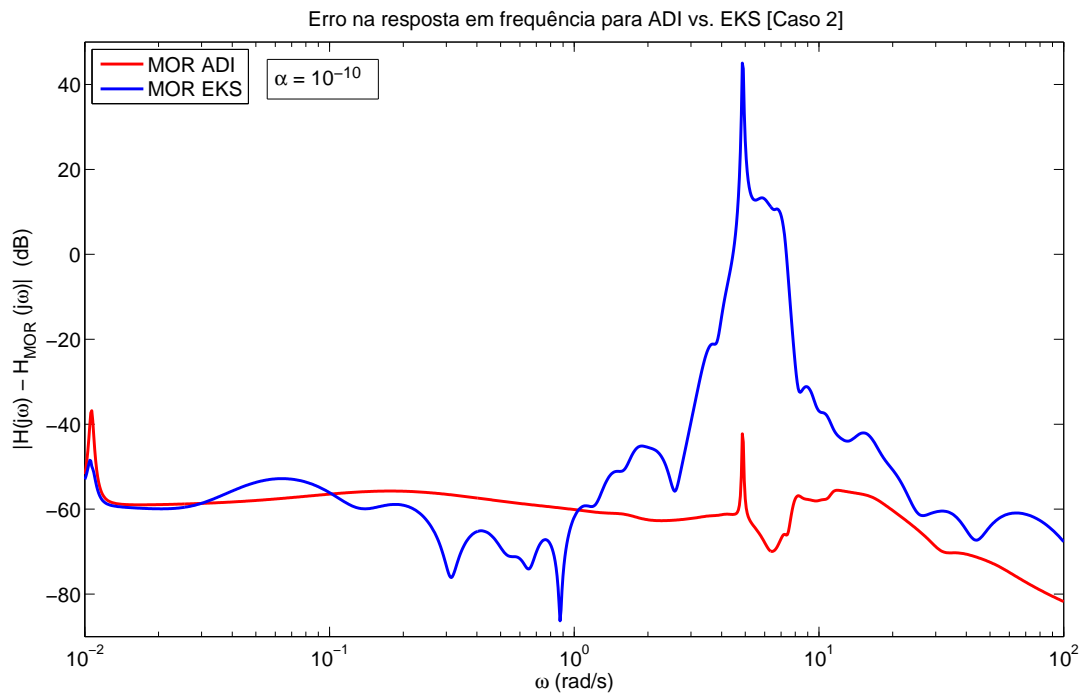


Figura 5.126: Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 2), com $w = 80$

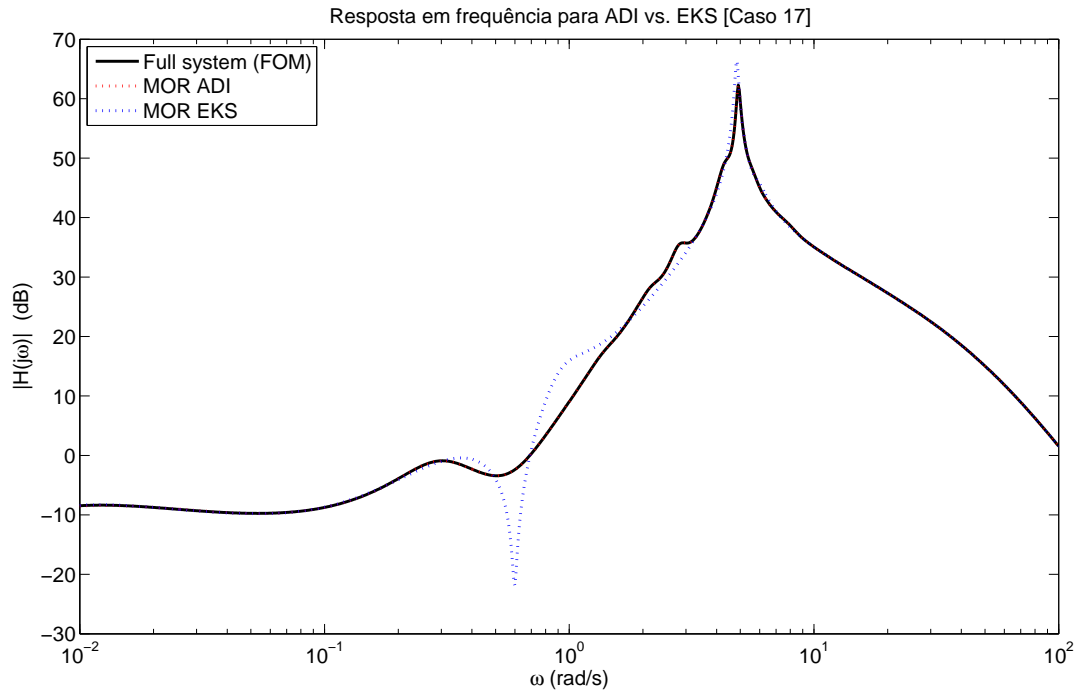


Figura 5.127: Resposta em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 17), com $w = 80$

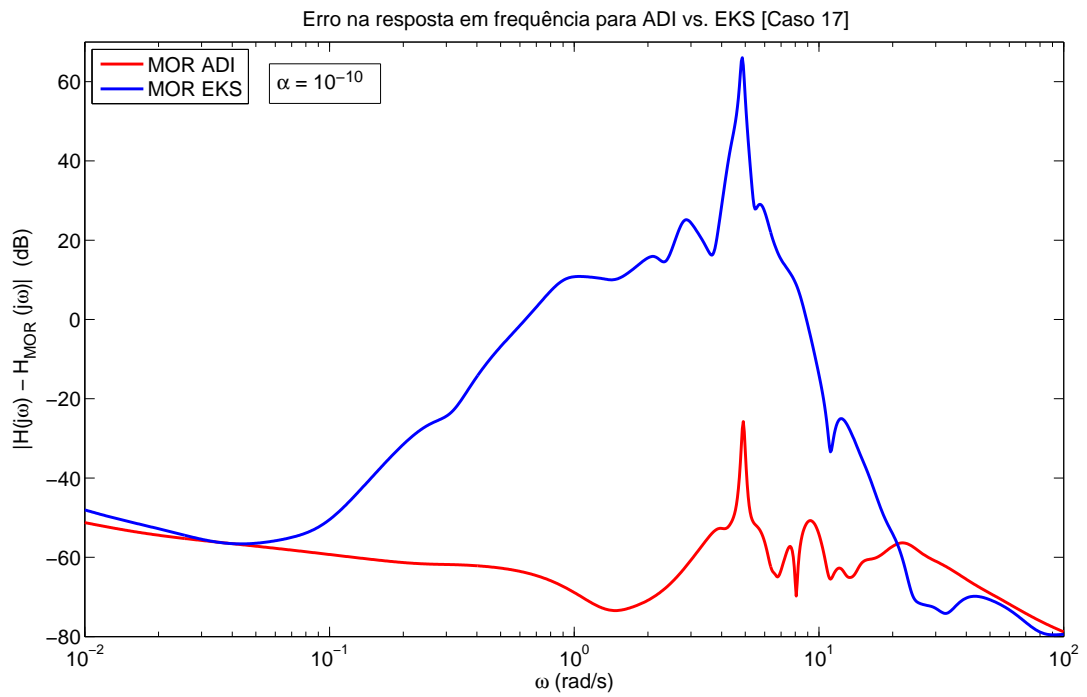


Figura 5.128: Erro em frequência com $\alpha = 10^{-10}$ (caso 17), com $w = 80$

Capítulo 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho tratou da determinação de modelos reduzidos de sistemas dinâmicos lineares. Com esta finalidade, foram investigados dois métodos, enfatizando-se o uso de técnicas baseadas em truncamento balanceado. Destacou-se neste estudo:

- O levantamento teórico dos métodos ADI e de projeção no EKS, para a redução de ordem por truncamento balanceado;
- Realização de testes buscando avaliar o desempenho de cada método para diferentes casos;
- Realização de testes comparativos entre o método ADI e o método EKS.

Nos capítulos 2 a 4 foram levantados os aspectos teóricos do assunto, conforme literatura científica e desenvolvimento próprio. O capítulo 3 apresentou metodologias encontradas na literatura e que abordam a determinação de modelos reduzidos baseados no cálculo de gramianas de baixo rank. A ênfase é voltada para métodos que usam fatores ADI. O capítulo 4 aborda o método EKS e algumas de suas variantes. Foram propostas metodologias de como tratar a ortogonalização, processo que demanda relativamente elevado tempo computacional para o método EKS. Foram propostas a técnica de ortonormalização QRI e formas de decomposição de SVD para cálculo dos valores de Hankel. Estes últimos necessários para se determinar a ordem do modelo reduzido. No capítulo 5, foram apresentados diversos testes baseados em sistemas testes obtidos para análise de modelos a pequenas perturbações em sistemas de potências. Diversos estudos foram apresentados para avaliação do desempenho das técnicas investigadas. Uma grande quantidade de testes contemplou estudos de sensibilidade de parâmetros que afetam a precisão dos modelos e eficácia dos métodos para obtê-los. Os testes evidenciaram a eficácia das duas técnicas para a obtenção de modelos reduzidos.

Em termos específicos dos resultados dos testes, verificou-se:

- As vantagens da realização de operações na forma implícita, que exigem menor esforço computacional;
- A maior velocidade da variante B em relação às demais, sem comprometer o seu erro associado;
- A sensibilidade da qualidade do MOR em função dos parâmetros do método EKS: shift α , o n° de vetores de Krylov e ordem k do MOR;
- O efeito de diferentes ortonormalizações sobre o resultado, com destaque para o QRI a 2 pelos resultados mais rápidos e sem comprometer o erro associado;
- O efeito da forma como é realizado o SVD, e o tempo de processamento economizado com as formas alternativas apresentadas;
- A possibilidade de utilizar uma combinação híbrida com o aplicativo SADPA que pode melhorar a qualidade do MOR a baixas frequências;
- As vantagens da utilização do subespaço estendido de Krylov em relação ao subespaço tradicional e inverso, como uma combinação das vantagens de cada um;
- A possibilidade de obter bons resultados no método ADI com o ajuste manual dos parâmetros ADI;
- A sensibilidade da qualidade do MOR em função dos parâmetros ADI;
- A possibilidade de realizar a redução de ordem pelo método EKS de forma mais rápida que o método ADI, porém com qualidade inferior;
- A superioridade do método ADI quanto à qualidade do MOR;
- A possibilidade de relaxação de hipótese quanto ao shift α com intuito de melhorar a qualidade em ambos os métodos, especialmente o ADI.

6.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Como sugestões de trabalhos que podem ser desenvolvidos no futuro, são sugeridas as seguintes opções:

- Aplicação dos modelos de ordem reduzida no projeto de controladores, como o PSS [6, 31];
- Aplicação dos métodos ADI e EKS na resolução de equações algébricas de Riccati [21, 45];
- Avaliação da possibilidade de adaptar os mesmos métodos para o uso em sistemas variantes no tempo [46];
- Estudo dos efeitos dos métodos de projeção envolvendo outros subespaços de Krylov, como o subespaço racional [47–49].

Referências Bibliográficas

- [1] P. Kundur. “*Power system control and stability*”. McGraw-Hill, New York, 1994.
- [2] J. J. Grainger & W. D. Stevenson. “*Power system analysis*”. McGraw-Hill, 1994.
- [3] F. D. Freitas & J. Rommes & N. Martins. “Gramian-based reduction method applied to large sparse power system descriptor models”. *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 23(3):1258–1270, 2008.
- [4] N. Martins & L. T. G. Lima & H.J.C.P. Pinto. “Computing dominant poles of power system transfer functions”. *IEEE Trans. on Power Systems*, 11(1):162–170, 1996.
- [5] N. Martins. “Efficient eigenvalue and frequency response methods applied to power system small-signal stability studies”. *IEEE Trans. on Power Systems*, 1(1):217–224, 1986.
- [6] N. Martins & F. G. Silva & P. C. Pellanda & A. de Castro & P. E. M. Quintão. “Utilizing transfer function modal equivalents of low-order for the design of power oscillation damping controllers in large power systems”. In *IEEE/PES General Meeting*, pages 2642–2648, 2005.
- [7] S. L. Varricchio & F. D. Freitas & N. Martins. “Hybrid modal-balanced truncation method based on power system transfer function energy concepts”. *Generation, Transmission & Distribution, IET*, 9(11):1186–1194, 2015.
- [8] G. Troullinos & J. Dorsey & H. Wong & J. Myers. “Reducing the order of very large power system models”. *IEEE Trans. on power systems*, 3(1):127–133, 1988.
- [9] J. Rommes & N. Martins. “Efficient computation of transfer function dominant poles using subspace acceleration”. *IEEE Trans. on Power Systems*, 21(3):1218, 2006.
- [10] T. Penzl. “A cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4):1401–1418, 1999.

- [11] T. Penzl. “*LYAPACK a MATLAB Toolbox for Large Lyapunov and Riccati Equations, Model Reduction Problems, and Linear–Quadratic Optimal Control Problems Users*” Guide (Version 1.0)”. Citeseer, 1999.
- [12] P. Benner. “Numerical linear algebra for model reduction in control and simulation”. *GAMM-Mitteilungen*, 29(2):275–296, 2006.
- [13] D. Chaniotis & M. Pai. “Model reduction in power systems using Krylov subspace methods”. *IEEE Trans. on Power Systems*, 20(2):888–894, 2005.
- [14] V. Simoncini. “A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(3):1268–1288, 2007.
- [15] L. Knizhnerman & V. Simoncini. “Convergence analysis of the extended Krylov subspace method for the Lyapunov equation”. *Numerische Mathematik*, 118(3):567–586, 2011.
- [16] T. Stykel & V. Simoncini. “Krylov subspace methods for projected Lyapunov equations”. *Applied Numerical Mathematics*, 62(1):35–50, 2012.
- [17] Z. Zhu & G. Geng & Q. Jiang. “Power system dynamic model reduction based on extended Krylov subspace method”. *IEEE Trans. on Power Systems*, 2016.
- [18] E. L. Wachspress. “Iterative solution of the Lyapunov matrix equation”. *Applied Mathematics Letters*, 1(1):87–90, 1988.
- [19] J-R. Li & J. White. “Low rank solution of Lyapunov equations”. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24(1):260–280, 2002.
- [20] J-R. Li. “*Model reduction of large linear systems via low rank system gramians*”. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [21] F. D. Freitas & J. Rommes & N. Martins. “Low-rank gramian applications in dynamics and control”. In *Communications, Computing and Control Applications (CCCA), 2011 International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2011.
- [22] R. H. Bartels & G. W. Stewart. “Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]”. *Communications of the ACM*, 15(9):820–826, 1972.
- [23] Z. Gajic & M. T. J. Qureshi. “*Lyapunov matrix equation in system stability and control*”. Courier Corporation, 2008.

- [24] T. A. Davis & E. P. Natarajan. “Algorithm 907: Klu, a direct sparse solver for circuit simulation problems”. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 37(3):36, 2010.
- [25] Y. Saad. “*Numerical methods for large eigenvalue problems*”, volume 158. SIAM, 1992.
- [26] Y. Saad. “*Iterative methods for sparse linear systems*”. Siam, 2003.
- [27] R. L. Burden e D. C. Faires. “*Análise numérica*”. Cengage Learning, 8a edição, 2008.
- [28] M. W. Spong & S. Hutchinson & M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2006.
- [29] Matlab, software. MathWorks.
- [30] T. L. Pena e J. R. J. Müller. “*Ferramenta computacional para análise de estabilidade a pequenos sinais de sistemas elétricos de potência*”. Monografia de Graduação. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, 2011.
- [31] F. D. Freitas & A. S. Costa. “Computationally efficient optimal control methods applied to power systems”. *IEEE Trans. on power systems*, 14(3):1036–1045, 1999.
- [32] S. Gomes Jr. & T. S. Amaral & F. L. Lírío. “User’s manual: PacDyn version 9.4”, 2012.
- [33] V. Simoncini. “Extended Krylov subspace for parameter dependent systems”. *Applied numerical mathematics*, 60(5):550–560, 2010.
- [34] D. W. Peaceman & H. H. Rachford Jr. “The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations”. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*, 3(1):28–41, 1955.
- [35] A. Cayley. “Sur quelques propriétés des déterminants gauches.”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 32:119–123, 1846.
- [36] N. S. Ellner & E. L. Wachspress. “Alternating direction implicit iteration for systems with complex spectra”. *SIAM journal on numerical analysis*, 28(3):859–870, 1991.
- [37] M-P. Istace & J-P. Thiran. “On the third and fourth Zolotarev problems in the complex plane”. *SIAM journal on numerical analysis*, 32(1):249–259, 1995.

- [38] G. Starke. “Optimal alternating direction implicit parameters for nonsymmetric systems of linear equations”. *SIAM journal on numerical analysis*, 28(5):1431–1445, 1991.
- [39] G. Starke. “Fejér-Walsh points for rational functions and their use in the ADI iterative method”. *Journal of computational and applied mathematics*, 46(1-2):129–141, 1993.
- [40] E. L. Wachspress. “Optimum alternating-direction-implicit iteration parameters for a model problem”. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(2):339–350, 1962.
- [41] E. L. Wachspress. “*The ADI model problem*”. Springer, 2013.
- [42] E. L. Wachspress. “The ADI minimax problem for complex spectra”. *Applied Mathematics Letters*, 1(3):311–314, 1988.
- [43] W. E. Arnoldi. “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem”. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(1):17–29, 1951.
- [44] A. N. Krylov. “On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined”. *Izvestija AN SSSR (News of Academy of Sciences of the USSR), Otdel. mat. i estest. nauk*, 7(4):491–539, 1931.
- [45] A. S. Hodel & K. R. Poolla. “Heuristic approaches to the solution of very large sparse Lyapunov and algebraic Riccati equations”. In *Decision and Control, 1988., Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, pages 2217–2222. IEEE, 1988.
- [46] H. Sandberg & A. Rantzer. “Balanced truncation of linear time-varying systems”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(2):217–229, 2004.
- [47] V. Druskin & V. Simoncini. “Adaptive rational Krylov subspaces for large-scale dynamical systems”. *Systems & Control Letters*, 60(8):546–560, 2011.
- [48] V. Druskin & L. Knizhnerman & V. Simoncini. “Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation”. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(5):1875–1898, 2011.
- [49] V. Druskin & L. Knizhnerman & M. Zaslavsky. “Solution of large scale evolutionary problems using rational Krylov subspaces with optimized shifts”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(5):3760–3780, 2009.