

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO
DE TRAJETÓRIA PARA RISERS MARINHOS VERTICAIS**

Fabício Rodrigues Monteiro



**ENGENHARIA
MECATRÔNICA**
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Brasília, julho de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO
DE TRAJETÓRIA PARA RISERS MARINHOS VERTICAIS**

Fabício Rodrigues Monteiro

*Relatório submetido
como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro de Controle e Automação*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB
Orientador

Eng. José Oniram de A. L. Filho, ENM/UnB
Co-orientador

Prof. Dr. Guilherme C. de Carvalho, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Eduardo S. Tognetti, ENE/UnB
Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

FABRÍCIO RODRIGUES, MONTEIRO

CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA RISERS MARINHOS VERTICAIS

[Distrito Federal] 2014.

xi, aindansei, 210 x 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2014).

Trabalho de Graduação - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1. Sistemas de Parâmetros Distribuídos

2. Riser Flexível

3. Controle de Trajetória

4. Redução de Ordem de Modelo

I. Mecatrônica/FT/UnB

II. Controle por Planejamento e

Rastreamento de Trajetória

para Risers Marinhos Verticais

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MONTEIRO, F. R. (2014). CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA RISERS MARINHOS VERTICAIS, Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-nº 06/2014, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, aindansei

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Fabrício Rodrigues Monteiro

TÍTULO: CONTROLE POR PLANEJAMENTO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA RISERS MARINHOS VERTICAIS.

GRAU: Engenheiro ANO: 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Fabrício Rodrigues Monteiro

SQN 305 Bloco C Apto 103

Asa Norte

CEP 70737-030 Brasília - DF - Brasil

Dedicatória

Aos meus pais, Jezanias e Arlete, que com amor incondicional me criaram e me apoiaram até hoje.

Fabício Rodrigues Monteiro

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pelo conforto e inspiração, por ser o alicerce da minha família nuclear.

Agradeço aos meus pais, os melhores do mundo, cujo amor os torna pessoas mais nobres, acima do que se esperar do ser humano. Nas mais diversas situações, sempre pensaram em mim e nos meus sonhos. Agradeço ao carinho da minha mãe, sem o qual a vida seria mais escura e pessimista. Não tem preço chegar em casa depois de longos meses na selva que é a UnB e Brasília e receber um pouco (ou muito) de mim. Agradeço ao exemplo do meu pai, meu modelo de homem e pai de família. Hoje posso falar isso com a consciência de um adulto que já conheceu um pouco da vida e vários tipos de pessoas.

Agradeço ao Toninho (meu pai de Brasília) e sua família. O suporte que me deram é indescritível. Trataram-me em casa como filho e sempre estiveram com braços abertos pra me receber, mesmo quando havia complicações.

Agradeço aos meus orientadores durante o curso. Ao prof. Li, por toda a fé depositada no meu potencial, nas primeiras etapas do curso. Ao prof. Eugênio, pela orientação durante o último ano para esse trabalho e pelas conversas sobre assuntos da vida. Obrigado por me inspirar a escrever minha própria história, nos campos profissional e pessoal. Agradeço ao Eng. José, pela coorientação nesse trabalho e por incentivar um padrão de qualidade e responsabilidade. O seu profissionalismo e competência me servem de exemplo.

Agradeço ao tio Luis e sua família, por me receber na chegada em Brasília e dar suporte à minha família em várias ocasiões.

Agradeço aos amigos de São Luís, sejam os do bairro, dos tempos de colégio ou da IBEV, que me receberam bem a cada retorno à Ilha. É muito bom poder me sentir em casa mesmo com tantos meses de conversa pra colocar em dia.

Agradeço ao bonde do Apt.103 (Carlos, Gustavo, Arthur e Paulo). Dizem que um dia sem rir é um dia perdido. Garanto que vocês salvaram pelo menos um mês da minha vida, nesse semestre de sufoco. Nossa convivência nos tornou irmãos, e manter essas laços, apesar da distância, só depende de nós.

Agradeço ao povo do Oriente-se, pela amizade e tantos momentos pra se guardar pro resto da vida.

Agradeço a Ivaldo, Lais e Augusto. Mesmo com a distância, são três dos melhores amigos que tenho e já tive. Pessoas inspiradoras.

Agradeço a todos os amigos que fiz em Ilmenau, em particular, Igor, Matheus, Rafael e Eduardo. Nossas lembranças compartilhadas são um lembrete instantâneo de que a vida é bela, e vale muito (mas muito) a pena.

Agradeço aos amigos da Integrar, por tanto aprendizado nesse último ano. Obrigado por me mostrarem como impactar uma universidade e deixar um legado para a mesma só depende de nós mesmos.

Agradeço aos amigos de curso que fiz, em particular, Alex, Jefferson, George, Matheus, Negrelli, Guilherme, Luiz e Aninha. Nossa parceria está escrita nos vários apuros e alegrias que passamos juntos.

Agradeço ao pessoal do Cocobo, pelos risos e distração entre aulas, provas e relatórios.

Por fim, agradeço à minha namorada Amalia, sem a qual eu perderia a batalha contra a comodidade e a desmotivação, que a tantos abate na engenharia. A sua existência prova que a felicidade é possível.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de sistemas de controle para o posicionamento de estruturas *subsea* tubulares, chamadas de risers. Esse tipo de operação consiste em conectar o fundo do riser à cabeça de poço, através da movimentação do topo da estrutura, que está ligado a uma plataforma *offshore*. Risers são sistemas de parâmetros distribuídos e, dessa forma, são modelados por equações diferenciais parciais. A estratégia desenvolvida para o planejamento de trajetória utiliza uma decomposição modal e redução de ordem do sistema, assim como sua propriedade de planicidade. Para a convergência do erro de trajetória através de realimentação dinâmica, dois métodos diferentes foram utilizados: o primeiro se baseia na teoria de estabilidade de Lyapunov e o segundo, em uma sequência da análise da propriedade de planicidade. Simulações numéricas são apresentadas para validação dos controladores propostos e análise do desempenho dos mesmos quando perturbações externas estão presentes.

Palavras-chave: Sistemas de Parâmetros Distribuídos, Riser Flexível, Controle de Trajetória, Redução de Ordem de Modelo.

ABSTRACT

This work describes the development of control systems to the positioning of subsea tubular structures, named risers. This kind of operation consists in connecting the bottom end of the riser to the wellhead, by moving the top end of the structure, which is linked to an offshore platform. Risers are distributed parameter systems and therefore are modelled by partial differential equations. The developed strategy for trajectory planning uses modal decomposition and modal order reduction of the system, as well as the system's flatness property. For the trajectory error convergence through dynamic feedback, two different methods are used: the first is based on Lyapunov's stability theory and the second, on the further analysis of the flatness property. Numerical simulations are presented to validate the proposed controllers and for the analysis of their performance when external perturbations are present.

Keywords: Distributed Parameter Systems, Flexible Riser, Trajectory Control, Model Order Reduction.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2	OBJETIVOS DO PROJETO	2
1.3	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1	INTRODUÇÃO	3
2.2	RISERS MARINHOS	3
2.3	SISTEMAS DE PARÂMETROS DISTRIBUIDOS	4
2.4	DIFERENÇAS FINITAS	5
2.5	MODELAGEM DO RISER VERTICAL	6
2.5.1	FORÇAS HIDRODINÂMICAS	7
2.5.2	REENTRADA COM CARGAS	9
2.5.3	REENTRADA LIVRE	9
2.6	CONTROLE DE TRAJETÓRIA	10
2.7	FILTRO DE KALMAN	11
2.7.1	DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	11
2.7.2	DESCRIÇÃO DO FILTRO	12
2.8	PREDITOR DE SMITH	14
3	DESENVOLVIMENTO	15
3.1	INTRODUÇÃO	15
3.2	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO	15
3.2.1	REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	16
3.3	PROJETO POR LYAPUNOV	18
3.3.1	RISER CARREGADO	18
3.3.2	RISER LIVRE	20
3.4	DECOMPOSIÇÃO E REDUÇÃO MODAL	20
3.4.1	FORMA MODAL	20
3.4.2	MODELO REDUZIDO SIMPLES	22
3.4.3	MODELO REDUZIDO COM ATRASO NA ENTRADA	24
3.4.4	APLICAÇÃO NO CONTROLE	26
3.5	PROJETO DE CONTROLADOR BASEADO EM FLATNESS	26

3.5.1	INTRODUÇÃO	26
3.5.2	CÁLCULO DA SAÍDA PLANA	26
3.5.3	CÁLCULO DAS DERIVADAS DA SAÍDA PLANA.....	27
3.5.4	PARAMETRIZAÇÃO DA ENTRADA E DOS ESTADOS DO SISTEMA.....	28
3.5.5	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	29
3.5.6	RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA.....	29
3.6	ESTIMADOR DE ESTADOS	31
3.7	IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE PREDITIVO.....	33
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	35
4.1	INTRODUÇÃO	35
4.2	RESPOSTA A UMA ENTRADA RAMPA	35
4.3	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	38
4.3.1	RISER CARREGADO	38
4.3.2	RISER LIVRE.....	38
4.4	RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA.....	41
4.4.1	PERFORMANCE DO PREDITOR	41
4.4.2	CORRENTES MARÍTIMAS	43
4.4.3	ONDAS	45
4.5	RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA POR LYAPUNOV	47
5	CONCLUSÕES	50
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diferentes configurações de uso de risers [1].	4
2.2	Plataforma em operação de reentrada	7
2.3	Projeto simplificado de controle de trajetória	11
2.4	Preditor de Smith	14
3.1	Resposta ao degrau do sistema original e reduções (riser carregado)	23
3.2	Resposta ao degrau do sistema reduzido simples e reduzido com atraso	25
3.3	Trajcetórias de referência $u^*(t)$ para diferentes tempos de subida	30
3.4	Esboço do rastreamento de trajetória com controlador flatness	31
3.5	Rastreamento de trajetória com controle preditivo	33
4.1	Comparação entre modelos (riser carregado)	36
4.2	Comparação entre modelos (riser livre)	37
4.3	Resposta à trajetória planejada (riser carregado)	39
4.4	Resposta à trajetória planejada (riser livre)	40
4.5	Resposta do sistema controlado a uma perturbação transiente no topo	41
4.6	Resposta do sistema controlado a uma perturbação constante no topo	42
4.7	Resposta do sistema controlado a perturbações de correntes marítimas	44
4.8	Resposta do sistema controlado à perturbação $P(t)$	46
4.9	Resposta do sistema controlado (preto) a uma perturbação impulso (vermelho)	48
4.10	Resposta do sistema controlado pela equação 4.4 diante de correntes marítimas (como em 4.4.2) (riser carregado)	49

LISTA DE TABELAS

4.1	Lista de parâmetros do modelo do riser simulado	36
-----	---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Área da seção transversal	[m ²]
d_e	Diâmetro externo	[m]
d_i	Diâmetro interno	[m]
D_{RED}	Matriz de transferência direta do sistema reduzido simples	
D_D	Matriz de transferência direta do sistema reduzido com atraso	
E	Módulo de Young	[Pa]
F_L	Tração horizontal exercida sobre a carga	[N]
F_n	Resultante das forças externas	[N]
g	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
g'	Aceleração da gravidade aparente	[m/s ²]
J	Segundo momento de área	[m ⁴]
l	Distância entre dois elementos de discretização	[m]
L	Comprimento do riser	[m]
m	Densidade linear equivalente	[kg/m]
m_s	Densidade linear de massa	[kg/m]
m_f	Massa de fluido adicional	[kg/m]
T	Tração	[N]
T_0	Tração média	[N]

Símbolos Gregos

τ	Coefficiente de amortecimento	[s ⁻¹]
μ	Constante de arrasto	[kg/m ²]
ρ	Densidade da água	[m ³ /kg]
Υ	Deslocamento horizontal	[m]

Grupos Adimensionais

C_d	Coefficiente de arrasto
C_m	Coefficiente de massa adicionada
N	Número de elementos de discretização
O	Ordem de grandeza

Subscritos

L	Referente à carga
-----	-------------------

Sobrescritos

\cdot	Primeira derivada temporal
$\ddot{}$	Segunda derivada temporal
\cdots	Terceira derivada temporal
(4)	Quarta derivada temporal
(n)	N-ésima derivada temporal

Siglas

DNV	Det Norske Veritas
FPSO	Floating Production Storage and Offloading Unit
MODU	Mobile Offshore Drilling Unit
ODE	Ordinary Differential Equation
PDE	Partial Differential Equation
DDE	Delay Differential Equation
ROV	Remotely Operated Underwater Vehicle
DP	Dynamic Positioning

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e definição do problema

A exploração de petróleo em altas profundidades é uma realidade cada vez mais comum, diante da escassez de poços em terra firme e próximos do litoral. Vários desafios tecnológicos surgem das condições muito adversas enfrentadas em alto mar, como a construção e movimentação da plataforma ao local do poço, além da perfuração dos mesmos e a conexão do leito do mar à plataforma em profundidades que chegam a 2000 metros.

Para muitas dessas atividades, o riser tem um papel central como meio de transporte de fluidos (lama de perfuração, hidrocarbonetos) e até de energia elétrica e informações (risers umbilicais) entre os diversos equipamentos na superfície e no leito do mar. Uma operação essencial é a reentrada dos risers, que consiste na conexão dos mesmos à cabeça de poço no leito do mar. Tradicionalmente esta operação é feita mantendo-se a plataforma estática na superfície do mar acima da localidade do poço, através de um sistema de Posicionamento Dinâmico (DP, do inglês *Dynamic Positioning*)[2]. Enquanto isso, a conexão do fundo do riser à cabeça de poço é majoritariamente manual, feita por um ROV (do inglês *Remotely Operated underwater Vehicle*) provido de câmeras, braços robóticos, e um operador extremamente qualificado. O tempo necessário para tal operação representa um custo por atividade não-produtiva.

Portanto, a automatização dessa operação de conexão é um problema de muito interesse na indústria devido aos ganhos em tempo produtivo, precisão da operação e possibilidade de execução mesmo em condições climáticas desfavoráveis. Tal sistema exige uma forma de alterar dinamicamente a posição do topo do riser. Em Yamamoto [3], é proposto o uso do próprio sistema de Posicionamento Dinâmico da plataforma para tal.

Uma etapa central para a automatização da reentrada consiste no desenvolvimento de um algoritmo de controle para que o fundo do riser execute uma trajetória, com parâmetros ajustáveis pelo usuário, com o objetivo de concluir a reentrada o mais rápido possível. Tal algoritmo planeja, anteriormente à operação, uma trajetória para o fundo do riser e através de um controlador em malha fechada, busca garantir que a trajetória seja seguida, na presença de perturbações externas.

1.2 Objetivos do projeto

O objetivo principal do trabalho foi o desenvolvimento de um sistema de controle em malha fechada para o riser vertical em operações de reentrada. O planejamento e o rastreamento de trajetória são parte do problema, já que a suavidade da reentrada é essencial para minimizar oscilações no sistema.

Para alcançar o objetivo proposto, foi necessário discretizar o sistema do riser e implementá-lo através do *software MATLAB*[®] para simulações. Para o planejamento de trajetória, uma redução de ordem para o modelo discreto seguida do projeto da trajetória de entrada pela abordagem *flatness* foi utilizada. O rastreamento foi alcançado pelo desenvolvimento de duas leis de controle diferentes, para comparação. A primeira se baseia na convergência da saída plana para a sua trajetória planejada. A segunda se baseia na teoria de Lyapunov.

1.3 Apresentação do manuscrito

No capítulo 2, tem-se o desenvolvimento do modelo do riser, uma breve explanação sobre o problema de controle de trajetória de sistemas, uma descrição do estimador de estados e do controle preditivo implementados no trabalho.

No capítulo 3, mostra-se a metodologia para discretização e simulação do sistema distribuído, o desenvolvimento de leis de controle para planejamento e rastreamento de trajetória, estimação e previsão de estados.

No capítulo 4, os resultados das simulações implementadas em *MATLAB*[®] com uso da ferramenta *Simulink* são mostradas, a fim de validar e analisar o desempenho do controlador perante o problema definido anteriormente. As conclusões pertinentes ao trabalho são apresentadas no capítulo 5.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Neste Capítulo são descritos conceitos e métodos essenciais para o desenvolvimento das estratégias de controle propostas neste trabalho. A Seção 2.2 introduz o papel do riser na exploração *offshore*. A Seção 2.3 conceitua sistemas de parâmetros distribuídos, uma classe de sistemas na qual o riser se enquadra. A Seção 2.4 desenvolve uma aproximação para derivadas chamada diferença finita, utilizada para discretizar sistemas de parâmetros distribuídos. A Seção 2.5 apresenta a modelagem do riser na presença e ausência de uma carga durante a operação de reentrada. A Seção 2.6 conceitua brevemente o controle de trajetória em contraste com a estabilização estática de sistemas. A Seção 2.7 descreve o estimador de estados conhecido como filtro de Kalman. A Seção 2.8 descreve uma estrutura de controle conhecida como Preditor de Smith, usada para melhorar o desempenho de sistemas com atraso inerente.

2.2 Risers marinhos

Na exploração offshore, tubulações e cabos que conectam a cabeça do poço à plataforma são genericamente chamados de risers, do inglês *to rise* (subir, levantar). Essas estruturas podem ser rígidas e estacionárias, ou flexíveis. Em águas profundas, o uso de riser rígidos torna-se problemático, pois a estrutura se torna mais sujeita ao rompimento em condições do mar adversas assim como mais difícil de ser conectada ao leito oceânico. É também muito comum o uso de plataformas flutuantes e móveis, como FPSOs (do inglês *Floating Production Storage and Offloading Unit*) e MODUs (do inglês *Mobile Offshore Drilling Unit*), para as quais a conexão direta a uma estrutura rígida e limitante de movimento torna-se inadequada.

O riser dinâmico, ou seja, flexível, é extensamente utilizado na indústria, quando se precisa de uma estrutura com maior adaptabilidade e resistência a correntes e ondas marítimas, adequada para profundidades altas e plataformas flutuantes. A DNV (Det Norske Veritas), sociedade de classificação que atua na área de petróleo e gás, cita como exemplos de categorias de sistemas de risers dinâmicos [1]:

- Risers de produção
- Risers de injeção
- Risers de gás lift
- Risers de serviço
- Risers de completção / intervenção
- Risers de perfuração marinha
- Umbilicais de controle submarino
- Umbilicais de produção integrada

Cada categoria se diferencia por dimensões típicas, composição da seção transversal, necessidades funcionais e de carregamento. O riser é um elemento importante de toda atividade que envolve fluxo de matéria entre a plataforma e o leito do mar. A figura abaixo exemplifica o uso de risers dinâmicos com plataformas e arranjos diferentes.

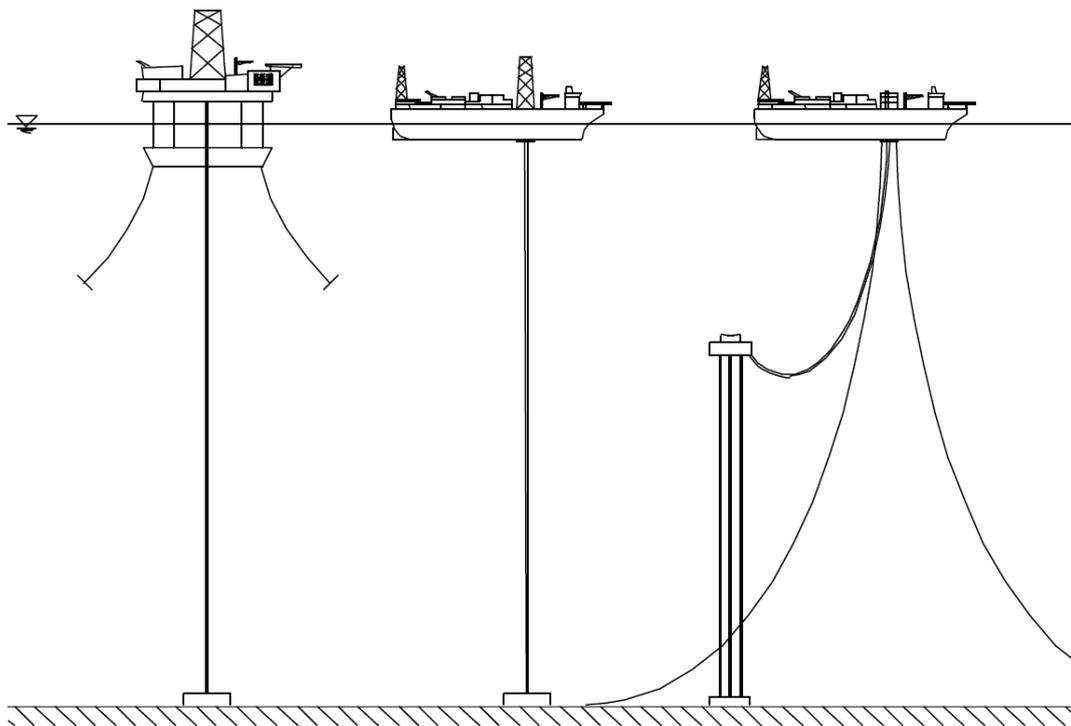


Figura 2.1: Diferentes configurações de uso de risers [1].

2.3 Sistemas de parâmetros distribuidos

O riser se enquadra na categoria dos sistemas de parâmetros distribuidos, devido à sua distribuição de massa ao longo de uma dimensão espacial. Tais sistemas são descritos por equações

diferenciais parciais (PDEs, do inglês *Partial Differential Equation*) ou equações diferenciais com atraso (DDEs, do inglês *Delay Differential Equation*). Sua representação em espaço de estados exige um vetor de estados infinito. O projeto de controle em malha fechada para esses sistemas pode ser dividido em termos de pré-discretização e pós-discretização [4].

Pré-discretização: a PDE ou DDE governante do sistema é reduzida a um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias (ODEs, do inglês *Ordinary Differential Equation*) a partir de uma aproximação, tipicamente o método de diferenças finitas ou de elementos finitos. Em seguida, o controlador é projetado baseado no sistema discretizado e dispõe de várias técnicas bem estabelecidas na teoria de controle. Riscos dessa abordagem são: a criação de estruturas de controle de ordem alta e muito complexas, dependendo da ordem da aproximação, e o fenômeno conhecido como spillover de controle e observação [5], enfrentado neste trabalho.

O *spillover* de controle é a excitação por parte do controlador de modos de vibração, ou seja, aspectos dinâmicos, não-presentes no modelo aproximado. O *spillover* de observação se refere a ação falha do observador em função da dinâmica desprezada no modelo. A presença dos dois tipos pode desestabilizar o sistema original.

Pós-discretização: Nessa abordagem, a natureza contínua do sistema é explicitamente levada em conta para o projeto do controlador. As técnicas presentes incluem generalizações do caso de sistemas finitos, com matemática muito intrincada. Neste trabalho pouco foi estudado dessa abordagem. Todavia, a lei de controle da Seção 3.3 por meio da teoria de Lyapunov se enquadra nesse caso pelo uso da PDE governante e formulação em espaço contínuo.

2.4 Diferenças finitas

O riser, como explicado na Seção anterior, é um sistema de parâmetros distribuídos. Uma implementação computacional exige um vetor de estados finito e para tal, é preciso discretizar espacialmente o sistema. Neste trabalho, isso é feito pela aproximação de derivadas parciais no espaço por diferenças finitas, conforme em [9].

Considera-se uma função $f(x)$ contínua e com derivadas bem-definidas, que pode ser expressa por uma série de Taylor em torno de x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad (2.1)$$

tal que aproximação de primeira ordem seria:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dessa forma, isolando $f'(x_0)$ obtemos:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se fazemos $x = x_0 + \Delta x$, a diferença finita é dita *para frente*:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

se fazemos $x = x_0 - \Delta x$, a diferença finita é dita *para trás*:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.3)$$

a média aritmética das duas expressões gera uma diferença *central*:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.4)$$

Derivando (2.4) e substituindo as derivadas de primeira ordem pela diferença central, tem-se a expressão para a segunda derivada:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.5)$$

derivando e substituindo sucessivamente, chega-se a expressão para a quarta derivada:

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 4f(x_0 + \Delta x) + 6f(x_0) - 4f(x_0 - \Delta x) + f(x_0 - 2\Delta x)}{\Delta x^4} \quad (2.6)$$

A diferença central é a preferida neste trabalho por prover uma aproximação melhor para a derivada. As equações (2.4) e (2.5) são ditas diferenças de ordem 2 porque o erro gerado pelo truncamento da série de Taylor tem ordem de grandeza $O(\Delta x^2)$. Quando Δx é grande, faz sentido utilizar-se uma diferença de ordem maior, o que implica em mais pontos em torno do centro x_0 para uma melhor aproximação. Como exemplo, a diferença de ordem 4 é dada pela fórmula:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - 8f(x_0 - \Delta x) + 8f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + 2\Delta x)}{12\Delta x}$$

Neste trabalho, todavia, o grande número de elementos na discretização do sistema, traduzidos nos pontos para cálculo, torna a distância entre eles pequena o suficiente para o uso de diferenças de ordem 2.

2.5 Modelagem do riser vertical

Segundo os conceitos apresentados anteriormente, busca-se uma expressão que represente o deslocamento horizontal $\Upsilon(z, t)$ da estrutura, que, por se tratar de um sistema distribuído, depende não só do tempo, como da coordenada espacial z . Supõe-se que o deslocamento vertical da estrutura é desprezível em relação ao lateral, e este se dá em pequenos ângulos devido ao grande comprimento

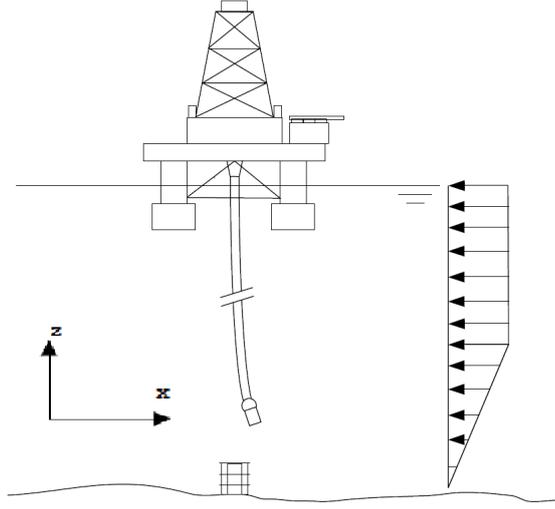


Figura 2.2: Plataforma em operação de reentrada [6].

da estrutura. Pela análise dos esforços internos no riser (tração e força cortante), a EDP governante do sistema, desenvolvida por Fortaleza [6], é:

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(z, t) = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(z, t) \right) + F_n(z, t) \quad (2.7)$$

Em que m_s é a densidade linear de massa do riser, E o seu módulo de Young e J o seu segundo momento de área. $T(z)$ é uma função que descreve a resultante das forças trativas ao longo do comprimento do riser, dependendo somente das propriedades mecânicas do mesmo. $F_n(z, t)$ é a resultante das forças externas. Para uma coroa circular, como a secção transversal do riser, J é dado por:

$$J = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4) \quad (2.8)$$

em que d_e e d_i são o diâmetro interno e o diâmetro externo, respectivamente. Para compactar a notação, omite-se a dependência de z e t em Υ nas equações seguintes.

2.5.1 Forças Hidrodinâmicas

As únicas forças externas atuantes no riser são hidrodinâmicas, exceto no topo e no fundo onde forças de reação advindas das condições de contorno podem estar presentes. Uma aproximação heurística é muito utilizada para representar as hidrodinâmicas através do somatório de uma componente de arrasto, dependente do quadrado da velocidade relativa entre o corpo e fluido, e uma componente inercial, que depende do quadrado da aceleração [7]. A influência de cada componente é pesada por um coeficiente de arrasto C_d e um coeficiente inercial, ou de massa adicionada, ou ainda, de massa virtual, C_m .

Os valores de C_d e C_m dependem não só da geometria do corpo e da rugosidade de sua superfície, como do número de Reynolds do escoamento. A dependência de interações transientes como variações locais na direção e velocidade do fluido fazem com que C_d e C_m sejam efetivamente

funções no tempo. Para as simulações, levando em conta a forma cilíndrica do riser e um valor que é válido para uma grande faixa de número de Reynolds [7], utiliza-se $C_d = 1.2$ e $C_m = 2$.

A equação semi-empírica a seguir é chamada de equação de Morison. Durante o posicionamento, a aceleração e velocidade do fluido são, inicialmente, considerada desprezíveis, portanto não aparecem na equação. Assim como em (2.7), o equacionamento é feito para uma seção transversal no eixo z . A grandeza m_f é chamada massa de fluido adicional e μ , constante de arrasto.

$$F_n(z, t) = -m_f \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - \mu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.9)$$

em que

$$m_f = \rho C_m A$$

$$\mu = \frac{1}{2} \rho C_d D_e$$

tal que ρ é a densidade do fluido, A é a seção transversal do riser e d_e o diametro externo do mesmo.

Substituindo (2.9) em (2.7), fazendo $m = m_s + m_f$ e $\nu = \frac{\mu}{m}$ obtem-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \nu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.10)$$

Estruturas cilíndricas cujo diametro da seção transversal é muito menor do que seu comprimento tendem a ter um segundo momento de área J muito baixo (equação (2.8)). O termo $\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}$, originado do esforço interno por deflexão do riser devido à sua rigidez, possui uma influência muito menor que o termo decorrente da tração $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right)$. A retirada daquele termo leva a um equacionamento simplificado:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \nu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.11)$$

Quando o modelo do riser deixa de ser de quarta ordem, métodos de controle que envolvem muita manipulação algébrica, como funções de Lyapunov e soluções analíticas, tornam-se mais viáveis: sua complexidade diminui e o número de condições de contorno cai pela metade. A linearização do atrito através da substituição de $\nu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right|$ por 2τ também é interessante:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - 2\tau \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.12)$$

O cálculo de τ leva em conta ν e a velocidade média do riser durante a manobra. A precisão da linearização é alta devido à suavidade da manobra, que implica em baixas variações de velocidade. A linearização é útil por facilitar o desenvolvimento de soluções analíticas e levar o sistema a ser completamente modelado no espaço de estados.

2.5.2 Reentrada com cargas

Risers podem ser usados para manobras que exigem a conexão de equipamentos com massas que chegam à dezenas de toneladas. Um exemplo é o posicionamento de um BOP (*Blowout preventer*) [8] no leito do mar sobre uma cabeça de poço (*wellhead*). Após a instalação do BOP, o mesmo riser pode ser usado para o fluxo de lama de perfuração e para outras operações típicas da perfuração e completação do poço.

Nessas condições, a tensão $T(z)$ deve-se majoritariamente à carga e a variação de tração causada pelo peso do próprio riser torna-se pequena. Para a tensão $T(z)$ pode ser tomado o valor médio da tração no riser, T_0 , independente de z , alterando a equação (2.10) para:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{T_0}{m} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} - \nu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.13)$$

A carga é modelada como uma esfera maçica. A sua presença implica em condições de contorno para o fundo do riser. Admitindo o deslocamento em pequenos ângulos ($\text{sen } \theta = \theta$), devido ao grande comprimento vertical da estrutura, a componente horizontal da tração exercida pelo riser sobre a carga é proporcional à $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t)$:

$$F_L(t) = T_0 \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) \quad (2.14)$$

A segunda lei de Newton aplicada à carga é equacionada como segue [9]:

$$m_L \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) = F_L(t) - \mu_L \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \quad (2.15)$$

em que m_L é massa da carga adicionada de sua massa virtual e μ_L é a constante de arrasto da carga. Substituindo (2.14) em (2.15) e fazendo $\nu_L = \mu_L/m_L$, obtem-se a equação para o movimento da carga:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) = \frac{T_0}{m_L} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) - \nu_L \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \quad (2.16)$$

2.5.3 Reentrada livre

O problema da conexão de risers com a extremidade livre também é estudado. Nesse caso, a tensão $T(z)$ no riser é gerado somente pela própria estrutura e varia linearmente com z como segue:

$$T(z) = (m_s - \rho A)gz \quad (2.17)$$

A substituição da relação (2.17) na equação (2.10) gera:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(g'z \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \nu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.18)$$

em que $g' = \frac{(m_s - \rho A)}{m}g$, chamada de gravidade aparente.

2.6 Controle de trajetória

Em muitos problemas de controle, não se está interessado em estabilizar um sistema em torno de um ponto de equilíbrio, mas em torno de uma trajetória arbitrária. Esse conceito é fundamental em atividades de planejamento e rastreamento de trajetória. Assumindo um sistema dinâmico invariante no tempo de ordem N , representado por um conjunto de equações diferenciais [10]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, u) \quad (2.19)$$

em que \mathbf{x} é o vetor de estados $N \times 1$, f é uma função vetorial $N \times 1$ e u é a entrada do sistema.

A saída do sistema $y(t)$ é representada como:

$$y(t) = g(x, u) \quad (2.20)$$

em que g é uma função vetorial arbitrária dos estados do sistema. Sendo $y^*(t)$ uma trajetória escolhida para a saída do sistema, caso este seja diferencialmente plano, como explicado a frente na Seção 3.5, é possível calcular trajetórias $\mathbf{x}^*(t)$ para o vetor de estados e $u^*(t)$ para a entrada do sistema de modo que a trajetória $y^*(t)$, dita planejada, seja executada. Em outras palavras, a entrada $u^*(t)$ em malha aberta calculada é capaz de produzir o comportamento $\mathbf{x}^*(t)$ do sistema necessário para a saída $y^*(t)$ ser gerada.

Todavia, em situações reais, a trajetória $y(t)$ do sistema sempre apresenta um desvio em relação à $y^*(t)$. Um motivo suficiente para isso é a presença de perturbações. Um segundo motivo é que a entrada $u^*(t)$ muitas vezes pode apenas ser aproximada por métodos numéricos, por causa da ausência do desenvolvimento de uma solução com um número finito de termos, dita analítica, para o sistema em questão ou a presença de integrais que exigem resolução numérica da mesma.

Chamando o erro do sistema de \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t) \quad (2.21)$$

Derivando a equação anterior e substituindo em (2.19):

$$\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*(t))$$

Substituindo (2.21):

$$\dot{\mathbf{e}} = f(\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{e}) - f(\mathbf{x}^*(t)) = h(\mathbf{e}, t) \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é um sistema cujo vetor de estados é o próprio erro na trajetória. Isso transforma o problema de execução de uma trajetória em um problema clássico de estabilização de sistema. Para a solução desse problema, técnicas clássicas de controle dinâmico podem ser utilizadas.

Mostra-se na Figura 2.3 um projeto bem simplificado de uma malha de controle de trajetória. A entrada externa é a trajetória desejada $y^*(t)$, que é usada pelo controlador antecipatório para planejar a trajetória de entrada $u^*(t)$. As trajetórias desejada e real $y^*(t)$ e $y(t)$, respectivamente, são comparadas para gerar um sinal de erro $y_r(t)$, que é usado pelo controlador para estabilizar a planta em torno da trajetória desejada.

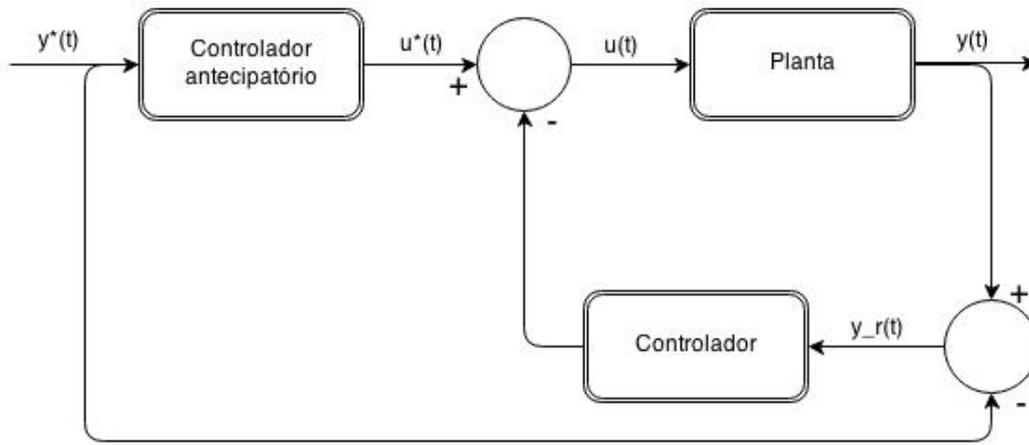


Figura 2.3: Projeto simplificado de controle de trajetória

2.7 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é utilizado neste trabalho pela necessidade de estimação de estados na aplicação das leis de controle desenvolvidas. O filtro foi introduzido por um trabalho publicado por R.E. Kalman em 1960 [11], descrevendo um método para solucionar problemas de filtragem e predição, correspondendo a um filtro ótimo para sistemas lineares.

O nome de "filtro" dado ao que mais se assemelha a um algoritmo é resultado do contexto da publicação, sendo uma solução do caso discreto do problema de filtragem de Wiener [12]. Atualmente, a presença do filtro de Kalman e variações é universal na engenharia, pois problemas provenientes de dados ruidosos e de simplificações de modelos de plantas reais também são.

Da forma em que foi concebido, o filtro se aplica a uma série de medidas em tempo real com um tempo de amostragem bem definido. No contexto da modelagem de sistemas, isso significa que um sistema dinâmico em tempo contínuo precisa ser discretizado no tempo.

2.7.1 Discretização no espaço de estados

Dado um sistema linear contínuo representado no espaço de estados, conforme observado na equação (2.23), primeiro substituí-se a variável independente t por kT , tal que $k \in \mathbb{Z}$ e T é chamado de tempo de amostragem. A nova variável independente k (na qual omite-se o tempo de amostragem T) somente está definida para números inteiros, que correspondem ao instante em que uma medição é realizada no sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

A discretização do modelo em espaço de estados contínuo leva a uma nova representação, como

desenvolvido em [13]:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(T)x(k) + \Gamma(T)u(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{2.24}$$

em que , sendo $\lambda = T - t$,

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= e^{AT} \\ \Gamma(T) &= \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B\end{aligned}\tag{2.25}$$

Pode-se observar que as matrizes da equação de estado discreta dependem do tempo de amostragem. Além disso é possível simplificar a fórmula para $\Gamma(T)$. Resolvendo a integral:

$$\Gamma(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B = A^{-1} \left[e^{A\lambda} \right]_0^T B = A^{-1}(e^{AT} - I)B\tag{2.26}$$

por último, sabendo que uma aproximação em primeira ordem para a matriz exponencial é dada por $e^{AT} = I - AT$, tem-se

$$\Gamma(T) = BT\tag{2.27}$$

2.7.2 Descrição do filtro

No projeto de observadores de Luenberger em tempo discreto, dois tipos fundamentais são o observador-preditor e o observador-corrente. O primeiro surge naturalmente na discretização do observador de Luenberger em tempo contínuo e tem como característica a estimação do vetor de estados atual $x(k)$ a partir da medida $y(k-1)$, ou seja, a saída do passo anterior. O observador-corrente é um aprimoramento do preditor, no sentido de utilizar para sua estimativa a saída atual, composto de dois passos, conforme desenvolvido em [13]:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k|k-1) &= \Phi\hat{x}(k-1|k-1) + \Gamma u(k-1) \\ \hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + K\{y(k) - [C\hat{x}(k|k-1) + Du(k)]\}\end{aligned}\tag{2.28}$$

em que $\hat{x}(k|k-1)$ denota a estimação de vetor de estados x no tempo k utilizando as medidas disponíveis até o tempo $(k-1)$.

Observando atentamente as equações anteriores, percebe-se que a primeira consiste numa etapa de predição do vetor de estados atual k , já que ela se baseia completamente em dados até o tempo $(k-1)$. A segunda equação é interpretada como uma correção em malha fechada da predição $\hat{x}(k|k-1)$, já que ela consiste na soma dessa predição com o erro entre a saída atual e a saída predita, ajustada por um fator (ganho) K . O observador-corrente tradicional escolhe esse ganho K por critérios dinâmicos de estabilidade e velocidade de convergência do observador.

O filtro de Kalman consiste em essência nas mesmas equações, mas com um grande diferencial: a matriz K passa a ser variante no tempo, recalculada a cada instante, e perde o foco em qualquer ajuste de autovalores do observador para melhorar sua dinâmica. O problema a ser resolvido consiste puramente em minimizar a variância do erro de estimação, ou seja, o erro quadrático

médico, a cada passo no tempo. Para isso, é primeiro necessário redefinir o modelo em espaço de estados incluindo ruídos:

$$\begin{aligned}\dot{x}(k+1) &= \Phi(T)x(k) + \Gamma(T)[u(k) + w(k)] \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + v(k)\end{aligned}\tag{2.29}$$

em que $w(k)$ e $v(k)$ são chamados de ruído de processo e ruído de medida, respectivamente.

A interpretação de $v(k)$ é simples: trata-se dos ruídos introduzidos por sensores e o ambiente em que estão inseridos. Já $w(k)$ se assemelha mais a um artifício matemático utilizado para contabilizar perturbações desconhecidas e imprecisões no modelo. Ambos os ruídos são modelados como gaussianos de média zero e suas matrizes de covariância são dadas por:

$$\begin{aligned}E[w(k)w^T(k)] &= Q \\ E[v(k)v^T(k)] &= R \\ E[w(k)v^T(k)] &= 0\end{aligned}\tag{2.30}$$

A variância do erro de estimação é definida como:

$$P(k) = E\{[x(k) - \hat{x}(k)][x(k) - \hat{x}(k)]^T\}\tag{2.31}$$

O algoritmo do filtro de Kalman pode ser dividido em duas etapas: atualização e propagação. A primeira é composta de três equações [12]:

- Cálculo do ganho de Kalman para o passo atual:

$$K(k) = P(k|k-1)C^T(R + CP(k|k-1)C^T)^{-1}\tag{2.32}$$

- Atualização/Correção da variância do erro de estimação:

$$P(k|k) = (I - K(k)C)P(k|k-1)\tag{2.33}$$

- Atualização/Correção da estimativa do vetor de estados:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\{y(k) - [C\hat{x}(k|k-1) + Du(k)]\}\tag{2.34}$$

Já a etapa de propagação é composta por duas equações:

- Estimação do vetor de estados no passo temporal seguinte:

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k) + \Gamma u(k)\tag{2.35}$$

- Estimação da variância do erro de estimação no passo temporal seguinte:

$$P(k+1|k) = \Phi P(k|k)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T\tag{2.36}$$

2.8 Preditor de Smith

É muito comum encontrar sistemas com um atraso natural no tempo, em função de suas propriedades. No caso de sistemas distribuídos, essa característica é universal, pois a propagação de um estímulo, seja mecânico, térmico, químico, entre outros, nunca se dá de maneira instantânea. Quando esse atraso é significativo, existe um tempo em que uma ação de controle realizada no sistema aparenta não causar efeito. Em uma malha fechada, essa propriedade é responsável por reduzir drasticamente a performance de controladores tradicionais, como o PID, que atuam em descompasso com o próprio sistema controlado, pois não "compreendem" a existência do atraso [14].

O.J.M Smith criou um conceito de controlador que ficou conhecido como Preditor de Smith [15]. Consiste em uma extensão da estrutura de controle em malha fechada com dois laços de realimentação: externo e interno. O primeiro passo para a implementação do preditor é a identificação do atraso natural do sistema, que pode ser feita através de sensores na planta real. Em um ambiente de simulação, o atraso pode ser derivado da própria física do modelo ou estimado pela sua resposta. Em seguida, cria-se um modelo interno aproximado da planta sem a presença do atraso.

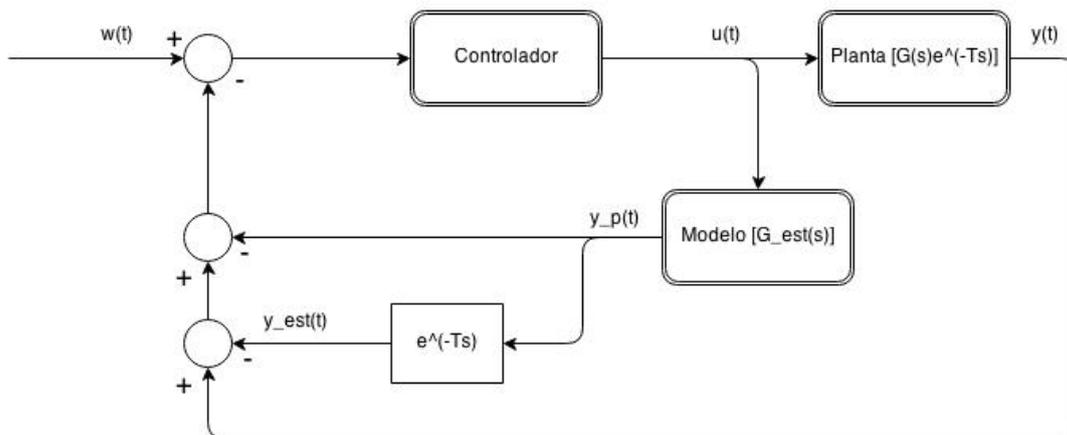


Figura 2.4: Preditor de Smith

O laço externo do preditor compara a saída da planta com a do modelo estimado seguido do atraso identificado e gera um sinal de erro. Esse sinal apenas contabiliza as imprecisões do modelo interno. No caso ideal em que a planta corresponde exatamente ao modelo, o sinal de erro é nulo, deixando o preditor somente com um laço de realimentação. Esse laço interno compara o sinal do modelo ausente de atraso com a entrada externa, gerando um sinal de erro. A predição está justamente nesse laço: o controlador "enxerga" o futuro da planta através do modelo interno sem atraso e se antecipa na ação de controle. Essa característica permite que a malha com o preditor de Smith tenha um controlador com polos mais rápidos, além do limite da estabilidade para a malha simples.

Capítulo 3

Desenvolvimento

3.1 Introdução

O objetivo principal deste Capítulo é a descrição das etapas de planejamento e rastreamento de trajetória para o sistema que representa o riser. Para tal, as ferramentas necessárias para a implementação do modelo a ser controlado, assim como a estimação dos seus estados, também são descritas.

A Seção 3.2 apresenta as equações utilizadas para representação do sistema em espaço de estados finitos. A Seção 3.3 apresenta o desenvolvimento de leis de controle baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov. Na Seção 3.4 explica-se a metodologia para decomposição e redução de sistemas de ordem muito alta em subsistemas de segunda ordem. A Seção 3.5 apresenta o desenvolvimento de uma lei para planejamento e rastreamento de trajetória pela propriedade *flatness* do sistema. A Seção 3.6 apresenta a problemática encontrada na estimação dos estados do sistema reduzido. Na Seção 3.7 mostra-se a ampliação da malha do controlador baseado em *flatness* com o uso de um preditor de Smith.

3.2 Discretização do modelo

Na Seção 2.4 foram desenvolvidas as equações necessárias para discretização do modelo pelo método das diferenças finitas.

Reentrada com cargas: Para o caso de tensão constante no riser, a dinâmica de um elemento na posição $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N$, sendo N o número de elementos na discretização, é dada pela discretização da equação (2.13):

$$\frac{d^2\Upsilon_k}{dt^2} = -\frac{EJ}{ml^4}(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2}) + \frac{T_0}{ml^2}(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_k}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_k}{dt} \quad (3.1)$$

em que $l = L/N$, tal que L é o comprimento do riser, l é a distância entre dois pontos de discretização.

A condição do contorno para o topo, tanto no caso do posicionamento de cargas como na operação de reentrada, é de engastamento ($\Upsilon(L, t) = u(t)$, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L, t) = 0$). Desta forma, o equacionamento para o elemento no topo do riser ($k = 1$) é:

$$\frac{d^2 \Upsilon_1}{dt^2} = -\frac{EJ}{ml^4}(-3u(t) + 6\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 + \Upsilon_3) + \frac{T_0}{ml^2}(u(t) - 2\Upsilon_1 + \Upsilon_2) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_1}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_1}{dt} \quad (3.2)$$

A dinâmica da carga conectada ao fundo do riser é dada segundo a equação (2.15), discretizada:

$$\frac{d^2 \Upsilon_N}{dt^2} = \frac{T_0}{m_L l}(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N) - \tau_L \left| \frac{d\Upsilon_N}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_N}{dt} \quad (3.3)$$

Reentrada livre: Quando a tensão no riser varia linearmente no seu comprimento, discretiza-se a equação (2.18):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Upsilon_k}{dt^2} = & -\frac{EJ}{ml^4}(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2}) + \frac{g' z_k}{l^2}(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}) \\ & + \frac{g'}{2l}(\Upsilon_{k-1} - \Upsilon_{k+1}) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_k}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_k}{dt} \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que z_k é a posição em z do k -ésimo elemento, dada por $z_k = [(N + 1) - k]l$. Nesse caso considera-se um segmento l adicional embaixo do último elemento de discretização, alterando a expressão de l para $l = L/(N + 1)$.

A expressão para o elemento de topo do riser se torna:

$$\frac{d^2 \Upsilon_1}{dt^2} = -\frac{EJ}{ml^4}(-3u(t) + 6\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 + \Upsilon_3) + \frac{g' N}{l}(u(t) - 2\Upsilon_1 + \Upsilon_2) + \frac{g'}{2l}(u(t) - \Upsilon_2) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_1}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_1}{dt} \quad (3.5)$$

Para os elemento no fundo ($k = N - 1$ e $k = N$), a condição de contorno de uma extremidade livre ($\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2}(L, t) = 0$) é aplicada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Upsilon_{N-1}}{dt^2} = & -\frac{EJ}{ml^4}(\Upsilon_{N-3} - 4\Upsilon_{N-2} + 5\Upsilon_{N-1} - 2\Upsilon_N) + \frac{2g'}{l}(\Upsilon_{N-2} - 2\Upsilon_{N-1} + \Upsilon_N) \\ & + \frac{g'}{2l}(\Upsilon_{N-2} - \Upsilon_N) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_{N-1}}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_{N-1}}{dt} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 \Upsilon_N}{dt^2} = -\frac{EJ}{ml^4}(\Upsilon_{N-2} - 2\Upsilon_{N-1} + \Upsilon_N) + \frac{g'}{l}(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N) + \frac{g'}{2l}(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N) - \nu \left| \frac{d\Upsilon_N}{dt} \right| \frac{d\Upsilon_N}{dt} \quad (3.7)$$

3.2.1 Representação em espaço de estados

Após a discretização do sistema, obtém-se uma representação em espaço de estados para o modelo adotado. Nesse trabalho, duas representações diferentes foram utilizadas, uma para o sistema linearizado e outra para o não-linear (a única não-linearidade do sistema é o atrito). O primeiro caso é o mais simples e permite condensar o sistema inteiro no clássico par de equações de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.8)$$

cujo vetor de estados é:

$$x = \left(\Upsilon_1 \quad \Upsilon_2 \quad \dots \quad \Upsilon_N \quad \dot{\Upsilon}_1 \quad \dot{\Upsilon}_2 \quad \dots \quad \dot{\Upsilon}_N \right)_{2N \times 1}^T$$

o sinal de controle é $u(t) = \Upsilon(L, t)$, ou seja, o deslocamento do topo do riser, o sinal de saída é $y(t) = \Upsilon(0, t)$, ou seja, o deslocamento do fundo.

As equações desenvolvidas na seção anterior já estão num formato em que se pode extrair com facilidade as matrizes de estado. Como exemplo, as matrizes de estado para o riser carregado podem ser esquematizadas assim:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ A_1 & A_{fric} \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (3.9)$$

em que $\mathbf{0}$ e I são respectivamente a matriz nula e a matriz identidade de ordem N .

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2a + 6c & a - 4c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a - 4c & -2a + 6c & a - 4c & c & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a - 4c & -2a + 6c & a - 4c & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & a - 4c & -2a + 6c & a - 4c & c & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -b \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (3.10)$$

com as constantes

$$a = \frac{T_0}{ml^2} \quad b = \frac{T_0}{m_L l} \quad c = -\frac{EJ}{ml^4} \quad (3.11)$$

por último

$$A_{fric} = \begin{pmatrix} -2\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2\tau & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\tau_L \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (3.12)$$

em que -2τ é o coeficiente do atrito linearizado para o riser, como na equação (2.12), enquanto $-2\tau_L$ é o coeficiente para a carga. As matrizes B , C e D são representadas por:

$$B = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad a - 3c \quad c \quad 0 \dots \right)_{2N \times 1}^T \quad (3.13)$$

$$C = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad \dots \right)_{1 \times 2N} \quad (3.14)$$

$$D = 0 \quad (3.15)$$

em que o primeiro elemento não-nulo de B está na posição $N + 1$ e o único elemento não-nulo de C está na posição N .

Quando se mantém o atrito não-linear, não é possível contabilizá-lo na matriz de estados A . Esse problema é resolvido de forma bem prática por [9] através de um esquema de realimentação no SIMULINK. O esquema foi implementado e utilizado nas simulações do sistema não-linear.

3.3 Projeto por Lyapunov

Nesta seção, duas leis de controle similares derivadas de funções de Lyapunov são mostradas. Para o riser livre, a lei desenvolvida por [6] é citada. Com base nessa lei, é desenvolvida e provada uma lei de controle para o caso do riser carregado. Utiliza-se a notação $\Upsilon_R(z, t) = \Upsilon(z, t) - \Upsilon_0(z, t)$, em que $\Upsilon(z, t)$ é a trajetória real do sistema e $\Upsilon_0(z, t)$ a trajetória de referência.

3.3.1 Riser carregado

Considerando o modelo dado pela (2.13), sem o termo de quarta ordem $-\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}$ e o arrasto linearizado:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{T_0}{m} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} - 2\tau \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (3.16)$$

Considera-se também uma linearização para o arrasto na carga:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(0, t) = \frac{T_0}{m_L} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) - 2\tau_L \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(0, t) \quad (3.17)$$

Propõe-se uma função de Lyapunov para o sistema dado pela (3.16), diretamente associada à sua energia:

$$H = \frac{L \Upsilon_R^2(L, t)}{2q^2} + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{T_0}{m} \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(z, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(z, t) \right)^2 \right) dz + \frac{1}{2} \frac{M}{m} \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(0, t) \right)^2 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) leva em conta as energias cinética e potencial para cada elemento infinitesimal do cabo e a energia cinética da carga. Um termo associado ao deslocamento relativo do topo é adicionado, com seu parâmetro de controle q , útil para o ajuste manual do controlador. Para provar a convergência assintótica global de Υ_R segundo Lyapunov, é necessário que [10]:

- i) H seja positiva definida.
- ii) H seja radialmente ilimitada.
- iii) $\frac{dH}{dt}$ seja negativa definida.

As duas primeiras condições são cumpridas pela expressão de (3.18). A terceira condição leva a uma lei de controle. Simplificando a notação com $\Upsilon_R = \Upsilon_R(z, t)$ e derivando temporalmente H :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \frac{L}{q^2} \Upsilon_R(L, t) \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(L, t) + \int_0^L \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z \partial t} dz + \int_0^L \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial t^2} dz \\ & + \frac{M}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(0, t) \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial t^2}(0, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo a PDE governante do sistema (3.16) e a equação que governa o movimento da carga (3.17) em (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \frac{L}{q^2} \Upsilon_R(L, t) \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(L, t) + \int_0^L \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z \partial t} dz + \int_0^L \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z^2} dz \\ & + \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(0, t) \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(0, t) - 2\tau \int_0^L \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \right)^2 dz - 2\tau_L \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(0, t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Integrando por partes o terceiro termo do lado direito de (3.20):

$$\int_0^L \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z^2} dz = \frac{T_0}{m} \left(\left[\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z} \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z} \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z \partial t} dz \right) \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(L, t) \left(\frac{L}{q^2} \Upsilon_R(L, t) + \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t) \right) - 2\tau \int_0^L \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t} \right)^2 dz - 2\tau_L \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(0, t) \right)^2 \quad (3.22)$$

Propõe-se a lei de controle:

$$\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(L, t) = -k \left(\frac{L}{q^2} \Upsilon_R(L, t) + \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t) \right) \quad (3.23)$$

Da equação anterior, obtem-se o sinal de entrada $\Upsilon(L, t)$:

$$\Upsilon(L, t) = \Upsilon_0(L, t) - k \int_0^t \left(\frac{L}{q^2} \Upsilon_R(L, \tau) + \frac{T_0}{m} \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, \tau) \right) dt \quad (3.24)$$

com k e q como parâmetros de ajuste. Dessa forma, tem-se $\frac{dH}{dt}$ negativa definida e a convergência assintótica do sistema para o maior conjunto invariante quando $\frac{dH}{dt} = 0$. Para que o sistema esteja em um estado de energia mínima, esse conjunto é tal que:

i) A energia cinética do sistema é nula:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(z, t) \right)^2 dz = 0$$

ii) A aceleração e, por consequência, a componente horizontal da tração é nula:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(z, t) \right) = T_0 \frac{\partial^2 \Upsilon_R}{\partial z^2}(z, t) = 0$$

A condição *i)* implica $\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(z, t) = 0$ para todo z . Combinada com a condição *ii)* leva à solução:

$$\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(z) = c_1 \quad e \quad \Upsilon_R(z) = c_2 z + c_1 \quad (3.25)$$

Em condições de repouso, o balanço de forças externas horizontais no topo do cabo é dado por:

$$F_p + F_t = 0$$

em que F_p é a resultante das perturbações e F_t a tensão aplicada no elemento de topo pela entrada. Na ausência de perturbações, tem-se que $F_p = F_t = 0$. Por definição, $F_t \propto \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t)$, o que leva a $\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L) = \Upsilon_R(L) = 0$.

Reescrevendo as equações (3.25) em forma de sistema e fazendo $z = L$:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L) = 0 \\ c_2 L + c_1 = \Upsilon_R(L) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Temos que $c_1 = c_2 = 0$ e portanto $\Upsilon_R(z, t) = 0$ para todo z . Assim é provada a convergência do sistema.

3.3.2 Riser livre

Considerando o sistema dado por (2.18), cujo termo $-\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4}$ é desprezado, a função de Lyapunov presente em [6] descreve a energia do sistema:

$$H = \frac{L\Upsilon_R^2(L, t)}{2q^2} + \frac{1}{2} \int_0^L \left(g'z \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(z, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial t}(z, t) \right)^2 \right) dz \quad (3.27)$$

Com um procedimento algébrico similar ao da seção anterior, obtém-se a lei de controle:

$$\Upsilon_R(L, t) = -k \left(\frac{\Upsilon_R(L, t)}{q^2} + g' \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t) \right) \quad (3.28)$$

O sinal de entrada $\Upsilon(L, t)$ é dado por:

$$\Upsilon(L, t) = \Upsilon_0(L, t) - k \int_0^t \left(\frac{\Upsilon_R(L, \tau)}{q^2} + g' \frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, \tau) \right) dt \quad (3.29)$$

A aplicação das condições de energia mínima, como na seção anterior, leva à solução $Y_R(z) = c \ln(z)$, com $\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L) = \Upsilon_R(L) = 0$. Logo, $c = 0$ e a convergência do sistema é provada.

3.4 Decomposição e redução modal

Modelos de sistemas de ordem muito alta ou de ordem infinita, como é o caso de sistemas distribuídos, podem ser simplificados através de técnicas de redução de ordem. O alvo da redução é a diminuição dos graus de liberdade do sistema enquanto se mantém as características dinâmicas do mesmo, abrindo possibilidades para técnicas de controle sobre sistemas de ordem baixa. A decomposição modal é descrita em [16] e [17], enquanto a redução é aplicada segundo o trabalho de Fortaleza [6].

Quando a resposta final de um sistema é dominada por poucos autovalores, uma redução modal é uma alternativa viável. Neste trabalho trata-se com o com atrito linearizado, para que esse possa ser incluído na matriz de estados do sistema.

3.4.1 Forma modal

Considerando a representação em espaço de estados descrita na seção 3.2.1, verifica-se que a matriz A tem posto $2N$, o que significa que ela é inversível e seu determinante é diferente de zero. Em seguida, determina-se os autovalores λ e autovetores v que solucionam a equação linear

$$Av = \lambda v \quad (3.30)$$

De posse dos autovetores v_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$, pode-se formar a matriz de transformação T :

$$T = \left(v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_{2N} \right)_{1 \times 2N}$$

Aplicando a transformação sobre a matriz A , obtemos a matriz A_T tal que:

$$A_T = T^{-1}AT \quad (3.31)$$

3.4.2 Modelo reduzido simples

A partir do sistema na forma modal, é possível formar sistemas de ordem menor através de reduções modais, enquanto se tenta manter as características dinâmicas do sistema. O critério para redução escolhido neste trabalho é o ganho estático de cada subsistema. Pode-se decompor o sistema (3.32), de ordem $2N$, em N subsistemas:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= A_{Mi}z + B_{Mi}u \\ y &= C_{Mi}z_i + D_{Mi}u \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que

$$A_{Mi} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_{i+1} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_{Mi} = \begin{pmatrix} \sigma_i & w_i \\ -w_i & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$B_{Mi} = \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \end{pmatrix} \quad C_{Mi} = \begin{pmatrix} c_i & c_{i+1} \end{pmatrix} \quad D_{Mi} = \begin{pmatrix} d_i & d_{i+1} \end{pmatrix}$$

b_i = elemento da matriz B_M na linha i

c_i = elemento da matriz C_M na coluna i

d_i = elemento da matriz D_M na coluna i

Para achar o ganho estático de cada subsistema, primeiro observa-se a seguinte conversão da representação em espaço de estados para função de transferência, que deriva da aplicação da transformada de laplace no sistema (3.37):

$$G_{Mi}(s) = Y_{Mi}(s)/U(s) = C_{Mi}(sI - A_{Mi})^{-1}B_{Mi} + D_{Mi} \quad (3.34)$$

Isolando $Y_{Mi}(s)$ e excluindo D_{Mi} , já que a matriz D é nula:

$$Y_{Mi}(s) = C_{Mi}(sI - A_{Mi})^{-1}B_{Mi}U(s)$$

Pelo teorema do valor final, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_{Mi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{Mi}(s) \quad (3.35)$$

Substituindo (3.4.2) em (3.35) e supondo uma entrada degrau unitário, ou seja, $U(s) = \frac{1}{s}$, obtém-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_{Mi}(t) = -C_{Mi}A_{Mi}^{-1}B_{Mi} \quad (3.36)$$

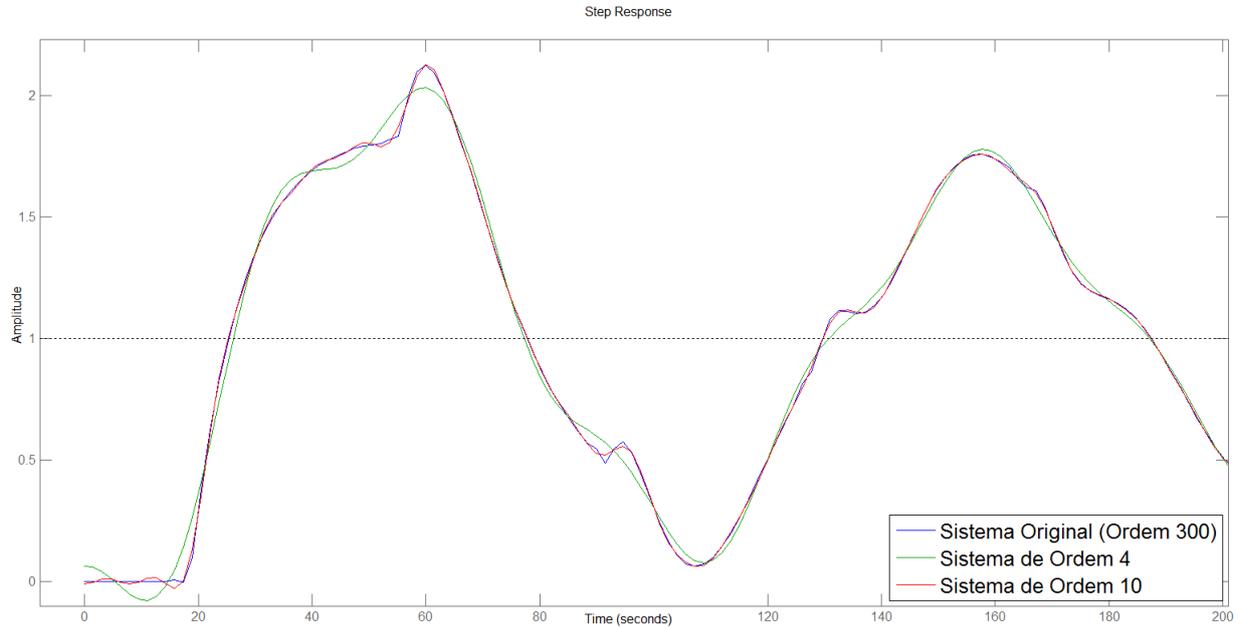
Com a equação (3.36) é possível encontrar os subsistemas com o maior ganho estático. Como esperado, um ganho estático alto corresponde a frequências naturais ω_n baixas, que são as menos amortecidas durante o trajeto da excitação no topo até o fundo do riser. O sistema reduzido formado pelos subsistemas pode então ser equacionado:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_Rz + B_Ru \\ y &= C_Rz + D_Ru \end{aligned} \quad (3.37)$$

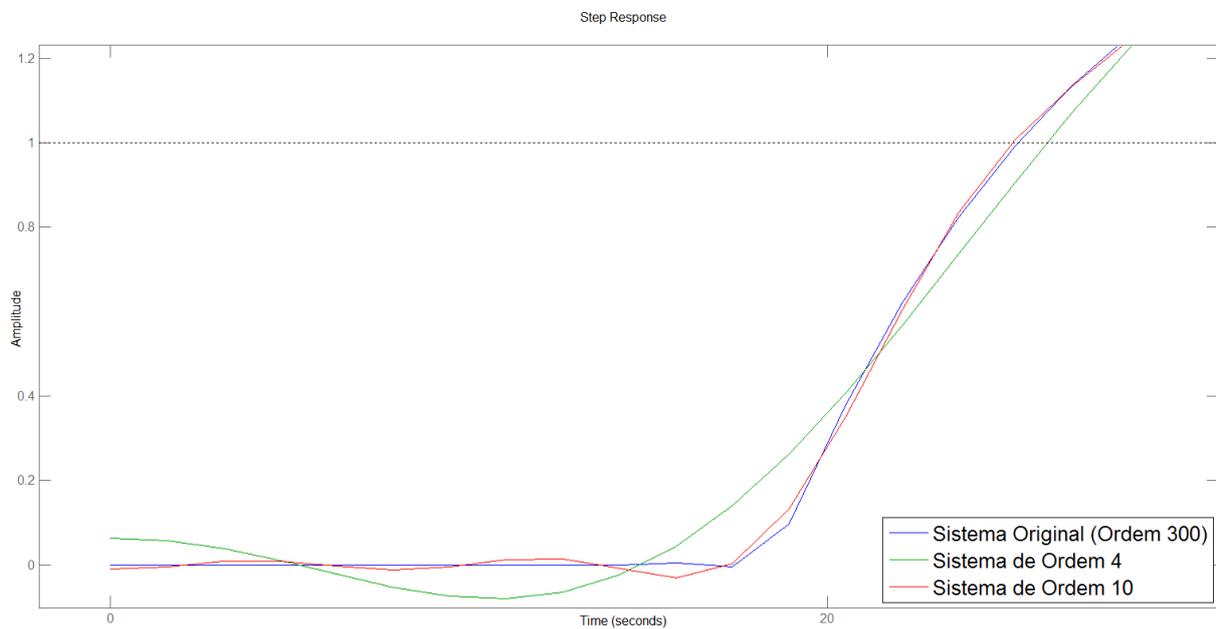
Para que o sistema reduzido tenha o mesmo ganho do sistema original, é preciso compensar a perda de ganho decorrente da exclusão de subsistemas com um termo de transmissão direta:

$$D_R = C_R A_R^{-1} B_R - C A^{-1} B \quad (3.38)$$

D_R é a diferença entre o ganho do sistema original e o ganho dos subsistemas escolhidos.



(a)



(b) Ampliação no início da resposta

Figura 3.1: Resposta ao degrau do sistema original e reduções (riser carregado)

Na Figura 3.1 pode-se ver a resposta ao degrau do modelo do riser carregado comparada com a de modelos reduzidos. O efeito da ordem do modelo reduzido na resposta também se torna visível.

Percebe-se pelo sinal que o modelo reduzido não consegue acompanhar o original nos pontos de derivada alta, ou seja, aqueles relacionados a frequências mais altas que são desprezadas pela redução. Todavia, quando se planeja a trajetória de entrada para o riser, esta é bem mais suave que um degrau, de modo que essas frequências altas não são estimuladas e tornam-se irrelevantes para a resposta do sistema original.

3.4.3 Modelo reduzido com atraso na entrada

O modelo reduzido simples pode ser inadequado para representar o sistema original. A matriz D_R introduz dinâmica no sistema antes do tempo de propagação do sinal no riser chegar, além de introduzir ganho para frequências altas, que corresponde diretamente ao valor de D_R . Essa matriz pode se tornar especialmente grande quando o modelo original possui extensa distribuição dos ganhos estáticos entre seus autovalores e/ou a ordem do modelo reduzido é baixa. Para solução desses problemas, é proposto e provado em [6] o seguinte modelo alterado:

$$\begin{aligned}\dot{w} &= A_R w + B_D u(t - \epsilon) \\ y &= C_R w + D_D u(t - \epsilon)\end{aligned}\tag{3.39}$$

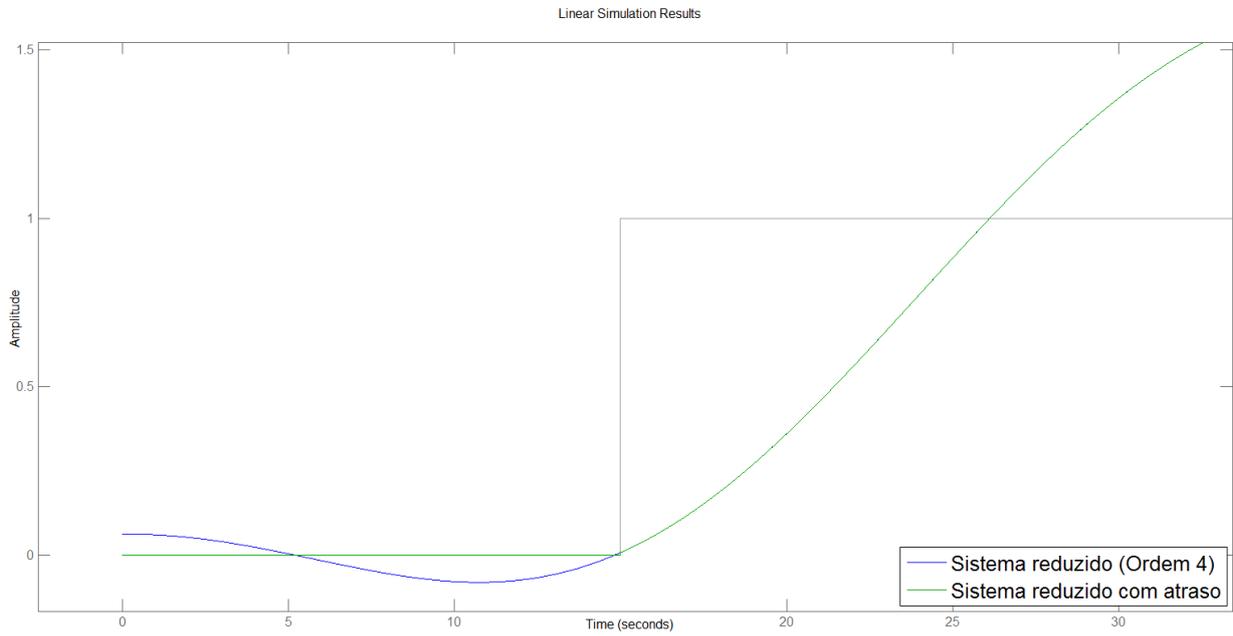
Em que

$$B_D = A_M(e^{\epsilon A_M})A_M^{-1}B_M\tag{3.40}$$

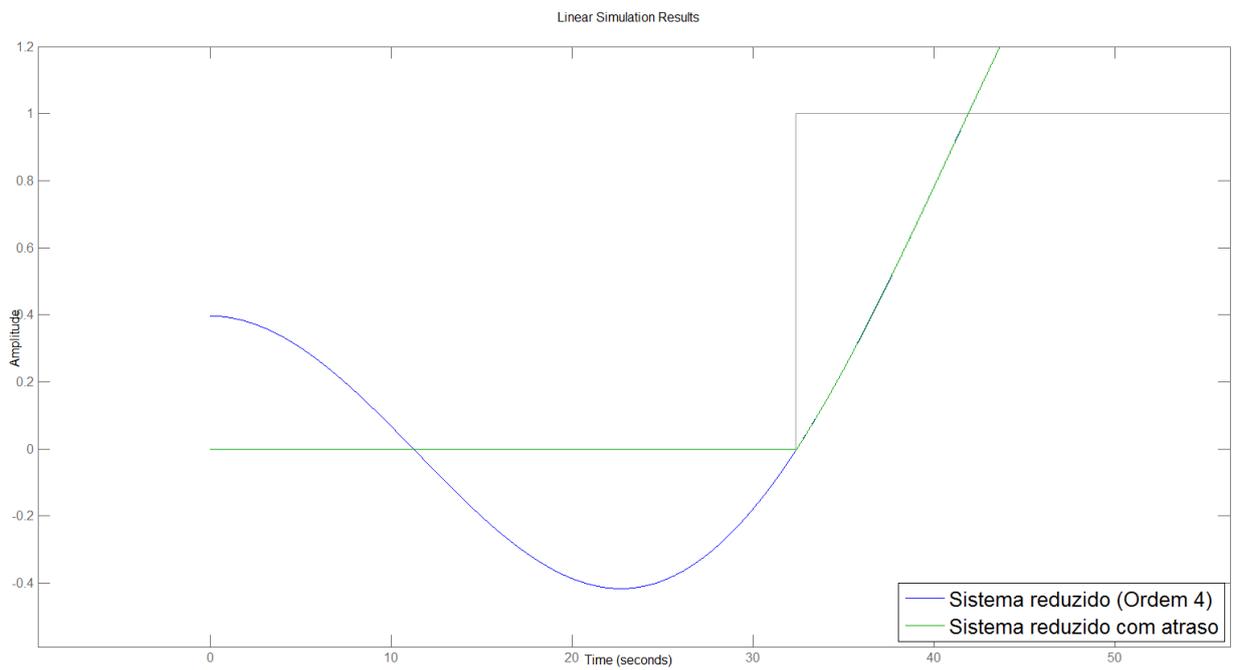
$$D_D = C_M(e^{\epsilon A_M} - I)A_M^{-1}B_M + D_M\tag{3.41}$$

O modelo (3.39) é tal que para uma entrada degrau em t' , a saída do sistema mantém o valor inicial até $t < t' + \epsilon$. Para $t \geq t' + \epsilon$, a saída do modelo (3.39) é a mesma do modelo reduzido simples (3.37).

Uma boa escolha de ϵ , ou seja, tal que em $t = t' + \epsilon$ a saída do sistema (3.37) seja a mais próxima de zero, resulta em valores muito baixos para a matriz de transferência direta D_D . A Figura 3.2 mostra a resposta do modelo (3.39) a um degrau atrasado de modo que D_D seja mínimo. A diferença entre D_{RED} e D_D se torna crítica quando uma redução para ordem 4 é aplicada no riser livre: a ausência de uma carga pesada na ponta leva a uma distribuição maior de ganho entre os autovalores do sistema e conseqüentemente a um D_{RED} maior (Figura 3.2(b)).



(a) Riser carregado



(b) Riser livre

Figura 3.2: Resposta ao degrau do sistema reduzido simples e reduzido com atraso

3.4.4 Aplicação no controle

Neste trabalho, utiliza-se o modelo reduzido para o projeto de controladores que serão aplicados sobre o modelo original. Para o controle em malha fechada, utiliza-se um estimador de estado para traduzir o comportamento do sistema original no do sistema reduzido. A escolha da ordem da redução é muito importante: deve ser suficiente para que a disparidade entre os dois modelos seja compensada com a atuação do controlador, sem fazê-lo divergir, mas quanto maior for, maior será a complexidade algébrica para projeto do controlador e do estimador, assim como o tempo de resposta dos mesmos.

3.5 Projeto de controlador baseado em flatness

3.5.1 Introdução

A planicidade (em inglês *flatness*), é uma propriedade observada em alguns sistemas dinâmicos controlados que permite trivializar o planejamento e o acompanhamento de trajetórias [18]. Sua origem se dá no conceito matemático de morfismo plano [19], muito anterior à exploração do mesmo em aplicações de controle de sistemas. O trabalho de M. Fliess *et al* [20] foi o responsável por iniciar uma tendência de pesquisas na área por relacionar a propriedade de planicidade com a de controlabilidade de um sistema.

Considerando um sistema genérico dado pela equação:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

Esse sistema é dito diferencialmente plano caso exista uma função do vetor de estados x , da entrada u e de um número finito de suas derivadas:

$$\Phi = \Phi(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^\alpha) \quad (3.43)$$

tal que essa saída artificial Φ parametrize completamente todas as variáveis do sistema. Efetivamente, isso significa que tanto os estados como a entrada do sistema podem ser escritas como funções de y e de suas derivadas:

$$\begin{aligned} x &= A(\Phi, \dot{\Phi}, \ddot{\Phi}, \dots, \Phi^\alpha) \\ u &= B(\Phi, \dot{\Phi}, \ddot{\Phi}, \dots, \Phi^{\alpha+1}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

a saída Φ recebe o nome de saída plana do sistema.

Em [21] a planicidade de sistemas de cabos com extremidades livre e com carga, modelados da mesma forma que o riser, é estudada e provada.

3.5.2 Cálculo da saída plana

Consideramos o modelo reduzido desenvolvido na seção 3.4. Uma redução para ordem 4 resulta em um sistema da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & w_1 & 0 & 0 \\ -w_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & w_2 \\ 0 & 0 & -w_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} u \quad (3.45)$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + (d) u$$

As propriedades de planejabilidade e controlabilidade são equivalentes para sistemas lineares [18]. Desta forma, verifica-se primeiro a controlabilidade do sistema pelo posto da matriz T :

$$T = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A saída flat é uma combinação linear das variáveis de estado z_1, z_2, z_3 e z_4 :

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} z \quad (3.47)$$

De posse da saída flat, o procedimento padrão é o planejamento da mesma a partir das curvas nominais para as variáveis de estado. Todavia isso não é possível: as variáveis de estado do modelo reduzido não possuem interpretação física, ou seja, não há uma relação direta entre as suas trajetórias e o comportamento (posição e velocidade) dos elementos que compõem o riser.

A saída y do modelo reduzido, diferente dos seus estados, é claramente interpretada como a posição do fundo do riser. Uma abordagem alternativa é planejar uma trajetória para y e a partir dela planejar uma trajetória para saída flat. Encontra-se outro entrave: As saídas são combinações dos estados que são linearmente independentes entre si, impossibilitando que a trajetória de uma saída parametrize completamente a outra.

A solução encontrada provém da comparação entre a saída flat e a saída y do sistema (3.45): ambas são combinações lineares das variáveis de estado. Caso a saída y seja substituída pela saída plana, o sistema deixa de ter ganho unitário. É possível calcular o novo ganho pela equação (3.36). Planeja-se então, que a saída plana tenha valor final igual ao do seu ganho estático, independente do comportamento dos estados ou da saída do modelo reduzido. Essa estratégia trouxe resultados satisfatórios nas simulações.

3.5.3 Cálculo das derivadas da saída plana

Pela equação (3.47), obtém-se a saída plana. A fim de simplificar a notação e compactar sua complexidade, pode-se dar nomes aos coeficientes da saída plana e suas derivadas como segue [22]:

$$f = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 \quad (3.48)$$

Derivando f sucessivamente:

$$\begin{aligned}
\dot{f} &= \alpha_5 z_1 + \alpha_6 z_2 + \alpha_7 z_3 + \alpha_8 z_4 \\
\ddot{f} &= \alpha_9 z_1 + \alpha_{10} z_2 + \alpha_{11} z_3 + \alpha_{12} z_4 \\
\dddot{f} &= \alpha_{13} z_1 + \alpha_{14} z_2 + \alpha_{15} z_3 + \alpha_{16} z_4 \\
f^{(4)} &= \alpha_{17} z_1 + \alpha_{18} z_2 + \alpha_{19} z_3 + \alpha_{20} z_4 + \gamma u
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Em que:

$$\begin{aligned}
\alpha_5 &= \sigma_1 \alpha_1 - \omega_1 \alpha_2 \\
\alpha_6 &= \omega_1 \alpha_1 + \sigma_1 \alpha_2 \\
\alpha_7 &= \sigma_2 \alpha_3 - \omega_2 \alpha_4 \\
\alpha_8 &= \omega_2 \alpha_3 + \sigma_2 \alpha_4 \\
\alpha_9 &= \sigma_1 \alpha_5 - \omega_1 \alpha_6 \\
\alpha_{10} &= \omega_1 \alpha_5 + \sigma_1 \alpha_6 \\
\alpha_{11} &= \sigma_2 \alpha_7 - \omega_2 \alpha_8 \\
\alpha_{12} &= \omega_2 \alpha_7 + \sigma_2 \alpha_8 \\
\alpha_{13} &= \sigma_1 \alpha_9 - \omega_1 \alpha_{10} \\
\alpha_{14} &= \omega_1 \alpha_9 + \sigma_1 \alpha_{10} \\
\alpha_{15} &= \sigma_2 \alpha_{11} - \omega_2 \alpha_{12} \\
\alpha_{16} &= \omega_2 \alpha_{11} + \sigma_2 \alpha_{12} \\
\alpha_{17} &= \sigma_1 \alpha_{13} - \omega_1 \alpha_{14} \\
\alpha_{18} &= \omega_1 \alpha_{13} + \sigma_1 \alpha_{14} \\
\alpha_{19} &= \sigma_2 \alpha_{15} - \omega_2 \alpha_{16} \\
\alpha_{20} &= \omega_2 \alpha_{15} + \sigma_2 \alpha_{16} \\
\gamma &= b_1 \alpha_{13} + b_2 \alpha_{14} + b_3 \alpha_{15} + b_4 \alpha_{16}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.5.4 Parametrização da entrada e dos estados do sistema

Com as expressões da saída plana e suas derivadas (equações (3.48) e (3.49)), é possível montar a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \dddot{f} \\ f^{(4)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ u \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Em que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & 0 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & 0 \\ \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \gamma \end{pmatrix}$$

Portanto, a entrada u parametrizada pela saída flat e suas derivadas é:

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \ddot{\ddot{f}} \\ f^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$u = \beta_0 f + \beta_1 \dot{f} + \beta_2 \ddot{f} + \beta_3 \ddot{\ddot{f}} + \beta_4 f^{(4)} \quad (3.52)$$

3.5.5 Planejamento de trajetória

A equação (3.52) pode ser usada para cálculo da trajetória de referência $u^*(t)$ da entrada em função da trajetória imposta $f^*(t)$ para a saída plana. $f^*(t)$ é um polinômio calculado por interpolação, conforme em [23]:

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ a_{11}t^{11} + a_{10}t^{10} + a_9t^9 + a_8t^8 + a_7t^7 + a_6t^6 + a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0 \\ v_f, & \forall t > t_f \end{cases} \quad (3.53)$$

Em que t_f , chamado de tempo de subida, é o tempo em que a trajetória se estabiliza no ganho estático da saída flat v_f .

Os coeficientes a_i de $f^*(t)$ são encontrados impondo valores iniciais e finais nulos até a quinta derivada, o que exige um polinômio de ordem 11. Dessa forma, garante-se até $f^{*(4)}(t)$ uma trajetória diferenciável. A Figura 3.3 mostra trajetórias de entrada computadas para diversos valores de t_f :

3.5.6 Rastreamento de trajetória

Quando é possível medir (ou estimar) as variáveis de estado do sistema, é possível fechar a malha e usar essas medições para compensar perturbações, onipresentes em sistemas reais. Considerando a equação de entrada do sistema formado pela saída plana e suas derivadas, conforme na equação 3.52, pode-se formar a equação matricial de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \ddot{\ddot{f}} \\ f^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\beta_0}{\beta_4} & -\frac{\beta_1}{\beta_4} & -\frac{\beta_2}{\beta_4} & -\frac{\beta_3}{\beta_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \ddot{\ddot{f}} \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.54)$$

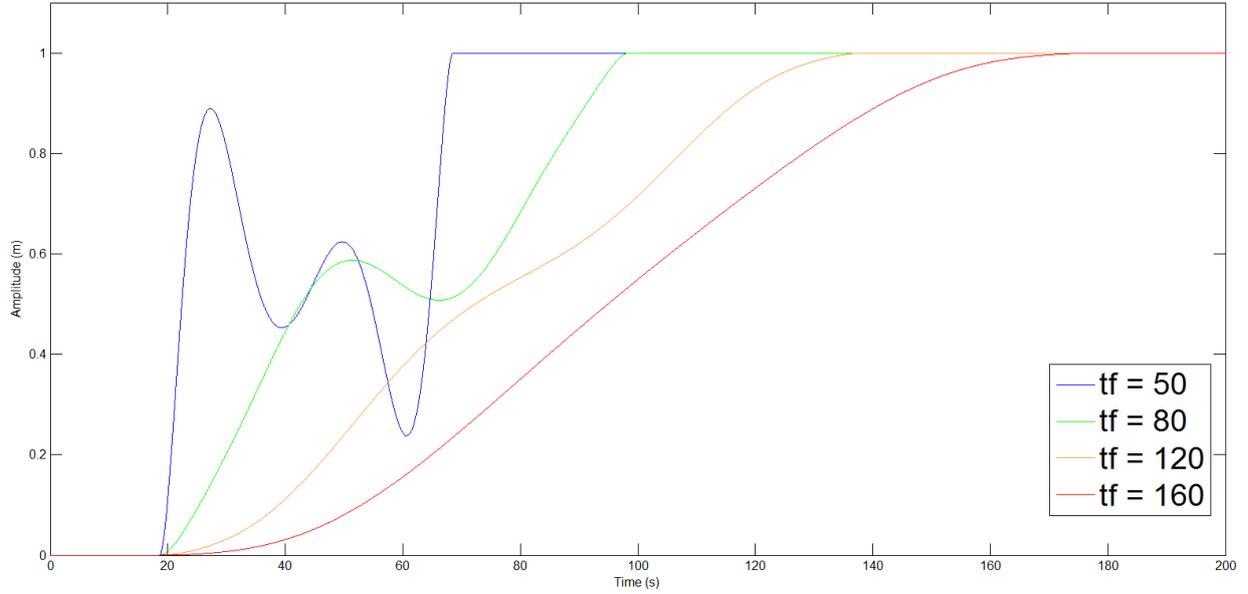


Figura 3.3: Trajetórias de referência $u^*(t)$ para diferentes tempos de subida

Um sistema descrito pela equação (3.54) é dito na forma canônica controlável, porque o sinal de controle é aplicado a uma cadeia de integradores e tem, dessa forma, garantidamente a habilidade de afetar cada variável de estado [24]. É possível definir um novo sinal de controle a partir da realimentação dinâmica dos estados, conforme em [18]:

$$v = -\frac{\beta_0}{\beta_4}f - \frac{\beta_1}{\beta_4}\dot{f} - \frac{\beta_2}{\beta_4}\ddot{f} - \frac{\beta_3}{\beta_4}\dddot{f} + \frac{1}{\beta_4}u \quad (3.55)$$

a substituição da nova entrada v no sistema (3.54) resulta em:

$$\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \dddot{f} \\ f^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \dddot{f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (3.56)$$

O sistema (3.56) é dito na forma canônica de Brunovsky. A partir desta forma, é possível trivializar a construção de uma lei de controle tal que o erro de trajetória da saída plana seja exponencialmente convergente [23]:

$$v = f^{(4)} - k_3(\ddot{f} - \ddot{f}^*) - k_2(\dot{f} - \dot{f}^*) - k_1(f - f^*) - k_0(f - f^*) \quad (3.57)$$

para que o erro $e = f - f^*$ tenha uma dinâmica estável e convirja para 0, o polinômio característico derivado da equação (3.57) precisa ter todas as raízes no semiplano esquerdo:

$$s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0 = 0 \quad (3.58)$$

Os ganhos k_i são escolhidos de forma a satisfazer essa condição. A equação (3.57) é suficiente quando tem-se somente perturbações transitórias. No caso do riser, a presença de correntes marítimas é inevitável, gerando um erro estático que é ignorado pela lei de controle. Para corrigir isso, um termo integrador é adicionado à expressão de v :

$$v = f^{*(4)} - k_3 \ddot{e} - k_2 \dot{e} - k_1 e - k_0 e - k_{int} \int_0^t e dt \quad (3.59)$$

A expressão final para a entrada do sistema com rastreamento de trajetória é dada pela substituição da equação (3.59) na equação (3.52):

$$u = \beta_0 f + \beta_1 \dot{f} + \beta_2 \ddot{f} + \beta_3 \dddot{f} + \beta_4 v \quad (3.60)$$

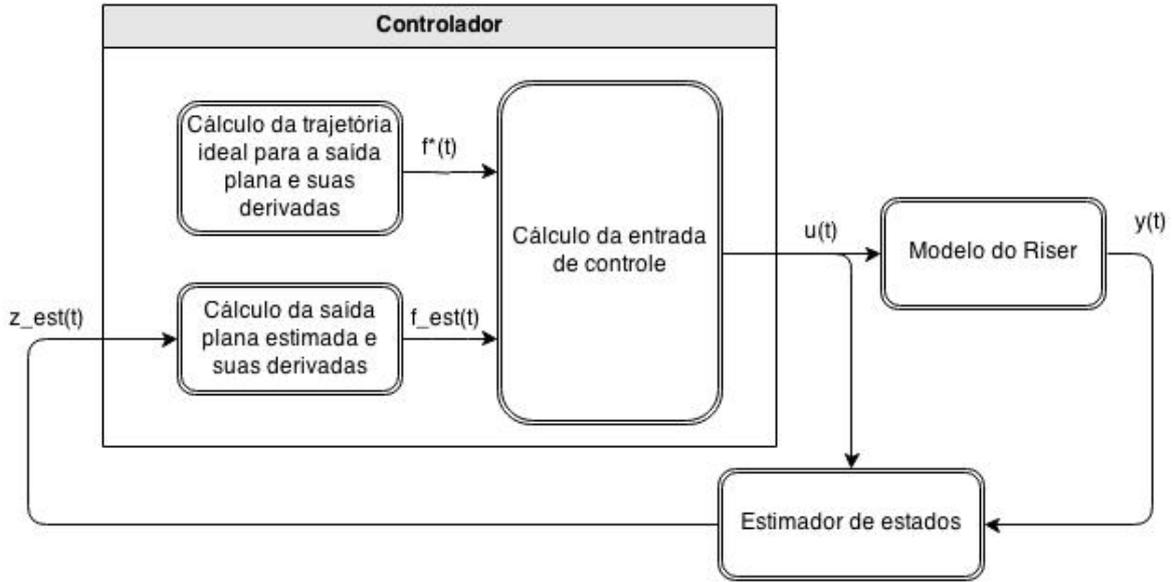


Figura 3.4: Esboço do rastreamento de trajetória com controlador flatness

A figura 3.4 esquematiza a malha para o rastreamento da trajetória do fundo do riser. É importante frisar que o bloco "Modelo do Riser" representa o sistema discretizado de ordem $2N$ (N é o número de elementos de discretização), cuja trajetória do fundo é utilizada para estimar os estados do sistema reduzido correspondente. Em outras palavras, sendo irrealizável a estimação de todos os estados do sistema distribuído, o estimador traduz a saída do mesmo na dinâmica de seus autovalores mais importantes, presentes no modelo reduzido. Um problema restante é própria estimação, sem a qual é impossível realizar a lei de controle proposta.

3.6 Estimador de estados

Para sistemas contínuos, determinísticos, expostos às perturbações controladas de um ambiente de simulação, o observador de Luenberger [24] geralmente é suficiente para quaisquer fins de estimação de estados. Primeiramente é necessário checar a observabilidade do sistema. Dado um

modelo em espaço de estados, quando sua matriz de observabilidade O_M possui posto N , o sistema é dito completamente observável:

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Visto que o sistema é observável, um observador pode ser projetado, dado seu modelo em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que L é o ganho do erro entre a saída real e a saída estimada do sistema.

A matriz L é usada para alterar os pólos do observador e assim forçar uma convergência mais rápida do erro em relação ao sistema observado. A inclusão do observador introduz os seus pólos na malha de controle, portanto as mesmas regras de estabilidade para controladores devem ser aplicadas ao observador, na forma de limitações do ganho e presença de todos os autovalores no semiplano esquerdo do plano complexo.

A substituição do modelo em espaço de estados genérico (equação 3.7) na equação (3.62) leva, após algumas manipulações algébricas, à seguinte representação:

$$\begin{aligned} (\dot{x} - \dot{\hat{x}}) &= (A - LC)(x - \hat{x}) \\ (y - \hat{y}) &= C(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Da equação acima, fica claro que a matriz de estados do erro de estimação é dada por $A - LC$. Os autovalores desta matriz são escolhidos inicialmente de forma a serem em torno de 5 vezes mais rápidos que o autovalor mais rápido do riser.

As simulações com o observador dado pela equação (3.62) logo apresentaram um problema de desestabilização do sistema. Por mais que o observador apresentasse desempenho muito bom quando o riser era sujeito a uma entrada em malha aberta, sem rastreamento de trajetória, o fechamento da malha implicava em uma divergência, podendo ocorrer desde durante a manobra de posicionamento até vários minutos após o posicionamento estar completo.

Para descobrir o motivo da divergência, simulações foram feitas, em que o sistema observado foi o próprio sistema reduzido, ao invés do riser. Não apresentaram problemas: um claro sinal de que a divergência está associada à parte desconsiderada da dinâmica do sistema, durante a redução modal. Após exaustivas simulações, a influência de alguns fatores foi observada:

- O modelo reduzido sempre possui um termo de transmissão direta D , por menor que seja, em seu modelo em espaço de estados e, por consequência, o observador também o possui. O ganho de frequências altas, ou seja, quando $w \approx \infty$, é dado diretamente por D . O observador introduz como efeito colateral um ganho para altas frequências que induz a divergência do mesmo, pois a velocidade de convergência do observador é insuficiente para lidar com essas frequências.

- O riser é um sistema que naturalmente possui atraso em função do tempo de propagação de uma excitação no topo até o seu fundo. O modelo reduzido não possui dinâmica zero durante essa fase, assim como o observador, o que leva a uma atuação errônea do controlador, que, dependendo dos ganhos escolhidos, leva à instabilidade.

Uma nova tentativa para a criação do estimador de estados teve foco em robustez, visto que a instabilidade gerada pelo observador anterior ora era determinante para o fracasso do posicionamento, ora tornava-se significativa somente após vários minutos em regime permanente.

A implementação de um filtro de Kalman foi a alternativa natural ao observador de Luenberger. As imprecisões do modelo reduzido podem ser tratadas como ruído de processo para o filtro. Com o ajuste dos valores das covariâncias dos ruídos de processo e de saída, Q e R , respectivamente, o filtro apresentou uma performance excelente e completamente estável. As equações que compõem o filtro estão todas presentes na seção 2.7.

3.7 Implementação de controle preditivo

O preditor de Smith é um tipo de controlador preditivo simples e com muitas aplicações industriais. A sua implementação é feita com o objetivo de aumentar a performance do sistema diante de perturbações transientes. O funcionamento do preditor é detalhado na seção 2.8 e dispondo do modelo reduzido com atraso na entrada, desenvolvido na seção 3.4.3, pode-se fazer a extensão da malha de realimentação conforme segue:

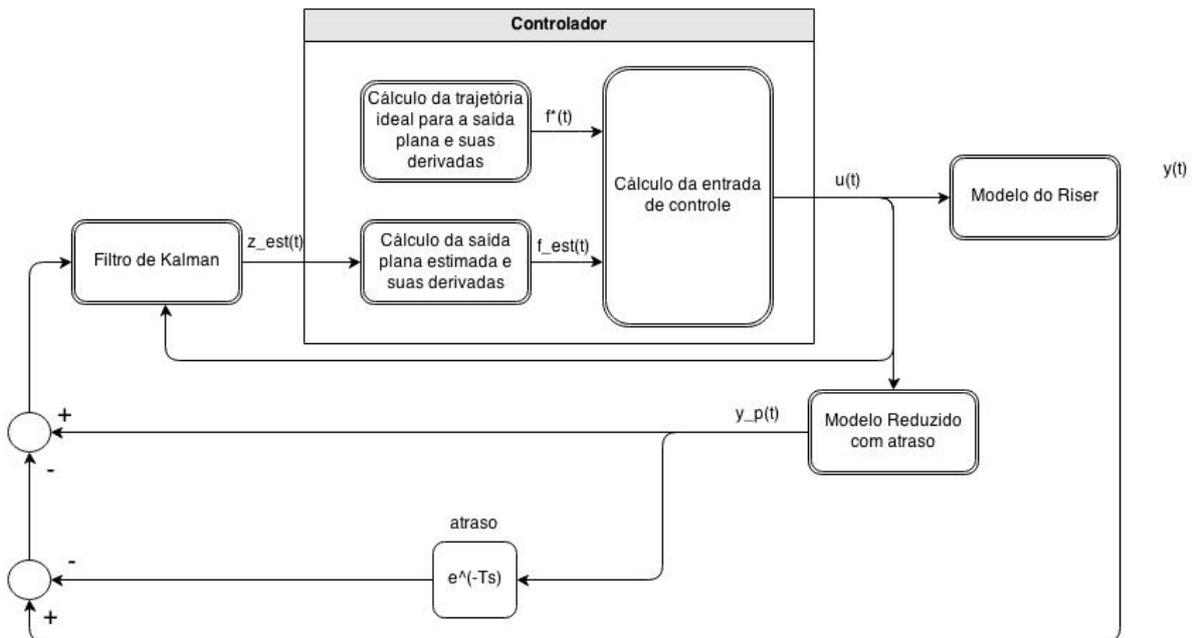


Figura 3.5: Rastreamento de trajetória com controle preditivo

O modelo reduzido com atraso é muito conveniente para a aplicação do controle preditivo. Quando a entrada não está atrasada no tempo por ϵ , o tempo morto do riser, a sua saída torna-se

adiantada e é usada para representar o comportamento do sistema isento de atrasos. O modelo interno usado pelo filtro de Kalman para a estimação dos estados, assim como aquele usado pelo controlador flatness para o cálculo da saída plana ideal e estimação da saída plana atual precisam ser o próprio modelo reduzido com atraso.

Capítulo 4

Simulações Numéricas

4.1 Introdução

Neste Capítulo apresentam-se os resultados obtidos por simulações do sistema em *MATLAB*. Na Seção 4.2 mostra-se o comportamento do sistema não-controlado. Na Seção 4.3 estão presentes os resultados do planejamento de trajetória baseado na combinação das técnicas de redução de ordem e controle por *flatness*. A Seção 4.4 compara a performance do controle em malha fechada com e sem o preditor de smith, e mostra resultados da simulação diante de perturbações de correntes marítimas e ondas. A Seção 4.5 apresenta os resultados obtidos com controlador projetado com base na teoria de Lyapunov.

4.2 Resposta a uma entrada rampa

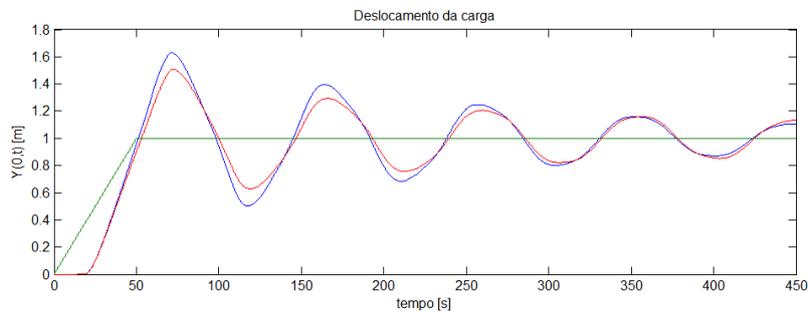
Um passo essencial na simulação do riser, cujos parâmetros são mostrados na Tabela 4.1, foi analisar a sua resposta a uma rampa e colher informações sobre estabilidade, frequência e ganho do sistema. Também serve para a validação da representação linear do atrito e da retirada do termo de rigidez do riser (seção 2.5.1).

Na figura 4.1(a) observa-se a resposta do riser carregado com atrito não linear (azul) e atrito linearizado (vermelho). Nas primeiras oscilações, a diferença entre os dois modelos é bem perceptível e decorre da aceleração maior imposta ao riser, que decai conforme a carga se estabiliza. Como a linearização do atrito exige o uso de uma velocidade média para a carga, grandes variações de velocidade implicam em um erro maior. Desta forma, a suavidade das trajetórias planejadas é essencial para diminuir a discrepância entre os dois modelos.

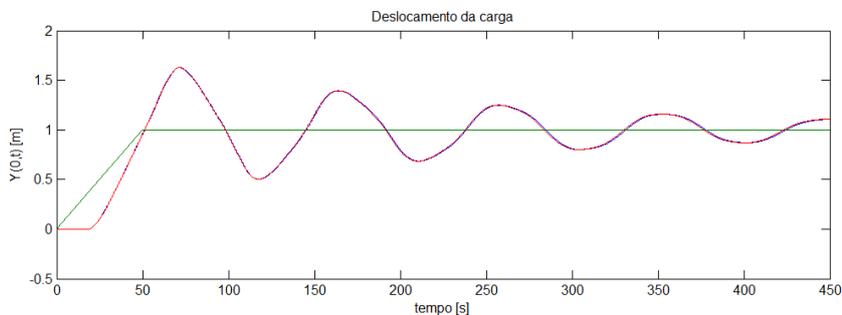
No segundo caso (4.1(b)), mostra-se a influência do termo de quarta ordem de deflexão no modelo do riser (vermelho). Como esperado, as influências são pequenas e se limitam a oscilações de alta frequência e baixa amplitude. Isso ocorre porque o termo de quarta ordem introduz uma

Parâmetros do riser	
Número de elementos de discretização	300
Diâmetro externo (d_e)	0,15 m
Diâmetro interno (d_i)	0,12 m
Módulo de Elasticidade do aço (E)	$210 \cdot 10^9$ Pa
Densidade do aço	$8,03 \cdot 10^3$ kg/m ³
Comprimento (L)	2000 m
Coefficiente de arrasto do cilindro (C_d)	1,2
Coefficiente de massa adicional do cilindro (C_m)	2,0
Coefficiente de arrasto da carga	0,4
Coefficiente de massa adicional da carga	0,5
Massa da carga	40 ton

Tabela 4.1: Lista de parâmetros do modelo do riser simulado



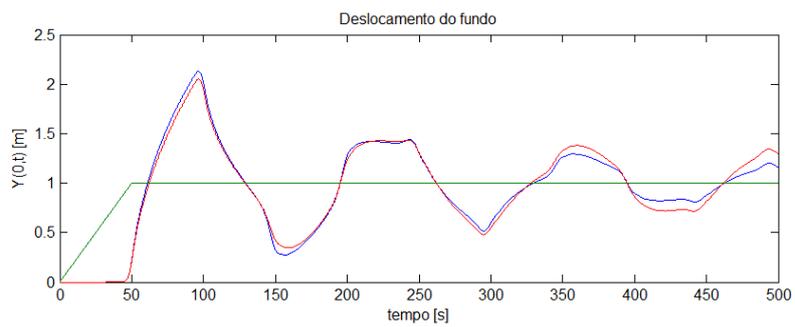
(a) Atrito linearizado (vermelho), atrito não-linear (azul)



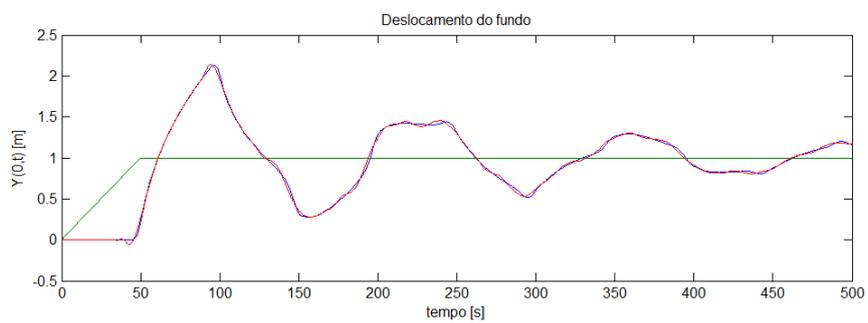
(b) Modelo de quarta ordem (vermelho), modelo de segunda ordem (azul)

Figura 4.1: Comparação entre modelos (riser carregado)

relação de proporcionalidade entre velocidade de propagação e a frequência de ondas no riser. Este efeito, mais claro para o caso do riser livre (figura 4.2(b)), resulta em oscilações no mesmo antes do início do movimento do modelo de segunda ordem (azul).



(a) Atrito linearizado (vermelho), atrito não-linear (azul)



(b) Modelo de quarta ordem (vermelho), modelo de segunda ordem (azul)

Figura 4.2: Comparação entre modelos (riser livre)

4.3 Planejamento de trajetória

O planejamento da trajetória foi feito com base na combinação das técnicas de redução de ordem e controle por flatness (Seções 3.4 e 3.5). As seções seguintes apresentam o desempenho do controle em malha aberta do sistema na ausência de perturbações e para vários tempos de subida t_s . Os gráficos apresentam: trajetória planejada para a entrada $u^*(t)$ (azul), trajetória planejada para a saída $y^*(t)$ (vermelho pontilhado), trajetória real do sistema $y(t)$ (verde).

4.3.1 Riser carregado

Na figura 4.3, observa-se primeiramente que o planejamento não exhibe uma resposta ideal, por dois motivos:

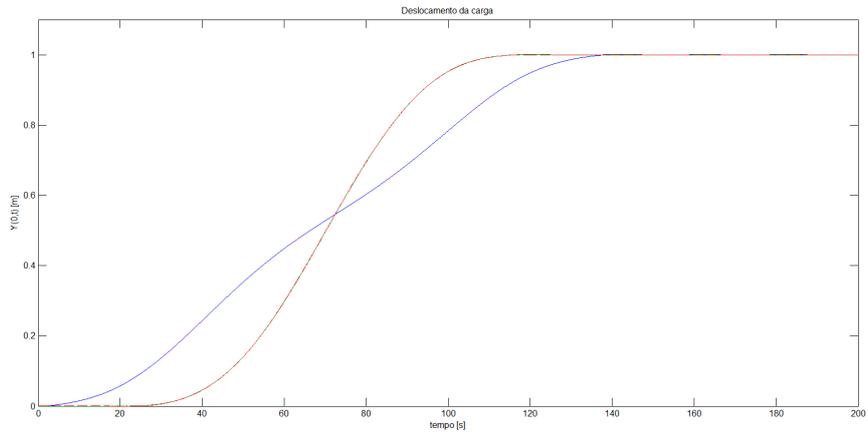
- O sistema reduzido é uma aproximação do sistema real e um planejamento baseado naquele não leva em conta toda a complexidade desse.
- Os entraves para o planejamento da saída y do sistema reduzido, como detalhado na seção 3.5, exigem um método indireto. Quando tempos de subida muito pequenos (4.3(c)) são aplicados, o uso desse método produz comportamentos indesejados na saída planejada (vermelho pontilhado) logo antes do início da manobra de reentrada e do fim da mesma. O sistema real, ao tentar seguir essa trajetória, adquire um comportamento oscilatório de amplitude razoável, prejudicando a manobra.

Com a redução de ordem não se espera o planejamento de uma trajetória perfeita, mas que, sendo próximas o suficiente de uma solução analítica (muitas vezes não disponível na literatura), tornam-se viáveis para aplicação e resultam no projeto de um controlador de complexidade relativamente baixa. A figura 4.3(b) mostra a qualidade que se pode obter da trajetória planejada para tempos de subida ainda pequenos.

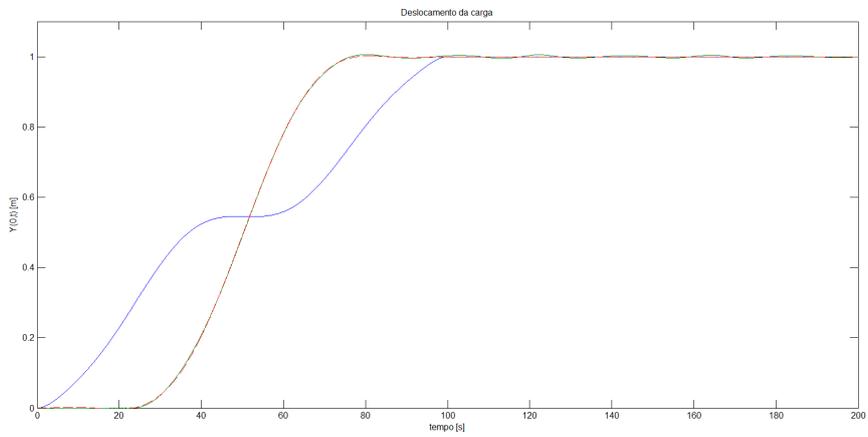
4.3.2 Riser livre

As mesmas ressalvas do planejamento para o riser carregado podem ser feitas para o livre. Destaca-se que nesse caso, como se vê na figura 4.4, as distorções na saída planejada aparecem para tempos de subida mais altos (figura $t_s = 100$), mas tornam-se desprezíveis da mesma forma quando t_s é grande o suficiente. A tentativa de reentrada com $t_s = 60s$ chega a gerar sobresinal de 90% na saída.

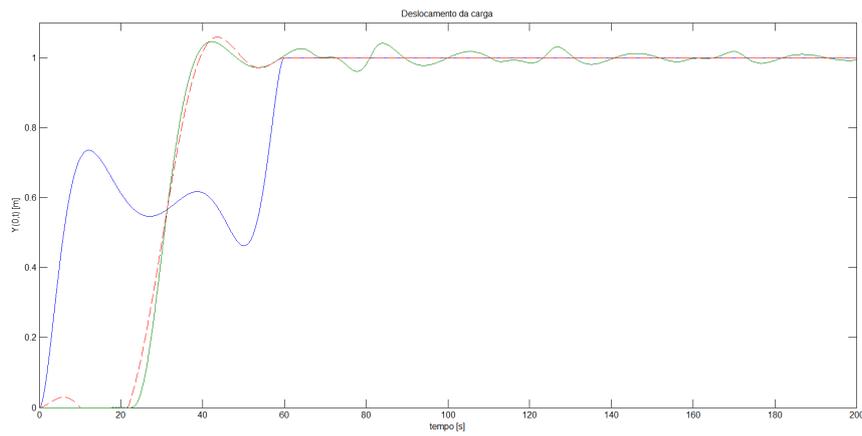
As diferenças entre os resultados para os risers carregado e livre são explicados por seus modelos: no primeiro caso, a presença de uma grande carga no fundo amortece altas frequências e concentra a maior parte da energia do sistema em menos autovalores, gerando um modelo reduzido mais fiel ao original. Com o riser livre, além da redução modal ser menos fiel, a sensibilidade do fundo a desvios de trajetória é maior.



(a) $t_s = 140s$

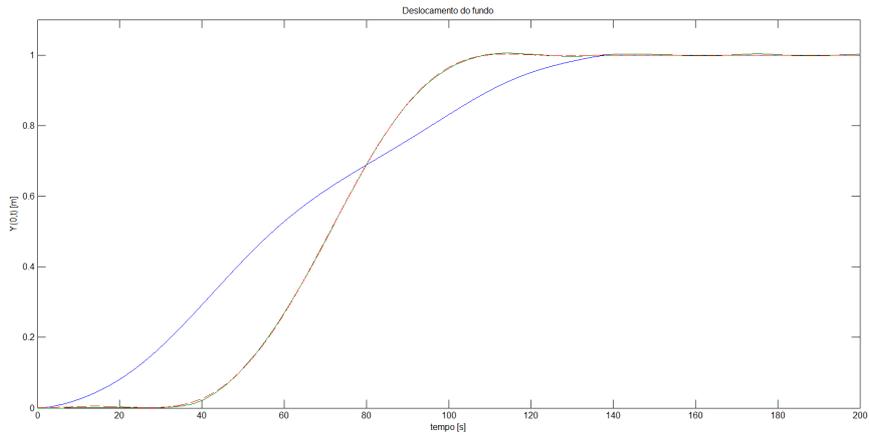


(b) $t_s = 100s$

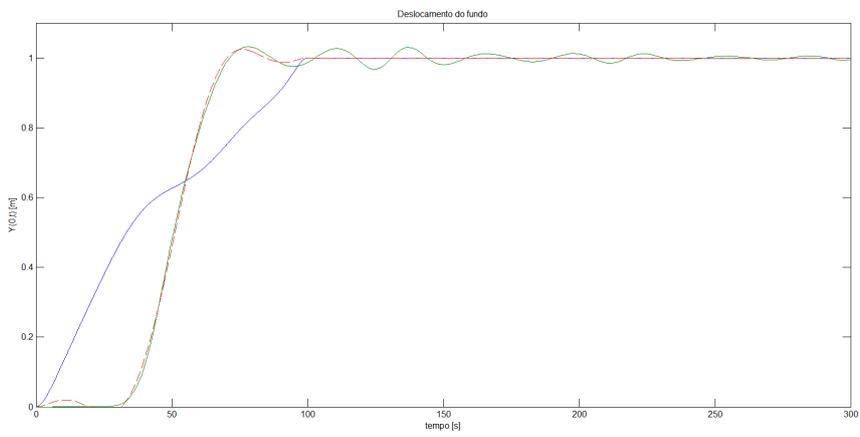


(c) $t_s = 60s$

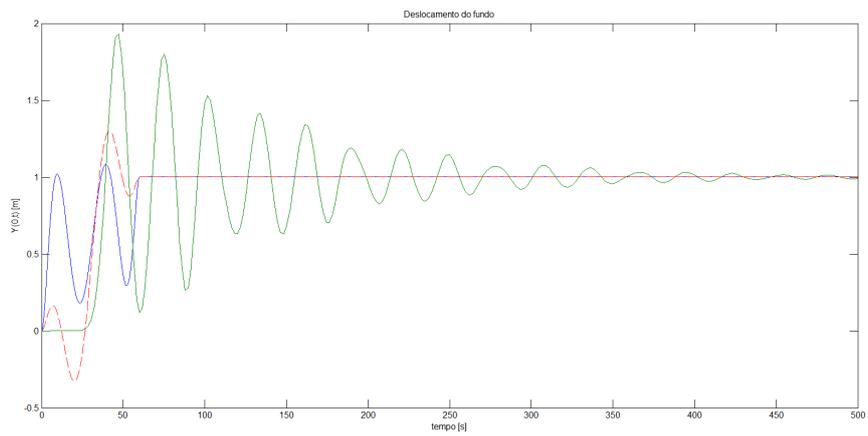
Figura 4.3: Resposta à trajetória planejada (riser carregado)



(a) $t_s = 140s$



(b) $t_s = 100s$



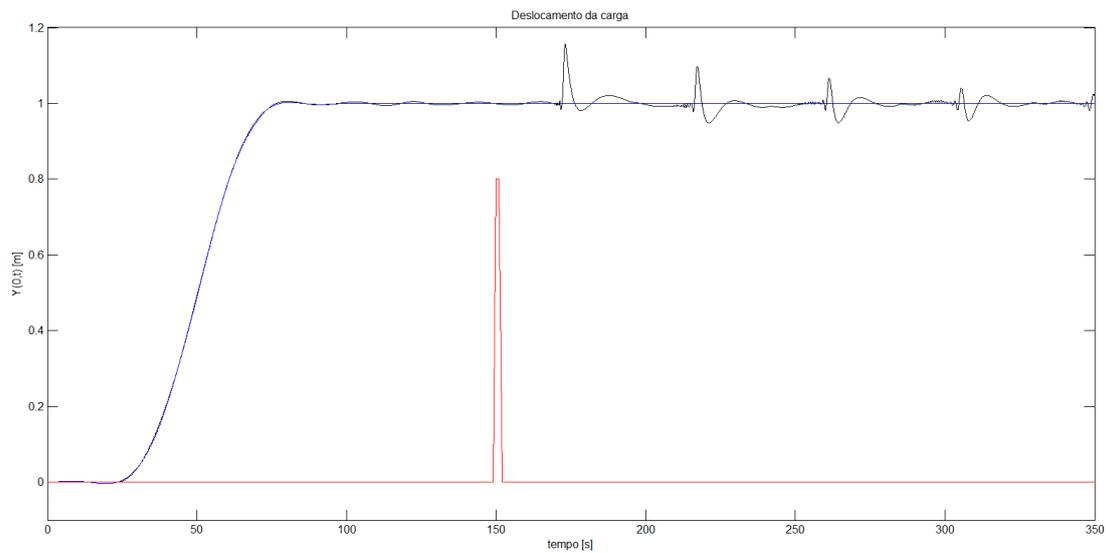
(c) $t_s = 60s$

Figura 4.4: Resposta à trajetória planejada (riser livre)

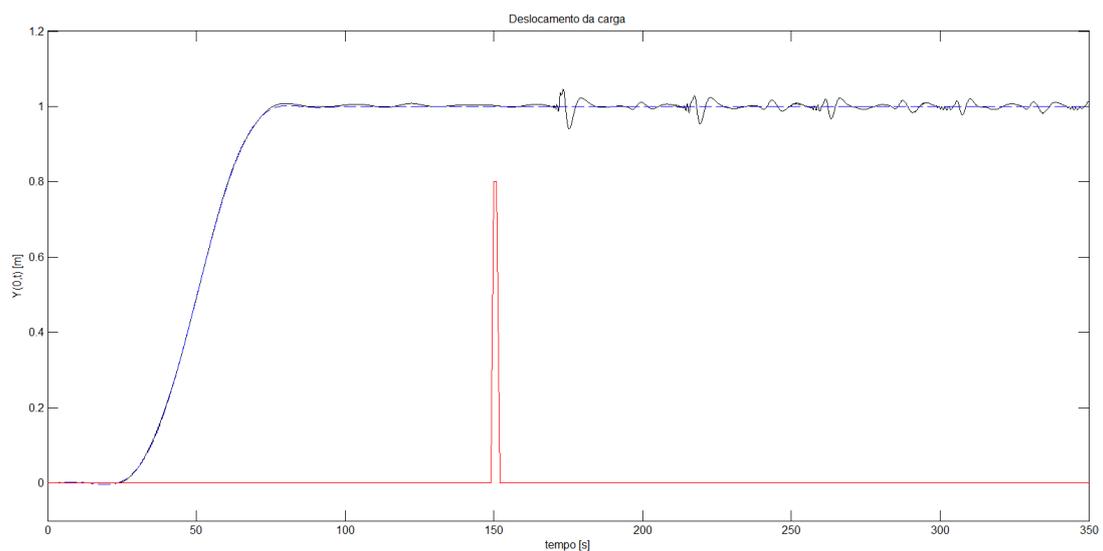
4.4 Rastreamento de trajetória

4.4.1 Performance do preditor

É esperado que a inclusão do preditor de smith no rastreamento de trajetória (figura 3.5) reduza o tempo de convergência do erro entre a saída esperada e a saída atual, em comparação com a malha tradicional. O preditor permite que o controlador flatness tenha um ganho maior, com seus pólos alocados mais afastados do eixo $j\omega$ no plano complexo, sem desestabilizar a malha, levando a uma reação mais rápida do controlador. Sistemas com atraso possuem uma margem de ganho menor que sua contraparte exata sem o atraso. O preditor efetivamente elimina esse atraso da computação do vetor de estados, possibilitando a dinâmica mais rápida do controlador.



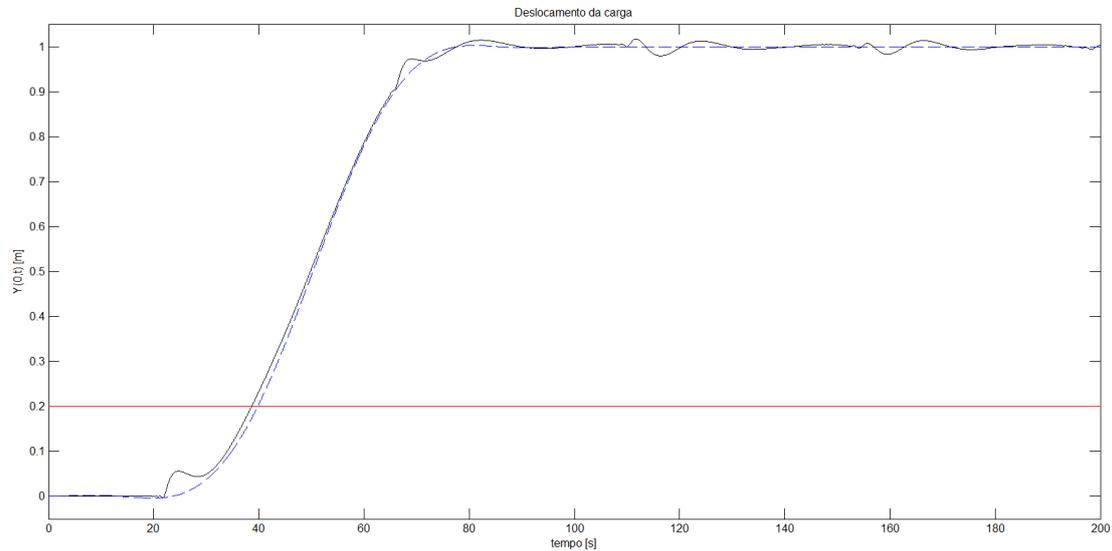
(a) Sistema sem preditor



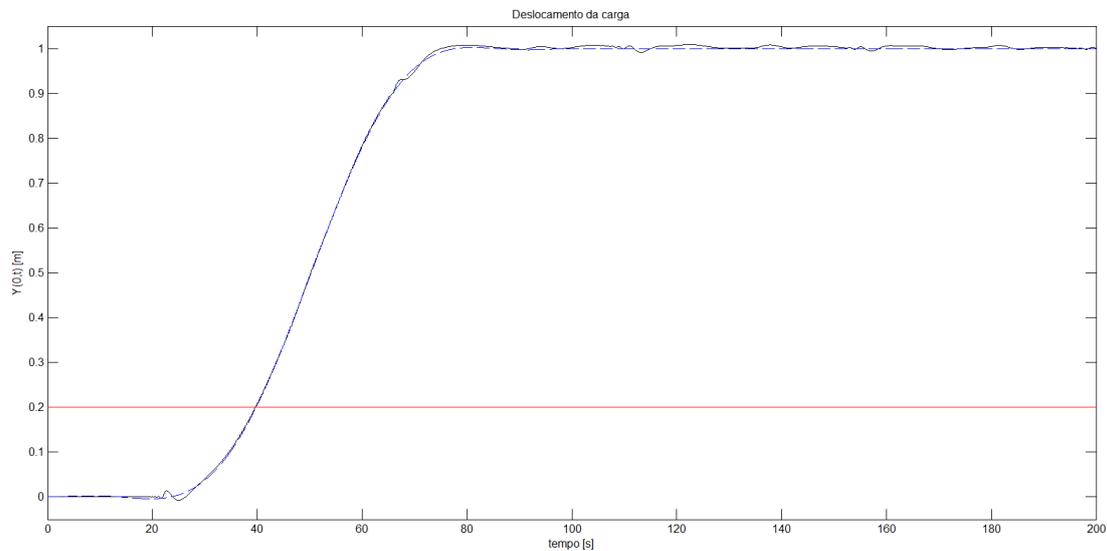
(b) Sistema com preditor

Figura 4.5: Resposta do sistema controlado a uma perturbação transiente no topo

A figura 4.5 mostra a resposta do fundo do riser carregado (preto) diante de uma perturbação composta por um degrau positivo em $t = 150s$ e um degrau negativo em $t = 151s$ (vermelho). A linha azul mostra saída planejada para o fundo. A perturbação foi escolhida com uma amplitude muito grande (80%) em relação à posição final da manobra, para mostrar com clareza o seu efeito. A amplitude do desvio causado no sistema com o preditor é em torno de 4 vezes menor, consequência direta das características preditivas do mesmo e do uso de um ganho maior para o controlador.



(a) Sistema sem preditor



(b) Sistema com preditor

Figura 4.6: Resposta do sistema controlado a uma perturbação constante no topo

A figura 4.6 mostra o mesmo sistema diante de uma perturbação degrau de amplitude 0.2, representando desvios entre a trajetória planejada para o topo do riser e a de fato executada. Tais desvios podem ocorrer dependendo do arranjo real do atuador. O sistema com o preditor converge mais rapidamente para a trajetória desejada para a manobra.

4.4.2 Correntes marítimas

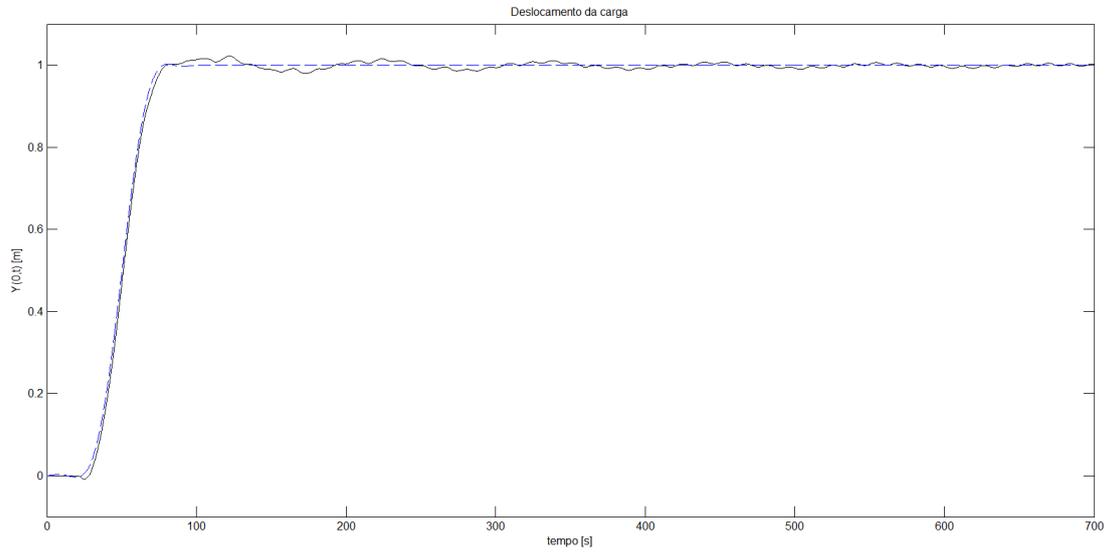
Uma das principais perturbações em sistemas marinhos, as correntes marítimas geram um desvio lateral no corpo do riser que resultam em um offset na trajetória realizada e na posição final do fundo. Tratar esse offset foi o foco do desenvolvimento do controlador flatness e se dá pela presença do termo integrador do erro de trajetória na lei de controle (equação (3.59)).

A introdução da perturbação se dá modificando a modelagem das forças hidrodinâmicas para levar em conta a velocidade do fluido $U(z, t)$:

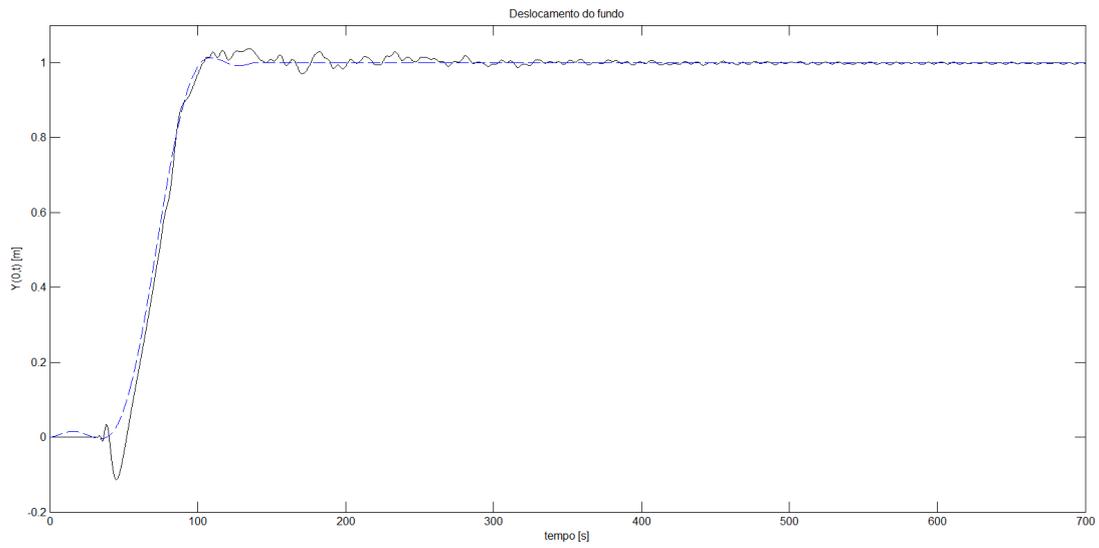
$$F_n(z, t) = m_f \left(\frac{\partial U}{\partial t}(z, t) - \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} \right) + \mu \left| U(z, t) - \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \left(U(z, t) - \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right) + m_I \frac{\partial U}{\partial t}(z, t) \quad (4.1)$$

em que m_I é chamado de coeficiente de inércia.

É razoável admitir a corrente constante no tempo durante a manobra de reentrada [6]. Desta forma, $\frac{\partial U}{\partial t}(z, t) = 0$. Como a corrente é mais significativa em profundidades menores, criou-se um perfil trapezoidal para a mesma: nos primeiros 100 m a corrente é constante e igual a 1 m/s e de 100 a 200 metros a corrente diminui linearmente até 0. Os valores se enquadram no esperado para a corrente do Golfo, uma das mais fortes conhecidas [25].



(a) Riser carregado



(b) Riser livre

Figura 4.7: Resposta do sistema controlado a perturbações de correntes marítimas

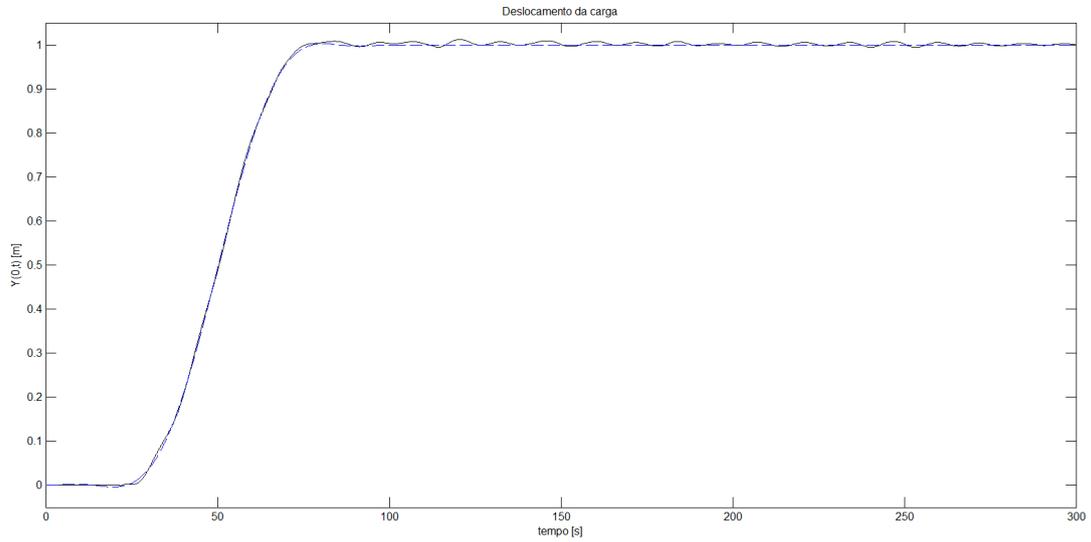
Na figura 4.7 mostra-se o desempenho do controlador. Para ambos os casos a trajetória executada teve pouco desvio e as oscilações ao fim da manobra tiveram baixa amplitude, suficiente para a realização da reentrada com sucesso. Mais importante, a longa linha temporal mostra que não há erro estático na posição final.

4.4.3 Ondas

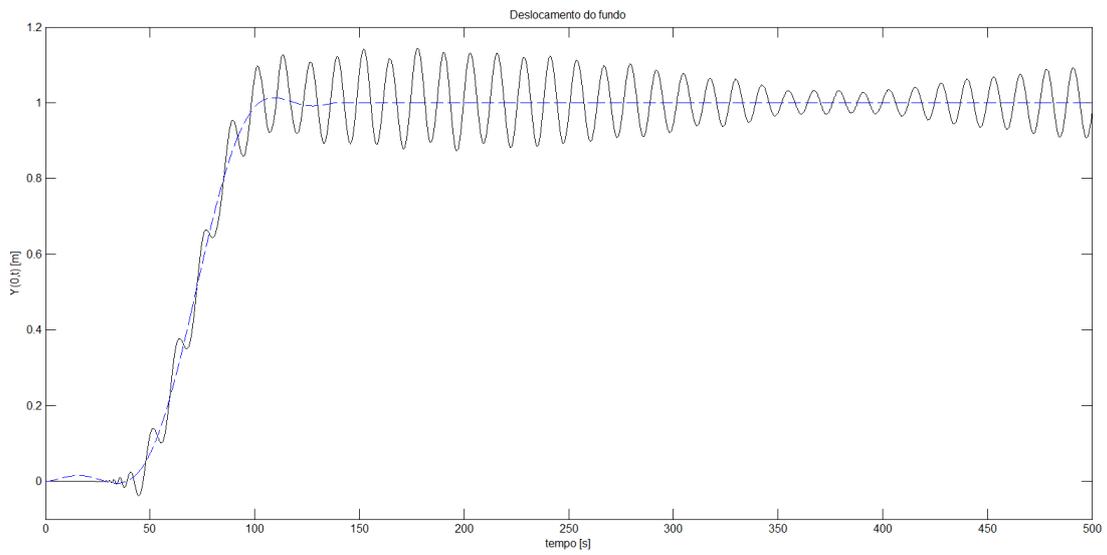
A abordagem para a modelagem de ondas foi mais simplista. Considera-se na entrada do sistema (topo) uma perturbação periódica composta por dois senos de amplitude e frequências diferentes, semelhante ao feito em [6].

$$P(t) = 0.1 \sin(\pi t) + 0.15 \sin(0.2\pi t) \quad (4.2)$$

Essa perturbação permanente tem grande amplitude relativa e é utilizada para destacar nos gráficos seus efeitos. A figura abaixo mostra como o seu efeito é naturalmente amortecido para o riser carregado, além de controlado com mais sucesso. Para o riser livre, sua influência é claramente mais forte: a operação de reentrada, nessas condições, poderia esperar pelo vale na amplitude da oscilação (em torno de $t = 400s$) para a conexão efetiva do riser.



(a) Riser carregado



(b) Riser livre

Figura 4.8: Resposta do sistema controlado à perturbação $P(t)$

4.5 Rastreamento de trajetória por Lyapunov

As equações (3.24) e (3.28) descrevem controladores para garantir que o riser carregado e o riser livre, respectivamente, convirjam durante o rastreamento de trajetória. Para simulação com a ferramenta *Simulink*, é preciso para avaliar $\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t)$ em função das variáveis de estado do sistema discretizado. Não é possível o uso da expressão de diferenças centrais quando $z = L$ já que este elemento possui apenas um vizinho, para baixo. Portanto, faz-se uso da diferença para trás como em (2.3):

$$\frac{\partial \Upsilon_R}{\partial z}(L, t) = \frac{\Upsilon_1 - \Upsilon_2}{l} \quad (4.3)$$

em que $\Upsilon_1 = \Upsilon_R(L, t)$ e $\Upsilon_2 = \Upsilon_R(L - l, t)$.

A equação (3.24) pode ser discretizada como:

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0(L, t) - k \int_0^t \left(\left(\frac{L}{q^2} + \frac{T_0}{ml} \right) \Upsilon_1 - \frac{T_0}{ml} \Upsilon_2 \right) dt \quad (4.4)$$

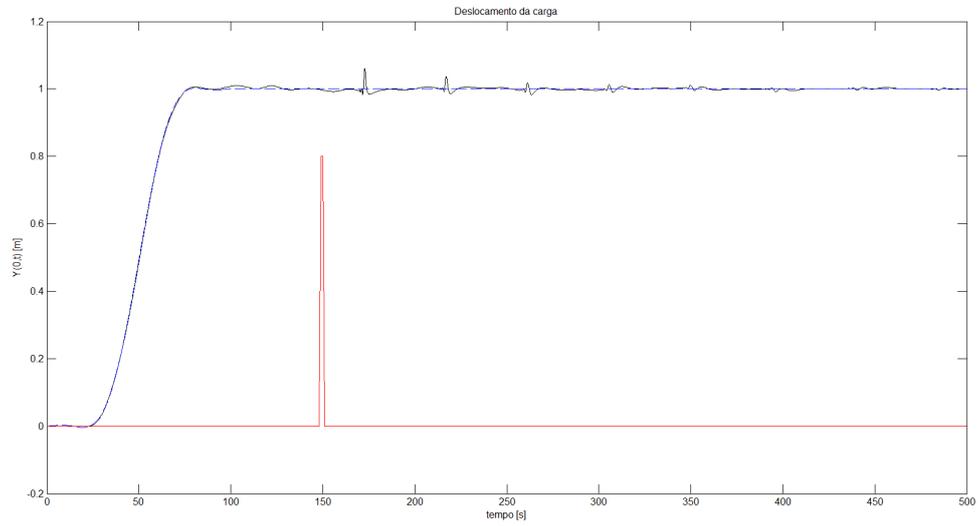
Da mesma forma, a versão discreta da (3.28) é dada por:

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0(L, t) - k \int_0^t \left(\left(\frac{1}{q^2} + g' \right) \Upsilon_1 - g' \Upsilon_2 \right) dt \quad (4.5)$$

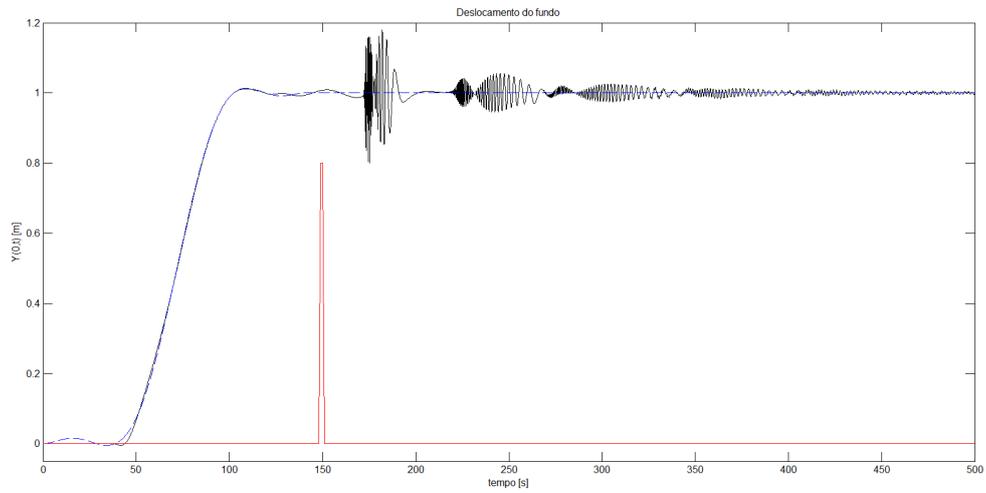
É importante notar que a entrada do controlador é uma composição de $\Upsilon_1(t)$ e $\Upsilon_2(t)$, ou seja não se utiliza qualquer dado de movimentação da carga na ponta inferior do cabo. O sinal de controle mira a minimização da energia no topo. A propagação desse sinal gera a estabilização do sistema inteiro diante da ausência de perturbações, como provado na seção 3.3.

A Figura 4.9 demonstra o desempenho do controlador para riser carregado (parâmetros: $q = 2$ e $k = 0.05$) e para o riser livre (parâmetros: $q = 0.1$ e $k = 0.1$). Uma perturbação impulso de amplitude muito alta foi escolhida para testar a velocidade de convergência do sistema. Para os dois casos, o desempenho foi bom, levando em conta que o controlador nem sequer tem acesso à posição do fundo do riser e que a sensibilidade do riser livre a tal impulso é muito maior que o riser carregado, como já explicado. O fato da realimentação se dar no topo apresenta uma vantagem: o atraso no sinal de erro é praticamente desprezível e possibilita uma ação rápida. Uma malha com o preditor se torna desnecessária. Fora isso, a implementação do sensoramento do topo é bem mais simples que no fundo, um benefício prático desse controlador.

Na Figura 4.10 vê-se a grande desvantagem desse controlador. A presença de correntes marítimas gera um erro estático na saída que não é percebido pelo controlador.



(a) Riser carregado



(b) Riser livre

Figura 4.9: Resposta do sistema controlado (preto) a uma perturbação impulso (vermelho)

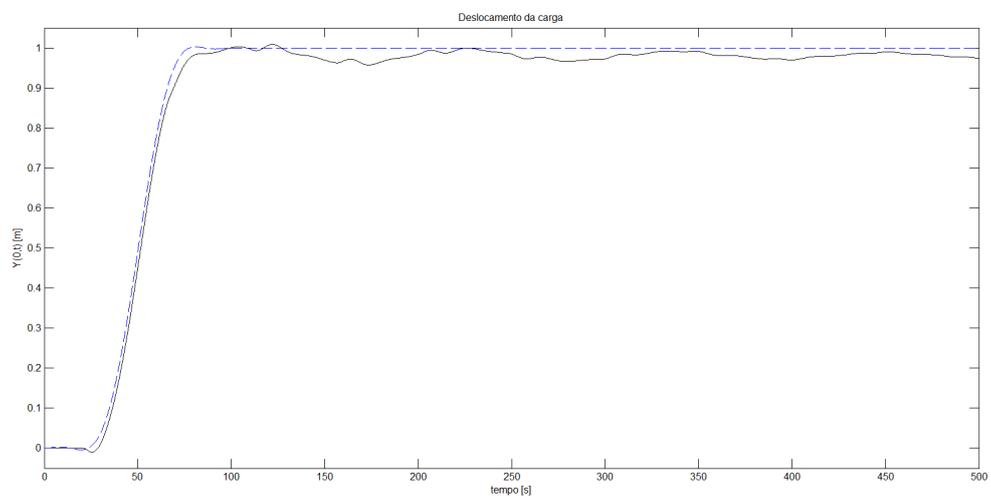


Figura 4.10: Resposta do sistema controlado pela equação 4.4 diante de correntes marítimas (como em 4.4.2) (riser carregado)

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, estudou-se a modelagem e o controle para o posicionamento de um riser vertical na presença e ausência de um equipamento *subsea* em sua extremidade inferior. Para representação do sistema em espaço de estados, utilizou-se o método das diferenças finitas.

Uma estratégia de planejamento de trajetória foi desenvolvida a partir da decomposição e redução modal do sistema e posterior uso da propriedade de planicidade. Para o rastreamento, duas estratégias diferentes foram desenvolvidas: uma lei de controle derivada da teoria de estabilidade de Lyapunov e outra proveniente da abordagem *flatness*. No caso da primeira, o desempenho alcançado para perturbações transientes foi muito satisfatório, todavia, o controlador permanece com um problema de erro estático na inclusão de correntes marítimas como perturbação. Um próximo passo seria modificar a lei de controle, de modo que essa inclua um termo integrador para o erro e corrija o erro estático. Este trabalho envolve o desenvolvimento matemático de uma nova função de Lyapunov. Outra otimização consiste em usar soluções analíticas para o planejamento de trajetória ao invés do modelo reduzido.

O controlador baseado em *flatness* teve um desempenho satisfatório inclusive na presença de correntes marítimas. Para tal, usou-se um termo integrador para o erro da trajetória da saída plana, que é uma adaptação simples de se fazer na lei de controle original. A inclusão do preditor de Smith na malha de realimentação provou-se como melhoria através dos testes com perturbações na entrada do sistema. Um problema a ser resolvido consiste em encontrar um meio de, se possível, impedir os comportamentos vistos na trajetória planejada pelo modelo reduzido para a saída do fundo do riser. Essas distorções limitam a velocidade com que a trajetória pode ser executada com confiabilidade.

Por último, as simulações foram essenciais para a validação das leis de controle, todavia, somente a implementação física do sistema pode determinar a completa aplicabilidade das mesmas, assim como os parâmetros de ganho e alocação de polos de controladores mais eficientes para a manobra de reentrada. Portanto, propõe-se a criação de uma bancada laboratorial para a realização de experimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] (ORGANIZATION), N. V. *Dynamic Risers: DNV Offshore Standard Dnv-OS-F201, 2010*. [S.l.]: BDet Norske Veritas, 2010. (Offshore standard).
- [2] YAMAMOTO M.; MOROOKA, C. G. I. Posicionamento dinâmico de plataformas petrolíferas flutuantes com o uso de lâmina nebulosa. *Anais do 24º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás.*, n. 2063, 2003.
- [3] YAMAMOTO, C. M. M.; UENO, S. Dynamic behavior of a semi-submersible platform coupled with drilling riser during re-entry operation in ultra-deep water. *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering - OMAE2007*, San Diego, USA., n. 29221, 2003.
- [4] MEURER, T. *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. [S.l.]: Springer, 2012. (Communications and Control Engineering). ISBN 9783642300158.
- [5] Disponível em: <<http://www.dartmouth.edu/~mqphan/lchlights.html>>.
- [6] FORTALEZA, E. *Active Control Applied to Offshore Structures: Positioning and Attenuation of Vortex Induced Vibrations*. Tese (Doutorado) — ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS, 2009.
- [7] SARPKEYA, T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low keulegan-carpenier numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 165, p. 61–71, 1986.
- [8] Disponível em: <<http://www.rigmanufacturer.com/bop.html>>.
- [9] ALBUQUERQUE, D. G. *Modelagem e controle de risers em operacoes offshore*. Brasilia, Brazil, Projeto de Graduacao em Engenharia Mecanica – Universidade de Brasilia. 2012.
- [10] SLOTINE, J. L.; W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 9780130408907.
- [11] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- [12] BROWN, R.; HWANG, P. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*. [S.l.]: Wiley, 2012. (CourseSmart Series). ISBN 9780470609699.
- [13] OGATA, K. *Discrete-time control systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995. ISBN 9780130342812.

- [14] INGIMUNDARSON, A.; HAGGLUND, T. Robust tuning procedures of dead-time compensating controllers. *Control Engineering Practice*, v. 9, p. 1195–1208, 2001.
- [15] SMITH, O. J. M. A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, v. 6, n. 2, p. 28–33, 1959.
- [16] DAHLEH M.; DAHLEH, M. V. G. *Lectures on dynamic systems and control. Chapter 12: Modal Decomposition of State-Space Models*. 2011.
- [17] ROWELL, D. *Modal Decomposition and the Time-Domain Response of Linear Systems*. 2004.
- [18] SIRA-RAMÍREZ, H.; AGRAWAL, S. *Differentially Flat Systems*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2004. (Automation and Control Engineering). ISBN 9780824754709.
- [19] SERRE, J.-P. Geometrie algebrique et geometrie analytique. *Universite de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, ISSN 0, n. 1-42, 1956.
- [20] FLIESS, M. et al. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, v. 61, n. 6, p. 1327–1361, 1995.
- [21] PETIT N.; ROUCHON, P. *Flatness of heavy chain systems*. Las Vegas, Nevada, USA: Conference on Decisions and Control, 2002.
- [22] FILHO J. O. A.; FORTALEZA, E. L. Motion planning and tracking for marine vessels. *OMAE2013*, 2013.
- [23] LEVINE, J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-based Approach*. [S.l.]: Springer, 2009. (Mathematical Engineering). ISBN 9783642008399.
- [24] NISE, N. *Control Systems Engineering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Incorporated, 2011. ISBN 9780470646120.
- [25] Disponível em: <<http://hypertextbook.com/facts/2002/EugeneStatnikov.shtml>>.