



PROJETO DE GRADUAÇÃO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM FLUIDO
MAGNÉTICO SOBRE PLACA PLANA.

Por,
ARTHUR ALVES RIOS CAMPOS

Brasília, Junho de 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

**MODELAGEM NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
DE FLUIDOS MAGNÉTICOS EM GEOMETRIAS
REGULARES**

Arthur Alves Rios Campos

Trabalho final de graduação submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

APROVADO POR:

Prof. Rafael Gabler Gontijo, DSc. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, DSc. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

José Luiz da Fontoura Rodriguez, DSc. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Brasília/DF, Julho de 2016.

Resumo

Este trabalho consiste no estudo a partir de simulações numéricas do escoamento de um fluido magnético sobre placa plana. O objetivo deste estudo é explorar os mecanismos de transporte produzidos pela interação entre o fluido magnético em movimento com o campo magnético aplicado. A principal diferença deste trabalho com o problema clássico de camada limite é o acoplamento entre o campo de velocidades do fluido e sua magnetização. Este estudo abre caminhos para aplicações como controle da camada limite e redução de arrasto viscoso. Para realização deste trabalho um código computacional não comercial será desenvolvido utilizando o método das diferenças finitas e a formulação de vorticidade e função de corrente. O método proposto evita a utilização de algoritmos de acoplamento pressão-velocidade que podem gerar complexidades computacionais quanto a programação e aumentar o custo computacional. Esta formulação é adequada ao problema pois garantimos que o regime de escoamento é incompressível e bidimensional. O método numérico é descrito em detalhes e comparados com análises de escalas propostas pelo autor. A validação do código é feita através da comparação do problema não magnético com a solução analítica clássica proposta por Blasius. O propósito deste trabalho é mostrar que a interação entre o escoamento e o campo magnético levam a novos padrões de escoamento dependendo da topologia do campo magnético externo e das condições de contorno utilizadas. Diferentes regimes de magnetização são explorados no problema.

Palavras chave: Vorticidade e função de corrente, fluido magnético, modelo de magnetização, tensor de Maxwell, equação constitutiva.

Abstract

This work performs a numerical study of a magnetic fluid flow over a flat plate. The goal is to explore several new features of the boundary layer problem. The main difference from classical laminar boundary layers is that in the present work the flow interacts with controllable magnetic fields. This interaction opens the doors for several new possible applications, such as boundary layer control and fluid friction reduction. In order to perform this study we developed a non commercial research code based on the finite difference method using a vorticity-stream function formulation. The proposed formulation avoids the necessity of using a pressure-velocity coupling algorithm as long as we are dealing with a incompressible fluid. The numerical method is described in details and the results are compared with a rigorous scaling analysis performed by the authors. The code validation is done by comparing the non magnetic problem with the classical Blasius theoretical solution. The idea of this paper is to show that the interaction between the magnetic and velocity fields leads to a new and interesting flow with several possible patterns depending on the magnetic field boundary conditions. We also explore different regimes of magnetization.

Keywords: Vorticity-Stream Function. magnetic fluid, magnetization model, Maxwell's stresses, constitutive equation.)

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Ferrofluidos | 1 |
| 1.2 | Camada limite | 2 |
| 2 | Objetivos | 5 |
| 3 | Fundamentação teórica | 7 |
| 3.1 | Pólos, campos, forças e torques magnéticos | 7 |
| 3.2 | Lei de Gauss para o magnetismo | 9 |
| 3.3 | Lei de Ampère-Maxwell | 11 |
| 3.4 | O tensor de Maxwell | 13 |
| 3.5 | Magnetização dos ferrofluidos | 15 |
| 3.5.1 | Relaxação magnética | 15 |
| 3.5.2 | Magnetização de equilíbrio: superparamagnetismo | 16 |
| 3.5.3 | Magnetização de não equilíbrio: um modelo evolutivo. | 19 |
| 3.5.4 | Efeito magneto-viscoso | 22 |
| 3.6 | Lei de conservação da massa | 24 |
| 3.6.1 | Função de corrente | 24 |
| 3.7 | Conservação do momento linear para um ferrofluido | 25 |
| 3.8 | Conservação do momento angular para um ferrofluido | 25 |
| 3.9 | Equação do movimento para um ferrofluido | 27 |
| 3.10 | Equação da vorticidade para um ferrofluido | 28 |
| 4 | O problema da camada limite magnética | 29 |
| 4.1 | Formulação do problema da camada limite para um ferrofluido | 29 |
| 4.2 | Adimensionalização das equações governantes | 32 |
| 4.3 | Análise de escala | 34 |
| 4.4 | Formulação vorticidade - função de corrente para o problema | 39 |
| 5 | Formulação numérica | 42 |
| 5.1 | Diferenças Finitas | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1.1 | Derivadas de primeira ordem | 42 |
| 5.1.2 | Derivadas de segunda ordem | 44 |
| 5.2 | Discretização das equações governantes | 45 |
| 5.3 | Proposta de um algoritmo para a solução numérica | 47 |
| 6 | Resultados e Discussões | 49 |
| 6.0.1 | Validação do código | 49 |
| 6.0.2 | Resultados para campo magnético constante: | 50 |
| 6.0.3 | Resultados para campo magnético de um ímã permanente: | 50 |
| 7 | Conclusões | 73 |
| A | Identidades vetoriais | 74 |
| A.1 | Identidades tensoriais | 75 |
| B | | 76 |
| B.1 | Teorema da divergência | 76 |
| B.2 | Teorema de Stokes | 76 |
| B.3 | Teorema da localização | 77 |
| B.4 | Teorema transporte de Reynolds | 77 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Ferrofluido na presença de um ímã permanente. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Ferrofluido . | |
| 1.2 | Desenho esquemático para uma suspensão de partículas magnéticas em um fluido base. | 3 |
| 1.3 | Desenho esquemático para o problema da camada limite sobre placa plana. | 4 |
| 1.4 | Perfis de velocidade tracados a partir da solução por similaridade de Blasius. | 4 |
| 3.1 | Desenho esquemático para um corpo magnetizado na presença de um gradiente de campo magnético. | 9 |
| 3.2 | Desenho esquemático para a condição de contorno para a lei de Gauss do magnetismo. | 10 |
| 3.3 | Desenho esquemático para a condição de contorno para equação de Amère-Maxwell. | 12 |
| 3.4 | Desenho esquemático para um ímã permanente (MALVAR, 2015). | 13 |
| 3.5 | Esforços sobre a superfície de um elemento. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor | |
| 3.6 | Estados de magnetização para diferentes $\alpha = \frac{\mu_0 H_0}{kT}$ | 20 |
| 3.7 | Curva para a função Langevin $\mathcal{L}(\alpha)$. A linha cheia representa a função $\mathcal{L}(\alpha)$ geral. A linha tracejada (--) representa os valores assintóticos para $\alpha \ll 1$ | 20 |
| 3.8 | Desenho esquemático para mudança de referenciais. | 21 |
| 3.9 | Desenho para o problema de um ferrofluido em cisalhamento simples. | 22 |
| 3.10 | Desenho esquemático para um corpo magnetizado na presença de um gradiente de campo magnético. | 23 |
| 4.1 | Região do escoamento em estudo. (1) Entrada do escoamento, (2) Interface entre escoamento e placa plana, (3) saída lateral, (4) saída superior. | 30 |
| 5.1 | Discretização de uma região quadrada em uma malha discreta. | 43 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.2 | Numeração proposta para a malha. | 43 |
| 5.3 | Molécula computacional para um método explícito. | 45 |
| 5.4 | Molécula computacional para um método implícito. | 46 |
| 6.1 | Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$ | 51 |
| 6.2 | Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$ | 52 |
| 6.3 | Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$ | 52 |
| 6.4 | Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 53 |
| 6.5 | Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 53 |
| 6.6 | Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$ | 54 |
| 6.7 | Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$ | 54 |
| 6.8 | Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$ | 55 |
| 6.9 | Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$ | 55 |
| 6.10 | Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$ | 56 |
| 6.11 | Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 57 |
| 6.12 | Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0, Rem = 100.0, Pe = 1.0, \alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 58 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.13 | Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$ | 59 |
| 6.14 | Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$ | 60 |
| 6.15 | Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$ | 60 |
| 6.16 | Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$ | 61 |
| 6.17 | Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$ | 61 |
| 6.18 | Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$ | 62 |
| 6.19 | Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 63 |
| 6.20 | Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 64 |
| 6.21 | Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$ | 65 |
| 6.22 | Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$ com campo magnético produzido por um ímã permanente | 66 |
| 6.23 | Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0e\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente | 66 |
| 6.24 | Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0e\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente | 67 |
| 6.25 | Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0e\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente | 68 |

| | | |
|------|---|----|
| 6.26 | Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) com campo magnético produzido por um ímã permanente . Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, \triangle para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$ | 69 |
| 6.27 | Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} com campo magnético produzido por um ímã permanente . A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 70 |
| 6.28 | Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} com campo magnético produzido por um ímã permanente. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida. | 71 |
| 6.29 | Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado com campo magnético produzido por um ímã permanente. | 72 |

Lista de Símbolos

| | |
|---|--|
| ∇ | Operador Nabla. |
| \mathbf{B} | Campo magnético induzido, indução magnética. |
| $\frac{\partial}{\partial t}$ | Derivada parcial em relação ao tempo. |
| \mathbf{H} | Campo magnético aplicado. |
| \mathbf{J}_f | Densidade de corrente livre. |
| \mathbf{D} | Deslocamento elétrico. |
| ρ_f | Densidade de cargas elétricas livres. |
| \mathbf{F} | Densidade local de força aparente em uma nuvem de dipolos. |
| μ_0 | Permeabilidade magnética no vácuo. |
| \mathbf{M} | Magnetização do meio. |
| τ_B | Tempo de relaxação de magnética Browniano. |
| τ_N | Tempo de relaxação de magnética de Néel. |
| K | Constante de Boltzmann. |
| τ_{eq} | Tempo de relaxação magnética equivalente |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ | Tensor de tensões. |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^T$ | Tensor de tensões transposto. |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^N$ | Parcela Newtoniana do tensor de tensões. |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M$ | Parcela magnética do tensor de tensões. |
| ρ_V | Densidade de pólos magnéticos. |
| \mathbf{F} | Densidade local de força aparente magnética. |

| | |
|---|--|
| $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ | Matriz identidade. |
| $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ | Tensor taxa de deformação. |
| δ | Operador Delta de Kronecker. |
| $\underline{\underline{\epsilon}}$ | Operador de Levi-Civita. |
| p | Campo de pressão de origem mecânica. |
| p_m | Campo de pressão de origem magnética. |
| \mathbf{u} | Campo de velocidade euleriano. |
| ρ | Massa específica do fluido. |
| $\frac{D}{Dt}$ | Derivada material. |
| \mathbf{g} | Aceleração gravitacional. |
| μ | Viscosidade dinâmica do fluido. |
| ν | Viscosidade cinemática do fluido. |
| $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M$ | Tensor de tensões magnético. |
| \mathbf{m} | Momento de dipolo magnético de uma partícula. |
| $\boldsymbol{\tau}_m$ | Torque magnético. |
| \mathbf{L} | Momento angular. |
| Σ | Somatório. |
| \mathbf{T} | Torque. |
| $\hat{\mathbf{n}}$ | Vetor unitário normal à uma superfície arbitrária S. |
| $\boldsymbol{\xi}$ | Campo de vorticidade. |

| | |
|------------------------------|---|
| ψ | Função de corrente. |
| $\langle \mathbf{m} \rangle$ | Média volumétrica dos momentos de dipolo magnético distribuídos em um volume δV . |
| v_p | Volume de uma partícula sólida magnética. |
| $\overline{\mathbf{m}}$ | Média dos momentos de dipolo magnético. |
| ϕ | Fração volumétrica de partículas suspensas. |
| \mathbf{M}_0 | Magnetização de equilíbrio de uma suspensão de partículas magnéticas sujeita à um campo magnético aplicado. |
| \mathbf{M}_s | Magnetização de saturação de uma suspensão de partículas magnéticas sujeita à um campo magnético aplicado. |
| \mathbf{M}_d | Magnetização do material sólido que constitui as partículas suspensas em um fluido magnético. |
| P_θ | Função densidade angular de probabilidade normalizada. |
| α | Razão entre forças magnéticas e brownianas no modelo de Langevin de magnetização. |
| $\mathcal{L}(\alpha)$ | Função Langevin. |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ferrofluidos

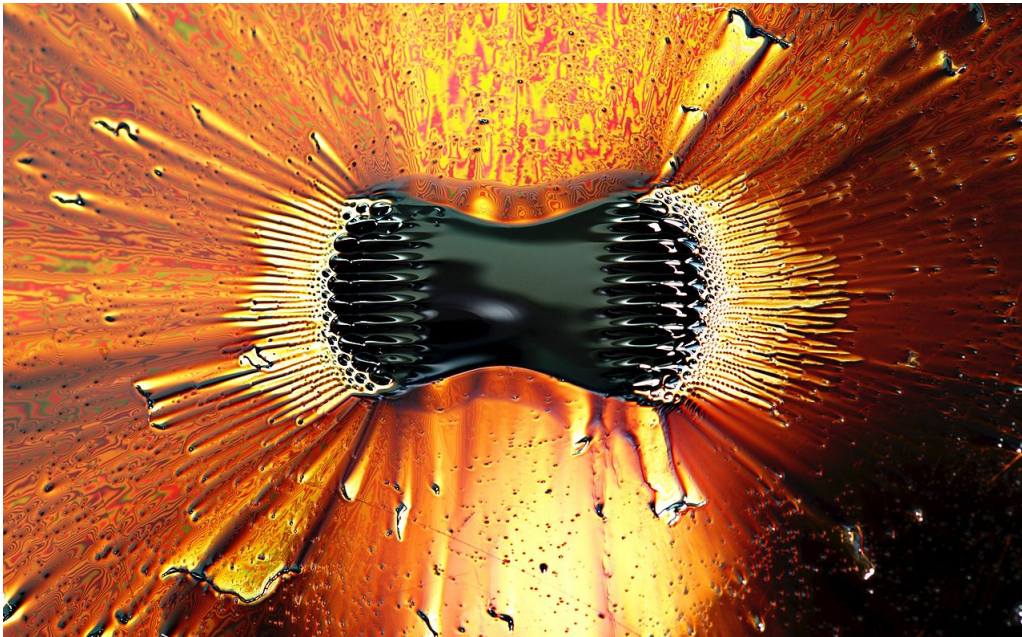


Figura 1.1: Ferrofluido na presença de um ímã permanente. Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ferrofluid>

Os ferrofluidos são suspensões coloidais de partículas magnéticas em escala nanométrica dispersas em um fluido base que se polariza na presença de um campo magnético externo. As partículas suspensas, que possuem um diâmetro médio de 10 nm, são feitas a partir de materiais ferromagnéticos,

sendo o mais comum entre eles a magnetita (Fe_3O_4) (NEURINGER; ROSENSWEIG, 1964). Um ferrofluido se magnetiza devido a reorientação dos dipolos magnéticos das partículas quando um campo magnético é exercido. A interação entre dipolo das partículas e o campo aplicado causa um movimento da suspensão relativo ao fluido base, alterando tanto seu escoamento quanto sua reologia (ODENBACH, 2004).

A ferrohidrodinâmica é definida como o estudo referente a mecânica dos fluidos e transferência de calor associada ao movimento dos ferrofluidos na presença de campos magnéticos e gradientes de temperatura (ROSENSWEIG, 1985). O seu estudo, como um meio contínuo, é feito a partir do acoplamento entre as equações da hidrodinâmica, as equações de Maxwell do electromagnetismo e uma equação para a magnetização.

Estudos referentes as propriedades, escoamentos e aplicações de ferrofluidos, compreendem uma área ativa do meio científico nos dias de hoje. Entre as aplicações estudadas, estão a conversão de energia térmica em trabalho útil (ROSENSWEIG; NESTOR; TIMMINS, 1965), ciclos de refrigeração alternativos (ROSENSWEIG, 2006), tratamentos de câncer por hipertermia (ROSENSWEIG, 2002), e diminuição de aneurismas cerebrais (TZIRTZILAKIS, 2015). Comercialmente os ferrofluidos já estão presentes em produtos tecnológicos de alto valor agregado (ODENBACH, 2009). A maioria das aplicações comerciais dos ferrofluidos são voltadas para o posicionamento controlado do fluido em sistemas mecânicos. Dentre eles, estão os mancais selados de baixa fricção Blakely, Stiles e Tuffias (1973), combustíveis aeroespaciais líquidos Stephen (1965), e como fluido térmico para alto-falantes de alta performance (RAJ; BONVOULOIR; MOSKOWITZ, 1995).

1.2 Camada limite

Em mecânica dos fluidos, a camada limite é definida como a região do escoamento nas vizinhanças de uma superfície sólida onde as tensões de cisalhamento são finitas. Em 1904 Prandtl (1904) deu origem ao conceito de camada limite ao mostrar que em fluidos com baixa viscosidade os efeitos de fricção interna são relevantes somente dentro de uma pequena região próxima a superfície de um corpo sólido onde o fluido se adere.

A partir das ideias levantadas para a camada limite, Prandtl (1904) foi capaz de reduzir as equações de Navier-Stokes, propondo o que é chamado hoje de equações da camada limite.

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

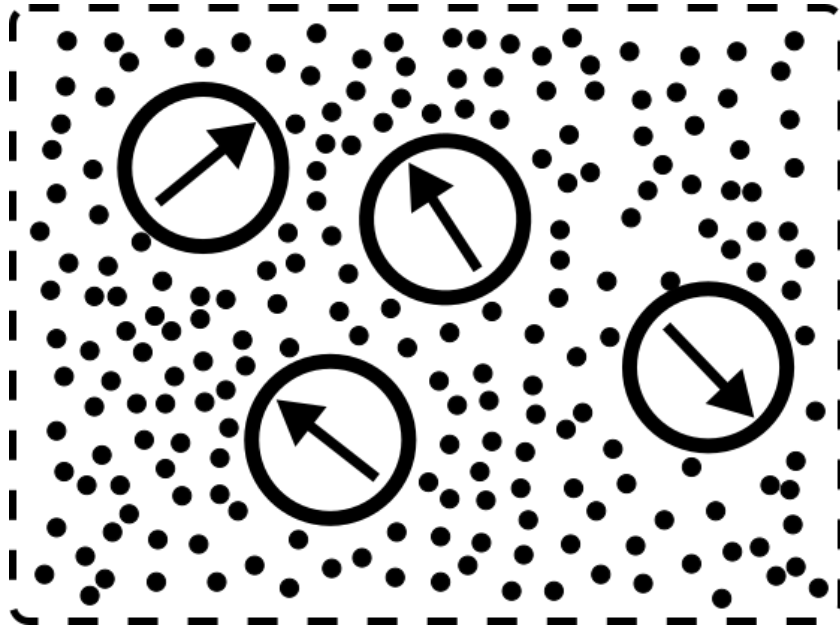


Figura 1.2: Desenho esquemático para uma suspensão de partículas magnéticas em um fluido base.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.2)$$

Apesar do progresso na feito por L. Prandtl, as equações da camada limite ainda são extremamente difíceis de serem resolvidas analiticamente. Um caso especial de extrema relevância é o problema para a camada limite sobre placa plana, mostrada pela figura 1.2. Neste problema o fluido passa sobre a placa e sobre efeitos de difusão de momento linear e produção de vorticidade na interface entre o fluido e a placa plana. A grande importância para este problema é a presença de uma solução analítica desenvolvida por Blasius (1908).

Os escoamentos de camada limite estão presentes em toda nossa volta. O movimento da atmosfera terrestre é um exemplo notável de um escoamento de camada limite e é alvo de estudos exaustivos para que modelos meteorológicos precisos possam ser feitos (TENNEKES; LUMLEY, 1972). Na área da magnetohidrodinâmica temos a camada limite de Hartmann onde um plasma é capaz de sentir os efeitos das forças de Lorentz em uma pequena região do espaço causando gradientes de velocidade mesmo em regimes ideais (DAVIDSON,).

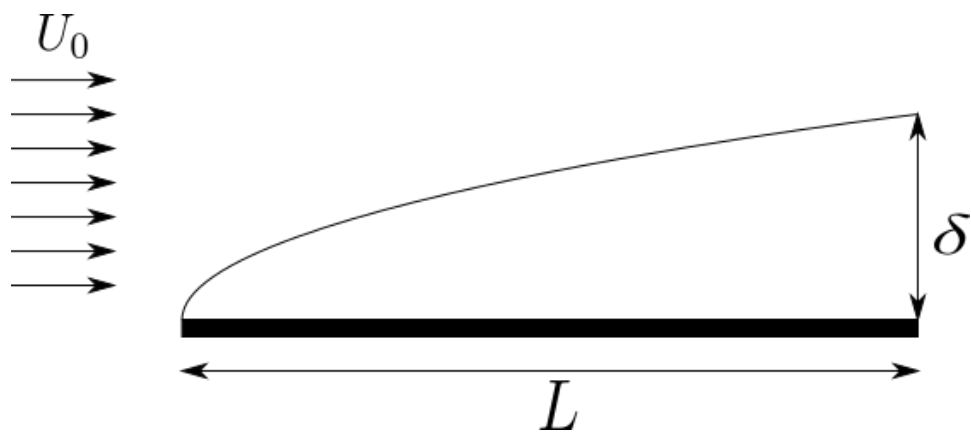


Figura 1.3: Desenho esquemático para o problema da camada limite sobre placa plana.

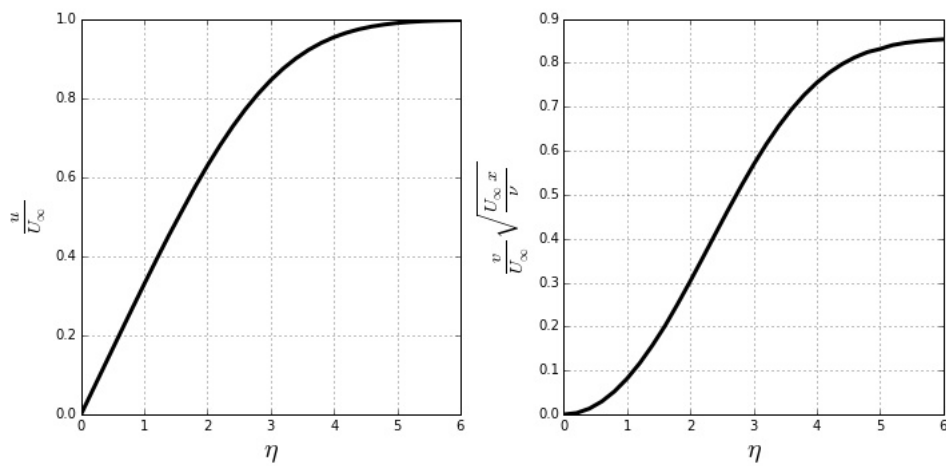


Figura 1.4: Perfis de velocidade tracados a partir da solução por similaridade de Blasius.

Capítulo 2

Objetivos

Tendo em vista as potenciais aplicações sobre o uso de ferrofluidos em problemas relativos a área da engenharia mecânica, este trabalho propõe-se a estudar a partir de simulações numéricas a camada limite de ferrofluidos sob placas planas.

O estudo irá se basear na formulação das equações governantes para os ferrofluidos partindo da hipótese de um contínuo equivalente, ou seja não fazendo distinção entre o comportamento individual do fluido base e do conjunto de partículas magnéticas. Durante a formulação vamos buscar evidenciar aspectos importantes relativos a modelagem contínua de escoamentos de ferrofluidos relacionados a diferentes regimes de magnetização.

Para as simulações numéricas será usado o método das diferenças finitas como forma de solução das equações diferenciais parciais que regem o problema em questão. Para simplificação das equações governantes é utilizada a formulação da vorticidade e função de corrente. Esta abordagem é vantajosa em problemas bidimensionais quando comparada com a formulação em variáveis primitivas, pois elimina os termos de pressão. A partir das equações devidamente formuladas e discretizadas, um algoritmo sequencial para a solução do sistema de equações que é proposto. As simulações serão escritas em linguagem PYTHON utilizando o pacote de bibliotecas científicas Anaconda que é oferecido gratuitamente pela Continuum Analytics. Este pacote contém inúmeras funções matemáticas relativas a aritmética de vetores e matrizes, soluções de sistemas lineares por métodos diretos e iterativos além de um pacote para criação de gráficos e diagramas. Primeiramente o código será validado comparando os resultados produzidos para problemas já solucionados com soluções clássicas analíticas, isto é necessário para que haja confiança na solução produzida numericamente. Após obter resultados satisfatórios serão adicionados os mecanismos de interação magnética no programa desenvolvido. O comportamento da camada limite na presença de

um campo magnético externo deverá ser estudada para uma série de diferentes parâmetros que influenciam na magnetização do ferrofluido assim como parâmetros importantes para o escoamento em sí. Serão feitas comparações de forma qualitativa e quantitativa sobre perfis de velocidade, coeficiente de atrito sobre a placa plana, espessura da camada limite e perfil de magnetização.

De maneira objetiva e direta, resumimos os objetivos deste trabalho como,

- Formular as equações governantes para o escoamento de um ferrofluido.
- Construir a formulação vorticidade função de corrente, utilizando as equações previamente determinadas e propor condições de contorno adequadas para a solução do problema.
- Discretizar as equações da formulação vorticidade função de corrente utilizando o método das diferenças finitas.
- Propor um algoritmo sequencial para a solução das equações governantes.
- Validar as soluções numéricas produzidas com resultados analíticos clássicos.
- Resolver o problema da camada limite para um ferrofluido sob influência de um campo magnético produzido por um ímã permanente.
- Produzir gráficos para os perfis de velocidade, magnetização, para o coeficiente de arrasto sob a placa plana e para a espessura da camada limite.
- Analisar os resultados por pontos de vista quantitativos e qualitativos evidenciando a atuação de mecanismos de interação entre o escoamento e o campo de magnetização e comparando como estes mecanismos podem intensificar o aumento ou diminuição da espessura da camada limite e do coeficiente de arrasto.

Capítulo 3

Fundamentação teórica

3.1 Pólos, campos, forças e torques magnéticos

Em experimentos realizado por Charles Coulomb em 1785, foi observado que polos similares são repelidos entre si enquanto polos reversos se atraem de forma proporcional ao produto da intensidade dos polos e inversamente ao quadrado da distância. A partir desta constatação foi formulada a lei de Coulomb para o magnetismo, que diz que a força magnética gerada a partir de dois polos p e p' , separados por uma distância r é dada por

$$\mathbf{F}_m = \frac{pp'\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0r^2} \quad (3.1)$$

em que $\hat{\mathbf{r}}$ denota o vetor unitário na direção de r . A constante μ_0 é chamada de permeabilidade magnética do vácuo e possui o valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ no Sistema Internacional, sendo H a unidade de Henry. Reescrevendo a equação 6.1 na forma

$$\mathbf{F}_m = p\mathbf{H} \quad (3.2)$$

definimos \mathbf{H} como o campo magnético produzido por um polo p' . Substituindo a equação 6.2 em 6.1 determina-se que

$$\mathbf{H} = \frac{p'\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0r^2} \quad (3.3)$$

em que \mathbf{H} possui unidades de Amperes por metro.

O campo de indução magnética \mathbf{B} é definido para o vácuo como $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. A unidade de medida para o campo de indução magnética \mathbf{B} no Sistema Internacional é de Webers por metro quadrado ($\frac{Wb}{m^2}$) ou Tesla (T). A partir da equação (6.3) escrevemos que o campo de indução magnética produzido por um pólo magnético no vácuo é dado por

$$\mathbf{B} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.4)$$

O campo de indução magnética pode ser interpretado como linhas de indução.

Defini-se de intensidade magnetização \mathbf{M} a medida de quanto um meio é capaz de se polarizar na presença de um campo magnético externo por unidade de área. Dado um pólo magnético de intensidade p e com área superficial de a , definimos a intensidade de magnetização do meio como $M \equiv \frac{p}{a\mu_0} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$, em que $\rho_m = \frac{p}{a}$ é chamado de densidade superficial de polos magnéticos.

Uma forma mais geral para o campo de indução magnética \mathbf{B} pode ser feita levando em consideração a presença de um corpo polarizado com magnetização \mathbf{M} . Dada uma superfície ao redor do corpo com magnetização \mathbf{M} e um campo magnético \mathbf{H} , o número de linhas de campo que atravessam a superfície é soma entre as contribuições de \mathbf{H} e \mathbf{M} . Desta forma, o campo de indução magnética \mathbf{B} para um meio com magnetização é escrito como

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (3.5)$$

Suponha que um corpo possuindo uma intensidade de magnetização \mathbf{M} esteja imerso em um campo magnético \mathbf{H}_0 , como mostrado na Figura 3.1. Desta forma, dizemos que uma densidade superficial de polos magnéticos $\rho_s = \mu_0 M$ aparece em ambas as faces a_d , possuindo mesma intensidade e polaridades opostas. Considerando o campo magnético como o de um polo unitário, dado pela equação 6.3, encontramos que a força magnética exercida sobre o corpo polarizado é

$$\mathbf{F}_m = -\mathbf{H}_0 \rho_s a_d + (\mathbf{H}_0 + \delta \mathbf{H}_0) \rho_s a_d = \delta \mathbf{H}_0 \rho_s a_d \quad (3.6)$$

em que $\delta \mathbf{H}_0$ representa a variação do campo magnético ao longo da direção \mathbf{d} . Desta forma escrevemos que $\delta \mathbf{H}_0 = \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{H}_0$. Reescrevendo a equação 6.7, encontramos que

$$\mathbf{F}_m = \rho_s a_d \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{H}_0. \quad (3.7)$$

O vetor \mathbf{d} pode ser escrito como $\mathbf{d} = d \hat{\mathbf{d}}$, em que d é a norma do vetor \mathbf{d} e $\hat{\mathbf{d}}$ é o vetor unitário que dá a direção ao vetor \mathbf{d} . Dividindo a equação 6.7 por $a_d d$ e multiplicando o lado direito por $\frac{\mu_0}{\mu_0}$, encontramos que

$$\frac{\mathbf{F}_m}{a_d d} = \frac{\mu_0}{\mu_0} \rho_s \hat{\mathbf{d}} \cdot \nabla \mathbf{H}_0 \quad (3.8)$$

Fazendo $\frac{\mathbf{F}_m}{a_d d} = \mathbf{f}_m$ e $\frac{\rho_s \hat{\mathbf{d}}}{\mu_0} = M \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{M}$, chegamos a expressão para a densidade de força de Kelvin dada por

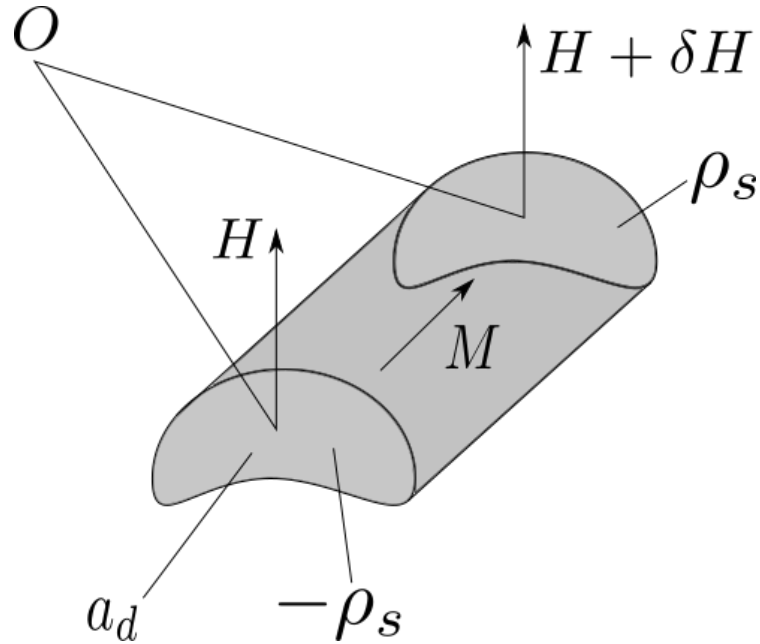


Figura 3.1: Desenho esquemático para um corpo magnetizado na presença de um gradiente de campo magnético.

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}_0 \quad (3.9)$$

Para determinarmos o torque magnético atuando em um corpo magnetizável vamos utilizar o mesmo exemplo usado anteriormente, assumindo agora que o campo magnético \mathbf{H}_0 é uniforme e portanto temos que $\delta \mathbf{H}_0 = 0$. Fazendo a soma dos momentos atuantes sobre o corpo encontramos que

$$\delta \mathbf{T}_m = \rho_s a_d (-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{H}_0) = \rho_s a_d \mathbf{d} \times \mathbf{H}_0 = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0 \delta V \quad (3.10)$$

Desta forma determinamos que a densidade volumétrica de torques magnéticos é dada por

$$\mathbf{t}_m = \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta V} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0. \quad (3.11)$$

3.2 Lei de Gauss para o magnetismo

A forma integral para a lei de Gauss para o magnetismo é expressa dada por

$$\oint_{\partial \Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.12)$$

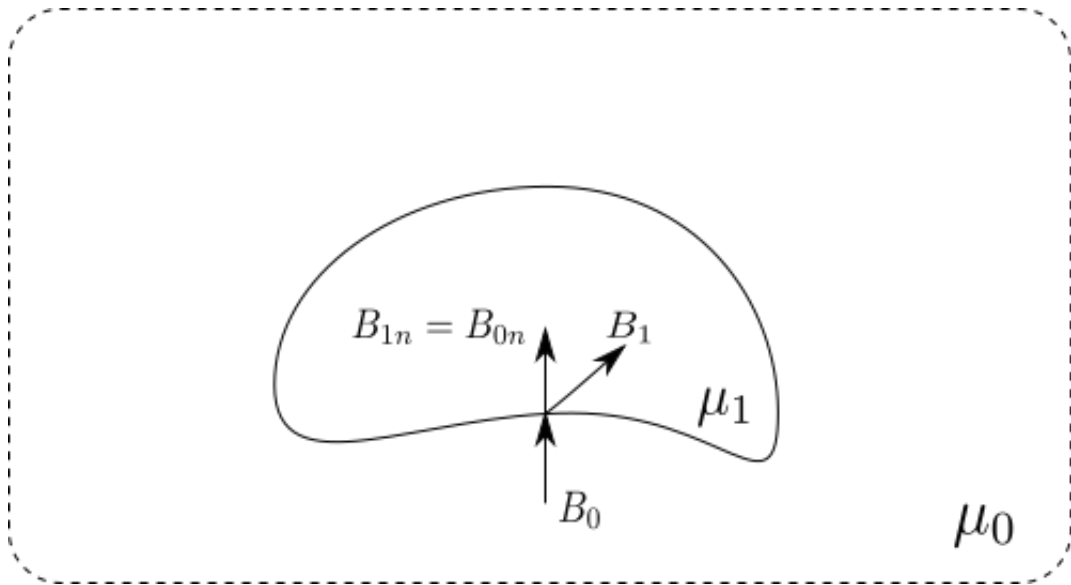


Figura 3.2: Desenho esquemático para a condição de contorno para a lei de Gauss do magnetismo.

em que $\partial\Omega$ representa a superfície fechada e \mathbf{n} é o vetor unitário normal a superfície $\partial\Omega$. A equação 6.9 nos diz que o fluxo total de linhas de campo através da superfície $\partial\Omega$ é zero. O resultado de 6.12 implica na impossibilidade da existência de pólos magnéticos isolados, portanto temos que a entidade fundamental para o magnetismo é dipolo magnético.

A forma diferencial para a equação 6.12 é expressa por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

Como o campo de indução magnética possui divergente igual a zero, ou seja solenoidal, concluímos que este deve possuir linhas de campo fechadas. Substituindo a definição do campo de indução magnética dado pela equação 6.5 no resultado 6.13, encontramos uma forma importante de relacionar os campos \mathbf{H} e \mathbf{M} . Desta forma, temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3.14)$$

Dado dois materiais com propriedades magnéticas distintas separados por uma interface comum, temos que o campo magnético dentro de cada um dos materiais deve satisfazer a equação 6.13. Traçando uma superfície de maneira que esta atravesse a interface e cujos lados superiores e inferiores são paralelos a mesma, como mostrado na Figura 3.2, temos que

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (3.15)$$

O resultado da equação 6.15 mostra que o campo de indução magnética é necessariamente contínuo na interface entre dois materiais com propriedades distintas. Uma maneira mais prática apresentar esta condição de contorno é dada por

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.16)$$

3.3 Lei de Ampère-Maxwell

A equação lei de Ampère-Maxwell relaciona como correntes elétricas produzem campos magnéticos e vice versa, podendo ser escrita em sua forma integral ou diferencial. A forma diferencial da lei de Ampère-Maxwell é dada por

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.17)$$

em que o lado direito da equação 6.18 representa a integral do campo magnético \mathbf{H} ao longo de um caminho fechado e o lado direito representa o fluxo de corrente normal a superfície delimitada pelo caminho fechado c .

A forma diferencial da lei de Ampère-Maxwell é expressa como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.18)$$

Em materiais dielétricos, ditos isolantes, os termos do lado direito da equação são identicamente nulos. Para estes materiais dizemos que a equação 6.18 se apresenta em regime magnetostático. Então escrevemos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.19)$$

A equação 6.20 mostra que o campo magnético \mathbf{H} é irrotacional dentro do regime magnetostático. Podemos então, em consequência do resultado mostrado apresentado, escrever o campo magnético por meio do gradiente de uma função potencial ϕ_m que chamamos de potencial magnético.

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m \quad (3.20)$$

Substituindo o resultado 6.21 na equação 6.4 obtemos uma explícita expressão para o cálculo do potencial magnético dada por

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3.21)$$

Escrevendo $d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl$, em que \mathbf{t} é o vetor unitário tangente a curva fechada temos que

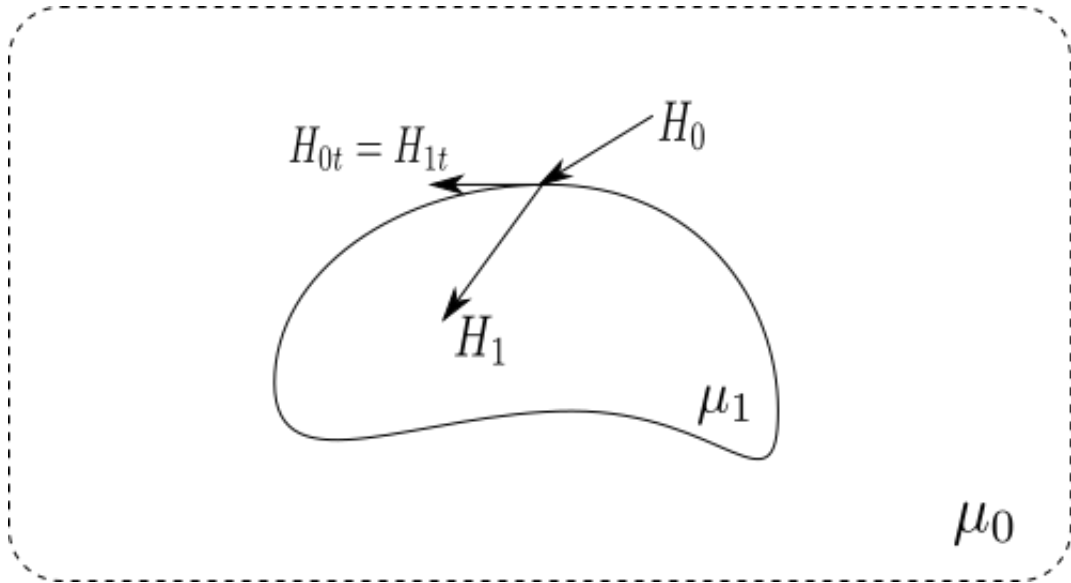


Figura 3.3: Desenho esquemático para a condição de contorno para equação de Amère-Maxwell.

Para obtermos o campo magnético dentro de um corpo que apresenta um campo de magnetização \mathbf{M} é necessário resolver a equação 6.16. Está é chamada de equação de Poisson para o potencial magnético e requer condições de contorno em toda a sua fronteira. Dados dois meios com propriedades magnéticas distintas separados por uma interface em comum, como mostrado pela Figura 3.3, temos que a equação 6.14 de ser satisfeita em ambos os materiais, incluindo a interface. Desta forma temos que,

$$\oint_C (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.22)$$

ou

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (3.23)$$

Um exemplo de campo magnético conhecido é o campo produzido como imã permanente. Segundo Clegg (1987), as equações para o campo magnético gerado de um imã são

$$H_x = \frac{J}{4\pi\mu_0} \ln \left[\frac{y + b + \{(y + b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y - b + \{(y - b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y - b + \{(y - b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y + b + \{(y + b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (3.24)$$

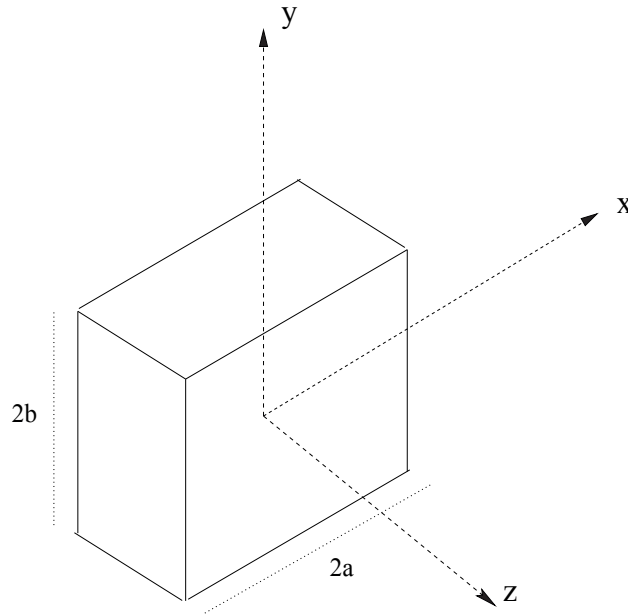


Figura 3.4: Desenho esquemático para um ímã permanente (MALVAR, 2015).

$$H_y = \frac{J}{4\pi\mu_0} \ln \left[\frac{y + a + \{(y - b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y - a + \{(y - b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y - a + \{(y + b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y + a + \{(y + b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.25)$$

em que J representa a densidade superficial de corrente. Os parâmetros a , b e c representam as dimensões do ímã como exemplificado na figura 3.4. Lembramos que as equações 3.24 e 3.25 servem como condições de contorno para determinarmos o campo magnético dentro do domínio que possui magnetização.

3.4 O tensor de Maxwell

A determinação de um tensor de tensões para um meio é fundamental para o estudo da mecânica do contínuo. Além das forças usuais encontradas em problemas de mecânica dos fluidos, os ferrofluidos uma força adicional que surge quando os dipolos magnéticos das partículas suspensas interagem com um campo magnético externo.

Apesar de ser um conceito relativamente antigo, o tensor de Maxwell é um objeto de constante discussão no meio científico e ainda não existe um

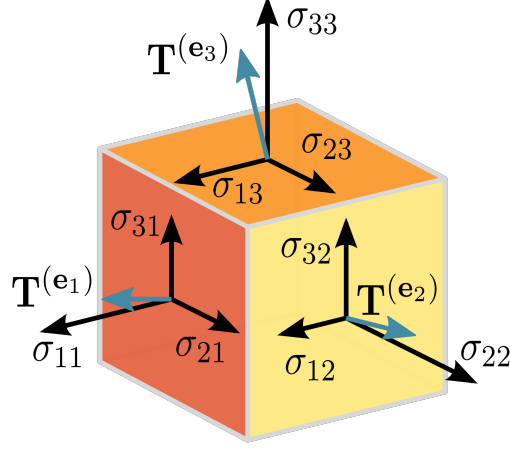


Figura 3.5: Esforços sobre a superfície de um elemento. Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor>

consenso quanto a sua forma precisa (ROSENSWEIG, 1997). Considerando as possibilidades de formulação para o tensor de tensões de Maxwell, foi seguido o modelo proposto por Cunha e Gontijo (2015). Começamos esta demonstração lembrando do resultado da equação 6.9 para a densidade de forças magnéticas por unidade de volume

$$\mathbf{f}_m = \rho_s \mathbf{H}. \quad (3.26)$$

Lembrando que $-\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_s$ e o resultado da equação 6.14, temos que

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H}. \quad (3.27)$$

Através da identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) = \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}$ determinamos a expressão equivalente onde

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.28)$$

Podemos transformar o último termo do lado direito da equação 6.27 utilizando a identidade $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ e portanto

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}) - \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{H}|^2 = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{I} \right) \quad (3.29)$$

em que \mathbf{I} denota o tensor identidade. Fazendo uso da identidade de Cauchy que nos diz que $\mathbf{t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ determinamos o tensor de Maxwell para um meio dipolar

$$\boldsymbol{\sigma}_m = -p_m \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} \quad (3.30)$$

em que o termo p_m denota a pressão magnética dada por $p_m = \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2$. Para finalizarmos a discussão sobre o tensor de Maxwell vamos lembrar que definimos o campo de indução magnética \mathbf{B} no vácuo como $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Desta forma assumindo que $\mu_0\mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{B}$ determinamos que

$$\boldsymbol{\sigma}_m = -p_m\mathbf{I} + \mu_0\mathbf{H}\mathbf{B} \quad (3.31)$$

e assim concluímos a discussão a respeito do tensor de Maxwell.

3.5 Magnetização dos ferrofluidos

3.5.1 Relaxação magnética

Determinar o estado de magnetização para o ferrofluido é um passo fundamental para a análise de um problema dentro da ferrohodinâmica. As equações referentes a magnetização são muitas vezes fenomenológicas e são alvos de constantes debates no meio científico.

Um parâmetro determinante para a magnetização de um ferrofluido é seu tempo de relaxação característico τ . Este, determina o regime no qual o estado de magnetização se apresenta em função das propriedades físicas do ferrofluido e das características do escoamento. O tempo de relaxação de um ferrofluido depende fundamentalmente do volume V das partículas magnéticas. Existem dois mecanismos distintos no qual uma partícula pode se magnetizar quando um campo magnético é aplicado. O primeiro deles ocorre por meio da rotação das partículas, enquanto o segundo se dá pela rotação do momento magnético dentro das partículas.

O mecanismo de magnetização das partículas por meio de rotação é caracterizado pelo tempo de difusão rotacional Browniana e é expressa por

$$\tau_B = \frac{3V\mu}{kT} \quad (3.32)$$

O mecanismo de magnetização por meio da rotação do momento magnético é determinado pelo tempo de relaxação de Neel, dado por

$$\tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{KV}{kT}\right) \quad (3.33)$$

Ambos os mecanismos de relaxação magnética agem simultaneamente sobre a partícula, logo o tempo característico da partícula é função de ambos os mecanismos de relaxação. Expressamos o tempo característico de relaxação de uma suspensão cujas partículas magnéticas possuem volume V como

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N} \quad (3.34)$$

Após trazer a variável τ da equação 3.34 para o numerador, determinamos que

$$\tau = \frac{\tau_B \tau_N}{\tau_B + \tau_N}. \quad (3.35)$$

Para partículas com diâmetro pequeno ($d = 8nm$), temos que $\tau_N \ll \tau_B$. Desta forma, através da equação 3.35 encontramos que

$$\tau = \tau_N. \quad (3.36)$$

O regime de magnetização para suspensões cujo tempo de relaxação é dominado pelo tempo de Neel é chamado de superparamagnetismo intrínseco. Neste regime o estado de magnetização é sempre expresso por seu estado de equilíbrio (ROSENSWEIG, 1997). Para partículas maiores onde $\tau_n \gg \tau_B$, o tempo de relaxação magnética é dado por

$$\tau = \tau_B. \quad (3.37)$$

Este regime de magnetização é chamado de superparamagnetismo extrínseco. O campo de magnetização neste caso é fortemente dependente da escala de tempo característica do escoamento.

3.5.2 Magnetização de equilíbrio: superparamagnetismo

As partículas magnéticas suspensas em um ferro fluido são bombardeadas constantemente pelas moléculas do fluido base em função da agitação térmica do fluido. As colisões decorrentes da interação com o fluido base causam um movimento aleatório das partículas magnéticas tanto no sentido de translação quanto no sentido de rotação. Em razão da aleatoriedade do movimento das partículas magnéticas, o ferrofluido na ausência de um campo magnético externo não apresenta magnetização (ROSENSWEIG, 1997). Entretanto ao aplicar um campo magnético, as partículas magnéticas resposta inciam um movimento de reorientação de seus dipolos no sentido do campo aplicado, iniciando o processo de magnetização. Este fenômeno é descrito como superparamagnetismo e pode ser descrito a partir da teoria formulada por Langevin.

A equação 6.11 nos diz que dado um campo de magnetização \mathbf{M} e um campo magnético \mathbf{H} a intensidade do torque magnético produzido é $\mu_0 M H \sin(\theta)$, em que θ é o ângulo entre os dois vetores. Para uma partícula

de volume V , a intensidade de seu momento magnético m é dado por $\frac{M}{V}$, portanto escrevemos que o torque por unidade de volume é dado por

$$\tau = mH \sin(\theta). \quad (3.38)$$

A energia requerida para trazer o dipolo das partículas para uma posição paralela ao campo magnético é dada por

$$W = \int_0^\theta \tau d\theta = mH \int_0^\theta \sin(\theta) d\theta = mH(1 - \cos(\theta)). \quad (3.39)$$

Para considerarmos a orientação dos dipolos magnéticos, definimos a quantidade $n(\theta)$ como a função distribuição angular para um conjunto de N partículas. Na ausência de um campo magnético o número de dipolos alinhados dentro de uma faixa entre θ e $\theta + d\theta$ é de

$$n(\theta)d\theta = N \frac{(2\pi \sin\theta)(d\theta)}{4\pi} = \frac{N}{2} \sin\theta d\theta \quad (3.40)$$

Na presença de um campo magnético e a uma temperatura absoluta T determinamos que a probabilidade de encontrarmos dipolos magnéticos em uma orientação fixa é proporcional ao fator de Boltzmann γ ,

$$\gamma = e^{\frac{-W}{kT}} \quad (3.41)$$

desta forma, expressamos que o número de partículas cujos dipolos estão entre θ e $\theta + d\theta$ é

$$n(\theta)d\theta \propto \frac{N}{2} e^{\frac{-W}{kT}} \sin\theta d\theta. \quad (3.42)$$

Para calcularmos a constante de proporcionalidade da equação 3.41 vamos impor a condição de que

$$\int_0^\pi n(\theta) d\theta = N \quad (3.43)$$

Determinada a probabilidade de orientação de uma partícula no sentido de um campo aplicado, vamos buscar formular como o a magnetização responde a esse campo magnético. Chamamos de magnetização efetiva a componente do dipolo magnético no sentido do campo aplicado i.e $m \cos(\theta)$. Como o parâmetro θ é alvo de flutuações, é necessário que se calcule a magnetização efetiva média,

$$\bar{m} = \int_0^\pi \frac{m \cos(\theta) n(\theta) d\theta}{\int_0^\pi n(\theta) d\theta} \quad (3.44)$$

substituindo os resultados encontrados para W e $n(\theta)d\theta$ na equação 3.44, encontramos que

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\theta m \cos \theta \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^\theta \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}. \quad (3.45)$$

Introduzimos aqui a parâmetro $\alpha = \frac{mH}{kT}$ que representa a razão entre a energia magnética e a energia térmica do sistema. Reescrevemos a equação 3.45 substituindo $\alpha = \frac{mH}{kT}$ e obtemos

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\theta m \cos \theta \exp(\alpha \cos \theta)}{\int_{-\alpha}^\alpha \exp(\alpha \cos \theta)} = \frac{m \int_0^\theta x e^x dx}{\alpha \int_{-\alpha}^\alpha e^x dx} \quad (3.46)$$

onde $x = \alpha \cos \theta$. Integrando a equação 3.46 encontramos que

$$\frac{\bar{m}}{m} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha). \quad (3.47)$$

A função dada por $\mathcal{L}(\alpha)$ é chamada de função Langevin. A magnetização de um meio que contem n partículas com magnetização eficaz de \bar{m} é calculada como

$$\mu_0 M = n \bar{m}. \quad (3.48)$$

Da mesma forma dizemos que a magnetização de saturação do fluido pode ser escrita por

$$\mu_0 M_s = n m. \quad (3.49)$$

Relacionamos a magnetização de saturação com o produto da fração volumétrica de partículas magnéticas com a magnetização de um sólido equivalente, ou seja

$$M_s = \phi M_d \quad (3.50)$$

onde denotamos ϕ como a razão do volume de partículas magnéticas suspensas pelo volume total do fluido e M_d como a magnetização do sólido equivalente. Relacionando as equações 3.48, 3.49, determinamos que

$$\frac{M}{M_s} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha). \quad (3.51)$$

Dois casos importantes para a função Langevin ocorrem para valores assintóticos de α . O primeiro dos casos ocorre quando α assume valores próximos a zero. Expandindo a função Langevin por séries de Taylor, Rosensweig (1997) mostra que

$$\mathcal{L}(\alpha) = \frac{\alpha}{3} \quad (3.52)$$

O outro valor assintótico para a função Langevin ocorre quando o fluido se aproxima de seu estado de saturação ($\alpha \gg 1$). Neste caso temos que a magnetização de equilíbrio é

$$M = \phi M_d \left(1 - \frac{6}{\pi} \frac{kT}{M_d \mu_0 H d^3} \right) \quad (3.53)$$

Expressamos o campo vetorial para a magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 como

$$\mathbf{M} = M_s \mathcal{L}(\alpha) \hat{\mathbf{H}} \quad (3.54)$$

em que $\hat{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|}$ é o vetor unitário tangente ao campo magnético \mathbf{H} . Uma consequência direta da equação 3.54 é que ambos os campos magnéticos e de magnetização estão sempre paralelos entre si $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$. Uma outra forma de expressar o campo de magnetização de equilíbrio é por meio da susceptibilidade magnética χ , na qual

$$\mathbf{M}_0 = \chi \mathbf{H}. \quad (3.55)$$

A susceptibilidade magnética é definida como,

$$\chi = \frac{M_0}{H} \quad (3.56)$$

A partir do resultado 3.56, temos que

$$\chi = \frac{\pi}{18} \phi \mu_0 \frac{M_d^2 d^3}{kT} \quad (3.57)$$

3.5.3 Magnetização de não equilíbrio: um modelo evolutivo.

Para ferrofluidos com tempo de relaxação Browniano τ_B , o campo de magnetização pode ser alterado pelo escoamento do fluido. Logo, o modelo de superparamagnetismo pode se tornar inadequado. Uma equação evolutiva para a magnetização foi obtida fenomenologicamente por Shliomis (1971). O modelo parte de uma generalização da equação de relaxação de Debye da forma

$$\frac{D' \mathbf{M}}{Dt} = -\frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \quad (3.58)$$

em que τ_B representa o tempo de relaxação Browniano e \mathbf{M}_0 denota a magnetização de equilíbrio dada pela equação 3.54 e $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla()$ representa a derivada material. O termo $\frac{D'}{Dt}$ representa a derivada material da magnetização em relação a um referencial quiescente as partículas magnéticas

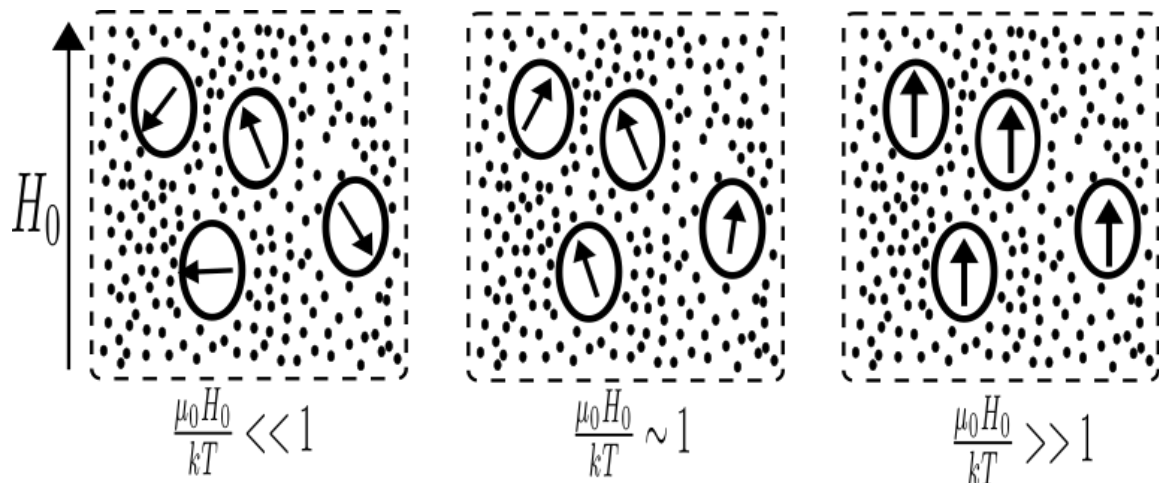


Figura 3.6: Estados de magnetização para diferentes $\alpha = \frac{\mu_0 H_0}{kT}$

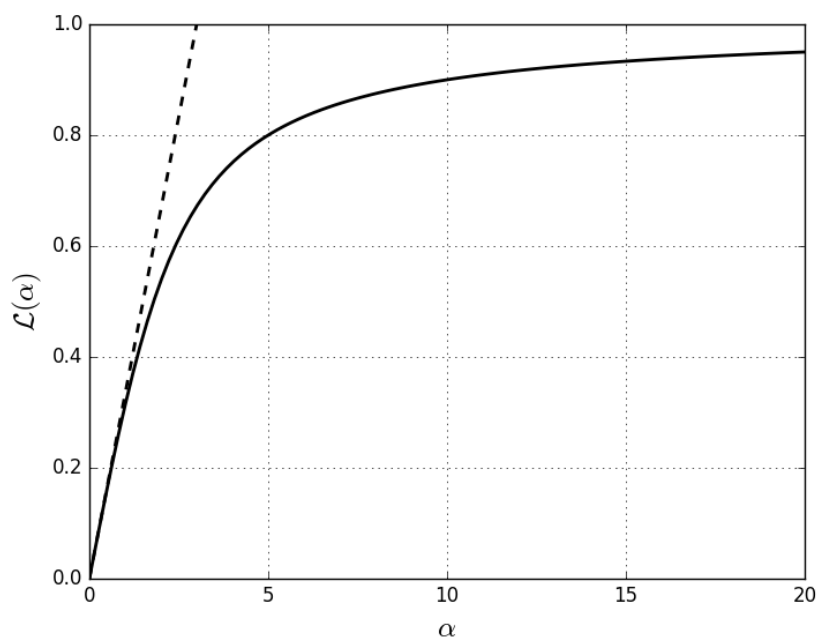


Figura 3.7: Curva para a função Langevin $\mathcal{L}(\alpha)$. A linha cheia representa a função $\mathcal{L}(\alpha)$ geral. A linha tracejada (---) representa os valores assintóticos para $\alpha \ll 1$

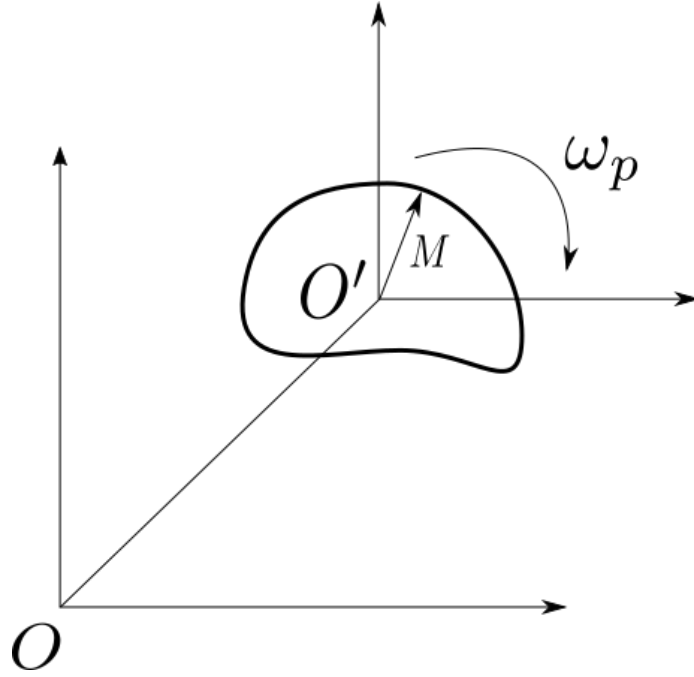


Figura 3.8: Desenho esquemático para mudança de referenciais.

$\omega'_p = 0$, como mostra a Figura 3.5.3. Expressamos a derivada material para a magnetização quanto a um referencial fixo O como

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{M} + \frac{D'\mathbf{M}}{Dt} \quad (3.59)$$

Substituindo a equação 3.58 no resultado 3.59 temos que

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \quad (3.60)$$

O termo $\boldsymbol{\omega}_p$ representa a velocidade angular média das partículas magnéticas e é necessário para a solução da equação 3.60. Segundo Rosensweig (2004), a velocidade angular média das partículas magnéticas é descrita por,

$$\rho J \frac{D\boldsymbol{\omega}_p}{Dt} = \eta' \nabla^2 \boldsymbol{\omega}_p + \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + 6\eta\phi \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{2} - \boldsymbol{\omega}_p \right) \quad (3.61)$$

em que J representa o momento de inércia das partículas magnéticas, η' a viscosidade de 'spin' e ϕ a concentração de partículas do ferrofluido. Para aceleração angular, e difusão de momento angular desprezíveis e fontes de campos magnéticos distantes, Shliomis (2001) propõe que a equação 3.61

pode ser simplificada na forma

$$6\mu\phi \left(\boldsymbol{\omega}_p - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right) = \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (3.62)$$

Resolvendo para $\boldsymbol{\omega}_p$, encontramos que

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \quad (3.63)$$

Ao substituir o resultado da equação 3.63 em 3.60, encontramos que

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \times \mathbf{M} - \frac{1}{6\mu\phi} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) \quad (3.64)$$

A equação 3.64 é a mais utilizada em trabalhos referentes a ferrohidrodinâmica para problemas envolvendo tempo de relaxação Browniano. Contudo, outras equações para a magnetização fora do equilíbrio já foram propostas estão sendo discutidas no meio científico (SHLIOMIS, 2001), (SHLIOMIS, 2002).

3.5.4 Efeito magneto-viscoso

Apesar de um ferrofluido permanecer no estado líquido mesmo quando magnetizado até seu estado de saturação, sua reologia pode ser alterada quando um campo magnético esta presente. Na ausência de um campo magnético um

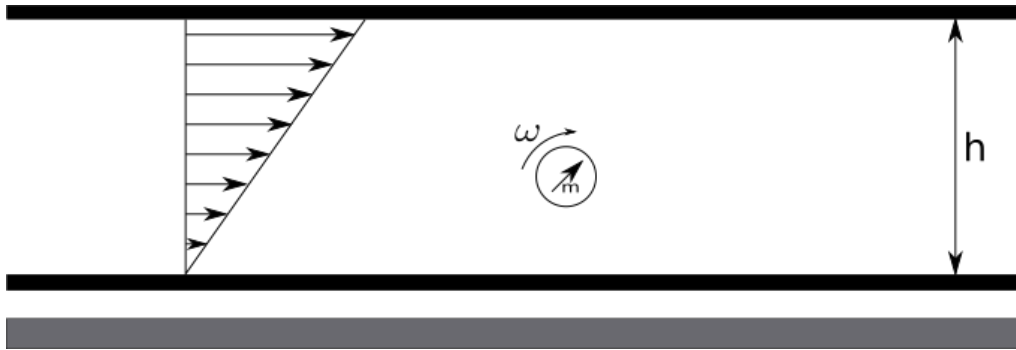


Figura 3.9: Desenho para o problema de um ferrofluido em cisalhamento simples.

ferrofluido se comporta como uma suspensão coloidal não magnética cuja a viscosidade das é fortemente dependente da fração volumétrica de partículas ϕ suspensas pelo fluido base. Para suspensões coloidais diluídas ($\phi \ll 1$), ou

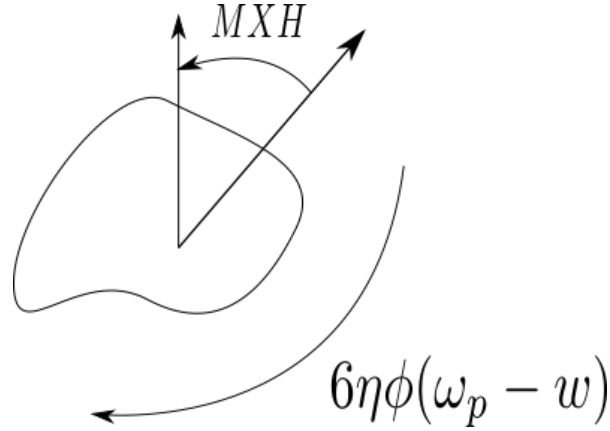


Figura 3.10: Desenho esquemático para um corpo magnetizado na presença de um gradiente de campo magnético.

seja, com baixas frações volumétricas, temos que a viscosidade da suspensão coloidal é dada pela fórmula da viscosidade de Einstein

$$\frac{\eta}{\eta_0} = 1 + \frac{5}{2}\phi \quad (3.65)$$

em que η é a viscosidade da suspensão e η_0 representa a viscosidade do fluido base. Para suspensões com maiores frações volumétricas, uma correção é proposta por Rosensweig (1997) e é dada por

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + a\phi + b\phi^2} \quad (3.66)$$

em que $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{(\frac{5}{2}\phi_c - 1)}{\phi_c^2}$ e ϕ_c corresponde a concentração de empacotamento de partículas para a suspensão, sendo $\phi_c = 0.74$.

Na presença de um campo magnético aplicado, as partículas magnéticas tendem a se alinhar com a direção do campo magnético externo. Entretanto, a movimento de reorientação das partículas magnéticas impedido devido ao arrasto viscoso do fluido base, causando uma defasagem entre a velocidade angular média das partículas e a velocidade angular média do fluido. A geração de gradientes de velocidade próximos as partículas aumenta a dissipação de energia mecânica e conseqüentemente levando a um aumento da viscosidade aparente do fluido. Para o caso de um escoamento em cisalhamento simples com campo magnético constante da forma $\mathbf{H} = H_0\hat{\mathbf{e}}_y$, como exemplificado pela Figura 3.5.4, Rosensweig, Kaiser e Miskolczy (1969) mostra que

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{3}{2}\phi \frac{\alpha - \tanh(\alpha)}{\alpha + \tanh(\alpha)} \quad (3.67)$$

3.6 Lei de conservação da massa

A equação da continuidade é a equação responsável por nos garantir que a massa de um sistema contínuo é conservada. Em termos matemáticos escrevemos que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = 0 \quad (3.68)$$

Para passarmos o operador derivada material para dentro da integral, recorremos ao teorema transporte de Reynolds (A.5) que nos diz que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (3.69)$$

A partir do teorema da localização (A.3) chegamos a escrever na forma diferencial a forma geral da equação da continuidade

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (3.70)$$

Escoamentos nos quais a massa específica é constante são denominados incompressíveis e são governados pela forma simplificada da equação da continuidade

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (3.71)$$

3.6.1 Função de corrente

A função de corrente é uma maneira de se representar um campo de velocidade que seja incompressível e bidimensional. A ideia é representar o campo de velocidades como

$$\mathbf{u} = \nabla \times \psi \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.72)$$

desta forma temos que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.73)$$

Note que devido a forma de sua definição a representação do campo de velocidade por meio da função de corrente satisfaz automaticamente a condição de incompressibilidade em consequência da identidade $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$.

3.7 Conservação do momento linear para um ferrofluido

A lei de conservação do momento linear para um corpo material em Ω é feita a partir da generalização da segunda lei de Newton para o contínuo,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{t} dS. \quad (3.74)$$

A equação 3.74 nos diz que a taxa de variação de momento linear das partículas que estão instantaneamente em Ω é proporcional a força resultante aplicada ao corpo material Ω . A força resultante é composta por forças de campo \mathbf{b} por unidade de massa agindo sobre as partículas em Ω e forças de superfície \mathbf{t} que atuam na fronteira $\partial\Omega$.

A partir do emprego do teorema de Cauchy e do teorema da divergência (A.1) podemos reescrever a equação 3.74 da seguinte forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (3.75)$$

Para obtermos a forma diferencial para a equação da conservação do momento linear vamos recorrer a dois outros teoremas. Primeiramente aplicando o teorema transporte de Reynolds A.5 que nos permite passar o operador derivada material para dentro da integral e colocando todos os integrandos dentro de uma só integral, temos

$$\int_{\Omega(t)} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] dV = 0. \quad (3.76)$$

Por fim, após utilizarmos o teorema da localização (A.3), chegamos a forma geral da conservação de momento linear

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.77)$$

3.8 Conservação do momento angular para um ferrofluido

De maneira análoga a maneira no qual mostramos que a lei da conservação do momento linear pode ser generalizada para um corpo contínuo, podemos generalizar a lei da conservação do momento angular para um corpo contínuo. Matematicamente expressamos a conservação do momento angular para um contínuo como

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{u} dV = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS + \int_{\Omega(t)} t^i dV. \quad (3.78)$$

Utilizando o teorema do transporte de Reynolds temos que o lado esquerdo da equação 3.78 é

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{u} dV = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_{\Omega(t)} \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{D}{Dt} \mathbf{u} \right) dV. \quad (3.79)$$

O resultado da equação 3.79 juntamente com o emprego do teorema de Cauchy nos permite expressar a equação 3.78 como

$$\int_{\Omega(t)} \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{D}{Dt} \mathbf{u} \right) dV = \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS + \int_{\Omega(t)} t^i dV \quad (3.80)$$

note que os termos provenientes das forças de campo são identicamente nulos nesta equação uma vez que as forças resultantes passam pelo centro do volume material. Agora utilizando a equação 3.75 juntamente com o teorema de divergência encontramos que

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_{\Omega(t)} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) dV + \int_{\Omega(t)} t^i dV. \quad (3.81)$$

Pelo teorema da localização (A.3) temos que

$$\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) = \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) = t^i. \quad (3.82)$$

Para a maioria dos fluidos, incluindo os fluidos Newtonianos, o termo relativo aos torques internos é nulo devido a ausência de mecanismos capazes de produzir tais efeitos. Desta forma concluímos que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

Para um fluido magnético concluímos anteriormente que o torque interno produzido pelos campos magnéticos e de magnetização é dado pela equação 3.8. Desta maneira substituindo a expressão para o termo de torques internos da equação (4.23) encontramos que

$$\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (3.83)$$

Por consequência da equação (ref) encontramos que o tensor de tensões para um fluido magnético é assimétrico ou seja $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}^T$ o que resulta na anisotropia do escoamento proporcionando direções favoráveis ao cisalhamento do fluido. Um caso especial de fluido magnético é aquele em que sua magnetização é dada por $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ ou seja, um fluido superparamagnético. Reescrevendo

a equação (4.24) utilizando a hipótese do superparagnetismo determinamos que

$$\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) = \mu_0 \chi \mathbf{H} \times \mathbf{H} = 0. \quad (3.84)$$

e portanto retornamos a condição de simetria do tensor de tensões. Este resultado é de certa forma esperado uma vez que o superparamagnetismo sugere que as forças magnéticas atuem somente sobre o centro de massa de cada volume material impossibilitando a produção de torques internos.

3.9 Equação do movimento para um ferro-fluido

Agora que temos em mãos a forma diferencial para a lei da conservação do momento linear vamos buscar uma equação que descreva o movimento de um fluido magnético, para isto, precisamos utilizar um tensor de tensões que seja compatível com o comportamento deste fluido. O trabalho (CUNHA; GONTIJO, 2015) propõe que tensor de tensões para fluidos magnéticos é resultante da soma entre o tensor de tensões para um fluido Newtoniano incompressível e o tensor de Maxwell

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_m. \quad (3.85)$$

O tensor $\boldsymbol{\sigma}_m$ é o tensor de Maxwell dado pela equação 3.31. Chamamos de $\boldsymbol{\sigma}_n$ o tensor de tensões para um fluido viscoso e incompressível, expresso como

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.86)$$

em que p é a pressão mecânica exercida sobre o elemento de fluido, \mathbf{I} representa o tensor identidade e \mathbf{D} representa a parte simétrica do tensor taxa de deformação

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.87)$$

Agora que sabemos a forma de ambos os tensores e após substituí-los na equação 3.77, encontramos que

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})). \quad (3.88)$$

3.10 Equação da vorticidade para um ferro-fluido

Uma quantidade muito relevante na mecânica dos fluidos é a vorticidade ζ que representa a quantidade de rotação local de um elemento de fluido. Definimos ζ como o rotacional do campo de velocidade \mathbf{u}

$$\xi \equiv \nabla \times \mathbf{u}. \quad (3.89)$$

Para encontrarmos a equação evolutiva da vorticidade vamos aplicar o rotacional na equação 3.88

$$\nabla \times \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) = \nabla \times \left[-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) \right] \quad (3.90)$$

e temos como resultado a equação

$$\left(\rho \frac{D\xi}{Dt} \right) = (\xi \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \xi + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \mu_0 \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})). \quad (3.91)$$

A equação 3.91 é isenta do termo de pressão, por consequência da identidade $\nabla \times \nabla \phi = 0$, o que a torna atrativa para obter soluções computacionais para escoamentos incompressíveis. Deixaremos a discussão mais detalhada sobre este fato para mais adiante quando tratarmos de soluções numéricas. O ultimo termo da equação 3.91 ainda pode ser simplificado com a utilização da identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ e portanto temos

$$\rho \frac{D\xi}{Dt} = (\xi \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \xi + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \mu_0 \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \mu_0 \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (3.92)$$

Capítulo 4

O problema da camada limite magnética

4.1 Formulação do problema da camada limite para um ferrofluido

O problema da camada limite magnética consiste em um escoamento de um ferrofluido sobre uma placa plana na presença de um campo magnético externo \mathbf{H}_0 . O escoamento incide sobre a placa plana paralelamente com velocidade U_0 . Assumimos que o escoamento do ferrofluido é incompressível, bidimensional e alcança um regime permanente. Em termos matemáticos, escrevemos que,

Regime incompressível:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

Escoamento bidimensional:

$$\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + v\hat{\mathbf{e}}_y \quad (4.2)$$

Escoamento em regime permanente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (4.3)$$

A partir destas hipóteses, escrevemos a seguir as equações governantes bidimensionais .

Equações do movimento:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left[M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial (M_x H_y - M_y H_x)}{\partial y} \right] \quad (4.4)$$

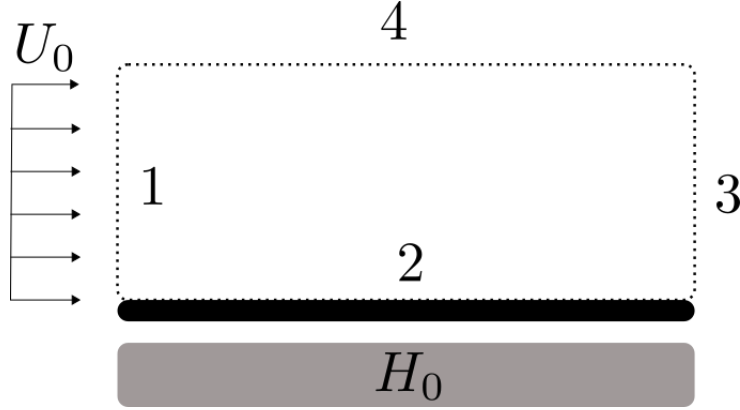


Figura 4.1: Região do escoamento em estudo. (1) Entrada do escoamento, (2) Interface entre escoamento e placa plana, (3) saída lateral, (4) saída superior.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left[M_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial (M_x H_y - M_y H_x)}{\partial x} \right] \quad (4.5)$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

Equação do potencial magnético

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (4.7)$$

Equações de magnetização

$$u \frac{\partial M_x}{\partial x} + v \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\xi M_y - \frac{1}{6\mu\phi} M_y (M_x H_y - M_y H_x) + \frac{1}{\tau} (M_x - M_{x0}) \quad (4.8)$$

$$u \frac{\partial M_y}{\partial x} + v \frac{\partial M_y}{\partial y} = \xi M_x + \frac{1}{6\mu\phi} M_x (M_x H_y - M_y H_x) + \frac{1}{\tau} (M_y - M_{y0}) \quad (4.9)$$

Para garantir que o problema da camada limite magnética é bem posto, é preciso especificarmos as condições de contorno para cada uma das equações listadas. Seguindo a ordem esquemática mostrada pela Figura 4.1, definimos as seguintes condições de contorno:

- Entrada do domínio (1):

$$u = U_0 \quad (4.10)$$

$$v = 0 \quad (4.11)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.12)$$

$$M_x = 0 \quad (4.13)$$

$$M_y = 0 \quad (4.14)$$

- Região sobre placa plana (2):

$$u = 0 \quad (4.15)$$

$$v = 0 \quad (4.16)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.17)$$

$$M_x = M_{0x} \quad (4.18)$$

$$M_y = M_{0y} \quad (4.19)$$

- Saída do domínio (3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.21)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

- Saída superior (4):

$$u = U_0 \quad (4.25)$$

$$v = 0 \quad (4.26)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.27)$$

$$M_x = 0 \quad (4.28)$$

$$M_y = 0 \quad (4.29)$$

4.2 Adimensionalização das equações governantes

A adimensionalização das equações governantes é um passo fundamental para realização de uma análise física do problema. Utilizando de variáveis adimensionais, o problema é ao mesmo tempo simplificado e generalizado. Para o procedimento de adimensionalização, definimos as seguintes escalas características para as grandezas físicas do problema,

$$x \sim L, y \sim L, \nabla \sim \frac{1}{L}, \mathbf{u} \sim U_0, t \sim \frac{L}{U_0}, p \sim \rho U_0^2, \mathbf{H} \sim H_0, \mathbf{M} \sim H_0 \quad (4.30)$$

reescrevemos as variáveis em suas respectivas formas adimensionais, encontramos que

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L}, \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \hat{p} = \frac{p}{\rho U_0^2}, \hat{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \hat{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{H_0} \quad (4.31)$$

Começamos a o processo de adimensionalização pelas equações do movimento nas direções x e y . Substituindo as variáveis dimensionais por suas respectivas adimensionais, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\rho U_0^2}{L} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) &= -\frac{\rho U_0^2}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\eta U_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) \\ &+ \frac{\mu_0 H_0^2}{L} \left[\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x)}{\partial \hat{y}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho U_0^2}{L} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right) &= -\frac{\rho U_0^2}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{\eta U_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \right) \\ &+ \frac{\mu_0 H_0^2}{L} \left[\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x)}{\partial \hat{x}} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dividindo ambas as equações pelo coeficiente dos termos convectivos $\frac{\rho U_0^2}{L}$, concluímos que

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x)}{\partial \hat{y}} \right] \quad (4.34)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x)}{\partial \hat{x}} \right] \quad (4.35)$$

O termo Re representa o número de Reynolds do escoamento dado por,

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\eta}. \quad (4.36)$$

O número de Reynolds representa a razão entre as forças inerciais e viscosas que agem sobre o escoamento. Similarmente definimos o termo Re_m como o número de Reynolds magnético, este representa a razão entre as forças inerciais e magnéticas. Escrevemos o número de Reynolds magnético como

$$Re_m = \frac{\rho U_0^2}{\mu_0 H_0^2} \quad (4.37)$$

Transformando as variáveis da equação da continuidade para suas respectivas quantidades adimensionais encontramos que

$$\frac{U_0}{L} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{U_0}{L} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (4.38)$$

ao dividir a equação 3.48 por $\frac{L}{U_0}$ concluímos que

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (4.39)$$

Similarmente, encontramos a equação para o potencial magnético em variáveis adimensionais na forma

$$\frac{H_0}{L} \left(\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} \right) = -\frac{H_0}{L} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \quad (4.40)$$

Dividindo ambos os lados por $\frac{L}{H_0}$, temos que

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (4.41)$$

Por fim, nos resta adimensionalizar a equação da magnetização para o ferro-fluido. Após realizar a substituição das variáveis dimensionais, encontramos que

$$\frac{U_0 H_0}{L} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{U_0 H_0}{L} \hat{\xi} \hat{M}_y - \frac{H_0^2}{6\eta\phi} \hat{M}_y \left(\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x \right) + \frac{H_0}{\tau_B} \left(\hat{M}_x - \hat{M}_{x0} \right) \quad (4.42)$$

$$\frac{U_0 H_0}{L} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{y}} \right) = \frac{U_0 H_0}{L} \hat{\xi} \hat{M}_x + \frac{H_0^2}{6\eta\phi} \hat{M}_x \left(\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x \right) + \frac{H_0}{\tau_B} \left(\hat{M}_y - \hat{M}_{y0} \right) \quad (4.43)$$

Racionalizando as equações 4.43 e 4.44 pelo coeficiente dos termos convectivos $\frac{U_0 H_0}{L}$, chegamos as seguintes expressões para a magnetização

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{y}} = -\hat{\xi} \hat{M}_y - \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} \hat{M}_y \left(\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x \right) + \frac{1}{Pe} \left(\hat{M}_x - \hat{M}_{x0} \right) \quad (4.44)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{y}} = \hat{\xi} \hat{M}_x + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} \hat{M}_x \left(\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x \right) + \frac{1}{Pe} \left(\hat{M}_y - \hat{M}_{y0} \right) \quad (4.45)$$

O termo ϕ representa a fração volumétrica de partículas no fluido, o termo Pe representa o número de Peclet do fluido e é expresso por,

$$Pe = \frac{U_0 L}{\mathcal{D}} \quad (4.46)$$

em que \mathcal{D} denota o coeficiente de difusão do meio. Para o fluido magnético temos que o coeficiente de difusão é dado por

$$\mathcal{D} = \frac{L^2}{\tau_B} \quad (4.47)$$

Para o caso específico de um fluido magnético, o número de Peclet expressa a razão entre os tempos característicos do escoamento e de relaxação magnética.

4.3 Análise de escala

A análise de escala das equações governantes é um processo fundamental no estudo de problemas na mecânica dos fluidos, sendo capaz de extrair o maior volume de informação por unidade de esforço cognitivo (BEJAN, 2013).

Iniciamos a análise do problema especificando as escalas referentes as variáveis espaciais x e y ,

$$x \sim L, y \sim \delta.$$

A escala L para a variável x representa o comprimento da placa plana e é conhecida. Nosso objetivo é obter uma expressão para escala δ que representa

a espessura da camada limite do escoamento em que $L \gg \delta$. Além das escalas espaciais, definimos as seguintes escalas para o campo de velocidade na direção x (u), e para o campo magnético na direção y (H_y)

$$u \sim U_\infty, H_y \sim H_0 \quad (4.48)$$

Desta forma buscamos a partir das equações governantes determinar as escalas para v , H_x , δ , M_x e M_y . A partir da equação da continuidade 3.71 temos que

$$\frac{U_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta} \quad (4.49)$$

resolvendo para v , encontramos a seguinte escala

$$v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty \quad (4.50)$$

A fórmula 3.89 define a vorticidade de um escoamento como

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.51)$$

Fazendo com que $L \gg \delta$ encontramos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.52)$$

logo

$$\xi \sim \frac{U_\infty}{\delta}. \quad (4.53)$$

O próximo passo consiste em utilizar a equação de Ampère-Maxwell no limite magnetostático 3.19 e realizar o balanço entre os dois termos da equação, assim encontramos que

$$\frac{H_0}{L} \sim \frac{H_x}{\delta}. \quad (4.54)$$

Resolvendo a equação 4.54 para H_x temos que

$$H_x \sim \frac{\delta}{L} H_0 \quad (4.55)$$

A escala encontrada para H_x mostra que para regiões relativamente pequenas o campo magnético na direção x é pequeno quando comparado com a componente na direção y . Partimos para a equação da magnetização e buscamos obter uma escala para M_x e M_y . Começando pela equação na direção x encontramos as seguintes escalas,

- Direção x:

$$u \frac{\partial M_x}{\partial x} \sim v \frac{\partial M_x}{\partial y} \sim \frac{U_0 H_0}{L} \quad (4.56)$$

$$\xi M_y \sim \frac{U_\infty M_y}{\delta} \quad (4.57)$$

$$\frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_y M_x H_y \sim \frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_x M_y H_0 \quad (4.58)$$

$$\frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_y^2 H_x \sim \frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_x^2 H_0 \quad (4.59)$$

$$\frac{M_{0x} - M_x}{\tau_B} \sim \frac{M_{0x} - M_x}{\tau_B} \sim \frac{M_x}{\tau_B} \quad (4.60)$$

- Direção y:

$$u \frac{\partial M_y}{\partial x} \sim v \frac{\partial M_y}{\partial y} \sim \frac{U_0 H_0}{L} \quad (4.61)$$

$$\xi M_x \sim \frac{U_\infty}{\delta} \frac{\delta}{L} H_0 \sim \frac{U_0 H_0}{L} \quad (4.62)$$

$$\frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_x^2 H_y \sim \frac{\mu_0}{6\mu\phi} \frac{\delta^2}{L^2} H_0^3 \quad (4.63)$$

$$\frac{\mu_0}{6\mu\phi} M_x M_y H_x \sim \frac{\mu_0}{6\mu\phi} \frac{\delta^2}{L^2} H_0^3 \quad (4.64)$$

$$\frac{M_{0y} - M_y}{\tau_B} \sim \frac{H_0}{\tau_B} - \frac{H_0}{\tau_B} \sim \frac{H_0}{\tau_B} \quad (4.65)$$

Assumindo que os termos convectivos são desprezíveis com relação aos outros termos, encontramos que a equação da magnetização na direção x 4.8 pode ser simplificada por

$$\frac{M_y}{2} \left(\xi - \frac{2M_x H_y}{6\eta\phi} \right) = \frac{M_x}{\tau_B} \quad (4.66)$$

Para a equação da magnetização na direção y encontramos que

$$\frac{M_y}{2} \left(\xi - \frac{M_x^2 H_y}{6\eta\phi} \right) = \frac{M_y - M_0 y}{\tau_B} \quad (4.67)$$

Fazendo $\tau_B \ll 1$, e deixando os termos de vorticidade

$$M_y = M_{0y} \quad (4.68)$$

$$M_x = -\frac{M_{0y}\tau_B}{2}\xi = -\frac{M_s\mathcal{L}(\alpha)\tau_B}{2}\xi \quad (4.69)$$

Agora partimos para a análise das equações do movimento mostrando as escalas de cada termo

- Direção x:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\rho U_0^2}{L} \quad (4.70)$$

$$-\frac{dP}{dx} \sim \frac{\rho U_0^2}{L} \quad (4.71)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mu \frac{U_0}{L^2} \quad (4.72)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{U_0}{\delta^2} \quad (4.73)$$

$$\mu_0 M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \sim \mu_0 \frac{\delta^2}{L^3} H_0^2 \quad (4.74)$$

$$\mu_0 M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \sim \mu_0 \frac{H_0^2}{L} \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_x H_y \sim \frac{\delta}{L} H_0^2 \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_y H_x \sim \frac{\delta}{L} H_0^2 \quad (4.77)$$

- Direção y:

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \rho \frac{\delta}{L^2} U_0^2 \quad (4.78)$$

$$-\frac{dP}{dy} \sim \frac{\rho U_0^2}{\delta} \quad (4.79)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \mu \frac{\delta}{L^3} U_0 \quad (4.80)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \mu \frac{1}{\delta L} U_0 \quad (4.81)$$

$$\mu_0 M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \sim \mu_0 \frac{\delta^2}{L^3} H_0^2 \quad (4.82)$$

$$\mu_0 M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \sim \mu_0 \frac{H_0^2}{L} \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_x H_y \sim \frac{\delta}{L} H_0^2 \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_y H_x \sim \frac{\delta}{L} H_0^2 \quad (4.85)$$

se inercia \gg atrito:

$$\frac{\delta}{L} \sim Re_m^{-1} \quad (4.86)$$

se termos magnéticos \ll inercia ($Rem \gg 1$)

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-\frac{1}{2}} \quad (4.87)$$

se atrito \gg inércia ($Re \ll 1$)

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-1} Re_m^{-1} \quad (4.88)$$

4.4 Formulação vorticidade - função de corrente para o problema

Outra forma de solução para o problema da camada limite é explorar o fato do escoamento ser bidimensional e incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) e reformular o problema a partir da função de corrente ψ e da vorticidade ξ . Para reformularmos o problema, recorreremos a definição de função de corrente dada pela equação 3.78 e aplicamos o rotacional em ambos os lados da equação. Desta forma, encontramos que

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \psi \hat{e}_z). \quad (4.89)$$

O lado direito da equação 4.83 representa a vorticidade do escoamento em que $\xi \equiv \nabla \times \mathbf{u}$. Já o lado direito pode ser simplificado a partir da identidade vetorial A.12. Como o fluido é incompressível $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, concluímos que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (4.90)$$

A equação 4.84 é chamada de equação de Poisson para a função de corrente é substituí a equação da continuidade na formulação vorticidade função de corrente. Em variáveis adimensionais temos que,

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{y}^2} = -\hat{\xi} \quad (4.91)$$

Obtemos a equação da vorticidade ao aplicar o rotacional na equação do movimento 3.88. Desta forma, encontramos que

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) &= \eta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_x H_y - M_y H_x) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (M_x H_y - M_y H_x) \right] \end{aligned} \quad (4.92)$$

Reescrevendo a equação 4.86 em variáveis adimensionais, temos que

$$\begin{aligned} \hat{u} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{y}} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial \hat{y}^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial \hat{y}} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{M}_x \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{M}_y \frac{\partial \hat{H}_x}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x) - \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} (\hat{M}_x \hat{H}_y - \hat{M}_y \hat{H}_x) \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

Juntamente com as equações 4.7, 4.8 e 4.9 para o potencial magnético e para a magnetização finalizamos a formulação do problema em termos da vorticidade e função de corrente. Apesar de simplificar o sistemas de equações quando comparado com o sistema de equações e variáveis $P-v$, a formulação vorticidade - função de corrente requer a determinação de novas condições de contorno para o problema (FLETCHER, 2012). Assim, propomos as seguintes condições de contorno:

- Entrada do domínio (1):

$$\psi = \int U_0 dy \quad (4.94)$$

$$\xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.95)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.96)$$

$$M_x = 0 \quad (4.97)$$

$$M_y = 0 \quad (4.98)$$

- Região sobre placa plana (2):

$$\psi = 0 \quad (4.99)$$

$$\xi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.100)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.101)$$

$$M_x = M_{0x} \quad (4.102)$$

$$M_y = M_{0y} \quad (4.103)$$

- Saída do domínio (3):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (4.105)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = 0 \quad (4.108)$$

- Saída superior (4):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_0 \quad (4.109)$$

$$\xi = 0 \quad (4.110)$$

$$\phi_m = \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{t} dl \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} = 0 \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (4.113)$$

Capítulo 5

Formulação numérica

5.1 Diferenças Finitas

Considerado como o método mais antigo para obtenção de soluções numéricas para equações diferenciais parciais, o método das diferenças finitas é ainda amplamente utilizado em áreas como a mecânica dos fluidos computacional, transferência de calor e precificação de opções em ativos financeiros.

O método das diferenças finitas consiste em aproximar as derivadas de uma equação diferencial parcial por meio de diferenças discretas entre as quantidades em estudo. Para isto, o domínio contínuo no qual está contida a solução para o problema é transformado em uma malha discreta, como mostrado na Figura 5.1. O resultado final da discretização é um conjunto de equações algébricas que aproximam a solução em cada ponto da malha.

5.1.1 Derivadas de primeira ordem

Suponha que $u(x)$ é uma função contínua e diferenciável, portanto entorno de uma vizinhança $u(x) + \Delta x$ é possível expressar $u(x)$ por uma série de Taylor ,

$$u(x) = u(x + \Delta x) + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\Delta x^2}{2!} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3). \quad (5.1)$$

Truncando a série após os termos lineares, determinamos que expressão para a primeira derivada de $u(x)$ é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.2)$$

a expressão dada por 5.2 é chamada de diferença ascendente. Como o domínio físico das equações é discretizado em nos espaçados por uma

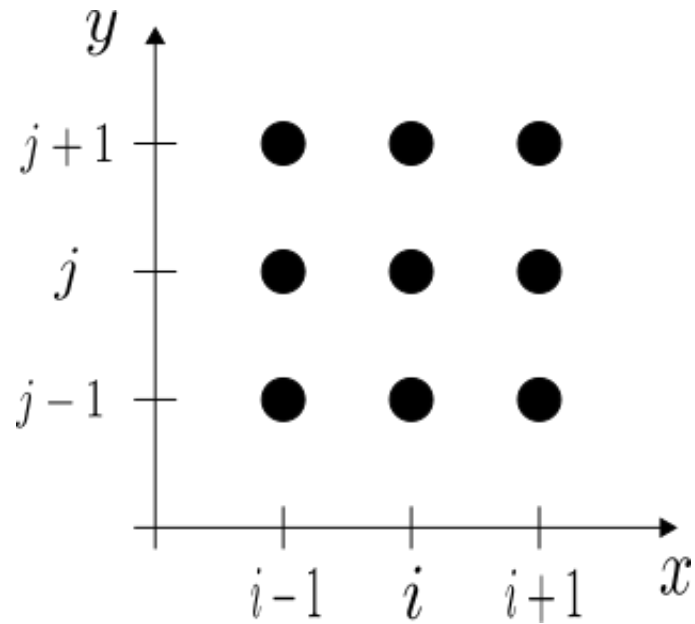


Figura 5.1: Discretização de uma região quadrada em uma malha discreta.

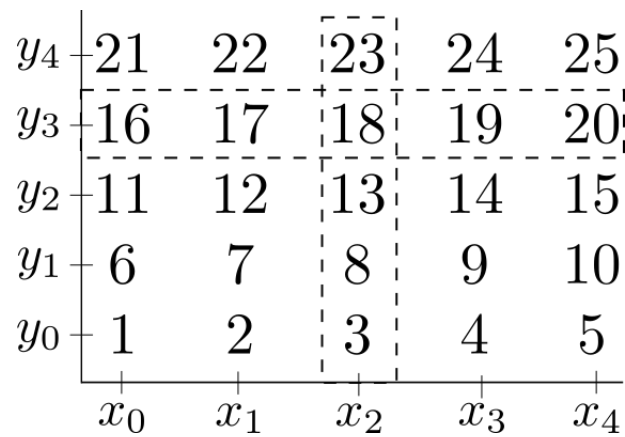


Figura 5.2: Numeração proposta para a malha.

distância Δx_i , reescrevemos a equação utilizando uma notação mais compacta

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (5.3)$$

Analogamente se expressarmos $u(x)$ em uma vizinhança $u(x - \Delta x)$ entramos podemos determinar a diferença descendente

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (5.4)$$

Colocando a expressão 5.4 na notação compacta reescrevemos a derivada atrasada como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (5.5)$$

Note que as formas discretas das derivadas apresentadas pelas equações 5.4 e 5.5 possuem um caráter assimétrico, no sentido de que em um domínio discreto onde Δx é finito, as derivadas frontais e atrasadas podem não ser necessariamente iguais

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \neq \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (5.6)$$

5.1.2 Derivadas de segunda ordem

Para chegarmos a uma expressão discreta para as derivadas de segunda ordem vamos recorrer a definição da segunda derivada de uma função $\frac{\partial u}{\partial x} = u'(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u'}{\partial x} \approx \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (5.7)$$

Substituindo o resultado da 5.7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (5.8)$$

Reescrevendo a expressão 5.8 na notação compacta para diferenças finitas temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} \quad (5.9)$$

Chegamos na forma final para a aproximação da segunda derivada por meio de diferenças finitas. Vale ressaltar que a forma final que demonstramos para a segunda derivada não é única, sendo está a sua forma simétrica e mais utilizada para as aproximações dentro do domínio de cálculo.

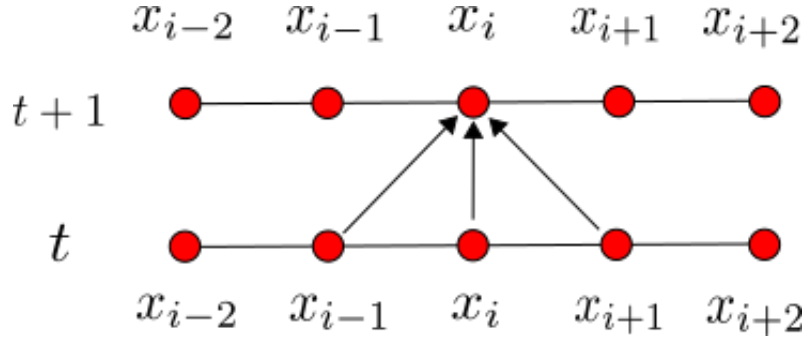


Figura 5.3: Molécula computacional para um método explícito.

5.2 Discretização das equações governantes

De acordo com J Hinch (2013), é recomendado manter os termos transientes das equações governantes $(\frac{\partial Q}{\partial t})$ mesmo quando estamos interessados apenas nas soluções em regime permanente. Isto é justificado pois a discretização dos termos transientes amortecem a propagação de erros pelos termos não lineares. Para equações que apresentam que variam no tempo, devemos escolher em que momento realizamos as discretizações das derivadas espaciais. Quando discretizadas em t , chamamos a solução de solução explícita. enquanto ao usar a camada temporal $t + 1$ chamamos a solução de implícita. Os métodos explícitos são, de maneira geral, mais simples e diretos de se implementar numericamente. Contudo, a estabilidade da solução requer o uso de pequenos espaços de tempo Δt , tornando a solução "cara" em termos computacionais. As soluções implícitas requerem um pouco mais de esforço para serem obtidas. O resultado da discretização implícita se dá na forma de um sistema linear de equações acopladas e requerem rotinas próprias para solução de sistemas lineares. A grande vantagem do método implícito é sua estabilidade quanto ao espaço de tempo usado Δt , este aceita a utilização de espaços de tempo bem maiores quando comparado com os métodos explícitos. A seguir está mostrado a discretização explícita das equações governantes

- Equação da vorticidade

$$\frac{\xi_{ji}^{t+1} - \xi_{ji}^t}{\Delta t} + u_{ji}^t \frac{\xi_{ji}^t - \xi_{ji-1}^t}{\Delta x} + v_{ji}^t \frac{\xi_{ji}^t - \xi_{j-1i}^t}{\Delta y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\xi_{j+1i}^t + \xi_{j-1i}^t - 2\xi_{ji}^t}{\Delta x^2} + \frac{\xi_{j+1i}^t + \xi_{j-1i}^t - 2\xi_{ji}^t}{\Delta y^2} \right) \quad (5.10)$$

- Equação de Poisson para a função de corrente

$$\frac{\psi_{j+1i}^{t+1} + \psi_{j-1i}^{t+1} - 2\psi_{ji}^{t+1}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{j+1i}^{t+1} + \psi_{j-1i}^{t+1} - 2\psi_{ji}^{t+1}}{\Delta y^2} = -\xi_{ji}^{t+1} \quad (5.11)$$

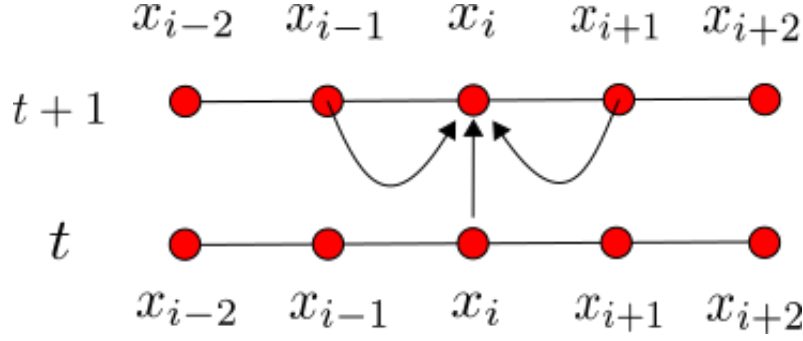


Figura 5.4: Molécula computacional para um método implícito.

- Equação de Poisson para o campo magnético

$$\frac{\phi_{ji+1}^t + \phi_{ji-1}^t - 2\phi_{ji}^t}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j+1i}^t + \phi_{j-1i}^t - 2\phi_{ji}^t}{\Delta y^2} = -\frac{M_{x(ji+1)} - M_{x(ji-1)}}{2\Delta x} - \frac{M_{x(j-1i)} - M_{x(j+1i)}}{2\Delta y} \quad (5.12)$$

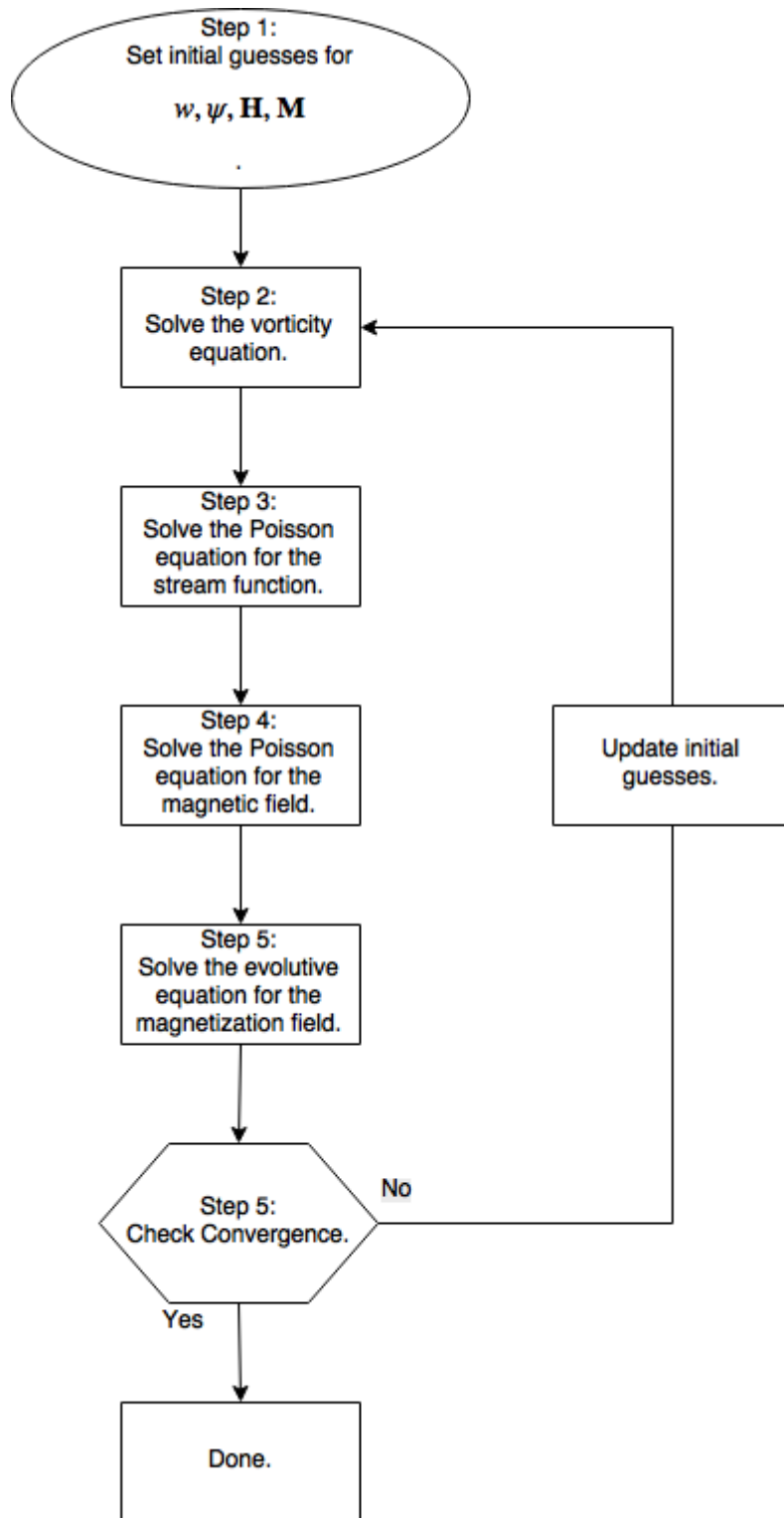
- Equação da magnetização

$$\begin{aligned} \frac{M_{x(ji)}^{t+1} - M_{x(ji)}^t}{\Delta t} + u_{ji}^t \frac{M_{x(ji)}^t - M_{x(ji-1)}^t}{\Delta x} + v_{ji} \frac{M_{x(ji)}^t - M_{x(j-1i)}^t}{\Delta y} &= -\xi_{ji}^t M_{y(ji)}^t \\ -\frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} M_{y(ji)}^t (M_{x(ji)}^t H_{y(ji)}^t - M_{y(ji)}^t H_{x(ji)}^t) - \frac{1}{Pe} (M_{x(ji)}^t - M_{x0} j i^t) & \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{y(ji)}^{t+1} - M_{y(ji)}^t}{\Delta t} + u_{ji}^t \frac{M_{y(ji)}^t - M_{y(ji-1)}^t}{\Delta x} + v_{ji} \frac{M_{y(ji)}^t - M_{y(j-1i)}^t}{\Delta y} &= \xi_{ji}^t M_{x(ji)}^t \\ + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} M_{x(ji)}^t (M_{x(ji)}^t H_{y(ji)}^t - M_{y(ji)}^t H_{x(ji)}^t) - \frac{1}{Pe} (M_{y(ji)}^t - M_{y0} j i^t) & \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.3 Proposta de um algoritmo para a solução numérica

- Pré-processamento:
 1. Definir parâmetros adimensionais;
 2. Definir espaçamento entre nós da malha $(\Delta x, \Delta y)$;
 3. Criar malha computacional;
 4. Iniciar condições de iniciais;
- Processamento de dados:
 1. Resolver equação da vorticidade;
 2. Resolver equação de Poisson para função de corrente;
 3. Resolver equação de Poisson para o potencial magnético;
 4. Resolver equação da magnetização;
 5. Checar convergência;
 - Se $(\xi^{t+1} - \xi^t) < 10^{-6}$: Parar.
 - Voltar para o passo (1).



Capítulo 6

Resultados e Discussões

6.0.1 Validação do código

Para darmos confiança a solução numérica obtida a partir do código escrito, comparamos os resultados obtidos para a espessura da camada limite e coeficiente de arrasto com a solução analítica obtida por Blasius (1908). O domínio de dimensões $\hat{x} = 1.0$ e $\hat{y} = 0.3$ foi discretizado em uma malha 45×90 , ou seja, 45 nós na direção x e 90 nós na direção y . Os incrementos Δx e Δy foram obtidos dividindo o tamanho de cada direção pelo número de nós menos um,

$$\Delta x = \frac{1.0}{nx - 1} \quad (6.1)$$

$$\Delta y = \frac{0.3}{ny - 1}. \quad (6.2)$$

Para a malha selecionada, os valores de 0,0227 e 0,0033 foram obtidos para os incrementos Δx e Δy respectivamente. O resultados apresentado na figuras 6.4 apresenta a comparação entre o coeficiente de arrasto numérico e o resultado analítico de Blasius, dado por

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.3)$$

em que Re_x é o número de Reynolds local $Re_x = \frac{\rho U_0 x}{\eta}$. Comparativamente a solução numérica apresentou um desvio máximo de 0.0103. A figura 6.5 compara a espessura da camada limite numérica com o resultado analítico

$$\frac{\delta}{L} = \frac{4,91}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.4)$$

e apresenta um desvio máximo de 0,00583. A Figura 6.3 mostra os perfis de velocidade encontrados pelo código numérico para diferentes posições.

Para os perfis próximos a entrada do domínio de cálculo foi encontrado um desvio máximo de 0,03. Como os desvios encontrados para a camada limite, coeficiente de arrasto e para os perfis de velocidade são da mesma ordem da resolução imposta pelos incrementos, concluímos que o código está validado para o problema da camada limite de Blasius.

6.0.2 Resultados para campo magnético constante:

Nesta secção são mostrados os resultados referentes as simulações em que o campo magnético H é da forma $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_y$. Dois casos são mostrados para $Pe = 1.0$ e $Pe = 0.01$. As simulações foram feitas utilizando o as mesmas dimensões para o domínio e para malha utilizadas no caso de validação. Foram também assumidos e fixados os seguinte parâmetros: $\phi = 0.01$, $M_d = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $Re = 1000.0$ e $Rem = 100.0$.

Nota-se a partir das Figuras 6.6 e 6.7 que a topologia do escoamento não é alterada pelas forças magnéticas em ambos os casos. Ainda mais, pelos resultados apresentados nas Figuras 6.20 e 6.19 o escoamento para $Pe = 0.01$ não apresenta nenhuma modificação para a espessura da camada limite ou para o coeficiente de arrasto. Isto pode ser justificado pelas Figuras 6.16 e 6.21 que mostram a magnetização do ferrofluido fortemente alinhada com o campo magnético \mathbf{H} , inferindo um regime de superparamagnetismo, e portanto a ausência de torques magnéticos $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0$.

No entanto, ara $Pe = 1.0$ encontramos na Figura 6.11 um aumento no coeficiente de arrasto no início da placa plana juntamente com um aumento na espessura da camada limite, mostrado pela Figura 6.12. Entretanto o fenômeno mais interessante observado pelas simulações é o acoplamento da magnetização do ferrofluido com o escoamento como mostram as Figuras 6.8, 6.9 e 6.10. É possível observar três regiões distintas para a magnetização. A primeira delas corresponde a região mais próxima a placa plana onde devido a alta vorticidade produzida pela parede impede o fluido de se magnetizar. A região mais afastada da placa plana, onde o escoamento não apresenta vorticidade, mostra a magnetização completamente alinhada com o campo magnético externo, exibindo um regime de superparamagnetismo. Por último, temos a região intermediária, próxima a borda da camada limite, onde a magnetização é reorientada devido a vorticidade do escoamento.

6.0.3 Resultados para campo magnético de um imã permanente:

Esta secção apresenta os resultados referentes a simulação do problema de camada limite para um ferrofluido na presença de um campo magnético ex-

terno proveniente de um imã permanente mostrado pelas equações 3.24 e 3.25. Como existe variação do campo magnético dentro do domínio não é possível fixar um valor único para α . Este é calculado localmente em todo domínio em função do campo magnético. Os seguintes parâmetros foram fixados para a simulação: $\phi = 0.01$, $M_d = 1.0$, $Re = 1000.0$ e $Rem = 100.0$ e $Pe = 1.0$. A topologia da magnetização mostrada pelas Figuras 6.24 e 6.25 é similar ao apresentado anteriormente, apresentando as três regiões distintas para a magnetização. O escoamento também apresenta um aumento do coeficiente de arrasto mostrado pela Figura 6.27. Entretanto, a espessura da camada limite aparece reduzida 6.28. Apesar da existência de gradientes de campo magnético $\nabla \mathbf{H}$ e portanto forças magnéticas do tipo $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ não foi possível identificar especificamente suas contribuições para o escoamento.

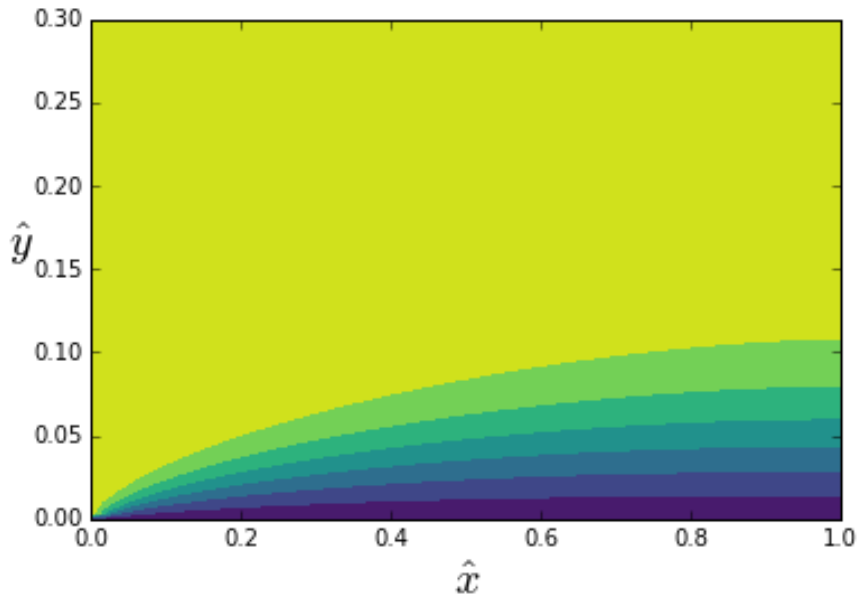


Figura 6.1: Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$

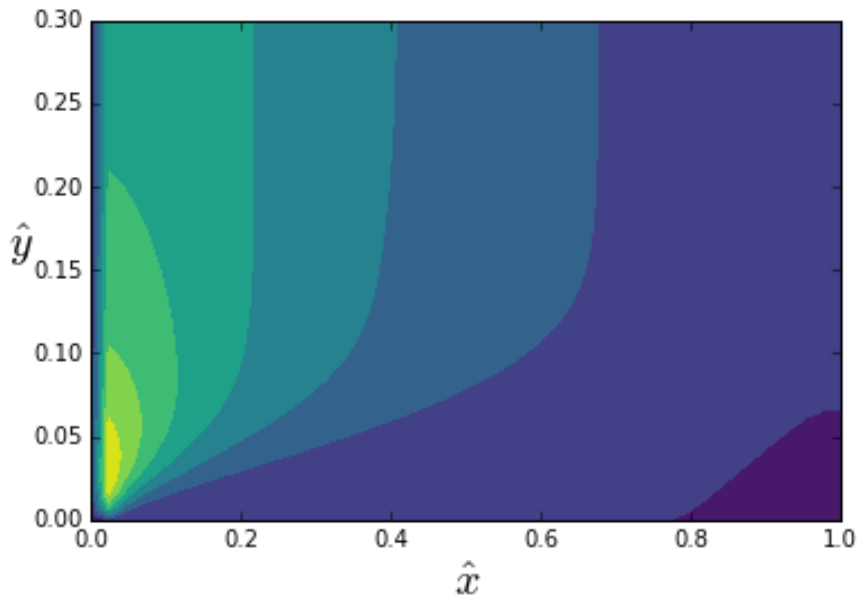


Figura 6.2: Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$

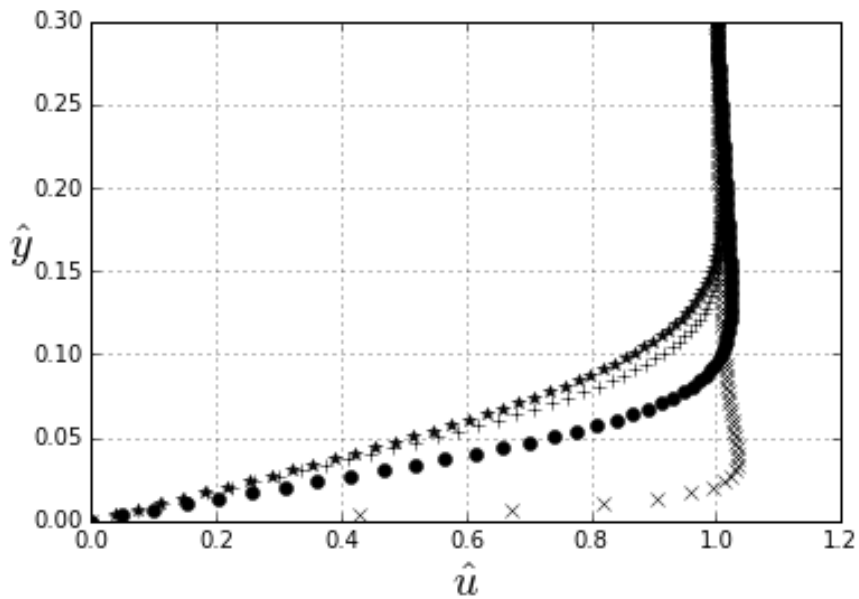


Figura 6.3: Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$.

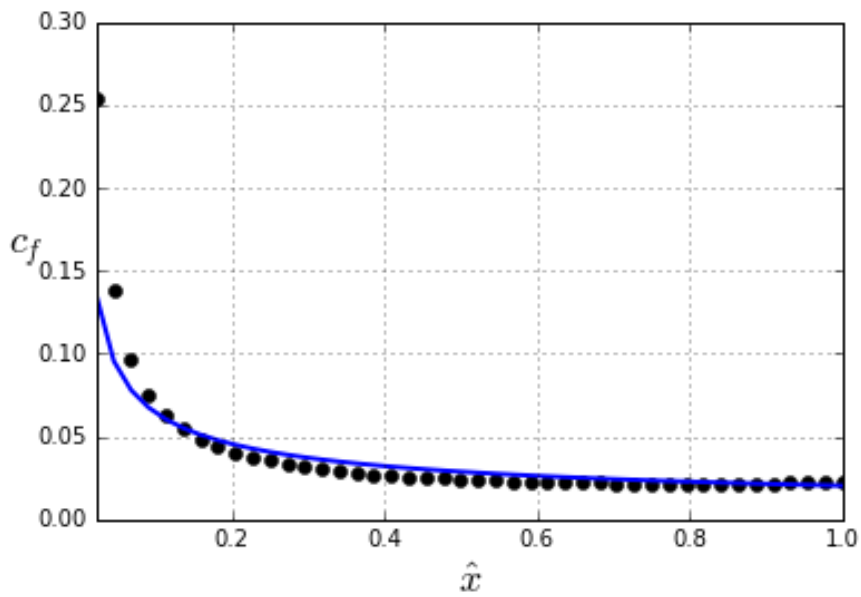


Figura 6.4: Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

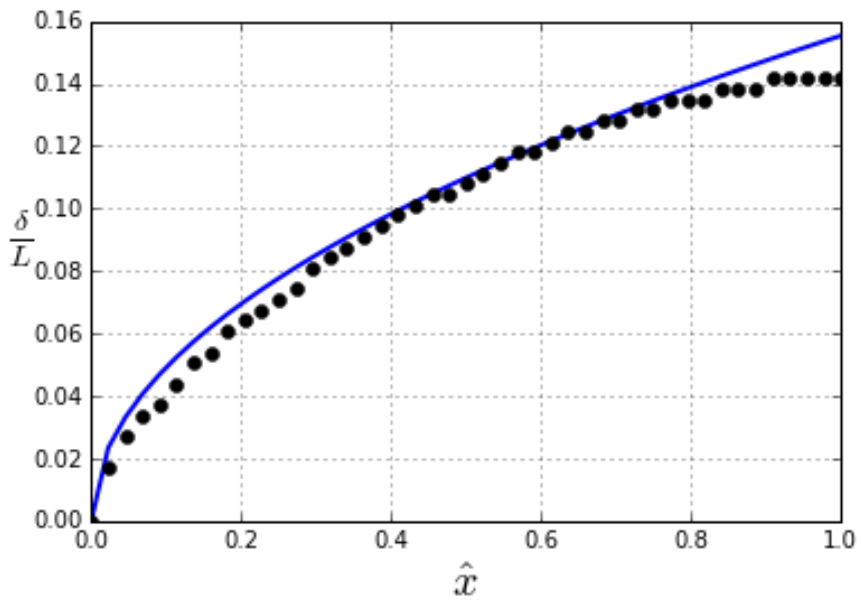


Figura 6.5: Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

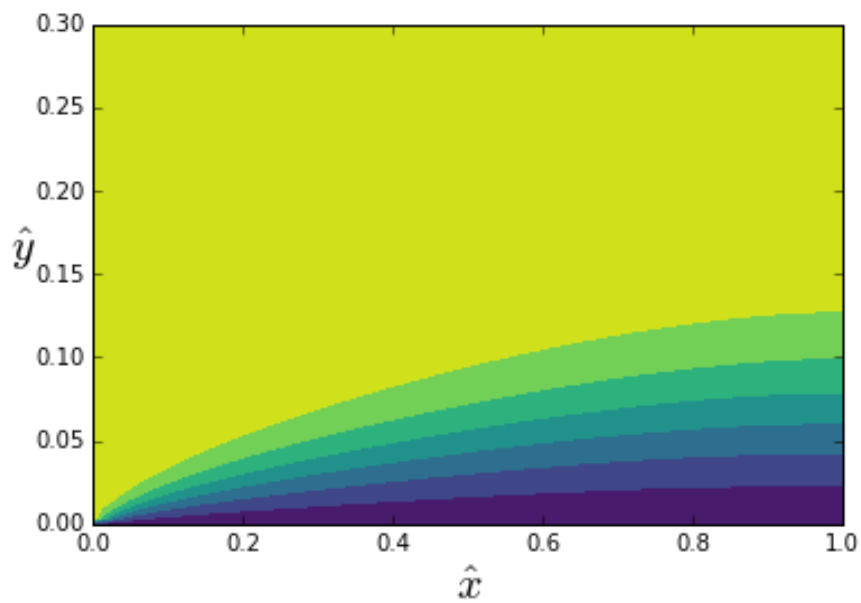


Figura 6.6: Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$

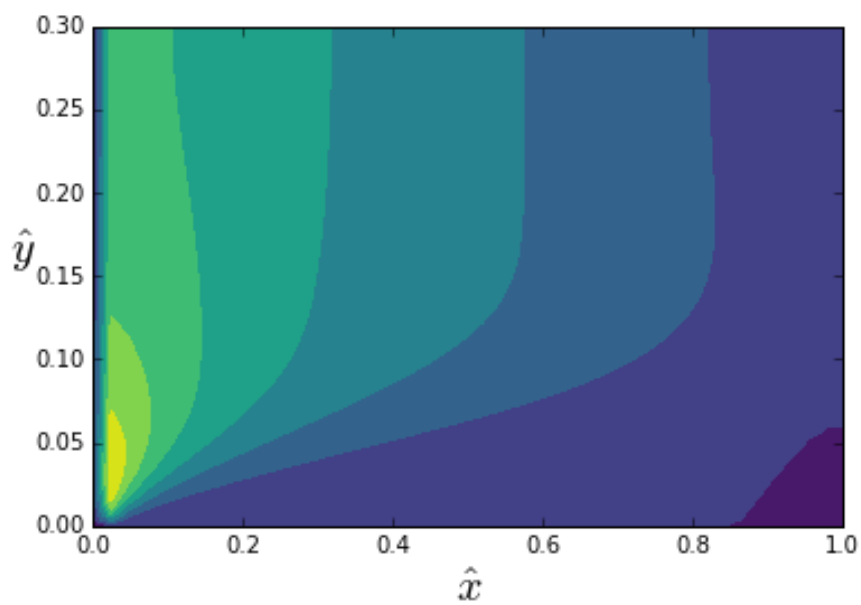


Figura 6.7: Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$

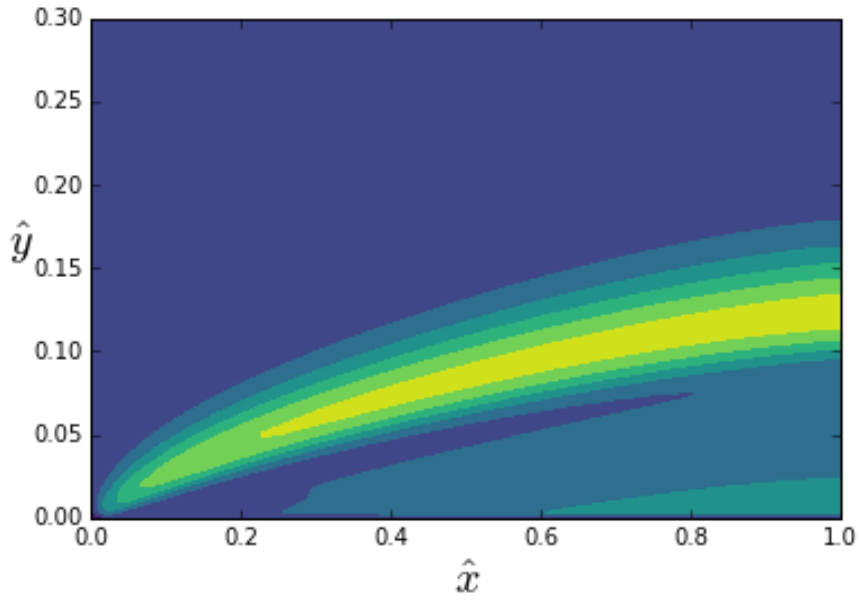


Figura 6.8: Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$.

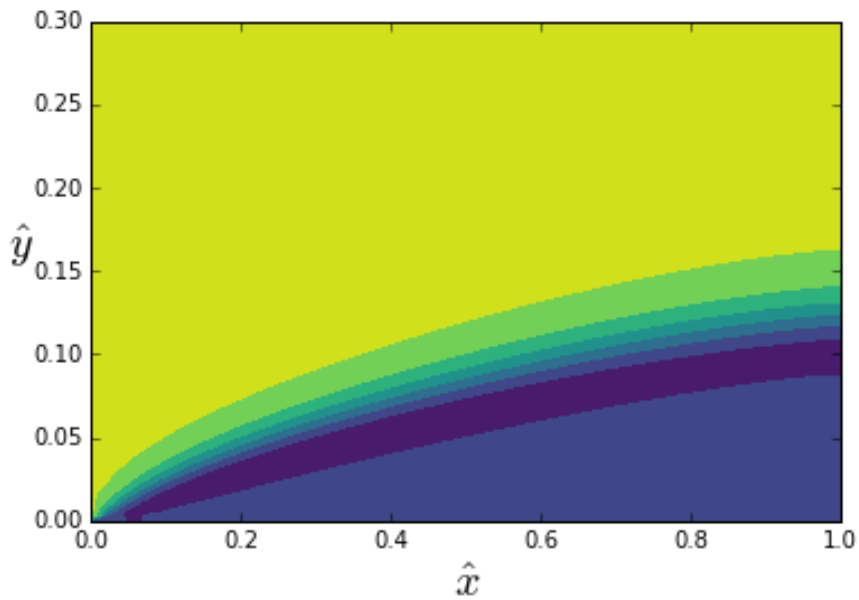


Figura 6.9: Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$.

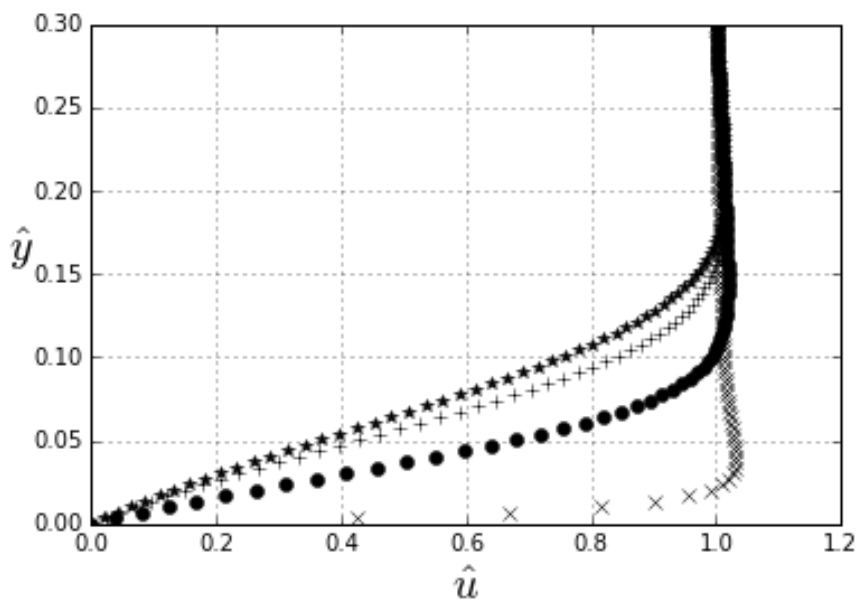


Figura 6.10: Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$.

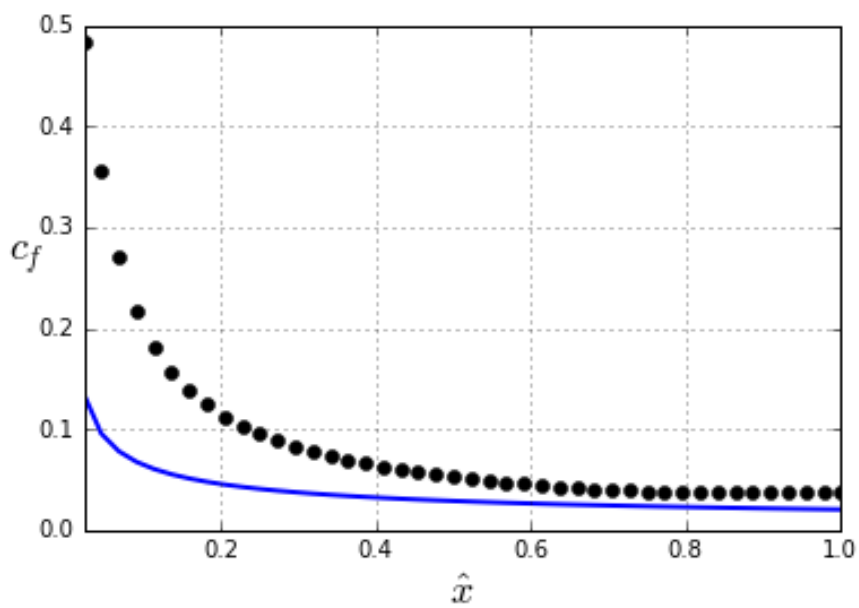


Figura 6.11: Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

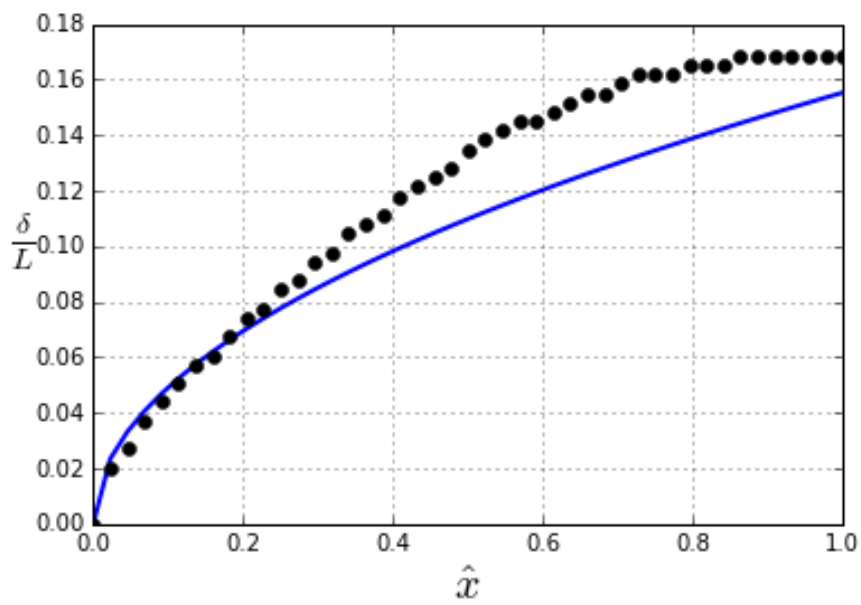


Figura 6.12: Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

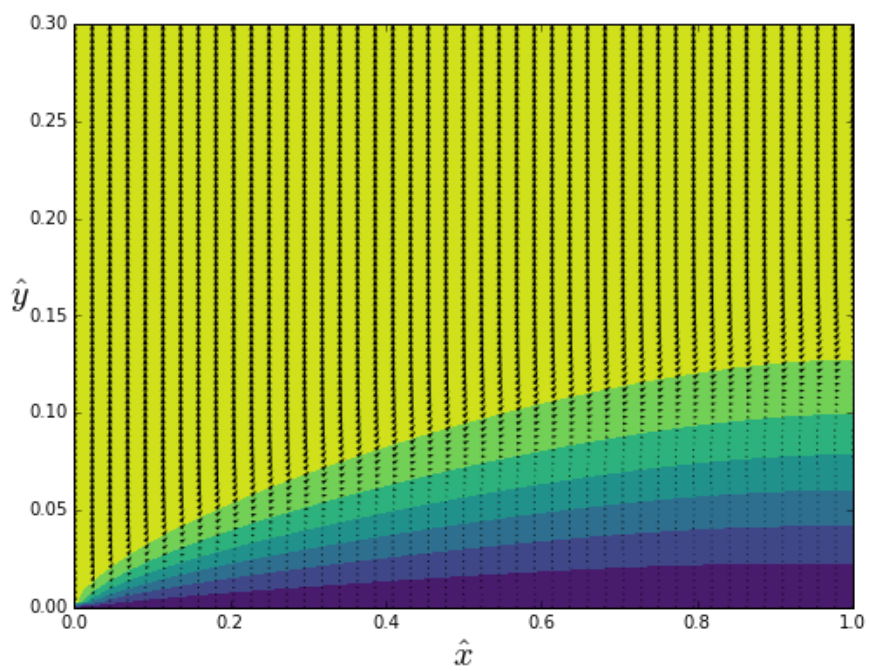


Figura 6.13: Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1.0$.

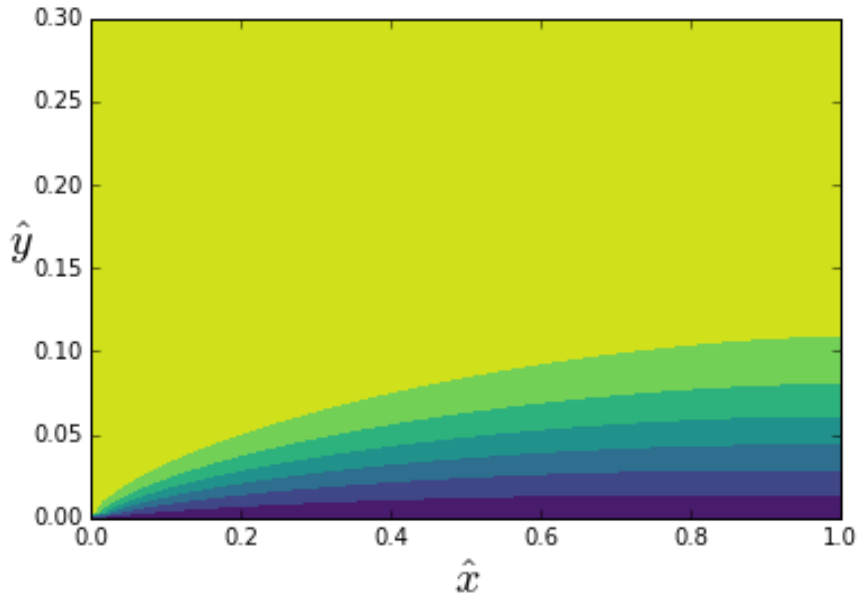


Figura 6.14: Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$.

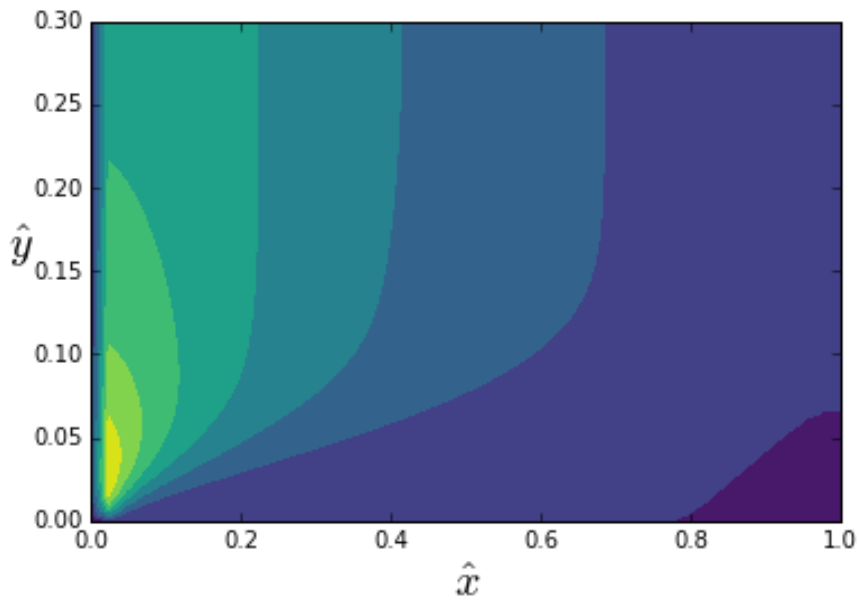


Figura 6.15: Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$

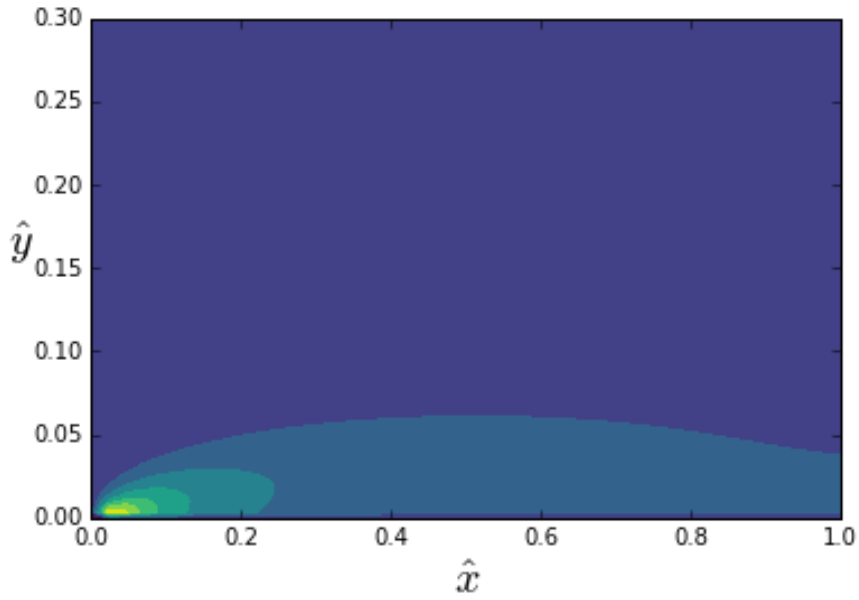


Figura 6.16: Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$.

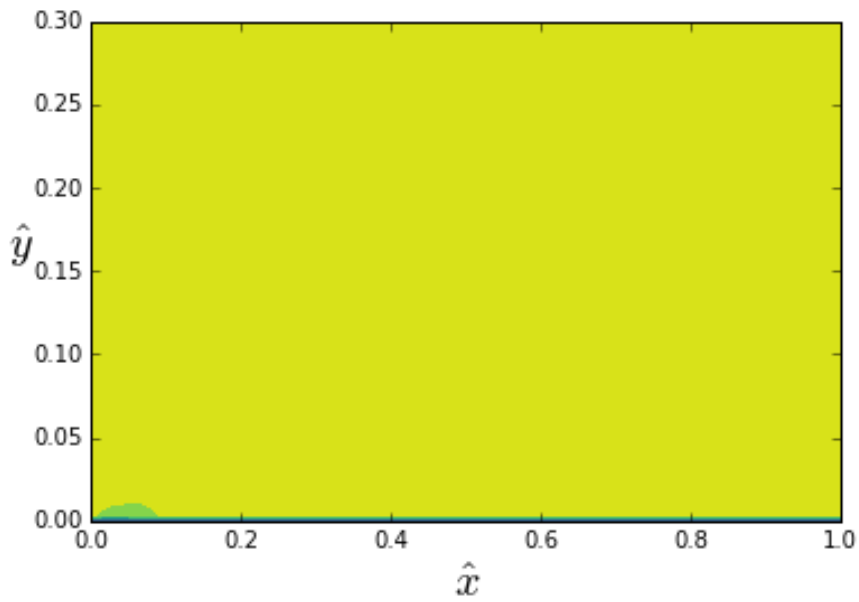


Figura 6.17: Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$.

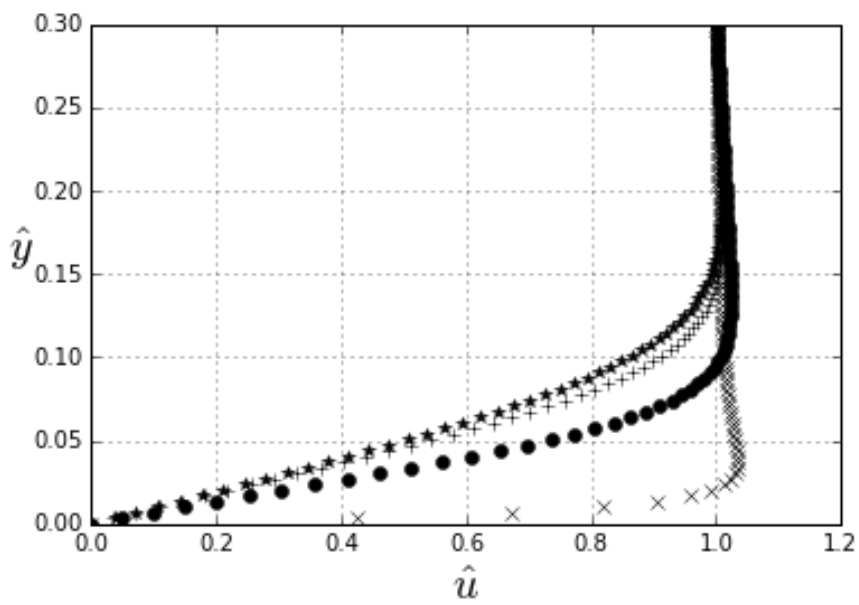


Figura 6.18: Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia : \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$.

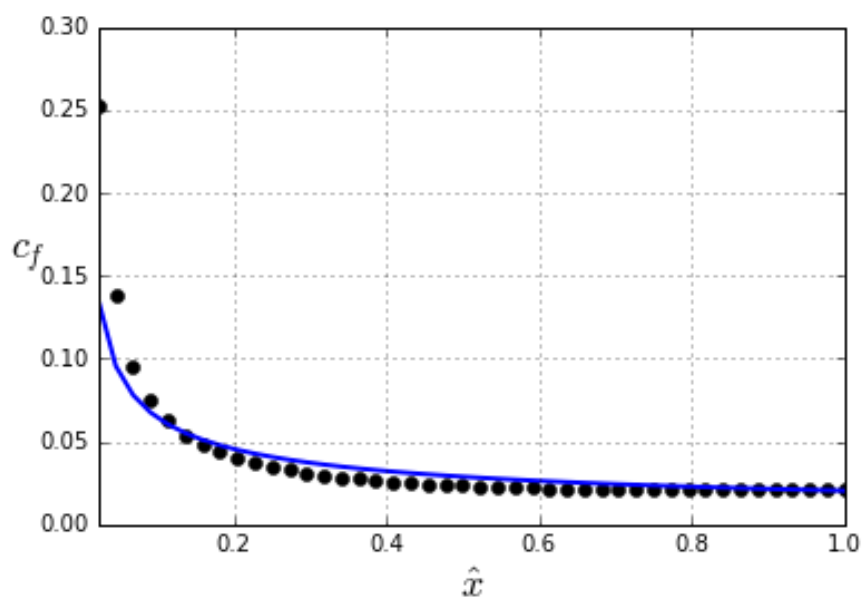


Figura 6.19: Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

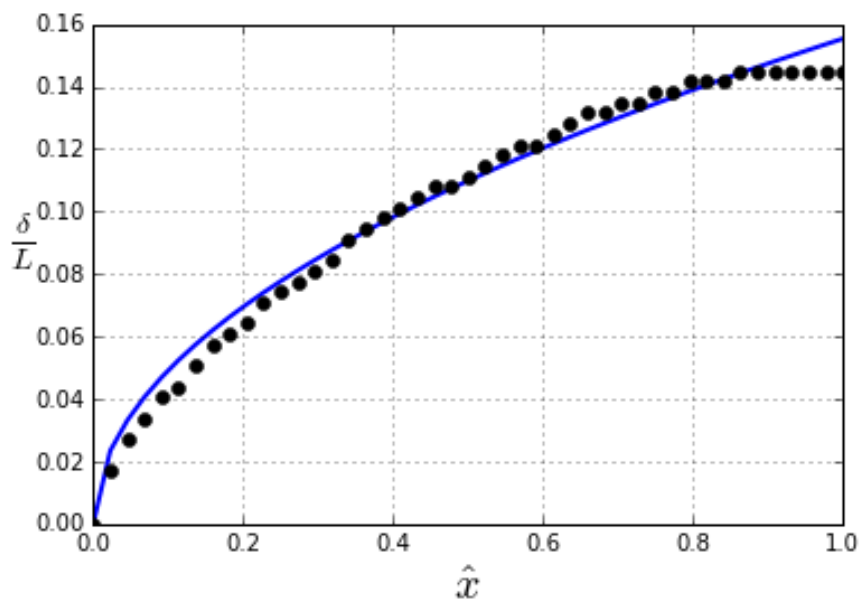


Figura 6.20: Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

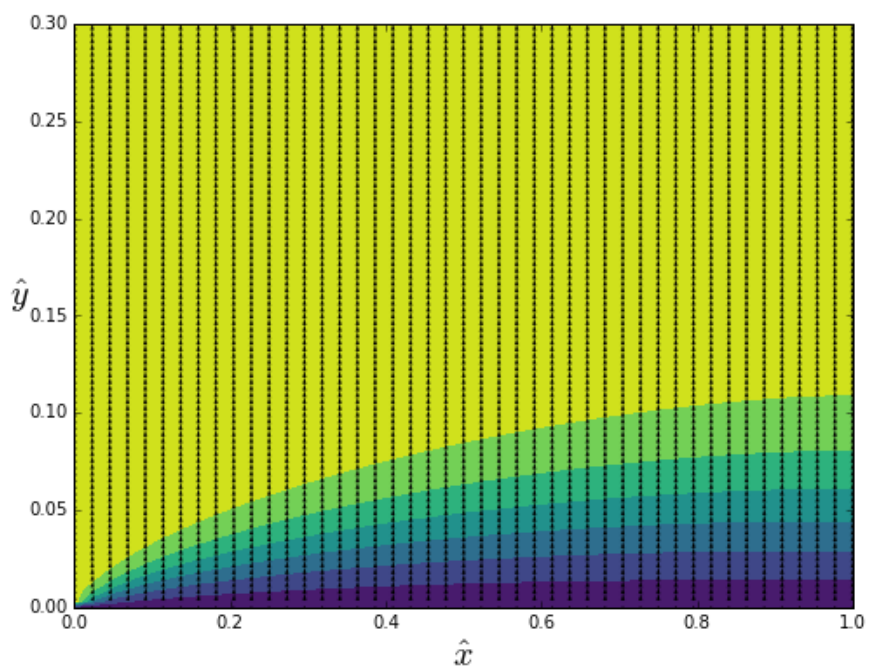


Figura 6.21: Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 0.01$, $\alpha = 1.0$.

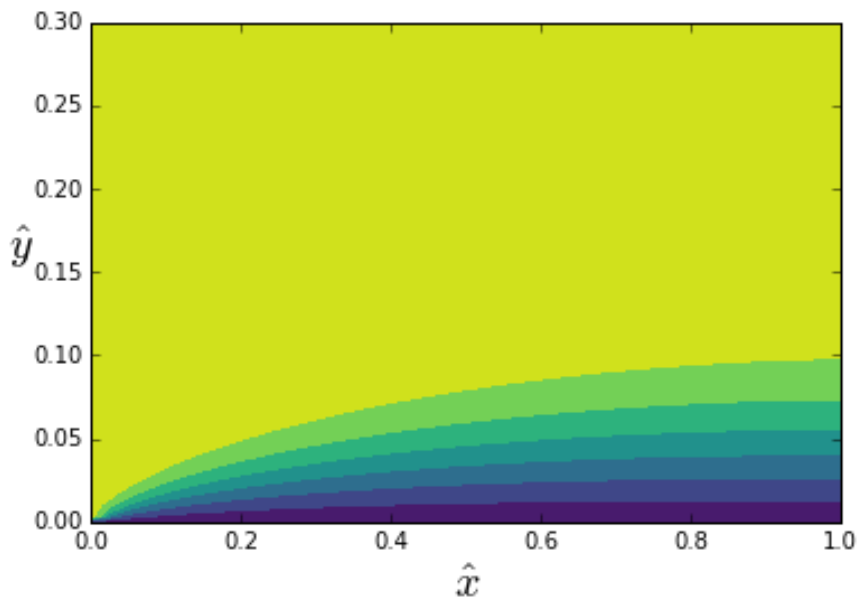


Figura 6.22: Campo de velocidade na direção x (u) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$ com campo magnético produzido por um ímã permanente .

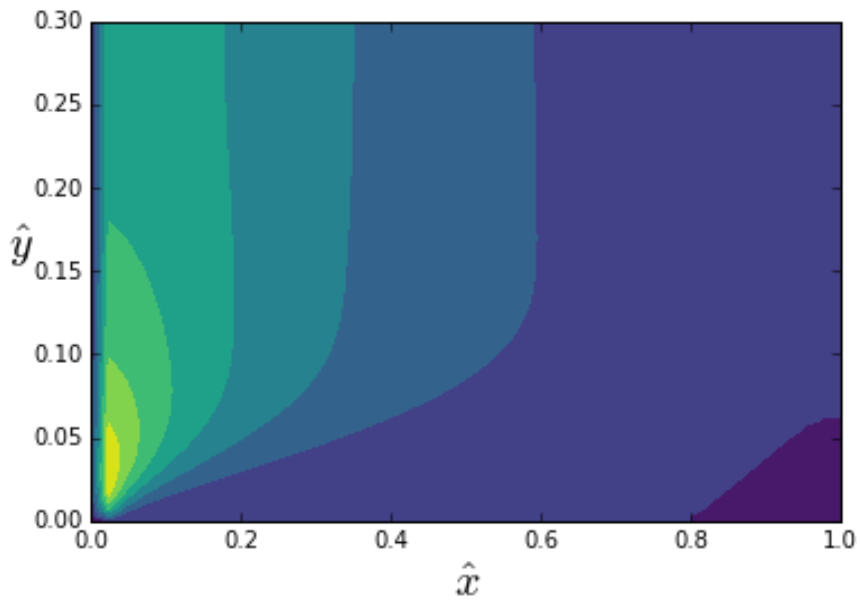


Figura 6.23: Campo de velocidade na direção y (v) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$, $e\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente

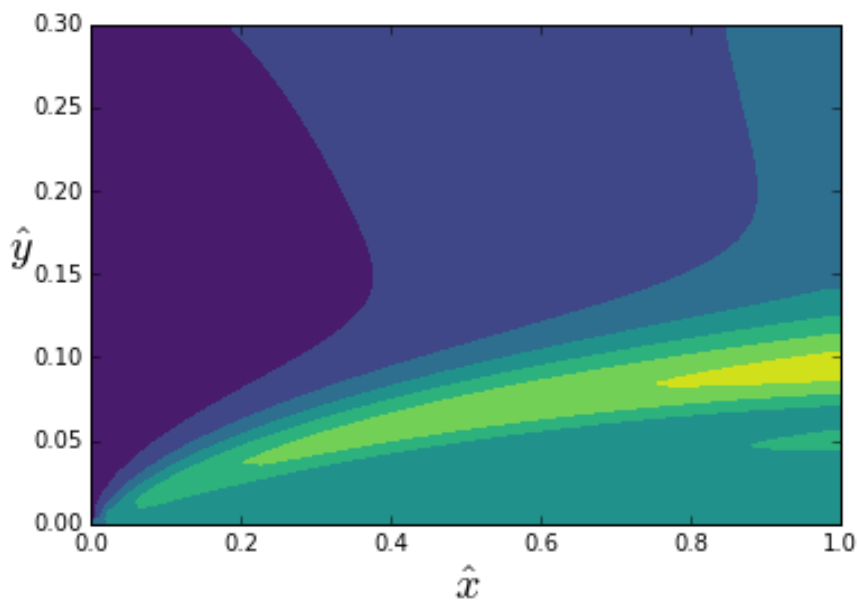


Figura 6.24: Campo de magnetização na direção x (M_x) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0e\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente

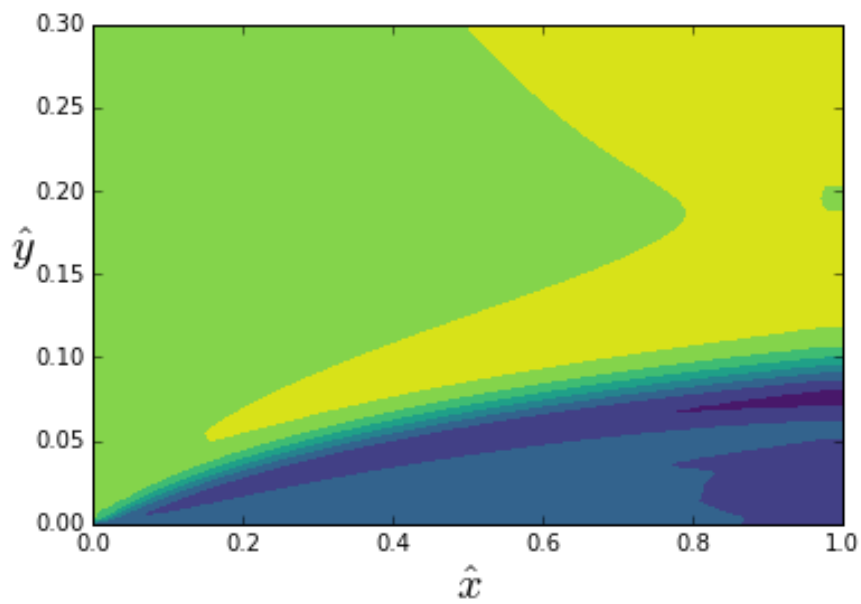


Figura 6.25: Campo de magnetização na direção y (M_y) para $Re = 1000.0$, $Rem = 100.0$, $Pe = 1.0$ e $\alpha = 1.0$. com campo magnético produzido por um ímã permanente

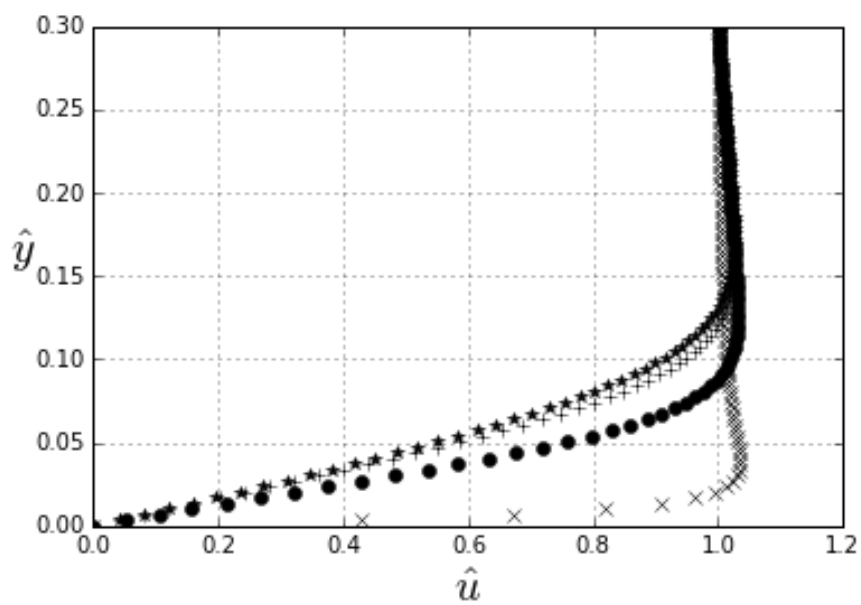


Figura 6.26: Conjunto de perfis para velocidade na direção x (u) com campo magnético produzido por um ímã permanente. Para cada posição em x foi adotada seguinte simbologia: \times para $x^* = 0.01$, \circ para $x^* = 0.25$, Δ para $x^* = 0.5$, $+$ para $x^* = 0.75$ e $*$ para $x^* = 1.0$.

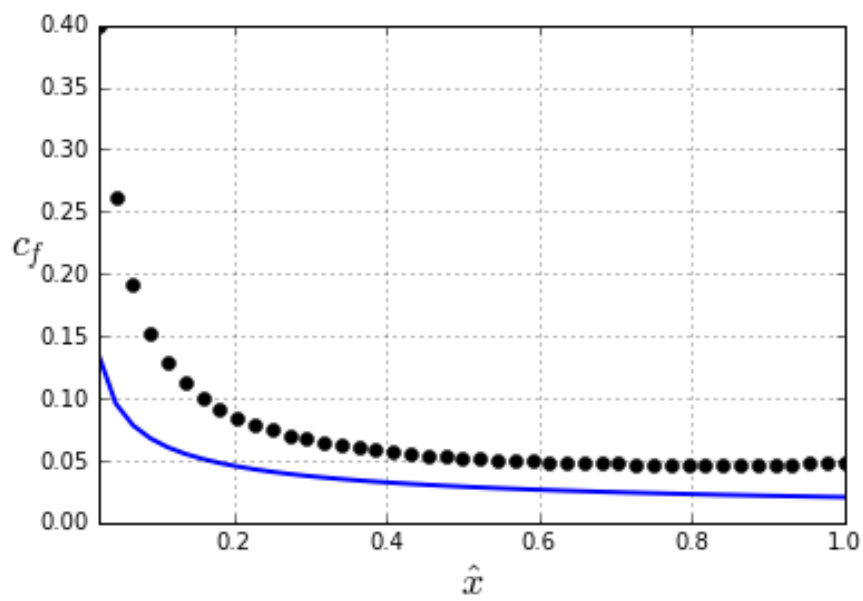


Figura 6.27: Gráfico para o coeficiente de arrasto c_f em função da distância em \hat{x} com campo magnético produzido por um ímã permanente . A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

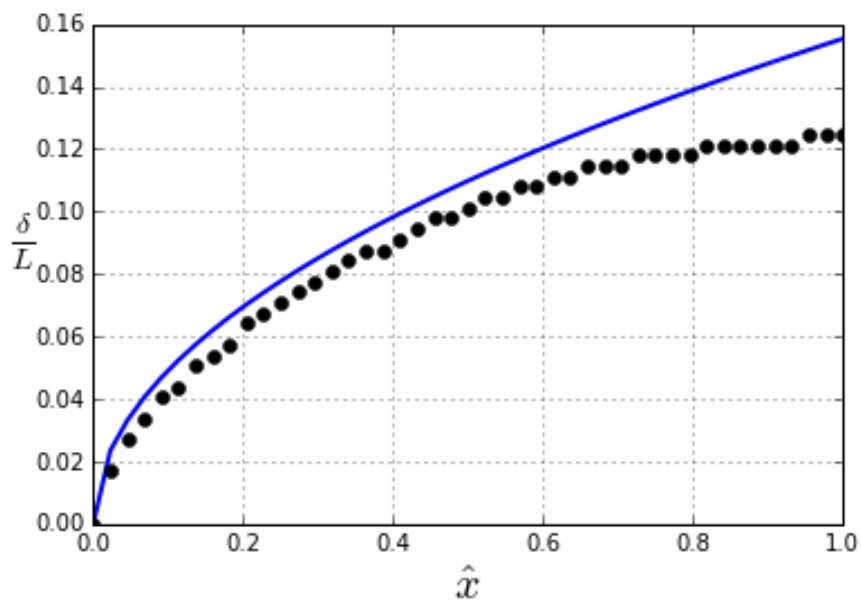


Figura 6.28: Gráfico para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{L}$ em função da distância em \hat{x} com campo magnético produzido por um ímã permanente. A linha sólida representa a solução analítica de Blasius, os círculos representam a solução numérica obtida.

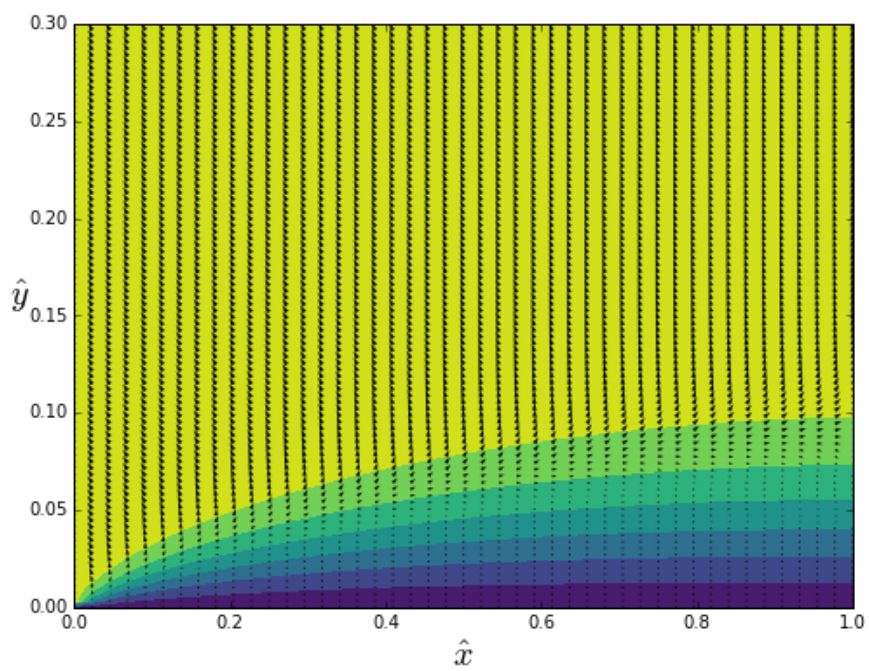


Figura 6.29: Gráfico de velocidade na direção x (u) com diagrama de flechas para o campo de magnetização encontrado com campo magnético produzido por um ímã permanente.

Capítulo 7

Conclusões

Os resultados apresentados mostram parcialmente os mecanismos de interação entre o campo de velocidade do escoamento, o campo magnético e a magnetização do ferrofluido para o problema de camada limite sobre placa plana. O foco deste trabalho foi a comparação dos efeitos magnéticos sobre o escoamento por meio de dois regimes distintos de magnetização, o superparamagnético ($Pe \ll 1$) e o regime de não equilíbrio ($Pe \sim 1$). As simulações mostraram uma forte influência do campo de vorticidade do escoamento produzida nas vizinhanças da placa plana com a magnetização do fluido, para os casos em que $Pe = 1.0$. O resultado foi a estratificação dos regimes de magnetização a medida que nos deslocamos transversalmente a direção da placa plana. As regiões observadas correspondem a camada mais próxima a parede onde a magnetização é nula, passando para a área nas vizinhanças da camada limite e por fim para a região fora da camada limite onde encontramos um regime superparamagnético. Para $Pe = 0.01$ a magnetização se apresentou sempre em regime superparamagnético. Nenhuma alteração significativa do escoamento em relação ao caso não foi observada para as simulações feitas utilizando $Pe \leq 0.01$. Outros casos foram estudados para diferentes números de Reynolds magnético. As simulações feitas com $Rem \sim 10^3$ não apresentaram nenhuma diferença significativa em seu escoamento. As tentativas de soluções para $Rem < 10^2$ não obtiveram êxito, e exibiram comportamento instável.

Apêndice A

Identidades vetoriais

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \nabla \phi_2 + \phi_2 \nabla \phi_1 \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi_1 \times \nabla \phi_2) = 0 \quad (\text{A.14})$$

A.1 Identidades tensoriais

$$\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) \quad (\text{A.15})$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}\underline{\mathbf{C}} = (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}})\underline{\mathbf{C}} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{B}}) = \underline{\mathbf{A}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{B}}(\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}}) \quad (\text{A.17})$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\mathbf{A}} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot (\phi \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \nabla \phi \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

Neste apêndice vamos mostrar sem provas alguns teoremas integrais importantes na modelagem problemas relativos a mecânica dos meios contínuos. Para resultados mais aprofundados ver (ARIS, 2012), (CHADWICK, 2012).

B.1 Teorema da divergência

Seja Ω um região regular no espaço Euclidiano E^3 e $\partial\Omega$ uma fronteira suave por partes. Se \mathbf{u} é um vetor arbitrário tal que $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \nu$ então

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_B \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (\text{B.1})$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal a superfície $\partial\Omega$. Chamamos de fluxo de \mathbf{u} a quantidade representada do lado esquerdo da equação. O fluxo de \mathbf{u} indica a velocidade com que a propriedade \mathbf{u} atravessa a superfície $\partial\Omega$.

B.2 Teorema de Stokes

Seja Γ um curva qualquer contida no espaço Euclidiano E^3 cuja fronteira $\partial\Gamma$ é uma curva suave por partes. Considerando um vetor arbitrário \mathbf{u} ta que $\mathbf{u} : E^3 \rightarrow \nu$, temos que

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_c \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{B.2})$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal a superfície Γ e $d\mathbf{x}$ é o vetor unitário tangente a curva $\partial\Gamma$. Chamamos de **circulação** a quantidade representada do lado direito da equação.

B.3 Teorema da localização

Seja B uma região aberta contida no espaço Euclidiano E^3 cuja função escalar $\Phi(\mathbf{x})$ está definida. Para uma dada região Ω contida no domínio B , dizemos que, se

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) dV = 0 \quad (\text{B.3})$$

então

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{B.4})$$

B.4 Teorema transporte de Reynolds

O teorema transporte de Reynolds é de extrema importância na mecânica dos meios contínuos pois este é responsável por quantificar a taxa de variação de qualquer propriedade de um volume material. Seja $\Phi(\mathbf{x})$ uma função qualquer que representa alguma propriedade da matéria e $\Omega(t)$ o volume ocupado por um conjunto determinado de partículas. A taxa de variação da propriedade $\Phi(\mathbf{x})$ dentro do volume $\Omega(t)$ é dada por

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{D}{Dt} \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] dV \quad (\text{B.5})$$

em que \mathbf{u} representa o vetor velocidade do meio. Anunciamos portanto o teorema transporte de Reynolds.

Referências Bibliográficas

ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

BEJAN, A. *Convection heat transfer*. [S.l.]: John wiley & sons, 2013.

BLAKELY, R.; STILES, J.; TUFFIAS, R. *Ferrohydrodynamic low friction bearing*. [S.l.]: Google Patents, 1973. US Patent 3,746,407.

BLASIUS, H. Boundary layer in fluid, fluids with less friction, z math. *Phys*, v. 56, p. 1–37, 1908.

CHADWICK, P. *Continuum mechanics: concise theory and problems*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

CLEGG, A. G. Permanent magnets in theory and practice. *Pentech Press*, 1987.

CUNHA, F. R.; GONTIJO, R. G. On the governing equation of non-symmetrical magnetic fluids. *In Preparation.*, 2015.

DAVIDSON, P. A. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. 2001. [S.l.]: Cambridge University Press.

FLETCHER, C. *Computational techniques for fluid dynamics 2: Specific techniques for different flow categories*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

HINCH, J. *Lecture notes on computational fluid dynamics*. 2013.

MALVAR, S. Bubble dynamics in magnetic fluids: Theory and applications. *Tese de Mestrado, Universidade de Brasília*, 2015.

NEURINGER, J. L.; ROSENSWEIG, R. E. Ferrohydrodynamics. *Physics of Fluids (1958-1988)*, AIP Publishing, v. 7, n. 12, p. 1927–1937, 1964.

- ODENBACH, S. Recent progress in magnetic fluid research. *Journal of physics: condensed matter*, IOP Publishing, v. 16, n. 32, p. R1135, 2004.
- ODENBACH, S. *Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 763.
- PRANDTL, L. Über flüssigkeits bewegung bei sehr kleiner reibung. *Verhaldlg III Int. Math. Kong*, p. 484–491, 1904.
- RAJ, K.; BONVOULOIR, J.; MOSKOWITZ, R. *Loudspeaker*. [S.l.]: Google Patents, 1995. US Patent 5,461,677.
- ROSENSWEIG, R. Directions in ferrohydrodynamics. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 57, n. 8, p. 4259–4264, 1985.
- ROSENSWEIG, R. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Dover Publications, 1997.
- ROSENSWEIG, R. Refrigeration aspects of magnetic particle suspensions. *International journal of refrigeration*, Elsevier, v. 29, n. 8, p. 1250–1258, 2006.
- ROSENSWEIG, R.; KAISER, R.; MISKOLCZY, G. Viscosity of magnetic fluid in a magnetic field. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 680–686, 1969.
- ROSENSWEIG, R.; NESTOR, J.; TIMMINS, R. Ferrohydrodynamic fluids for direct conversion of heat energy. In: *Materials associated with direct energy conversion*. [S.l.: s.n.], 1965.
- ROSENSWEIG, R. E. Heating magnetic fluid with alternating magnetic field. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 252, p. 370–374, 2002.
- ROSENSWEIG, R. E. Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations. *The Journal of chemical physics*, AIP Publishing, v. 121, n. 3, p. 1228–1242, 2004.
- SHLIOMIS, M. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 61, n. 2411, p. s1971d, 1971.
- SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 060501, 2001.
- SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: retrospective and issues. In: *Ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2002. p. 85–111.

STEPHEN, P. *Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles*. Google Patents, 1965. US Patent 3,215,572. Disponível em: <https://www.google.com/patents/US3215572>.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972.

TZIRTZILAKIS, E. Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamics principles. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 27, n. 6, p. 061902, 2015.