



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Tecnologia
Curso de Engenharia Elétrica**

**ESTUDO COMPARATIVO DE TEORIAS APLICADAS
A UM MODULADOR SIGMA-DELTA E ESTUDO DE
ESTABILIDADE**

PEDRO HENRIQUE TORRES AMÉRICO

ORIENTADOR: JOSÉ EDIL GUIMARÃES DE MEDEIROS

**MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA**

**Brasília, DF
2013**

**Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Curso de Engenharia Elétrica**

SIGMA-DELTA

PEDRO HENRIQUE TORRES AMÉRICO

MONOGRAFIA DE CONCLUSÃO DE GRADUAÇÃO
SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA,
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE BACHAREL EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

ORIENTADOR: JOSÉ EDIL GUIMARÃES DE
MEDEIROS

**Brasília, DF
2013**

CIP – Catalogação Internacional da Publicação

AMÉRICO, PEDRO HENRIQUE TORRES.

Estudo comparativo de Teorias Aplicadas a um Modulador Sigma-Delta e Estudo de Estabilidade: Pedro Henrique Torres Américo. Brasília: UnB.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília
Capuz Darci Ribeiro, Brasília, 2014. Orientação: José Edil
Guimarães de Medeiros.

1. Modulador Sigma-Delta. 2. DSM. 3. Estabilidade.

I. MEDEIROS, JOSÉ EDIL GUIMARÃES DE.

CDU Classificação

SIGMA - DELTA

PEDRO HENRIQUE TORRES AMÉRICO

Trabalho de graduação submetida ao departamento de Engenharia Elétrica da faculdade de tecnologia da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em engenharia elétrica, em **(data da aprovação 15/02/2014)**, apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. (Mestre): José Edil Guimarães de Medeiros, UnB/ FT
Orientador

Prof. (Doutor): José Camargo da Costa, UnB/ FT
Membro Convidado

Prof. (Doutor): Sandro Augusto Pavlik Haddad, UnB/ FT
Membro Convidado

Esse trabalho é dedicado aos meus pais que tiveram a coragem de deixar um garoto de 14 anos tentar melhorar de vida na cidade grande, à minha tia-madrinha Nildinha por ter mudado a minha vida e aos guerreiros que nunca desistem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, acima de todos, a meu pai por ter me ensinado que o estudo está acima de tudo, a minha mãe por ter me ensinado que a família está acima de tudo e a minha tia-madrinha por ter me mostrado que o mundo é maior do que eu pensava e que é possível chegar mais longe.

Agradeço também a meu orientador por ter tido a paciência de escutar alguém que fala demais e por ter me mostrado os possíveis caminhos quando estava perdido.

Agradeço aos meus amigos por me mostrarem que a vida não é feita somente de estudos.

E Agradeço a meus parentes pelo apoio constante, pelas lições de moral e pela união da nossa família.

“A vida é uma grande pergunta em busca de grandes respostas. No entanto, o mais importante não é a grandeza da resposta, mas a grandeza do debate.” (Augusto Cury)

“Quem for tão complacente a ponto de achar que após um fracasso terá outra oportunidade, raramente fará de sua vida um sucesso.” (SenseiFunacoshi)

RESUMO

SIGMA-DELTA

Essa monografia faz uma comparação de teorias aplicadas ao modulador Sigma-Delta (DSM). Inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica sobre os seguintes temas: conversores analógico-digitais; e estudos relacionados ao modulador Sigma-Delta. Após isso, foram feitos os seguintes estudos: a análise de equivalência entre duas teorias aplicadas ao DSM, pautadas no cálculo das funções de transferência do Sinal e do Ruído; um estudo sobre a possibilidade de expansão das teorias propostas; e, por fim, um estudo de estabilidade dos modelos. Com essas análises chegou-se a conclusão que aparentemente as teorias apresentadas são equivalentes e que é possível expandir as teorias. Além disso, concluiu-se também que os sistemas estudados apresentam regiões de estabilidade e instabilidade dadas determinadas características, como: ganho de malha fechada, ganho de malha aberta, ganho de realimentação e outras. Por fim, foram propostos trabalhos futuros, como desenvolvimento de modelos em nível de circuito e uma análise mais precisa dos modelos utilizando simulações mais completas.

Palavras-chave: DSM, Conversor A/D, CAD.

ABSTRACT

SIGMA-DELTA

This work is about Delta-Sigma Modulators (DSM) of third order. Initially, a literature review is presented. Its topics are as follows: Analog-to-Digital converters; and some studies involving DSM. After that, a guided study in the analysis of the equivalence between two theories applied to the delta-sigma modulator, which calculates the signal and noise transfer functions; a study about the possibility of expanding these theories on a gain with pole approach; and a study in the stability of the models are performed. With these analyzes, it can be concluded that it's possible to expand the theories studied, and their equivalence has been proved as well. It was also concluded that the studied models have regions of stability and instability characterized by the root locus plot. In the end, future works, such as a development of the models in a circuit level and a more precise analysis of the models using more complete simulations were proposed.

Keywords: DSM, Converters, Analog-to-Digital(A/D), CAD.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 Visão esquemática de um sistema de transmissão digital. (Modificado) [12].....	1
Figura 2.1 Representação digital da temperatura: Em (a) a taxa de amostragem seria duas amostras por dia e o nível de quantização quatro; Em (b) nove amostras por dia com 25 níveis de quantização. [1].....	4
Figura 2.2 Demonstração do efeito aliasing.	5
Figura 2.3 Características de um sinal ao passar por conversores A/D.....	6
Figura 2.4 Processo Sample and Hold.	6
Figura 2.5 Representação de um modulador sigma delta de primeira ordem. [2] Editado.	7
Figura 2.6 Representação do erro de quantização. [1] Editado.....	8
Figura 2.7 Resposta em frequência do DSM de primeira ordem. [1] Editada.	10
Figura 2.8 Representação do DSM de segunda ordem.	11
Figura 2.9 Representação genérica de um DSM de n -ésima ordem. [2]	12
Figura 2.10 Representação do modelo linear de um DSM com apenas uma entrada no filtro. [2]	13
Figura 2.11 Relação entre a banda do sinal e a banda do ruído em um DSM genérico	13
Figura 2.12 Banda passante teórica do ruído de um DSM de n -ésima ordem. [2].....	14
Figura 2.13 Modelo do DSM discreto no espaço de estados.[3].....	14
Figura 2.14 Ilustração dos fenômenos ciclo limite (à esquerda) e “Idle Tones” (à direita). [11]	16
Figura 2.15 Modelo linear para o DSM com apenas uma realimentação [7].....	17
Figura 2.16 Sistema que representa um DSM de ordem “ n ”. [3].....	18
Figura 2.17 Sistema realimentado com um subsistema linear e um não-linear.....	19
Figura 2.18 Descrição gráfica do método da função descritiva. [8].....	20
Figura 2.19 Modelo geral para a análise de estabilidade de um DSM de um bit.[7]	20
Figura 2.20 Representação do cálculo do lugar geométrico das raízes.	22
Figura 3.1 Root Locus do DSM com o filtro de terceira ordem expresso pela equação (4.3) e o quantizador modelado por um simples ganho k . [7].....	23
Figura 3.2 Representação do cálculo do lugar geométrico das raízes.	23
Figura 3.3 Modelo geral de um DSM de 1-bit para estudo de estabilidade utilizando a teoria da função descritiva. [7].....	24
Figura 3.4 Saída do passa-baixa de terceira ordem da equação (4.3) do DSM com entrada nula e estados nulos com tamanho do degrau do quantizador igual a 2 ($q=2$)......	25
Figura 3.5 Sistema 2 para um DSM de terceira ordem, obtido utilizando a teoria da referência [9].....	26
Figura 3.6 Parâmetros com norma espectral otimizada de um DSM de 3ª Ordem. [3].....	26
Figura 3.7 Norma espectral e ganho do quantizador. [3]	27
Figura 3.8 Espectro de Saída. [3].....	27
Figura 3.9 Modelo linear para o DSM com apenas uma realimentação [7].....	28
Figura 3.10 Sistema que representa um DSM de ordem “ n ”. [3].....	29
Figura 3.11 LGR da STF do Sistema 1, supondo um ganho do quantizador $k=1$, utilizando a Teoria 2.	31
Figura 3.12 LGR da STF do Sistema 1, supondo um ganho do quantizador $k=1$, utilizando a Teoria 1.	32
Figura 3.13 Lugar geométrico do sistema de malha fechada (esquerda). Teoria clássica para o cálculo do lugar geométrico das raízes do sistema de malha aberta (direita).	32
Figura 3.14 LGR do sistema 1 com o modelo do ganho do quantizador com pólos utilizando a teoria dada pela referência [3].	34

Figura 3.15 LGR do sistema 1 com o modelo do ganho do quantizador com pólos utilizando a teoria clássica.....	34
Figura 3.16 Lugar geométrico das raízes para a NTF utilizando a teoria da referência [3]..	36
Figura 3.17 Lugar geométrico das raízes para a NTF utilizando a teoria clássica.	37
Figura 3.18 Plot das quatro curvas anteriores.....	37
Figura 3.19 Destaque dos erros de aproximação numérica no segundo quadrante.....	38
Figura 3.20 Lugar geométrico das raízes calculas anteriormente (esquerda). Teoria clássica para o cálculo do lugar geométrico das raízes (direita).	39
Figura 3.21 “Root Locus” do sistema 1, para o sistema de malha aberta.	39
Figura 3.22 Resposta ao impulso do sistema 1, considerado $\lambda=0,95$ e $k=1$, utilizando a teoria da referência [3].....	40
Figura 3.23 Resposta ao impulso do sistema 1, considerado $\lambda=0,95$ e $k=1$, utilizando a teoria clássica.	41
Figura 3.24 Respostas ao impulso do sistema 1 para $\lambda = 0,3$ (Primeiro) ; $\lambda = 0,95$ (Segundo) e $\lambda = 2$ (Terceiro).	41
Figura 3.25 LGR para $k=k/z$	42
Figura 3.26 LGR para $k/(z+0,9)$	42
Figura 3.27 Resposta ao impulso do SISTEMA 2, com $k=1$, $k=3$ e $k=4$	44
Figura 3.28 Resposta ao impulso do SISTEMA 3, com $k=1$, $k=2$, $k=3$ e $k=4$	45
Figura 3.29 Resposta ao impulso com $k=4$ para o SISTEMA 2 e 3.	45
Figura 3.30 Resposta ao impulso do SISTEMA 2 para $k=1$, $k=(1/z)$ e $k=[1/(z+0.8)]$, $Yp1$, $Yp2$ e $Yp3$, respectivamente.	46
Figura 3.31 Resposta ao impulso do SISTEMA 3 para $k=1$, $k=(1/z)$ e $k=[1/(z+0.8)]$	46
Figura 3.32 Resposta ao impulso para $k=1$ dos sistemas 2 e 3.	47
Figura 3.33 Resposta ao impulso do SISTEMA 2 utilizando as Teorias 2 e 3, para k igual à 1, $(1/z)$ e $[1/(z+0,8)]$	48
Figura 3.34 Resposta ao impulso da NTF para o SISTEMA 3.	48
Figura 3.35 Respostas para $k=[1/(z+0,8)]$ dos sistemas 2 e 3.....	49
Figura 3.36 Respostas para $k=[1/(z+0,85)]$ dos sistemas 2 e 3.....	49
Figura 3.37 Posição dos pólos para o SISTEMA 3 com $k=[1/(z+0,85)]$ (Acima); Zoom no local do pólo 0,85. (Abaixo)	50
Figura 3.38 Posição dos pólos para o SISTEMA 3 com $k=[1/(z+0,85)]$	51
Figura 3.39 Resposta ao Impulso pra $k=[1/(z+0,5)]$ para os sistemas 2 e 3.....	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 <i>Resultado da simulação. [3]</i>	28
Tabela 2 <i>Pólos e zeros para a STF do Sistema lutilizando a Teoria 3.</i>	35
Tabela 3 <i>Pólos e zeros para a NTF do Sistema 1 com o quantizador modelado com um pólo em zero utilizando a Teoria 1 e 3.</i>	38

LISTA DE SIMBOLOS E ABREVIATURAS

- A** – Matriz de Estado de Espaços
- A_c**– Matriz de estado de espaços do sistema convencional
- A_s**– Matriz de estado de espaços do sistema proposto por [3]
- A_n**– Matriz utilizada para demonstrar a norma espectral
- ADC – Conversor analógico-digital
- A/D – Analógico-Digital
- B**– Matriz de Estado de Espaços
- B_c**– Matriz de estado de espaços do sistema convencional
- B_s**– Matriz de estado de espaços do sistema proposto por [3]
- C**– Matriz de Estado de Espaços
- C_c**– Matriz de estado de espaços do sistema convencional
- C_s**– Matriz de estado de espaços do sistema proposto por [3]
- D**– Matriz de Estado de Espaços
- DAC – Conversor digital-analógico
- DC – Corrente Contínua. Associado à tensão constante.
- D/A – Digital-analógico
- DSM – Modulador Sigma-Delta
- E**– Matriz de Estado de Espaços
- E_c**– Matriz de estado de espaços do sistema convencional
- E_s**– Matriz de estado de espaços do sistema proposto por [3]
- F_a– Frequência de amostragem
- F_{máx}– Frequência máxima de um sinal
- FTR – Função de transferência do ruído
- FTS – Função de transferência do sinal

GPR – Ganho de Potência do Ruído

LGR – Lugar Geométrico das Raízes

NTF – Função de transferência do ruído

$N(*)$ - Função não-linear

OSR – Razão de *Oversampling*

PCM – Modulador por código de Pulso

$P_{\text{máx}}$ – Potência máxima

$x_{\text{máx}}$ – Tensão DC máxima

Q_e – Erro de quantização

s – Variável da transformada de Laplace

S/H – *SampleandHold*

STF – Função de transferência do sinal

T – Período

U – Tensão de entrada

Y – Tensão de saída

z – Variável da transformada Z

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO	2
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1.	CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL	3
2.2.	O QUE É O SIGMA- DELTA	6
2.2.1.	DSM DE PRIMEIRA ORDEM	9
2.2.2.	DSM DE SEGUNDA ORDEM	11
2.2.3.	DSM DE ORDEM SUPERIOR	11
2.2.4.	REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	14
2.3.	O PROBLEMA DA ESTABILIDADE	14
2.4.	TÉCNICAS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE	17
2.4.1.	LINEARIZAÇÃO	17
2.4.2.	TÉCNICA DA FUNÇÃO DESCRITIVA	18
2.4.3.	TEORIA CLÁSSICA DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE	21
3.	SISTEMAS ANALISADOS	23
3.1.	RESULTADOS PELA REFERÊNCIA NO SISTEMA 1	23
3.2.	RESULTADOS OBTIDOS PELA REFERÊNCIA NOS SISTEMAS 2 E 3	25
3.3.	TEORIAS ANALISADAS	28
3.4.	SISTEMAS ANALISADOS	29
3.5.	ANÁLISE DO SISTEMA 1	30
3.5.1.	EQUIVALÊNCIA DAS TEORIAS 1 E 2	30
3.5.2.	TEORIA 3	33
3.5.3.	ESTUDO DE ESTABILIDADE E RESPOSTA AO IMPULSO	38
3.6.	ANÁLISES PARA OS SISTEMAS DA REFERÊNCIA [3]	43
4.	CONCLUSÕES	52
	BIBLIOGRAFIA	53
	ANEXOS	54

1. INTRODUÇÃO

No cenário do mundo eletrônico, os sistemas digitais ganham cada vez mais força e, com isso, o processo de conversão analógico-digital é cada vez mais importante, dado que a maioria dos sinais é analógica no universo físico.

Sinal analógico é aquele contínuo no tempo, ou seja, têm um valor definido para todos os instantes de tempo em um determinado período. A voz escutada por alguém é um bom exemplo de sinal analógico. O sinal digital, por sua vez, é discreto e quantizado no tempo. Ser discreto no tempo quer dizer que o sinal não é contínuo, ou seja, para determinado período de tempo, o sinal assume apenas alguns valores. Ser quantizado quer dizer que os valores de amplitude que o sinal pode assumir são pré-definidos.

As grandes vantagens do sinal digital em relação ao sinal analógico são: o aumento da margem de ruído do sinal e a facilidade de se armazenar grandes quantidades de informações graças às tecnologias de memórias ROM, Flash, Blue-ray, etc. Margem de ruído é a quantidade máxima de ruído mais atenuação que o sinal pode ter e ainda ser reconhecível na recepção e ela é maior porque o sinal digital é representado por uma sequência de bits (zeros e uns). Com isso, o receptor precisa apenas ser capaz de definir se o bit que está chegando é um zero ou um 1.

A maior margem de ruído de sinais digitais melhora o processo de transmissão de sinais, pois torna possível transmitir um sinal para maiores distâncias. Basicamente, em um processo de transmissão digital temos cinco etapas importantes: captação do sinal analógico, conversão analógico-digital (A/D), sistema de transmissão do sinal digital, conversão digital-analógica (D/A) e atuação no sinal analógico para a informação ser transmitida. Um processo de transmissão analógica suprime as etapas de conversão, porém – por ter uma menor margem de ruído – a distância máxima que o sinal pode ser transmitido é menor. Lembre-se que para um sinal digital o receptor só precisa ser capaz de diferenciar os zeros dos uns.

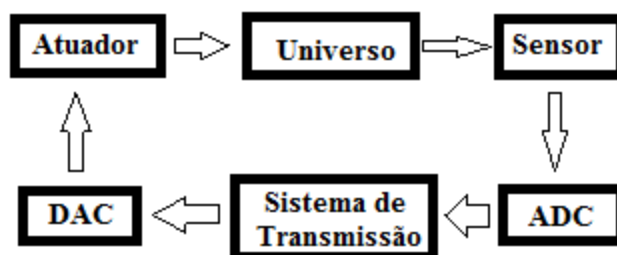


Figura 1.1 Visão esquemática de um sistema de transmissão digital. (Modificado) [12]

Vamos pegar como exemplo o processo de transmissão de voz via internet (VoIP). Primeiramente a informação contida na voz é transmitida no universo por meio de uma onda mecânica, o som. Esse som é captado por um sensor – o microfone – que torna a onda mecânica em um sinal elétrico analógico. Esse sinal, que representa a voz captada, é convertido em sinal digital para ser transmitido via internet por meio de um computador, por exemplo. Feito o processo de transmissão, o sinal digital chega ao receptor, onde ocorre o processo de conversão digital-analógica e, recuperado o sinal analógico, é possível utilizar um atuador (a caixa de som, por exemplo) que retornará ao universo a informação dita inicialmente.

O que será estudado nessa monografia é um tipo de conversor analógico-digital (ADC). Esse conversor é o Modulador Sigma-Delta (DSM). Como explicado, o ADC é um circuito que transforma um sinal analógico em sinal digital. O DSM, por sua vez, é um ADC em sobre amostragem que é muito usado no processo de conversão de sinais sonoros, pois com ele é possível obter uma grande resolução em sinais analógicos na faixa de frequência do som, como será explicado à frente.

É importante ressaltar que serão feitos: um estudo comparativo entre duas teorias que se aplicam ao DSM; a análise da possibilidade de expansão dessas teorias; e um estudo de estabilidade de três sistemas de moduladores sigma-delta de terceira ordem. É importante entender que, até o presente momento, não existem soluções analíticas para estabilidade de um DSM de ordem três ou superior.

1.1. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Esse trabalho será estruturado em seis partes. Primeiramente, será feita uma revisão bibliográfica sobre o processo de conversão A/D. Serão explicados os conceitos da taxa de amostragem Nyquist e níveis de quantização, bem como o que é o efeito *aliasing* e como ele ocorre.

Segundo, será feita uma revisão sobre o DSM de primeira ordem, segunda ordem e de ordem superior. Serão abordados os principais geradores de instabilidade em nível de circuitos e os problemas resolvidos e não resolvidos para sistemas de ordem superior.

Terceiro, será feita uma revisão bibliográfica sobre os conceitos clássicos de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo aplicados ao modelo linear do DSM e como a teoria da função descritiva explica a aproximação linear feita por esse modelo. É na terceira parte que serão apresentadas as teorias que serão comparadas e onde será apresentada a expansão proposta nessa monografia.

Quarto, serão apresentados os três sistemas de terceira ordem a serem analisados. Será feito um breve estudo sobre os resultados obtidos pelas referências do Sistema 1 [7] e dos sistemas 2 e 3 [3].

Quinto, serão feitas as análises comparativas das teorias a serem apresentadas e a possibilidade de expansão da mesma, bem como o estudo de estabilidade dos sistemas apresentados.

Por fim, serão expostas as principais conclusões obtidas nessa monografia.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL

Conversores A/D são circuitos capazes de converter sinais analógicos em sinais discretos e quantizados no tempo. Sinais analógicos são contínuos no tempo, por exemplo, a tensão de uma bateria. Esta tensão tem determinado valor em todo o intervalo de tempo, logo a tensão fornecida pela bateria é contínua no tempo. Portanto, é um sinal analógico. O sinal digital, por outro lado, é discreto e quantizado com relação ao tempo. Isso significa que o sinal está definido apenas em certos valores de tempo e, nesse valor, a amplitude do sinal é representada por um símbolo quantizado, uma sequência de bits, por exemplo. Dada a diferença entre sinais analógicos e digitais, uma das grandes vantagens de se fazer uma conversão A/D é observada na transmissão de sinais, por exemplo, quando se quer transmitir um sinal de voz. Transmitir sinais digitais em vez de sinais analógicos aumenta a margem de ruído do sistema, como falado na introdução.

No entanto, para entender como a margem de ruído melhora a transmissão, é importante compreender que ao se transmitir um sinal no meio físico esse sinal sofre diversas interferências externas como atenuação e ruído. Por exemplo, ao falarmos com alguém em uma festa é preciso usar mais potência nas cordas vocais do que ao falarmos em uma biblioteca. Isso ocorre porque o ruído ambiente é muito maior em uma festa do que em uma biblioteca e essa interferência externa afeta diretamente o processo de transmissão da informação. Da mesma forma, para falarmos com alguém que está mais distante é preciso usar mais potência do que para falar com alguém mais perto, pois o som é atenuado ao se propagar no ar. Ou seja, dependendo da potência usada na fala: a informação chegará ao receptor perfeitamente – serão entendidas todas as palavras com clareza na recepção; a informação chegará com falhas – algumas palavras serão perdidas no processo de comunicação e isso afetará ou não o entendimento da informação; ou simplesmente a informação não chegará ao receptor desejado. Esse mesmo fenômeno ocorre de maneira análoga em um processo de transmissão de sinal digital via fibra óptica, cabo coaxial e/ou ondas eletromagnéticas. Aumentar a margem de ruído significa, então, aumentar a quantidade máxima de ruído aceitável para que um receptor entenda uma informação perfeitamente.

O sinal digital aumenta a margem de ruído porque, em um processo de transmissão, a informação está representada por uma sequência de bits e o receptor precisa apenas ser capaz de diferenciar duas informações distintas – se o bit é “zero” ou “um” – para entender a informação. Analogamente ao exemplo anterior, é como se a língua utilizada nos exemplos acima fosse composta por somente dois fonemas. Ou seja, em situações equivalentes, é mais fácil entender dois possíveis sons do que uma infinidade de sons. Isso não exclui casos onde se usam mais símbolos na transmissão? Por exemplo, quando se usa quatro símbolos, para 00, 01, 10 e 11. Nesse caso, são transmitidas quatro informações diferentes, e não duas.

Outra importante vantagem do sinal digital é a possibilidade de armazenar mais facilmente informação já que existem circuitos capazes de fazer esse armazenamento, como: memória ROM, RAM, Flash e outras. Note que é possível armazenar sinais analógicos, o cérebro humano é um bom exemplo disso ou um capacitor que utiliza determinada tensão armazenada para desempenhar ou não alguma função no circuito, mas atualmente, a maioria das memórias eletrônicas está voltada para o mundo digital.

Outro parâmetro importante no processamento digital é o nível de quantização, que é a quantidade de distribuições de valores discretos para as amplitudes de um sinal. Por exemplo, um ADC de um (1) bit tem dois níveis de quantização (0 e 1), já um de dois (2) bits tem quatro níveis (00, 01, 10 e 11), isso quer dizer que as amplitudes do sinal são quantizadas e serão representadas por esses símbolos que, por sua vez, representam determinado valor de amplitude. Ou seja, cada um desses níveis representa uma amplitude determinada do sinal e o nível de quantização mínimo varia para cada projeto e objetivo a ser atingido. Além disso, o nível de quantização define qual resolução do sinal digital, se temos muitos níveis de quantização temos uma alta resolução no sinal. Observe que um sinal digital, que é quantizado no tempo, nunca terá todos os infinitos valores de amplitude de um sinal analógico representados justamente porque existe um nível de quantização, e essa característica do processo de quantização gera chamado de erro de quantização.

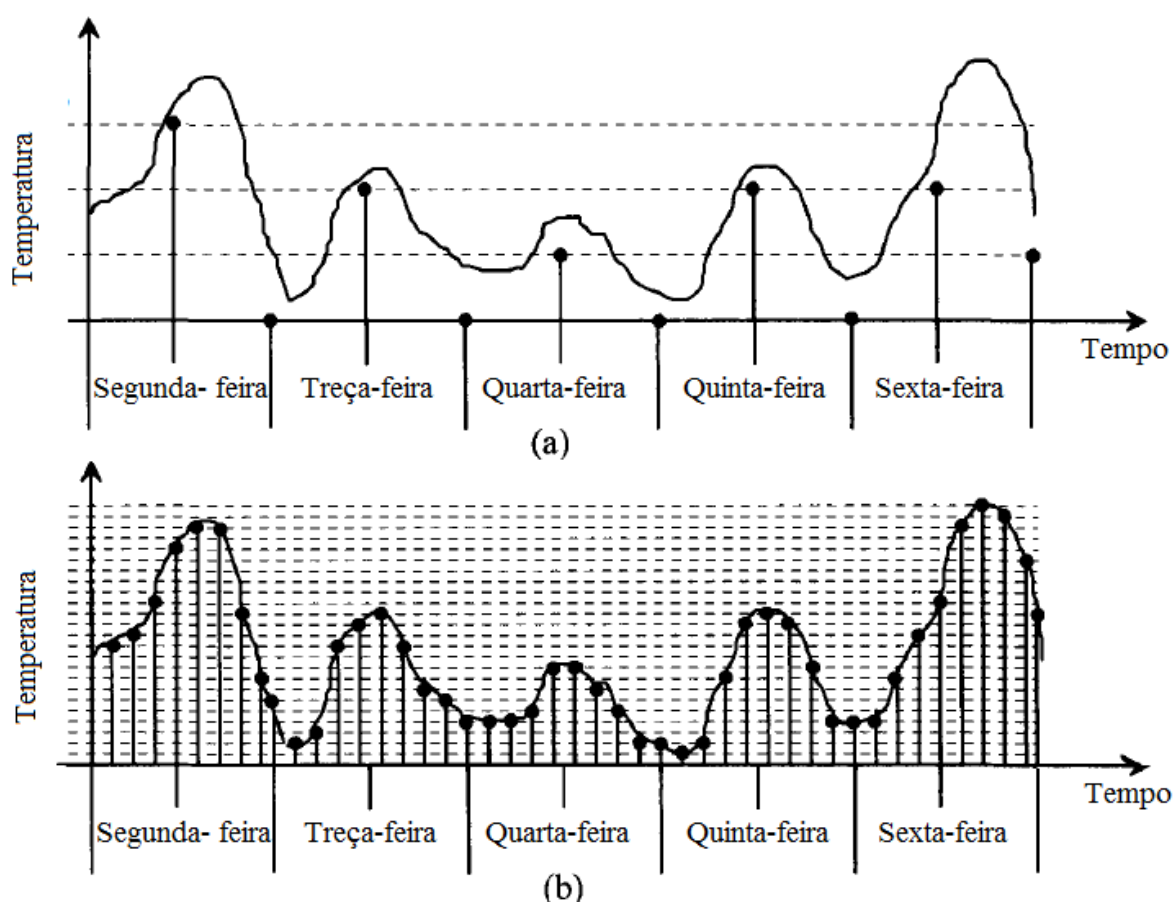


Figura 2.1 Representação digital da temperatura: Em (a) a taxa de amostragem seria duas amostras por dia e o nível de quantização quatro; Em (b) nove amostras por dia com 25 níveis de quantização. [1]

Apesar das grandes vantagens do sinal digital, é preciso uma taxa de amostragem mínima para representar o sinal analógico perfeitamente. Essa taxa é conhecida como taxa de Nyquist. Por definição, temos que a taxa de amostragem é a velocidade na qual o ADC amostra o sinal analógico. Se a taxa de amostragem for muito pequena, ao se converter o sinal analógico em digital, não será possível recuperar o sinal analógico perfeitamente, ou seja, a representação digital do sinal analógico não será capaz de recriar o sinal analógico como ele era antes. Quanto maior a taxa de amostragem e o nível de quantização maior a resolução do sinal e

menos erros surgirão, como ilustrado na **Erro! Argumento de opção desconhecido..** Na Figura 2.1 é notado que não é possível calcularmos com exatidão a variação de temperatura diária, se a taxa na qual se observa esta temperatura for de apenas duas amostras por dia. Esses erros de exatidão estão diretamente associados ao efeito *aliasing* como será explicado mais a frente.

A taxa mínima de amostragem necessária para representar um sinal analógico sem perder nenhuma das informações contidas nele é a taxa de definida por Nyquist. Essa taxa representa a frequência mínima de amostragem para se representar o sinal analógico de forma precisa e evitar o chamado efeito *aliasing* (Frequência de amostragem de Nyquist (F_{aN})). F_{aN} é igual a duas vezes a frequência máxima da banda do sinal que se quer amostrar (F_{max}). Por exemplo, se a maior frequência de banda de um sinal de voz é 15 kHz, então, para se representar um sinal de voz perfeitamente, é preciso de uma taxa de amostragem de 30 kHz no mínimo. É importante entender que em determinadas aplicações não é preciso respeitar essa taxa mínima.

$$F_{aN} = 2F_{max} \quad (2.1)$$

Efeito *aliasing* é a superposição de sinais em uma mesma banda de frequência e ocorre quando a taxa de amostragem é menor que a taxa estipulada por Nyquist, como ilustrado na Figura 2.2. Quando o efeito *aliasing* ocorre, ao se converter o sinal digital para analógico, o sinal resultante é imperfeito e com mais ruídos e harmônicos que o sinal sem efeito *aliasing*. Por isso, em um sistema de conversão A/D normalmente tem-se um filtro passa-baixa antes do conversor em si para evitar esse efeito. Além disso, no sistema existe um processo de amostragem (*Sample and Hold* ou S/H, que pode ser observado melhor na Figura 2.4) que é responsável literalmente por segurar um sinal em determinado valor por um determinado período de tempo. A filtragem do sinal e o processo de amostragem são duas fases cruciais para a ADC porque a primeira minimiza o efeito *aliasing*, o surgimento de harmônicas e ruído no processo de conversão e segundo funciona como uma espécie de câmera que congelará a entrada, tornando o sinal contínuo por um determinado intervalo de tempo, para que o conversor A/D possa processá-lo. Finalmente, após processamento no conversor, temos o sinal digital discreto no tempo. Ou, mais precisamente, a sequência de bits que representa esse sinal.

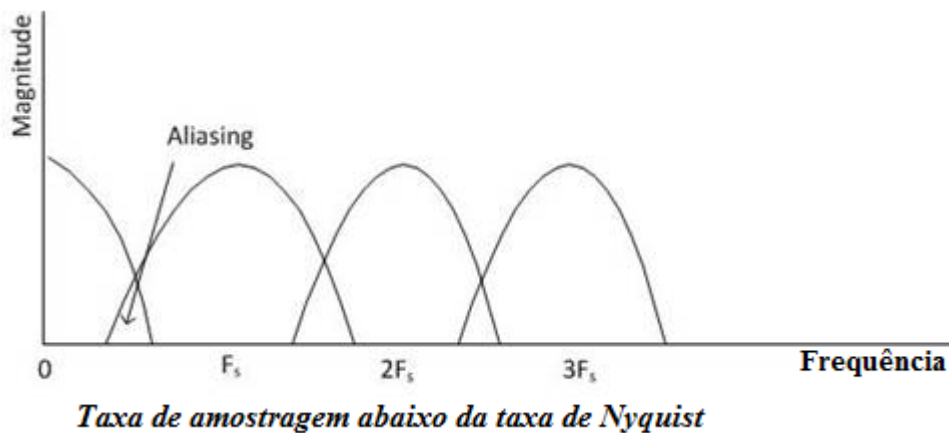


Figura 2.2 Demonstração do efeito *aliasing*.

Referência: <http://www.ni.com/white-paper/11342/en/>

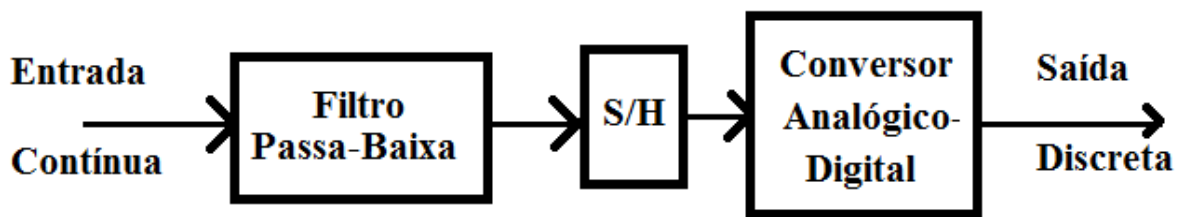


Figura 2.3 Características de um sinal ao passar por conversores A/D

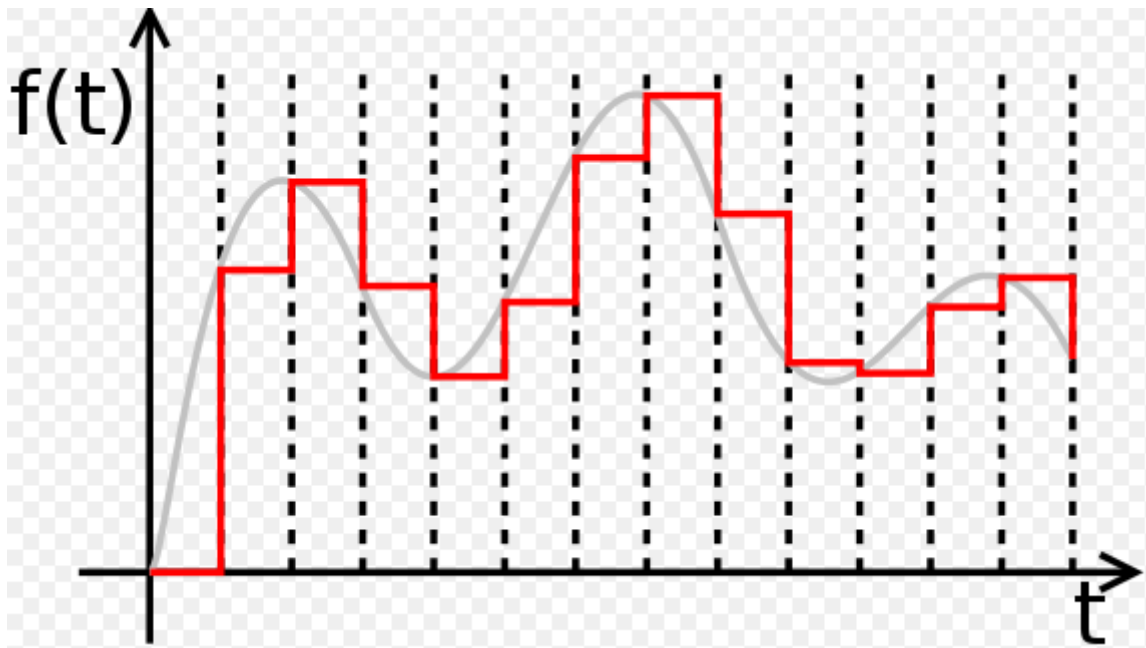


Figura 2.4 Processo Sample and Hold.

Referência: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeroorderhold.signal.svg>

Dito isto são observados dois possíveis problemas no processo de conversão A/D: efeito *aliasing* e erro de quantização. O erro de quantização está sempre presente no processo de conversão A/D, porém aumentar a resolução do sinal é uma boa maneira de minimizar esse erro. E efeito *aliasing* ocorre quando a taxa de amostragem é menor que a de Nyquist. Por isso, foram desenvolvidos ADCs que trabalham em uma frequência muito maior do que a mínima estipulada por Nyquist. Esses ADCs são conhecidos como ADCs em sobre amostragem ou *oversampling* e um dos principais ADCs em sobre amostragem é o Modulador Sigma-Delta (DSM), que será estudado nesse trabalho.

2.2. O QUE É O SIGMA- DELTA

Qualitativamente pode-se descrever o DSM de várias maneiras. Por exemplo, imagine um pneu de carro que é enchido por uma bomba cuja pressão varia com o tempo gerando um fluxo de ar variante no tempo. Além disso, imagine que esse pneu tem sensores que medem a pressão interna do ar e acionam uma válvula que libera uma porção de ar do pneu, à medida que a pressão atinge determinado valor. Há então, no sistema, dois comandos acionados pelos sensores: “0” não liberar o ar; e “1” liberar o ar. Supondo que o sensor faz vários testes em um período muito pequeno, então é possível saber qual a pressão da bomba pelo número de vezes que foi acionado os sensores e pelo número de vezes que foi necessário retirar o ar do pneu. O que se tem é que, supondo que a pressão da bomba seja “x” em determinado período

“T” e que isso represente um fluxo de ar “y” constante entrando no pneu, se nesse período o sensor agir quinhentas vezes e dessas acionar a vazão de ar 250 vezes, isso quer dizer que a média entre acionar e não acionar a válvula de escape é exatamente 0,5. Ou seja, a pressão da bomba está exatamente na metade da pressão máxima – dados os ajustes necessários na quantidade de ar a ser retirada. Observe que a taxa de amostragem dos sensores é crucial para determinar qual a pressão da bomba em determinado momento e que, quanto maior for a diferença entre a variação máxima da pressão da bomba e a taxa de amostragem dos sensores mais preciso será o cálculo da pressão da bomba. Analogamente, pode-se comparar esse sistema a uma conversão A/D cuja taxa de amostragem é muito maior que a frequência máxima do sinal de entrada, ou seja, um ADC em sobre amostragem. Como falado, esse comportamento é análogo ao um modulador Sigma-Delta.

O DSM é um sistema realimentado negativamente que funciona da seguinte forma: um sinal de entrada constante (graças ao S/H ou a sobre amostragem) é diminuído pela saída de um quantizador. Essa subtração passa por um integrador e logo em seguida pelo referido quantizador novamente. Se a quantização for de 1-bit, existem duas possíveis respostas na saída do quantizador: -1 ou 1. Caso a saída seja -1 a entrada é somada com o valor referente à tensão -1 (dado que a saída do quantizador é ligada a um conversor digital-analógico – DAC), porém se ela for +1, o sistema é realimentado negativamente, como ilustrado na Figura 2.5.

Analogamente podemos comparar o DSM e o modelo qualitativo da seguinte forma: o pneu que armazena o ar seria o integrador do sistema; os sensores seriam o quantizador; a válvula que libera o ar seria a realimentação negativa – delta – que é somada com a entrada; a pressão da bomba seria a entrada – observe que é preciso fazer o sistema de tal forma que a sequência de bits “1” (sequência que acionam a válvula durante todos os testes no período “T” do S/H) represente a pressão máxima que entra no sistema; esse ajuste é feito pelo delta do sistema. Além disso, as médias dos valores de saída do quantizador representam a entrada com precisão se a taxa de amostragem for pelo menos duas vezes a frequência máxima do sinal de entrada: critério de Nyquist. Observe que no DSM, quanto maior for essa taxa mais precisa será a representação do sinal, por isso, a taxa de amostragem do quantizador de um DSM é maior que a taxa mínima definida por Nyquist. A isso, dá-se o nome de *oversampling* ou sobre amostragem do sinal. Na Figura 2.5 é possível observar a representação do diagrama de blocos de um DSM discreto de primeira ordem e com um quantizador de 1-bit.

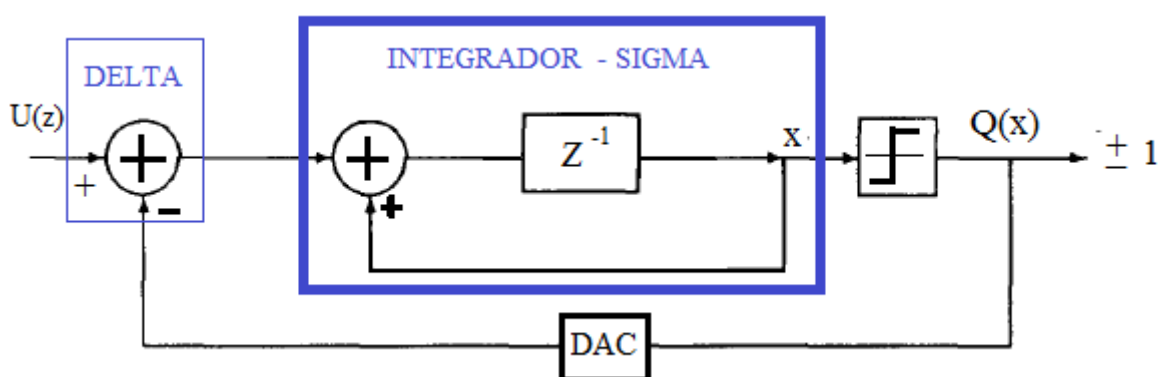


Figura 2.5 Representação de um modulador sigma delta de primeira ordem. [2] Editado.

Graças à característica de sobre amostragem do modulador, a taxa de testes é muito maior que a taxa de variação do sinal de entrada. Logo, para cada sinal na entrada (espaço de um S/H), obtêm-se vários valores de saída. Esses valores serão então quantizados, ou seja, para cada

amostra será calculada a média das saídas e essa média será representada pelo nível de quantização mais próximo dela. Por exemplo, se durante determinada amostra temos uma sequência de bits, cuja média é igual a 45% do valor máximo desse sinal, e temos oito níveis de quantização (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 e 111), o sinal será representado pelo nível 011, pois os níveis de quantização representam: 0%; 14,29%; 28,58%; 42,86%; 57,15%; 71,43%; 85,71%; e 100% do valor máximo da entrada, respectivamente. Ou seja, se a média das amostras foi de 45%, o nível 011, que representa um valor de 42,86% do valor máximo do sinal, é o nível mais próximo de 45%, logo ele será usado para representar o sinal. Observe que quanto mais níveis de quantização mais próxima será a representação do sinal original e, conseqüentemente, maior será a resolução do sinal digital. Com essa explicação é possível observar com mais precisão o erro de quantização, que é a diferença existente entre o sinal quantizado e o sinal original. Note que o sinal quantizado será sempre uma aproximação do sinal analógico original. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 2.6.

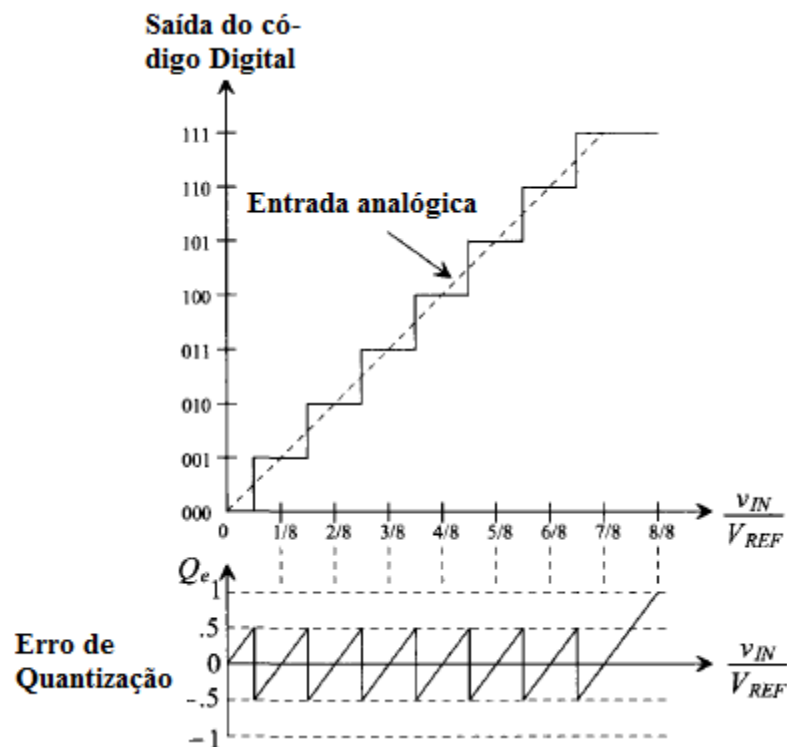


Figura 2.6 Representação do erro de quantização. [1] Editado.

A sobre amostragem é definida como a técnica que aumenta a taxa de amostragem de um conversor A/D para uma taxa maior que a do critério de Nyquist. Essa técnica visa aumentar drasticamente a resolução do sinal digital, porém ao aumentar muito a taxa de amostragem de uma ADC, observa-se uma diminuição na velocidade de conversão do sinal. Apesar dessa desvantagem, é muito desejado o aumento da resolução do sinal digital em várias aplicações. E, assim, surge a razão de *oversampling* (OSR – *oversampling ratio*) que é utilizada para definir o quão mais rápido é a amostragem do ADC em *oversampling* em relação à amostragem do ADC na taxa de Nyquist.

$$OSR = \frac{F_a}{2F_{max}}, \text{ onde } F_a = F_{amostragem} \quad (2.2)$$

Observe que se $OSR = 1$ estaremos trabalhando na taxa de amostragem definida mínima por Nyquist. Dessa forma, podemos separar os conversores A/D em duas grandes categorias: *Nyquist-rate* e *oversampling*. Um dos principais tipos de conversores em *oversampling* é o Modulador Sigma-Delta. [2]

Observe também que a característica *oversampling* do DSM já representa um S/H automático no sinal porque a taxa de amostragem é muito maior que a frequência máxima da banda do sinal de entrada. Além disso, um dos principais resultados do *oversampling* é a possibilidade de aumentar o nível de quantização do sinal mantendo uma ótima resolução no mesmo.

Outro fator a ser notado no DSM é a característica não-linear da quantização. Quando se tenta aumentar a ordem do sistema, essa característica não-linear é um dos principais fatores geradores de instabilidade na conversão A/D do DSM.

2.2.1. DSM DE PRIMEIRA ORDEM

Aprofundando um pouco nas características do DSM, tem-se que sua ordem é definida pela ordem do filtro que fica antes do quantizador. No de primeira ordem esse filtro é composto por um integrador como mostrado na Figura 2.5.

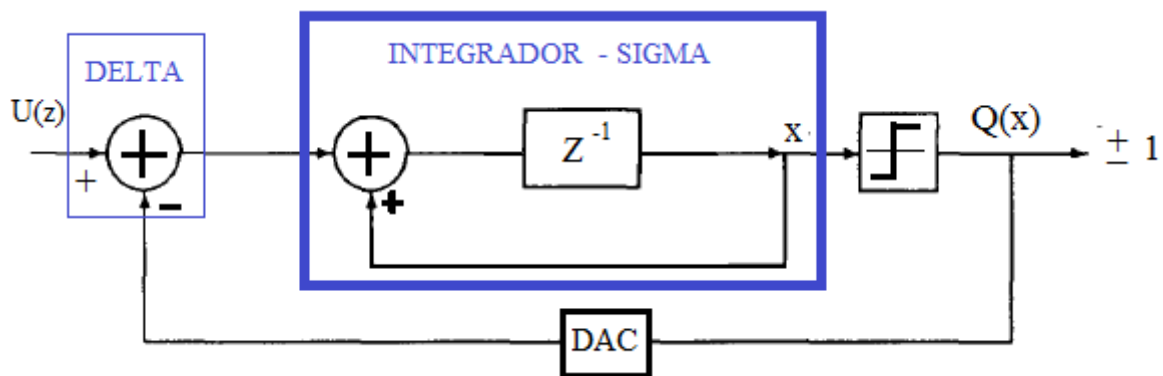


Figura 2.5 Representação de um modulador sigma delta de primeira ordem. [2] Editado.

Nela o integrador (realimentação positiva de um atraso) alimenta um quantizador de 1-bit que, por sua vez, alimentando um DAC de 1-bit que fica na realimentação do circuito. Note que a saída do integrador $x(kT)$ pode ser descrita como na equação (2.3) e o erro de quantização é dado pela equação (2.4). Esse erro é uma representação linear do quantizador.

$$x(kT) = u(kT - T) - q(kT - T) + x(kT - T) \quad (2.3)$$

$$Q_e(kT) = y(kT) - x(kT) \quad (2.4)$$

Substituindo $x(kT)$ nas equação (2.3), temos a equação (2.5).

$$y(kT) = Q_e(kT) + u(kT - T) - q(kT - T) + x(kT - T) \quad (2.5)$$

Além disso, se considerado que o DAC é ideal e que para o bit "0" sua saída seja igual a menos uma tensão de referência ($-V_{ref}$), que para o bit "1" ele seja mais essa tensão ($+V_{ref}$) e

que a tensão de referência (V_{ref}) seja a mesma no quantizador, então $y(kT)$ será igual à saída do quantizador que é $q(kT)$. Possibilitando a seguinte substituição na equação (2.5):

$$y(kT) = u(kT - T) + Q_e(kT) - Q_e(kT - T) \quad (2.6).$$

Então, a saída do quantizador consiste no valor quantizado da entrada com um atraso igual ao período de amostragem mais a diferença entre o erro de quantização do valor atual e o passado. Ou seja, o grande potencial do DSM é que, no caso de primeira ordem, o erro de quantização é cancelado com ele mesmo. [1]

No domínio da frequência da transformada de Laplace, usando a teoria anterior, temos que a saída do sistema é igual a:

$$V_{out}(s) = Q_e(s) + \left(\frac{1}{s}\right) [V_{in}(s) - V_{out}(s)]$$

, dado que o integrador é igual a $\frac{1}{s}$; que o ADC de 1-bit é modelado como um simples erro de quantização $Q_e(s)$; que novamente o DAC é ideal de forma que $y(s) = q(s)$ e que a banda do sinal é muito menor que a banda de operação do modulador.

$$V_{out}(s) = \left[Q_e(s) * \frac{s}{s+1} \right] + \left[V_{in}(s) * \frac{1}{s+1} \right] \quad (2.7) [1]$$

Note que a função de transferência do sistema gera uma resposta em frequência como expressa na Figura 2.7, na qual a função de transferência do sinal se comporta como um filtro passa-baixa e a função de transferência do ruído como um filtro passa-alta. A região escura da figura representa a interferência do erro de quantização na banda do sinal e, à medida que se aumenta a ordem do modulador Sigma-Delta, diminuí-se a influência do erro de quantização no sinal, fato que explica a vantagem de aumentar a ordem do DSM. [1]

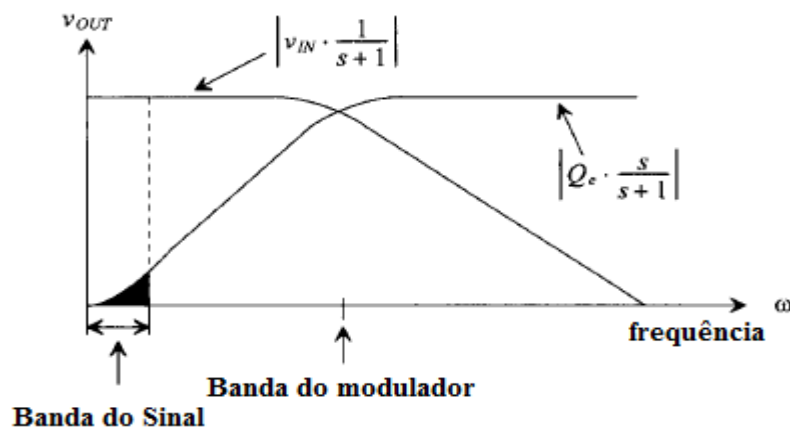


Figura 2.7 Resposta em frequência do DSM de primeira ordem. [1] Editada.

2.2.2. DSM DE SEGUNDA ORDEM

Existem vários modelos para o DSM de segunda ordem, o que será analisado entre eles o modelo da Figura 2.8.

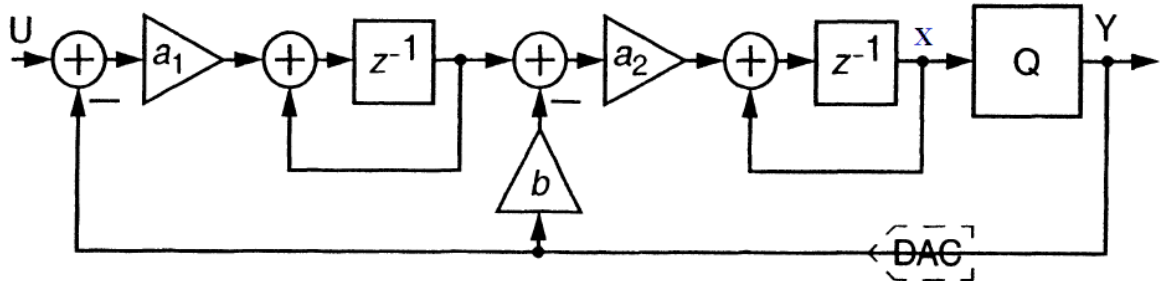


Figura 2.8 Representação do DSM de segunda ordem.

Nesse DSM temos que as funções de transferência do ruído e do sinal (STF e NTF, respectivamente), presumindo o quantizador modelado por um ganho linear, são:

$$STF = \frac{a_1 a_2 z^{-2}}{D(z)} \quad NTF = \frac{(1 - z^{-1})^2}{D(z)}$$

, onde $D(z)$ é:

$$D(z) = (1 - z^{-1})^2 + a_2 b z^{-1} (1 - z^{-1}) + a_1 a_2 z^{-2}$$

e, além disso, $a_1 a_2 = 1$ e $a_2 b = 2$. A modelagem do quantizador para um ganho será explicada mais a frente.

Usar esse modelo é interessante, pois ele permite que cada amplificador de cada integrador seja independente um do outro e, com isso, alivia a velocidade na qual o sinal deve ser processado para manter a estabilidade. Esse modelo é conhecido como Modulador Boser-Wooley. [2]

2.2.3. DSM DE ORDEM SUPERIOR

Uma das formas de representar o DSM de alta ordem, genericamente, é por meio da Figura 2.9. Nela o DSM é representado em duas partes: uma parte linear que contém elementos de memória (Filtro em Loop) e uma parte não linear sem memória (Quantizador). O filtro em loop é composto de duas entradas e uma saída X que pode ser representada por uma combinação linear dessas entradas como mostrado na equação (2.8). Observe ainda que, a saída do filtro em loop, pode ser representada pelas equações (2.8) e (2.9) e que a quantização é usualmente representada como um erro $E(z)$ acrescido a saída do loop.

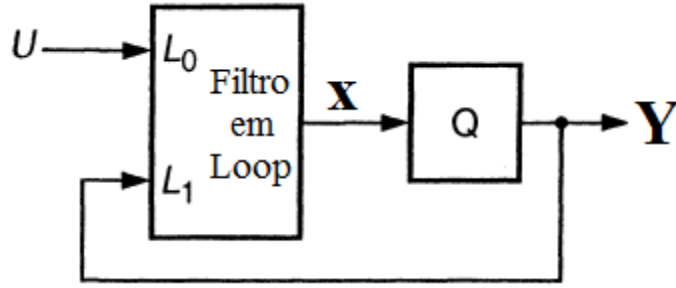


Figura 2.9 Representação genérica de um DSM de enésima ordem. [2]

$$X(z) = L_0(z)U(z) + L_1(z)Y(z) \quad (2.8)$$

$$Y(z) = X(z) + E(z) \quad (2.9)$$

De (2.8) e (2.9):

$$Y(z) = FTS(z)U(z) + FTR(z)E(z) \quad (2.10)$$

Na equação (2.10), FTS e FTR são as funções de transferências do sinal e do ruído, respectivamente. Além disso, é possível isolar as entradas do filtro em loop da seguinte forma:

$$FTR(z) = \frac{1}{1-L_1(z)} \quad FTS(z) = \frac{L_0}{1-L_1(z)} \quad (2.11)$$

$$L_1(z) = 1 - \frac{1}{FTR(z)}L_0(z) = \frac{FTS(z)}{FTR(z)} \quad (2.12)$$

Temos, então, que as características de entrada e saída (consequentemente da modulação) são determinadas somente pela FTR e FTS.

Note, também, que – no domínio do tempo $-y(n)$ é uma sequência de bits, enquanto $x(n)$ é analógico. Logo, para realimentar o filtro em L_1 , seria necessário um DAC. No presente caso, a equação (2.9) implica em tensão de referência no ADC igual a 1 (um) ou que todos os sinais analógicos estão normalizados para uma tensão de referência (V_{REF}). Por fim, isso também implica que um DAC ideal, usado na realimentação, poderia ser aproximado para um ganho igual a 1 (um) e, por isso, o DAC foi omitido.

Da equação (2.11), nota-se que L_1 deve ser grande na faixa de frequência do sinal, para que esse não sofra muita influência do ruído. Da mesma forma, L_0 deve ser grande nessa mesma faixa de frequência para que o sinal não seja muito atenuado. Isso quer dizer que L_0 e L_1 devem ter seus pólos próximos. Na verdade, é notado que eles normalmente têm os mesmos pólos que, por sua vez, também são os zeros da FTR. Apesar disso, L_0 e L_1 têm zeros diferentes.

Quando colocarmos apenas uma entrada igual a $u(n)$ menos $y(n)$ no filtro em loop, como na Figura 2.10, L_0 é igual a menos L_1 e temos as seguintes equações:

$$NTF(Z) = FTR(z) = \frac{1}{1-L(z)} \quad STF(z) = FTS(z) = \frac{L(z)}{1-L(z)} \quad (2.13)$$

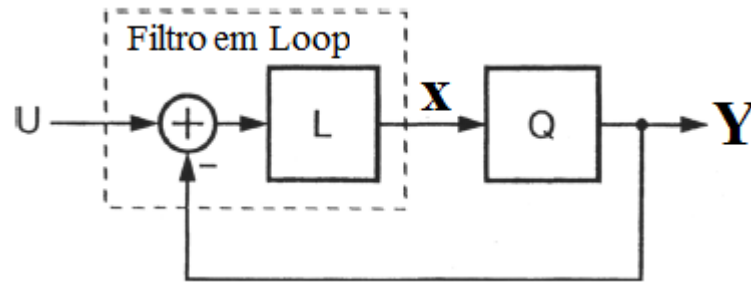


Figura 2.10 Representação do modelo linear de um DSM com apenas uma entrada no filtro. [2]

FTS e FTR foram usados apenas para diferenciar o modelo anterior do modelo no qual $L_0 = -L_1$. O modelo da Figura 2.10, será estudado daqui para frente. Além disso, é interessante notar que as funções de transferência do ruído e do sinal têm as características de passa alta e passa baixa, respectivamente. Isso pode ser observado na equação (2.13) e está expresso na Figura 2.11.

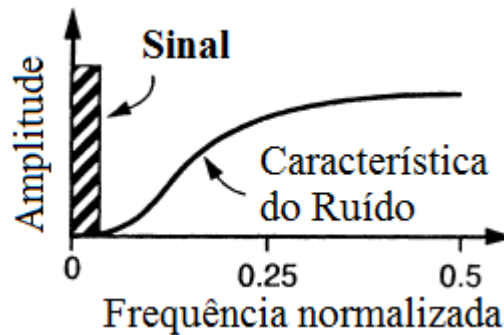


Figura 2.11 Relação entre a banda do sinal e a banda do ruído em um DSM genérico

Observe que a função de transferência do ruído é do tipo passa alta e sua frequência de corte depende diretamente da razão de sobre amostragem (*oversampling*), já que a frequência normalizada é a frequência do sinal dividido pela frequência de amostragem. Assim, a NTF de enésima ordem de um DSM pode ser dada, teoricamente, pela equação (2.14). [2]

$$q_{rms}^2 = \pi^{2N} \left(\frac{e_{rms}^2}{[(2N + 1)(OSR)^{(2L+1)}]} \right) \quad (2.14)$$

Na equação (2.14), OSR é a razão de sobre amostragem, N é a enésima ordem do DSM e (q_{rms}^2/e_{rms}^2) é a relação sinal-ruído em dB. Segundo a referência [11] a OSR possibilita a redução do número de bits necessários no quantizador.

Além disso, a partir da equação (2.14), obtêm-se a banda passante teórica da NTF e, com ela, é possível observar que, quanto maior a OSR e/ou a ordem do DSM, melhor será a relação sinal ruído na faixa de frequência do sinal em um DSM, como expresso na Figura 2.12. Isso nos leva a concluir que quanto maior a ordem do filtro menos o sinal sofrerá influência do ruído de quantização, como afirmado anteriormente. É devido a essa característica que o DSM parece ser uma ferramenta tão promissora, pois teoricamente seria possível aumentar a ordem

do DSM de tal forma que a NTF seja aproximadamente 0 (zero) na faixa de frequência do sinal. Porém, ao aumentar a ordem do DSM o sistema se torna instável. [2]

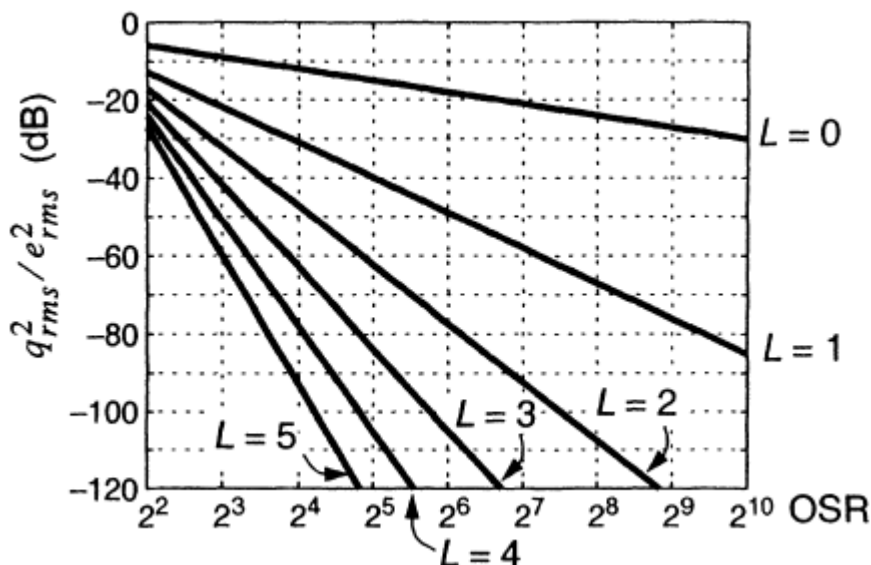


Figura 2.12 Banda passante teórica do ruído de um DSM de enésima ordem. [2]

2.2.4. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

No espaço de estados o sigma delta pode ser representado como na Figura 2.13. Observe que a Figura 2.13 representa um DSM de enésima ordem, já que **A**, **B**, **C** e **E** são matrizes e $x(n)$ representa a saída do filtro.

A representação de um DSM no espaço de estados pode ser utilizada para fazer um estudo de estabilidade do sistema, como veremos a seguir.

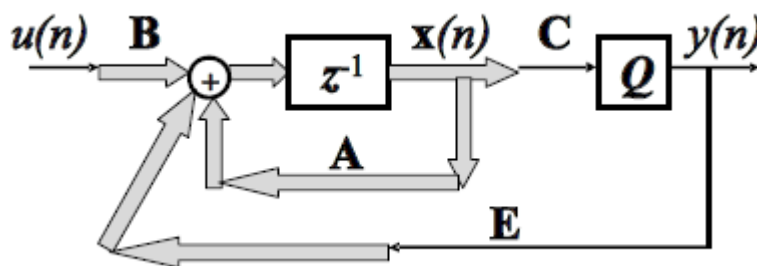


Figura 2.13 Modelo do DSM discreto no espaço de estados.[3]

2.3. O PROBLEMA DA ESTABILIDADE

Em uma conversão analógico-digital existem várias características inerentes ao processo de conversão, como: erros de quantização, códigos perdidos, erros de offset e ganho, entre outros. Todas elas influenciam na instabilidade do modulador. Dentre essas características, a que mais influencia na instabilidade do sistema, em um DSM, é a característica não-linear da

quantização que aparentemente gera ciclos limites e possibilita o surgimento de distorções harmônicas no sistema.

Em sua essência, a instabilidade do DSM se dá com a obtenção de valores de entrada no quantizador que divergem para infinito em determinadas condições iniciais ou em determinados valores de entrada do sistema porque, dessa forma, a fila de bits na saída do quantizador será sempre 1 e não representará a entrada do sistema. [3]

Por exemplo, para o DSM de primeira ordem é fácil demonstrar que ele será estável para entrada $-1 < x < 1$ (onde x é o sinal de entrada no quantizador) e achar o comportamento da fila de bits correspondente, pois a expressão no domínio do tempo do DSM de primeira ordem, expressa na equação (2.15), mostra que, assumindo que se x é constante e está entre 1 e -1, uma entrada negativa irá crescer e uma entrada positiva irá decrescer, como mostrado nas equações (2.16) e (2.17). Observe que em (2.17) a entrada seguinte só será menor que a entrada anterior se x (a entrada no quantizador) for menor que “1”, da mesma forma, em (2.16) a entrada anterior sempre irá aumentar, mas nunca passará de dois, ou seja, $u(kT+T)$ sempre será menor que dois. Assim, o sinal nunca irá aumentar infinitamente se $-1 < x < 1$, logo será estável o DSM para essa faixa. [11]

$$u(kT + T) = x(kT) - y(kT) + u(kT) \quad (2.15)$$

$$u(kT) < 0 \Rightarrow u(kT + T) = u(kT) + x + 1 > u(kT) \quad (2.16)$$

$$u(kT) \geq 0 \Rightarrow u(kT + T) = u(kT) + x - 1 < u(kT) \quad (2.17)$$

Essas equações mostram que é analiticamente possível obter um DSM de primeira ordem estável, respeitando as condições das equações (2.16) e (2.17).

O DSM de segunda ordem tem propriedades similares e pode-se provar sua estabilidade através de modelos analíticos mais complexos, porém não há ainda uma abordagem analítica que consiga provar a estabilidade de DSM de ordens superiores. [11]

Voltando para as características não-lineares da quantização, um fenômeno comum em DSM de ordens superiores é o ciclo limite. O fenômeno do ciclo limite ocorre quando a mesma sequência de bits na saída do quantizador é repetida dentro do ciclo formando uma espécie de ruído. O que ocorre é uma iteração do sinal consigo mesmo fazendo com que as sequências de bits interajam entre si e formem sub-sequências indesejadas que geram tons no sinal. No caso de sistemas de áudio, por exemplo, o ciclo limite gera tons de fato (sons indesejados). [11] No espectro de frequência, o ciclo limite são picos indesejados dentro da faixa de frequência do sinal.

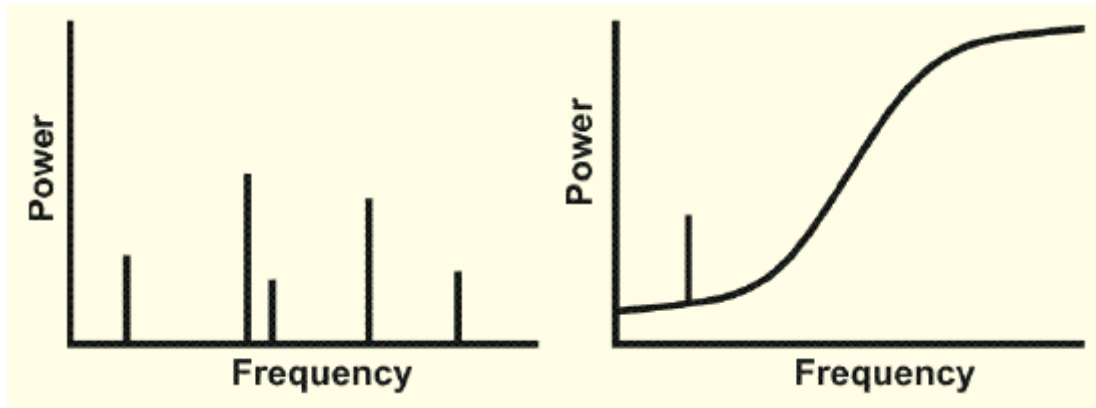


Figura 2.14 Ilustração dos fenômenos ciclo limite (à esquerda) e “Idle Tones” (à direita). [11]

No DSM, surge também o fenômeno das distorções harmônicas, essas distorções surgem quando se entra com sinais senoidais. Essas distorções são tons indesejados que surgem na saída do modulador. Além disso, outro fenômeno que surge devido a característica não-linear do sistema é o chamado *Idle Tones*. *Idle Tones* são tons que surgem no espectro de frequência do modulador dentro do ruído. É um fenômeno bem parecido com o ciclo limite, porém, enquanto o ciclo limite é um número finito de picos no espectro de frequência, *Idle Tones* é um pico no espectro de frequência, mas sobre posto por um ruído. [11]

Nesse trabalho, no entanto, será estudada a instabilidade gerada devido à posição dos polos. Será utilizado também o modelo linear do DSM, fato que simplifica o sistema, no sentido de ter menos influência da não-linearidade.

Tendo em vista o exposto, quando se quer estudar a estabilidade de sistemas lineares, existem várias abordagens teóricas possíveis. Utiliza-se a Transformada de Laplace para sistemas contínuos no tempo ou a Transformada Z para sistemas discretos. Essas transformadas são responsáveis por mostrar o comportamento de um sinal, do domínio do tempo, no domínio da frequência. A partir disso, é possível calcular a função de transferência de malha aberta e fechada do sistema e, assim, analisar a estabilidade do sistema pelo lugar geométrico das raízes (*Root Locus*), pela análise dos polos de malha fechada utilizando os critérios de Routh-Hurwitz; ou pela análise da resposta, critério de Nyquist. [4] [5] Além disso, pode-se fazer esses estudos de estabilidade a partir da representação do sistema no espaço de estados, porque utilizando o espaço de estados pode-se obter as STF e NTF do sistema e, com isso, fazer as análises mencionadas anteriormente. [5]

Em uma tentativa de se trabalhar com a não-linearidade de sistemas elétricos, existem alguns estudos extensivos quanto à análise de estabilidade de sistemas não-lineares. Em especial, temos: os métodos de Lyapunov e das funções descritivas e, especificamente para o DSM, temos a regra de Lee. [8] Nesse trabalho, abordar-se-ão os estudos utilizando a função descritiva aplicada ao DSM para demonstrar que é possível aproximar a não-linearidade existente no processo de quantização a um ganho. Essa aproximação ajuda muito na análise de estabilidade do DSM já que conseguimos tratar a não-linearidade como algo linear (um ganho) e, com isso, tornamos o sistema linear. Essa aproximação é feita em vários estudos como em [2], [3], [6] e [7]. Porém, mesmo sendo possível aproximar o sistema não-linear do DSM a um sistema linear, a prática mostra que resultados inesperados surgem quando se trabalha com DSM, principalmente com DSM de ordem superior, como falado anteriormente.

Outro ponto importante com relação à estabilidade do DSM é que, na prática, não conseguimos ainda obter uma relação sinal-ruído igual à teórica expressa na Figura 2.12. E isso se dá justamente pela característica instável desse modulador quando se aumenta a ordem do filtro. Por isso, foram feitos muitos trabalhos a fim de se aprimorar o estudo de estabilidade de um DSM, porém, até o presente momento e para DSM de ordem três ou maiores, não existe um sistema BIBO estável ainda. [11]

2.4. TÉCNICAS DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Agora, serão abordadas técnicas de análise de sistemas usadas no estudo de Moduladores Delta-Sigma. Primeiramente se falará sobre o tratamento da quantização como um ganho, na tentativa de linearizar o sistema. Segundo, será abordada a teoria da função descritiva, que é uma técnica de análise de estabilidade de sistemas não-lineares e que, aplicada ao DSM, prova que é possível aproximar o quantizador a um ganho. Por fim, será exposta a teoria clássica de análise de estabilidade de sistemas lineares pautadas na teoria da referência [10].

2.4.1. LINEARIZAÇÃO

Como uma tentativa de linearizar o sistema não-linear que representa o DSM, o processo de quantização é substituído por um amplificador de ganho “k” adicionado a um sinal que representa o erro de quantização inerente ao processo de conversão A/D. Assim, pode-se representar o sistema por meio de duas funções de transferência: a do sinal (STF) e a do ruído (NTF).

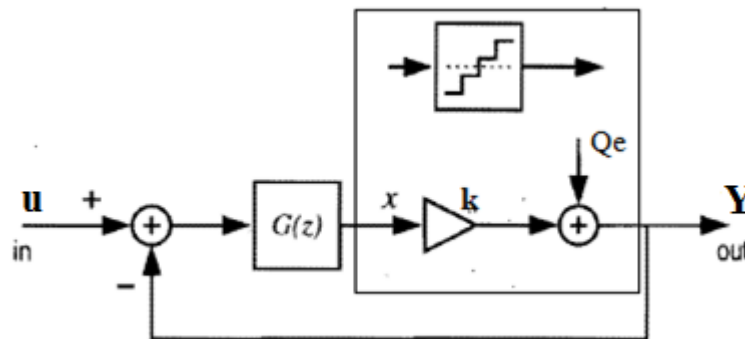


Figura 2.15 Modelo linear para o DSM com apenas uma realimentação [7]

Dessa forma, podemos retomar as equações (2.8) à (2.13) e, a partir delas, podemos representar o modelo linear do DSM na equação (2.18).

$$Y(z) = \frac{kG(z)}{1+kG(z)} * u(z) + \frac{1}{1+kG(z)} * Q_e(z) \quad (2.18)$$

As funções de transferência do ruído e do sinal (NTF e STF, respectivamente), representadas na equação acima, incluem o ganho **k**, a saída do sistema “Y”, a entrada “U” e o erro de quantização do ADC “Q_e”. A teoria da equação 2.18 é clássica quando se analisa um DSM e será chamada de Teoria 1. Essa teoria é usada nas referências [2], [6], [7] e [11].

Outra abordagem linear é a obtida pela análise do sistema da Figura 2.16, cuja realimentação é representada pela matriz **E**. É possível, segundo a referência [3], chegar às equações (2.19), (2.20) e (2.21). Observe que a equação (2.19) representa os espaços de estados de todo o

sistema considerando a realimentação uma matriz que alimenta os próprios estados do espaço de estados. Por isso, essa representação é um pouco diferente da expressa pela Teoria 1. Essa teoria, expressa pela referência [3] como uma proposta para a representação do DSM de ordem superior no espaço de estados, será chamada de Teoria 2. Nela, substituindo o quantizador por um ganho (modelo linear do sistema), obtém-se a equação (2.21), que representa a função de transferência do sinal segundo a referência [3], e a equação (2.20), que representa a função de transferência do ruído. Na referência [3] houve um pequeno erro ao representar a equação (2.20), pois a referência afirma que os pólos da NTF serão igual aos autovalores de $[zI-(A+kEC)]$, mas não colocou o ganho “k” na representação da NTF – determinante do denominador. Provavelmente um erro de digitação. Nesse trabalho, no entanto, foi corrigido esse erro e utilizou-se a NTF como na equação (2.20).

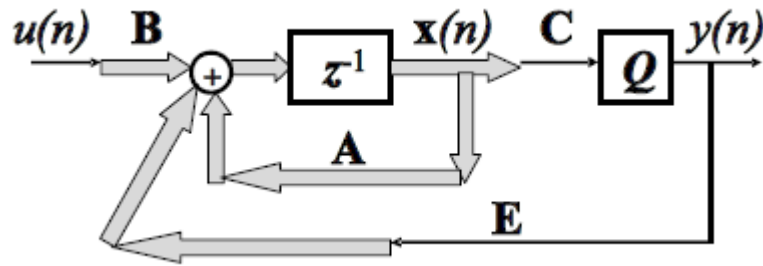


Figura 2.16 Sistema que representa um DSM de ordem “n”. [3]

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \ddots & \ddots & \ddots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} U(n) + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} Q \left([c_1 \ c_2 \ \dots \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \right) \quad (2.19)$$

$$NTF = \frac{\det[zI-A]}{\det[zI-(A+kEC)]} \quad (2.20)^1$$

$$STF = kC[zI - (A + kEC)]^{-1}B \quad (2.21)$$

Como falado anteriormente, a partir de agora, essa teoria proposta por [3] será chamada de Teoria 2 nessa monografia.

2.4.2. TÉCNICA DA FUNÇÃO DESCRITIVA

Análise da resposta em frequência é um poderoso método de análise de sistemas lineares. Porém quando se trata de sistemas não-lineares, esse estudo não pode ser diretamente aplicado, pois a resposta em frequência de sistemas não lineares não pode ser definida com precisão em vários casos. Apesar disso, uma versão estendida do método da resposta em frequência, conhecido como método da função descritiva, pode ser usado para analisar e prever alguns comportamentos de sistemas não-lineares de forma aproximada.

¹Na referência [3] houve um pequeno erro ao representar essa equação, pois a referência afirma que os pólos da NTF serão igual aos autovalores de $[zI-(A+kEC)]$, mas não colocou o k na representação da NTF. Provavelmente um erro de digitação.

Definição 2.1 – Ganho da função descritiva. Considere um sistema não-linear BIBO (“Bounded-Input Bounded-output”) estável com uma entrada senoidal $u_0 = A * \text{sen}(wt)$. Assumindo que a saída do sistema não-linear seja periódica e com a forma da série de Fourier da equação (2.22), então, o ganho da função descritiva, é o número complexo dado pela equação (2.23), que representa o ganho equivalente da aproximação ótima causal do sistema linear BIBO estável.

$$y(t) = \sum_0^{\infty} Y_k * \text{sen}[k(wt + \theta_k)] \quad (2.22)$$

$$\vartheta = \frac{Y_1 e^{j\theta_1}}{A} \quad (2.23)$$

, onde ϑ é obtido a partir da primeira harmônica de $y(t)$ - Y_1 - e do ganho “A” de u_0 .

O ponto principal da definição anterior é a suposição de que a saída será periódica e com o mesmo período da entrada. Essa definição, no entanto, não se aplica a sistemas lineares que tenham componentes sub-harmônicas. Mesmo com essa limitação, a teoria da função descritiva é usada para encontrar oscilações (que sejam aproximadamente senoidais) em sistemas não-lineares realimentados como na **Erro! Argumento de opção desconhecido.**, por meio da equação (2.24). Importante notar que o sistema da figura abaixo é equivalente ao modelo de ordem superior do DSM.

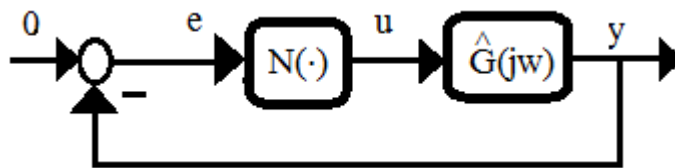


Figura 2.17 Sistema realimentado com um subsistema linear e um não-linear.

$$1 + n(k)\hat{g}(jw) = 0 \quad (2.24)$$

Na teoria da função descritiva, o que se faz é uma análise gráfica da equação (2.24) por meio dos critérios de Nyquist, onde a entrada do sistema é zero, $\hat{g}(jw)$ é um sistema linear, e $n(k)$ é a função que representa a não-linearidade. Note que, além da entrada do sinal ser assumida do tipo senoidal, outra suposição dessa teoria é que somente a primeira harmônica do sinal é significativa, ou seja, a sistema linear deve ter características de um **filtro passa-baixa**. A partir da equação (2.24), obtém-se um gráfico do tipo demonstrado na Figura 2.18.

No gráfico da Figura 2.18 têm-se duas curvas: a primeira mostra a variação de $\hat{g}(jw)$ à medida que “w” vai de 0 a mais infinito, a segunda mostra $[1/-n(k)]$. No caso do DSM, $n(k)$ é igual a um ganho **k**. Segundo a teoria da função descritiva quando essas duas curvas se interceptam há o surgimento de um ciclo limite no sistema da Figura 2.17 na frequência de intersecção - θ_n , com amplitude igual ao ganho da função descritiva ϑ . Logo, pode-se usar a teoria para prever o fenômeno do *Ciclo limite*.

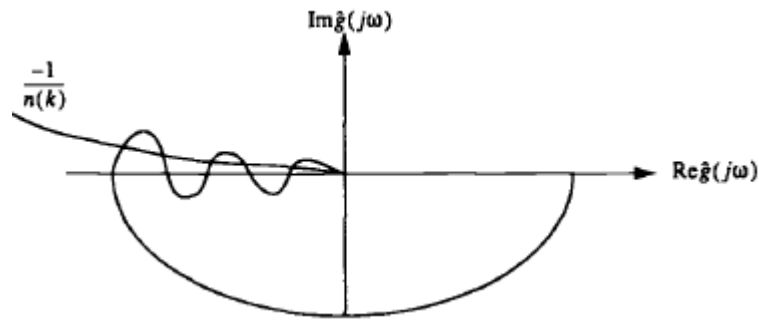


Figura 2.18 Descrição gráfica do método da função descritiva. [8]

Especificamente para a análise do DSM temos o modelo da Figura 2.19. Nesse modelo, tem-se um filtro passa-baixa ligado a um quantizador e ambos são realimentados negativamente. O processo de amostragem é feito uma taxa de f_s amostras por segundo. O erro de quantização está sendo representado pela saída do quantizador menos sua entrada.

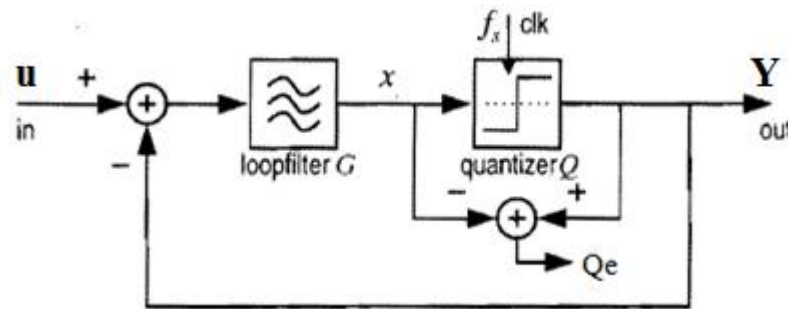


Figura 2.19 Modelo geral para a análise de estabilidade de um DSM de um bit.[7]

Pelo método da função descritiva, assume-se que a entrada do quantizador seja senoidal e da forma da equação (2.25).

$$x[kT] = A_x \text{sen}(2\pi f_x kT_s) \quad (2.25)$$

E a saída expressa pela série Fourier da equação (2.26) com a frequência fundamental igual à frequência de entrada " f_x ". " T_s " é o período da taxa de amostragem usada pelo quantizador, " T " é o período de amostragem da entrada do sinal e " ϕ_i " é a defasagem entre a entrada e a saída do quantizador.

$$Y[kT] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{sen}(2\pi u f_x kT_s + \phi_i) \quad (2.26)$$

Assim, pela definição 2.1, a saída do quantizador é uma resposta aproximada à frequência fundamental do sinal de entrada. Geralmente, essa resposta depende da amplitude do sinal e da frequência de amostragem, como na equação (2.27). O que se é observado é que quando a entrada no quantizador " A_x " é zero $k \rightarrow \infty$, quando a entrada é infinitamente grande $k=0$. [7]

$$Y(A_x, f_x) = k(A_x, f_x) * e^{j\varphi(A_x f_x)} \quad (2.27)$$

Assim, a teoria da função descritiva aplicada ao DSM nos prova que o quantizador pode ser representado pela variação de um ganho k e a STF fica como expresso na equação (2.28). [7]

$$\frac{Y(z)}{u(z)} = \frac{kG(z)}{1+kG(z)} \quad (2.28)$$

E os pólos do sistema que determinam a estabilidade são iguais as raízes de $[1 + kG(z)]$. [7]

Observe que as raízes da função de transferência dependem dos valores de k e a estabilidade do DSM é determinada pela posição desses pólos no plano z complexo. A estabilidade se dará se satisficidas as condições de estabilidade para sistemas discretos de acordo com a teoria da referência [10]. Ou seja, segundo a teoria da função descritiva aplicada ao DSM, se todas as raízes de $1 + kG(z)$ estiverem dentro do círculo unitário, então o DSM é estável e se uma ou mais raízes estiverem fora desse círculo ele será instável. Além disso, se existirem pólos fora do círculo unitário, mas eles entram no círculo, à medida que o ganho “A” do sinal aumenta e k diminui, então existem ciclos limites estáveis no DSM, mas se pólos dentro do círculo unitário, em vez de entrarem, saírem, então o DSM tem ciclos limites instáveis, ou seja, não se pode afirmar a estabilidade do DSM. [7] [10] Porém é importante relembrar que o modelo apresentado é apenas uma aproximação e não representa o sistema real completamente.

2.4.3. TEORIA CLÁSSICA DE ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Segundo a referência [10], em um sistema discreto como o da equação 2.29, a estabilidade é definida pela posição dos pólos de malha fechada do sistema, ou pelas raízes da equação característica, da seguinte forma:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{kG(z)}{1+kG(z)} \quad (2.29)$$

1. Para o sistema ser estável, os pólos de malha fechada ou as raízes da equação características devem está dentro do círculo unitário do plano z . Qualquer pólo de malha fechada fora do círculo de raio unitário torna o sistema instável.
2. Se apenas um pólo estiver em $z=1$, então o sistema se torna criticamente estável. Além disso, o sistema se torna também criticamente estável se existir um par de pólos conjugados no raio um do círculo unitário. Quaisquer números a mais de pólos no círculo unitário tornaram o sistema instável.
3. Zeros de malha fechada não afetam a estabilidade absoluta do sistema e, por isso, podem ficar fora do círculo unitário.

Então, um sistema linear invariante no tempo com uma entrada e uma saída discreta no tempo e com malha fechada controlável se tornará instável se qualquer pólo de malha fechada estiver fora do círculo unitário do plano z e/ou mais de um pólo estiver no raio do círculo unitário, exceto para apenas um par de pólos conjugados. Porém, para se ter certeza da estabilidade do sistema, é preciso calcular o lugar geométrico das raízes variando o ganho de realimentação.

Para um sistema como o mostrado na Figura 2.20, o lugar geométrico das raízes é calculado a partir da variação do ganho de realimentação do sistema. De fato, observam-se os pólos do sistema de malha fechada $-1 + \lambda G(z)$ – e como eles deslocam com a variação do ganho de realimentação λ .

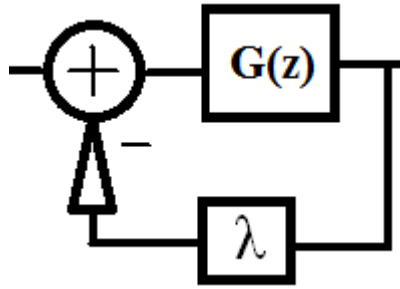


Figura 2.20 Representação do cálculo do lugar geométrico das raízes.

3. SISTEMAS ANALISADOS

Antes de fazer o estudo proposto nesta monografia, serão expostos os resultados obtidos pelas referências [3] e [7] nos três sistemas que serão estudados posteriormente. Depois disso, será feito um resumo dos sistemas e das teorias que serão estudadas e as análises dessa monografia.

3.1. RESULTADOS PELA REFERÊNCIA NO SISTEMA 1

Dada a função de transferência expressa pela equação (3.1), temos que o lugar geométrico das raízes da STF do DSM estudado pela referência [7] está representado na Figura 3.1. $G(z)$ é o filtro que alimenta o quantizador do DSM como no sistema da Figura 3.2. Observe que o quantizador é modelado como um ganho k – modelo linear do DSM. Esse sistema será chamado de Sistema 1.

$$G(z) = \frac{3z^2 - 3z + 1}{(z - 0.95)^3} \quad (3.1)$$

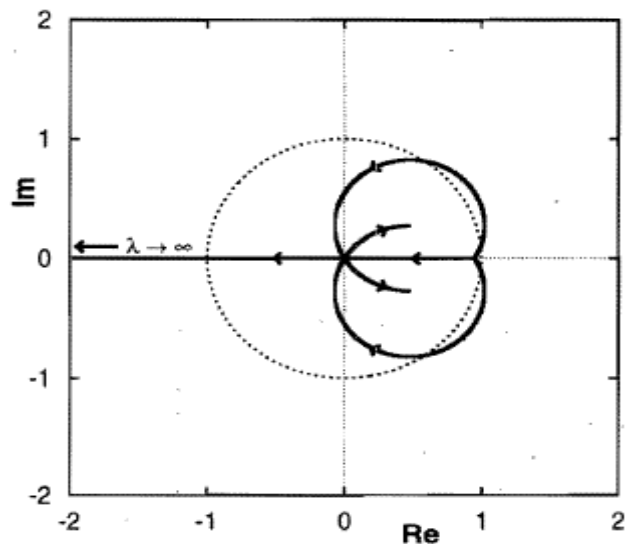


Figura 3.1 Root Locus do DSM com o filtro de terceira ordem expresso pela equação (4.3) e o quantizador modelado por um simples ganho k . [7]

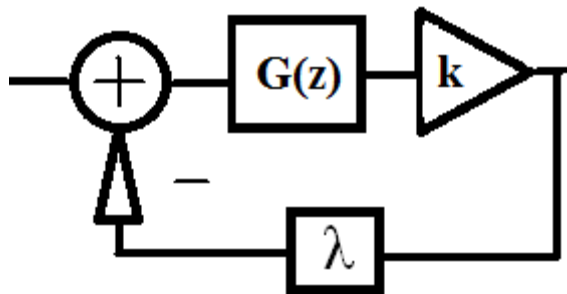


Figura 3.2 Representação do cálculo do lugar geométrico das raízes.

Como falado anteriormente, o lugar geométrico das raízes é calculado a partir da variação do ganho de realimentação do sistema. De fato, calculam-se os pólos do sistema de malha fechada $[1 + \lambda k G(z)]$ e como eles deslocam com a variação do ganho de realimentação λ . Como observado na Figura 3.1, o lugar geométrico das raízes do sistema sai do círculo unitário em determinados intervalos e isso torna o sistema instável para λ nesses intervalos porque se alguma raiz está fora do círculo unitário, a amplitude do sinal dentro do loop irá continuar crescendo indefinidamente.

No Sistema 1, existem três regiões de interesse. A primeira região é instável, $\lambda_0 < \lambda \cong 0,35$. Uma região em que, para determinado ganho $1 > \lambda_1 > \lambda_0$, o sistema volta à estabilidade (as raízes conjugadas entram novamente dentro do círculo unitário). O fato das raízes entrarem novamente no círculo unitário e ter uma região estável revela que a primeira região de estabilidade pode gerar um ciclo limite estável [7]. Finalmente para $\lambda_2 > 1$ a raiz real do sistema sai do círculo unitário tornando-o novamente instável novamente.

A amplitude desse ciclo limite estável na entrada do quantizador e sua fase podem ser calculadas, pela teoria da função descritiva da seguinte forma: considere que a saída do quantizador é uma onda quadrada de amplitude “y”. Pela série de Fourier, tem-se que a amplitude da harmônica fundamental do sinal de saída do quantizador é $4y/\pi$. [7]

Ou seja, no Sistema 1, supondo que a entrada do quantizador é do tipo $x[k] = A_x \text{sen}(2\pi f_x k T_s)$, então a saída (Y[k]) é como a expressa na equação (3.2).

$$Y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \text{sen}(2\pi i f_x k T_s + \varphi_i) \quad (3.2)$$

Com isso a resposta não-linear do quantizador “Y” é aproximadamente a resposta à harmônica fundamental do sinal de entrada, segundo a teoria da função descritiva. Genericamente essa resposta depende da amplitude do sinal (A_x) e da frequência (f_x). Como expresso na equação (3.3).

$$Y(A_x, f_x) = k(A_x, f_x) e^{j\varphi(A_x, f_x)} \quad (3.3)$$

Assim, quando a amplitude A_x é infinitamente grande, o quantizador pode ser linearizado no domínio z para $Y(A_x, f_x) = k$ com $k \in [0, +\infty)$. [7] [8]

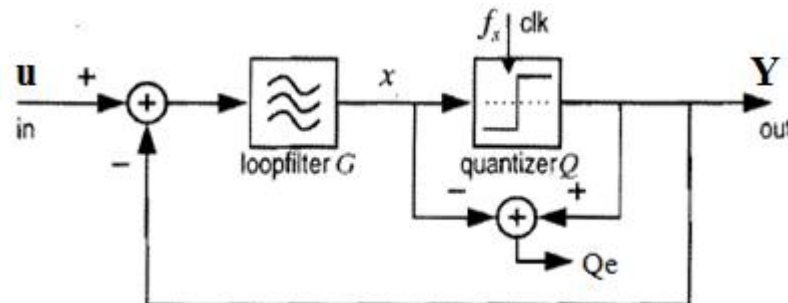


Figura 3.3 Modelo geral de um DSM de 1-bit para estudo de estabilidade utilizando a teoria da função descritiva. [7]

Agora que o sistema não-linear tem um modelo linear, pode-se calcular sua função de transferência do sistema e fazer o estudo de estabilidade clássico para modelos lineares, como os expressos nas referências [4], [5] e [10]. Assim, o ganho k representa o ganho do

quantizador, a amplitude do ciclo limite é calculada pela equação (3.4) e expressas na figura a seguir. [7]

$$A_{cl} = \frac{4y}{2\pi k} \quad (3.4)$$

Fato relevante a ser notado é que, não se usou $G(z)$ com pólos exatamente em 1, pois a teoria da função descritiva não consegue calcular esse ciclo limite se os pólos estiverem exatamente em $z=1$. [7]

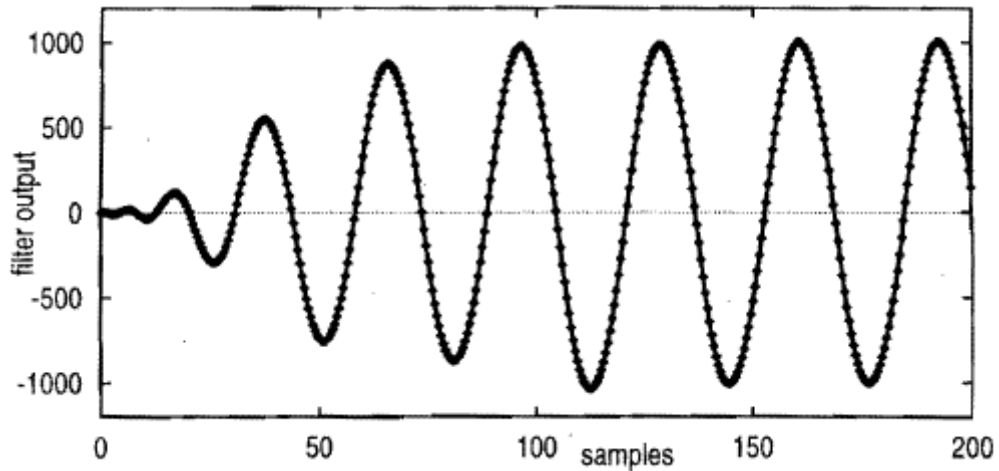


Figura 3.4 Saída do passa-baixa de terceira ordem da equação (4.3) do DSM com entrada nula e estados nulos com tamanho do degrau do quantizador igual a 2 ($q=2$).

3.2. RESULTADOS OBTIDOS PELA REFERÊNCIA NOS SISTEMAS 2 E 3

A referência [3] utilizou o simulador desenvolvido pela referência [9]. O algoritmo da referência [9] se baseia em três dados: OSR, a ordem do modulador e a frequência de corte do sinal. Dados esses valores, obtém-se a STF e NTF do DSM. Depois disso, é feito um teste para medir o ganho de potência do ruído (GPR). O Ruído será estável se GPR estiver entre $(2,35 - 3P_{max})$ e $[1,5 - 0,04(N - 3)]$, onde P_{max} é a potência máxima de entrada, N a ordem do modulador e x_{max} é o máximo valor DC na entrada. [3]

$$GPR = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (|NTF(e^{j\omega})|)^2 d\omega \quad (3.5)$$

$$P_{max} = \frac{1}{2} x_{max}^2 \quad (3.6)$$

Após calculadas a NTF e a STF e feitos os testes de condições citados acima. A referência [3] obteve um modelo convencional para as matrizes de estado. Que será chamado de Sistema 2.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0.2451 & 1.0 & 0 \\ 0.1256 & 0.5108 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0.1847 \\ 0.0454 \\ 0.0232 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = [0 \quad 0 \quad 1.0] \quad \mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} -0.1847 \\ -0.3093 \\ -0.6259 \end{bmatrix}$$

Figura 3.5 Sistema 2 para um DSM de terceira ordem, obtido utilizando a teoria da referência [9]

Após obter o Sistema 2, a referência [3] otimiza a matriz \mathbf{A} , diminuindo sua norma espectral para um valor menor que 1 e, com isso, ela obteve o Sistema 3 –Figura 3.6.

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.5690 \\ -0.3936 & 1.0 & -0.476 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -0.694 \\ 0.0402 \\ 0.3226 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0.3363 \\ -0.322 \\ 0.7817 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} -0.5545 \\ +0.5834 \\ -0.3218 \end{bmatrix}$$

Figura 3.6 Parâmetros com norma espectral otimizada de um DSM de 3ª Ordem. [3]

A matriz \mathbf{A} é alterada, pois se a norma espectral da matriz \mathbf{A} for menor que 1 o sistema tende a ser mais estável, apesar de não existir uma relação direta que prove essa teoria. [3] Observe que na matriz \mathbf{A} representa as realimentações dos filtros e a matriz \mathbf{E} a realimentação de todo o ADC. Além disso, pode-se definir a norma espectral da seguinte forma: dada uma matriz \mathbf{A}_n – sendo os autovalores dados por $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ – a norma espectral é:

$$\|\mathbf{A}_n\| = \max(-\beta_1(\mathbf{A}_n), \beta_n(\mathbf{A}_n))$$

Após calculadas as matrizes do espaço de estados do sistema, foram feitas algumas simulações pela referência [3]. Primeiramente é calculado o gráfico da norma espectral do DSM versus o ganho do quantizador. Esse ganho é o valor ao qual se aproxima a não-linearidade do quantizador. Observe que Sistema 3 tem uma norma espectral menor que um até próximo de $k=2,5$, enquanto o Sistema 2 nunca atinge uma norma espectral menor que um. Mesmo não podendo relacionar a norma espectral do modulador à estabilidade do sistema, a referência afirma que moduladores – cuja matriz \mathbf{A} tem baixa norma espectral – tendem a ser mais estáveis do ponto de vista estático e foi, por isso, que a referência [3] propôs um modelo diferente do Sistema 2. Além disso, em alguma variável de estado parte dos valores da matriz decrescem durante as interações devido à baixa norma espectral. [3]

Segundo, o Sistema 3 é simulado com uma entrada senoidal de 0,6 volts e em $OSR=32$. E o resultado para a característica da relação sinal-ruído do sinal é como mostrado pela Figura 3.8. O Sistema 3 é capaz de obter uma SNR um pouco maior que o do modulador do Sistema 2. [3]

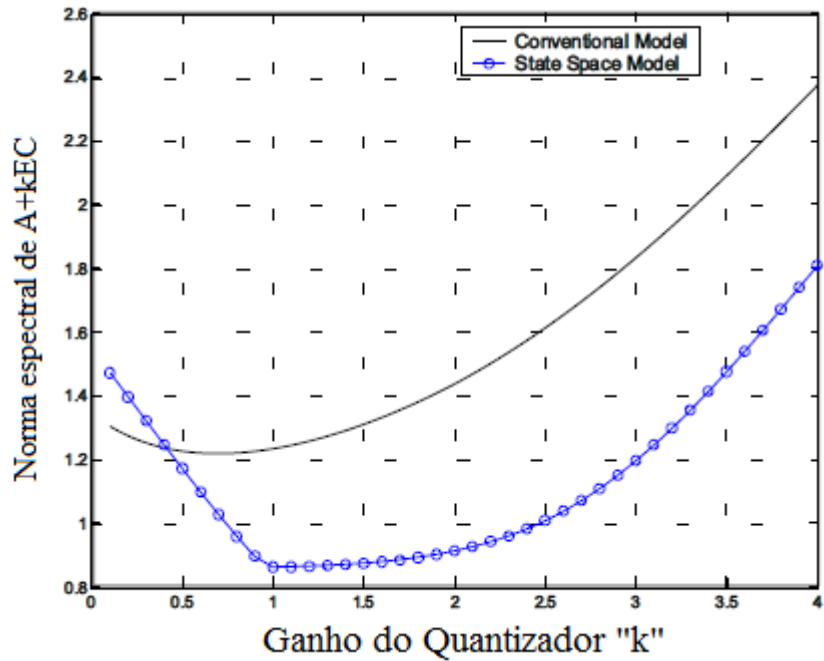


Figura 3.7 Norma espectral e ganho do quantizador. [3]

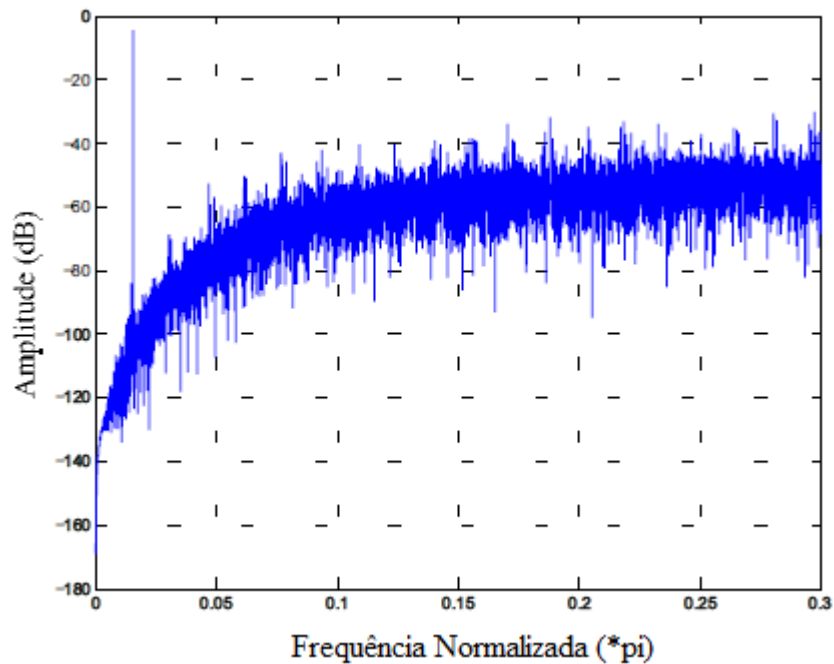


Figura 3.8 Espectro de Saída. [3]

Por último, a referência [3] calculou a entrada de limite na qual o modulador se torna instável e colocou-se o sistema para operar nesse limite. Feito isso, quando o sistema chega próximo do limite, ele é desligado para poder calcular o tempo de recuperação das variáveis de estado. Esse teste foi feito várias vezes para se confirmar os valores estatisticamente e, por fim, a referência obteve os resultados expressos na Tabela 1. Com esses resultados, é possível comparar a eficiência do Sistema 3 em relação ao Sistema 2. A referência concluiu que se pode afirmar que o Sistema 3 volta a estabilidade mais rapidamente que o Sistema 2.

Tabela 1 Resultado da simulação da referência [3].

Modulador	Sistema 2	Sistema 3
Entrada Máxima	0.94	0.94
SNR Máximo	90dB	91dB
Falha Inicial	6.8%	1.8%
Falha de Recuperação	9.2%	0.8%

Observe que a falha de recuperação e falha inicial indicam que os dois modelos não são BIBO estáveis (Entrada Limitada / Saída Limitada – se o sistema é BIBO estável, para determinada entrada limitada será obtida uma saída limitada).

No geral, é possível tirar as seguintes conclusões: o DSM do Sistema 3 reduziu a faixa instável de frequência para qualquer offset inicial nas variáveis de estado; o Sistema 3 volta a um estado nulo – se pararmos a alimentação antes do nível dc máximo por um período de tempo – de forma mais eficiente que o Sistema 2; e que o período de recuperação ainda pode ser reduzido. [3]

3.3. TEORIAS ANALISADAS

A teoria clássica – Teoria 1 – ao qual esse trabalho se refere é a teoria na qual a realimentação do sistema é uma realimentação simples, ou seja, o sistema é representado como na Figura 3.9.

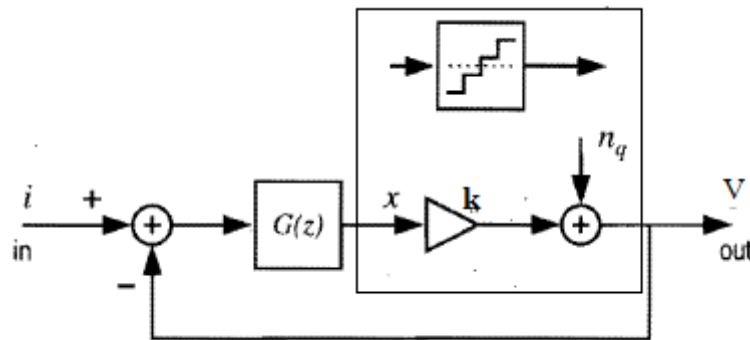


Figura 3.9 Modelo linear para o DSM com apenas uma realimentação [7]

E as funções de transferência do sinal e do ruído, são como as expressas a seguir.

$$STF = \frac{kG(z)}{1 + kG(z)} \quad NTF = \frac{1}{1 + kG(z)}$$

A Teoria 2, no entanto, é uma expansão da Teoria 1, pois a realimentação do sistema não é uma realimentação trivial porque ela é representada por uma matriz **E** cujos termos representam a localização e os ganhos que estão realimentando cada variável de estado.

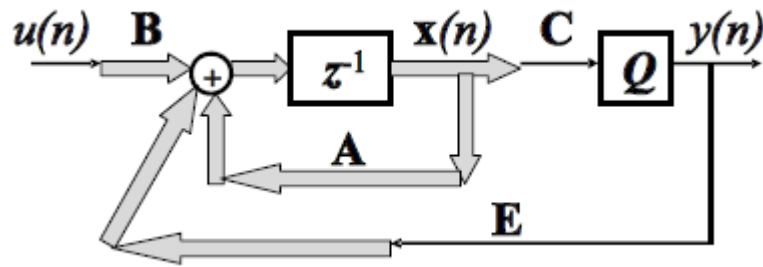


Figura 3.10 Sistema que representa um DSM de ordem “n”. [3]

Segundo a referência as funções de transferência do sinal e do ruído, são:

$$NTF = \frac{\det[zI - A]}{\det[zI - (A + kEC)]} \quad STF = kC[zI - (A + kEC)]^{-1}B$$

Dada as equações acima, nesse **trabalho chegou-se a conclusão que a Teoria 1 e a Teoria 2 deverão ser equivalentes quando a matriz E for igual à [-1; 0; 0]**. Essa hipótese será testada nessa monografia.

Além disso, será testada a possibilidade de estender a Teoria 2 para a Teoria 3– abaixo. Dado que existe um estudo que mostra a possibilidade de representar um comparador por um ganho com um pólo [1]. **Se comprovada essa expansão essa monografia trará uma grande contribuição para a análise de um DSM de ordem superior, pois ela estaria aproximando ainda mais o modelo linear matemático do modelo real.**

$$STF = \left(\frac{k}{z+p}\right)C[zI - \left(A + \left(\frac{k}{z+p}\right)EC\right)]^{-1}B$$

$$NTF = \frac{\det[zI - A]}{\det\left[zI - \left(A + \left(\frac{k}{z+p}\right)EC\right)\right]}$$

Em suma, o que essa monografia propõe são as seguintes contribuições: **provar a equivalência entre a Teoria 1 e 2 e testar a possibilidade de expansão da Teoria 2 para a Teoria 3** – teoria mais próxima do sistema físico real. Para isso, serão usados os Sistemas 1, 2 e 3.

3.4. SISTEMAS ANALISADOS

A partir dos três sistemas citados anteriormente, serão feitas diversas análises, mas antes disso, é importante deixar claro os três sistemas que serão analisados.

O **Sistema 1** é o DSM obtido a partir do filtro passa-baixa dado pela equação (3.1) – sistema da referência [7].

$$G(z) = \frac{3z^2 - 3z + 1}{(z - 0.95)^3} \quad (3.1)$$

O **Sistema 2** é o modelo convencional calculado pela referência [3] utilizando a teoria da referência [9]. O Sistema 2 é o obtido à partir das matrizes de estado **A1**, **B1**, **C1** e **E1**.

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2451 & 1 & 0 \\ 0,1256 & 0,5108 & 1 \end{bmatrix} B1 = \begin{bmatrix} 0,1847 \\ 0,0454 \\ 0,0232 \end{bmatrix} C1 = [0 \quad 0 \quad 1] E1 = \begin{bmatrix} -0,1847 \\ -0,3093 \\ -0,6259 \end{bmatrix}$$

O **Sistema 3** é o modelo proposto pela própria referência [3] obtido à partir da diminuição da norma espectral da matriz **A** – matrizes **A**, **B**, **C** e **E**. Em todos os sistemas a matriz **D** é igual a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,569 \\ -0,3936 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -0,6940 \\ 0,0402 \\ 0,3226 \end{bmatrix} C = [0,3363 \quad -0,322 \quad 0,7917] E = \begin{bmatrix} -0,5545 \\ +0,5834 \\ -0,3218 \end{bmatrix}$$

3.5. ANÁLISE DO SISTEMA 1

Dado o Sistema 1, cuja função de transferência do filtro anterior ao quantizador é:

$$G(z) = \frac{3z^2 - 3z + 1}{(z - 0.95)^3}$$

,foi calculado nessa monografia, utilizando o MatLab, as matrizes de estado do filtro (**A**, **B**, **C** e **D**) que representam o espaços de estados desse sistema, como mostrado na equação (3.7).

$$A = \begin{bmatrix} 2,85 & -2,708 & 0,8574 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C = [3 \quad -3 \quad 1] \quad D=0 \quad (3.7)$$

3.5.1. EQUIVALÊNCIA DAS TEORIAS 1 E 2

Dadas as matrizes de estados – calculadas por esse trabalho e que representam o sistema 1 – foram calculadas as duas funções de transferência do sinal (STF) utilizando as Teorias 1 e 2.

Utilizando a Teoria 2 – $STF = kC[zI - (A + kEC)]^{-1}B$ – e considerando k=1, obtemos:

$$\frac{3z^2 - 3z + 1}{z^3 + 0.15z^2 - 0.292z + 0.1426}$$

, note que **E**=[-1; 0; 0] para o sistema representar um realimentação simples como na Teoria 1.

Utilizando essa teoria os pólos e zero estão localizados em:

	Pólos	Zeros
1	-0,555	0,5+0,2887i
2	0,2778+0,2992i	0,5-0,2887i
3	0,2778-0,2992i	

Utilizando a Teoria 1 – $STF = \frac{kG(z)}{1+kG(z)}$ – e também considerando $k=1$, temos que a STF é:

$$\frac{3z^5 - 11.55z^4 + 17.67z^3 - 13.55z^2 + 5.28z - 0.8574}{z^6 - 2.7z^5 + 1.989z^4 + 0.5236z^3 - 1.326z^2 + 0.6365z - 0.1223}$$

Aparentemente os sistemas são bem diferentes. Porém, ao analisarmos a posição dos pólos do sistema, temos que os pólos e zeros estão localizados em:

	Pólos	Zeros
1	-0,7699	0,5+0,2887i
2	0,3099+0,2986i	0,5-0,2887i
3	0,3099-0,2986i	
4	0.8755	0.8755
5	0.9872 + 0.0682i	0.9872 + 0.0682i
6	0.9872 - 0.0682i	0.9872 - 0.0682i

Observe que os pólos e zeros das linhas 4, 5 e 6 se anulam e os pólos e zeros das linhas 1, 2 e 3 são bem próximos aos pólos e zeros obtidos pela Teoria 2. Acredita-se que o MatLab não anulou os termos devido a um possível erro numérico de aproximação ao fazer o cálculo da Teoria 1, pois não faz sentido obtermos um sistema de sexta ordem para a STF dado que o filtro é de terceira ordem.

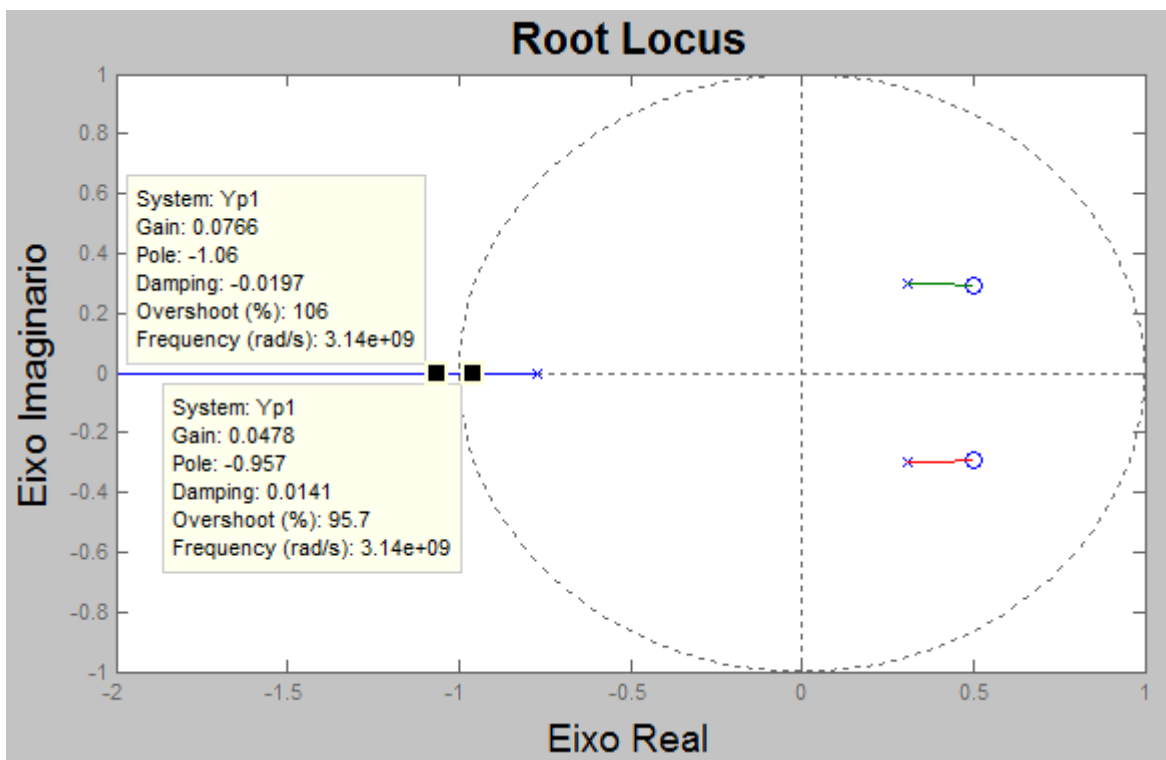


Figura 3.11 LGR da STF do Sistema 1, supondo um ganho do quantizador $k=1$, utilizando a Teoria 2.

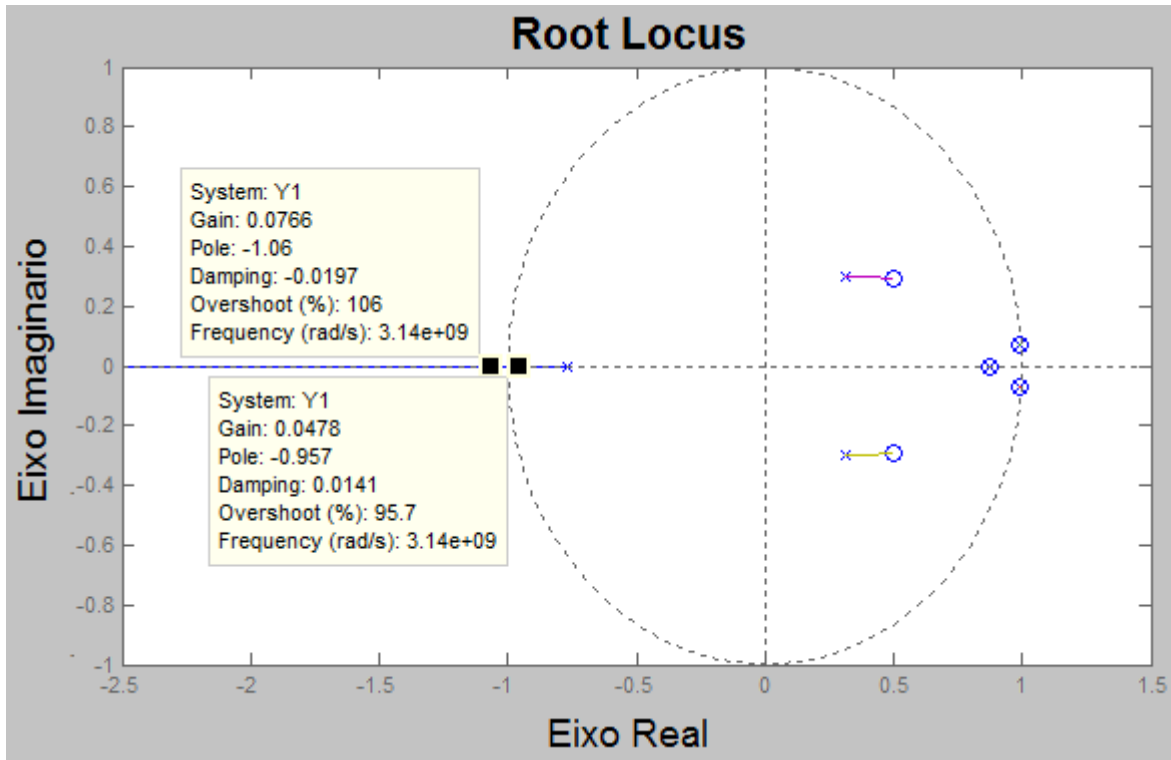


Figura 3.12 LGR da STF do Sistema 1, supondo um ganho do quantizador $k=1$, utilizando a Teoria 1.

Observa-se ainda que, ao calcular-se o lugar geométrico das raízes de malha fechada dos dois sistemas (ou seja, a variação dos pólos com a variação de um ganho na realimentação), obtiveram-se as respostas expressas na Figura 3.11 e na Figura 3.12. Observe ainda que as curvas são equivalentes. Além disso, o ganho que varia para observarmos o lugar geométrico das raízes está na realimentação do sistema inteiro.

Note que a análise do lugar geométrico dos pólos de malha fechada não representa um estudo de estabilidade pautado na teoria da fonte [10], pois, para se fazer esse estudo, é preciso analisar a variação dos pólos de malha fechada e não os pólos com a malha fechada. O que temos é um modelo como o apresentado na Figura 3.13. Ou seja, variou-se o λ dos sistemas de malha fechada da figura da esquerda, porém para o estudo de estabilidade, deve-se variar o λ do sistema de malha fechada da figura da direita. Note que a matriz \mathbf{E} impossibilita essa análise clássica de estabilidade em princípio, a não ser para o caso no qual $\mathbf{E} = [-1; 0; 0]$.

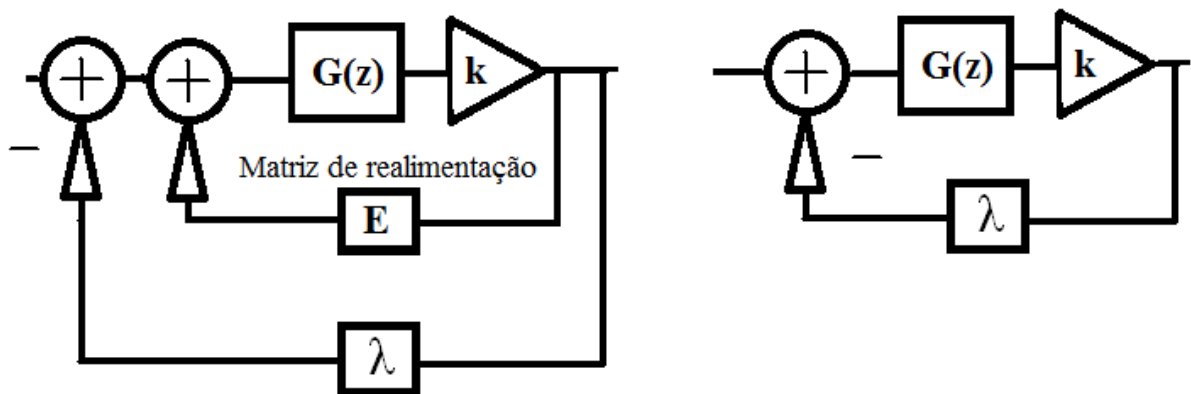


Figura 3.13 Lugar geométrico do sistema de malha fechada (esquerda). Teoria clássica para o cálculo do lugar geométrico das raízes do sistema de malha aberta (direita).

Apesar do estudo do lugar geométrico das raízes feito não representar um estudo de estabilidade, com ele é possível provar a equivalência das duas teorias, pois, se nas duas teorias os pólos de malha fechada da esquerda variam da mesma forma (dada uma variação do ganho λ de $0 \rightarrow \infty$), então as duas representações são equivalentes.

Concluiu-se então, que provavelmente houve um erro de aproximação numérica no cálculo da STF da Teoria 1 e, por isso, os valores não foram exatamente iguais ao obtidos pela Teoria 2. Apesar disso, dada os resultados apresentados e uma análise do lugar exato dos pólos e zeros, é possível afirmar que as duas teorias são aparentemente equivalentes devido à proximidade das respostas.

Feito a análise para a STF, partiu-se para a análise da NTF do Sistema 1. Na análise da NTF os resultados foram iguais, utilizando a Teoria 2 – que calcula a NTF pelos autovalores de $[z\mathbf{I}-\mathbf{A}]$ e $[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+k\mathbf{E}\mathbf{C})]$ – e utilizando a Teoria 1 – $NTF = \frac{1}{1+kG(z)}$. Para as duas teorias, a NTF foi:

$$\frac{z^3 - 2.85 z^2 + 2.708 z - 0.8574}{z^3 + 0.15 z^2 - 0.292 z + 0.1426}$$

Com esse resultado obtido para a NTF, a hipótese de que no caso da STF houve um erro numérico de aproximação no cálculo utilizando a Teoria 1 ganha força, bem como a conclusão de que as teorias são equivalentes de fato.

3.5.2. TEORIA 3

Feito isso, outro ponto interessante a ser analisado é a possibilidade de expansão da Teoria 2 para o caso em que o quantizador é modelado por um ganho com um pólo – Teoria 3. Para provar isso, substituiu-se o ganho “k” da teoria da referência [3] por $\frac{k}{z+p}$ e calculou-se a STF e a NTF para esse novo modelo utilizando as Teoria 1 e 3. Feito isso, pode-se afirmar que, se obtivermos os mesmos lugares geométricos das raízes para as Teorias 3 e 1, isso deve indicar que a Teoria 2 pode ser ampliada para a Teoria 3. Para isso, utilizaram-se duas modelagens: $k = k/z$ e $k = k/(z + 0,9)$, ou seja, o ganho do quantizador com um pólo em zero e um pólo em alta frequência.

É importante ressaltar que o modulador do DSM funciona como um comparador e existem várias teorias que aproximam comparadores a um alto ganho com um pólo. Por isso, provar que é possível expandir a Teoria 2 para a Teoria 3 aproximaria o modelo matemático do modelo físico real.

Dito isto, utilizando a Teoria 3, a variação dos pólos com a malha fechada obtida pela variação de um ganho λ – realimentação do sistema já realimentado – é como mostrado nas curvas verde e azul da Figura 3.14 e da Figura 3.15. E a localização dos pólos e zeros da STF são como os expressos na tabela 2 e 3.

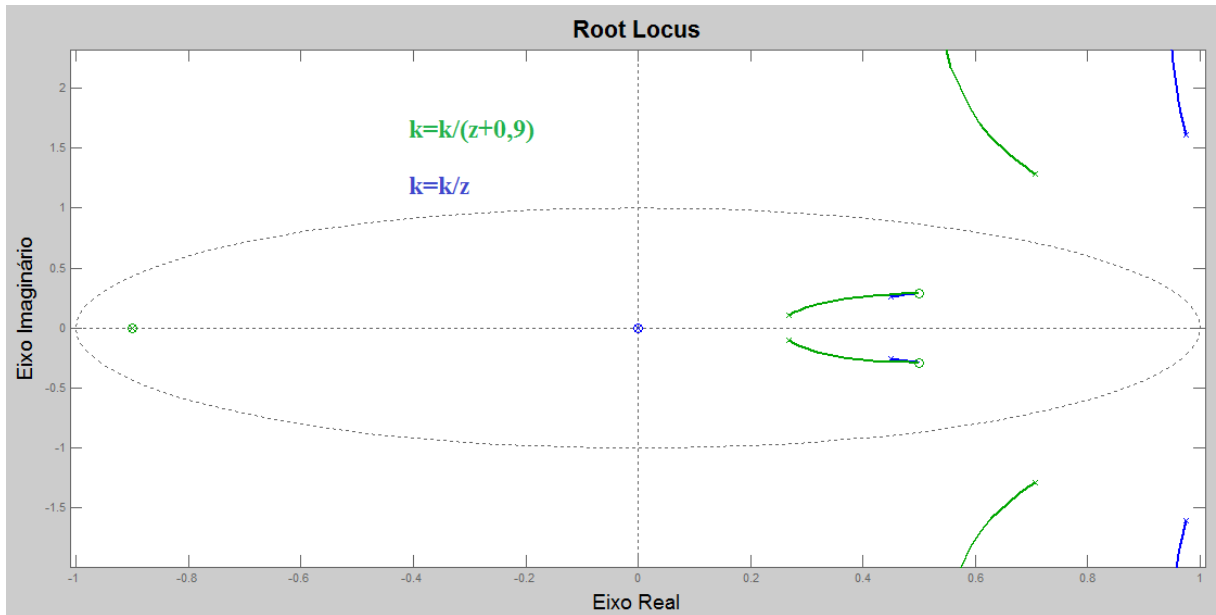


Figura 3.14 LGR do sistema 1 com o modelo do ganho do quantizador com pólos utilizando a teoria dada pela referência [3].

Utilizando a Teoria 1, temos um resultado equivalente, porém com os pólos e zeros se anulando nas posições mostradas anteriormente. Aparentemente, houve novamente um pequeno erro de aproximação como nos casos anteriores.

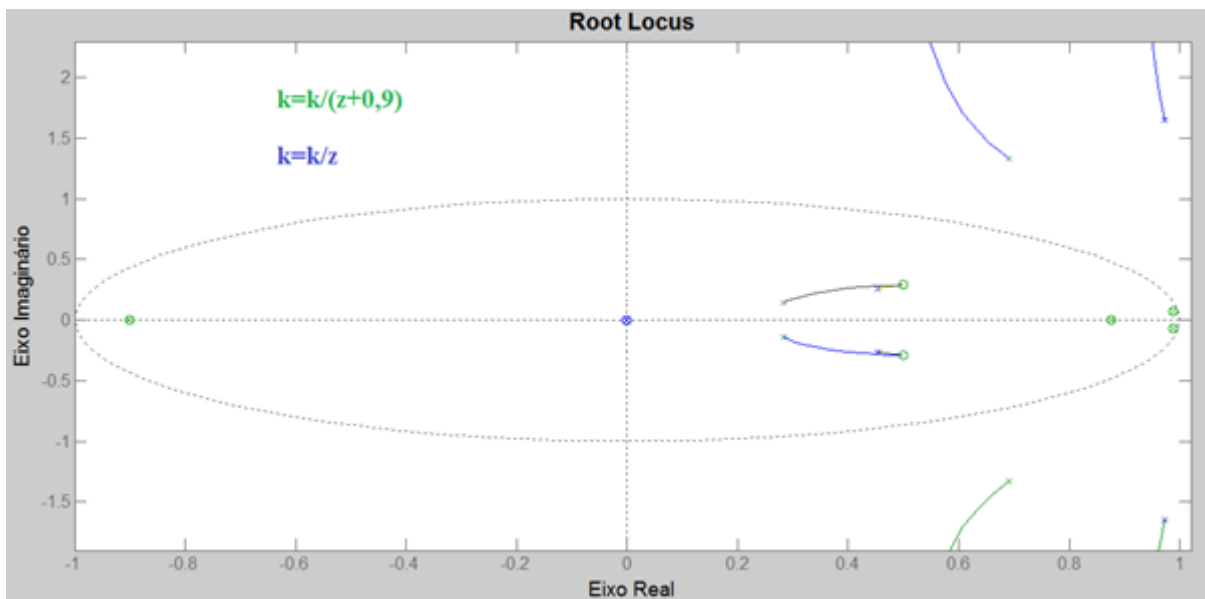


Figura 3.15 LGR do sistema 1 com o modelo do ganho do quantizador com pólos utilizando a teoria clássica.

Observe que mais uma vez os pólos e zeros utilizando as duas teorias ficam bem próximos, com a mesma ressalva feita para o caso anterior da Teoria 1, pois os zeros e pólos que aparecem no mesmo local não se anularam por um possível erro de aproximação numérico. Dito isto, mas uma vez, os resultados corroboram a hipótese de equivalência das teorias, pois todos os gráficos obtidos utilizando as diversas teorias parecem equivalentes.

Tabela 2 Pólos e zeros para a STF do Sistema Iutilizando a Teoria 3.

STF				
Teoria 3				
	Pólos (p=0,9)	Zeros (p=0,9)	Pólos (p=0)	Zeros (p=0)
1.1	-0,9	-0.9000	0	0
1.2	0.7072 + 1.2855i	0.5000 - 0.2887i	0.9745 + 1.6073i	0.5000 - 0.2887i
1.3	0.7072 - 1.2855i	0.5000 + 0.2887i	0.9745 - 1.6073i	0.5000 + 0.2887i
1.4	0.2678 + 0.1054i		0.4505 + 0.2568i	
1.5	0.2678 - 0.1054i		0.4505 - 0.2568i	
Teoria 1				
	Pólos (p=0,9)	Zeros (p=0,9)	Pólos (p=0)	Zeros (p=0)
2.1	-0.9000	-0.9000	0	0
2.2	0.6914 + 1.3340i	0.5000 + 0.2887i	0.9722 + 1.6522i	0.5000 + 0.2887i
2.3	0.6914 - 1.3340i	0.5000 - 0.2887i	0.9722 - 1.6522i	0.5000 - 0.2887i
2.4	0.2836 + 0.1440i		0.4528 + 0.2589i	
2.5	0.2836 - 0.1440i		0.4528 - 0.2589i	
2.6	0.8755	0.8755	0.8755	0.8755
2.7	0.9872 + 0.0682i	0.9872 + 0.0682i	0.9872 + 0.0682i	0.9872 + 0.0682i
2.8	0.9872 - 0.0682i	0.9872 - 0.0682i	0.9872 - 0.0682i	0.9872 - 0.0682i

Fazendo uma análise do lugar dos pólos e zeros, é possível observar que nas linhas 2.6, 2.7 e 2.8 os pólos e zeros parecem se anular, indicando um possível erro de aproximação numérica, como no caso anterior. Além disso, nas outras linhas os pólos apresentam valores bem próximos e os zeros são idênticos nas duas teorias. Esses resultados parecem indicar que a STF da Teoria 2 pode ser expandida para uma teoria na qual o quantizador é representado por um ganho k com um pólo – Teoria 3. Ou seja, já que a STF da Teoria 1 foi equivalente à STF da Teoria 3 (equação 3.8) é possível concluir que, em uma primeira análise, parece ser possível estender a Teoria 2 para o modelo do ganho com pólos.

$$STF = \frac{kG(z)}{1 + \left(\frac{k}{z+p}\right)G(z)} = \left(\frac{k}{z+p}\right)C[zI - \left(A + \left(\frac{k}{z+p}\right)EC\right)]^{-1}B \quad (3.8)$$

Fazendo a mesma análise para a NTF, obtemos resultados aproximados utilizando as duas teorias.

Para a Teoria 3 – $NTF = \frac{\det[zI - A]}{\det\left[zI - \left(A + \left(\frac{k}{z+p}\right)EC\right)\right]}$ temos que a função de transferência do ruído para p=0 é:

$$\frac{z^6 - 2.85 z^5 + 2.708 z^4 - 0.8574 z^3}{z^6 - 2.85 z^5 + 5.558 z^4 - 3.707 z^3 + 0.95 z^2}$$

E para p=0,9:

$$\frac{z^6 - 0.15 z^5 - 2.557 z^4 + 0.2577 z^3 + 2.188 z^2 - 0.1093 z - 0.625}{z^6 - 0.15 z^5 + 0.293 z^4 + 2.538 z^3 + 0.3163 z^2 - 0.7078 z + 0.1445}$$

Observe que não é esperado um sistema de sexta ordem, nem um de nona ordem para a alta frequência, e sim um de quarta ordem. Por isso, chegou-se a conclusão que provavelmente houve novamente um erro numérico no cálculo da NTF. Dito isso, temos que o lugar geométrico das raízes é como o mostrado na Figura 3.16.

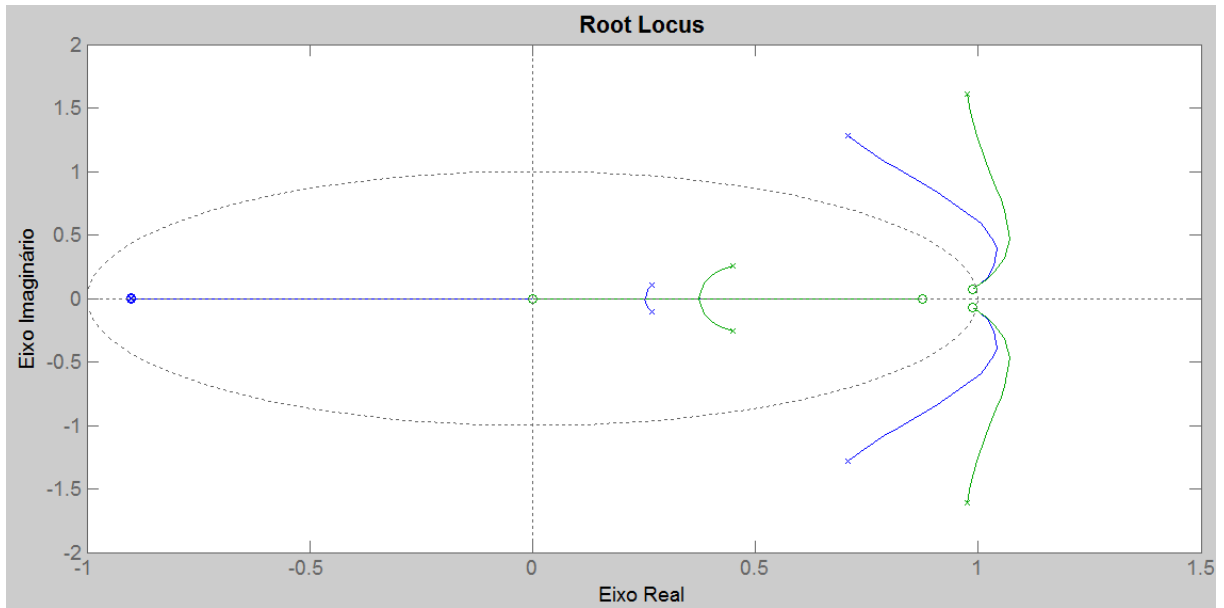


Figura 3.16 Lugar geométrico das raízes para a NTF utilizando a teoria da referência [3]

Para a Teoria 1 – $NTF = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{k}{z+p}\right)G(z)\right]}$ – foi calculado o lugar geométrico das raízes do sistema com a malha fechada, assim como no exemplo da teoria anterior, e o resultado é como o mostrado na Figura 3.17.

A função de transferência do ruído para p=0 da teoria clássica é:

$$\frac{z^4 - 2.85 z^3 + 2.708 z^2 - 0.8574 z}{z^4 - 2.85 z^3 + 5.708 z^2 - 3.857 z + 1}$$

E para p=0,9:

$$\frac{z^4 - 1.95 z^3 + 0.143 z^2 + 1.58 z - 0.7717}{z^4 - 1.95 z^3 + 3.143 z^2 - 1.42 z + 0.2283}$$

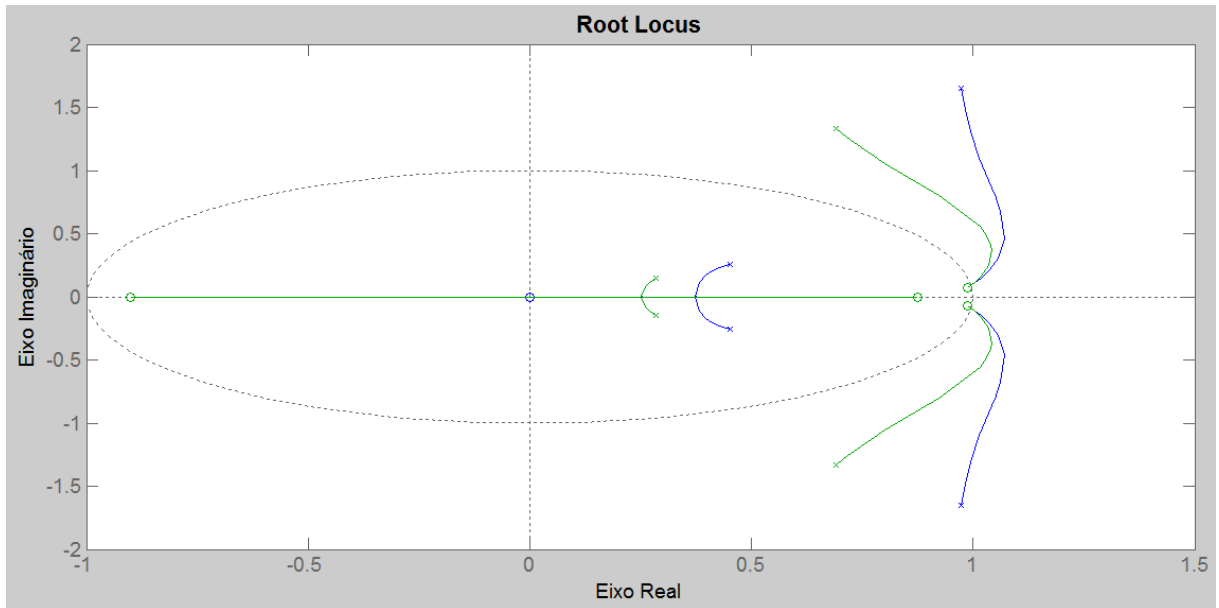


Figura 3.17 Lugar geométrico das raízes para a NTF utilizando a teoria clássica.

Observe que, utilizando a Teoria 3, obtiveram-se os mesmos erros de aproximação anteriores. No entanto os resultados foram bem próximos como mostrado na figura seguinte, que apresenta todas as quatro curvas juntas – as duas curvas da Figura 3.16 e as duas da Figura 3.17.

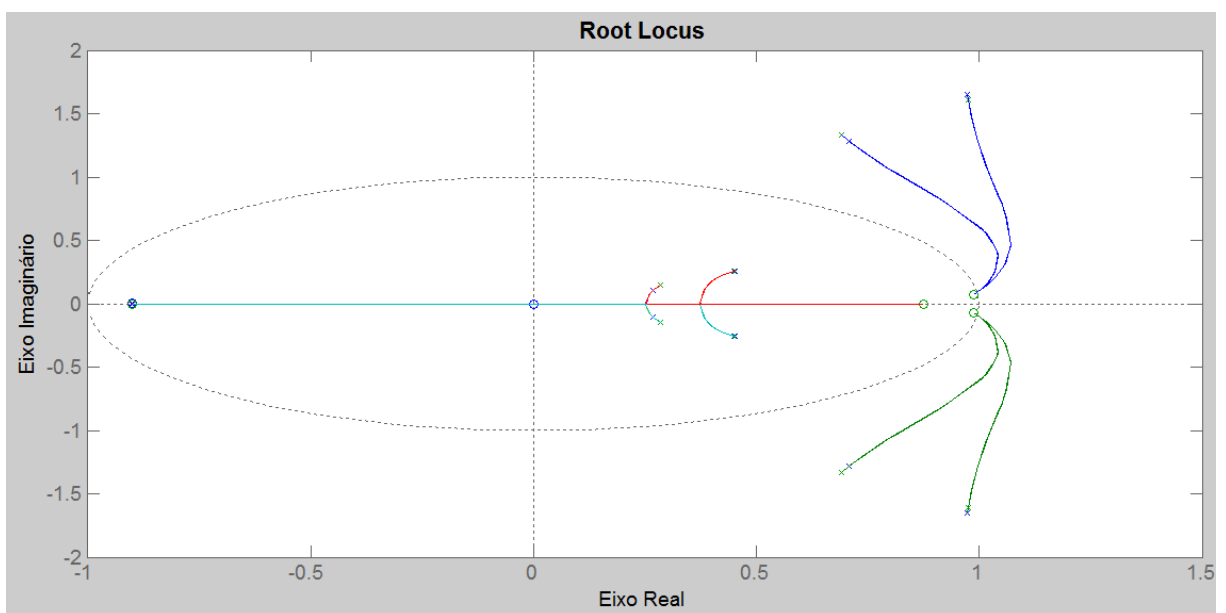


Figura 3.18 Plot das quatro curvas anteriores

Para se ter uma análise mais precisa dos pólos e zeros, a tabela a seguir representa os locais exatos nos dois casos. Ao fazer esses cálculos, observa-se o surgimento dos valores sublinhados em 1.1 e 1.2 na Tabela 3. Teoricamente esses valores não deveriam existir e, como é observado, eles se anulam, fato que corrobora a hipótese de um pequeno erro de aproximação entre as duas teorias.

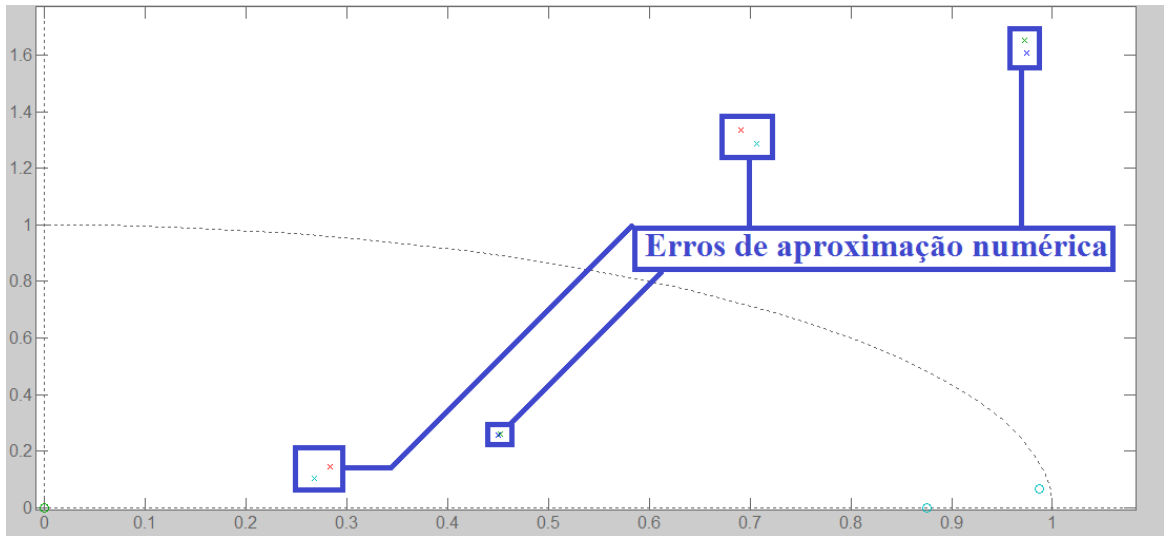


Figura 3.19 Destaque dos erros de aproximação numérica no segundo quadrante.

Tabela 3 Pólos e zeros para a NTF do Sistema 1 com o quantizador modelado com um pólo em zero utilizando a Teoria 1 e 3.

NTF				
Teoria 3				
	Pólos (p=0,9)	Zeros (p=0,9)	Pólos (p=0)	Zeros (p=0)
1.1	<u>-0.9000 + 0.0000i</u>	<u>-0.9000 + 0.0000i</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1.2	<u>-0.9000 - 0.0000i</u>	<u>-0.9000 - 0.0000i</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1.3	0.7072 + 1.2855i	0.8755	0.9745 + 1.6073i	0
1.4	0.7072 - 1.2855i	-0.9000	0.9745 - 1.6073i	0.9872 + 0.0682i
1.5	0.2678 + 0.1054i	0.9872 + 0.0682i	0.4505 + 0.2568i	0.9872 - 0.0682i
1.6	0.2678 - 0.1054i	0.9872 - 0.0682i	0.4505 - 0.2568i	0.8755
Teoria 1				
	Pólos (p=0,9)	Zeros (p=0,9)	Pólos (p=0)	Zeros (p=0)
2.1	0.6914 + 1.3340i	-0.9000	0.9722 + 1.6522i	0
2.2	0.6914 - 1.3340i	0.9872 + 0.0682i	0.9722 - 1.6522i	0.9872 + 0.0682i
2.3	0.2836 + 0.1440i	0.9872 - 0.0682i	0.4528 + 0.2589i	0.9872 - 0.0682i
2.4	0.2836 - 0.1440i	0.8755	0.4528 - 0.2589i	0.8755

3.5.3. ESTUDO DE ESTABILIDADE E RESPOSTA AO IMPULSO

Mais uma vez, um ponto importante a ser observado é que o lugar geométrico das raízes da STF e NTF dos sistemas com a malha fechada apresentadas até o presente momento não representam uma análise clássica do lugar geométrico das raízes apresentadas na referência [10]. Isso se dá devido ao fato de que, na referência [10], o lugar geométrico é calculado para o sistema de malha fechada e não para o sistema com a malha fechada.

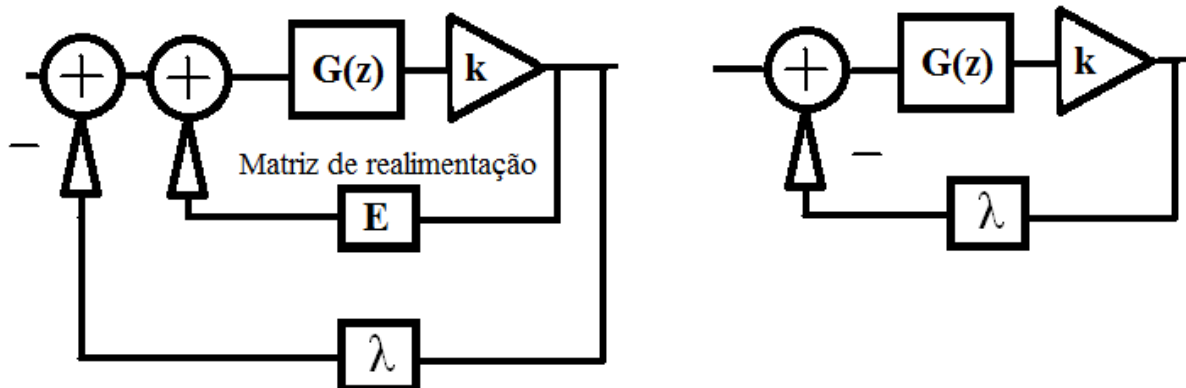


Figura 3.20 Lugar geométrico das raízes calculas anteriormente (esquerda). Teoria clássica para o cálculo do lugar geométrico das raízes (direita).

Na análise do lugar geométrico das raízes (LGR), utilizado na teoria da referência [10], o sistema de malha aberta $kG(z)$ é realimentado e, nessa realimentação, varia-se o ganho de realimentação “ λ ”. O que se tem é um gráfico de como os pólos da equação (3.9) variam com a variação de “ λ ”. Observe que variar “ λ ” é equivalente a variar “ k ” na teoria clássica (realimentação simples), pois “ λ ” varia de zero até infinito. Ou seja, ao variar $k*\lambda$ gerará a mesma variação do LGR que se variássemos apenas “ k ” ou apenas “ λ ”. O que mudará é a velocidade com que os pólos percorrem a curva, por exemplo, os pólos de $k=1$ variando $\lambda = 0 \rightarrow \infty$ serão iguais aos pólos de $k=2$ variando $(\lambda/2) = 0 \rightarrow \infty$.

$$\text{Root Locus} = \text{Vairação das raízes de } \frac{kG(z)}{1+\lambda*kG(z)} \quad (3.9)$$

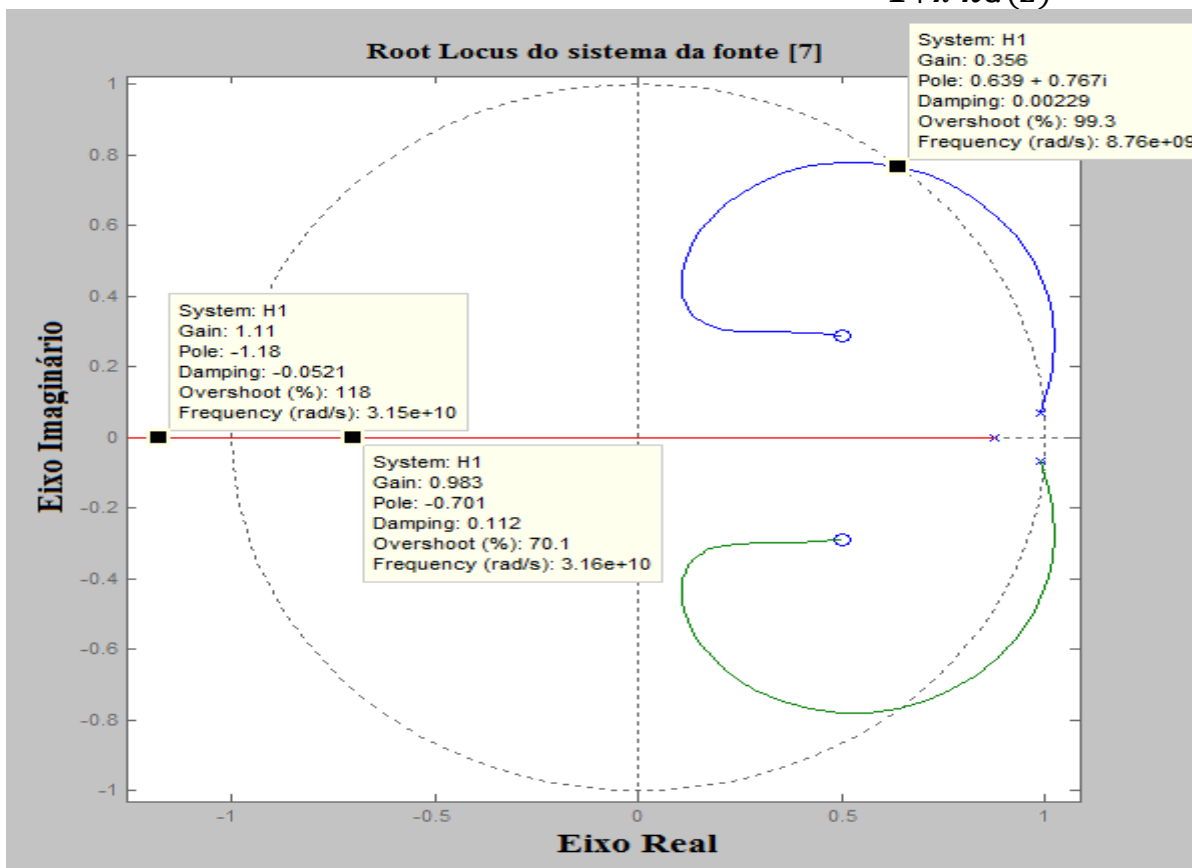


Figura 3.21 “Root Locus” do sistema 1, para o sistema de malha aberta.

Temos, então, que o LGR do sistema de malha fechada é como o expresso na Figura 3.21 para o sistema 1 – equação (3.7). Observa-se que o resultado é o mesmo obtido pela referência [7] e, segundo ela, a região onde $\lambda < 0,356$, cujos pólos conjugados estão fora do círculo unitário, indica o surgimento de um ciclo limite, como falado na exposição do sistema anteriormente. Observe que existem uma pequena região de instabilidade em $\sim 1 > \lambda > 0,356$.

Além disso, no sistema 1, espera-se uma resposta estável para a entrada nula, pois, segundo a referência, a resposta obtida para o sistema foi o surgimento do ciclo limite estável como falado anteriormente. Apesar disso, como esta monografia parte de uma abordagem cujo modelo de todo o sistema é ideal e a análise é feita diretamente da STF, esse resultado não é esperado. O que se espera é que a saída seja nula para a entrada nula. Quanto ao impulso, a referência [7] não aborda esse resultado para o modelo analisado nessa monografia, porém espera-se que exista uma região de estabilidade para a STF já que o LGR desse sistema apresenta todos os pólos dentro do círculo unitário para $0,356 < \lambda < \sim 1$, como mostrado anteriormente. Por isso, ao calcularmos a resposta ao impulso da STF do sistema 1, para a matriz **E** igual a $[-0,95; 0; 0]$ – observe que a matriz representa $\lambda=0,95$ – espera-se um resposta ao impulso estável para $k=1$, ou seja, que a saída tenda a zero com o passar do tempo. Observe que se $\lambda=0,95$ garantimos que o sistema está na região de estabilidade teórica.

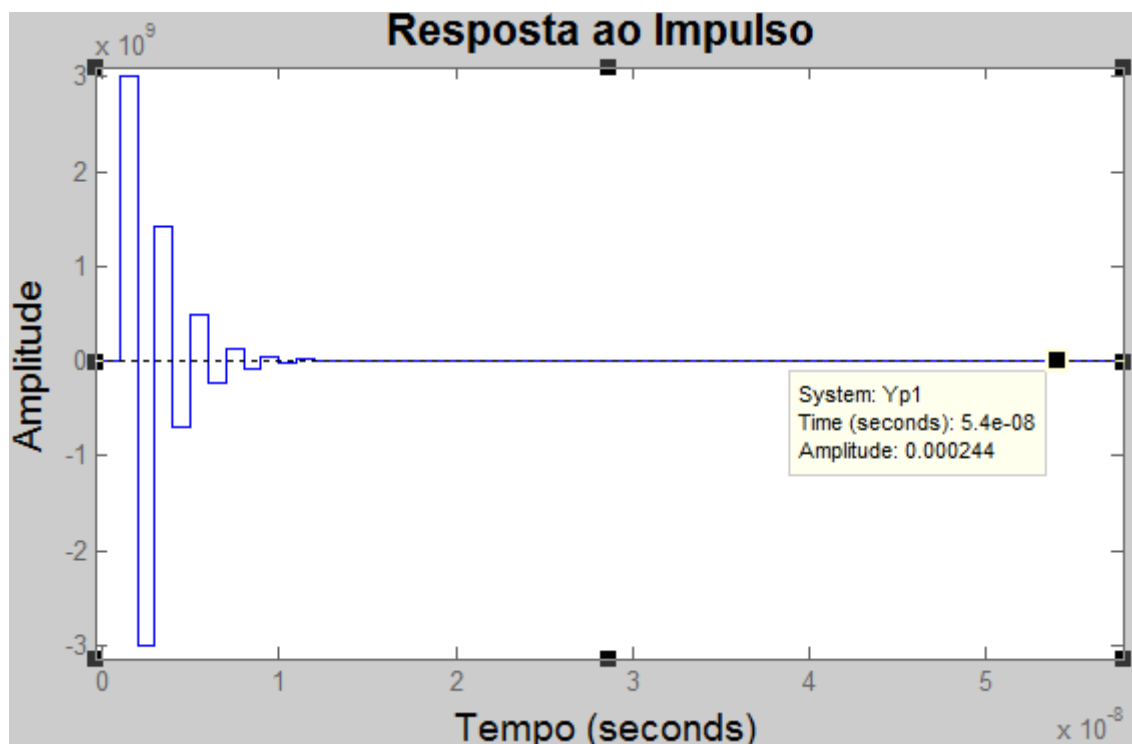


Figura 3.22 Resposta ao impulso do sistema 1, considerado $\lambda=0,95$ e $k=1$, utilizando a teoria da referência [3].

Como mostrado na Figura 3.22, a resposta ao impulso obtida para $\lambda=0,95$ e $k=1$ foi estável, como esperado. Esse resultado foi obtido a partir da STF calculada pela Teoria 2. Por isso, foi feito a mesma análise para a Teoria 1 $\left(STF = \frac{kG(z)}{1+\lambda kG(z)} \right)$ e o que se observou foi que para $\lambda=0,95$ e $k=1$ o resultado (Figura 3.23) foi bem próximo ao resultado obtido pela Teoria 2, isso, mais uma vez, corrobora a hipótese de que as duas teorias são de fato equivalentes como afirmado pela referência [3].

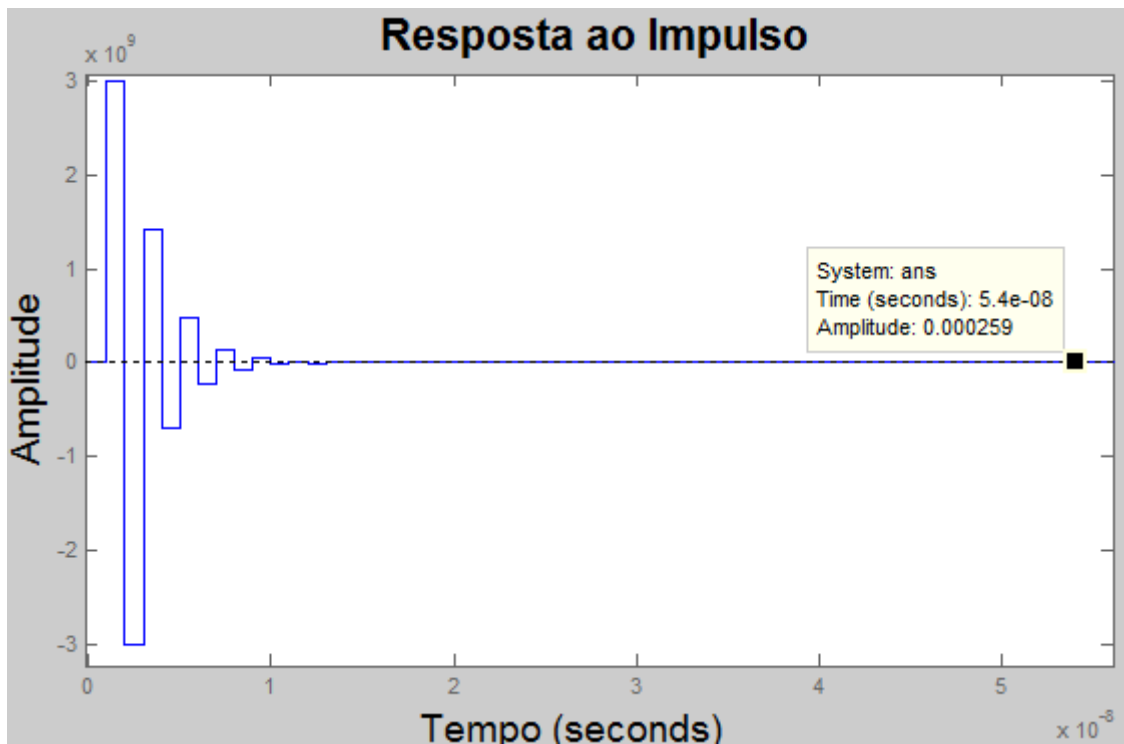


Figura 3.23 Resposta ao impulso do sistema 1, considerado $\lambda=0,95$ e $k=1$, utilizando a teoria clássica.

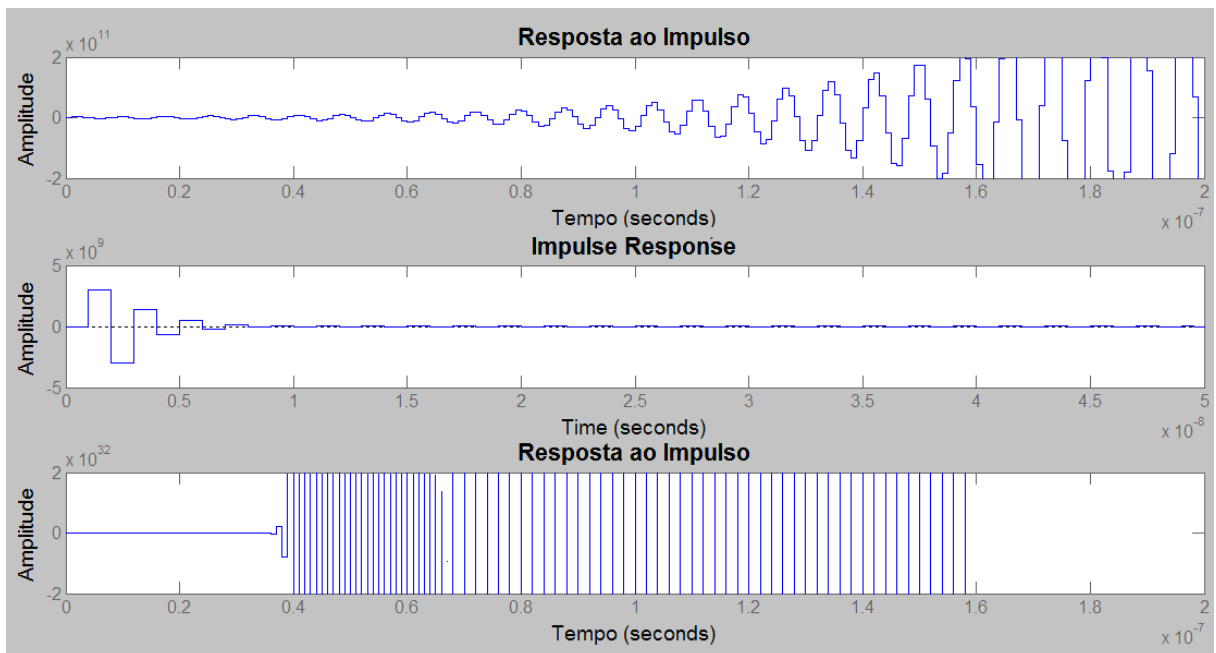


Figura 3.24 Respostas ao impulso do sistema 1 para $\lambda = 0,3$ (Primeiro) ; $\lambda = 0,95$ (Segundo) e $\lambda = 2$ (Terceiro).

Outra análise é o cálculo das respostas ao impulso para as três regiões de interesse, ou seja, $\lambda = 0,3$, $\lambda = 0,95$ e $\lambda = 2$. Assim obtemos o gráfico da Figura 3.24 e, como esperado, em $\lambda = 0,95$ o sistema é estável. Observe que a variação no ganho k do quantizador apenas alterará a região na qual o sistema é estável, não alterando a curva, pois o sistema de malha fechada da referência [7] fica do tipo apresentado na equação (3.9). Por exemplo, se $k=2$,

obter-se-á os mesmo resultado da Figura 3.21, para $\lambda = 0,15$; $\lambda = 0,475$ e $\lambda = 1$, ou seja, o formato do LGR não muda, só muda a região de estabilidade do sistema.

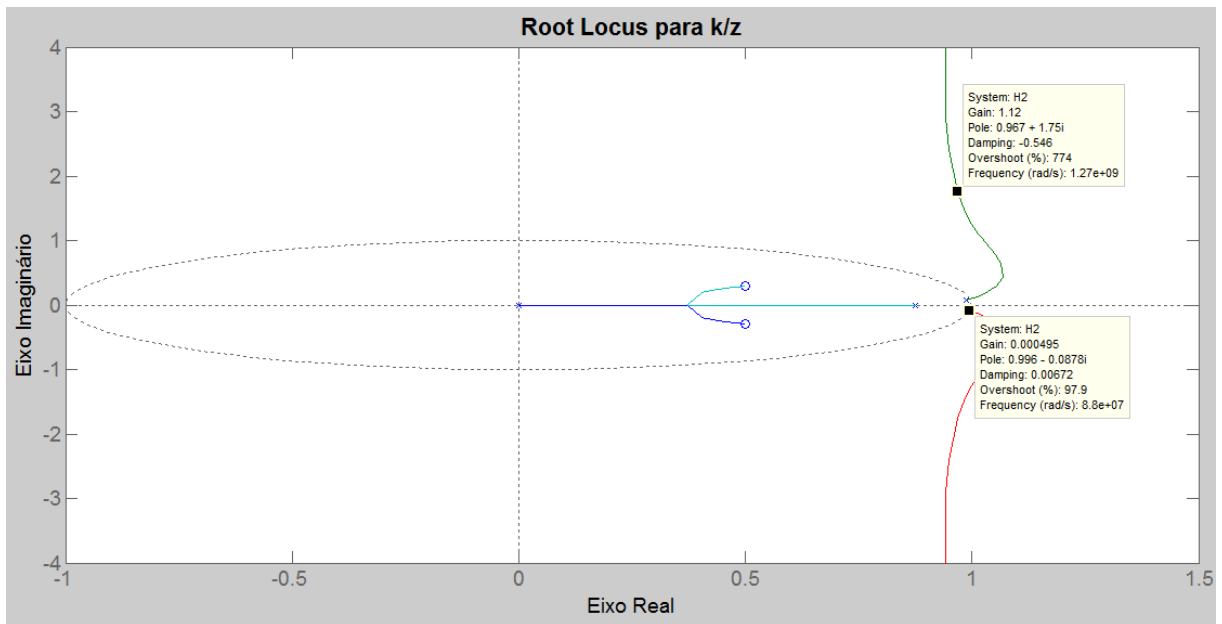


Figura 3.25 LGR para $k=k/z$.

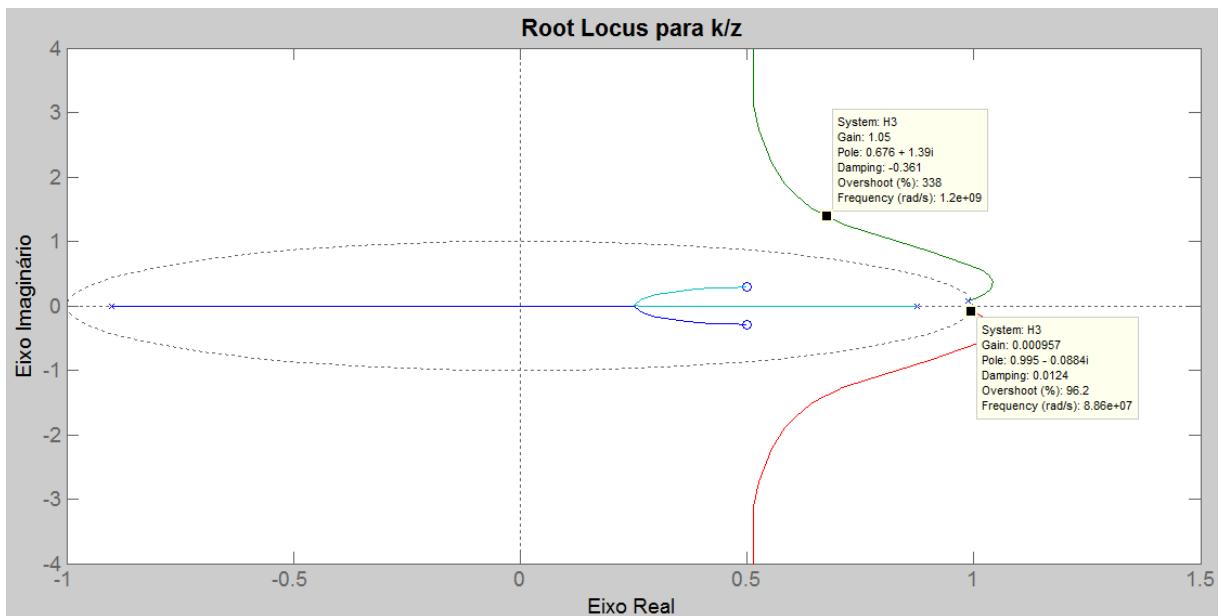


Figura 3.26 LGR para $k/(z+0,9)$

Tendo em vista o exposto, não é preciso calcular o LGR do sistema variando “k” já que obter-se-á uma resposta equivalente à já expressa anteriormente. Pois, como dito, variar “k” ou “λ” ou os dois não altera o formato da curva do lugar geométrico das raízes. Alterar “k” também não influenciará na localização dos zeros, pois, nesse sistema, a variação do ganho do quantizador – “k” – seria equivalente a variar um ganho DC na STF, não alterando, por isso, a posição dos zeros já calculados. Além disso, uma vez que existem estudos que modelam um comparador como um ganho com pólo, foi feito um estudo de estabilidade supondo esse modelo para o quantizador. Obtiveram-se respostas instáveis para os dois modelos: $k = k/z$ e $k = \frac{k}{z+0,9}$. Essas respostas eram esperadas, pois o LGR dos sistemas de malha aberta de

$\frac{k}{z}G(z)$ e $\frac{k}{z+0,9}G(z)$ são como os expressos na Figura 3.25 e na Figura 3.26. Note que o sistema só é estável para $\lambda \sim 0$, pois os pólos estão fora do círculo unitário.

Feitos esses estudos, pelos resultados obtidos, é possível chegar às seguintes conclusões: as duas teorias estudadas parecem equivalentes; é possível expandir a Teoria 2 para a Teoria 3, aparentemente.

3.6. ANÁLISES PARA OS SISTEMAS DA REFERÊNCIA [3]

As matrizes dadas pela referência [3], para o SISTEMA 2, são:

$$\mathbf{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2451 & 1 & 0 \\ 0,1256 & 0,5108 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B1} = \begin{bmatrix} 0,1847 \\ 0,0454 \\ 0,0232 \end{bmatrix} \mathbf{C1} = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{E1} = \begin{bmatrix} -0,1847 \\ -0,3093 \\ -0,6259 \end{bmatrix}$$

Para o SISTEMA 3, as matrizes de estado são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,569 \\ -0,3936 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,6940 \\ 0,0402 \\ 0,3226 \end{bmatrix} \mathbf{C} = [0,3363 \quad -0,322 \quad 0,7917] \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -0,5545 \\ +0,5834 \\ -0,3218 \end{bmatrix}$$

Nos dois sistemas a matriz \mathbf{D} é nula.

Dito isso, é importante perceber que, à princípio, não é possível fazer o estudo comparativo entre a Teoria 1, a Teoria 2 e a Teoria 3 porque os sistemas estudados pela referência [3] não têm uma realimentação trivial ($\mathbf{E}=[-1; 0; 0]$). Poderiam ser feitos os estudos se alterarmos a matriz \mathbf{E} , porém isso mudaria o sistema. No entanto, uma possível solução seria analisar a possibilidade de se representar os sistemas acima por um com matriz $\mathbf{E}=[-1; 0; 0]$.

A ideia inicial é pegar a STF calculada pela teoria da referência [3] e buscar um sistema $\mathbf{A3}$, $\mathbf{B3}$, $\mathbf{C3}$, $\mathbf{D3}$ equivalente ao sistema \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} . Dado que:

$$\mathbf{H1}(z) = \mathbf{kC}[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{kEC})]^{-1}\mathbf{B}$$

Supondo que exista um sistema, tal que:

$$\mathbf{H1}(z) = \frac{\mathbf{kG1}(z)}{\mathbf{1} + \mathbf{kG1}(z)}$$

, então, se o sistema H1 for inversível, podemos afirmar que:

$$\mathbf{G1}(z) = \frac{\mathbf{H1}(z)}{\mathbf{k} - \mathbf{kH1}(z)}$$

Sendo assim, o sistema, que antes era representado por uma realimentação complexa, pode ser representado por um modelo equivalente com uma realimentação simples. Teoricamente, um estudo de estabilidade de G1 seria equivalente ao estudo de estabilidade de H1. A vantagem dessa representação é que, como o sistema G1 é composto por uma realimentação simples, é possível usar a teoria clássica da referência [10] para o estudo de estabilidade.

Apesar disso, quando se tentou calcular G1, houve um erro, aparentemente de aproximação numérica, fato que impossibilitou uma análise precisa desses dados. Por isso, esse trabalho focará apenas em uma análise de resposta ao impulso para testar a estabilidade dos sistemas 2 e 3. O que será feito é pegar a função de transferência do sinal – calculada pela Teoria 2 e pela Teoria 3 – e analisar seu comportamento quando entramos com um impulso no sistema, pois assim poderemos tirar algumas conclusões quanto à estabilidade ou não dos SISTEMAS 2 e 3. Ou seja, será utilizada a equação expressa abaixo e será analisada a resposta ao impulso delas.

$$STF = kC[zI - (A + kEC)]^{-1}B \quad (2.21)$$

$$STF = \left(\frac{k}{z+p}\right)C \left[zI - \left(A + \left(\frac{k}{z+p}\right)EC\right)\right]^{-1}B \quad (3.10)$$

Dito isto, dado o modelo convencional – SISTEMA 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,2451 & 1 & 0 \\ 0,1256 & 0,5108 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0,1847 \\ 0,0454 \\ 0,0232 \end{bmatrix} C = [0 \quad 0 \quad 1] E = \begin{bmatrix} -0,1847 \\ -0,3093 \\ -0,6259 \end{bmatrix}$$

, calculou-se a resposta ao impulso para $k=1, 2, 3,$ e 4 como mostrado na Figura 3.27. Observou-se que para $k > 4$ o sistema fica instável. Além disso, percebeu-se que à medida que aumentamos o ganho (que representa o quantizador) a resposta ao impulso sofre uma pequena amortização antes de se tornar instável.

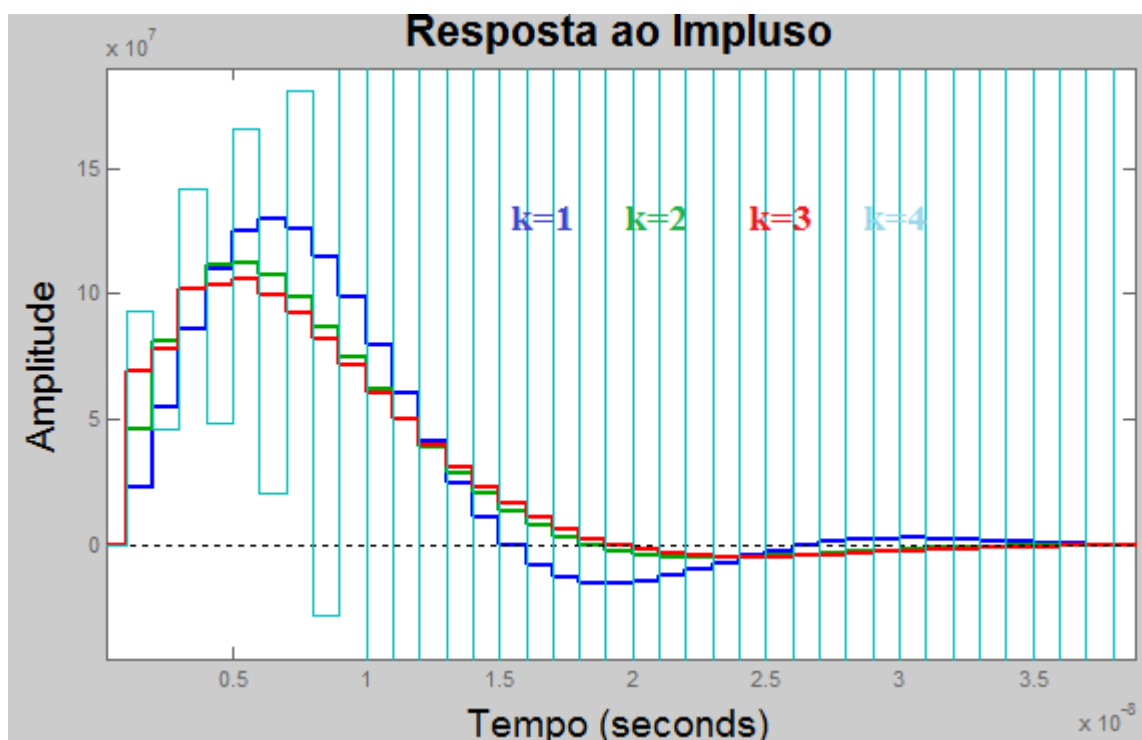


Figura 3.27 Resposta ao impulso do SISTEMA 2, com $k=1, k=3$ e $k=4$.

Para o SISTEMA 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,569 \\ -0,3936 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -0,6940 \\ 0,0402 \\ 0,3226 \end{bmatrix} C = [0,3363 \quad -0,322 \quad 0,7917] E = \begin{bmatrix} -0,5545 \\ +0,5834 \\ -0,3218 \end{bmatrix}$$

, obtemos resultados similares ao anterior, como mostrado abaixo.

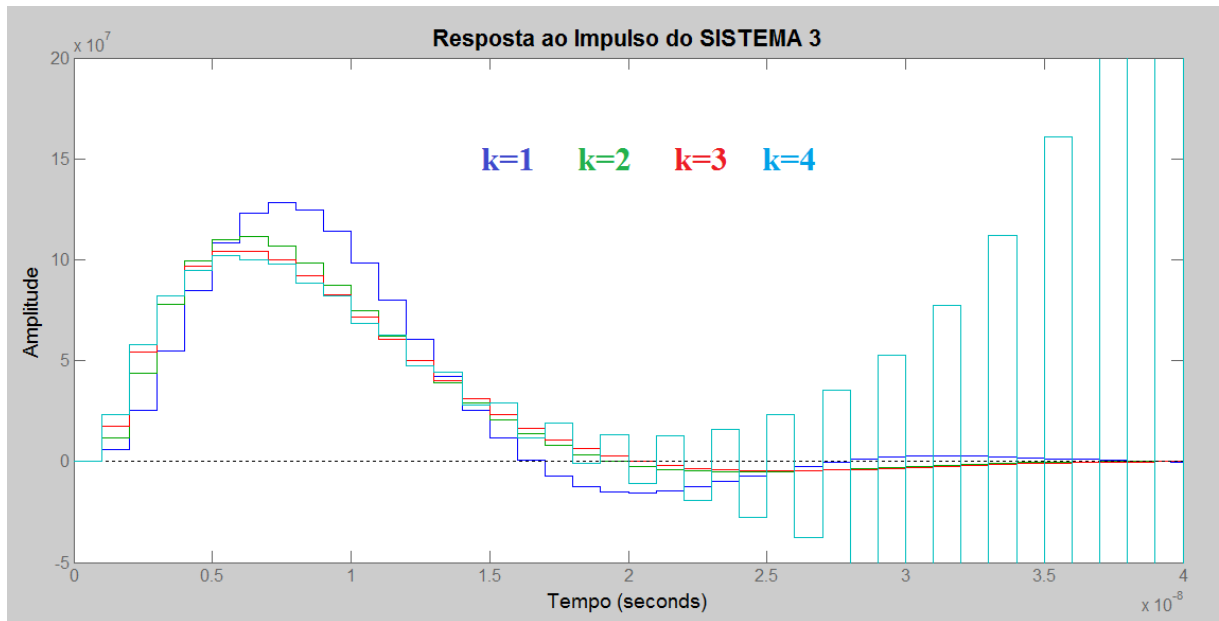


Figura 3.28 Resposta ao impulso do SISTEMA 3, com $k=1$, $k=2$, $k=3$ e $k=4$.

É possível observar que para $k=4$ o SISTEMA 3 demora um pouco mais para ficar instável se comparado ao SISTEMA 2 como mostrado na Figura 3.29.

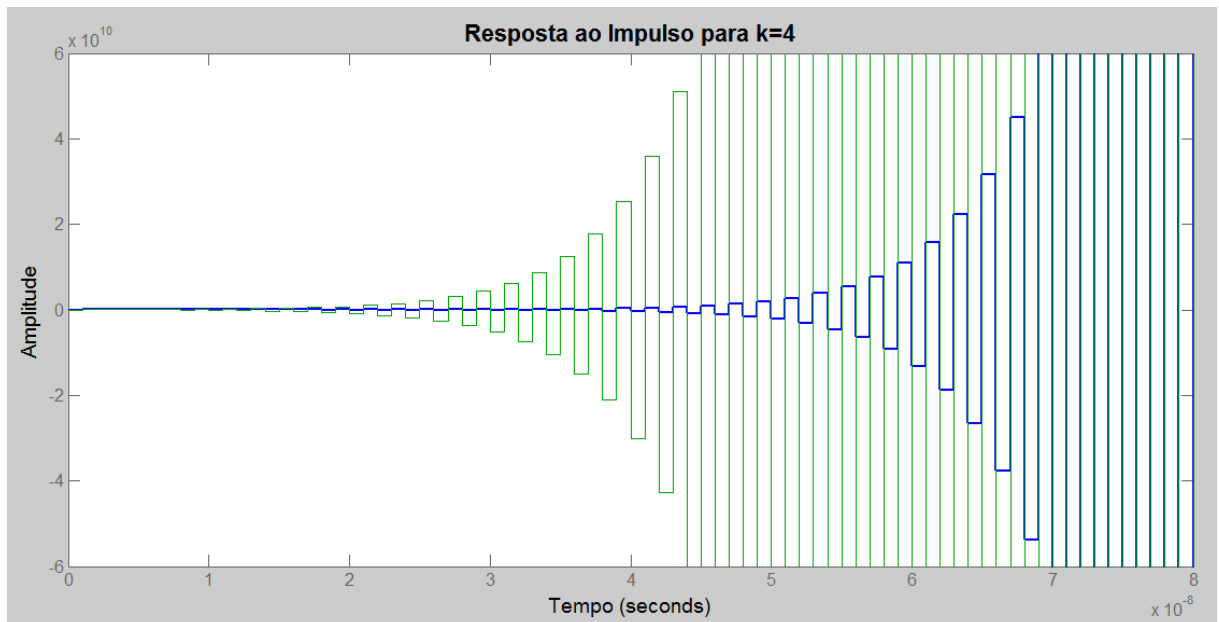


Figura 3.29 Resposta ao impulso com $k=4$ para o SISTEMA 2 e 3.

Conclui-se que, em uma análise matemática inicial, o SISTEMA 3 é realmente mais estável que o sistema 2. Observe que esse trabalho utilizou um método diferente do da referência [3]: enquanto a referência diminuiu a norma espectral da matriz do sistema para chegar a

essa conclusão, esse trabalho chegou a essa conclusão utilizando a resposta ao impulso dos sistemas.

Depois disso, foi feito um estudo da Teoria 3 para esses sistemas. Ou seja, além do modelo no qual o quantizador é representado por um ganho, acrescentou-se um modelo estendido cujo quantizador é representado por um ganho com um pólo em zero e por um ganho com um pólo em 0,8 (alta frequência). Os resultados obtidos indicam que os dois sistemas continuam estáveis. **No entanto, ao acrescentarem-se os pólos nos sistemas, os mesmos ficam menos amortizados.**

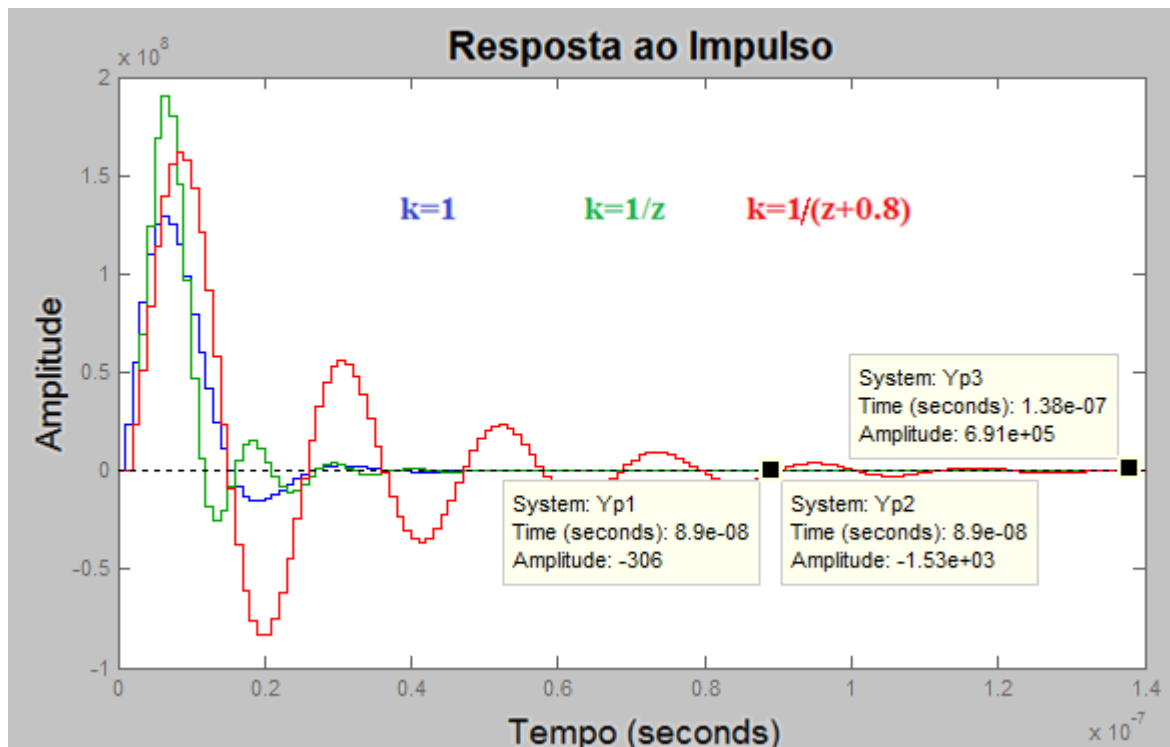


Figura 3.30 Resposta ao impulso do SISTEMA 2 para $k=1$, $k=(1/z)$ e $k=[1/(z+0.8)]$, Yp1, Yp2 e Yp3, respectivamente.



Figura 3.31 Resposta ao impulso do SISTEMA 3 para $k=1$, $k=(1/z)$ e $k=[1/(z+0.8)]$

Comparando os dois sistemas para $k=1$, temos os resultados expressos pela Figura 3.32. Observe que para o Sistema 3, obteve-se uma resposta um pouco mais lenta e com um pouco mais de amortização que o SISTEMA 2. Isso pode indicar que o SISTEMA 3 tende a ser mais estável que o SISTEMA 2, mas é o resultado para $k=4$ que nos revela mais claramente essa tendência.

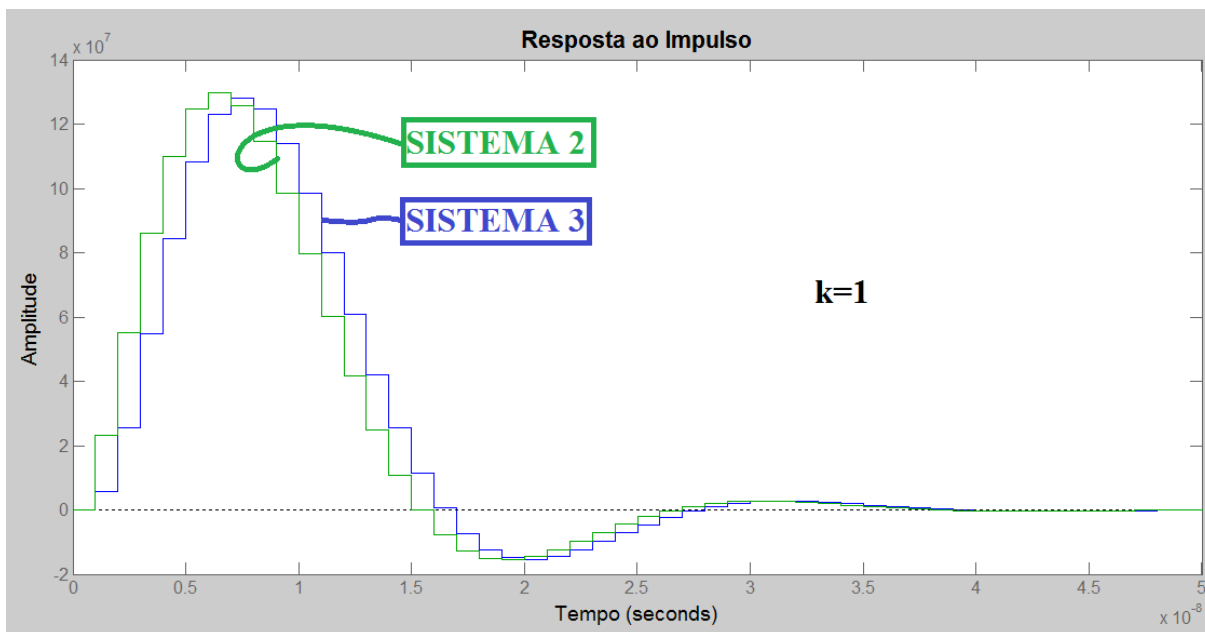


Figura 3.32 Resposta ao impulso para $k=1$ dos sistemas 2 e 3.

Feitos os estudos da resposta ao impulso das funções de transferência do sinal dos sistemas 2 e 3. Partiu-se para uma análise da NTF dos sistemas. Utilizando a Teoria 3, obtemos as repostas para o SISTEMA 2 como expressas na Figura 3.33. **Observe que, à medida que se coloca pólos e aumenta-se a frequência de onde esses pólos estão localizados, o sistema fica menos amortizado, resultado bem parecido com o da análise da STF obtida anteriormente.**

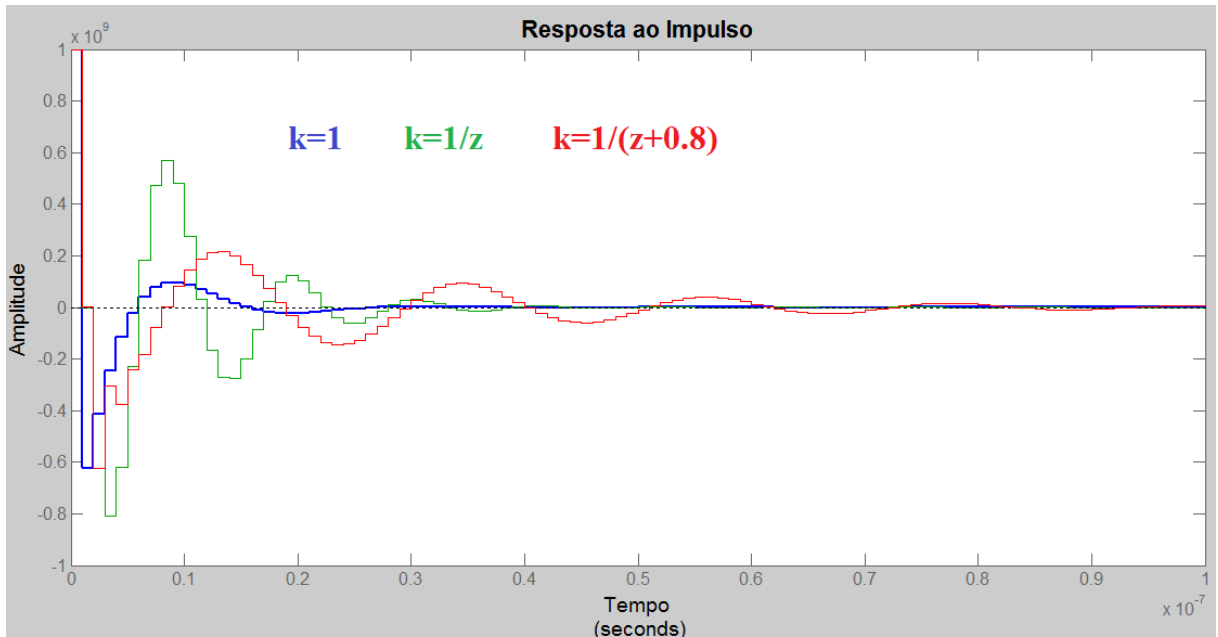


Figura 3.33 Resposta ao impulso do SISTEMA 2 utilizando as Teorias 2 e 3, para k igual à 1, $(1/z)$ e $[1/(z+0,8)]$.

Para o SISTEMA 3, obteve-se resultados equivalentes aos do SISTEMA 2, porém ao se introduzir um pólo de alta frequência houve uma variação significativa na resposta ao impulso da NTF.

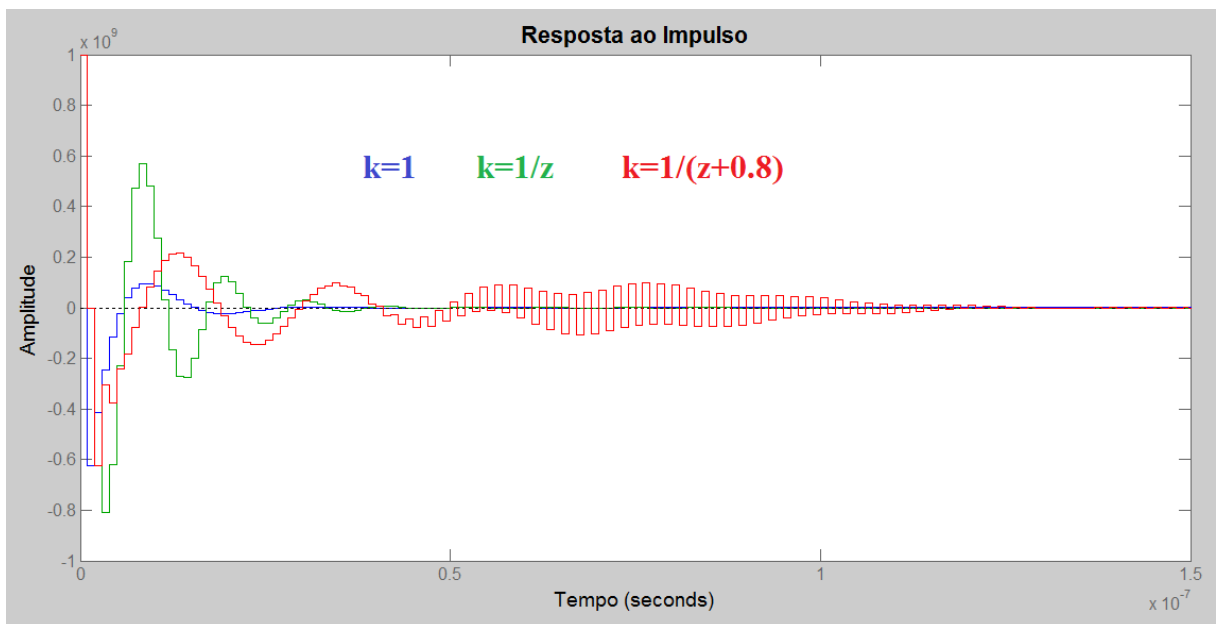


Figura 3.34 Resposta ao impulso da NTF para o SISTEMA 3.

Para se obter uma análise mais precisa, comparou-se a NTF dos dois sistemas para o modelo com pólo em alta frequência. Observe que o Sistema 2 parece ter uma resposta mais comportada ao impulso do que o Sistema 3. Podemos concluir com isso que a NTF do Sistema 2 se mostra mais estável que a do Sistema 3.

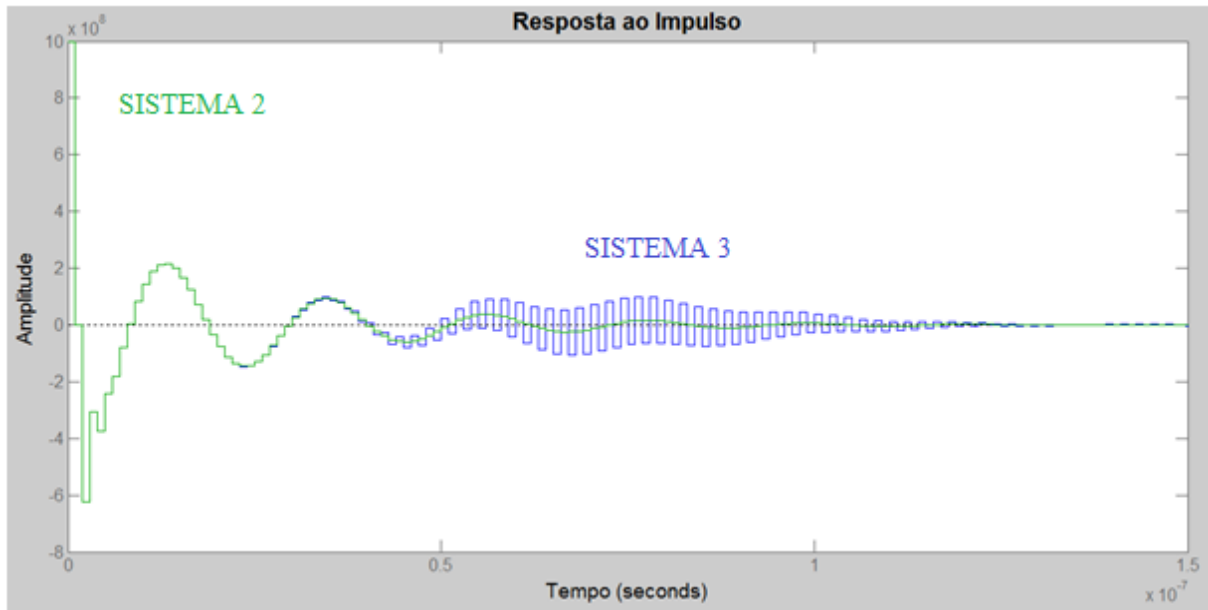


Figura 3.35 Respostas para $k=[1/(z+0,8)]$ dos sistemas 2 e 3.

Dado esse resultado para alta frequência, calculou-se o resultado para o pólo em 0,85 e obteve-se o seguinte resultado para os dois sistemas.

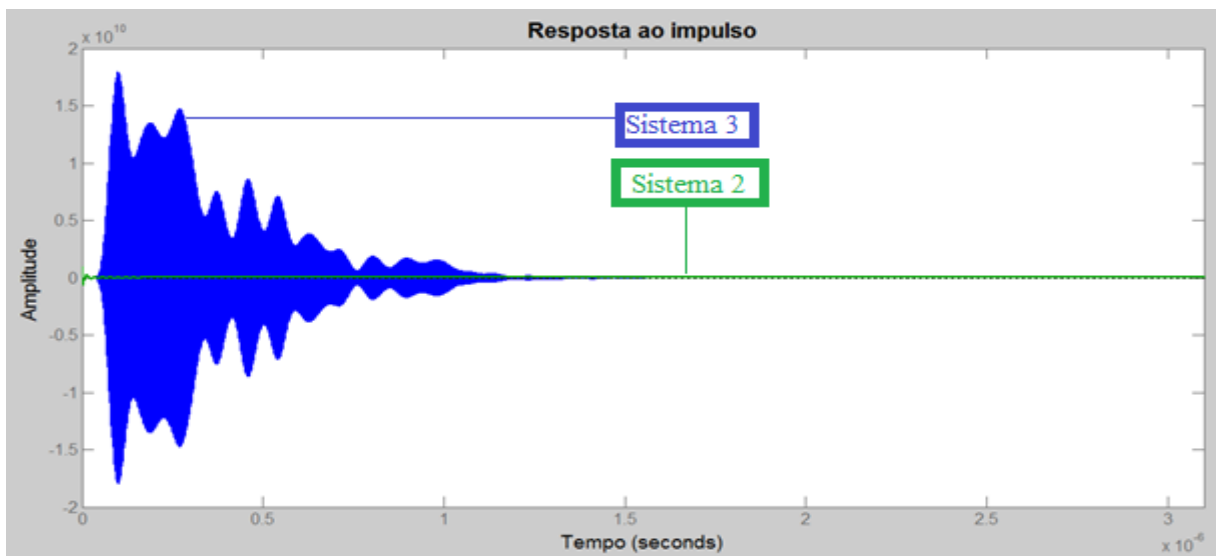


Figura 3.36 Respostas para $k=[1/(z+0,85)]$ dos sistemas 2 e 3

Observe que novamente o SISTEMA 3 obteve um resultado bem inferior, no que se refere à estabilidade do que SISTEMA 2. Dito isso, duas hipóteses foram levantadas para esse resultado, já que se esperava uma resposta melhor para o SISTEMA 3: a primeira é que o modelo proposto pela fonte [3] está mais sujeito ao surgimento de ciclos limite; a segunda é que houve novamente erros de aproximação numérica, dado que as NTFs dos SISTEMA 2 e 3 para $k=[1/(z+0.85)]$ são como as mostradas abaixo.

Para o SISTEMA 2:

$$\frac{z^7 + 0.4 z^6 - 2.865 z^5 - 1.348 z^4 + 2.758 z^3 + 1.468 z^2 - 0.8905 z - 0.522}{z^7 + 0.4 z^6 - 2.239 z^5 - 0.8231 z^4 + 1.852 z^3 + 0.7253 z^2 - 0.5339 z - 0.2347}$$

Para o SISTEMA 3:

$$z^{21} + 12.3 z^{20} + 67.64 z^{19} + 214.4 z^{18} + 410.3 z^{17} + 402.5 z^{16} - 112.7 z^{15} \\ - 994.5 z^{14} - 1480 z^{13} - 905 z^{12} + 400.1 z^{11} + 1341 z^{10} + 1247 z^9 + 476 z^8 \\ - 197.1 z^7 - 405 z^6 - 295 z^5 - 133.6 z^4 - 40.55 z^3 - 8.113 z^2 - 0.9751 z \\ - 0.05365$$

$$z^{21} + 12.3 z^{20} + 68.27 z^{19} + 222.4 z^{18} + 456.8 z^{17} + 565.4 z^{16} + 263.8 z^{15} \\ - 410.7 z^{14} - 916.7 z^{13} - 715.2 z^{12} + 55.41 z^{11} + 690.5 z^{10} + 715.1 z^9 \\ + 307.7 z^8 - 71.87 z^7 - 198.1 z^6 - 147.5 z^5 - 66.31 z^4 - 19.78 z^3 - 3.866 z^2 \\ - 0.452 z - 0.02411$$

Observe que NTF do SISTEMA 3 é de uma ordem muito maior. Se fizermos uma análise da posição dos pólos dos dois sistemas temos:

Para o SISTEMA 2:

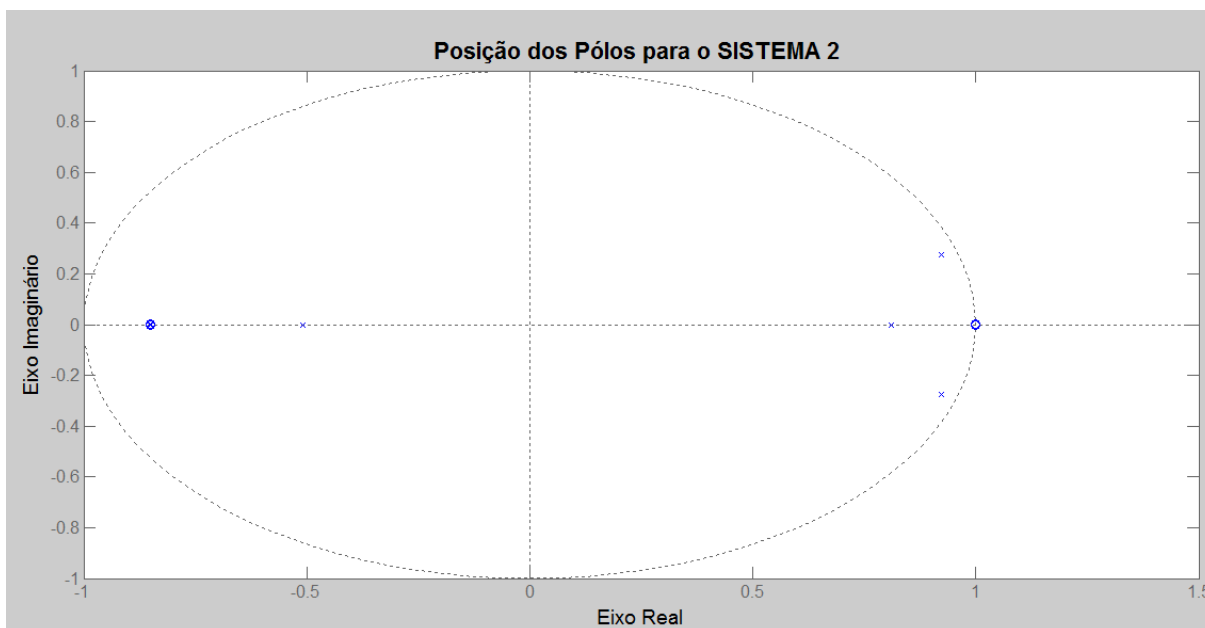


Figura 3.37 Posição dos pólos para o SISTEMA 3 com $k=1/(z+0,85)$ (Acima); Zoom no local do pólo 0,85. (Abaixo)

Observe que deveria existir apenas um pólo em 0,85, fato que corrobora a hipótese de que houve erro de aproximação numérica no cálculo da NTF do SISTEMA 2.

Para o SISTEMA 3 o erro é ainda maior como mostrado na equação de 21ª ordem e na figura seguinte. Acredita-se que deveria existir apenas um pólo em 0,85 e que os outros – ao redor – deveriam se anular. Isso indica que a hipótese na qual existe um erro de aproximação numérica é mais forte do que a do surgimento de um ciclo limite.

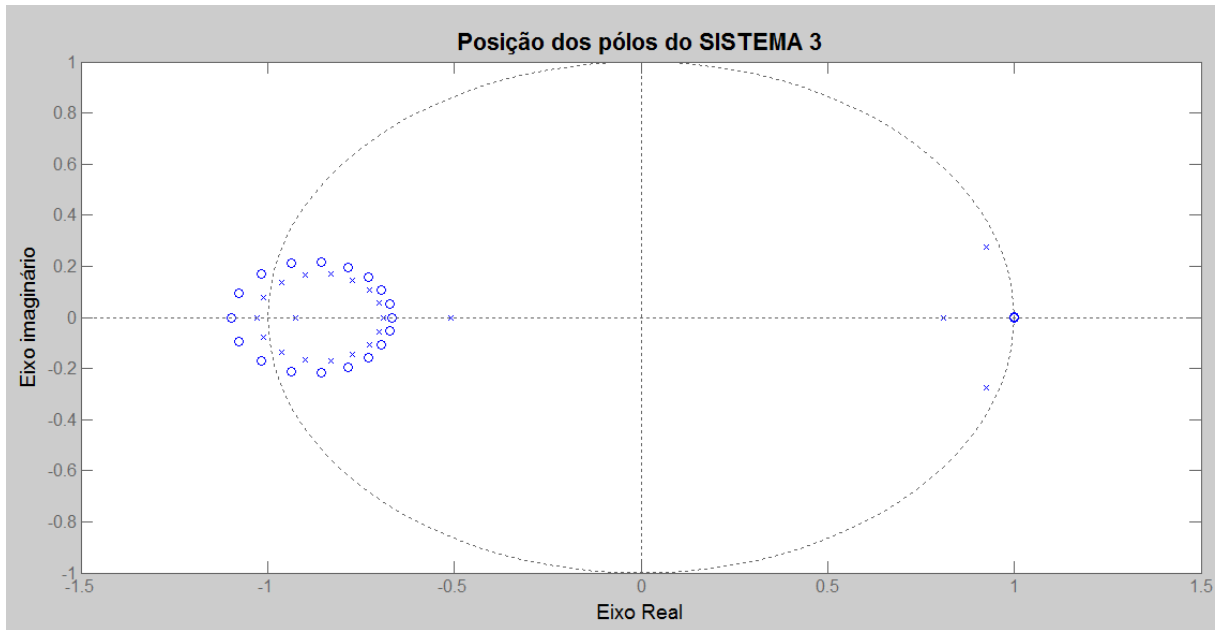


Figura 3.38 Posição dos pólos para o SISTEMA 3 com $k=[1/(z+0,85)]$

Dito isso não se pode chegar a uma conclusão definitiva analisando o sistema para $k=[1/(z+0,85)]$ ou para $k=[1/(z+0,8)]$, por isso comparando o sistema com um pólo em 0,5, temos:

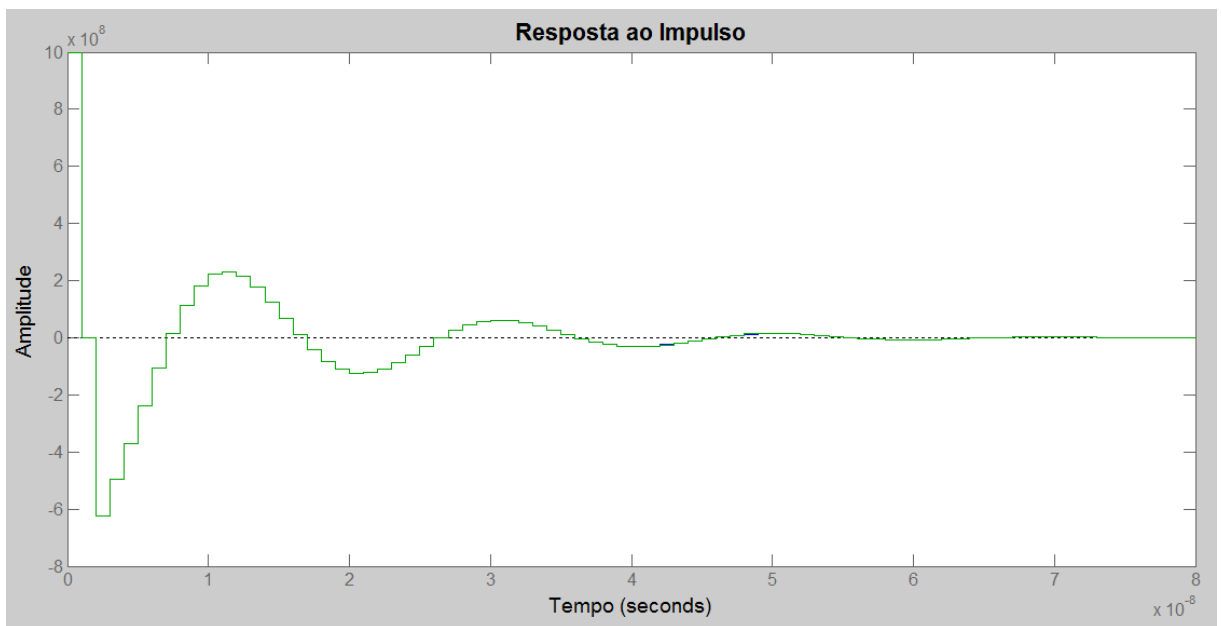


Figura 3.39 Resposta ao Impulso pra $k=[1/(z+0,5)]$ para os sistemas 2 e 3.

Observe que na Figura 3.39 obteve-se resultados idênticos para os dois sistemas com um pólo em 0,5. Pode-se, então, concluir que o SISTEMA 3 aparentemente não altera a função de transferência do ruído do SISTEMA 2 e que a hipótese de que houve um erro de aproximação numérica parece correta.

4. CONCLUSÕES

Dados os estudos e análises apresentados nesse trabalho, pode-se chegar às seguintes conclusões: aparentemente é possível afirmar que a Teoria 1 e a Teoria 2 são de fato equivalentes, como afirmado pela referência [2], pois apesar dos aparentes erros de aproximação numérica obteve-se resultados equivalente em todos as análises; em uma primeira análise parece ser possível expandir a Teoria 2 para a Teoria 3, porém para se ter um confirmação exata é preciso fazer um estudo analítico das duas Teorias para provar sua equivalência matematicamente; os resultados obtidos no Sistema 1 foram iguais aos obtidos pela referência [7], porém não foi possível calcular o ciclo limite citado pela referência com o modelo matemático das Teorias 1, 2 e 3; e os resultados obtidos para os Sistemas 2 e 3 indicam que o Sistema 3 parece ser melhor no que se refere a estabilidade do que o Sistema 2, como afirmado pela referência [3].

Dito isto, cabe ressaltar que as análises feitas nessa monografia foram exclusivamente matemáticas. Por isso, as seguintes propostas são feitas para análises futuras: tentar resolver o aparente problema de aproximação numérica, para se ter certeza das conclusões obtidas nesse trabalho. A idéia inicial é fazer um estudo mais preciso das fórmulas utilizadas no MatLab e como elas são calculadas e, para isso, seguem anexos os códigos utilizados; fazer um estudo em nível de circuito para os Sistemas 2 e 3, a fim de se obter os mesmos resultados obtidos pela referência [3]; implementar os Sistemas 2 e 3 fisicamente para comparar os resultados teóricos com os resultados na prática; e fazer uma análise do Sistema [3] utilizando transistores com a tecnologia de nanotubos de carbono, dado que, teoricamente, essa tecnologia melhora o desempenho do transistor, aumentando sua faixa de frequência de operação – característica interessante para ADC em sobre amostragem.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAKER, R. Jacob. **CMOS: circuit design, layout, and simulation**. Wiley-IEEE Press, 2011.
- [2] SCHREIER, Richard; TEMES, Gabor C. **Understanding delta-sigma data converters**. Piscataway, NJ: IEEE press, 2005..
- [3] BUDSABATHON, Chatree; NISHIHARA, Akinori. Design of high order stable delta sigma modulator with state space approach. In: **TENCON 2004. 2004 IEEE Region 10 Conference**. IEEE, 2004. p. 523-526..
- [4] KATSUHIKO, Ogata. **Modern Control Engineering** - 5th Edition. 2010.
- [5] NISE, NORMAN S. Engenharia de Sistema de Controle, 3a edição. **Editora LTC, Rio de Janeiro**, 2002..
- [6] ADAMS, Robert W. Design and implementation of an audio 18-bit analog-to-digital converter using oversampling techniques. **Journal of the Audio Engineering Society**, v. 34, n. 3, p. 153-166, 1986.
- [7] VAN ENGELEN, Jurgen. **Bandpass sigma delta modulators: stability analysis, performance and design aspects**. Springer, 1999.
- [8] SASTRY, Shankar. **Nonlinear systems: analysis, stability, and control**. New York: Springer, 1999. Vol. 10.
- [9] KUO, Tai-Haur; CHEN, Kuan-Dar; CHEN, Jhy-Rong. Automatic coefficients design for high-order sigma-delta modulators. **Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on**, v. 46, n. 1, p. 6-15, 1999.
- [10] OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. 2nd Edition. 1995.
- [11] REISS, Joshua D. Understanding Sigma-Delta Modulation: The Solved and Unsolved Issues. **Journal of the Audio Engineering Society**, v. 56, n. 1/2, p. 49-64, 2008.
- [12] DE MEDEIROS, JOSÉ EDIL GIMARÃES. [Http://blog.joseedil.com](http://blog.joseedil.com); Data: 01/02/2014.

ANEXOS

Códigos Utilizados

```
clearall
close all
clc

T=input('Qual o tempo em segundos de amostragem:');
z=tf('z',T);



---



% Sistema 1
Gz=((3*z^2)-(3*z)+1)/((z-0.95)^3)
b=[3 -3 1];
a=[1 -2.85 +2.708 -.8574];
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a)
E1=[-.95; 0; 0]; % lambda estável
E2=[-.3; 0; 0]; % lambda no ciclo limite
E3=[-2; 0; 0]; % lambda estável
zI=[z 0 0; 0 z 0; 0 0 z];



---



% Sistema 3
D=0;
C=[.3363 -.322 .7817];
B=[-.694; .0402; 0.3226];
A=[1 0 .569; -.3936 1 -.476; 0 0 1];
E1 =[-.5545; .5834; -.3218];
% E1=[-1; 0; 0]; % quando for usar o modelo modificado
zI=[z 0 0; 0 z 0; 0 0 z];



---



% Sistema 2
D=0;
C=[0 0 1];
B=[.1847; .0454; .0232];
A=[1 0 0; .2451 1 0; 0.1256 0.5108 1];
E1 =[-.1847; -.3093; -.6259];
zI=[z 0 0; 0 z 0; 0 0 z];



---



k=input('Qual o ganho k:');
p=input('Qual a posição do polo:');
k2=2;

H1=(C/[zI-A]*B)+D;
H2=(k/z)*H1;
H3=(k/(z+p))*H1;
H11= H1/(1+H1);
H22= H2/(1+H2);
H33= H3/(1+H3);
HN1= 1/(1+H1);
HN2= 1/(1+H2);
HN3= 1/(1+H3);
Yp1= (k)*(C/(zI-(A+k*E1*C)))*B;
Yp2= (k/z)*(C/(zI-(A+(k/z)*E1*C)))*B;
Yp3= (k/(z+p))*(C/(zI-(A+(k/(z+p))*E1*C)))*B;
```

```

uu=(zI-A);
uuu=(zI-(A+k*E1*C));
uuu2=(zI-(A+(k/z)*E1*C));
uuu3=(zI-(A+(k/(z+p))*E1*C));
detuu = [(uu(1,1)*uu(2,2)*uu(3,3))+...
          (uu(1,2)*uu(2,3)*uu(3,1))+...
          (uu(1,3)*uu(2,1)*uu(3,2))-...
          (uu(1,3)*uu(2,2)*uu(3,1))-...
          (uu(1,1)*uu(2,3)*uu(3,2))-...
          (uu(1,2)*uu(2,1)*uu(3,3))];
detuuu = [(uuu(1,1)*uuu(2,2)*uuu(3,3))+...
          (uuu(1,2)*uuu(2,3)*uuu(3,1))+...
          (uuu(1,3)*uuu(2,1)*uuu(3,2))-...
          (uuu(1,3)*uuu(2,2)*uuu(3,1))-...
          (uuu(1,1)*uuu(2,3)*uuu(3,2))-...
          (uuu(1,2)*uuu(2,1)*uuu(3,3))];
detuuu2 = [(uuu2(1,1)*uuu2(2,2)*uuu2(3,3))+...
          (uuu2(1,2)*uuu2(2,3)*uuu2(3,1))+...
          (uuu2(1,3)*uuu2(2,1)*uuu2(3,2))-...
          (uuu2(1,3)*uuu2(2,2)*uuu2(3,1))-...
          (uuu2(1,1)*uuu2(2,3)*uuu2(3,2))-...
          (uuu2(1,2)*uuu2(2,1)*uuu2(3,3))];
detuuu3 = [(uuu3(1,1)*uuu3(2,2)*uuu3(3,3))+...
          (uuu3(1,2)*uuu3(2,3)*uuu3(3,1))+...
          (uuu3(1,3)*uuu3(2,1)*uuu3(3,2))-...
          (uuu3(1,3)*uuu3(2,2)*uuu3(3,1))-...
          (uuu3(1,1)*uuu3(2,3)*uuu3(3,2))-...
          (uuu3(1,2)*uuu3(2,1)*uuu3(3,3))];

NTF=detuu/detuuu
NTF2=detuu/detuuu2
NTF3=detuu/detuuu3

```

```
%Para o Sistema 1
```

```

Yp12= (k)*(C/(zI-(A+k*E2*C)))*B;
Yp13= (k)*(C/(zI-(A+k*E3*C)))*B;
Yp22=(k/z)*H1/(1+(k/z)*H1);
Yp33=(k/(z+p))*H1/(1+(k/(z+p))*H1);

```

```

% Substituir pelo desejado.
% pole(H1)
% zero (H1)
% bode (H1)
% fim1 = allmargin(H1)
% impulse(H1)
% pzmap(H1,'r') %geracao do diagrama de polos e zeros do sistema
rlocus(H22)

```

```

impulse(NTF)
holdon
impulse(NTF2)
impulse(NTF3)
holdoff

```