

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Eletrônica

Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta

Autor: Guilherme Miranda da Silva
Orientador: Prof Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Brasília, DF
2015



Guilherme Miranda da Silva

Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Brasília, DF

2015

Guilherme Miranda da Silva

Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta/ Guilherme Miranda da Silva. – Brasília, DF, 2015-
88 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2015.

1. Otimização, Dynamic Range, FDR, Modulador Sigma Delta, STF, NTF.
2. Espaço de Estados, Lyapunov. I. Prof Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta

CDU 02:141:005.6

Guilherme Miranda da Silva

Otimização de Dynamic Range e Análise de Espaço de Estados para um Modulador Sigma Delta

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 1 de Dezembro de 2015:

**Prof Dr. Sandro Augusto Pavlik
Haddad**
Orientador

**Prof. Dr. Suélia de Siqueira Rodrigues
Fleury Rosa**
Convidado 1

**Prof. Dr. Daniel Mauricio Muñoz
Arboleda**
Convidado 2

Brasília, DF
2015

Aos meus pais e amigos.

*"O pessimista queixa-se do vento,
o otimista espera que ele mude
e o realista ajusta as velas".
(Willian George Ward)*

Resumo

Um modulador Sigma Delta é composto dos filtros passa baixa e passa alta. O intuito da otimização de *Dynamic Range* desses filtros é obter melhores valores de ganhos no modelo de espaço de estados e poder implementar um circuito com menos elementos. Um valor considerado ótimo de *Dynamic Range* determina um maior *output swing* e diminui o ruído vindo dos blocos do integrador.

Palavras-chaves: Modulador sigma delta, Filtro passa baixa, Lyapunov, Otimização, Ortonormal, Space states, Conversor A/D, Espaço de estados, Circuitos integrados.

Abstract

A Sigma Delta modulator consists of the low pass and high pass filters, Dynamic Range optimization of the order of these filters is to get better gains values in the state space model and be able to implement a circuit with fewer elements. A good value of Dynamic Range sets a higher output swing and decreases the noise coming from the integrator blocks.

Key-words: Sigma delta converter, Optimization, Low pass, High pass, Lyapunov, Ortonormal, Space states, Integrated Circuits.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fluxo do trabalho utilizando a metodologia <i>top-down</i>	19
Figura 2 – Diagrama de blocos de um modulador sigma delta (CUBAS, 2013).	21
Figura 3 – Quantizador e seu modelo linear (CUBAS, 2013).	22
Figura 4 – Passos do <i>oversampling</i> (CUBAS, 2013).	23
Figura 5 – Modulador sigma delta e seu modelo linear (CUBAS, 2013).	24
Figura 6 – Amplitudes de <i>STF</i> e <i>NTF</i> típicas um modulador passa baixa (BAJ- DECHI; HUIJSING, 2004).	25
Figura 7 – Modulador sigma delta de primeira ordem (CARUSONE; MARTIN, 2011).	26
Figura 8 – Modulador sigma delta de segunda ordem (CARUSONE; MARTIN, 2011).	26
Figura 9 – Amplitude do <i>NTF</i> <i>versus</i> resolução do modulador (BAJDECHI; HUIJ- SING, 2004).	27
Figura 10 – Diagrama de bloco baseado no modulador sigma delta de primeira or- dem (REYNOLDS, 2006) (SCHREIER, 2005).	27
Figura 11 – Diagrama de blocos representando o sistema linear da equação 3.1 (RO- CHA, 2003).	29
Figura 12 – Forma canônica controlável (HADDAD; SERDIJN, 2008).	31
Figura 13 – Diagrama de blocos para o observador (ASTROM, 2006).	32
Figura 14 – Forma canônica observável (HADDAD; SERDIJN, 2008).	34
Figura 15 – (a) Elipsóide de controlabilidade e (b) elipsóide de observabilidade (REYNOLDS, 2006).	35
Figura 16 – Diagrama de fluxo para otimização de <i>FDR</i> para Sigma Delta.	41
Figura 17 – Diagrama da Síntese de <i>STF/NTF</i> para otimização de <i>FDR</i>	43
Figura 18 – Diagrama de Bloco de um Modulador Sigma Delta. Adaptado de (Ri- chard E. Schreier, 2015).	44
Figura 19 – Representação do filtro em espaço de estados do Modulador Sigma Delta. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).	46
Figura 20 – Diagrama da topologia CIFB de terceira ordem. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).	48
Figura 21 – Polos e zeros do <i>NTF</i>	50
Figura 22 – Resposta do Sinal no Domínio do Tempo.	51
Figura 23 – Saída em PSD ilustrando um <i>SNR</i> de 55.3[dB].	52

Figura 24 – Simulação da entrada do sinal pelo SNR.	53
Figura 25 – Diagrama da topologia CIFF de terceira ordem. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).	54
Figura 26 – <i>FDR versus</i> Ordem da função.	56
Figura 27 – (a) e (b) Interpretação geométrica em 2d dos <i>gramians</i>	58
Figura 28 – (a) e (b) Interpretação geométrica em 2d dos <i>gramians</i>	58
Figura 29 – (a) e (b) Interpretação geométrica em 3d dos <i>gramians</i>	59
Figura 30 – <i>FDR</i> por ordem da função de um filtro do tipo <i>Chebyshev</i>	60
Figura 31 – <i>FDR versus</i> ordem da função de um filtro do tipo <i>Butterworth</i>	61
Figura 32 – Gráfico comparando diversas decomposições matriciais em relação espaço de estados ótimo.	62
Figura 33 – (a) Gramian K e (b) Gramian Kw com sinal otimizado.	69
Figura 34 – (a) Gramian W e (b) Gramian Ww com ruído minimizado.	69
Figura 35 – (a) Gramian Kw e (b) Gramian Ww	77
Figura 36 – Diagrama indicado para as matrizes ótimas do $ntfc_{cifb}$	78
Figura 37 – Saída dos integradores para uma topologia CIFB de segunda ordem.	80
Figura 38 – Saída dos integradores utilizando o <i>DNS</i>	81

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação e Justificativa	17
1.2	Objetivo principal	18
1.3	Objetivos Específicos	18
1.4	Metologia	19
1.5	Estrutura do trabalho	19
2	MODULADOR SIGMA DELTA	21
2.1	Ruído de quantização	21
2.2	Relação sinal ruído e <i>dynamic range</i>	22
2.3	Conversores com <i>oversampling</i>	23
2.4	Conversores <i>oversampling</i> com <i>noise shaping</i>	24
2.5	<i>Noise shaping</i> de primeira ordem	25
2.5.1	<i>Noise shaping</i> de segunda ordem	26
2.6	Otimização em STF e NTF	27
3	MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A OTIMIZAÇÃO DO <i>DYNAMIC RANGE</i>	29
3.1	Modelo de espaço de estados	29
3.2	Controlabilidade e Observabilidade	29
3.2.1	Decomposição matricial	30
3.2.2	Forma controlável canônica	30
3.2.3	Forma observável canônica	32
3.3	<i>Gramians</i> de Controlabilidade e Observabilidade	34
3.4	Equação de <i>Lyapunov</i>	35
3.5	Outras decomposições matriciais	36
4	OTIMIZAÇÃO DO <i>DYNAMIC RANGE</i>	37
4.1	Transformação do espaço de estados	37
4.2	Otimização utilizando o <i>gramians</i> de controlabilidade	37
4.3	Otimização utilizando o <i>gramians</i> de observabilidade	38
4.4	Cálculo do <i>dynamic range</i>	39
5	ANÁLISE DE FILTROS DO SIGMA DELTA	43
5.1	Síntese e Simulação da Otimização	43
5.2	Especificações das Topologias	47

5.2.1	<i>Design da Arquitetura CIFB</i>	47
5.2.2	<i>Design da Arquitetura CIFF</i>	53
6	PERFORMANCE DA OTIMIZAÇÃO EM FILTROS	55
6.1	Filtro em cascata	55
6.2	Otimização em Filtros <i>Chebyshev</i>	59
6.3	Otimização em filtro <i>Butterworth</i>	60
6.4	Transformação em <i>Schur, Hessenberg e Ortonormal</i>	61
6.5	Discussão	62
7	PERFORMACE DA OTIMIZAÇÃO NO STF E NTF	65
7.1	Especificação dos parâmetros	65
7.2	Síntese e Simulação da Topologia CIFF	65
7.3	Otimização em STFc	67
7.4	Discussão	70
7.5	Otimização em NTFc	71
7.6	Discussão	73
7.7	Síntese e Simulação da Topologia CIFB	74
7.8	Discussão	76
7.9	Diferenças entre otimização do <i>FDR</i> e <i>DRS</i>	79
8	CONCLUSÃO	83
	REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

1.1 Motivação e Justificativa

Na era de computadores e dispositivos eletrônicos, projetistas sempre buscaram por opções de baixo custo e alto desempenho para implementarem *loops* complexos de programação, assim como decisões importantes nos sistemas. O mix entre o mundo analógico e digital foi decisivo para ampliação dos patamares da microeletrônica. A redução de circuitos digitais (canal de *CMOS*) em relação a analógicos trouxeram vantagens como redução do consumo de potência, aumento na velocidade, diminuição da área e consequentemente menor custo. No domínio analógico, o processo de diminuir o canal sofre com diversos efeitos e dificuldades (casamento de parâmetros, pequena excursão de entrada e saída). Devido a esse fato, conversores A/D tiveram grandes mudanças por integrarem os dois blocos supracitados (CUBAS, 2013).

Na área da comunicação e sistemas de controle, processadores digitais fazem a conexão do mundo 'externo' através conversores analógicos digitais A/D ou *ADCs* para entradas analógicas e conversores digitais analógicos *DACs* para as saídas analógicas. Conversores A/D convencionais, ou seja, os que têm a taxa de conversão igual a taxa de amostragem *Nyquist*, são extremamente rápidos e geralmente são usados para altas frequências, porém limitados em resolução (na faixa 10-12 bits). Para esse conversor existem as topologias de *flash*, *folded*, *pipelined* entre outros. Já conversores com a taxa de sobreamostragem ou *oversampling*, por exemplo, os conversores sigma delta, trabalham com taxas muito maiores que a frequência de *Nyquist* e ainda possuem um filtro digital na saída que filtra o ruído fora da banda. Eles oferecem alta resolução, com baixo custo e alta integração além de possuir técnicas de *oversampling* e *noise shaping* (NORSWORTHY; TEMES, 1997).

Equipamentos biomédicos contêm dispositivos eletrônicos pequenos e leves, na qual há limites estabelecidos para a energia e potência de acordo com alimentação do aparelho. Isso implica que tais dispositivos necessitam ser otimizados para baixas potências dissipadas (ROCHA, 2003). Para que haja maior eficiência de energia, os conversores sigma delta também precisam trabalhar sobre baixas potências. Por exemplo, o total estimado de energia consumida do receptor de um aparelho auditivo é de cerca de 1 *mW* e o conversor A/D no receptor só pode consumir uma fração disso.

Com base no que foi dito, para esse trabalho, deseja-se otimizar o *dynamic range* de um conversor com *oversampling*, em específico, o sigma delta. Para isso, é necessária a análise do mesmo conversor utilizando a teoria de controle e sistemas dinâmicos a fim de

obter um detalhamento maior do seu modelo de espaço de estados referentes a seus filtros passa alta e passa baixa. Esses filtros descrevem o comportamento do conversor e podem ser usados em simulações computacionais com o auxílio do *software* Matlab na solução da equação de *Lyapunov*. O resultado da mesma equação é descrito pelos *gramians* de sinal e ruído que são utilizados em um algoritmo criado para encontrar os novos valores de ganhos matriciais, que podem substituir os valores antigos comparando os valores de *functional dynamic range* inicial do modelo de espaço de estado e o valor após aplicação do algoritmo.

1.2 Objetivo principal

Como mencionado anteriormente, conversores sigma delta têm um grande potencial e importância na microeletrônica e na áreas de comunicação e controle. No contexto de baixa tensão e baixa potência em circuitos analógicos, é importante ter os melhores requisitos na implementação do circuito. Dentro dessa análise, o principal objetivo do trabalho é:

- Utilizar o algoritmo de otimização de *dynamic range* nos filtros passa baixa e passa alta no modulador sigma delta por meio de estudo e análise em sistemas dinâmicos e de controle usando conceitos como controlabilidade, observabilidade e *gramians*, observando a comparação dos valores de *dynamic range* nas diferentes decomposições de espaço de estados.

1.3 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são baseados em resultados dos objetivos principais e podem ser definidos como:

- Sintetizar os filtros do modulador sigma delta no domínio discreto baseado nos parâmetros de projeto.
- Obter os termos STF e NTF baseado nos filtros, decompor no modelo de espaço de estados e utilizar a otimização em cada um deles.
- Analisar diversas decomposições matriciais nos termos STF e NTF e verificar a variação do *dynamic range*.
- Comparar os métodos de conversão discreto-contínuo com os valores de *Dynamic Range*.
- Comparar os novos ganhos do sistema após a otimização com os ganhos não otimizados.

1.4 Metodologia

A metodologia escolhida para este trabalho foi a *top-down* que é determinada por elementos mais básicos do projeto até chegar no topo em que é aplicado o algoritmo de otimização onde são analisados os resultados. O diagrama *top down* do trabalho pode ser observado na figura 1.

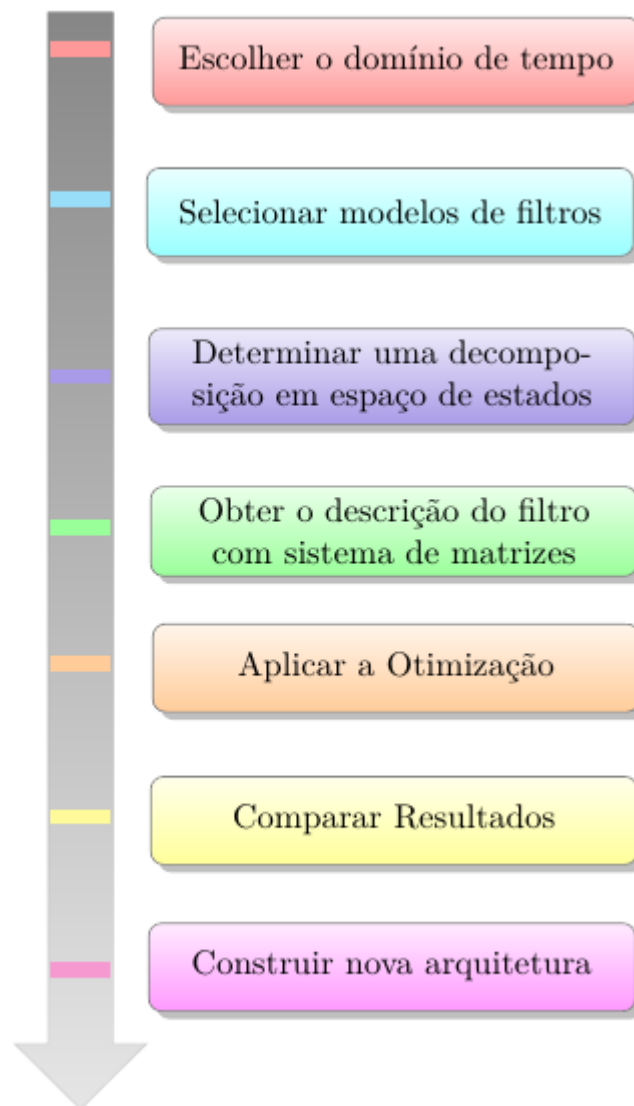


Figura 1: Fluxo do trabalho utilizando a metodologia *top-down*.

1.5 Estrutura do trabalho

Esse trabalho foi estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo será realizada uma introdução ao tema de moduladores sigma-delta, contextualizando com outros tipos de conversores A/D e suas aplicações importantes e limitações. Posteriormente, se-

rão retratados os objetivos do trabalho e mostrado como o mesmo está organizado. No segundo capítulo foi realizada uma caracterização do modulador sigma delta, mostrando as principais técnicas empregadas nele como *oversampling* e *noise shaping*, a obtenção das relações importantes e gráficos de desempenho. O terceiro capítulo mostrará o embasamento matemático para compreensão dos conceitos de controlabilidade e observabilidade e como estão envolvidos na topologia e otimização do sistema. No quarto capítulo será tratado o método de otimização em si, detalham-se os passos do cálculo e os parâmetros obtidos. No capítulo cinco será abordada detalhadamente a síntese dos filtros de um sigma delta, como podem ser obtidos a partir do domínio discreto no tempo ou contínuo no tempo. Também é ilustrado, nesse capítulo, métodos de conversão discreto-contínuo. No final do capítulo serão apresentadas duas arquiteturas clássicas de sigma delta e através delas serão obtidas figuras de mérito, modelo de espaço de estados e outras análises importantes. O capítulo seis trata dos resultados obtidos a partir da técnica proposta, comparando modelos convencionais de filtro após a otimização. Através dos gráficos é possível saber as diferenças entre as topologias padrões, ótimas e subótimas. O capítulo sete descreve a performance do algoritmo de otimização nos termos STF e NTF do sigma delta e nas topologias CIFB e CIFF. E por último, na conclusão, serão destacadas as vantagens da otimização, enfatizando comparações realizadas e propondo trabalhos futuros.

2 Modulador Sigma Delta

O conversor A/D Sigma-Delta é composto por duas partes: A parte analógica (modulador Sigma-Delta, com um integrador, um quantizador e um conversor D/A) e a parte digital, que é o filtro decimador. No bloco analógico, calcula-se o erro entre o sinal amostrado e a saída do modulador. Esse sinal de erro é integrado e quantizado, gerando a saída do modulador que é realimentado para o cálculo de um novo erro para o próximo sinal amostrado. O quantizador adiciona ruído ao sistema e é eliminado utilizando uma retroalimentação negativa. Uma analogia dessa estrutura seria do próprio amplificador operacional, que utiliza a retroalimentação para reduzir o efeito do ruído no estágio de saída em malha-fechada. A saída do modulador é digital e é retroalimentada passando pelo bloco D/A. Uma característica do sigma delta é o *noise shaping*, que leva o ruído de quantização para altas frequências. No bloco digital realiza-se uma filtragem (filtro passa baixa) que remove o ruído de quantização deixando apenas as componentes de frequência $2f_b$, sendo $2f_b$ a banda de interesse do sinal. A frequência de amostragem é reduzida até a frequência de *Nyquist* pelo bloco decimador, isso reduzirá a potência dos blocos ligado ao conversor A/D (ROCHA, 2003). A figura 2 representa uma estrutura geral de um modulador sigma delta.

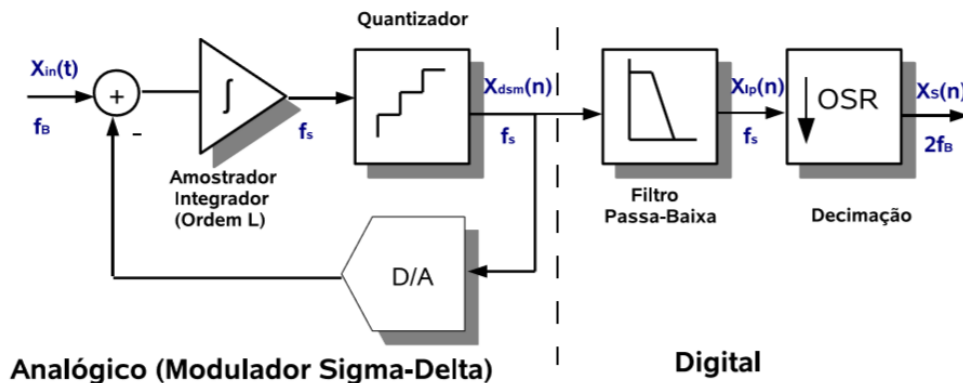


Figura 2: Diagrama de blocos de um modulador sigma delta (CUBAS, 2013).

2.1 Ruído de quantização

Para modelar o quantizador, adiciona-se um erro $e(n)$ como ilustrado na figura 3. O erro de quantização $e(n)$ é a diferença entre os valores da entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ e está diretamente relacionado com o sinal de entrada $x(n)$.

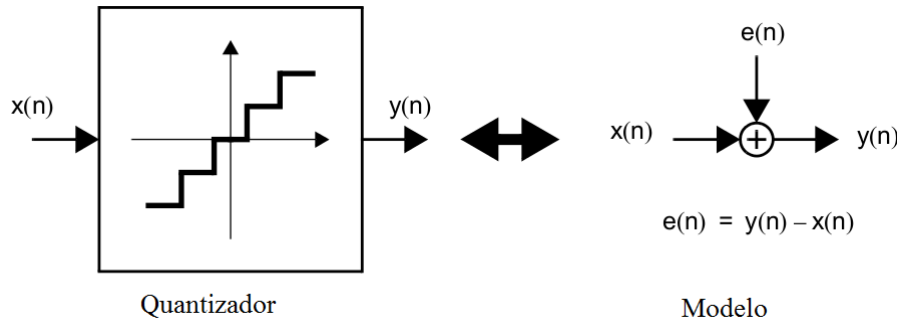


Figura 3: Quantizador e seu modelo linear (CUBAS, 2013).

O sinal de entrada é analógico e o sinal de saída do modulador é um valor discreto, esse erro será produzido em virtude da quantização e pode ser calculado com equação a seguir:

$$e(n) = y(n) - x(n) \quad (2.1)$$

2.2 Relação sinal ruído e *dynamic range*

A performance do modulador sigma delta pode ser medida em termos do *Signal Noise Ratio* (*SNR*) que é a relação da potência do sinal pela potência do ruído, ou, simplesmente relação sinal-ruído. O *SNR* depende de diversos fatores como a resolução, linearidade e tempo de estabilização dos circuitos. Seu valor máximo é determinado pelo ruído de quantização e resolução do conversor dado como:

$$SNR = n * 6.02 - 1.25 + 10 \log_{10} \frac{f_s}{f_b} [dB] \quad (2.2)$$

Sendo f_s a frequência do sinal amostrado e f_b a frequência da banda. A performance pode ser medida também pelo *Dynamic Range* (*DR*) conhecida como faixa dinâmica, que no modulador sigma delta tem o mesmo valor que *SNR*. Tanto o *SNR* como o *DR* podem ser usados para estimar o número efetivo de bits (ALLEN; HOLBERG, 2002). A equação abaixo descreve o *DR*, sendo S_b potência do ruído na banda.

$$DR^2 = \frac{\text{MaiorpotenciadoSinal}}{S_b} \quad (2.3)$$

Também é possível expressar *DR* em relação a resolução efetiva de bit do conversor:

$$B = \frac{DR_{[dB]} - 1.76}{6.02} \quad (2.4)$$

Sendo B o número equivalente de bits para um quantizador operando na frequência de *Nyquist*.

2.3 Conversores com *oversampling*

A técnica de *oversampling* ou sobreamostragem começou a ser utilizada para solucionar problemas encontrados na conversão analógica-digital (A/D) e na digital analógica (D/A). Especialmente para aplicações de alta resolução e sinais de baixa frequência. Em conversores A/D convencionais há uma dificuldade na implementação 'fina' da integração de larga escala (VLSI). Essa dificuldade começou quando os componentes que precisavam ser precisos como filtros analógicos se tornaram vulneráveis ao ruído e à interferência. Conversores *oversampling* tem alta tolerância a componentes analógicos para adquirirem uma resolução alta, todavia eles necessitam ser rápidos e ter uma boa capacidade de processamento digital de sinais. Esses conversores modulam o sinal analógico em um código simples, geralmente como um único bit de palavra, com frequência mais alta que a frequência de *Nyquist* (CARUSONE; MARTIN, 2011).

A técnica de *oversampling* ocorre quando f_s (frequência de amostragem) é OSR vezes maior que $2f_b$, onde OSR é a maior que 1 e f_b é frequência da banda do sinal (CARUSONE; MARTIN, 2011). Ou seja, a técnica faz a banda do sinal ocupar uma pequena parcela do intervalo de *Nyquist*, que é onde se espera encontrar o espectro do sinal. Então, pode-se definir a relação *oversampling*, OSR como:

$$OSR = \frac{f_s}{2f_b} \quad (2.5)$$

Dessa forma é possível filtrar digitalmente boa parte do ruído de quantização e ainda pode haver a necessidade de usar um decimador para diminuir a frequência de amostragem. A figura 4 apresenta um modelo de conversor A/D com *oversampling* e os espectros dos sinais que aparecem na saída de cada estágio (CUBAS, 2013).

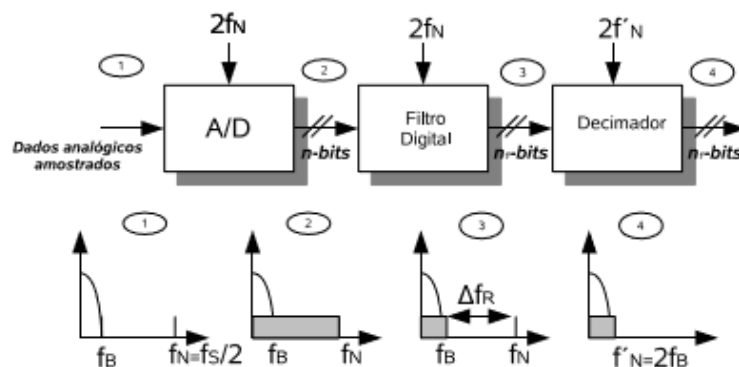


Figura 4: Passos do *oversampling* (CUBAS, 2013).

2.4 Conversores *oversampling* com *noise shaping*

A técnica *noise shaping* é ideal para diminuir o ruído de quantização sem aumentar a frequência da amostragem. Para o emprego da técnica, primeiro deve-se extrair as equações de transferência do modulador sigma delta ilustrado na figura 5. Utilizando o método da sobreposição é possível obter as seguintes equações:

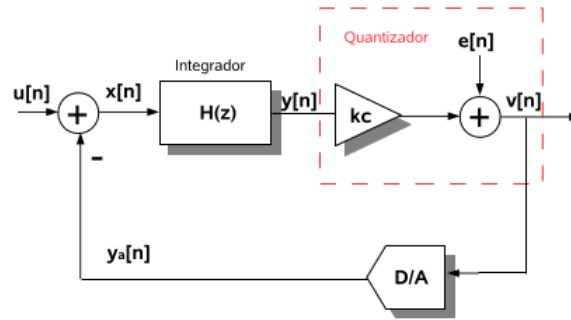


Figura 5: Modulador sigma delta e seu modelo linear (CUBAS, 2013).

$$STF = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)} \quad (2.6)$$

$$NTF = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + H(z)}$$

Na equação 2.6, $E(z)$ é o ruído de quantização, $H(z)$ é a função de transferência do integrador e K_c um ganho unitário. $U(z)$ e $Y(z)$ são as transformadas em Z de $u(n)$ e $y(n)$ respectivamente. E, por último, STF representa a função de transferência do sinal de entrada e NTF a função de transferência do ruído. A saída pode ser obtida como:

$$Y(z) = X(z)H_x(z) + E(z)H_e(z) \quad (2.7)$$

Onde H_x é a função de transferência STF e H_e é a função de transferência do ruído NTF para o domínio Z . Para que a técnica de *noise shapping* seja realizada, é preciso que NTF seja um passa alta, com a frequência de corte na banda do sinal e STF deixe que o sinal de entrada passe para a saída. A figura 6 representa o formato do NTF e STF, a linha contínua representa o STF enquanto a tracejada representa o NTF típico para um modulador sigma delta passa baixa. Nota-se que o ganho de STF cai quando ele está fora do sinal de banda, ou seja, rejeita sinais de alta frequência. Quando STF não é bem controlado há um salto *overshoot* exatamente no limite da banda. A magnitude de NTF fora da banda irá influenciar na quantidade de ruído na retroalimentação. Para grandes magnitudes em torno de $\frac{f_s}{2}$ irá colocar mais ruído na entrada do quantizador, reduzindo o sinal máximo a ser processado (BAJDECHI; HUIJSING, 2004). O triângulo

hachurado representa o limite para resolução da conversão dentro da banda para um NTF e a potência total do ruído de quantização.

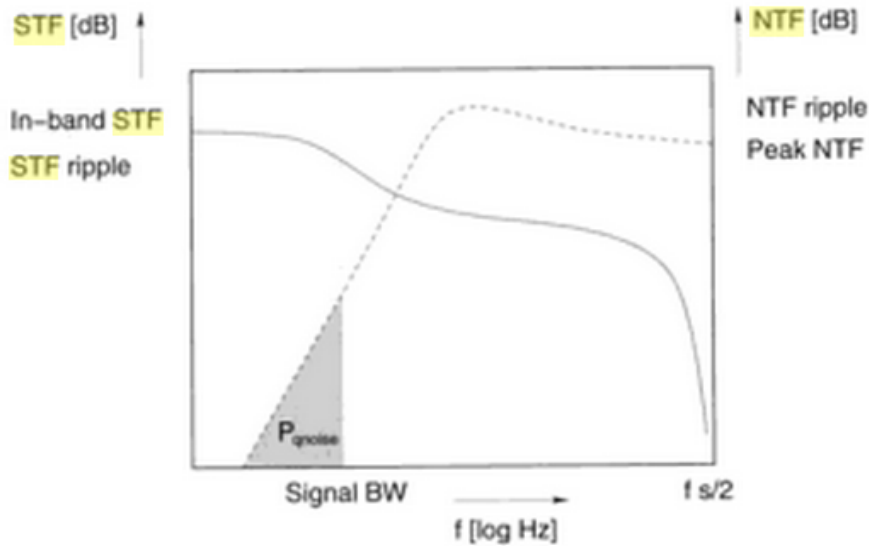


Figura 6: Amplitudes de STF e NTF típicas um modulador passa baixa (BAJDECHI; HUIJSING, 2004).

2.5 *Noise shaping de primeira ordem*

Considerando que o integrador é representado como $H(z)$ tal como a equação 2.8, a função de transferência NTF tem um zero no dc ($z = 1$). Dessa forma é possível obter um *noise shaping* com o comportamento descrito pela a equação 2.9.b.

$$H(z) = \frac{1}{z - 1} \quad (2.8)$$

O motivo da atribuição do valor de z vem devido ao integrador e à retroalimentação na qual coloca um zero no NTF, dessa forma, adquire-se um *noise shaping* de primeira ordem para filtro passa-baixa. Aplicando $H(z)$ na equação 2.6 se obtém:

$$STF = z^{-1} \quad (2.9.a)$$

$$NTF = (1 - z^{-1}) \quad (2.9.b)$$

Nota-se dessa última relação que STF é uma apenas um *delay* e que NTF será um filtro passa-alta. A implemetação das variáveis pode ser observado no figura 7. NTF determina a redução do ruído de quantização na banda de interesse, enquanto o STF determina o estado 'geral' do SNR do modulador.

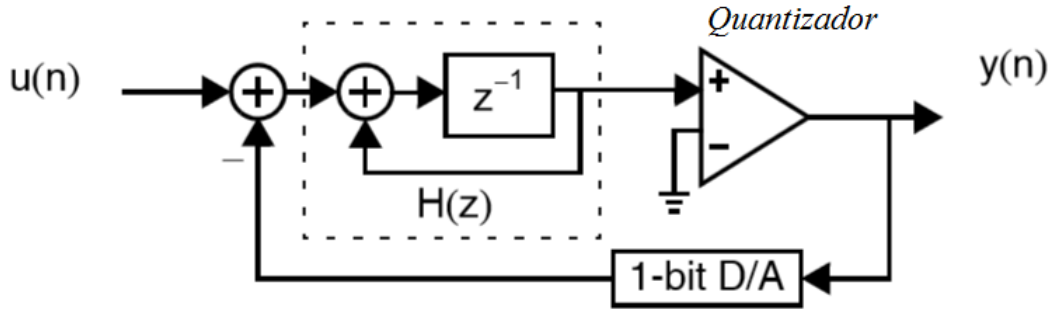


Figura 7: Modulador sigma delta de primeira ordem (CARUSONE; MARTIN, 2011).

2.5.1 *Noise shaping* de segunda ordem

Para um *noise shaping* de segunda ordem, a equação 2.10 é obtida 'cascateando' o primeiro bloco do modulador com o segundo. Pelo teorema de sobreposição, as equações do *STF* e *NTF* resumem-se a:

$$STF = z^{-2} \quad (2.10)$$

$$NTF = (1 - z^{-1})^2$$

Novamente, *NTF* será um filtro passa alta e *STF* um filtro passa baixa que pode ser visto na figura 8.

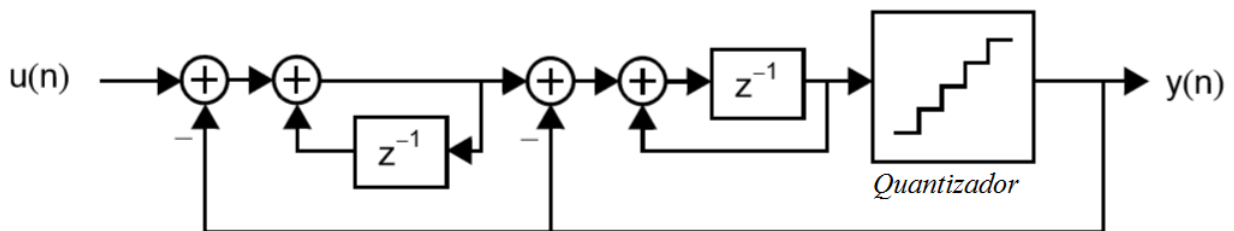


Figura 8: Modulador sigma delta de segunda ordem (CARUSONE; MARTIN, 2011).

Qualquer modulador que tenha a ordem maior que um, tem a possibilidade de ter mais zeros em *DC*, como visto para segunda ordem. Esse fato implica em uma redução do ruído de quantização para baixas frequências. É importante ressaltar que o aumento da ordem do modulador sigma delta resulta em uma resolução mais elevada. Como ilustrado na figura 9, há uma comparação entre a amplitude de *NTF* e moduladores de diferentes ordens.

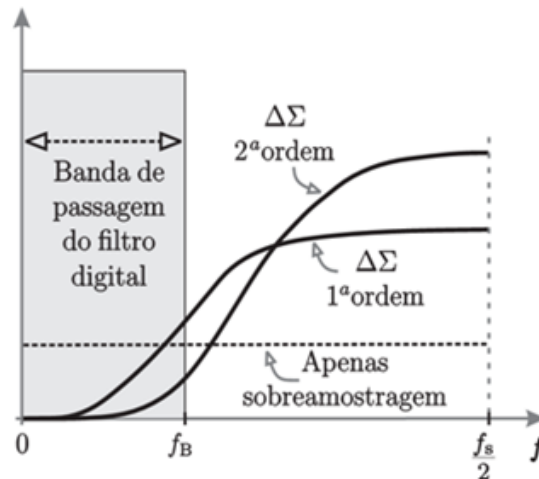


Figura 9: Amplitude do NTF *versus* resolução do modulador (BAJDECHI; HUIJSING, 2004).

2.6 Otimização em STF e NTF

Este trabalho se trata da otimização do DR da parcela STF e NTF do modulador sigma delta. Pode-se fazer uma analogia de acordo com a figura 10, que se trata de um diagrama de blocos de um filtro, dessa forma, os termos STF e NTF serão tratados separadamente representando parcelas separadas do modulador sigma delta. Cada bloco matricial representa as contribuições no sistema como: entrada e saída do sinal, integrador e realimentação. Nota-se que o bloco do quantizador foi suprimido, pois o ruído considerado será o interno dos integrados e dos blocos. É importante ressaltar que, para que a otimização seja realizada, o modulador sigma delta será analisado em um sistema dinâmico. Ou seja, a equação de transferência do STF e NTF será modelada com equações de espaço de estados, o que será discutido no capítulo 3.

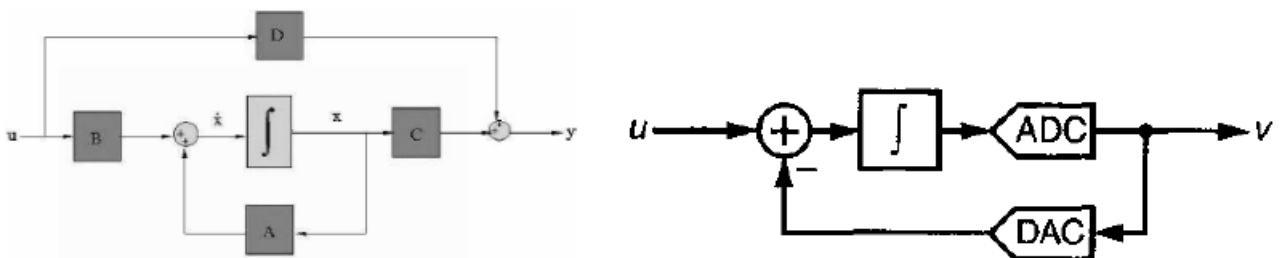


Figura 10: Diagrama de bloco baseado no modulador sigma delta de primeira ordem (REYNOLDS, 2006) (SCHREIER, 2005).

3 Modelagem matemática para a otimização do *Dynamic Range*

3.1 Modelo de espaço de estados

Para sistemas LTI (linearmente independentes e não variantes no tempo), o modelo de espaço de estados geral é:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$y = Cx + Du$$

Na equação 3.1, x representa o estado interno do sistema, y e u são as entradas e saídas respectivamente. As matrizes A , B , C e D são responsáveis pelos estados, entradas e saídas de um sistema dinâmico. A figura 11 ilustra esse modelo em um diagrama de bloco.

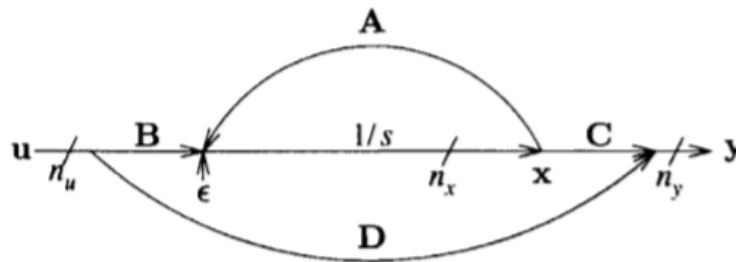


Figura 11: Diagrama de blocos representando o sistema linear da equação 3.1 (ROCHA, 2003).

Os blocos representam as matrizes e as setas representam os vetores que irão multiplicar esses operadores. A matriz A representa o estado natural do sistema dinâmico, enquanto as matrizes B e C são estados internos. A matriz D é responsável pela retroalimentação ou possivelmente algum ganho. O sistema de matrizes citado (A , B , C e D) formam a realização de espaço de estados do sistema. Para qualquer sistema dinâmico existem inúmeras formas de uma realização de espaço de estado (REYNOLDS, 2006). Os estados do sistema dinâmico estão diretamente relacionados com a distribuição de energia interna do sistema (KAILATH, 1980).

3.2 Controlabilidade e Observabilidade

A controlabilidade e observabilidade são conceitos importantes utilizados em sistemas de controle moderno e com grande aplicação em sistemas dinâmicos. A definição

introduzida por R. Kalman em 1960 é descrita a seguir.

- Controlabilidade: a fim de poder fazer o que quiser com um sistema dinâmico dado sob uma entrada de controle, o sistema deve ser controlável.
- Observabilidade: a fim de ver o que está acontecendo dentro do sistema sob observação, o sistema deve ser observável.

3.2.1 Decomposição matricial

Para qualquer sistema dado, há infinitas possibilidades de modelos de espaço de estados que darão os mesmos valores de entrada e saída dinâmicas. Uma estrutura padrão de espaço de estados é chamada forma canônica (ASTROM, 2006). A partir de uma função de transferência, é possível obter o modelo canônico e ainda transformar para outro modelo de espaço de estados. Supondo um sistema da seguinte forma:

$$y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}y + a_ny = b_0u^n + b_1u^{n-1} + \dots + b_{n-1}u + b_nu \quad (3.2)$$

A variável u representa a entrada, y a saída e y^n são suas n derivadas de y respectiva no tempo. Utilizando a transformada de Laplace em ambos lados da equação se obtém:

$$Y(s)(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n) = U(s)(b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n) \quad (3.3)$$

O que produz a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n)}{(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)} \quad (3.4)$$

A partir dessa função de transferência é possível obter as decomposições matriciais.

3.2.2 Forma controlável canônica

A partir da equação da função de transferência 3.4, é possível arranjar os coeficientes nas matrizes abaixo. A matriz A terá os coeficientes do denominador distribuída na sua última linha, enquanto os coeficiente do numerador ficaram na matriz C . A vantagem da utilização desse modelo é a alocação de polos em projetos de controladores além da análise fácil (ASTROM, 2006).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.5)$$

$$y = \begin{pmatrix} b_n & -a_n b_0 & b_{n-1} & -a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 & -a_1 b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + b_0 u$$

Um sistema de espaço de estados linear é controlável canônico quando a dinâmica assemelha-se à equação 3.5. A figura 12 representa os polos e zeros de uma função de transferência diretamente implementados no circuito. A saída do sistema será a combinação linear das saídas dos blocos dos integradores. A forma controlável canônica é uma decomposição matricial padrão usada em algoritmos de *software* no modelo de espaço de estados.

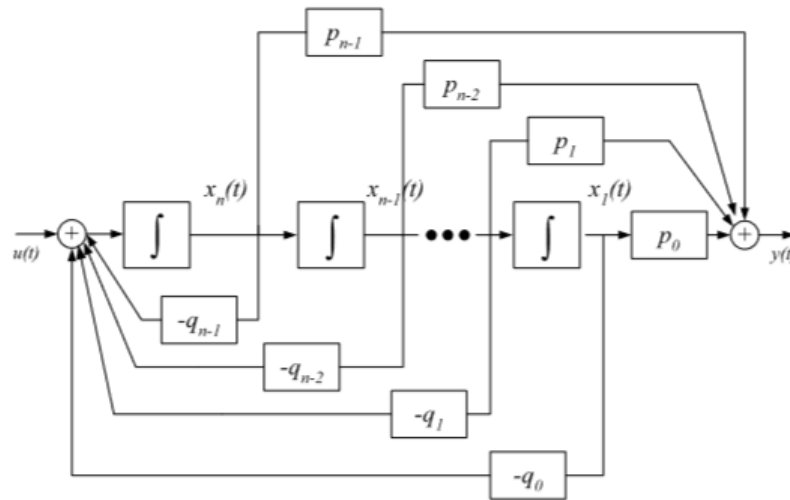


Figura 12: Forma canônica controlável (HADDAD; SERDIJN, 2008).

Para mudança de coordenadas de estados A e B representando um sistema dinâmico (matriz dinâmica) e as variáveis \tilde{A} e \tilde{B} representando a forma canônica observável (matriz controlável) do mesmo sistema, é possível utilizar a transformação de coordenada $z = Tx$.

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \quad (3.6)$$

$$\tilde{B} = TB$$

A matriz controlável torna-se:

$$W_c = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Aplicando a transformada em todos os elementos individuais:

$$A^n B = T A^n B \quad (3.8)$$

Finalmente, a relação da matriz controlável e o sistema de transformação:

$$\tilde{W}_c = \begin{pmatrix} T(B & AB & A^{n-1}B) \end{pmatrix} = W_{cont}T \quad (3.9)$$

Já que W_c é inversível, a transformada T se relaciona com a forma controlável canônica.

$$T = \tilde{W}_c W_c^{-1} \quad (3.10)$$

3.2.3 Forma observável canônica

Como ilustrado na figura 13, é possível estimar um estado do sistema a partir das entradas e saídas. Onde x são os estados (sinal), u a entrada, y a saída e n é o ruído. A representação de \hat{x} é o estado que está sob observação. Em um sistema linear pode-se determinar o estado do sistema $x(t)$, medindo as variáveis $y(t)$ e $u(t)$.

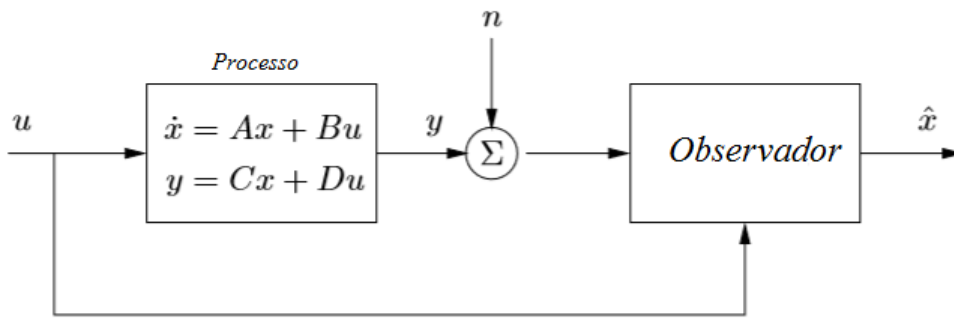


Figura 13: Diagrama de blocos para o observador (ASTROM, 2006).

Enquanto a controlabilidade está relacionada com os estados do sistemas e ignora a saída, a observabilidade se relaciona com a saída do mesmo sistema (ASTROM, 2006). Ou seja, na equação 3.1, há negligência da entrada e resume-se a:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.11)$$

$$y = Cx$$

Da equação anterior é possível obter uma projeção do estados em forma vetorial, relacionados com as matrizes CA .

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x \quad (3.12)$$

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sendo W_o o estado que determina a observabilidade. Após essa etapa o sistema pode ser facilmente considerado com as entradas que foram supridas. O estado final será uma combinação linear das entradas e saídas das derivadas de alta ordem.

De forma semelhante à apresentada, a forma canônica observável pode ser obtida a partir de sistema dinâmico.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \dots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + b_0 u \quad (3.13)$$

Essa decomposição pode ser representada no circuito ilustrado na figura 14. Com um sistema na forma observável canônica é possível computar todos os estados, desde que estejam no formato de derivadas.

Da mesma forma, o sistema de controlabilidade sempre existirá uma transformada T que converte um sistema canônico em outro. A relação entre as formas controlável e observável são:

$$\begin{aligned} A_{obs} &= A_{cont}^T \\ B_{obs} &= C_{cont}^T \\ C_{obs} &= B_{cont}^T \\ D_{obs} &= D_{cont}^T \end{aligned} \quad (3.14)$$

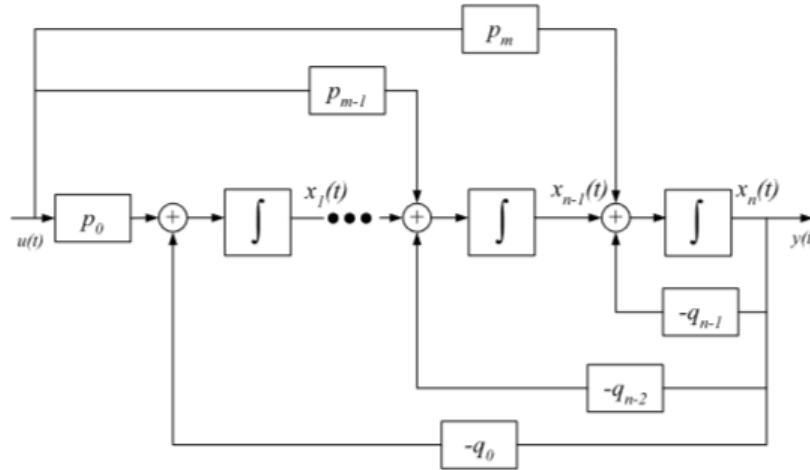


Figura 14: Forma canônica observável (HADDAD; SERDIJN, 2008).

3.3 Gramians de Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade e observabilidade são propriedades qualitativas do sistema. Essas propriedades dependem dos elementos das matrizes A , B e C . A controlabilidade tem a habilidade de ter controle ou efeito nos modos do sistema, enquanto a observabilidade diz a respeito desses modos na saída. Os Gramians de controlabilidade e observabilidade são utilizados para verificar o quão controlável e observável é um estado (REYNOLDS, 2006). Para se quantificar a contribuição da resposta dos estados é necessário calcular os *gramians*. O *gramian* de controlabilidade é dado por:

$$W_c(T) = \psi\psi^* = \int_0^T e^{At}BB^*e^{A^*t}dt \quad (3.15)$$

E o *gramian* de observabilidade segue por:

$$W_o(T) = \psi^*\psi = \int_0^T e^{At}CC^*e^{A^*t}dt \quad (3.16)$$

Das próprias definições dos *gramians*, ambos são autoadjunto e positivos. Da equação 3.15, um sistema linear é controlável apenas se $W_c(T)$ for não-singular (invertível). Da mesma forma para a equação 3.16, um sistema linear é observável apenas se $W_o(T)$ for não-singular (quando o espaço nulo for vazio). Basicamente, o cálculo das matrizes $W_c(T)$ e $W_o(T)$ determinam a controlabilidade e observabilidade do sistema, porém não são ideais para um modelo de simulação computacional. Uma maneira mais fácil de determinar os *gramians* é através da derivada das equações 3.15 e 3.16 que satisfaçam a seguinte condição.

$$\dot{W}_c = AW_c + W_cA^* + BB^* \quad (3.17)$$

$$\dot{W}_o = A^*W_o + W_oA^* + C^*C$$

Para sistemas estáveis em que $T \rightarrow \infty$, os *gramians* irão satisfazer a equação de Lyapunov.

3.4 Equação de Lyapunov

Através das equações de Lyapunov é possível encontrar as duas soluções para os *gramians* de controlabilidade e observabilidade. A equação segue como:

$$AW_c + W_cA^* + BB^* = 0 \quad (3.18)$$

$$A^*W_o + W_oA + C^*C = 0$$

A figura 15(a) e (b) representam os dois *gramians* traçados em relação a um sinal e o ruído. As variáveis x_1 e x_n correspondem aos estados do sistema, como a saída do integrador. O objetivo funcional da utilização dos *gramians* é a forma em que eles modelam o sinal e o ruído (REYNOLDS, 2006).

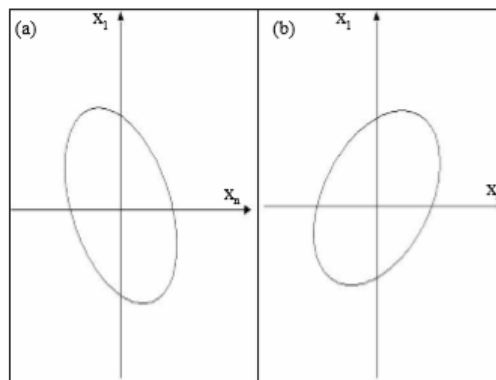


Figura 15: (a) Elipsóide de controlabilidade e (b) elipsóide de observabilidade (REYNOLDS, 2006).

Para a figura a 15(a), tem-se uma elipsóide de controlabilidade em que esta representa a parcela do sinal do sistema. O sinal se torna máximo quando a elipsóide se torna um círculo, portanto o raio maior e o raio menor dela teriam o mesmo valor. Já a figura 15(b) é uma elipsóide de observabilidade que representa a parcela do ruído. A partir do círculo anterior, W_o irá tornar o ruído o menor possível, basicamente, diminuindo o raio do mesmo; atingindo o máximo DR do sistema. Os *gramians* irão trabalhar o sinal e o ruído, que correspondem às matrizes A , B , C e D respectivamente, através de seus valores iniciais e suas transformações de espaço de estados. É importante ressaltar que essas transformações trabalharão o sinal e o ruído com intuito de obter um DR otimizado sem mudar a função de transferência (REYNOLDS, 2006).

3.5 Outras decomposições matriciais

Algumas outras decomposições matriciais importantes são as de *Hessenberg*, *Schur* e Ortonormal. Essas transformações são úteis pois acabam zerando alguns elementos das matrizes. Isso em termo de circuito seriam menos elementos a ser implementados.

A decomposição em *Hessenberg* pode ser resumida como:

$$\begin{aligned} A &= UA_{hess}U^T \\ B_{hess} &= U^{-1}B \\ C_{hess} &= CU \end{aligned} \tag{3.19}$$

Em que A é a matriz a ser transformada e U uma matriz unitária. Essa decomposição consiste basicamente em zerar todos os elementos abaixo da subdiagonal principal.

Já a decomposição *Schur* consiste em anular todos elementos abaixo da diagonal principal através da matriz ortogonal unitária Q . Não existem modelos específicos para achar as matrizes B e C , porém nesse trabalho foi utilizado o modelo análogo ao de *Hessenberg*.

$$\begin{aligned} A_{schur} &= Q^T A Q \\ B_{schur} &= U^{-1}B \\ C_{schur} &= CU \end{aligned} \tag{3.20}$$

O modelo ortonormal é o modelo ideal para filtros analógicos de alta ordem pelo fato de seu bom comportamento a sensibilidade, esparcidade e para faixa dinâmica DR . A transformação na matriz A é exemplificada na equação 3.21. Uma característica interessante é o fato do *gramian* de controlabilidade W_c se tornar matriz identidade no resultado da equação de *Lyapunov*. Isso é determinante para um ótimo valor no cálculo do DR , como será visto no próximo capítulo.

$$A_{orto} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

4 Otimização do *dynamic range*

A partir da função de transferência $H(s)$ de um filtro de enésima ordem, é possível otimizar o *dynamic range* de um conversor sigma delta, desde que esteja tratando dos filtros passa baixa e passa alta do mesmo conversor. A função de transferência inicialmente deverá passar o modelo de espaço de estados para que o método de otimização seja aplicado. O método a seguir é baseado na otimização de um sistema dinâmico, fixado nos *gramians* de observabilidade e controlabilidade (HADDAD; SERDIJN, 2008).

4.1 Transformação do espaço de estados

A técnica usada nessa seção para otimizar o *dynamic range* é baseada e descrito por (ROCHA, 2003), a partir de uma função de transferência de um filtro passa baixa seja de segunda, terceira ou enésima-ordem, é possível obter equações de espaço de estados como descrito no capítulo 3. Esse modelo de espaço de estados é a descrição do filtro e a otimização é baseada nas matrizes obtidas através da equação de *Lyapunov* (Obtendo os *gramians* de observabilidade e controlabilidade). As matrizes K e W são utilizadas para transformar todas as matrizes obtidas anteriormente e dessa forma é possível obter um *dynamic range* máximo para certos valores de capacitância (HADDAD; SERDIJN, 2008).

4.2 Otimização utilizando o *gramians* de controlabilidade

Antes das transformações, pode-se simplificar os *gramians* como $W_c = K$ e $W_o = W$. A primeira etapa para encontrar a matriz de transformação T é achar os autovetores e autovalores da matriz K .

$$K = [P_k, D_k] \quad (4.1)$$

D_k é uma matriz diagonal na qual os valores da mesma diagonal são as entradas dos valores da matriz K . Então o formato genérico dela será:

$$D_k = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Com os autovalores e autovetores da matriz K , é possível prosseguir com a otimização. Pode-se utilizar a equação para achar a primeira matriz T de transformação. A matriz T será usada para encontrar os novos valores do modelo de espaço de estados achado a partir da função de transferência de um filtro qualquer.

$$T_k = P_k, D_k^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

Pode-se definir como uma igualdade a seguinte transformação em relação à matriz não inversível T e assumindo que o determinante de T seja diferente de zero:

$$x' = T^{-1}x \quad (4.4)$$

Sendo x a saída do integrador (não será aplicado a esse trabalho, apenas variáveis do espaço de estados). Aplicando para outras matrizes obtidas anteriormente:

$$\begin{aligned} A_k &= T_k^{-1}AT_k \\ B_k &= T_k^{-1}B \\ C_k &= CT_k \\ D_k &= D \end{aligned} \quad (4.5)$$

O fim da primeira etapa de otimização é aplicar a matriz de transformação T_k nos *gramians* de controlabilidade e observabilidade. A nova matriz K_k será uma matriz identidade.

$$K_K = T_K^{-1}KT_K^{-T} \quad (4.6.a)$$

$$W_K = T_K^TWT_K \quad (4.6.b)$$

É importante ressaltar que, até esse ponto, as transformações utilizando o *gramians* de controlabilidade modificaram o sinal, sendo o próximo passo modificar o ruído do integrador.

$$K_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7.a)$$

$$W_K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4.7.b)$$

4.3 Otimização utilizando o *gramians* de observabilidade

Na segunda etapa da otimização, os procedimentos serão semelhantes aos descritos anteriormente, porém trabalharão com ruído do sistema (ROCHA, 2003). Da equação 4.7(b) é obtida a nova matriz W_k e partir dela será utilizada para uma nova transformação de espaço de estados. Na equação 4.8 é possível obter os autovetores e autovalores de W_k , porém nesse caso o autovetor P_w será utilizado como a nova matriz de transformação T_w .

$$W_K = [P_w, D_w]$$

$$T_w = P_w \quad (4.8)$$

Aplicando as matrizes obtidas na seção 4.2 e os *gramians* já transformados, a equação 4.9 e a equação 4.10.a se tornam o modelo de espaço de estados otimizado.

$$\begin{aligned} A_w &= T_w^{-1} A_k T_w \\ B_w &= T_w^{-1} B_k \\ C_w &= C_k T_w \\ D_w &= D_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

A mesma situação ocorre para K_W e W_W , o primeiro se tornará uma matriz identidade e o segundo será uma matriz com a sua diagonal principal preenchido com elementos não nulos.

$$K_w = T_w^{-1} K_k T_w^{-T} \quad (4.10.a)$$

$$W_w = T_w^T W_k T_w$$

$$K_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10.b)$$

$$W_w = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

4.4 Cálculo do *dynamic range*

O *dynamic range* de um sistema é essencialmente determinado pela magnitude máxima de um sinal processado e seu ruído interno (HADDAD; SERDIJN, 2008). De acordo com (ROCHA, 2003), para maximizar o *dynamic range* de um sistema, deve-se minimizar o *functional dynamic range* representado na fórmula 4.11.a.

$$FDR_i = \frac{\max_i K_{ii}}{(2\pi)^2} \sum_i^n \frac{\alpha_i}{C_i} W_{ii} \quad (4.11.a)$$

$$\alpha_i = \sum_j^n |A_{ij}| \quad (4.11.b)$$

Da equação 4.11.a, FDR_i é o *functional dynamic range*, ou simplesmente é o inverso do *dynamic range* inicial, K_{ii} e W_{ii} são os elementos da diagonal principal das

matrizes K e W , no caso $\max_i K_{ii}$ representa o maior elemento da diagonal principal de K . Nas equações 4.11.a e 4.11.b, a variável α_i é a soma absoluta dos elementos da i th linha da matriz A e C_i é a capacitância do integrador que pode ser considerado o valor unitário. O cálculo realizado para FDR_f (após otimização) será semelhante ao apresentado, porém os valores de K_{ii} , W_{ii} e α_i são diferentes, para K_{ii} e W_{ii} os novos valores se assemelham pela equação 4.10.b e para α_i serão os novos ganhos da matriz A . Esses novos valores que fazem o valor de FDR_f ser menor em relação a FDR_i . É possível observar na figura 16 um diagrama de fluxo do algoritmo da otimização, limitado a sistemas SISO, demonstrando nos blocos os passos citados nessa sessão. Os próximos capítulos irão utilizar o termo FDR para *functional dynamic range* ao invés de *dynamic range*.

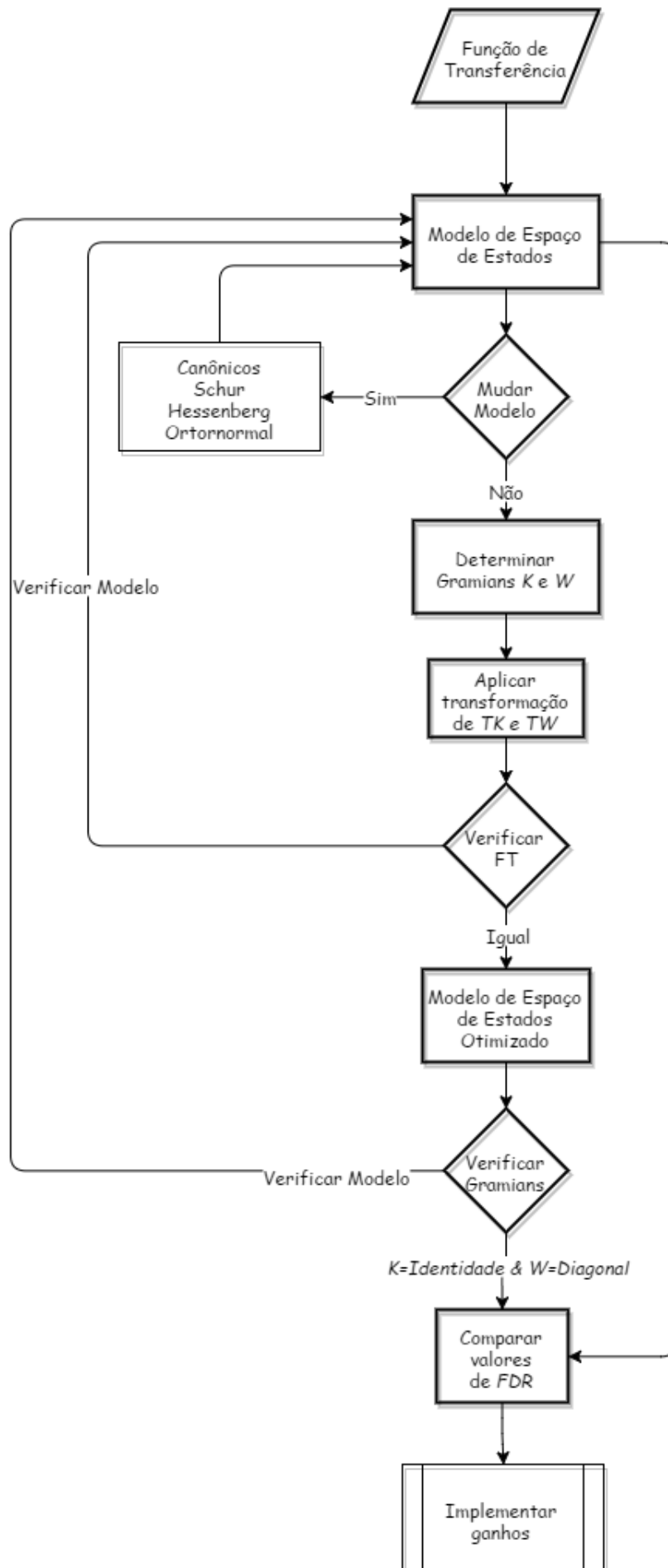


Figura 16: Diagrama de fluxo para otimização de FDR para Sigma Delta.

5 Análise de filtros do Sigma Delta

Como mencionado no capítulo 2, pode-se simplificar um sigma delta em dois tipos de filtros: STF e NTF. A compreensão da estrutura desses filtros é fundamental para que a técnica de *noise shapping* seja bem efetuada, assim como a estabilidade do conversor. A aplicação da otimização proposta nesse trabalho irá utilizar a parcela de STF e NTF separadamente no domínio contínuo no tempo. Nesse capítulo será feito uma análise dos filtros mencionados com o auxílio dos *softwares* Matlab, *parsers* em C++, Simulink, Delta-Sigma Toolbox (SCHREIER, 2005).

5.1 Síntese e Simulação da Otimização

A figura 17 ilustra como pode ser projetada a metodologia da Otimização do *FDR* em um filtro passa baixa ou passa banda. O primeiro passo é definir o domínio do filtro que poderá ser contínuo ou discreto no tempo (CT ou DT). Após o domínio estar definido, determina-se um modelo de espaço de estados citados no capítulo 3.

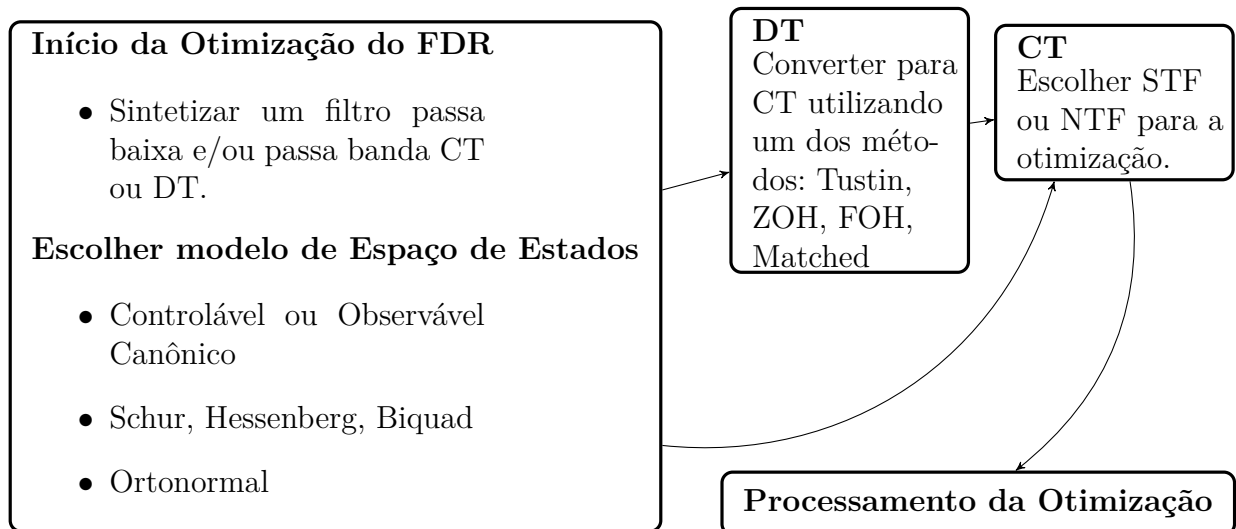


Figura 17: Diagrama da Síntese de STF/NTF para otimização de *FDR*.

Caso o filtro seja projetado em DT, o mesmo deverá ser convertido para CT com um desses métodos: Tustin, ZOH, FOH e Matched. O método de Tustin ou bilinear produz a melhor equivalência no domínio da frequência e sua fórmula se resume a equação 5.1 para uma função de transferência:

$$z = e^{sT_s} = \frac{1 + sT_s/2}{1 - sT_s/2} \quad (5.1)$$

Sendo T_s o tempo de amostragem.

O método de ZOH (*Zero-Order Hold*) fornece uma equivalência entre DT e CT para entradas com o formato de *staircase*. Basicamente, uma entrada $u(t)$ é amostrada para cada valor de $u(k)$ constante ao longo de um período de amostragem, como representa a equação 5.2.

$$u(t) = u(k), \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s \quad (5.2)$$

O método de FOH (*First-Order Hold*) dá a equivalência entre DT e CT em partes das entradas lineares. O que diferencia do método de ZOH é o fato de usar uma interpolação linear entre as amostras. A equação 5.2 representa o método citado.

$$u(t) = u(k) + \frac{t - kT_s}{T_s}u(k+1) - u(k), \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s \quad (5.3)$$

E por último, o método *Matched* é apenas uma equivalência entre os polos e zeros entre os sistemas SISO.

Após estar definido o método de conversão para CT, o procedimento agora é a escolha entre os termos STF e NTF definidos pelos filtros $L0$ e $L1$ como mostra a figura 18. Os termos $L0$ e $L1$ são funções de transferência do *loop* do filtro modulador sigma delta.

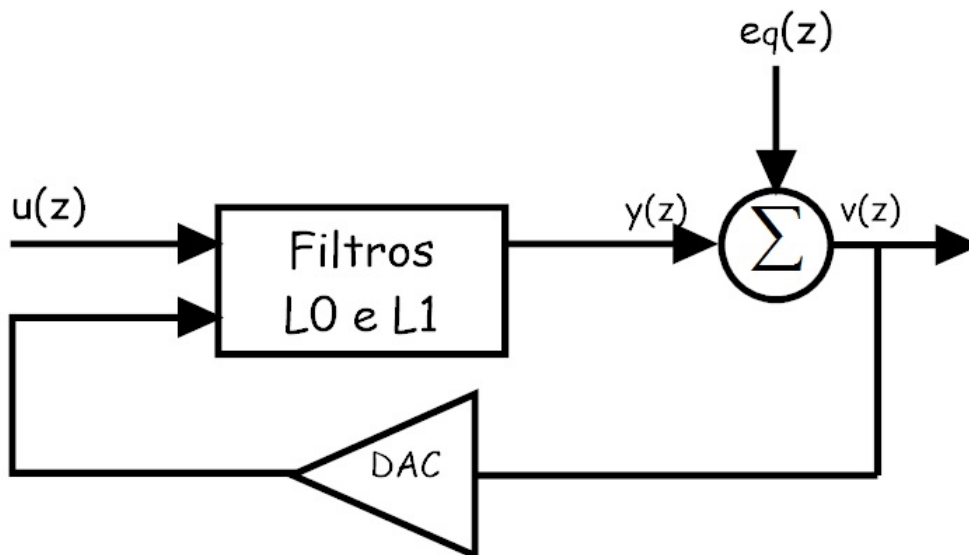


Figura 18: Diagrama de Bloco de um Modulador Sigma Delta. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).

Um sigma delta pode ser resumido como um filtro de duas entradas MISO (*Multiple*

Input Single Output). Como ilustrado na figura 18, é possível extrair a equação 5.4 em função da saída $y(z)$:

$$y(z) = L0(z)u(z) + L1(z)v(z) \quad (5.4)$$

Sendo $u(z)$ a entrada do sinal no modulador sigma delta e $v(z)$ a injeção do ruído de quantização. O termo $v(z)$ é considerado como uma entrada. Considerando $v(z)$ como saída, a relação com saída do filtro e um modelo linear do ruído e_q é dado por $y(z) = v(z) - e_q$. Considerando as expressões anteriores o modelo do STF e NTF em termos das entradas e saídas é dado por:

$$y(z) = STF(z)u(z) + NTF(z)e_q \quad (5.5.a)$$

Ainda é possível expressar STF e NTF em termos dos filtros $L0$ e $L1$:

$$STF(z) = \frac{L0(z)}{1 - L1(z)} \quad (5.6.a)$$

$$NTF(z) = \frac{1}{1 - L1(z)} \quad (5.6.b)$$

Para garantir um valor de NTF baixo dentro da banda do sinal fb , de 0 a $\frac{fs}{2OSR}$ de acordo com a equação 2.5, é necessário que $L1$ seja 'largo' dentro da banda do sinal. Consequentemente, se $L0$ tiver um valor alto, irá ocasionar em um STF unitário. Como $L0$ e $L1$ pertencem ao mesmo circuito, os polos são coincidentes, entretanto os zeros são distintos. Dessa forma, é possível generalizar os termos $L0$ e $L1$ em função da ordem do modulador na forma (SCHREIER, 2005):

É possível também representar os filtros em modelo de espaço de estados como ilustrado na figura 19. O modelo matricial trata-se da descrição do filtro na forma linear em que há o mapeamento da arquitetura, informação sobre os ganhos do circuito e qualquer informação interna em relação ao sistema dinâmico.

Extraí-se as equações matriciais de forma semelhante ao capítulo 3, considerando que nesse momento trata-se de um filtro de duas entradas. Dessa forma, o modelo matricial de modulador sigma delta no domínio do tempo torna-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (5.7.a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (5.7.b)$$

Sendo \dot{x} a representação dos novos estados e x o estado atual. O termo $u(t)$ continua sendo a entrada do sistema e $v(t)$ a retroalimentação do DAC. A matriz A descreve as

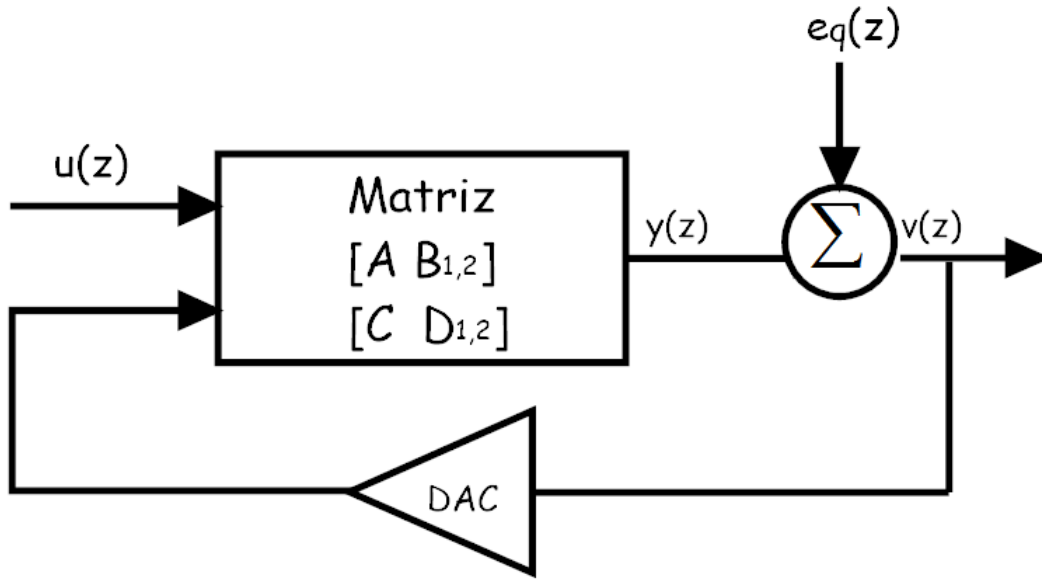


Figura 19: Representação do filtro em espaço de estados do Modulador Sigma Delta. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).

conexões entre os novos estados e o atual (\dot{x} e x), ou simplesmente as conexões internas do filtro. A matriz B conecta os novos estados com as duas entradas, ou seja, a entrada no modulador e saída do DAC. A matriz C representa a conexão da saída com a entrada e a matriz D conecta as entradas com as saídas. Para obter os coeficientes na forma de equação de estados, expande-se as equações 5.7.a e 5.7.b (SCHREIER, 2015):

$$\begin{aligned}
 x_1(t+1) &= x_1(t) + b_1 u(t) - a_1 v(t) \\
 x_2(t+1) &= x_2(t) + c_1 x_1(t) - g_1 x_3(t) - a_2 v(t) \\
 x_3(t+1) &= x_3(t) + c_2 x_2(t+1) - a_3 v(t)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Os coeficientes representam: a_i retroalimentação positiva ou negativa entrando no quantizador ou saindo dele, b_i coeficiente da entrada do sinal, c coeficiente do ganho do integrador, d_i retroalimentação positiva extra e g_i coeficiente de ressonância que contribui na estabilidade do modulador. Com os coeficientes na forma de equação de estados, é possível obter seu modelo de espaço de estados para um sistema de múltiplas entradas e uma única saída MISO.

$$ABCD = \left[\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 0 & b_1 & -a_1 \\
 c_1 & 1 & -g_1 & b_2 & -a_2 \\
 c_1 c_2 & c_2 & 1 - c_2 g_1 & b_3 & -a_3 - a_2 c_2 \\
 \hline
 0 & 0 & c_3 & d_1 & 0
 \end{array} \right] \tag{5.9}$$

Para um modulador sigma delta, utiliza-se duas entradas, uma saída e o número de estados irá depender da ordem do filtro. Alguns sistemas incluem a adição de uma entrada de ruído do DAC que afeta o termo STF que deve ser levado em consideração dependendo do modelo usado no DAC. Para um sistema de p entradas, q saídas e n estados, o sistema de matrizes segue por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A = n \times n \quad (5.8.a)$$

$$B1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad B2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad B = n \times p \quad (5.8.b)$$

$$C = [c_1 \quad c_2], \quad C = q \times n \quad (5.8.c)$$

$$D = [d_1 \quad d_2], \quad D = q \times p \quad (5.8.d)$$

Ou, simplesmente pode-se agrupar em uma matriz $ABCD$ representado na equação 5.9.

$$ABCD = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (5.9)$$

Considerando a equação 5.9, pode-se obter os coeficientes do modelo espaço de estados com os termos STF e NTF discreto no tempo no formato representado na equação 5.10 (SCHREIER, 2015).

$$\begin{bmatrix} STF(z) \\ NTF(z) \end{bmatrix} = C_z(z^{-1}I - A_z)^{-1}B_z + Dz \quad (5.10)$$

5.2 Especificações das Topologias

A tópico anterior abordou as etapas de *design* do STF/NTF discreto no tempo, que também pode ser usado para contínuo no tempo, sem ainda entrar em nenhuma especificação de topologia. O próximo tópico irá abordar duas arquiteturas populares na construção de sigma delta e será realizada a síntese de cada uma como exemplo.

5.2.1 *Design* da Arquitetura CIFB

A topologia ilustrada na figura 20 é chamada *Cascade of Integrator with Distributed Feedback* CIFB. Essa topologia é realizada cascadeando uma série de integradores e uma das suas vantagens é sua fácil implementação e a baixa sensibilidade a variação dos componentes. O sinal de entrada precisa passar pela cascata de integradores antes

de chegar ao quantizador, esse mesmo sinal pode causar uma distorção harmônica nos amplificadores operacionais caso não sejam bem projetados.

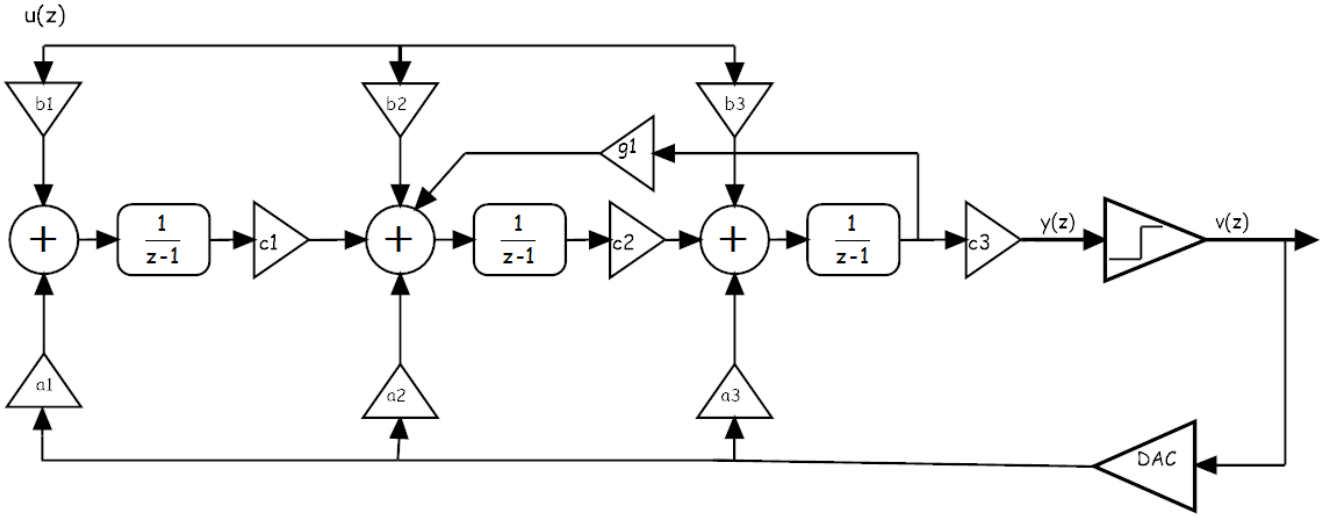


Figura 20: Diagrama da topologia CIFB de terceira ordem. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).

Nota-se que a entrada u é introduzida em cada bloco dos integradores, passando pelos ganhos b_n . Pelo caminho do quantizador até dos integradores, também são introduzidos os ganhos a_n responsáveis pelos pesos na retroalimentação. Entre os integradores nota-se o ganho c_n . É possível extrair os termos STF e NTF em termos dos filtros L_0 e L_1 , considerando que $c_n = 1$ e $g_1 = 0$ no formato:

$$NTF = \frac{1}{1 - L_1} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^L \frac{-a_j}{(z-1)^{L+1-j}}}$$

$$NTF = \frac{1}{\frac{a_1 + a_2(z-1) + \dots}{(z-1)^L}} = \frac{(z-1)^L}{a_L(z-1)^{L-1}} \quad (5.11.a)$$

$$STF = \frac{L_0}{L_1 - 1} = \frac{\sum_{j=1}^{L+1} \frac{b_j}{(z-1)^{L+1-j}}}{1 - \sum_{j=1}^L \frac{-a_j}{(z-1)^{L+1-j}}}$$

$$STF = \frac{b_{L+1}(z-1)^L}{a_L(z-1)^{L-1}} \quad (5.11.b)$$

É possível notar que as equações 5.11.a e 5.11.b têm os mesmos polos denominados pelo ganho a_n , enquanto apenas a equação 5.11.b tem o termo b_n , ou seja, os zeros são diferentes. Para melhorar a performance do SQNR é necessário que os zeros do NTF sejam distribuídos dentro da banda do sinal. Para ilustrar esse tópico, a tabela abaixo mostra os parâmetros de projeto para sintetizar os termos NTF e STF.

Tabela 1: Especificações de Parâmetros da Síntese do NTF/STF.

Parâmetro	Especificação
Domínio	Discreto no Tempo
Topologia	CIFB
Ordem	2
OSR	32
Level de Quantização	1 bit
Banda do Sinal	1KHz
Frequência de Amostragem	1MHz
Frequência Central do Modulador	0
Máxima ganho fora da banda do NTF	1.5
Amplitude da Entrada	1V

De acordo com que foi citado, utilizando (SCHREIER, 2005) como referência pode-se obter a função de transferência do NTF e STF:

$$NTF = \frac{(z - 1)^2}{(z^2 - 1.225z + 0.4415)} \quad (5.12.a)$$

$$STF = 1 \quad (5.12.b)$$

Nota-se que o STF unitário significa que $a_n = b_n$, uma espécie de 'passa tudo'. Toda entrada vindo de u_z não será processada pelos integradores, ou seja, a saída dos integradores terá menor oscilação e causará uma menor distorção no percurso do sinal. Com o STF unitário a equação 5.5.a torna-se $y(z) = u(z) + NTF(z)e_q$, a entrada $u(z)$ não será processada por nenhum integrador.

O modelo de espaço com os ganhos encontra-se na equação 5.13.a e a equação 5.13.b demonstra os ganhos aplicados. Esse modelo é separado por duas colunas da matriz B , sendo a primeira correspondente à entrada do sinal e segunda à saída do DAC. Nota-se que essa decomposição diferente de espaço de estados vem justamente da entrada adicional. Filtros com uma única entrada tem as variáveis dos ganhos distribuídos na própria matriz, por exemplo a matriz A tem os ganhos a_1, a_2, a_3, a_4 dentro dela própria em vez de estarem distribuídos em outras matrizes. A figura 21 representa o plano de polos e zeros da equação 5.12.a, dois zeros se localizam em $z = 1$ e os dois polos são complexos conjugados.

$$ABCD = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b1 & -a1 \\ c1 & 1 & b2 & -a2 \\ \hline 0 & c2 & d1 & 0 \end{array} \right] \quad (5.13.a)$$

$$ABCD = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.000 & 0 & 0.2164 & -0.2164 \\ 1.000 & 1.000 & 0.7749 & -0.7749 \\ \hline 0 & 1.000 & 1.000 & 0 \end{array} \right] \quad (5.13.b)$$

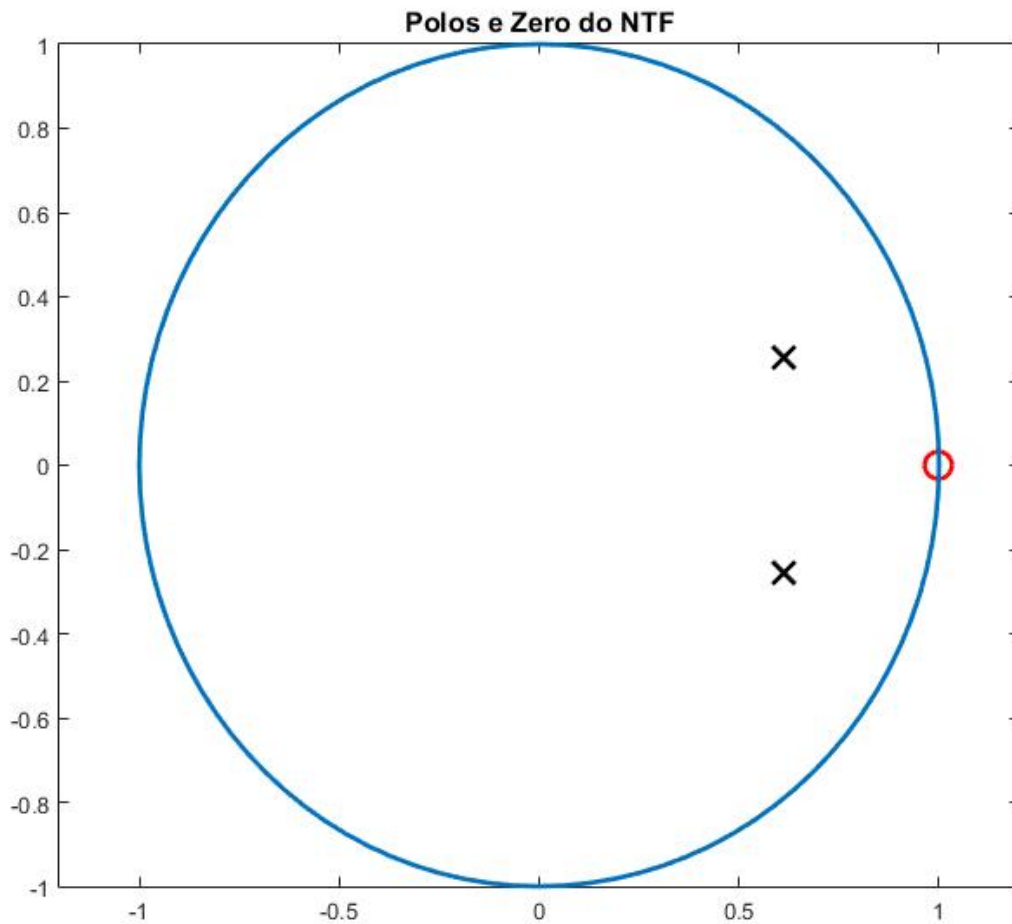


Figura 21: Polos e zeros do NTF.

Simulando esses ganhos no ambiente do Matlab aplicados a topologia da figura 20 pode-se observar a saída do modulador sigma delta na figura 22 no domínio do tempo. A figura 22 é obtida com o sinal de entrada amostrado e colocando condições iniciais para os integradores, dessa forma é possível ter a saída do sinal.

Para obter as informações em relação à SNR é necessário que o gráfico esteja no domínio da frequência no formato de PSD (*Power Spectral Density*, então aplica-se uma FFT para encontrar o espectro do sinal como pode ser observado na figura 23 que dá o valor SNR de $55.3[dB]$. É possível verificar também na figura 23 a técnica de *noise shapping* de segunda ordem sendo aplicada onde há cerca de $40db/decada$. A figura 24 representa o SNR do modulador em função da entrada. A região aonde há o maior número

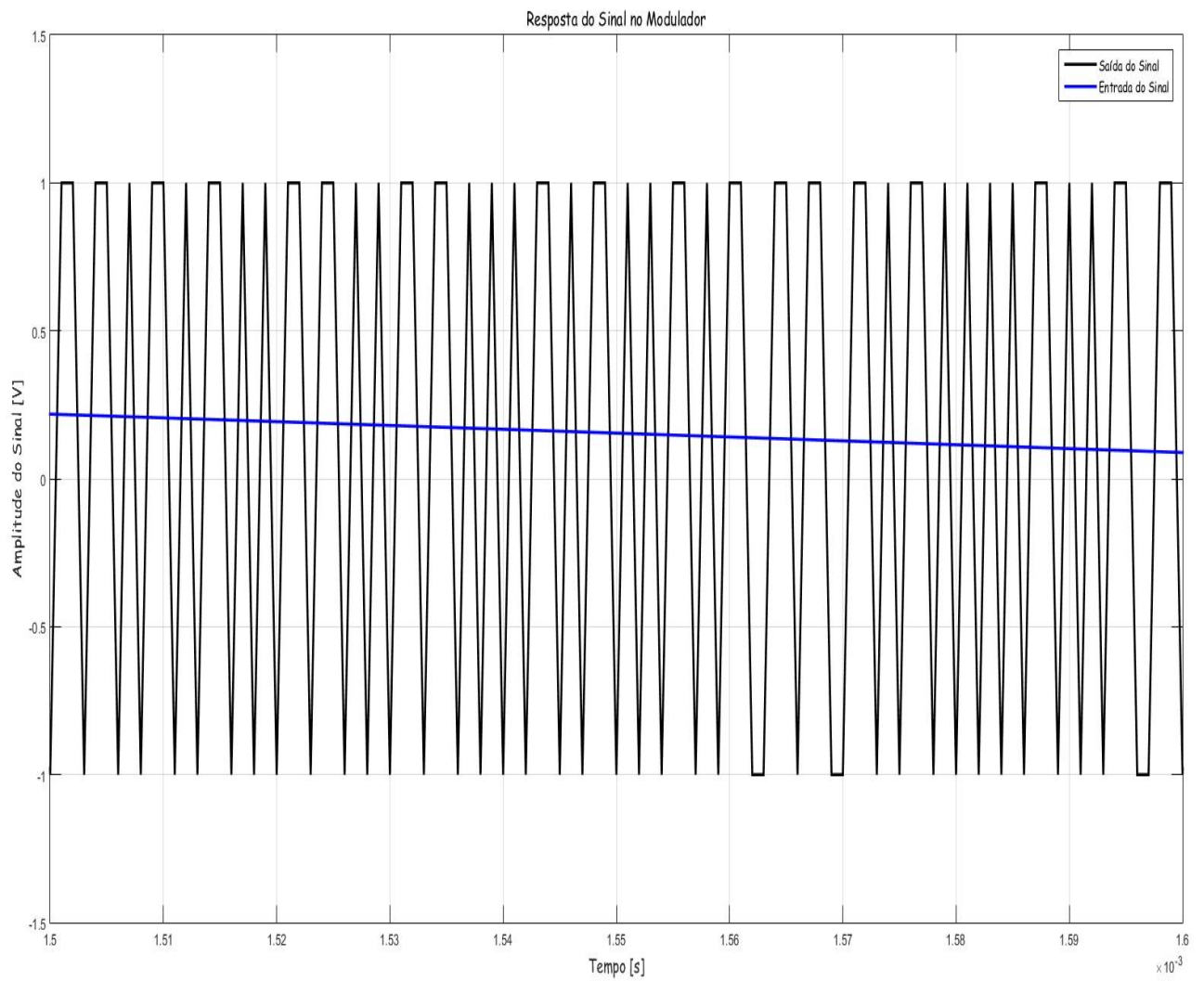


Figura 22: Resposta do Sinal no Domínio do Tempo.

de pontos corresponde ao máximo em relação ao SNR adquirido pelo modulador sigma delta.

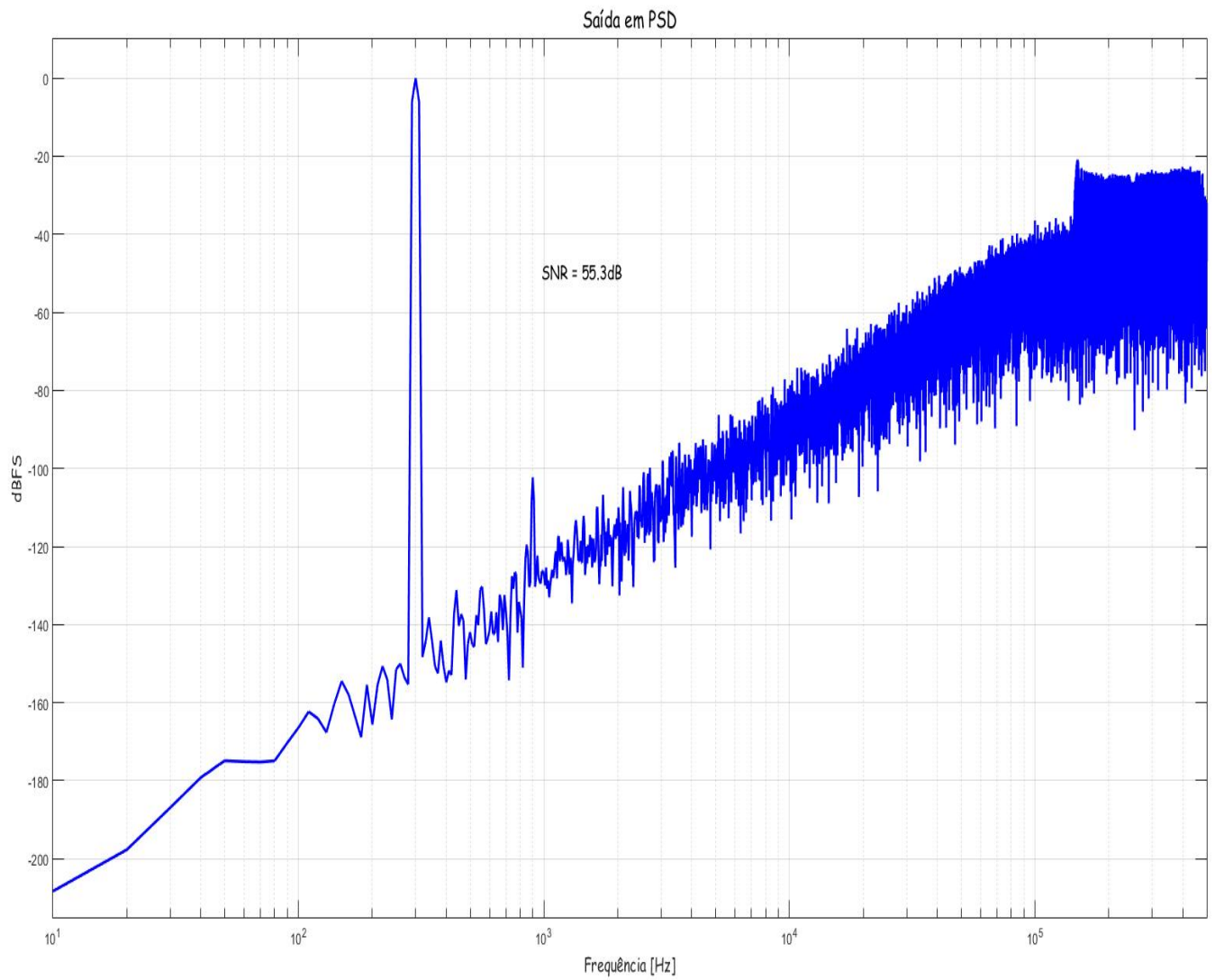


Figura 23: Saída em PSD ilustrando um SNR de 55.3[dB].

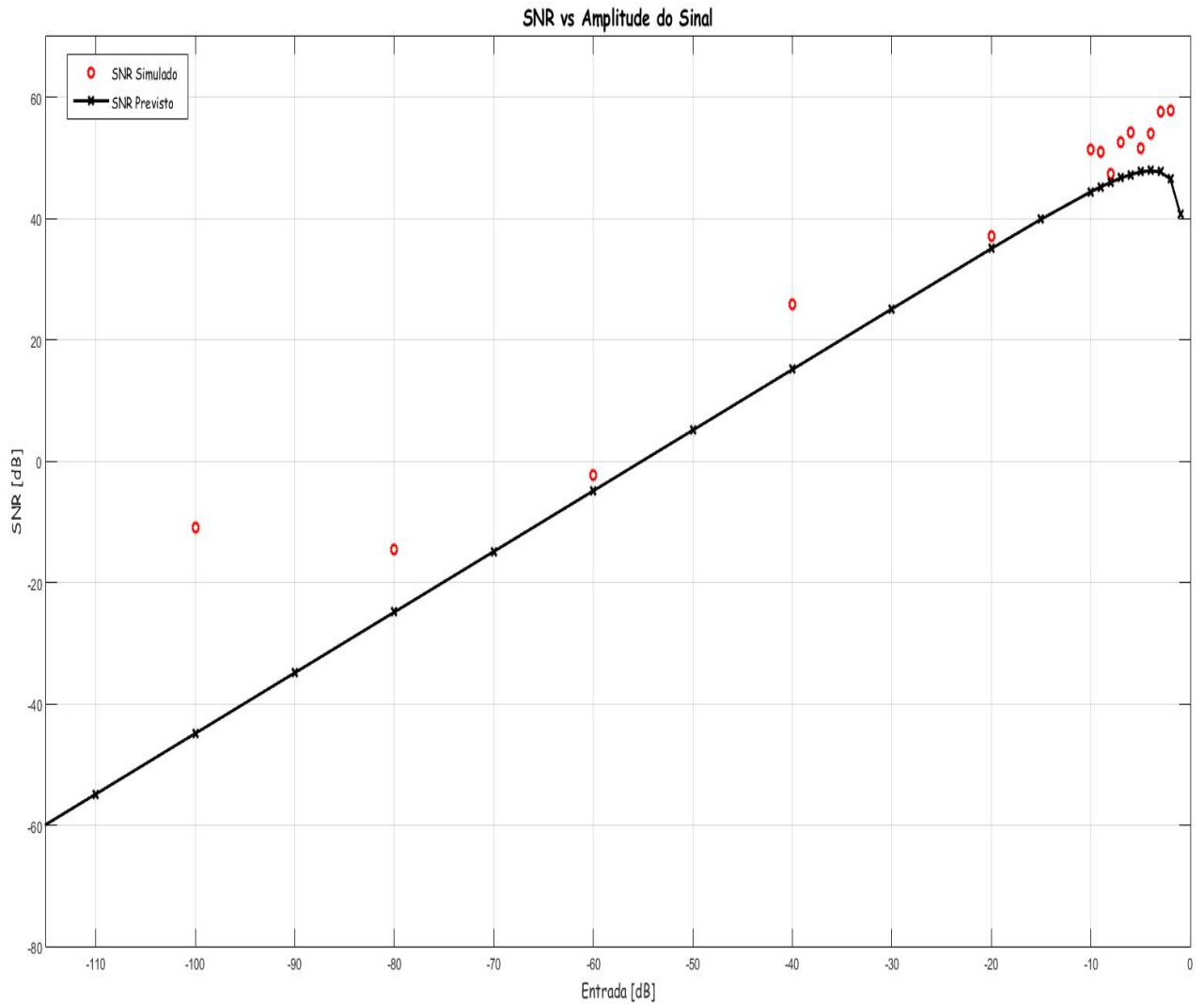


Figura 24: Simulação da entrada do sinal pelo SNR.

5.2.2 Design da Arquitetura CIFF

A topologia CIFF (*Chain of Integrators with Feed-Forward summation*) utiliza a retroalimentação positiva para os filtros L0 e L1 como ilustra a figura 25.

Essa arquitetura tem o consumo de potência menor que CIFB e é melhor para controlar a saída dos integradores, porém necessita de filtro *antialiasing*. A função de transferência em relação aos filtros pode ser resumida da forma:

$$L0 = b_1 \sum_{j=1}^L a_j \frac{(z^{-1})^j}{(1 - z^{-1})^j} + b_2 \sum_{j=2}^L a_j \frac{(z^{-1})^j}{(1 - z^{-1})^j} + b_3 \sum_{j=3}^L a_j \frac{(z^{-1})^j}{(1 - z^{-1})^j} \quad (5.14.a)$$

$$L1 = -a_1 \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} - a_2 \frac{(z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})^2} - a_3 \frac{(z^{-1})^3}{(1 - z^{-1})^3} \quad (5.14.b)$$

Seu modelo de espaço de estados é obtido de forma semelhante da forma:

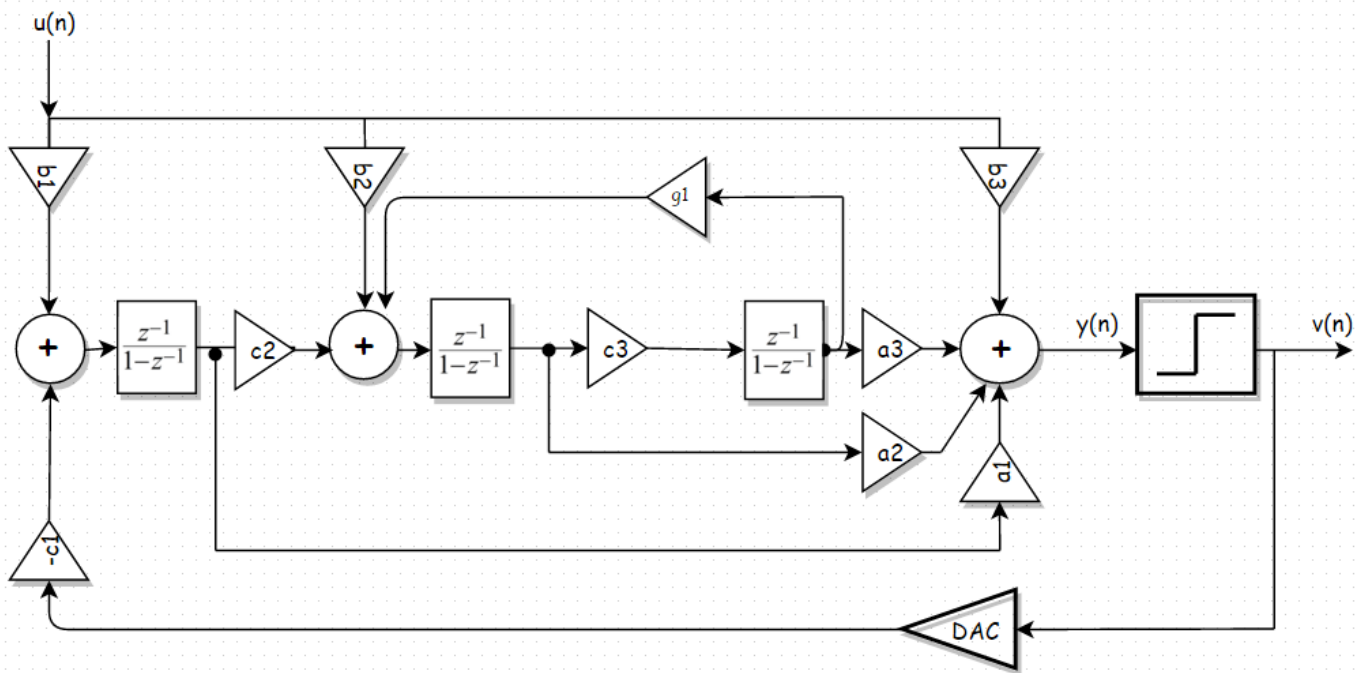


Figura 25: Diagrama da topologia CIFF de terceira ordem. Adaptado de (Richard E. Schreier, 2015).

$$ABCD_{cif} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & b1 & -b1 \\ c1 & 0 & b2 & -b2 \\ \hline a1 & a2 & d1 & 0 \end{array} \right] \quad (5.13.a)$$

Os termos NTF e STF podem ser adquiridos da mesma forma descrita na sessão 5.2.1 e serão sintetizados juntos com a otimização no capítulo 7.

6 Performance da otimização em filtros

Com base nas seções supracitadas, foi criado um algoritmo de otimização do *FDR* que foi testado em diversos modelos e ordem de filtros no domínio contínuo no tempo. O algoritmo implementado pode ser verificado no diagrama de fluxo na figura 16. Os resultados das simulações foram realizados usando o *software matlab*. O algoritmo em questão transforma uma função de transferência em qualquer no modelo de espaço de estados apresentado no capítulo 3 e descobre os valores dos *gramians* usando a equação *lyapunov*. Posteriormente, realiza-se as transformações matriciais e no final é realizado o cálculo do *FDR*. O *FDR* otimizado é comparado com o valor inicial dele calculado e há a verificação se a função de transferência continua com os mesmo valores. Por fim, comparam-se as decomposições matriciais apresentadas em relação à otimização.

6.1 Filtro em cascata

De acordo com a figura 11 do capítulo 3, é possível extrair a função de transferência para um filtro contínuo no tempo e representá-lo em um modelo de espaço de estados. Esse capítulo focará na otimização em modelos de filtros passa baixa e passa banda. A figura 26 mostra o *FDR* para uma função de transferência de segunda a sexta ordem. Essa função de transferência foi obtida inicialmente por valores pré-definidos de um modulador sigma-delta de segunda ordem, equação 5.1. A ordem da função aumenta utilizando a primeira função como produto para o cascadeamento até chegar a sexta ordem.

A linha azul da figura 26 mostra função de transferência antes da otimização utilizando modelo controlável canônico como decomposição matricial. A linha verde tracejada é o modelo de espaço de estados ótimo, ou seja, a otimização aplicada na função de transferência. A linha vermelha representa a decomposição ortonormal. A equação 5.1 representa a função de transferência do filtro, *H1* representa o filtro de segunda ordem, que será implementado com a otimização, e *H2* representa a função que será utilizada como produto para obter uma função de transferência de enésimo grau até o final do cascadeamento.

$$H1 = \frac{2}{s^2 + 4s + 2} \quad (5.1)$$

$$H2 = \frac{1}{s + 0.5}$$

O motivo do *FDR* ter reduzido sua magnitude com a decomposição ortonormal, foi o fato do *gramian* de controlabilidade ter se tornado uma matriz identidade a partir da primeira transformação matricial, ou seja, as matrizes K_k e K_w sempre serão matrizes

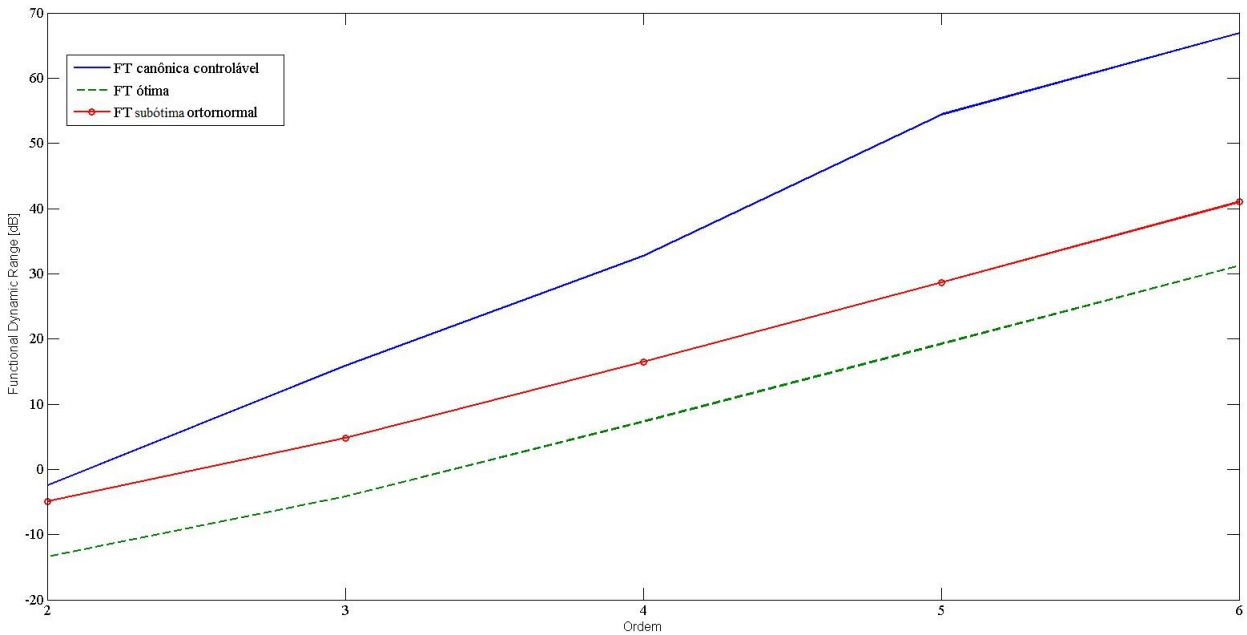


Figura 26: *FDR* versus Ordem da função.

identidades. Outro ponto importante a salientar é o fato do *gramian* de observabilidade também apresentar mudanças significativas nos elementos da sua matriz com o algoritmo, tornando-se no final uma matriz diagonal. De acordo com o capítulo 4 é possível extrair as seguintes relações abaixo.

$$K_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$W_w = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz inicial A eram obtidos diretamente da função de transferência apresentada, ou ainda, pela decomposição matricial contrável canônica. Alguns elementos da matriz inicial A são nulos por conta do formato da decomposição, porém, após as transformações, a matriz tem todos seus elementos não nulos. Semelhante ocorre para as matrizes B e C . Nota-se pela equação 5.3.a a decomposição canônica se tornando uma matriz ótima após as transformações.

$$A_{cont} = \begin{bmatrix} -4.5 & -2 & -0.5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.a)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} -4.4821 & 1.9101 & 0.2832 \\ -1.9101 & -0.0000 & 0.5930 \\ 0.2832 & -0.5930 & -0.0179 \end{bmatrix} A_w = \begin{bmatrix} -0.1341 & 0.0115 & 0.1720 \\ 1.3748 & -3.5838 & 3.4879 \\ -0.8197 & -0.1395 & -0.7821 \end{bmatrix} \quad (5.3.b)$$

As equações 5.4.a e 5.4.b demonstram as transformações nos *gramians* ainda usando a decomposição controlável canônica.

$$K_{cont} = \begin{bmatrix} 0.7392 & -0.0000 & -0.3696 \\ -0.0000 & 0.7392 & -0.0000 \\ -0.3696 & -0.0000 & 3.3264 \end{bmatrix} \quad (5.4.a)$$

$$K_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{cont} = \begin{bmatrix} 3.3264 & 7.4844 & 6.2832 \\ 7.4844 & 17.0247 & 14.9688 \\ 6.2832 & 14.9688 & 16.3086 \end{bmatrix} \quad (5.4.b)$$

$$W_k = \begin{bmatrix} 3.6450 & -6.7636 & 11.9240 \\ -6.7636 & 12.5846 & -21.7850 \\ 11.9240 & -21.7850 & 48.4181 \end{bmatrix} W_w = \begin{bmatrix} 61.9157 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0044 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 2.7275 \end{bmatrix}$$

Com relação à decomposição ortonormal, nota-se pela equação 5.5 a transformação direta do *gramian* de controlabilidade para matriz identidade. Por esse motivo, o valor do *FDR* desse modelo será menor do que outras decomposições matriciais.

$$K_{ortonormal} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Não é possível afirmar que o valor de α_i de acordo com a equação 4.11.b terá um valor menor após a transformação, apesar de alguns elementos da matriz A terem reduzido até cem vezes seu valor, outros acabam aumentando na mesma proporção. Preenchendo a mesma matriz A com elementos não nulos. O valor do capacitor Ci da fórmula 4.11.b foi posto como unitário a fim de simplificar os cálculos.

As figuras 27 e 28 mostram a interpretação geométrica da otimização do *FDR* (ROCHA, 2003), as mesmas figuras mostram a solução do sistema em etapas. A partir

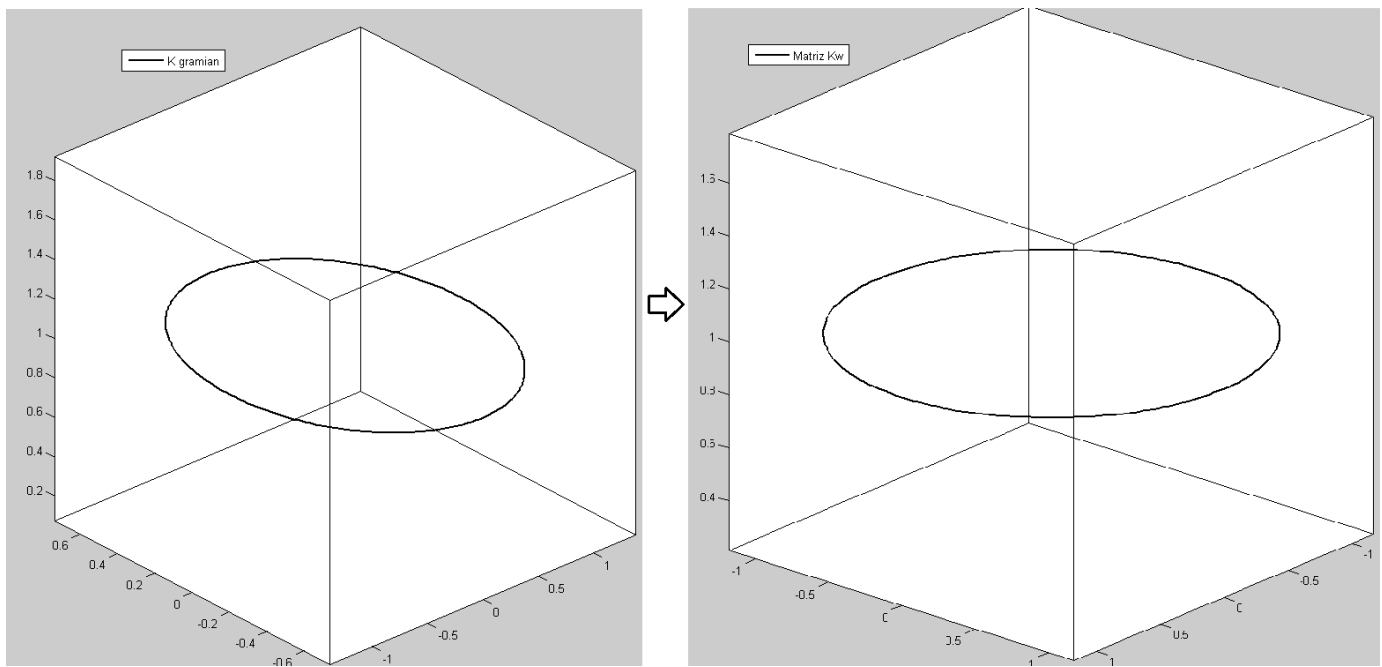


Figura 27: (a) e (b) Interpretação geométrica em 2d dos *gramians*.

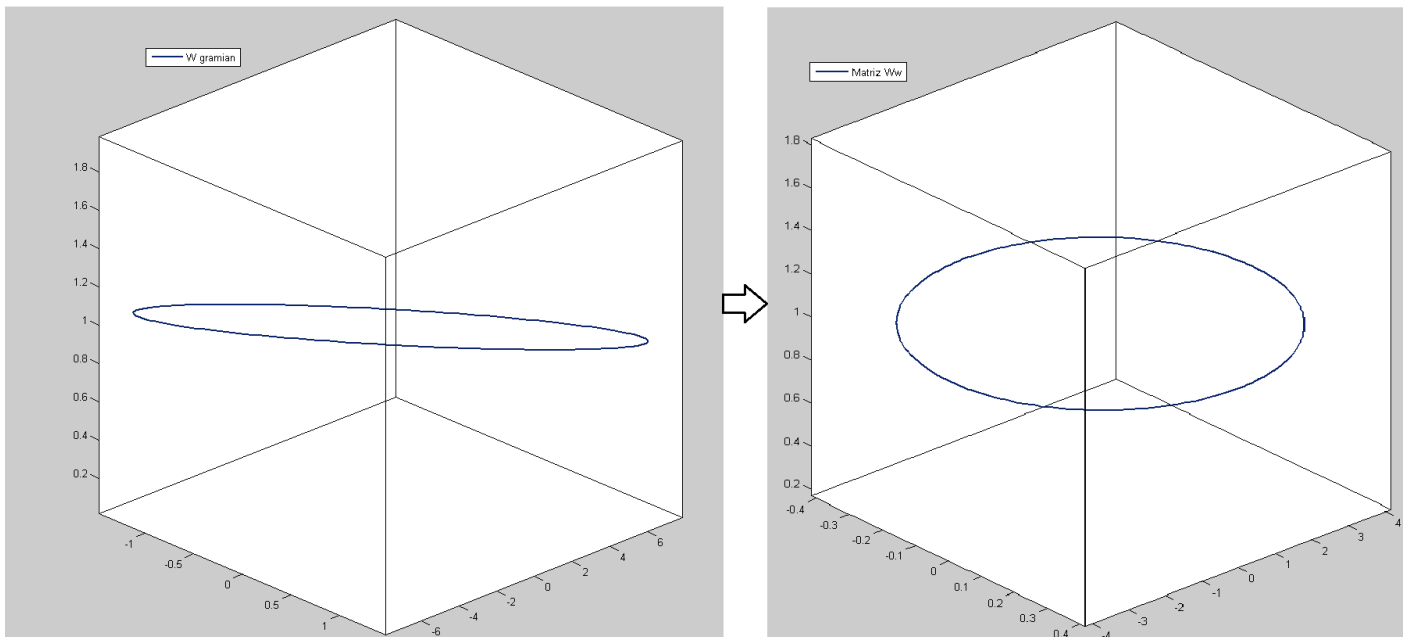


Figura 28: (a) e (b) Interpretação geométrica em 2d dos *gramians*.

do *gramian* de controlabilidade K , partindo de uma função de transferência de segunda ordem. É possível obter uma elipsóide, sendo a direção do seu semieixo os autovetores e comprimento do mesmo semieixo são seus autovalores da matriz K , de acordo com capítulo 4. A partir do resultado da equação 5.4.a foi traçado o primeiro gráfico correspondente, logo em seguida, após a primeira transformação matricial (obtendo a matriz

K_k) é feito novamente o mesmo estilo de gráfico. Por fim, depois da última transformação matricial (em relação a K_w) é traçado o último gráfico em relação à matriz K . A aresta do cubo corresponde às máximas restrições do integrador, porém não foram utilizadas tais restrições para esse trabalho. Na figura 29(a) a elipsóide não está bem-adaptada às restrições do integrador. Na figura 29(b) é realizado aumento dos raios da elipsóide em relação aos eixos, pelo fato da primeira transformação de K já se tornar uma matriz identidade. Por último, a otimização transforma a elipsóide em um círculo já que agora possui o seu raio médio quadrado máximo e que se encaixa dentro dos limites do integrador (HADDAD; SERDIJN, 2008). É importante ressaltar que *output swing* será máximo quando o raio médio quadrado tangenciar os limites do integrador, quando houver a transformação de uma elipsóide para um círculo.

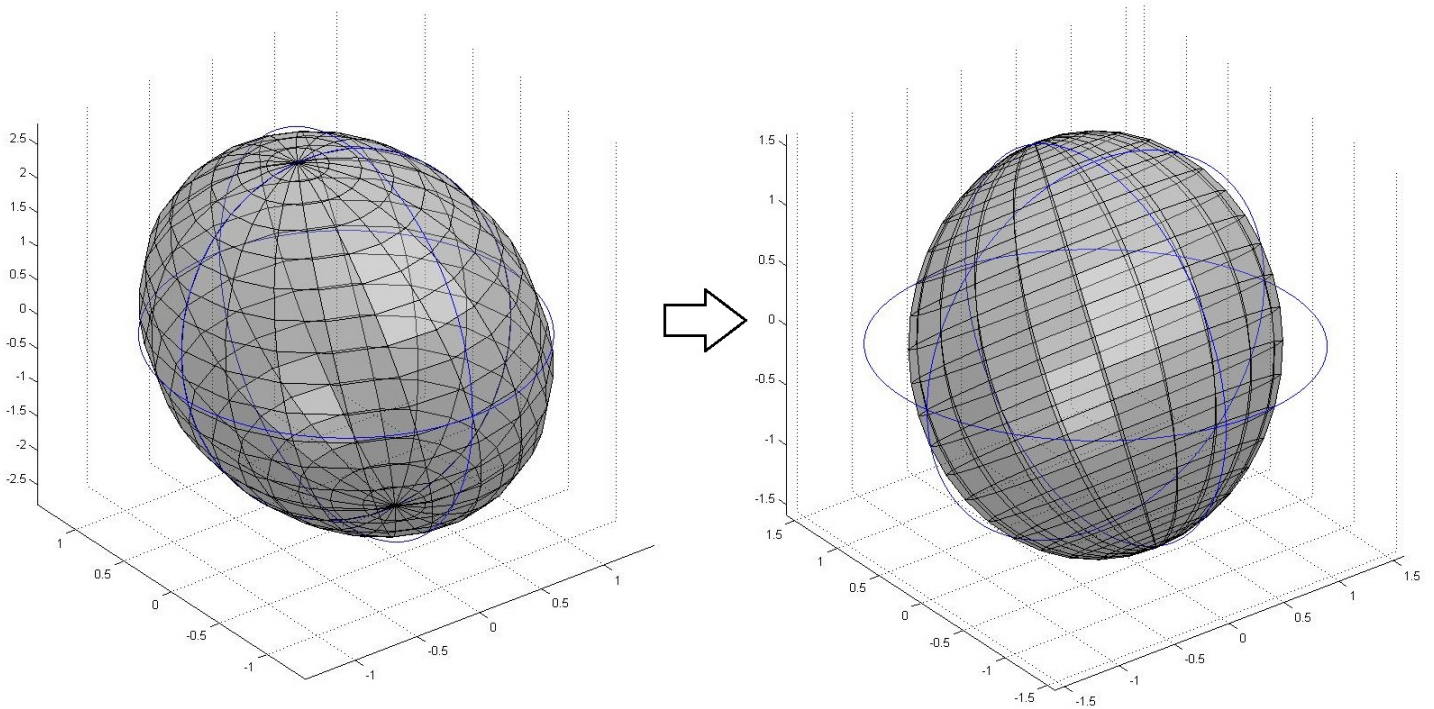


Figura 29: (a) e (b) Interpretação geométrica em 3d dos *gramians*.

6.2 Otimização em Filtros Chebyshev

A otimização é aplicada em um filtro *chebyshev* do tipo um, que utiliza uma frequência de corte de $10Khz$, atingindo os seguintes resultados apresentados na figura 30. As funções de transferência de segunda a sexta ordem foram obtidas utilizando a palavra reservada *cheby1* no *software matlab*, que implementa um filtro de enésima ordem, passa baixa e com frequência de corte escolhida pelo usuário. A *FT* característica obtida tinha

a relação de nenhum zero e vários pólos e as potência dos números discrepantes entre si, no formato $\frac{a10^{13}}{s^3+s^210^4+s10^9+b10^{13}}$.

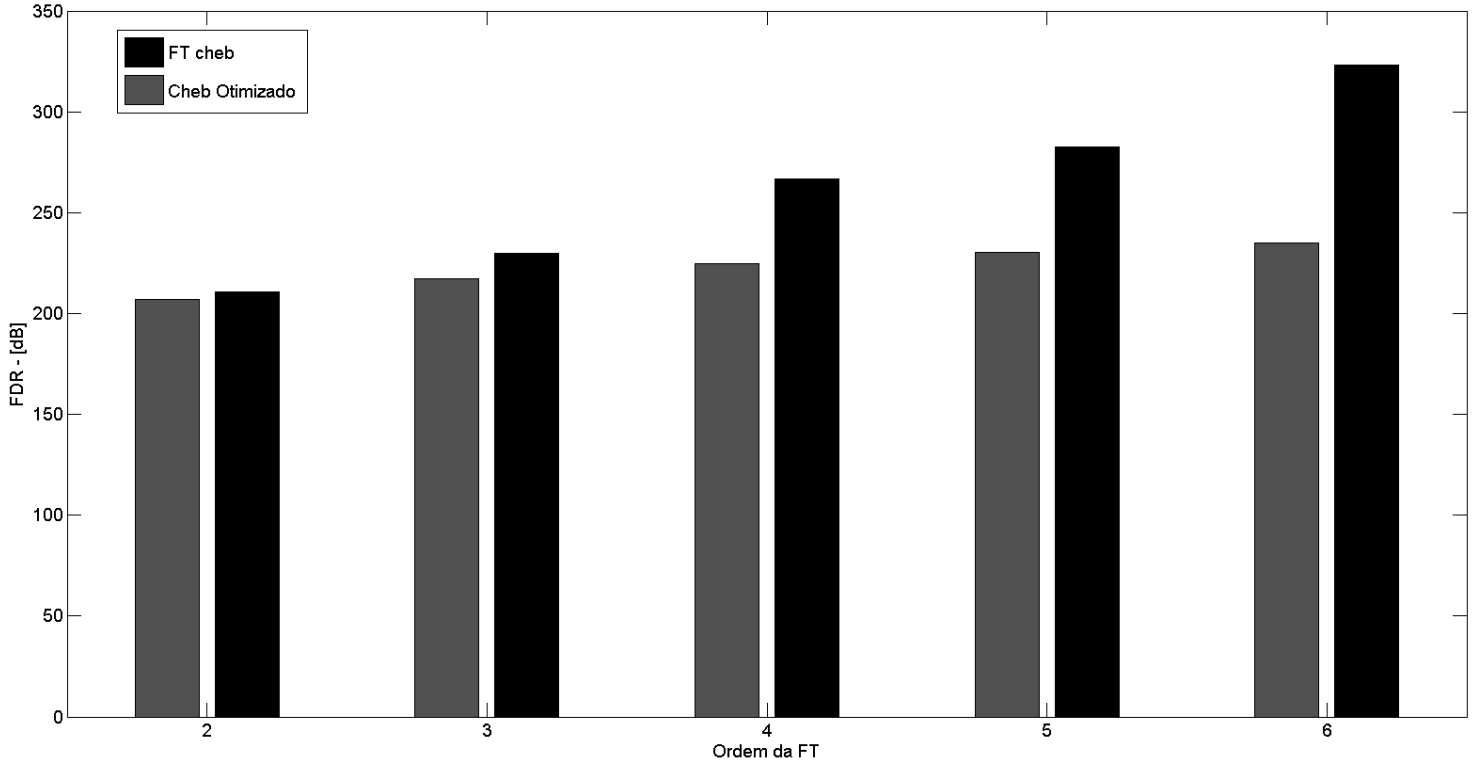


Figura 30: FDR por ordem da função de um filtro do tipo *Chebyshev*.

O FDR tornou-se menor à medida que a ordem da FT se tornava maior. No caso, foi a partir da quarta ordem do filtro. O FDR teve menores valores para matrizes que contêm mais coeficientes de potência elevada. A diferença em relação aos dados da figura 30 são em dB : 3.8513, 12.8181, 41.7517, 51.9183 e 88.0435.

6.3 Otimização em filtro *Butterworth*

Semelhante ao tópico anterior, foi aplicado método em um filtro *Butterworth*. A FT foi obtida utilizando o comando *butter* no *matlab*, em que foi selecionado a ordem do filtro, a frequência de corte ($500Hz$) e o tipo de filtro, no caso passa baixa. O algoritmo do *matlab* gera um FT com mesmo números de polos e zeros e com elementos com potência alta no formato $\frac{s^3a+s^2b+sc+d}{s^3e+s^2f+sg+h}$.

De acordo com a figura 31, nota-se que para ordens mais baixas, a otimização não é eficiente pelo motivo de poucos coeficientes nas matrizes, porém para ordens mais altas, os valores não otimizados e otimizados são discrepantes. O método mostrando uma performance maior em FT com muitos pólos e zeros e com elementos com altas potências.

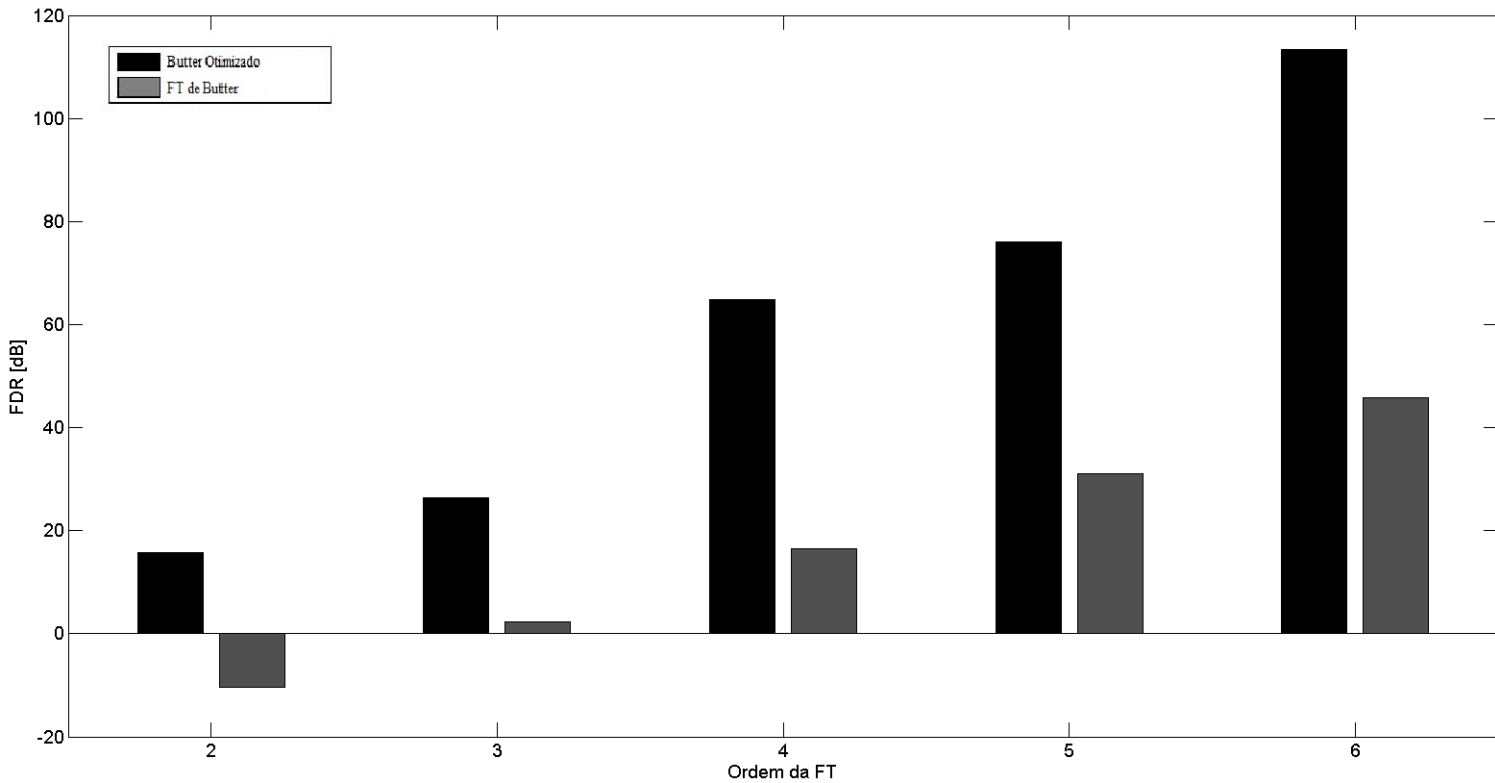


Figura 31: *FDR versus* ordem da função de um filtro do tipo *Butterworth*.

A diferença dos dados preto e cinza da figura 31 são em *dB*: 5.4097, 24.0886, 48.3736, 44.9077, 67.6699.

6.4 Transformação em *Schur*, *Hessenberg* e Ortonormal

A função *tf2ss* no *matlab* utiliza uma forma controlável canônica diferente da vista no capítulo 3 para decomposição matricial, enquanto a função *ss* resulta em um modelo canônico com a ordem do espaço de estados invertida. Tanto a função *tf2ss* como a *ss* resultam em diferentes valores para *DR* inicial, pois os elementos de suas matrizes não são os mesmos. Todavia, para achar o espaço de estados que mais se aproxima do ótimo, foi realizado a otimização em diversas decomposições matriciais para a mesma função de transferência da equação 5.6. E os resultados obtidos podem ser observados na figura 32.

$$H3 = \frac{2}{2s^3 + 4.5s^2 + 4s + 1} \quad (5.6)$$

Como pode-se observar com a figura 32, o modelo que mais se aproxima do ótimo é a estrutura ortonormal, dita subótimo. O valor de seu *FDR* é próximo do valor otimizado.

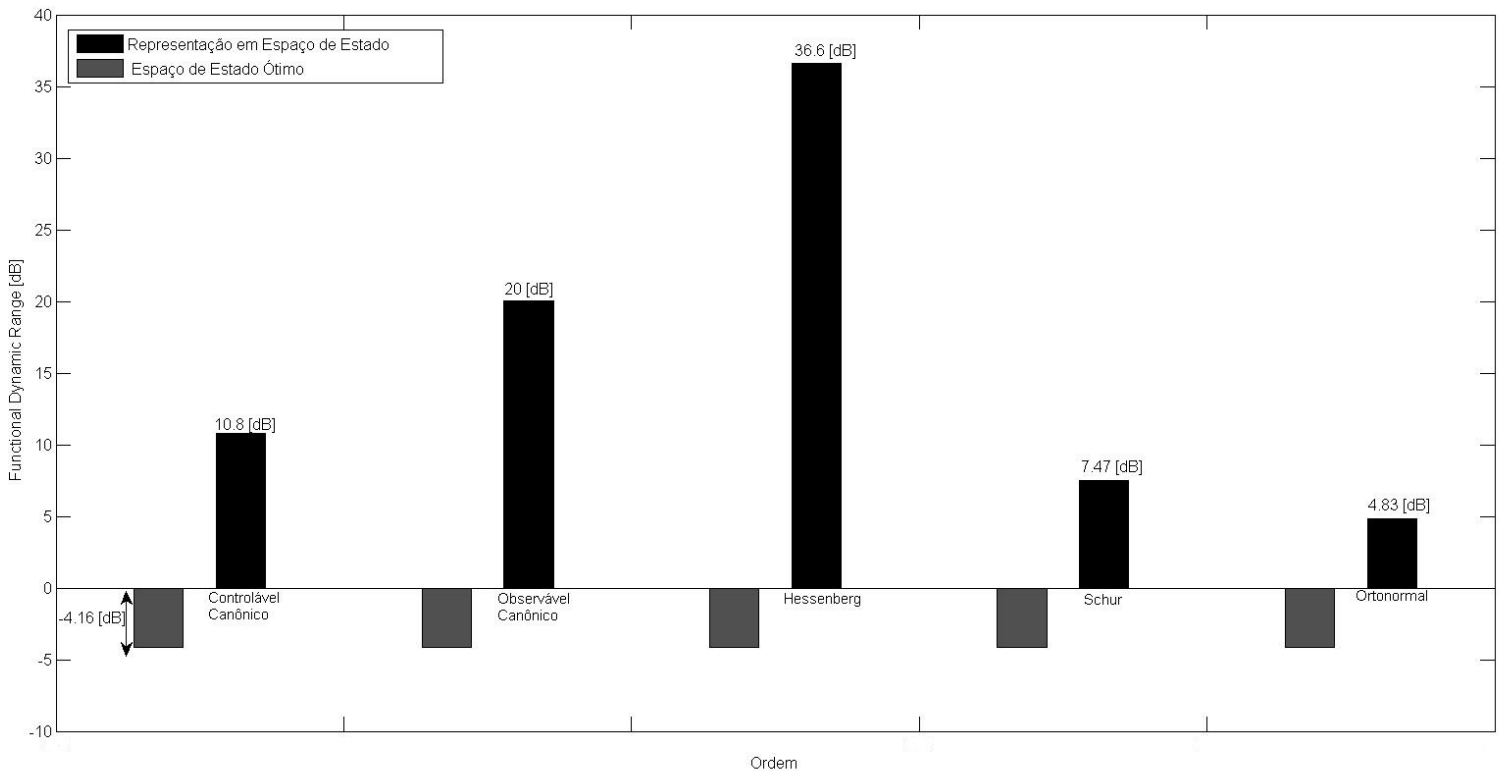


Figura 32: Gráfico comparando diversas decomposições matriciais em relação espaço de estados ótimo.

O motivo dessa aproximação é o fato que a transformação ortonormal é a única em que a matriz K se torna identidade no resultado da equação de *Lyapunov*. Diferente dos outros modelos em que a matriz K apenas se torna identidade a partir da primeira transformação T_k como visto no capítulo 4. Portanto o modelo ortonormal é ideal para filtros de alta ordem, pois a sua estrutura permite um número menor de elementos a serem adicionados na topologia do circuito. Já que é fundamental implementar circuitos que são menos sensíveis às variações dos componentes (HADDAD; SERDIJN, 2008). Sistemas dinâmicos com DR ótimo também são eficientes em sensibilidade (GROENEWOLD, 1992).

6.5 Discussão

Partindo de uma função de transferência, pode-se derivar a mesma para um modelo de espaço de estado que é a própria descrição de um filtro. Existe apenas um espaço de estado ótimo, que ao ser implementado na topologia do circuito se adquire o máximo *dynamical range* (HADDAD; SERDIJN, 2008). Por meio da equação da *Lyapunov*, é possível obter os *gramians* de controlabilidade e observabilidade que estão relacionados com os sistema de matrizes A , B e C . Esses *gramians* são essenciais para determinar a

magnitude do DR , assim como são utilizados em um modelo de transformação matricial com o intuito de obter a otimização do FDR em questão. As transformações matriciais mudam os elementos das matrizes iniciais A , B e C , todavia a função de transferência não é alterada.

Os resultados mostrados pela otimização foram satisfatórios, especialmente para função de transferência com ordem elevada. Nota-se pela figura 26, que a magnitude do FDR inicial e o FDR otimizado são semelhantes para ordem baixa da função de transferência, já que os coeficientes têm valores próximos. Para ordem elevada, a performance da otimização tem efeitos melhores pois os valores das variáveis são discrepantes e preenchem mais as matrizes iniciais. Nota-se pela figura 32, que os piores valores de FDR são a forma controlável canônica, observável canônica e decomposição de *Hessenberg*. Esses valores altos são justificados pelos modelos de decomposição matricial que utilizam, geralmente baseados na obtenção de polos e zeros direto da função de transferência. A principal vantagem do modelo ortonormal é pelo fato da decomposição matricial obter apenas duas diagonais preenchidas e restantes dos elementos nulos, obtendo um valor de FDR próximo do ótimo.

Para os filtros do tipo *butterworth* e *chebyshev* a performance da otimização foi melhor para o primeiro filtro do que o segundo. Através das palavras reservadas *butter* e *cheb*, foram obtidas funções de transferência com coeficientes com potência alta e discrepantes entre si. E, como supracitado, o algoritmo trabalha principalmente em matrizes com elementos grandes, portanto a otimização se torna mais eficiente nesse caso. Foi utilizada a função *tf2ss* do matlab que transforma a função de transferência em modelo de espaço de estados semelhantes ao modelo canônico controlável. Para melhores resultados, espera-se o uso do modelo ortonormal, que é o modelo que mais se aproxima do ótimo.

Neste trabalho, o algoritmo de otimização foi testado em filtros de segunda a sexta ordem, filtro *butterworth* e *chebyshev* com representações de espaço de estados de *hessenberg*, *schur*, controlável canônico, observável canônico e ortonormal. Para circuitos integrados analógicos no contexto de baixa potência e baixa tensão, é importante se preocupar com aspectos como *dynamic range*, sensibilidade e esparsidade.

7 Performance da otimização no STF e NTF

No capítulo 5 foram apresentadas diversas topologias de moduladores sigma delta e suas características técnicas. Cada topologia tem um número limitado de NTFs pelas limitações e distribuições dos ganhos no circuito. Entretanto, há outros fatores que podem ser otimizados em moduladores sigma delta para obter melhores resultados em relação à estabilidade. Nesse capítulo será apresentado o comportamento da otimização em STF e NTF extraídos das topologias citadas. As componentes STF e NTF nesse contexto serão consideradas como filtros em um sistema SISO (*Single Input Single Output*) (Richard E. Schreier, 2015) (MATLAB, 2015).

7.1 Especificação dos parâmetros

As arquiteturas CIFF e CIFB são muito utilizadas por projetista por conta da alta velocidade e processo de *sub-micron* (GHARBIYA; JOHNS,). A partir dessas arquiteturas foram obtidos os fatores NTF e STF de acordo com os parâmetros da tabela 2.

Tabela 2: Especificações de Parâmetros da Síntese do NTF.

Parâmetro	Especificação
Domínio	Discreto no Tempo
Topologia	CIFF
Ordem	2
OSR	32
Level de Quantização	2
Frequência Central do Modulador	0
Máxima ganho fora da banda do NTF	1.5
DAC	NRZ

7.2 Síntese e Simulação da Topologia CIFF

Utilizando as *toolboxes* Delta-Sigma e *Optimization* no ambiente do Matlab é possível obter uma função de transferência no domínio discreto e posteriormente convertê-la para o domínio contínuo. Baseado no fluxograma da figura 17 e a tabela 2, é possível formar a seguinte função de transferência:

$$ntfz = \frac{(z - 1)^2}{(z^2 - 1.009z + 0.7836)} \quad (7.1)$$

Pode-se mapear a equação 7.1 no modelo de espaço de estado adotado no capítulo 5. Nota-se que pelo fato do modulador sigma delta conter duas entradas, o sistema de espaço de estados ganha mais uma coluna na matriz B . O fato de isso acontecer é devido à entrada do quantizador ou à saída do DAC transformar o sistema SISO em MISO. A otimização proposta nesse trabalho se restringe apenas a sistemas SISO, por isso necessita-se separar as entradas em dois sistemas diferentes.

$$ABCD_z = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 1.0000 & -0.7749 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & -0.9912 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

A equação 7.3 representa o modelo do STF que será utilizado. Nota-se que para obter um modelo passa baixa é necessário cancelar os ganhos de b_2 e b_3 , caso contrário STF será considerado um 'passa tudo' ou simplesmente terá o valor de 1. Para algumas arquiteturas, não é possível obter um STF com o valor unitário. Por questões de simplificação, os ganhos b_2 e b_3 serão iguais a zero. Então da equação 7.2 é possível obter:

$$stfz = \frac{z}{(z^2 - 1.009z + 0.7836)} \quad (7.3)$$

Pode-se separar a equação 7.2 no seguinte formato matricial MISO:

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.a)$$

$$B_z = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.7749 \\ 1.0000 & -0.9912 \end{bmatrix} \quad (7.4.b)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.c)$$

$$D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.d)$$

Nesse ponto já há informação o suficiente para montar um modelo contínuo no tempo. Entre os métodos de transformação discreto para contínuo, o método de Tustin ou aproximação Bilinear mostrou maior precisão no domínio da frequência. Todavia, o método de Tustin não está definido para polos próximos ou iguais a $z = 1$. Utilizando método Tustin como método de transformação de discreto-contínuo para $ntfz$ e $stfz$ com o tempo de amostragem $Ts = 1$:

$$ntfc = \frac{1.4325s^2}{(s^2 + 0.3099s + 1.11)} \quad (7.5.a)$$

$$stfc = \frac{-0.35811(s+2)(s-2)}{(s^2 + 0.3099s + 1.11)} \quad (7.5.b)$$

7.3 Otimização em STF_c

Nota-se que a conversão resultante do *stfc* tem os mesmo polos que *ntfc*, porém não se trata de um filtro passa baixa. Em projetos de moduladores sigma delta, geralmente, escolhe-se primeiro o fator NTF e depois modela-se o STF baseado nas especificações técnicas do conversor. Em muitos projetos o STF é apenas um *delay* do tipo $\frac{1}{z}$.

Inicialmente, há a conversão para o modelo de espaço de estados do *stfc* como segue a equação 7.6:

$$A_s = \begin{bmatrix} -0.155 & 1.042 \\ -1.042 & -0.155 \end{bmatrix} \quad (7.6.a)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.103 \end{bmatrix} \quad (7.6.b)$$

$$C_s = [1.577 \quad 0.10061] \quad (7.6.c)$$

$$D_s = [-0.3581] \quad (7.6.d)$$

Esse modelo apresentado é semelhante ao modelo canônico controlável. E da resolução da equação de Lyapunov os gramians de controlabilidade e observabilidade são dados como:

$$K_s = \begin{bmatrix} 12.0672 & 1.7946 \\ 1.7946 & 12.6010 \end{bmatrix} \quad (7.7.a)$$

$$W_s = \begin{bmatrix} 25.3839 & 3.7220 \\ 3.7220 & 25.2336 \end{bmatrix} \quad (7.7.b)$$

Utilizando a primeira transformação no espaço Tk_s para obter as novas matrizes:

$$Ak_s = \begin{bmatrix} -0.1550 & -1.2085 \\ 0.8986 & -0.1550 \end{bmatrix} \quad (7.8.a)$$

$$Bk_s = \begin{bmatrix} 0.2221 \\ 0.2221 \end{bmatrix} \quad (7.8.b)$$

$$Ck_s = [-3.6604 \quad 4.1602] \quad (7.8.c)$$

$$Dk_s = [-0.3581] \quad (7.8.d)$$

E os novos gramians em relação a Tk_s serão:

$$Kk_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.9.a)$$

$$Wk_s = \begin{bmatrix} 227.6304 & -7.5864 \\ -7.5864 & 410.0097 \end{bmatrix} \quad (7.9.b)$$

Utilizando a transformação no espaço Tw_s as matrizes ótimas e os gramians são respectivamente:

$$Aw_s = \begin{bmatrix} -0.1678 & -1.2080 \\ 0.8991 & -0.1421 \end{bmatrix} \quad (7.10.a)$$

$$Bw_s = \begin{bmatrix} -0.2311 \\ -0.2127 \end{bmatrix} \quad (7.10.b)$$

$$Cw_s = [3.4847 \quad -4.3084] \quad (7.10.c)$$

$$Dw_s = [-0.3581] \quad (7.10.d)$$

$$Kw_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.10.e)$$

$$Ww_s = \begin{bmatrix} 227.3154 & 0 \\ 0 & 410.3247 \end{bmatrix} \quad (7.10.f)$$

De acordo com os capítulos 4 e 5, no final da otimização é necessário obter o gramian K na forma de matriz identidade e W na forma de matriz diagonal. A figura 33, ilustra as diferenças do gramian K e do gramian Kw em relação ao sinal. Enquanto a figura 34, mostra a diferença entre os gramians W e Ww referente ao ruído interno do sistema.

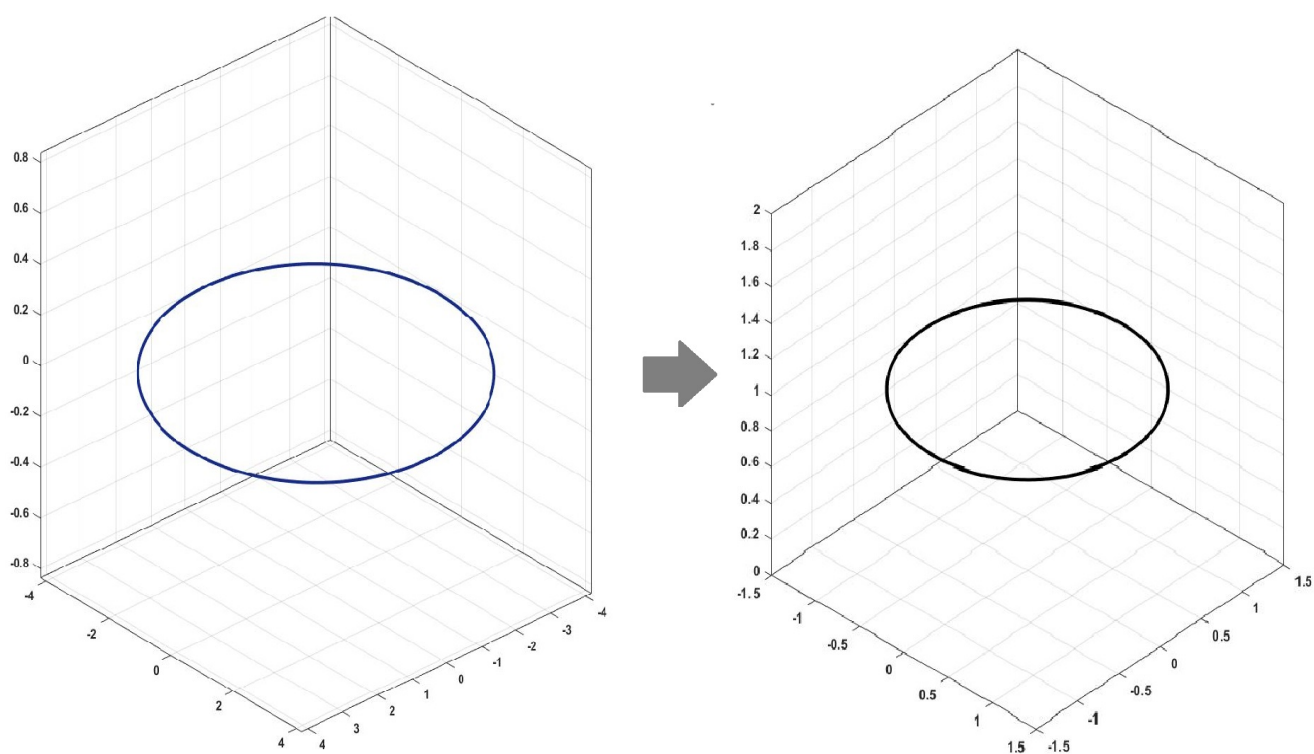
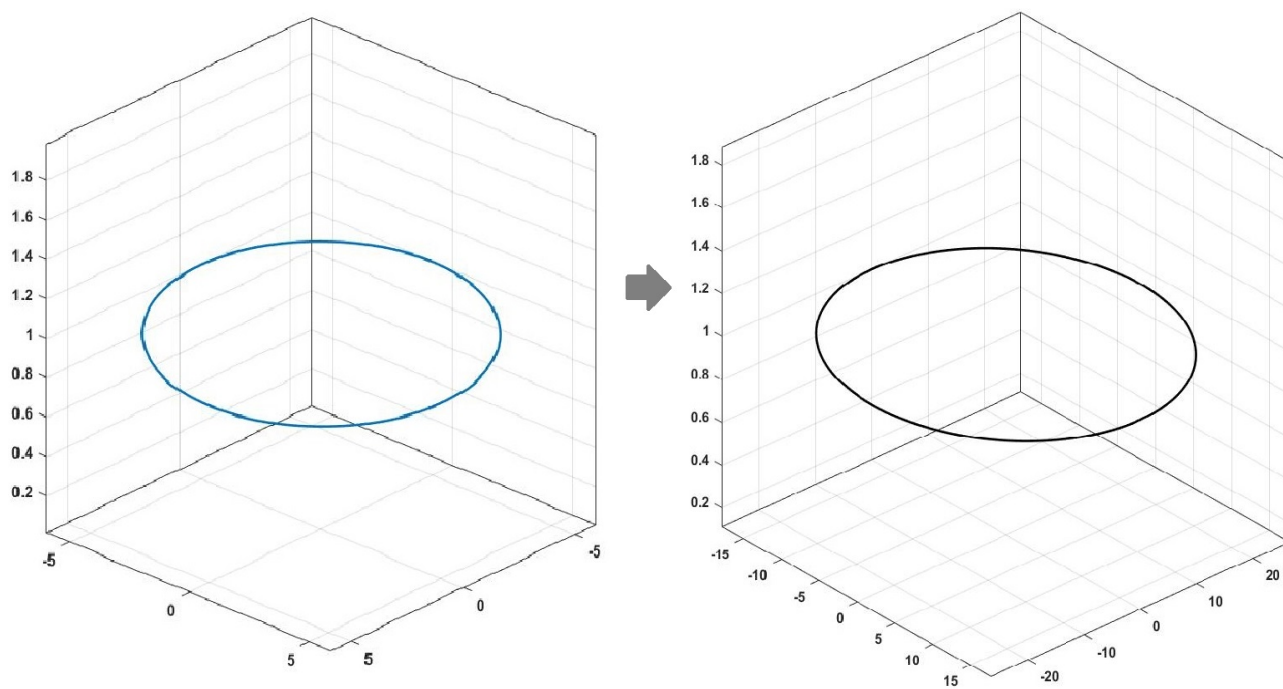
A equação 7.11.a mostra a diferença entre o FDR inicial e o FDR final referente à equação 7.5.b e a equação 7.11.b função de transferência das matrizes Aw_s , Bw_s , Cw_s , Dw_s .

$$FDR_{inicial} = 25.7291[dB] \quad FDR_{final} = 25.4572[dB] \quad (7.11.a)$$

$$stf_{c_w} = \frac{-0.3581s^2 + 1.432}{(s^2 + 0.3099s + 1.11)} \quad (7.11.b)$$

Nota-se que a equação 7.11.b é igual a 7.5.b. E por fim, converte-se a equação 7.11.b para o domínio discreto usando o mesmo método de Tustin.

$$stf_{z2} = \frac{1.11e - 16z^2 + z - 1.11e - 16}{z^2 - 1.009z + 0.7836} \quad (7.12)$$

Figura 33: (a) Gramian K e (b) Gramian Kw com sinal otimizado.Figura 34: (a) Gramian W e (b) Gramian Ww com ruído minimizado.

7.4 Discussão

O procedimento descrito na sessão anterior teve como objetivos: diminuir o FDR de um filtro STF extraído de modulador sigma delta, obter as matrizes ótimas do sistema e obter o argumento geométrico das figuras 33 e 34. Para que o procedimento seja realizado, é necessária a síntese dos filtros STF e NTF da topologia CIFF no domínio discreto, utilizando os parâmetros mostrados na tabela 2 (SCHREIER, 2005). A equação 7.2 é a descrição em espaço de estados do STF e NTF da topologia CIFF com seus respectivos ganhos espalhados na matriz. Como esse modelo de espaço de estados utiliza duas colunas para a matriz B , já que considera duas entradas (sinal e quantizador) em um sistema MISO, é preciso utilizar os termos STF e NTF separados na otimização. Após a síntese do NTF e STF discreto, convertem-se ambos para o modelo contínuo no tempo, dessa forma é possível obter o modelo de espaço de estados de cada um e aplicar o algoritmo da otimização.

A Tabela 3 mostra uma comparação entre vários métodos de conversão discreto-contínuo e seus respectivos FDR de cada método. Conclui-se que o método de Tustin obteve o melhor valor de FDR e o método de ZOH o pior valor. É possível observar também que há apenas um valor de FDR ótimo para qualquer representação em espaço de estados. Cada método de conversão obteve um valor de FDR inicial porque as funções de transferência são diferentes, dessa forma os valores de FDR otimizados também serão diferentes.

Tabela 3: Diferentes valores de FDR baseado na conversão discreto-contínuo do STF.

Método da Conversão	Função de Transferência	$FDR_{inicial}$	FDR_{final}
Tustin	$\frac{-0.35811(s+2)(s-2)}{(s^2+0.3099s+1.11)}$	25.7291	25.4572
ZOH	$\frac{0.63516(s+1.921)}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	24.5326	24.3844
FOH	$\frac{1.3259s^2}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	23.9438	23.7498
Matched	$\frac{1.2199s^2}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	22.4958	22.3018

Os resultados contidos na tabela 4 foram obtidos utilizando o modelo semelhante ao controlável canônico, diferentes decomposições de espaço de estados resultam em diferentes valores de FDR . A tabela 4 ilustra os diferentes valores de FDR para cada modelo de espaço de estado. Pode-se observar que modelo Ortonormal e *Schur* obtiveram os menores valores de FDR , podendo concluir que são os mais indicados para a síntese de um filtro STF passa baixa ou passa banda contínuo no tempo. A tabela 4 também ilustra as matrizes $ABCD$ de cada modelo sendo cada valor da matriz seus respectivos ganhos. O modelo usado na decomposição das matrizes utilizado na tabela 4 está representado na

equação 5.9.

Tabela 4: Diferentes valores de FDR para modelos de Espaço de Estados.

Modelo do Espaço de Estados	Matriz ABCD	$FDR_{inicial}$	FDR_{final}
Ortonormal	$\left[\begin{array}{cc c} 0 & 1.0536 & 0 \\ -1.0535 & -0.3099 & 0.3141 \\ \hline 4.3276 & -1.1402 & 0 \end{array} \right]$	22.7053	22.4219
Controlável Canônico	$\left[\begin{array}{cc c} 0 & 1.0000 & 0 \\ -1.1100 & -0.3099 & 1 \\ \hline 1.4320 & -0.3581 & 0 \end{array} \right]$	23.1068	22.4219
Observável Canônico	$\left[\begin{array}{cc c} 0 & -1.1100 & 1.4320 \\ 1.0000 & -0.3099 & -0.3581 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$	24.1711	22.4219
Schur	$\left[\begin{array}{cc c} -0.1550 & 0.8906 & 0.5768 \\ -1.2194 & -0.1550 & 0.8169 \\ \hline 0.9632 & -1.1186 & 0 \end{array} \right]$	22.7090	22.4219
Hessenberg	$\left[\begin{array}{cc c} 0 & 1.0000 & 0 \\ -1.1100 & -0.3099 & 1 \\ \hline 1.4320 & -0.3581 & 0 \end{array} \right]$	23.1068	22.4219

7.5 Otimização em NTFC

O procedimento realizado aqui é semelhante ao tópico 7.3, utilizando a equação 7.5.a como referência inicial é possível decompor para espaço de estados contínuo no tempo como:

$$A_{ntf} = \begin{bmatrix} -0.155 & 1.042 \\ -1.042 & -0.155 \end{bmatrix} \quad B_{ntf} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.032 \end{bmatrix} \quad (7.13.a)$$

$$C_{ntf} = \begin{bmatrix} -1.414 & -0.4302 \end{bmatrix} \quad D_{ntf} = \begin{bmatrix} 1.432 \end{bmatrix} \quad (7.13.b)$$

E os gramians são:

$$K_{ntf} = \begin{bmatrix} 10.5626 & 1.5708 \\ 1.5708 & 11.0298 \end{bmatrix} \quad (7.14.a)$$

$$W_{ntf} = \begin{bmatrix} 20.7566 & 2.9442 \\ 2.9442 & 23.54958 \end{bmatrix} \quad (7.14.b)$$

A novas matrizes em relação a Tk_{ntf} geram:

$$Ak_{ntf} = \begin{bmatrix} -0.1550 & -1.2085 \\ 0.8986 & -0.1550 \end{bmatrix} \quad Bk_{ntf} = \begin{bmatrix} 0.2221 \\ 0.2221 \end{bmatrix} \quad (7.15.a)$$

$$Ck_{ntf} = \begin{bmatrix} 2.3979 & -4.3969 \end{bmatrix} \quad Dk_{ntf} = \begin{bmatrix} 1.432 \end{bmatrix} \quad (7.15.b)$$

E os gramians de Tk_{ntf} :

$$Kk_{ntf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16.a)$$

$$Wk_{ntf} = \begin{bmatrix} 175.2810 & 10.1259 \\ 10.1259 & 312.9586 \end{bmatrix} \quad (7.16.b)$$

E por fim, as matrizes ótimas do sistema e seus gramians:

$$Aw_{ntf} = \begin{bmatrix} -0.1324 & -1.2069 \\ 0.9002 & -0.1775 \end{bmatrix} \quad Bw_{ntf} = \begin{bmatrix} -0.2053 \\ -0.2377 \end{bmatrix} \quad (7.15.a)$$

$$Cw_{ntf} = \begin{bmatrix} -2.7124 & 4.2103 \end{bmatrix} \quad Dw_{ntf} = \begin{bmatrix} 1.4325 \end{bmatrix} \quad (7.15.b)$$

$$Kw_{ntf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.17.a)$$

$$Ww_{ntf} = \begin{bmatrix} 174.5402 & 0 \\ 0 & 313.6993 \end{bmatrix} \quad (7.17.b)$$

A combinação das equações 7.15.a e 7.15.b geram uma função de transferência, equação 7.18, com dois resíduos muito pequenos podendo ser desconsiderados. E sua transformação contínuo-discreto utilizando o método de *Tustin* retorna à mesma função de transferência inicial.

$$ntfc_2 = \frac{1.432s^2 - 2.438e - 16s + 4.092e - 16}{s^2 + 0.3099s + 1.11} \quad (7.18)$$

A diferença entre o FDR inicial e final resulta em:

$$FDR_{inicial} = 23.4157[dB] \quad FDR_{final} = 23.2184[dB] \quad (7.19)$$

7.6 Discussão

O tópico anterior abordou uma a otimização na equação 7.5.a e mostrou-se eficiente com uma diferença de 0.1973 entre o FDR . As matrizes representadas nas equações 7.15.a e 7.15.b representam os novos ganhos no sistema. É possível notar que a matriz D não teve mudança em relação ao seu valor já que sua influência no sistema se refere como retroalimentação positiva, porém é uma peça importante na estabilidade de sigma delta. A otimização tem a influência maior nas matrizes A , B e C , principalmente a A que representa retroalimentação entre os integradores. Houve algumas inversões de sinais em relação aos ganhos, tratando-se de um filtro SISO, esses novos ganhos devem ser analisados com cuidado, pois podem representar instabilidade e talvez tenham a necessidade de eliminar alguns ganhos.

O NTF utilizado na otimização, equação 7.5.a, representa a extração do filtro com injeção de ruído de um sigma no modelo SISO, ou seja, o seu modelo segue com uma entrada apenas. Na prática, os termos NTF e STF são um modelo MISO que não se separam, e por fins de simplificação de circuito o STF é assumido como unidade (um passa tudo). Ainda que alguns projetos utilizem STF como passa baixa ou passa banda, grande parte da implementação está em garantir NTF com polos e zeros estáveis dentro da frequência da banda para garantir além de um valor alto para SNR a estabilidade e as técnicas utilizadas no sigma delta. O modelo utilizado nesse trabalho foi separar os filtros em dois independentes pois a otimização do FDR limita-se ainda em um filtro de apenas um entrada. A tabela 5 representa vários métodos de conversão discreto-contínuo e seus respectivos valores de FDR , os métodos de Tustin, FOH e Matched tiveram a diferença muito pequena, entretanto, o método de ZOH foi o que obteve o menor diferença entre os FDR .

Tabela 5: Diferentes valores de FDR baseado na conversão discreto-contínuo do STF.

Método da Conversão	Função de Transferência	$FDR_{inicial}$	FDR_{final}
Tustin	$\frac{1.4325s^2}{(s^2+0.3099s+1.11)}$	23.4157	23.2184
ZOH	$\frac{s(s-0.5352)}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	22.2201	22.0967
FOH	$\frac{1.3259s^2}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	23.9438	23.7498
Matched	$\frac{1.2199s^2}{(s^2+0.2438s+0.9452)}$	22.4958	22.3018

A tabela 6 representa diferentes modelos de espaço de estados e seus valores de FDR utilizando o método de Tustin para conversão discreto-contínuo. A decomposição ortonormal e Schur foram que obtiveram melhores resultados com diferença de: 0.3181[dB] e 0.1133[dB].

Tabela 6: Diferentes valores de FDR para modelos de Espaço de Estados.

Modelo do Espaço de Estados	Matriz ABCD	$FDR_{inicial}$	FDR_{final}
Ortonormal	$\begin{bmatrix} 0 & 1.0536 & 0 \\ -1.0536 & -0.3099 & 0.3141 \\ -4.8053 & -1.4134 & 1.4325 \end{bmatrix}$	23.5397	23.2216
Schur	$\begin{bmatrix} -0.1549 & -1.2194 & 0.8169 \\ 0.8906 & -0.1549 & 0.5768 \\ 0.5546 & -1.5549 & 1.4325 \end{bmatrix}$	23.3349	23.2216
Hessenberg	$\begin{bmatrix} -0.3099 & -1.1100 & 1 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.4439 & -1.5901 & 1.4325 \end{bmatrix}$	23.9341	23.2216

7.7 Síntese e Simulação da Topologia CIFB

Semelhante ao apresentado no tópico anterior, baseado nos parâmetros da tabela 7 pode-se obter a função de transferência de STF e NTF para a topologia CIFB descrito nas equações 7.20.a e 7.20.b. Nota-se que para esse caso o termo stf é unitário.

Tabela 7: Especificações de Parâmetros da Síntese do NTF.

Parâmetro	Especificação
Domínio	Discreto no Tempo
Topologia	CIFB
Ordem	3
OSR	128
Level de Quantização	2
Frequência Central do Modulador	0
Máxima ganho fora da banda do NTF	1.8
DAC	NRZ

$$ntfz_{cifb} = \frac{(z-1)^3}{(z+0.2292)(z^2-1.527z+0.6172)} \quad (7.20.a)$$

$$stfz_{cifb} = 1 \quad (7.20.b)$$

O modelo de espaço de estados encontra-se na equação 7.21.a referente ao NTF e STF e sua distribuição de ganhos pode ser observada na equação 7.21.b.

$$ABCD_{cifb} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0.1104 & -0.1104 \\ 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0.5603 & -0.5603 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.7018 & -1.7018 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21.a)$$

$$ABCD_{cifb} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & b1 & -a1 \\ c1 & 1 & -g1 & b2 & -a2 \\ c1c2 & c2 & 1 - c2g1 & b3 & -a3 - a2c2 \\ \hline 0 & 0 & c3 & d1 & 0 \end{array} \right] \quad (7.21.b)$$

Convertendo para contínuo no tempo utilizando o método de Tustin obtém-se:

$$ntfc_{cifb} = \frac{3.3003s^3}{(s + 3.189)(s^2 + 0.4869s + 0.1143)} \quad (7.21.c)$$

Utilizando a decomposição ortonormal para este exemplo formam-se a seguintes matrizes:

$$A_{cifb} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3149 & 0 \\ -0.3149 & 0 & 1.2521 \\ 0 & -1.2521 & -3.6760 \end{bmatrix} \quad (7.22.a)$$

$$B_{cifb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0817 \end{bmatrix} \quad (7.22.b)$$

$$C_{cifb} = [0 \quad -4.0618 \quad -11.2153] \quad (7.22.c)$$

$$D_{cifb} = [3.3003] \quad (7.22.d)$$

E o seus respectivos gramians:

$$K_{cifb} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (7.23.a)$$

$$W_{cifb} = \begin{bmatrix} 1.3214 & 0.0000 & -3.5455 \\ 0.0000 & 15.4213 & 41.3940 \\ -3.5455 & 41.3940 & 121.5985 \end{bmatrix} \quad (7.23.b)$$

Após o processamento da otimização as matrizes ótimas e os gramians são descritos abaixo:

$$Aw_{cifb} = \begin{bmatrix} -0.2271 & -0.4589 & 1.6917 \\ 0.0741 & -0.1630 & 1.6861 \\ 0.0361 & -0.2225 & -3.2859 \end{bmatrix} \quad Bw_{cifb} = \begin{bmatrix} -0.2689 \\ -0.2278 \\ 1.0227 \end{bmatrix} \quad (7.24.a)$$

$$Cw_{cifb} = \begin{bmatrix} 0.0668 & -0.3504 & -11.9229 \end{bmatrix} \quad Dw_{cifb} = \begin{bmatrix} 3.3003 \end{bmatrix} \quad (7.24.b)$$

$$Kw_{cifb} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad Ww_{cifb} = \begin{bmatrix} 0.0617 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 2.3669 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 135.9126 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Das matrizes Aw , Bw , Cw e Dw extrai-se a funções de transferência contínuo e discreto no tempo abaixo com alguns resíduos que podem ser desconsiderados.

$$ntfc2_{cifb} = \frac{3.3s^3 + 2.336e - 15s^2 + 1.822e - 15s + 1.084e - 16}{s^3 + 3.676s^2 + 1.667s + 0.3644} \quad (7.26.a)$$

$$ntfz2_{cifb} = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - 1.298z^2 + 0.2672z + 0.1414} \quad (7.26.b)$$

A comparação entre o FDR inicial e o final encontra-se na equação abaixo com uma diferença de 2.1609[dB] e a figura 35 demonstra os gramians Kw_{cifb} e Ww_{cifb} .

$$FDRi_{cifb} = 23.9742[dB] \quad FDRf_{cifb} = 21.8133[dB] \quad (7.27)$$

7.8 Discussão

No tópico 7.7 foi abordada a síntese do NTF referente à topologia CIFB de acordo com os parâmetros de projeto da tabela 7, diferente do tópico 7.2 que foi sintetizado um STF passa baixa e NTF passa alta. Neste tópico optou-se por verificar a performance da simulação em um STF unitário. Conseqüentemente, restando apenas a função de transferência do NTF para aplicar a otimização. Em termos de circuitos, obter um STF unitário é resultar apenas no ruído de quantização processado na retroalimentação, já que o sinal u_z entrará apenas como uma soma na saída do modulador. Ou seja, equação 5.5.a torna-se $y(z) = u(z) + NTF(z)e_q$. Nesse tópico foi utilizado a decomposição ortonormal para a equação 7.21.c, a mesma decomposição insere zeros em locais específicos na matriz A_{cifb} no intuito de eliminar alguns ganhos no filtro, ou em termos de circuitos, eliminar alguns

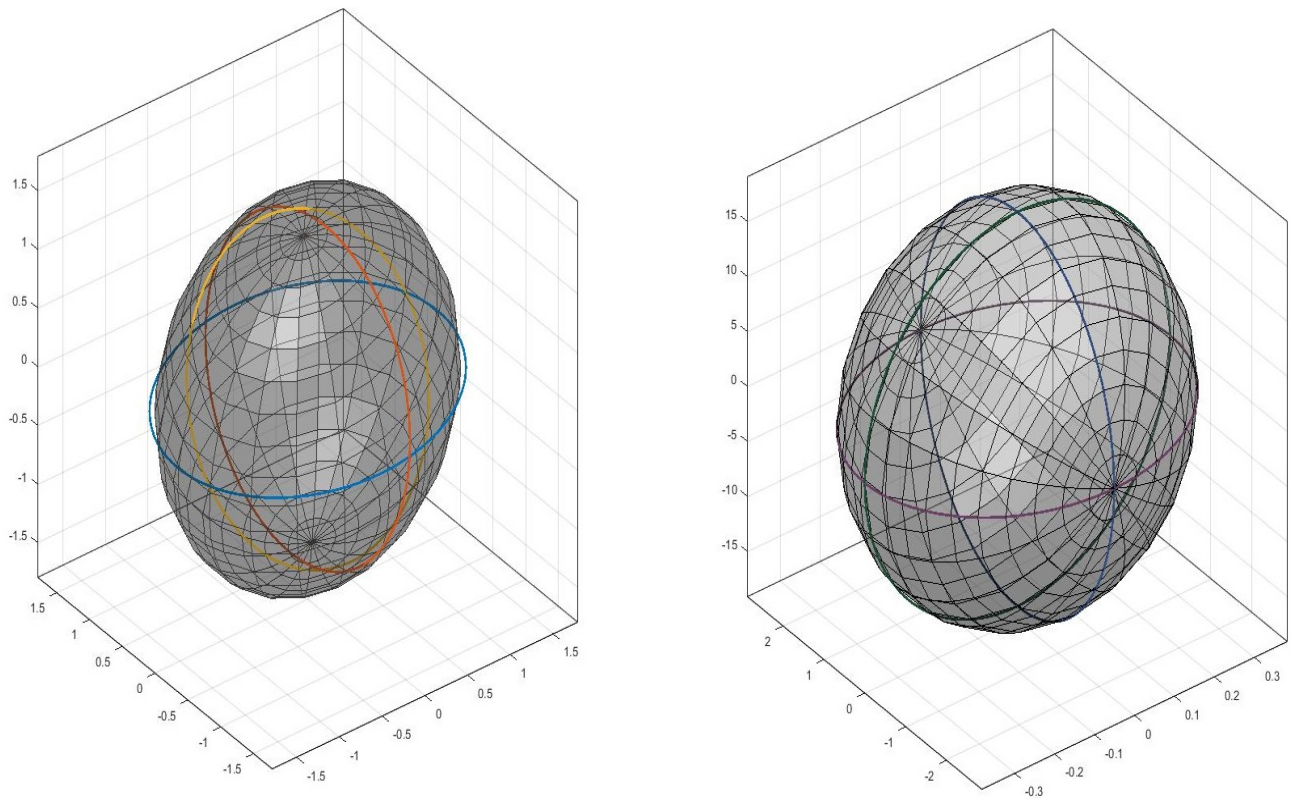


Figura 35: (a) Gramian Kw e (b) Gramian Ww .

componentes. De acordo com os resultados previstos no capítulo 6, a mesma decomposição é a representação de espaço de estados que tem o valor de FDR mais próximo do ótimo. De acordo com a tabela 8, essa constatação continua sendo válida para filtros extraídos do sigma delta. É possível concluir pela tabela 8 que as decomposições em espaço de estados de Schur e Hessenberg são as que tiveram piores resultados para FDR . É possível observar também que o valor otimizado do FDR foi maior que o tópico 7.2, isso comprova que a otimização tem uma melhor performance em ordens altas de uma função de transferência. A equação 7.26.a obteve alguns resíduos com uma potência muito pequena que podem ser desconsiderados já que são praticamente nulos. É importante frisar que a otimização não alterou a função de transferência, que pode ser verificado nas equações 7.20 e 7.26.b. A figura 35 representa o argumento geométrico dos gramians de Kw e Ww que ilustra a transformação final em matriz identidade e matriz diagonal. Os ganhos das matrizes ótimas Aw_{cifb} , Bw_{cifb} , Cw_{cifb} e Dw_{cifb} podem ser implementados como no formato de um filtro ativo como ilustrado na figura 36. Nota-se os elementos a_{11} e a_{22} estão implementados na retroalimentação dos integradores, enquanto os ganhos a_{21} e a_{12} são utilizados no somatório junto com os ganhos b_1, b_2 e d_1 . Alguns ganhos próximos de zero podem ser desconsiderados o que reduziria o número de componentes. As matrizes A e B foram as que tiveram o maior número de componentes zerados na representação Ortonormal e Hessenberg. Na matriz ótima, praticamente todos os ganhos das matrizes foram alterados

restando apenas a matriz D com o valor original.

Tabela 8: Diferentes valores de FDR para modelos de Espaço de Estados.

Decomposição	Matriz ABCD	$FDR_{inicial}$	FDR_{final}
Ortonormal	$\begin{bmatrix} 0 & 0.3149 & 0 & 0 \\ -0.3149 & 0 & 1.2521 & 0 \\ 0 & -1.2521 & -3.6760 & 1.0817 \\ 0 & -4.0618 & -11.2153 & 3.3003 \end{bmatrix}$	23.9742	21.8133
Schur	$\begin{bmatrix} -0.2434 & -1.2642 & 2.4972 & -0.2315 \\ 0.0435 & -0.2434 & 0.5472 & 0.9683 \\ 0 & 0 & -3.1891 & 0.0934 \\ -0.0257 & 0.1252 & -131.2365 & 3.3003 \end{bmatrix}$	102.0886	21.8133
Hessenberg	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.3644 & 1 \\ 1.0000 & 0 & -1.6670 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -3.6760 & 0 \\ -12.1318 & 39.0945 & -124.6895 & 3.3003 \end{bmatrix}$	103.1373	21.8133

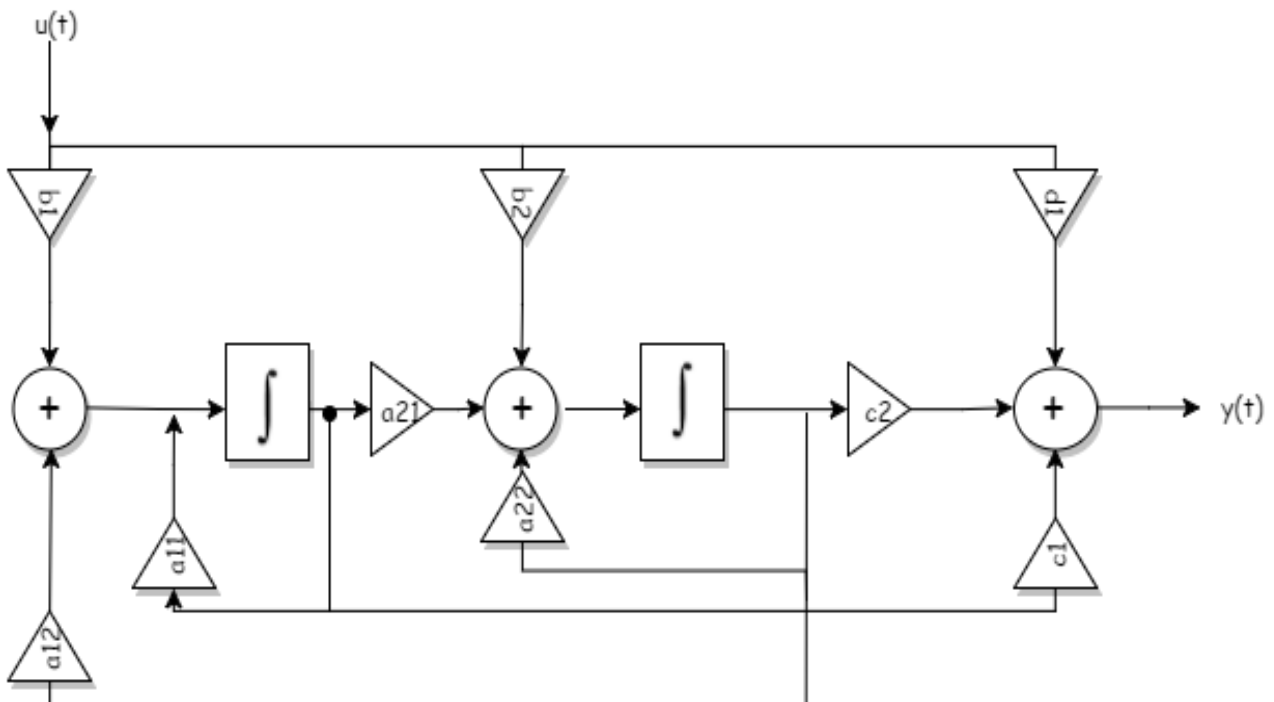


Figura 36: Diagrama indicado para as matrizes ótimas do $ntf_{c_{i}fb}$.

7.9 Diferenças entre otimização do FDR e DRS

Nos tópicos anteriores foi realizada a síntese dos termos STF e NTF discreto no tempo que foram convertidos para o domínio contínuo no tempo para a aplicação da otimização, nesse tópico será discutido a diferença entre a técnica *DRS* (*Dynamic Range Scaling*) utilizada atualmente nos moduladores sigma delta e a otimização do FDR. A técnica *DRS* consiste em colocar limites no estados da matriz *ABCD*, basicamente os ganhos são redimensionados em um valor limite escolhido pelo projetista que irá assegurar que a saída dos integradores também ficará no mesmo limite. Utilizando a equação 5.13 referente à topologia CIFB como exemplo, rescrevendo-a abaixo:

$$ABCD_i = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.000 & 0 & 0.2164 & -0.2164 \\ 1.000 & 1.000 & 0.7749 & -0.7749 \\ \hline 0 & 1.000 & 1.000 & 0 \end{array} \right] \quad (7.28)$$

Utilizando os ganhos dessa matriz é possível obter as saídas dos integradores como ilustra a figura 37 sendo a entrada $u(t) = A_{in} \text{sen}(2\pi F_s t)$ como especificado na tabela 1. A variável A_{in} representa um fator de escala para entrada e F_s a frequência de amostragem. Como é possível observar pela figura 38, a saída do segundo integrador torna-se praticamente 'descontrolável' e sem limites sobrepondo-se à saída do primeiro integrador. Com a técnica *DRS* é possível limitar essa saída para um valor específico, como por exemplo 70% da entrada. Utilizando esse valor como referência, é possível encontrar uma matriz *S* em que irá dimensionar toda matriz *ABCD* a ponto limitar seus ganhos como é representado na equações 7.28.a e 7.28.b (SCHREIER, 2005):

$$ABCD_s = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.0000 & 0 & 0.4852 & -0.4852 \\ 0.3039 & 1.0000 & 0.5281 & -0.5281 \\ \hline 0 & 1.4671 & 1.0000 & 0 \end{array} \right] \quad (7.29.a)$$

$$ABCD_s = \left[\begin{array}{c|c} SAS^{-1} & SB \\ \hline CS^{-1} & D \end{array} \right] \quad (7.29.b)$$

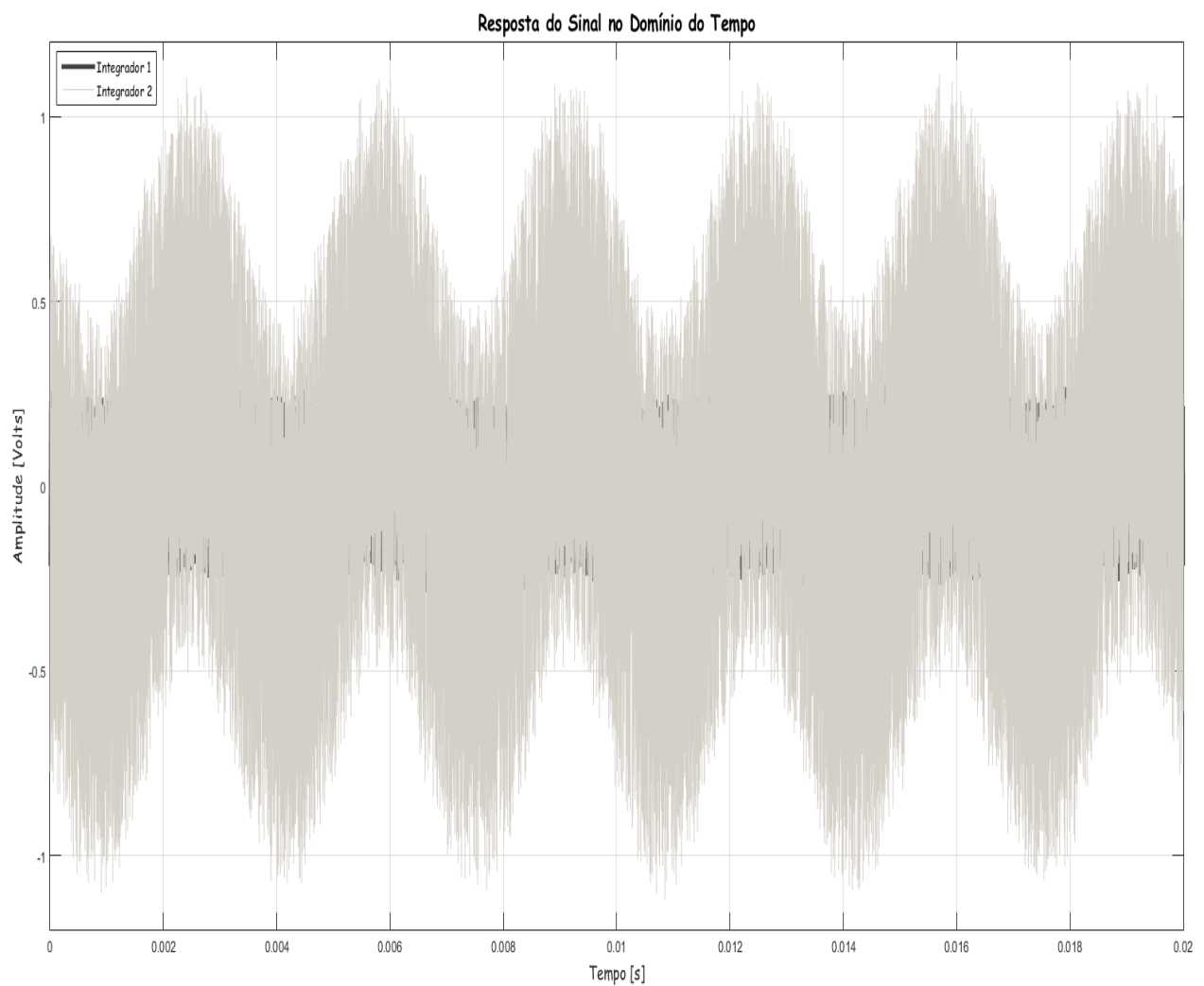
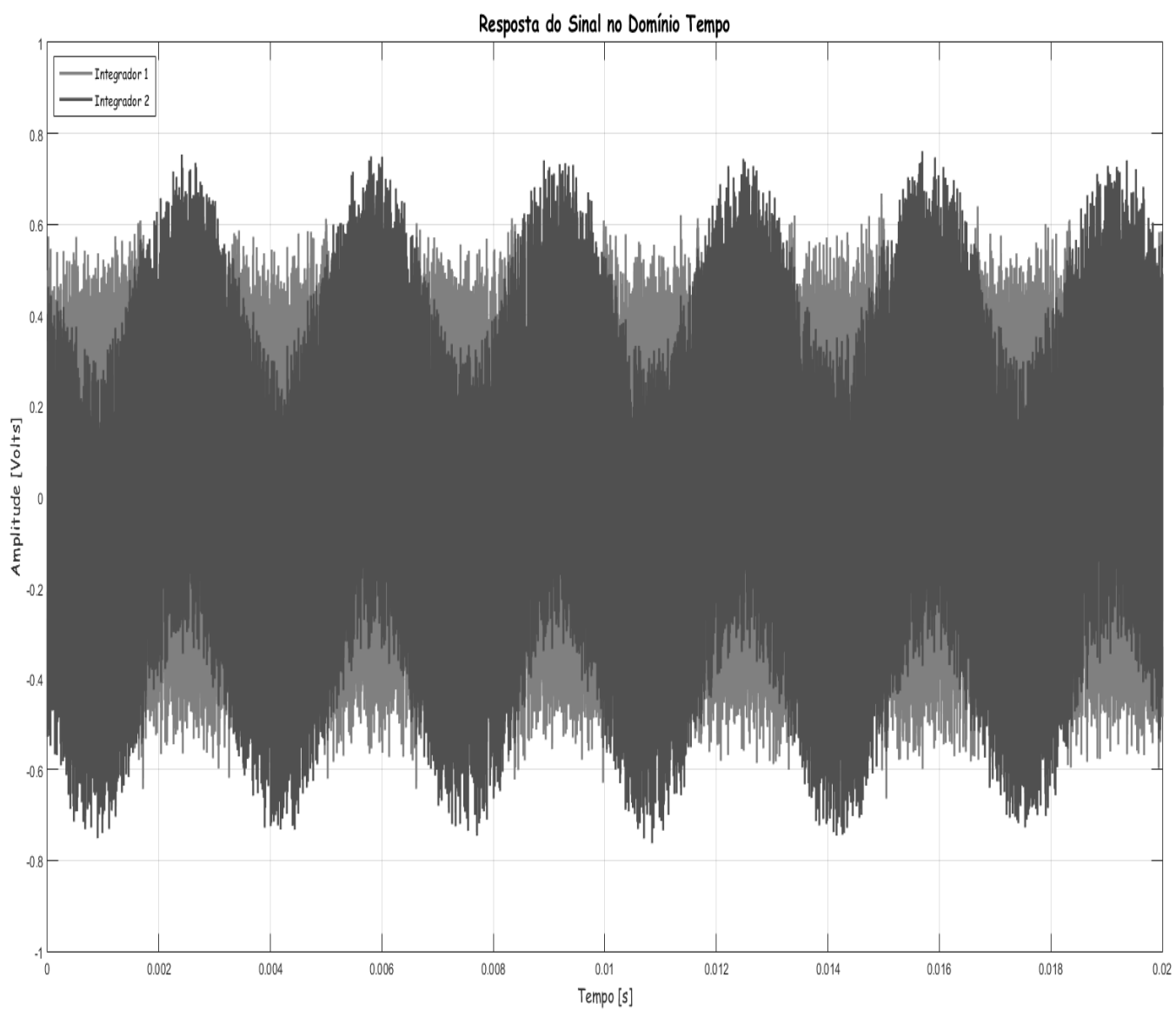


Figura 37: Saída dos integradores para uma topologia CIFB de segunda ordem.

Figura 38: Saída dos integradores utilizando o *DNS*.

8 Conclusão

O trabalho apresentado tem como principal meta aumentar o valor do *dynamic range* diminuindo o valor do *FDR*, conseqüentemente isso implicará a redução de elementos na topologia convencional. Foi apresentado um algoritmo de otimização de *FDR* para qualquer arquitetura de um conversor sigma delta a partir de sua função de transferência dos filtros e foi desenvolvido um modelo matemático detalhado até a representação final de espaço de estados. No entanto, ainda não foi possível descobrir o significado dos novos ganhos adquiridos nessa representação ótima. A representação ótima se caracteriza por uma matriz *fully dense*, onde todos os elementos das matrizes são diferentes de zero. A otimização foi aplicada em diversos filtros de ordem variada, no STF e NTF da topologia CIFF e NTF para a topologia CIFB. Entre as representações de espaço de estados apresentadas, conclui-se que o modelo ortonormal é que a obteve o menor valor de *FDR*, comportando-se como uma subótima.

Como apresentado no capítulo 6, para uma função de transferência em cascadeamento, foi utilizado o modelo controlável canônico para a obtenção do seu *FDR* inicial. Os valores demonstraram uma considerável queda do *FDR* à medida em que a ordem da função de transferência também aumentava. Para ordens baixas da função de transferência, o algoritmo alcançava valores próximos dos valores iniciais, entretanto, para ordens elevadas o *FDR* obteve valores muito menores, mostrando que a otimização tem a maior eficiência, principalmente em funções de transferência de ordem elevada. O algoritmo de otimização do trabalho mostrou-se eficiente ao obter as matrizes de controlabilidade e observabilidade mesmo para ordens mais altas de uma função de transferência e foi obtido suas representações espaciais como pode ser observado na figuras 27 e 28. A otimização mostrou que é possível implementar um circuito com menos elementos ou com ganhos menores do que a topologias convencionais, como pode ser visto na figura 36, na forma que alguns elementos podem ser zerados na implementação do filtro. A utilização da otimização em filtros como *butterworth* e *chebyshev* se mostrou eficiente na obtenção de um valor menor para o *FDR*, principalmente o filtro *butterworth* como pode ser verificado na figura 31. No filtro de *Cheb* a ordem de grandeza dos polos eram praticamente de 1 para 10^4 e apesar da otimização obter resultados melhores para *FDR*, à medida que a ordem da função de transferência se elevava, os melhores resultados foram ser obtidos em função de transferência de potência de dez próximas. Outra razão além dos coeficientes discrepantes é o fato do filtro conter um número elevado de polos e zeros, portanto, ao passar para o modelo de espaço de estados, as matrizes que continham mais elementos que uma função de transferência comum, eram mais eficiente nas transformações matrizes com maior número de elementos (*fully dense*).

O capítulo 7 teve como objetivo obter um valor menor de FDR dos termos STF e NTF das topologias CIFB e CIFF, obter seu argumento geométrico dos gramians K e W e ter diversas representações de espaço para a mesma arquitetura. Baseado nos parâmetros de projeto da tabela 2 e a toolbox (SCHREIER, 2005) é possível sintetizar um valor de NTF como representado nas equações 7.1 e 7.20.a, que é a descrição das topologias apresentadas. Cada NTF tem seu modelo de espaço de estados com seus respectivos ganhos a_i , b_i , c_i e d_i e esses ganhos são aplicados nas arquiteturas propostas nas figuras 20 e 25. Ainda é possível sintetizar o termo STF simplesmente não simplificando os ganhos b_2 e b_3 como representado na equação 7.3. Os termos STF e NTF estão no domínio discreto e é necessário convertê-las para o domínio contínuo. Entre os métodos de conversão apresentados, o método de Tustin obteve o melhor valor de FDR pelo fato de ter a melhor aproximação discreto-contínuo na função de transferência, que pode ser verificado na tabela 3. Com esse conjunto de informações é possível aplicar a otimização nos termos STF e NTF separadamente em um sistema SISO, já que se trata de uma coluna apenas para a matriz B . Para a arquitetura CIFF foram encontradas inúmeras representações em espaço de estados para os termos STF e NTF e as que tiveram a melhor performance foram a ortonormal e Schur. Foram encontradas as matrizes ótimas para essa arquitetura, no entanto não foi encontrada uma relação das matrizes otimizadas com as matrizes iniciais. Ou seja, tratar STF e NTF como filtros individuais resulta em ganhos que não podem ser aplicados no modulador sigma delta, pelo fato de esses filtros pertencerem a um sistema MISO como mencionado no capítulo 5. A figura 25 representa uma provável implementação desses ganhos em diagrama de blocos para sistemas SISO, nota-se que há retroalimentação entre os integradores e algumas diferenças nas posições dos ganhos e que não há uma segunda entrada como os moduladores sigma delta possuem. Por essas diferenças, ainda não foi possível implementar o circuito com os ganhos otimizados enquanto não houver um modelo de otimização de *Lyapunov* baseado em sistemas MISO. O fato dos moduladores sigma delta serem tratados como um filtro de duas entradas acaba distribuindo os ganhos dentro da matriz como citado no capítulo 5, dessa forma seu modelo de espaço de estados acaba sendo completamente diferente de filtro de uma única entrada. A topologia CIFB obteve os resultados semelhantes a CIFF, com a diferença de ter sido sintetizado um STF unitário, e dessa forma, foi possível apenas testar a otimização no NTF. E também não foi possível achar uma relação dos ganhos otimizados com os ganhos iniciais, devido à otimização ser usada em sistema SISO.

Para trabalhos futuros é importante expandir o modelo matemático da otimização de *Lyapunov* para sistemas MISO, somente dessa forma será possível mapear os novos ganhos para que possam ser implementados a nível circuito. A otimização mencionada nesse trabalho foi realizada toda no domínio contínuo no tempo, todavia é possível também aplicá-la no domínio discreto no tempo e uma das maiores vantagens é utilizá-la também em projetos de sigma delta DT que são amplamente empregados atualmente. Os resultados

obtidos no capítulos 6 e 7 servirão de base para a continuação do trabalho realizado até este momento, e que em um futuro próximo a otimização de *Dynamic Range* possa ser utilizada em qualquer sistema MISO.

Referências

- ALLEN, P.; HOLBERG, D. *CMOS Analog Circuit Design*. Ed. Oxford University Press, New York, USA: [s.n.], 2002. v. 2. 698-715 p. Citado na página 22.
- ASTROM, R. M. M. K. J. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. [S.l.: s.n.], 2006. v. 2.4. 215-272 p. Citado 3 vezes nas páginas 13, 30 e 32.
- BAJDECHI, O.; HUIJSING, J. *Systematic Design of Sigma-Delta Analog-to-Digital Converters*. LLC, New York, USA: [s.n.], 2004. 9-11 p. Citado 4 vezes nas páginas 13, 24, 25 e 27.
- CARUSONE, D. A. J. T. C.; MARTIN, K. W. *Analog integrated circuit design*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 2. 696-714 p. Citado 3 vezes nas páginas 13, 23 e 26.
- CUBAS, H. G. A. *Projeto de um Modulador Sigma-Delta de Baixo Consumo para Sinais de Audio*. São Paulo, Brazil: [s.n.], 2013. 5-23 p. Citado 6 vezes nas páginas 13, 17, 21, 22, 23 e 24.
- GHARBIYA, T. C. C. A.; JOHNS, D. A. *High-speed oversampling analog-to-digital converter*. International Journal of High Speed Electronics and Systems: [s.n.]. 1-21 p. Citado na página 65.
- GROENEWOLD, G. *Optimal dynamic range integrators*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: [s.n.], 1992. v. 39. 614-627 p. Citado na página 62.
- HADDAD, S. A. P.; SERDIJN, W. A. *Ultra Low-Power Biomedical Signal Processing. An Analog Wavelet Filter Approach for Pacemakers*. Sao Paulo, Brasil: [s.n.], 2008. 85-104 p. ISBN 978-1-4020-9072-1. Citado 7 vezes nas páginas 13, 31, 34, 37, 39, 59 e 62.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. NJ, EUA: [s.n.], 1980. Citado na página 29.
- MATLAB. *Matlab Software Documentation*. 2015. Visualizado em 30/10/2015. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/help/techdoc/index.html>>. Citado na página 65.
- NORSWORTHY, R. S. S. R.; TEMES, G. C. *Delta Sigma Data Converter: Theory, Design, and Simulation*. IEEE Press: [s.n.], 1997. 1-11 p. Citado na página 17.
- REYNOLDS, D. E. *Coarse graining and control theory model reduction*. University of California, Santa Barbara: [s.n.], 2006. 1-12 p. Citado 5 vezes nas páginas 13, 27, 29, 34 e 35.
- Richard E. Schreier. *ECE 697 Delta-Sigma Data Converter Design: Lecture Notes*. 2015. Visualizado em 30/11/2015. Disponível em: <<http://www.lumerink.com/courses/ECE697A/s10/Lectures.htm>>. Citado 7 vezes nas páginas 13, 14, 44, 46, 48, 54 e 65.
- ROCHA, D. P. W. M. *Optimal Design of Analogue Low-Power System*. Vienna, Austria: [s.n.], 2003. 332-340 p. ISBN 90-901-668-74. Citado 8 vezes nas páginas 13, 17, 21, 29, 37, 38, 39 e 57.

SCHREIER, G. C. T. R. *Understanding Delta-Sigma Data Converters*. NY. JOHN WILEY SONS Inc: [s.n.], 2005. Citado 8 vezes nas páginas 13, 27, 43, 45, 49, 70, 79 e 84.

SCHREIER, R. *Delta Sigma Toolbox Documentation” [Online]. Disponível: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19>*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.