



TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**RECONSTRUÇÃO DE DADOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA
UTILIZANDO COMPRESSED SENSING COM INFORMAÇÃO
A PRIORI SOBRE O SUPORTE**

Gabriel Lemes Silva Luciano de Oliveira

Brasília, julho de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**RECONSTRUÇÃO DE DADOS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA
UTILIZANDO COMPRESSED SENSING COM INFORMAÇÃO
A *PRIORI* SOBRE O SUPORTE**

Gabriel Lemes Silva Luciano de Oliveira

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista*

Banca Examinadora

Prof. João Luiz Azevedo de Carvalho, _____
ENE/UnB
Orientador

Prof. Cristiano Jacques Miosso, ENE/UnB _____
Co-orientador

Prof. Mylène C. Q. Farias, ENE/UnB _____
Examinador interno

Dedicatória

Este trabalho é dedicado à minha família, cujo apoio foi muito além da obrigação. Dedico em especial ao meu pai, Estanislau Luciano de Oliveira, e à minha mãe, Nívea Lemes da Silva. Este texto é também resultado do trabalho e da paciência de vocês.

Gabriel Lemes Silva Luciano de Oliveira

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que me acompanharam até este momento. Infelizmente, não é possível listar todos aqui. Em especial, quero registrar meus agradecimentos à Maria Karolina Beckman Pires, ao Laércio Martins Oliveira Silva e ao Rafael Eduardo Teza de Souza, pela companhia e pelas discussões ao longo das muitas horas de preparação deste texto. Por fim, quero registrar também meus profundos agradecimentos ao meu orientador, Prof. João Luiz Azevedo de Carvalho, pela paciência, pela confiança e pelo encorajamento, além da ajuda crucial nos preparativos finais para a apresentação deste trabalho. A todos vocês, muito obrigado.

Gabriel Lemes Silva Luciano de Oliveira

RESUMO

Um algoritmo para o problema de regularização ℓ^p tolerante a erro é apresentado, inspirado na técnica de mínimos quadrados iterativamente reponderados. O desenvolvimento do algoritmo segue considerações heurísticas no lugar de uma análise matemática rigorosa. O desempenho do algoritmo é avaliado empiricamente. O trabalho foca a regularização ℓ^p na aplicação de *compressed sensing* à aquisição acelerada de imagens por ressonância magnética.

ABSTRACT

An algorithm for the error-tolerant ℓ^p regularization problem is presented, inspired by the technique of iteratively reweighted least squares. The development of the algorithm follows heuristic considerations instead of a rigorous mathematical analysis. The performance of the algorithm is evaluated empirically. The work focuses the ℓ^p regularization in the application of compressed sensing to accelerated magnetic resonance imaging.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	RESSONÂNCIA MAGNÉTICA E TEMPO DE AQUISIÇÃO	1
1.2	AMOSTRANDO ABAIXO DA TAXA DE NYQUIST — COMPRESSED SENSING	2
1.3	OBJETIVOS	2
1.4	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	4
2	SINAIS DISCRETOS NO TEMPO	5
2.1	AMOSTRAGEM	5
2.2	DTFT E DFT	8
2.3	COMPRESSÃO	12
3	RESSONÂNCIA MAGNÉTICA	15
3.1	A FÍSICA DA RESSONÂNCIA MAGNÉTICA	16
3.2	CODIFICAÇÃO DE POSIÇÃO E AQUISIÇÃO DE IMAGENS	23
4	COMPRESSED SENSING	31
4.1	GENERALIZANDO A AMOSTRAGEM — SISTEMAS LINEARES	32
4.2	MEDIDAS DE ESPARSIDADE — NORMAS ℓ^p	34
4.3	SUBAMOSTRAGEM E RECONSTRUÇÃO EXATA — COMPRESSED SENSING	37
4.4	MÍNIMOS QUADRADOS ITERATIVAMENTE REPONDERADOS (IRLS)	45
5	DESENVOLVIMENTO	48
5.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E CONSIDERAÇÕES HEURÍSTICAS	48
5.2	ALGORITMO PROPOSTO	51
6	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	54
6.1	DESEMPENHO EMPÍRICO	54
6.2	SIMULAÇÃO DE UMA AQUISIÇÃO DE IMAGEM POR RM	57
7	CONCLUSÕES	74
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
	ANEXOS	77

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ressonância Magnética e Tempo de Aquisição

Imagens de ressonância magnética (RM) são utilizadas rotineiramente na medicina para fins de diagnóstico. Os tipos de contrastes conseguidos nessas imagens as tornam particularmente adequadas para exames em que seja necessária a diferenciação entre dois tecidos parecidos. Além disso, parâmetros da aquisição podem ser ajustados para se adequar o contraste e a resolução. Alta resolução espacial e alta razão-sinal-ruído (SNR) são possíveis às custas de maior tempo de aquisição de dados. No entanto, longos tempos de aquisição tornam a imagem suscetível a artefatos de movimento. Os movimentos do coração e do tórax podem impor barreiras à aplicabilidade de certos exames, por exigir que o paciente permaneça em apneia por longos períodos em exames cardiovasculares, por exemplo. Isso gera um grande interesse no desenvolvimento de estratégias que reduzam os tempos de aquisição em RM para uma dada qualidade da imagem.

Um procedimento de RM, diferentemente da aquisição de imagens fotográficas ou de raios-X, amostra a transformada de Fourier da imagem desejada ao invés de amostrá-la diretamente no domínio do espaço [1, 2, 3]. Uma estratégia direta para se reduzir o tempo de aquisição da imagem seria então sub-amostrar o domínio da frequência. No entanto, é bem sabido que, se as amostras forem tomadas a intervalos regulares abaixo da taxa de Nyquist, a imagem será degradada por artefatos de *aliasing* [1, 2, 3], caso nenhuma informação adicional a respeito da imagem esteja disponível, além daquelas assumidas pelo teorema de Nyquist. Isso resulta, efetivamente, em um *field of view* (FOV) reduzido. Sendo assim, para perseguir essa estratégia, deve-se adotar uma outra abordagem para a amostragem. A teoria de *compressed sensing* [14, 15] fornece uma tal abordagem possível, fazendo uso da **esparsidade** como informação adicional.

1.2 Amostrando Abaixo da Taxa de Nyquist — Compressed Sensing

Uma amostragem regular no domínio da frequência abaixo da taxa de Nyquist resulta, geralmente, em *aliasing* no domínio da imagem. No entanto, sabe-se também que a maioria dos sinais encontrados na prática são extremamente redundantes. Essa redundância é o fenômeno que dá origem ao sucesso de técnicas consagradas de compressão com perdas como MP3, MPEG, JPEG e JPEG2000 [10, 8, 7]. Essas técnicas efetivamente removem informação redundante do sinal fazendo com que seja possível representá-lo em alta fidelidade com um número de amostras muito menor do que o número de amostras originais. Isso é possível ao se explorar adequadamente um modelo apropriado para o sinal. Especificamente, o sinal é modelado por um sinal esparsos em um domínio transformado conhecido.

Deve-se perceber que, embora se saiba que a maioria dos sinais podem ser comprimidos com a exploração de modelos esparsos, eles devem antes ser amostrados acima da taxa de Nyquist, tradicionalmente. Essa taxa pode resultar em requisitos de desempenho impraticáveis para o sistema, como os altos tempos de aquisição em RM. Esse fenômeno dá origem a uma série de questões: uma vez que é possível representar eficientemente um sinal por um número reduzido de amostras, seria possível também amostrá-lo eficientemente com um número reduzido de amostras? Se sim, como implementar tal esquema de amostragem? Como recuperar o sinal desejado partindo desse número reduzido de amostras? A teoria de *compressed sensing* (CS) fornece uma resposta positiva para a primeira pergunta e estabelece condições surpreendentemente favoráveis para as outras duas [15, 14, 11].

É importante notar que a possibilidade de se recuperar um sinal sub-amostrado, aberta pela teoria de CS, não subentende uma violação do teorema de Nyquist. Essa possibilidade só existe com a exploração de uma poderosa informação *a priori*: assume-se que o sinal é esparsos ou, de maneira mais geral, que ele é esparsificado por uma transformação conhecida [15, 11]. Essa hipótese equivale a modelar o sinal desejado por um sinal esparsos. Se o sinal se adequa perfeitamente a esse modelo, a teoria de CS informa que é possível uma recuperação **exata** do sinal com um número bastante reduzido de amostras se o esquema de amostragem satisfizer certas condições. Talvez mais importante, a teoria informa também que é possível implementar esse esquema na prática e que o problema da reconstrução dadas as amostras pode ser posto de maneira computacionalmente tratável [15, 11]. Se o sinal não se adequa perfeitamente ao modelo de sinal esparsos mas é bem aproximado por ele, diz-se que o sinal é **compressível** e a teoria diz que uma aproximação esparsa pode ser recuperada sob as mesmas condições [11, 12].

1.3 Objetivos

Neste trabalho, lida-se principalmente com a questão da reconstrução de sinais sub-amostrados pela abordagem da teoria de CS. Em particular, um algoritmo para essa reconstrução é desenvolvido com base em uma adaptação da técnica IRLS (do inglês, *iteratively reweighted least squares*) [16].

Em CS, a amostragem do sinal é feita por combinações lineares das amostras desejadas, aquelas no domínio natural do sinal — o domínio do tempo, no caso de sinais de áudio, ou o domínio do espaço, no caso de sinais de imagem, por exemplo. Um sinal em seu domínio natural é modelado por um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em que n é o número de amostras do sinal — o número de amostras em um sinal de áudio ou o número de pixels em uma imagem, como no exemplo anterior. O que se pretende então é recuperar x a partir de m amostras desse sinal na forma de combinações lineares arranjadas em um outro vetor $y = Ax \in \mathbb{R}^m$, em que A é uma matriz $m \times n$ com $m \ll n$. Posto dessa forma, o problema consiste em resolver um sistema linear subdeterminado que, em geral, tem infinitas soluções. O papel do modelo do sinal é permitir que se decida, dentre essas infinitas possibilidades, qual é o vetor x que **melhor** “explica” as medidas em y . No caso, procura-se o vetor x mais esparso dentre aqueles que satisfazem $y = Ax$ (x pode ser esparso ele mesmo ou pode ter uma representação esparsa por uma transformação previamente conhecida — essas noções serão tornadas claras nas próximas seções).

A norma¹ ℓ^0 é uma medida natural da esparsidade de um sinal. Um sinal ou vetor y é dito k -esparso se $\|y\|_0 = k$, ou seja, se ele possui apenas k elementos não nulos. Entretanto, o problema de encontrar o vetor x com a menor norma ℓ^0 que satisfaça $Ax = y$ é um problema combinatorial e considerado intratável computacionalmente [11, 12]. É possível relaxar o problema procurando pelo sinal com a menor norma ℓ^1 [11, 12, 15]. Assim, ele torna-se um problema de otimização convexa que pode ser resolvido eficientemente com as diversas técnicas disponíveis para essa classe de problemas. Nessa forma, é possível inclusive enunciá-lo como um problema de programação linear [12, 11, 7]. Em geral, são necessárias $m > k$ amostras para que a reconstrução seja bem sucedida e esse número é maior para o problema relaxado. Mesmo assim, é possível se obter bons resultados com $m \ll n$ [11].

Outra possibilidade, é relaxar o problema substituindo a norma ℓ^0 por alguma outra norma ℓ^p com $0 < p < 1$. Nesse caso, o problema deixa de ser convexo [12, 16]. Porém, em geral, espera-se que, quanto menor p , menor o número de amostras m necessário para uma reconstrução bem sucedida. Embora existam algoritmos eficientes para problemas de otimização não-convexa [18], esses algoritmos são locais em geral e, sendo assim, não se pode garantir que eles converjam para uma solução global. No entanto, diversos algoritmos têm mostrado boas características de convergência global para minimização ℓ^p sob certas condições [12]. Neste trabalho, propomos e avaliamos um algoritmo deste tipo.

Propomos um algoritmo nas linhas gerais das ideias em IRLS para minimização ℓ^p não-convexa. A proposta é que esse algoritmo seja mais robusto contra imperfeições no modelamento como sinal esparso e contra ruído nas medidas.

¹embora as “normas” ℓ^p com $0 \leq p < 1$ não sejam estritamente normas, esse abuso de notação é tolerado como veremos adiante.

1.4 Apresentação do Manuscrito

Nos capítulos 2 e 3, respectivamente, são feitas breves revisões bibliográficas sobre alguns conceitos de sinais relevantes para este trabalho e sobre imageamento por ressonância magnética. Em seguida, o Capítulo 4 apresenta a teoria de *compressed sensing* (CS) e introduz a técnica de reconstrução em CS por IRLS, juntamente com um método para embutir a exploração de informação *a priori* sobre o suporte do sinal no algoritmo. No Capítulo 5, é proposto um algoritmo para abordar uma versão tolerante a erro do problema de reconstrução em CS, inspirado na técnica de IRLS com informação *a priori*. Os resultados experimentais são apresentados e discutidos no Capítulo 6. Por fim, as conclusões são apresentadas no Capítulo 7. Os códigos desenvolvidos para os experimentos em MATLAB encontram-se no Anexo I.

Capítulo 2

Sinais Discretos no Tempo

O termo **sinal**, em geral, refere-se a algum padrão de variações utilizado para representar informação. Matematicamente, sinais são modelados por funções de uma ou mais variáveis independentes. Imagens, por exemplo, podem ser representadas por funções de **intensidade** ou de **níveis de cinza** $f = f(x, y)$ em duas variáveis independentes x e y representando coordenadas espaciais. No que se segue, inicialmente, consideram-se apenas sinais unidimensionais e refere-se à variável independente genericamente como **tempo**. O termo **sinal** será utilizado para se referir ao sinal ou ao seu modelo matemático indistintamente.

Sinais podem ser classificados em sinais de **tempo contínuo** ou de **tempo discreto**, de acordo com a natureza da sua variável independente. Podem ainda ser classificados como sinais **analógicos** se assumem valores em um conjunto contínuo ou como sinais **digitais** se assumem valores em um conjunto discreto. O **suporte** do sinal é o conjunto de valores da variável independente em que o sinal assume valores não nulos.

2.1 Amostragem

Embora sinais discretos possam surgir de diversas maneiras e assumir diversas formas, frequentemente um sinal discreto $x[n]$ surge através da amostragem periódica de um sinal contínuo $x_c(t)$:

$$x[n] = x_c(nT), \quad (2.1)$$

em que T é o **intervalo de amostragem**, ou **período de amostragem**, e $f = 1/T$ é a **taxa de amostragem**. No caso do imageamento por ressonância magnética, por exemplo, a imagem de interesse é dada, *grosso modo*, pela densidade espacial de prótons em uma dada região do paciente e é modelada por um sinal $f_{RM} = f_{RM}(x_1, x_2)$, função das variáveis contínuas x_1 e x_2 , como veremos no capítulo seguinte. Também veremos, no entanto, que esse sinal é determinado computacionalmente através das medidas de outros sinais de interesse e, portanto, o que resulta é um sinal discreto, dado, idealmente, por $f_d[m, n] = f_{RM}(m\Delta x_1, n\Delta x_2)$, em que Δx_1 e Δx_2

são, respectivamente, os intervalos de amostragem nas coordenadas espaciais x_1 e x_2 . Podemos conhecer a imagem $f_{RM}(x_1, x_2)$ desejada dadas as amostras $f_d[m, n]$ calculadas? Posto de outra forma, podemos inverter a operação de amostragem?

A relação (2.1) determina um mapeamento de um sinal x_c de tempo contínuo em um sinal x de tempo discreto. Em geral, essa operação não é inversível, uma vez que não se pode determinar univocamente x_c dado x , já que existem diversos sinais contínuos que poderiam dar origem à mesma sequência $x[n]$. No entanto, para dada taxa de amostragem f , é possível restringir a classe de sinais à qual x_c pertence a um determinado conjunto Λ_f de forma que, se conhecermos as amostras $x[n]$ de x_c e sabemos que $x_c \in \Lambda_f$, então podemos determinar x_c de forma unívoca. Dizemos então que $x = x[n]$ é uma **representação** de $x_c = x_c(t) \in \Lambda_f$. Uma possível relação entre f e Λ_f é o conteúdo do celebrado teorema da amostragem de Nyquist [7, 19]. Examinaremos essa relação a seguir; por ora, é importante observar que a unicidade de x_c dado x depende do conhecimento de f e da suposição $x_c \in \Lambda_f$ *a priori*.

Para qualquer sinal $x_c \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$,

$$X_c(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (2.2)$$

é a transformada de Fourier de x_c . A transformada inversa de Fourier determina x_c em termos de X_c por

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2.3)$$

Seja x_c um sinal limitado em banda com largura de banda B (em hertz), ou seja $|X_c(\Omega)| = 0$ para $|\Omega| > 2\pi B$ (em rad/s). O teorema da amostragem de Nyquist afirma que, nesse caso, x_c pode ser univocamente determinado a partir das suas amostras $x[n] = x_c(nT)$ tomadas a uma taxa $f = 1/T$ se

$$B \leq \frac{f}{2}. \quad (2.4)$$

Nos termos da discussão anterior, o teorema da amostragem de Nyquist afirma que $x_c(t)$ pode ser recuperado a partir das amostras $x[n]$ conhecido $f = 1/T$ se soubermos *a priori* que $x_c \in \Lambda_f$ em que Λ_f é o conjunto dos sinais cuja transformada de Fourier tem o suporte restrito ao intervalo $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ [7, 6]. Nesse caso, x é uma representação de x_c em Λ_f e a fórmula da interpolação de Shannon–Whittaker

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{T} x[n] \phi_{n,T}(t) \quad (2.5)$$

$$\phi_{n,T}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc} \left(\frac{t - nT}{T} \right) \quad (2.6)$$

determina a operação de síntese [7, 6]. A taxa de amostragem f é conhecida como taxa de Nyquist e a frequência de corte B é conhecida como frequência de Nyquist. A condição 2.4 é suficiente e necessária para que x_c seja recuperado exatamente pela interpolação 2.5, no entanto, é apenas suficiente para que o sinal possa ser determinado univocamente de x já que outras restrições podem ser impostas sobre o sinal para que isso seja possível. Nesses casos, em geral, outras fórmulas de interpolação são necessárias [7].

A equação 2.5 sugere que o conjunto $\{\phi_{n,T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ gera o sub-espaço vetorial $\Lambda_f \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Mais ainda, como $\langle \phi_{n,T}(t), \phi_{m,T}(t) \rangle = \delta[n-m]$, vemos que $\phi_{n,T}(t)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal desse sub-espaço. Para qualquer sinal $x_c \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, a melhor aproximação $\tilde{x}_c \in \Lambda_f$, em termos da minimização do erro, no sentido da norma $\|x_c - \tilde{x}_c\|^2 = \langle x_c - \tilde{x}_c, x_c - \tilde{x}_c \rangle$, induzida pelo produto interno em $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, é dada pela projeção ortogonal $\tilde{x}_c = P_{\Lambda_f} x_c$ de x_c em Λ_f , definida por

$$\tilde{x}_c(t) = P_{\Lambda_f} x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x_c(\tau), \phi_{n,T}(\tau) \rangle \phi_{n,T}(t). \quad (2.7)$$

Note que, como $\phi_{n,T}(t) = \phi_{0,T}(t - nT)$ e $\phi_{0,T}(t) = \phi_{0,T}(-t)$, temos

$$\langle x_c(\tau), \phi_{n,T}(\tau) \rangle = x_c \star \phi_{0,T}(nT), \quad (2.8)$$

em que \star denota convolução. Substituindo 2.8 em 2.7 e comparando com 2.5, com $h_T(t) = \phi_{0,T}(t)/\sqrt{T}$ e lembrando que $\tilde{x}_c = P_{\Lambda_f} x_c \in \Lambda_f$, temos

$$P_{\Lambda_f} x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{T} \tilde{x}[n] \phi_{n,T}(t) \quad (2.9)$$

$$\implies \tilde{x}[n] = x_c \star h_T(nT), \quad \tilde{x}_c(t) = x_c \star h_T(t). \quad (2.10)$$

Observe que $h_T(t) = \text{sinc}(t/T)/T$ é o filtro passa-baixas ideal com $H_T(\Omega) = 1$ para $|\Omega| \leq \pi f$ e $H_T(\Omega) = 0$ caso contrário. Nessa aplicação em particular, h_T é conhecido como filtro **anti-aliasing** e as equações 2.9 e 2.10 mostram que as amostras do sinal filtrado $\tilde{x}[n] = x_c \star h_T(nT)$ tomadas uniformemente a uma taxa de f amostras por segundo formam uma representação da melhor aproximação $\tilde{x}_c \in \Lambda_f$ para x_c . Note ainda que a filtragem **anti-aliasing** corresponde à projeção ortogonal no espaço Λ_f e que, portanto, $g \star h_T(t) = g(t) \forall g \in \Lambda_f$. Sendo assim, o erro $\epsilon = x_c - \tilde{x}_c$ na aproximação é ortogonal ao espaço Λ_f e $P_{\Lambda_f} \epsilon = 0$. Se um sinal $x_c \notin \Lambda_f$ é amostrado como em 2.1 e reconstruído com 2.5, o erro tem ainda uma componente $P_{\Lambda_f} \epsilon \in \Lambda_f$ não nula chamada de *aliasing*, o que dá o nome ao filtro h_T [6, 7].

Dentre as peculiaridades das operações de amostragem e reconstrução conforme discutidas acima no contexto de Nyquist, note que essas operações são lineares. Em particular, note que as funções $\{\phi_{n,T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ em 2.5, 2.7 e 2.9 não dependem do sinal [7, 12]. Essa é uma situação interessante mas não é uma restrição necessária e, em geral, elas não precisam sequer formar uma base do espaço que geram. É o caso, por exemplo, quando essas funções são selecionadas adaptativamente de um

dicionário maior e possivelmente redundante para construir uma aproximação esparsa do sinal considerado, o que corresponde a otimizar o espaço de aproximação Λ_f com relação à esparsidade desse sinal [7, 12]. Essa é uma operação importante em diversas aplicações em processamento de sinais como compressão ou remoção de ruído [7, 12]. Talvez menos evidente, outra condição importante para a linearidade da operação de reconstrução é a escolha da “melhor” aproximação com base na minimização da norma $\|\epsilon\|^2 = \langle \epsilon, \epsilon \rangle$, que leva à projeção ortogonal 2.7 como solução. Podemos escolher outras normas ou mesmo outras medidas de distorção ainda mais gerais para medir a qualidade da aproximação, o que leva a reconstruções não lineares em geral [7].

2.2 DTFT e DFT

Já foi observado que a amostragem na forma 2.9 para sinais que não satisfazem a condição 2.4 implica em *aliasing*. Para caracterizar melhor esse fenômeno, vamos considerar um forma particular da operação de amostragem que, embora não seja fisicamente realizável, simplifica consideravelmente a análise. Seja $s(t)$ o trem de impulsos com período T , definido por¹

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (2.11)$$

em que $\delta(t)$ é a função de impulso unitário. Pode-se mostrar que a transformada de Fourier do trem de impulsos é um trem de impulsos no domínio da frequência dado por

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (2.12)$$

em que $\Omega_s = 2\pi/T$ é a frequência de amostragem em rad/s [6]. Considere que o sinal $x_c(t)$ que desejamos amostrar modula o trem de impulsos, dando origem a um sinal $x_s(t)$

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\delta(t - nT). \quad (2.13)$$

A última igualdade decorre das propriedades de $\delta(t)$ [6, 19]. Notamos que a n -ésima amostra $x[n]$ corresponde ao coeficiente do impulso $\delta(t - nT)$ no trem de impulsos modulado.

Da teoria de Fourier, sabe-se que, para quaisquer duas funções $f(t)$ e $g(t)$ com transformadas $F(\Omega)$ e $G(\Omega)$, se $h(t) = f(t)g(t)$, então a transformada de $h(t)$ é dada por $H(\Omega) = F(\Omega) \star G(\Omega)/2\pi$ [6, 19]. Assim, a transformada de $x_s(t)$ é dada por

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) \star S(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s) \quad (2.14)$$

¹Essa igualdade, bem como qualquer outra envolvendo funções de impulso unitário ou funções relacionadas, deve ser entendida no sentido de igualdade entre distribuições [7, 4, 5].

ou, direto de 2.2 e 2.13,

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn}. \quad (2.15)$$

Lembrando que o sinal é posteriormente reconstruído com filtro passa-baixas ideal com frequência de corte Ω_s e ganho T , essa expressão permite avaliar graficamente o conteúdo do teorema de Nyquist, como na figura 2.1. Note que $X_s(\Omega)$ é uma função periódica em Ω com período Ω_s .

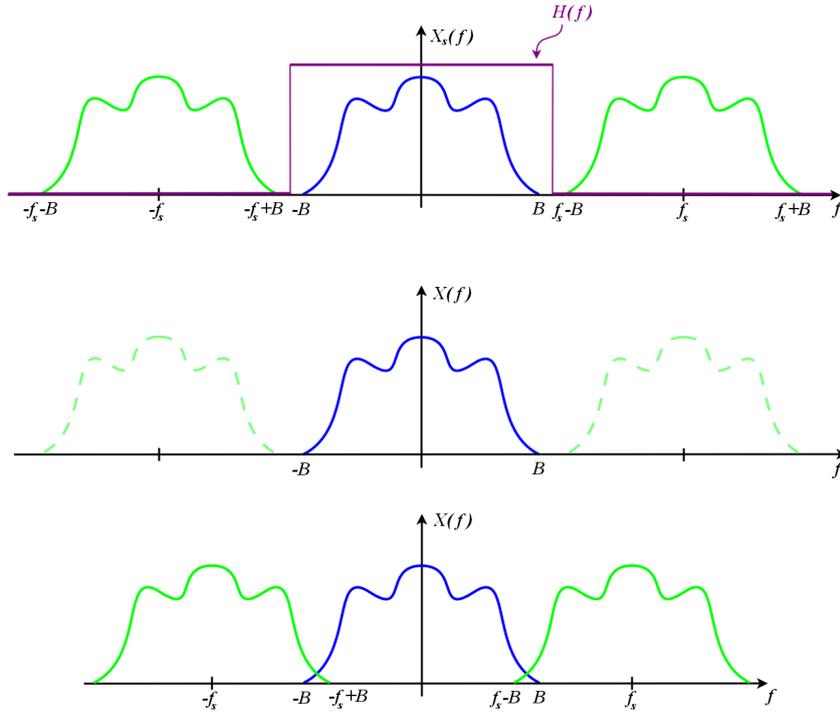


Figura 2.1: Teorema de Nyquist. As curvas azuis representam a transformada $X(f)$ de um sinal $x(t)$, em que $f = \Omega/2\pi$ é a frequência em Hertz. Aqui, $f_s = 1/T$ é a taxa de amostragem do sinal. As curvas verdes representam as réplicas de $X(f)$ introduzidas devido à amostragem, conforme a equação 2.14. O retângulo roxo corresponde à função de transferência do interpolador ideal. A figura do topo ilustra o caso em que $B < f_s/2$, satisfazendo o critério de Nyquist. A figura do meio mostra como o interpolador ideal recupera o sinal original nesse caso. A última figura ilustra o caso em que o critério de Nyquist não é atendido. Observe a sobreposição das réplicas sobre o sinal original. O interpolador ideal, nesse caso, recupera apenas uma aproximação distorcida de $X(f)$. À essa distorção, é dado o nome de *aliasing*.

Definimos a **transformada de Fourier de tempo discreto** (DTFT, do inglês *discrete-time Fourier transform*) da sequência $x[n]$ por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \quad (2.16)$$

Note que, diferente da transformada de Fourier apresentada na seção anterior, a DTFT mapeia uma função x de uma variável discreta n em uma função X de uma variável contínua ω . Por inspeção, percebe-se essa função é periódica em ω com período 2π . A relação inversa é dada por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.17)$$

em que a integração pode ser realizada sobre qualquer período 2π de $X(\omega)$. Comparando a equação 2.17 com 2.14 e 2.15, vemos que

$$X_s(\Omega) = X(\Omega T) \quad \text{ou} \quad X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T} k \right), \quad (2.18)$$

de forma que, se conhecermos T , podemos trabalhar apenas com $X(\omega)$.

Consideramos agora amostras de $X(\omega)$ e procuramos por uma relação entre essas amostras e a sequência $x[n]$. Considere N amostras a cada período 2π , incluindo $\omega = 0$ e, por tanto, todo múltiplo inteiro de 2π também. A k -ésima amostra é dada por

$$\tilde{X}[k] = X \left(\frac{2\pi}{N} k \right). \quad (2.19)$$

Note que essa é uma sequência periódica com período N , já que $X(\omega)$ é periódica com período 2π . Seguindo um raciocínio análogo ao da amostragem, consideramos essa sequência modulando um trem de impulsos em ω com período $2\pi/N$, o que dá origem a uma função $X_\delta(\omega)$ dada por

$$X_\delta(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}[k] \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{N} k \right). \quad (2.20)$$

Essa função é a DTFT de uma sequência $\tilde{x}[n]$. Inserindo 2.20 em 2.17 e integrando sobre um intervalo de 2π que se estende de $-\epsilon$ a $2\pi - \epsilon$ com $0 < \epsilon < 2\pi/N$, temos

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (2.21)$$

Deve-se perceber $\tilde{x}[n]$, assim como $\tilde{X}[k]$, é uma sequência periódica de período N . O conjunto das sequências com período N forma um espaço vetorial de dimensão N . As funções $e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn}$ formam uma base ortogonal desse espaço. A relação inversa é dada por

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (2.22)$$

Para uma sequência $\tilde{x}[n]$ qualquer com período N , 2.21 é uma representação em **série discreta de Fourier** (DFS, do inglês, *discrete Fourier series*) e $\tilde{X}[k]$ são os coeficientes de análise. As equações 2.21 e 2.22 são conhecidas como **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente, e diz-se que $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{X}[k]$ formam um par DFS. Para $\tilde{X}[k] = X(\omega = 2\pi k/N)$, pode-se mostrar que

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n - kN], \quad (2.23)$$

ou seja, uma sobreposição de réplicas de $x[n]$ deslocadas de todos os múltiplos de N , formando uma sequência de período N . Essa é a relação desejada entre as amostras da transformada de Fourier do sinal e as próprias amostras do sinal.

Da equação 2.23, se $x[n]$ é uma sequência com suporte limitado a $0 \leq n < M-1$ de comprimento $M \leq N$, vemos que as réplicas de $x[n]$ em $\tilde{x}[n]$ não se sobrepõem e $x[n] = \tilde{x}[n]$ nesse intervalo com $x[n] = 0$ fora dele. Visto de outra forma, são necessárias pelo menos $N \geq M$ amostras a cada período 2π da DTFT de $X(\omega)$ para determinar univocamente a sequência $x[n]$ se ela é de comprimento M . Como $\tilde{X}[k]$ é periódica com período N , as N amostras no intervalo $0 \leq k \leq N-1$ são suficientes para determinar essa sequência. Assim, trocando para uma notação mais comum com $X[k] = X(2\pi k/N)$, $0 \leq k \leq N-1$, definimos

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.24)$$

como a **transformada discreta de Fourier** (DFT, do inglês, *discrete Fourier transform*) da sequência finita $x[n]$ de comprimento N . A equação 2.24 é a equação de análise da DFT. A DFT inversa é dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.25)$$

A equação 2.25 é a equação de síntese da DFT. Diz-se que $x[n]$ e $X[k]$ formam um par DFT. Deve-se notar cuidadosamente a diferença entre pares *DFS* e pares *DFT*. A DFS é uma relação entre sequências periódicas de período N enquanto a DFT é uma relação entre sequências finitas de comprimento N . No entanto, note que as expressões de análise e síntese são idênticas em ambos os casos. Assim, se as equações 2.24 e 2.25 forem avaliadas fora do intervalo $0 \leq k, n \leq N-1$, o resultado é uma extensão periódica das sequências $X[k]$ e $x[n]$.

A determinação dos N coeficientes da DFT $X[k]$ a partir de $x[n]$ com uma implementação direta da equação de síntese conforme a equação 2.24 requer um total de N^2 multiplicações complexas e $N(N-1)$ adições complexas. Assim, a complexidade computacional da DFT é $O(N^2)$, bem como a complexidade da DFT inversa, se calculadas diretamente de 2.24 ou 2.25 [6, 8]. No entanto, é possível implementar a DFT, bem como a DFT inversa, com algoritmos diversos de complexidade $O(N \log N)$. Esses algoritmos são coletivamente chamados de **transformada rápida de Fourier** (FFT, do inglês, *fast Fourier transform*) [6, 19]. A diferença do tempo de execução da transformada pode ser muito significativo para N grande, podendo chegar a várias ordens de grandeza. A DFT tem inúmeras aplicações na análise e no processamento de sinais e a FFT torna praticável o uso dessa ferramenta.

2.3 Compressão

Para uma dada taxa de amostragem f , que é um atributo do sistema de amostragem, a desigualdade 2.4 determina o máximo suporte que pode ter a transformada de Fourier do sinal. Para dada largura de banda B , que é um atributo do sinal, a desigualdade 2.4 determina a mínima taxa de amostragem necessária para uma reconstrução exata. Essa última abordagem revela que, quanto mais limitado em banda é o sinal, menos amostras por segundo são necessárias para representá-lo adequadamente. Mesmo que o sinal não seja limitado em banda, as equações 2.7, 2.9 e 2.10 revelam que o sinal pode ser representado adequadamente por suas amostras na saída de um filtro **anti-aliasing** se a sua energia estiver suficientemente concentrada nas baixas frequências. Nesse caso, para uma dada energia máxima de distorção, quanto mais concentrada a energia do sinal na banda base do espectro de frequências, menos amostras por segundo são necessárias para uma representação da aproximação desejada. Para sinais passa-faixas com frequência de corte inferior f_L , frequência de corte superior f_H e largura de banda efetiva $B_{ef} = f_H - f_L$, resultados similares podem ser demonstrados sob certas condições com uma simples translação em frequência (modulação). Embora nesse caso os requisitos sobre a taxa de amostragem dependam também de f_L e f_H , pode-se mostrar que, quanto menor B_{ef} , menos amostras por segundo são necessárias para representar adequadamente o sinal.

Frequentemente, o interesse em uma representação em tempo discreto de um sinal de tempo contínuo deriva da possibilidade de processá-lo e armazená-lo digitalmente. Para isso, as amostras em geral são quantizadas e codificadas em dígitos binários ou **bits**. A etapa de quantização em geral é irreversível e introduz erros de natureza aleatória. Para que o tempo de amostragem e o espaço de armazenamento sejam finitos, apenas uma quantidade finita de amostras pode ser tomada, o que introduz novos erros. Esses erros no entanto são de natureza similar àqueles introduzidos pela projeção ortogonal nas equações 2.9 e 2.10, uma vez que um vetor finito de amostras pode ser visto como o resultado de uma projeção em um sub-espaço das sequências infinitas de amostras. Isso levanta a questão da representação eficiente da informação.

O significado de eficiência numa representação binária de um conjunto de dados depende da aplicação específica a que ele se destina. Para diversas manipulações matemáticas ou para visualização em um monitor, por exemplo, frequentemente é interessante que cada símbolo em um alfabeto finito seja codificado em palavras-código de tamanho fixo, ou seja, com o mesmo número de bits para cada símbolo. Para armazenamento e transmissão, por outro lado, uma representação eficiente é uma em que os dados são representados pelo menor número possível de bits e, nesse caso, pode-se mostrar que um código mais eficiente nesse sentido utiliza palavras-código de tamanho variável. A busca por uma representação eficiente de sinais em termos do menor número possível de bits corresponde à tarefa de **compressão de dados**.

Dados de origem naturalmente discreta como o código fonte de um programa de computador, por exemplo, podem ser comprimidos sem perdas com uma alocação eficiente dos bits em um código. A teoria da informação, nesse caso, fornece um limite inferior à taxa média de bits por símbolo em termos da **entropia**, mostrando ainda como construir códigos que atingem essa taxa assintoticamente removendo redundância estatística. Essa etapa é conhecida também como

codificação de fonte ou **codificação de entropia**. Dados de origem analógica, como amostras quantizadas de sinais analógicos, embora distorcidos irreversivelmente por erros inerentes à quantização, também podem ser codificados eficientemente pela remoção de redundância. Frequentemente, no entanto, como no caso de sinais multimídia (áudio, vídeo e imagem), é possível construir representações adequadas com taxas de bit por símbolo bem abaixo da entropia, pela remoção de informação irrelevante antes da codificação de fonte.

As equações 2.9 e 2.10 sugerem um ponto de partida na busca por maneiras de descartar informações contidas no sinal mantendo a distorção sob controle. Quanto mais concentrada na banda base for a energia do sinal amostrado, menor será a distorção. Como notado anteriormente, mesmo um sinal passa-faixas pode ser amostrado eficientemente, se conhecemos a posição da banda passante. Essa é uma instância de um fenômeno mais amplo, responsável pela eficácia dos diversos algoritmos de compressão com perdas para sinais multimídia. Se, para um dado sinal, pudermos encontrar uma representação em que a maior parte da sua energia esteja concentrada em um número pequeno de coeficientes, podemos descartar as amostras abaixo de um certo limiar e codificar apenas os valores dos coeficientes significativos juntamente com a sua posição nessa representação. Construimos assim uma aproximação **esparsa** do sinal. No caso de sinais multimídia, podemos ir além, fazendo uso do fato de que esses sinais se destinam ao uso por humanos. Se pudermos identificar regiões dessa representação em que os sentidos humanos são mais ou menos sensíveis a erros, podemos quantizar de maneira mais suave as regiões mais críticas e de maneira mais grosseira as regiões em que erros são menos perceptíveis aos sentidos.

Como exemplo, o padrão JPEG para codificação de imagens [10, 7] divide a imagem digital em blocos e representa cada bloco por sua transformada de cosseno discreta (DCT, do inglês *discrete cosine transform*). Para a maioria dos blocos, a energia encontra-se concentrada no coeficientes de baixa frequência da DCT, de forma que a quantização subsequente frequentemente gera longas cadeias de zeros nas regiões de alta frequência. Além disso, a visão humana é tipicamente menos sensível a oscilações rápidas que a oscilações lentas, de forma que essas regiões de alta frequência da DCT podem ainda ser quantizadas mais grosseiramente. Os coeficientes passam então por uma codificação de entropia que faz uso eficiente das longas cadeias de zeros. O padrão JPEG-2000 [10, 7], também para codificação de imagens, funciona de maneira similar, dividindo a imagem em blocos e construindo uma representação para cada bloco em bases de *wavelets*, que produzem um grande número de coeficientes quantizados em zero. Em cada bloco, erros nas regiões de escalas mais finas em geral são menos visíveis do que erros em escalas maiores, permitindo quantizações mais grosseiras nas escalas mais finas. Os coeficientes são então codificados eficientemente com uma codificação de entropia que faz uso da geometria desses coeficientes.

Apesar das particularidades de cada método de compressão com perdas, percebemos que, em geral, eles se apoiam em representações esparsas. Quanto mais esparsa o sinal, mais informação pode ser descartada com a qualidade subjetiva preservada. No entanto, essa compressão se dá já no domínio digital e continuamos dependendo da existência de um sinal original completamente amostrado acima da taxa de Nyquist, o que pode vir a impor condições severas sobre o sistema de amostragem para certas classes de sinais. A possibilidade de descartar informação sem degradar significativamente o sinal, porém, levanta questões sobre se seria possível colher menos informação

logo na amostragem e, assim, aliviar os requisitos sobre o sistema. Examinaremos mais a fundo essas questões no capítulo 4. Por ora, vamos examinar em mais detalhes o esquema de amostragem em particular que motiva este trabalho: a aquisição de imagens de ressonância magnética.

Capítulo 3

Ressonância Magnética

Técnicas de imageamento por ressonância magnética (RM) podem ser aplicadas para se obterem imagens anatômicas de quaisquer partes do corpo humano que sejam ricas em hidrogênio. Embora sua utilização hoje esteja restrita a uma porcentagem pequena do total de exames radiológicos, pode-se esperar que essa contribuição cresça continuamente num futuro próximo devido à sua capacidade de gerar imagens de alta resolução e alta especificidade sem a utilização de radiação ionizante, potencialmente danosa à saúde [1]. Diferentemente, por exemplo, da radiografia e da tomografia computadorizada, que utilizam raios-X, procedimentos de RM submetem o paciente apenas a campos magnéticos e a ondas de rádio-frequência. O operador tem à disposição uma série de parâmetros definidos por ele que o permitem ajustar diferentes contrastes entre diversos tecidos, de forma que é possível adequar as características da imagem às necessidades do exame.

A qualidade de uma imagem de RM, avaliada tanto qualitativamente como quantitativamente, é determinada por diversos fatores no momento da aquisição. Dentre esses fatores, o tempo de aquisição necessário para uma dada qualidade é frequentemente um gargalo na aplicação dessa tecnologia à determinados exames. Frequentemente, por exemplo, o paciente deve permanecer em apneia durante a aquisição dos dados, como em exames cardiovasculares, para evitar artefatos de movimento na imagem final, de forma que o tempo de exposição torna-se proibitivo ou se admite uma maior degradação na qualidade da imagem. Diversas técnicas foram propostas e utilizadas ao longo do tempo para acelerar essas aquisições e este trabalho aborda uma delas, um tanto recente [14, 15]. No entanto, para apreciar essas técnicas, é preciso um entendimento um pouco mais detalhado do procedimento de aquisição de imagens de RM. Em particular, como se vê adiante, é importante notar que, em RM, o sinal utilizado para estimar a imagem desejada é amostrado no domínio da frequência, diferente de fotografias ou radiografias, em que o sinal é amostrado no domínio do espaço, o próprio domínio natural da imagem.

Uma imagem de ressonância magnética (RM) como tipicamente utilizada para fins de diagnóstico em medicina é, grosso modo, uma medida da densidade local de hidrogênio. Isso é possível graças ao fenômeno conhecido como **ressonância magnética nuclear** (RMN). Embora RMN não seja um fenômeno exclusivamente relacionado a átomos de hidrogênio, a maior parte das técnicas de imageamento por RM focam nessa substância devido à sua abundância no corpo humano

[1, 3]. Começamos com uma breve descrição do fenômeno de RMN e na seção seguinte indicamos como podemos explorar esse fenômeno para construir imagens tomográficas do corpo humano. Os princípios discutidos aqui, no entanto, podem ser estendidos também para a aquisição de dados em um número maior de dimensões.

3.1 A Física da Ressonância Magnética

Diversas partículas, como elétrons, prótons, nêutrons e, de interesse particular para imagens de RM, núcleos de átomos, possuem uma forma de momento angular intrínseco a elas chamado de *spin* [4, 5]. Partículas com spin não nulo possuem também um momento magnético intrínseco proporcional ao spin. O termo spin deriva de um modelo inicial para o caso do elétron em que ele era visto como uma distribuição de carga girando em torno do próprio eixo. Embora o termo tenha sobrevivido, hoje sabe-se que o modelo subjacente é incorreto e que o spin não tem análogo clássico [4, 5]. Uma descrição completa do fenômeno requer o formalismo da eletrodinâmica quântica. No entanto, uma discussão simplificada baseada numa combinação de resultados da mecânica quântica e intuição clássica é suficiente para os nossos propósitos.

Considere inicialmente que \vec{S} seja o momento angular relacionado ao spin da partícula num contexto clássico e que $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ seja seu momento magnético associado. A constante escalar γ é a **razão giromagnética**. Na presença de um campo magnético constante e uniforme $\vec{B} = (0, 0, B_0)$, orientado na direção z por conveniência, o sistema sofre a ação de um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Segundo a mecânica clássica, a evolução temporal desse sistema é dada pelas equações de movimento

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\tau} \implies \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \gamma\vec{B}, \quad (3.1)$$

cuja solução para $\vec{\mu} = \vec{\mu}(t) = (\mu_x(t), \mu_y(t), \mu_z(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= \mu_x(0) \cos(\omega_0 t) + \mu_y(0) \sin(\omega_0 t) \\ \mu_y(t) &= -\mu_x(0) \sin(\omega_0 t) + \mu_y(0) \cos(\omega_0 t) \\ \mu_z(t) &= \mu_z(0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que

$$\omega_0 = \gamma B_0. \quad (3.3)$$

As equações 3.2 podem ser escritas de maneira mais conveniente agregando as componentes $\mu_x(t)$ e $\mu_y(t)$ em uma única componente transversal com a introdução de uma notação complexa. A componente transversal (complexa) do momento magnético torna-se então

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{xy}(0)e^{-j\omega_0 t}. \quad (3.4)$$

É conveniente introduzir também, neste ponto, um novo sistema de referências $x'y'z'$, girando em relação ao primeiro em torno do eixo $z = z'$ com frequência angular ω_0 , de forma que esses sistema e o sistema original xyz coincidam em $t = 0$. Com relação às novas coordenadas, $\vec{\mu}$ é claramente estacionário, com $\mu_{x'y'}(t) = \mu_{xy}(0)$ e $\mu_{z'}(t) = \mu_z(0)$. Note que o problema, nesse sistema não-inercial, é formalmente equivalente a um problema em um sistema inercial com \vec{B} substituído por um campo efetivo $\vec{B}_{ef} = 0$. Esse resultado é verdade, em geral, mesmo para campos \vec{B} orientados arbitrariamente no sistema original xyz , visto de sistemas $x'y'z'$ girando com frequência angular $\vec{\omega}$ em relação ao primeiro em torno de eixos arbitrários. No novo sistema, a partícula sofre a ação de um campo efetivo $\vec{B}_{ef} = \vec{B} - \vec{\omega}/\gamma$ [5].

Das equações 3.2 e 3.3, percebemos que o momento magnético $\vec{\mu}$ precessa em torno de \vec{B} , como ilustrado na figura 3.1. A energia potencial do sistema é dada por

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma S B_0 \cos \theta \quad (3.5)$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{\mu}$ e \vec{B} . Assim, classicamente, vemos que a energia é mínima se $\vec{\mu}$ e \vec{B} são paralelos e que $S_z = \vec{S} \cdot z$ pode assumir qualquer valor no intervalo $[-S, S]$, com $S = \|\vec{S}\|$.

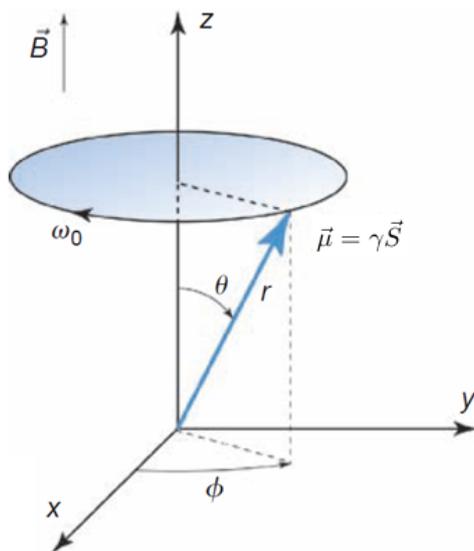


Figura 3.1: Movimento de precessão. Classicamente, o momento magnético $\vec{\mu}$ de uma partícula, quando proporcional ao momento angular \vec{S} , na presença de um campo magnético \vec{B} uniforme e constante, precessa em torno da direção do campo com velocidade angular ω proporcional à intensidade B_0 do campo. Adaptado de [1].

Na mecânica quântica, variáveis dinâmicas \mathbf{R} são associadas a operadores R e só podem assumir valores no espectro dos autovalores desses operadores. A probabilidade de uma variável dinâmica assumir um determinado valor é determinada por um **operador de estado** ρ . O valor esperado de uma variável dinâmica \mathbf{R} em um estado ρ é dado por $\langle \mathbf{R} \rangle = Tr(\rho R)$, em que $Tr(\cdot)$ fornece o **traço** do operador em que atua [4]. As formas particulares de operadores associados a estados ou a variáveis dinâmicas e as propriedades que eles devem satisfazer no formalismo da mecânica quântica não são de interesse aqui, mas o fato de que variáveis dinâmicas só podem assumir valores

no espectro dos operadores associados [4, 5] a elas tem consequências importantíssimas no estudo de RMN. Há casos em que o operador associado à energia total do sistema tem um espectro discreto. É o caso de uma partícula com spin não nulo, com o momento magnético de spin associado, imersa em um campo magnético de intensidade B_0 orientado na direção z . Nesse caso, uma medida da energia do sistema resultará necessariamente em um dos $2s + 1$ valores dados por

$$E_m = -m\gamma\hbar B_0, \quad m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s, \quad (3.6)$$

com $\hbar = h/2\pi$ sendo h a constante de Planck e s o número quântico de spin da partícula [5]. Para um determinado tipo de partícula, s é invariante e pode assumir valores da forma $n/2$ para inteiros n não negativos. Em particular, no caso do núcleo de hidrogênio (um próton), $s = 1/2$ e a equação 3.6 mostra que existem duas possibilidades E_+ e E_- para o valor da energia do sistema correspondendo a $m = 1/2$ e a $m = -1/2$, respectivamente. Estados puros com energia E_+ , ou seja, aqueles cuja probabilidade de a energia assumir o valor E_+ é 1, são indistintamente chamados de “up”, enquanto estados puros com energia E_- são indistintamente chamados de “down”. Esses nomes derivam do fato de que, nesses estados, a componente z do momento angular devido ao spin tem valores bem definidos, ou seja, com probabilidade 1, dados por $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente. As componentes x e y desse momento angular não têm valores definidos em nenhum desses dois estados, nem em nenhuma combinação deles. Porém, pode-se mostrar que os valores esperados dessas componentes do momento angular, bem como do momento magnético associado, precessam exatamente como nas equações 3.2 e 3.3 [5]. Assim, embora o spin não possa ser explicado por nenhuma analogia com a mecânica clássica, podemos seguir com a análise anterior em termos de \vec{S} e $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ classicamente. No entanto, veremos que a quantização dos níveis de energia, equação 3.6, será fundamental para a codificação de posição em imagens de RM.

Considere um volume V_s macroscopicamente pequeno de um sistema de spins (núcleos ^1H , no caso). Por macroscopicamente pequeno, queremos dizer que o volume V_s ainda é grande suficiente para conter um número n_s muito grande de núcleos ^1H , com momentos magnéticos de spin $\vec{\mu}_i$ cada. Da equação 3.6, vemos que o estado de spin up tem energia menor que o estado de spin down e será, portanto, preferencialmente ocupado na presença do campo $\vec{B} = B_0\hat{z}$. O resultado é uma magnetização média

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n_s} \vec{\mu}_i. \quad (3.7)$$

As componentes x e y de cada spin, que precessam em torno do eixo z fora de fase, se cancelam na média, de forma que, no equilíbrio, $\vec{M} = M_0\hat{z}$, com

$$M_0 \propto B_0 P_D, \quad (3.8)$$

em que P_D é a **densidade de prótons**, ou seja, o número de átomos de hidrogênio por unidade de volume. À magnetização 3.7, corresponde um momento angular total $\vec{J} = \vec{M}/\gamma$, já que $\vec{\mu}_i = \gamma\vec{S}_i$ para cada spin no volume considerado. Assim,

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \times \gamma\vec{B}, \quad (3.9)$$

e a solução é análoga às equações 3.2, ou seja, \vec{M} precessa em torno do eixo z com velocidade angular $\omega_0 = \gamma B_0$, embora, nesse caso, $M_x(0) = M_y(0) = 0$ e o resultado seja apenas $M_z = M_0$, constante **no equilíbrio**.

Em última instância, estamos interessados na densidade relativa de núcleos ^1H . A relação 3.8 mostra que basta medir M_0 . Essa medida, no entanto, é impraticável por razões técnicas. Buscamos então medir a componente transversal de \vec{M} que está girando com frequência angular ω_0 em torno do eixo z . Porém, os muitos spins responsáveis por essa magnetização estão girando fora de fase e produzindo uma componente transversal efetivamente nula. A solução é perturbar o estado de equilíbrio de forma a se obter uma componente transversal não nula, com informação sobre M_0 . Essa componente girando em torno do eixo z gerará então um sinal que pode ser medido [2]. Essa perturbação é efetuada pela transmissão de fótons com energia adequada. Da equação 3.6, vemos que um spin num estado up pode mudar para um estado down, se absorver um fóton com energia

$$E_- - E_+ = \hbar\gamma B_0. \quad (3.10)$$

De forma análoga, numa mudança de estado de down para up, o spin emite um fóton com essa mesma energia. Essa é a condição de ressonância. Um fóton de energia $E = \hbar\omega$ satisfaz essa condição se $\omega = \gamma B_0 = \omega_0$. Quanto maior M_0 , como veremos adiante, maior a potência do sinal captado e melhor a relação sinal-ruído (SNR). A equação 3.8 mostra que, quanto maior B_0 , maior M_0 . No entanto, B_0 é limitado a campos da ordem de 1 T por razões técnicas e de segurança. Para o núcleo do hidrogênio (um próton apenas, sem nêutron), $\gamma/2\pi = 42,57$ MHz/T. Isso coloca os pulsos eletromagnéticos utilizados para perturbar o equilíbrio do sistema tipicamente na faixa de ondas de radiofrequência.

O pulso de RF é gerado por um transmissor em quadratura de forma que a sua componente magnética é dada por

$$\vec{B}_1(t) = B_1(\cos(\omega_0 t), -\sin(\omega_0 t), 0) \quad (3.11)$$

ou

$$B_{1xy}(t) = \vec{B}_1 \cdot \hat{x} + j\vec{B}_1 \cdot \hat{y} = B_1 e^{-j\omega_0 t}, \quad (3.12)$$

com $\vec{B}_1 \cdot \hat{z} = 0$. Referindo-nos ao sistema de coordenadas girante com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ em relação ao sistema estacionário, $\vec{B}_1(t)$ torna-se estacionário e podemos escolher $\vec{B}_1 = B_1 \hat{x}'$. Como discutido anteriormente, $\vec{B} = B_0 \hat{z} \rightarrow \vec{B}_{ef} = 0$ nesse sistema. Assim, $\vec{M}(t)$, com $\vec{M}(0) = M_0 \hat{z}'$, precessa em torno de \hat{x}' em direção ao eixo y' com velocidade angular

$$\omega_1 = \gamma B_1. \quad (3.13)$$

no sistema girante. No sistema estacionário, a magnetização espirala em direção ao plano transversal [1, 3]. O ângulo entre \vec{M} e o eixo $z' = z$, conhecido com ângulo de *flip* e positivo no sentido horário em torno de \hat{x}' , é dado por

$$\alpha = \int_0^{\Delta t} \gamma B_1 dt = \omega_1 \Delta t. \quad (3.14)$$

Como ilustrado na figura 3.2(a), qualquer ângulo de *flip* pode ser obtido, bastando uma escolha adequada de B_1 e de Δt . Há um compromisso entre essas duas quantidades, já que a duração do pulso deve ser mantida pequena para que o tempo de aquisição não se torne muito longo e a amplitude do pulso deve ser mantida pequena para evitar o aquecimento do tecido devido à componente elétrica do pulso de RF. De importância particular para imageamento são os pulsos de 90° e de 180° [1, 2], ilustrados nas figuras 3.2(b) e 3.2(c), respectivamente. O primeiro deixa a magnetização $\vec{M} = M_0 \hat{y}'$ com a componente longitudinal zerada e a componente transversal girando em torno do eixo z , com frequência angular ω_0 em sentido horário no sistema de coordenadas estacionário. O segundo inverte o sentido da magnetização, sem deixar componente transversal.

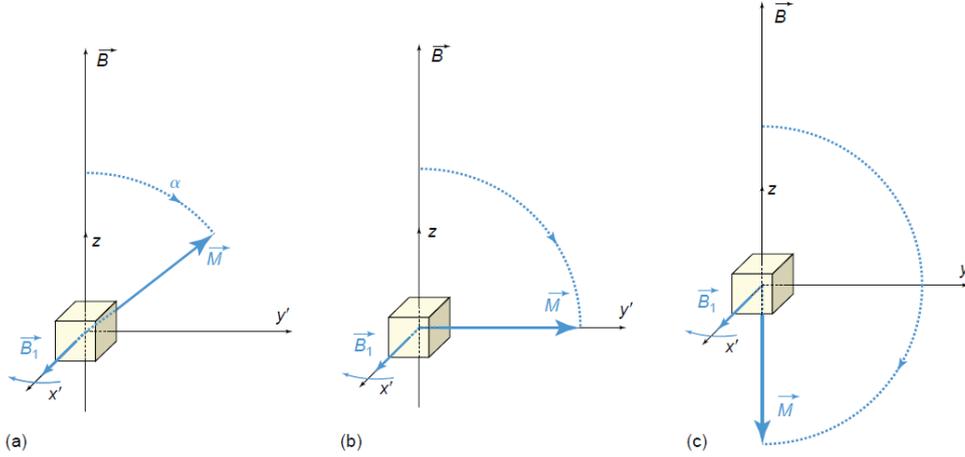


Figura 3.2: Magnetização logo **após** o pulso de RF, no sistema girante. O pulso de RF perturba o equilíbrio, deslocando a magnetização em direção ao eixo y' por um ângulo de *flip* α . (a) Ângulo de *flip* α arbitrário, possível com escolhas adequadas da amplitude e da duração do pulso de RF. (b) $\alpha = 90^\circ$. Máxima componente transversal, nenhuma componente longitudinal. (c) $\alpha = 180^\circ$. Componente longitudinal invertida em sentido, nenhuma componente transversal. Extraído de [1].

Considere um ângulo α de *flip*. Ao final do pulso, a magnetização é $\vec{M} = (M_0 \cos(\alpha), M_0 \sin(\alpha), 0)$ no referencial girante. No referencial estacionário, a componente transversal dessa magnetização está girando em torno do eixo z com frequência angular ω_0 , conforme discutido acima. Conforme a lei da indução de Faraday, essa magnetização girante induz uma tensão senoidal em um receptor próximo, com frequência ω_0 na faixa de RF. Um receptor em quadratura pode ser utilizado para aumentar a SNR do sinal captado [1]. Esses sinais são proporcionais a

$$\begin{aligned} s_x(t) &= \omega_0 V_s M_0 \sin \alpha \cos(-\omega_0 t) \\ s_y(t) &= \omega_0 V_s M_0 \sin \alpha \sin(-\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou

$$s(t) = s_x(t) + js_y(t) = \omega_0 V_s M_0 \sin \alpha e^{-j\omega_0 t} \quad (3.16)$$

em que V_s é o volume da amostra em notação complexa, à parte de uma fase constante que pode ser removida com a escolha da orientação inicial do sistema de referência. Note que tanto ω_0 quanto M_0 são proporcionais a B_0 , logo a amplitude do sinal é proporcional a B_0^2 . Além disso, M_0 é proporcional também à densidade de spins P_D . Assim, pelo produto com o volume V_s , vemos que a amplitude do sinal é proporcional também ao número n_s de spins excitados na amostra. Quando tratarmos do processo de formação de imagens de RM, V_s será identificado como o volume de um **voxel** (elemento de volume). Como podemos perceber da equação 3.16, V_s não pode ser feito arbitrariamente pequeno, o que limita a resolução da imagem, estabelecendo uma relação custo-benefício com a SNR.

A componente transversal da magnetização e, conseqüentemente, o sinal senoidal captado no receptor são possíveis porque, devido ao pulso de RF que perturba o equilíbrio, os spins individuais excitados na amostra giram em fase. Ao fim do pulso, no entanto, essa coerência de fase se perde à medida em que a amostra volta a condição de equilíbrio num processo de **relaxamento**. O processo de relaxamento se dá por dois fenômenos distintos concomitantes e essencialmente independentes, ambos modelados em boa aproximação por modelos de primeira ordem (com constantes de tempo diferentes). O primeiro, conhecido como relaxamento spin-spin, é responsável pelo decaimento exponencial da componente transversal $M_{y'}$ de $M_0 \sin(\alpha)$ para zero com constante de tempo T_2 :

$$M_{y'}(t) = M_0 \sin \alpha e^{-t/T_2}. \quad (3.17)$$

O segundo, conhecido como relaxamento spin-rede, é responsável pela recuperação exponencial da componente longitudinal $M_z = M_{z'}$ de $M_0 \cos(\alpha)$ para M_0 com constante de tempo T_1 :

$$M_z(t) = M_0 \cos \alpha e^{-t/T_1} + M_0 \left(1 - e^{-t/T_1}\right). \quad (3.18)$$

As constantes T_2 e T_1 são características do meio e, para um dado material, T_2 é sempre menor que T_1 . O decaimento T_2 é resultado da perda de coerência de fase entre os spins devido a inhomogeneidades locais no campo magnético devido a presença de outras partículas e é fortemente influenciado pela movimentação aleatória em escala microscópica¹ [1, 2]. O decaimento T_1 é resultado das transições de estado dos spins de volta aos estados de menor energia preferencialmente ocupados à medida em que o sistema converte em calor a energia potencial acumulada [1, 2]. A figura 3.3 ilustra o processo de relaxamento.

¹Esse fenômeno implica em um aumento de entropia e é, portanto, irreversível. Note-se que o decaimento do sinal acontece na verdade com uma constante de tempo $T_2^* < T_2$, devido à combinação desses efeitos com os

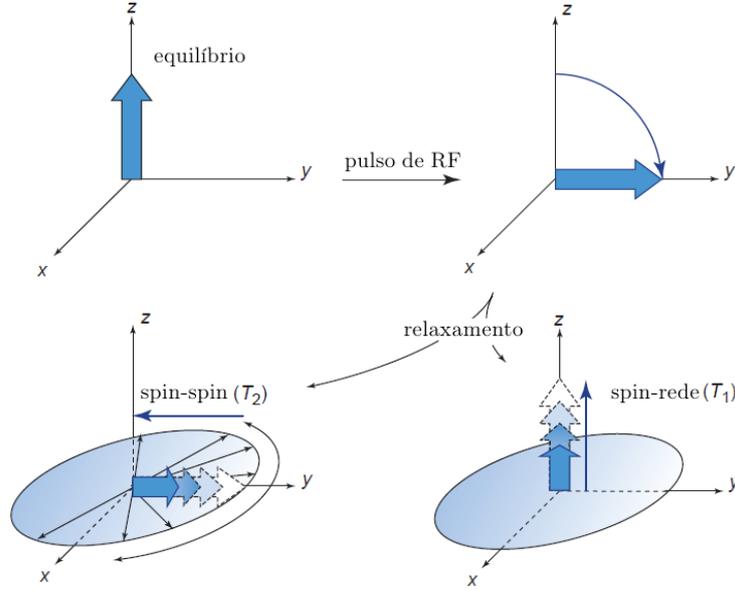


Figura 3.3: Relaxamento após um pulso de 90° . A componente transversal decai com constante de tempo T_2 , devido às interações spin-spin, enquanto a componente longitudinal se recupera com constante de tempo T_1 , devido às interações spin-rede. Note que, em geral, durante o relaxamento, $\|\vec{M}\| \neq M_0$. Adaptado de [1].

Para refletir os decaimentos T_2 e T_1 , o sinal em 3.16 é modificado de acordo com as equações 3.17 e 3.18. Considere um pulso de 90° , de forma que a magnetização longitudinal é simplesmente $M_z(t) = M_0(1 - e^{-t/T_1})$. No processo de imageamento, a amostra é sucessivamente excitada a cada intervalo T_R , conhecido como **tempo de repetição**. Com um novo pulso de 90° em $t = T_R$, a componente longitudinal da magnetização que gira até o eixo y' para produzir a componente transversal é $M_z(T_R)$, não mais M_0 . Inserindo essa modificação devido ao decaimento T_1 em 3.16 e introduzindo o decaimento T_2 com $\sin \alpha = 1$, vemos que o sinal no receptor é proporcional a

$$s(t) = \omega_0 V_s M_0 \left(1 - e^{-T_R/T_1}\right) e^{-t/T_2} e^{-j\omega_0 t}. \quad (3.19)$$

Note que esse sinal contém informação sobre P_D , T_1 e T_2 , que são características do material. Essas características, bem como a magnetização M_0 , são assumidas uniformes em todo o volume da amostra. Note ainda que α e T_R são parâmetros à disposição do operador para controlar as características da imagem num processo de imageamento². O sinal de RF $s(t)$ é conhecido como FID (do inglês, *free induction decay*). Em geral, ele é demodulado (o que corresponde a uma multiplicação por $e^{j\omega_0 t}$) e, em banda base, pode ser escrito como

$$s_0(t) = A V_s M_0 \left(1 - e^{-T_R/T_1}\right) e^{-t/T_2}, \quad (3.20)$$

em que a constante A absorve ω_0 e demais ganhos de naturezas diversas.

efeitos de irregularidades em B_0 independentes da amostra. Esses últimos efeitos, no entanto, são reversíveis e, por simplicidade, assume-se que eles são compensados de alguma forma.

²A equação 3.19 assume $\alpha = 90^\circ$ e deve ser modificada para refletir a dependência em α .

A equação 3.20 assume uma amostra pequena com M_0 , P_D , T_1 e T_2 uniformes. Considere uma amostra grande (um paciente numa máquina de RM, por exemplo) de volume V em que essas características são função da posição \vec{r} . O sinal resultante será a superposição de diversos sinais da forma 3.20 com $V_s \rightarrow d^3\vec{r}$ (em um sentido **macroscópico**, ou seja $d^3\vec{r}$ ainda é grande o suficiente para suavizar flutuações microscópicas), de forma que essas características são uniformes em cada elemento de volume. Vamos definir a **densidade ponderada de spins** por

$$f(\vec{r}) = AM_0 \left(1 - e^{-T_R/T_1}\right) e^{-t/T_2}. \quad (3.21)$$

Note que f não foi considerada como função do tempo, apesar de a variável t aparecer explicitamente no lado direito da equação. Isso porque a duração do intervalo de amostragem efetiva do sinal para imageamento é pequeno em relação a T_2 . Em geral, f é a quantidade que nos interessa na formação de imagens, ou seja, estamos interessados nos padrões locais (macroscopicamente) de variação desse objeto. Com essa definição, o sinal resultante é dado por

$$s(t) = \int_V f(\vec{r}) e^{-j\omega_0 t} d^3\vec{r} = e^{-j\omega_0 t} \int_V f(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (3.22)$$

ou

$$s_0(t) = \int_V f(\vec{r}) d^3\vec{r}, \quad (3.23)$$

uma constante. Evidentemente, $s(t)$, nessa forma, não nos permite extrair $f(\vec{r})$, ou seja não é possível formar uma imagem. Isso porque o sinal de FID 3.20 não contém informação espacial. Como veremos adiante, a solução é perturbar a homogeneidade de B_0 de forma que a FID de cada elemento de volume oscile em uma frequência diferente dependendo da posição, de forma que seja possível decompor o sinal resultante adquirido em contribuições localizadas no espaço [1, 2].

3.2 Codificação de Posição e Aquisição de Imagens

O fenômeno de RMN pode ser utilizado na construção de imagens tomográficas 2D em quaisquer planos em direções arbitrárias, ou mesmo para reconstruir objetos 3D completos. Para isso, no entanto, é preciso separar o sinal de FID em componentes que possam ser atribuídas a elementos de volume localizados no espaço. Essa decomposição não é possível com a equação 3.22. Isso porque, apesar de as características locais como M_0 , T_1 e T_2 variarem entre elementos de volume, a contribuição de cada um deles para o FID total oscila à mesma frequência de ressonância ω_0 uma vez que $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ é uniforme em todo o objeto. Como vimos, a frequência de ressonância é função do campo magnético aplicado. A solução é perturbar o campo homogêneo B_0 para torná-lo dependente da posição [1, 2, 3]. Note que apenas a magnitude é perturbada, ou seja, em qualquer ponto da amostra, o campo magnético continua orientado ao longo do eixo z . Há diversas maneiras de realizar essa perturbação. Para ilustrar, vamos considerar aqui, de maneira

simplificada, a aquisição de um corte transversal, ou seja, a aquisição de uma imagem tomográfica perpendicular ao eixo z .

Primeiramente, consideremos o posicionamento do corte. Com o campo magnético B_0 aplicado, toda a amostra encontra-se magnetizada. Considere a sobreposição de um campo que varie linearmente com z , de forma que

$$\vec{B} = (B_0 + G_z z)\hat{z}, \quad (3.24)$$

em que G_z é um gradiente na direção z constante. Em seguida, aplicamos um pulso de RF com frequência central ω_c e largura de banda efetiva $\Delta\omega$, com espectro de frequências uniforme nesse intervalo. Embora toda a amostra esteja magnetizada, pela condição de ressonância 3.10, somente uma região de largura Δz em torno de z_c interagirá com o pulso de RF, com

$$\omega_c = \gamma(B_0 + G_z z_c) \quad (3.25)$$

e

$$\Delta z = \frac{\Delta\omega}{\gamma G_z}. \quad (3.26)$$

Assim, o material nessa região terá a condição de equilíbrio perturbada e contribuirá para o sinal detectado. A figura 3.4 ilustra esse procedimento de **seleção de corte**. Da equação 3.23, assumindo Δz suficientemente pequeno,

$$s_0(t) = \Delta z \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y, z_c) dx dy \quad (3.27)$$

em que vemos que somente a região do corte selecionado contribui para o sinal³. No entanto, esse sinal ainda não permite a formação de uma imagem, já que ainda não há codificação de posição no plano do corte.

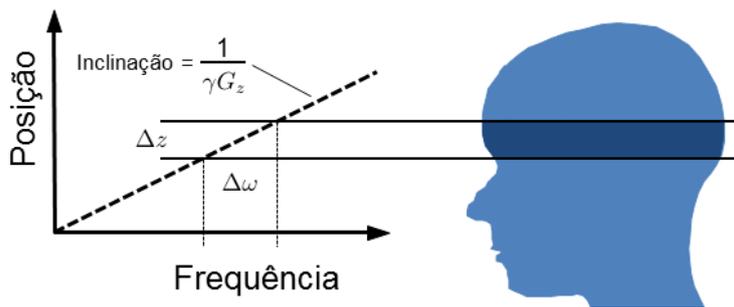


Figura 3.4: Seleção de corte. Note que a largura do corte é proporcional à largura de banda do pulso de RF. Cortes excessivamente finos, além de exigirem pulsos com largura de banda muito estreita (e, portanto, de durações muito longas), resultam em baixo SNR, já que a intensidade do sinal é proporcional ao volume do material excitado.

³A região de integração na equação 3.4 foi estendida para todo o plano xy , assumindo que a contribuição para o sinal é nula fora da amostra

Com o corte já selecionado, faremos $\Delta z f(x, y, z_c) \rightarrow f(x, y)$ por simplicidade de notação. Essa é a imagem tomográfica desejada. Em seguida, o gradiente em z é desligado e a magnetização na região do corte escolhido (e somente nessa região) têm uma componente transversal, girando com velocidade angular $\omega_0 = \gamma B_0$ em torno do eixo z . Em um instante $t = T_E$ posterior, conhecido como **tempo de eco**, o sinal é medido durante um intervalo de tempo T_a pequeno (em relação a T_2) em torno desse instante, de forma que, ao longo desse período de **leitura**,

$$f(x, y) = AM_0 \left(1 - e^{-T_R/T_1}\right) e^{-T_E/T_2}, \quad (3.28)$$

justificando a omissão da dependência no tempo de f . Vamos considerar a introdução de um gradiente constante G_x na direção x **durante** a leitura. Na região excitada com a seleção do corte, os spins não estão em equilíbrio e possuem uma componente transversal de momento angular proporcional a $f(x, y)$. Com a introdução de G_x , de forma que

$$\vec{B} = (B_0 + G_x x)\hat{z}, \quad (3.29)$$

essa componente transversal gira em torno do eixo z com uma velocidade angular $\gamma(B_0 + G_x x)$ que varia com a posição x . O sinal captado é a soma das contribuições desses spins, como ilustrado na figura 3.5. Assim,

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j\gamma(B_0 + G_x x)t} dx dy = e^{-j\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j\gamma(G_x x)t} dx dy \quad (3.30)$$

ou

$$s_0(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j2\pi x k_x(t)} dx dy, \quad (3.31)$$

em que

$$k_x(t) = \frac{\gamma}{2\pi} G_x t. \quad (3.32)$$

Compare a equação 3.31 com a transformada de Fourier normalizada $G(k_x, k_y)$ de uma função $g(x, y)$ em duas dimensões:

$$G(k_x, k_y) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (3.33)$$

Percebemos que o sinal 3.31 durante o intervalo de leitura representa uma **varredura** da transformada $F(k_x, k_y)$ da imagem $f(x, y)$ de $k_x = 0$ até $k_x = \gamma G_x T_a / 2\pi$, com $k_y = 0$. Essa etapa é conhecida como **codificação de frequência** e, para G_x positivo, resulta sempre numa varredura de $F(k_x, k_y)$ ao longo de k_x crescente⁴ para k_y fixo.

Repetindo a operação de varredura em k_x para um número suficiente de valores k_y , podemos enfim reconstruir $f(x, y)$. Para isso, precisamos fixar k_y **antes** do início da leitura do sinal em T_E .

⁴Valores negativos de k_x podem ser varridos com a utilização de pulsos de 180° para posicionar o início da varredura em valores negativos de k_x , ou com G_x negativo para varrer ao longo de k_x decrescente.

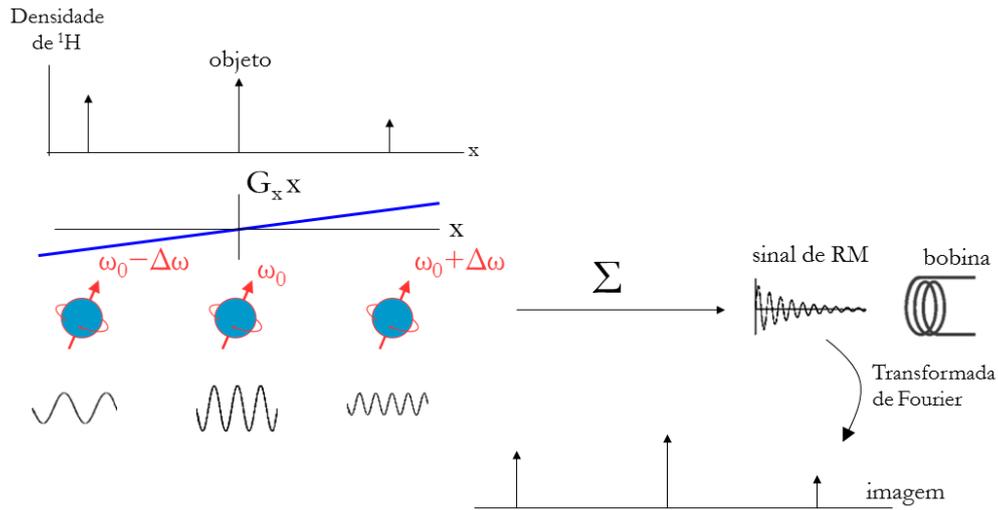


Figura 3.5: Codificação de frequência. Cada objeto ao longo do eixo x contribui para o FID total com uma oscilação de frequência proporcional à sua posição e amplitude proporcional à sua magnitude. O sinal captado pela antena é a soma de todas essas contribuições. A distribuição original dos objetos pode ser recuperada pela teoria de Fourier. Note que, ainda assim, não é possível reconstruir uma imagem completa porque cada “objeto” está, na verdade, distribuído ao longo da dimensão y , oscilando com a mesma frequência para uma dada posição x .

Essa etapa é conhecida como **codificação de fase** e é realizada com a aplicação de um gradiente constante G_y , de forma que

$$\vec{B} = (B_0 + G_y y) \hat{z} \quad (3.34)$$

durante o intervalo de tempo T_p em que o gradiente permanece ligado. De maneira análoga à equação 3.31, embora **não** haja leitura do sinal nesse período,

$$s_0(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j2\pi y k_y(t)} dx dy, \quad (3.35)$$

com

$$k_y(t) = \frac{\gamma}{2\pi} G_y t. \quad (3.36)$$

Ao final do intervalo T_p , G_y é desligado. Assim, logo antes do início da leitura em $t = T_E$, o sinal é

$$s_0(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j2\pi y k_y(T_p)} dx dy, \quad (3.37)$$

onde nota-se que, embora a fase da contribuição de cada elemento de volume para o sinal total dependa de y , ela não depende mais de t e será constante ao longo da leitura do sinal. A situação logo **antes** da leitura é ilustrada na figura 3.6.

Com isso, chegamos a uma **seqüência de pulsos** que nos permite colher informação sobre $F(k_x, k_y)$ sistematicamente. A cada ciclo da aquisição, aplica-se o gradiente G_z durante o pulso

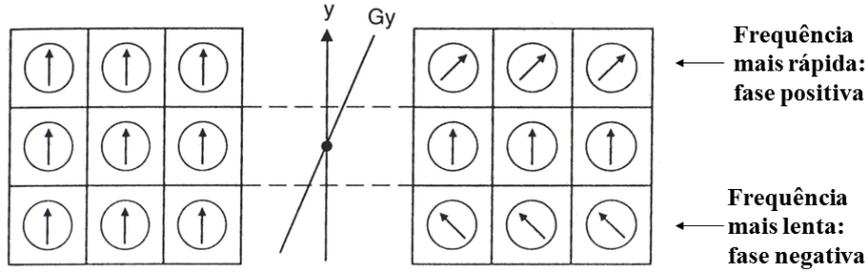


Figura 3.6: Codificação de fase. A contribuição de cada elemento da imagem para o FID tem a fase ajustada proporcionalmente à sua posição no eixo y **antes** da leitura. Essa fase é introduzida com gradientes de maneira análoga ao que acontece na codificação de frequência, no entanto, o gradiente é desligado antes da leitura.

de 90° com largura de banda $\Delta\omega$ para selecionar o corte. Em seguida, aplica-se um gradiente G_y durante um intervalo de tempo T_p para fixar k_y . Por fim, durante o intervalo de leitura T_a , aplica-se um gradiente G_x para varrer k_x . Objetos 3D podem ser recuperados com múltiplos cortes.

Certas simplificações envolvidas na análise até aqui devem ser observadas, já que essa sequência de pulsos não é praticável. Primeiramente, o pulso de RF considerado não é realizável por ter duração infinita. Assim, ele deve ser truncado, o que pode implicar em energia significativa fora do intervalo $\Delta\omega$ em torno de ω_c e, conseqüentemente, uma excitação indesejada de outros cortes que serão sobrepostos ao corte selecionado. Esse fenômeno é conhecido com *cross-talk* e é minimizado com um truncamento adequado⁵. Depois, presumiu-se que gradientes constantes podem ser ligados e desligados imediatamente, o que não é possível. Por fim, considerou-se apenas o efeito de T_2 no decaimento do sinal de FID. Esse sinal, na verdade, cai com uma constante de tempo muito menor devido irregularidades no campo B_0 , inclusive aquelas introduzidas propositalmente na manipulação dos gradientes. Diferente do decaimento T_2 , no entanto, esses efeitos são reversíveis e podem estar compensados no instante T_E da varredura com uma manipulação adequada dos gradientes em cada ciclo. Uma sequência de pulsos praticável, portanto, pode parecer bem diferente da nossa sequência simplificada. Além disso, é importante notar também que o projeto de uma sequência de pulsos traz bastante flexibilidade na trajetória pelo espaço de frequências, permitindo amostragens em raios polares ou em espirais, por exemplo. No entanto, ela pode ser projetada para aproximar adequadamente a nossa trajetória de varredura em linhas horizontais no espaço de frequências e, assim, continuaremos com a análise simplificada.

Considere que, no v -ésimo ciclo, o gradiente em y é $G_{y,v}$, fixando k_y em $k_{y,v}$. Nesse ciclo, adquirimos o sinal $s_v(t)$ (já em banda base). Combinando as equações 3.31 e 3.37, temos

$$s_v(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-j2\pi(k_x(t)x + k_{y,v}y)} dx dy, \quad (3.38)$$

em que se percebe imediatamente que $F(k_x, k_y)$ só é conhecida para valores discretos de k_y . Além disso, em cada ciclo, o sinal $s_v(t)$ é amostrado por meio de um conversor analógico-digital. Considere que a u -ésima amostra é tomada no instante t_u . Assim, o que adquirimos na verdade é

⁵O simples truncamento corresponde à multiplicação do sinal por uma **janela** constante e resultaria em picos significativos de energia fora da banda desejada. Outras janelas têm características espectrais diversas e podem ser mais adequadas.

$$\tilde{F}[u, v] = s_v(t_u) = F\left(\frac{\gamma}{2\pi}G_x t_u, \frac{\gamma}{2\pi}G_y v T_p\right), \quad (3.39)$$

ou seja, um arranjo finito de amostras de $F(k_x, k_y)$, que é uma função de duas variáveis contínuas.

Vamos considerar uma amostragem **cartesiana**, em que k_x é amostrado regularmente a passos de Δk_x e k_y é amostrado regularmente a passos de Δk_y . São tomadas N_x amostras de $-k_{x,max}/2$ até $k_{x,max}/2$ e N_y amostras de $-k_{y,max}/2$ até $k_{y,max}/2$ nos eixos k_x e k_y , respectivamente, num total de $N_x N_y$ amostras. A imagem $f(x, y)$ se estende de $-FOV_x/2$ a $FOV_x/2$ na direção x e de $-FOV_y/2$ a $FOV_y/2$ na direção y . Pressupõe-se que a amostra esteja inteiramente contida nessa região. A partir de 3.39, devidamente normalizada de maneira análoga às equações 2.18, podemos identificar a DFT (em duas dimensões) $\hat{F}[u, v]$ da imagem discreta $\hat{f}[m, n]$ que desejamos determinar. O arranjo $\hat{f}[m, n]$ corresponde às amostras de uma função $\tilde{f}(x, y)$ que aproxima $f(x, y)$. As amostras de $\tilde{f}(x, y)$ em $\hat{f}[m, n]$ são tomadas de $-FOV_x/2$ a $FOV_x/2$, com o mesmo total N_x de amostras a passos Δx no eixo x e de $-FOV_y/2$ a $FOV_y/2$ com o mesmo total N_y de amostras a passos Δy no eixo y . Cada amostra $\hat{f}[m, n]$ é chamada de **pixel** (elemento de imagem) e dizemos que essa imagem digital tem $N_x N_y$ pixels. Observe que cada amostra $\hat{F}[u, v]$ corresponde a uma combinação linear de **todas** as amostras $\hat{f}[m, n]$, cada uma tendo um arranjo distinto de fases como coeficientes dessa combinação, como na figura 3.7.

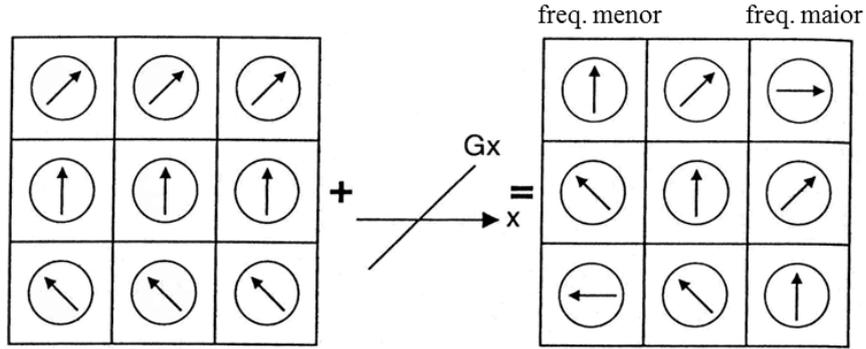


Figura 3.7: Aquisição de imagem por RM. Cada amostra do FID corresponde a uma combinação linear de **todas** os pixels da imagem digital desejada, utilizando um arranjo diferente de fases complexas para cada amostra. A combinação da codificação de frequências com diversas codificações de fase permitem que se obtenham diversas combinações linearmente independentes, gerando um sistema linear do qual se pode determinar a imagem desejada. No esquema considerado, o conjunto dessas amostras corresponde à DFT da imagem, que pode então ser recuperada com uma simples DFT inversa.

Pelo teorema de Nyquist, analogamente à equação 2.4, devemos ter $FOV_x/2 \leq (1/\Delta k_x)/2$ para o eixo x , bem como uma condição análoga para o eixo y . Assim,

$$\Delta k_x \leq \frac{1}{FOV_x} \quad \text{e} \quad \Delta k_y \leq \frac{1}{FOV_y} \quad (3.40)$$

para evitar *aliasing*. Se essa condição não é satisfeita, $\tilde{f}(x, y)$ consistirá em réplicas deslocadas de $f(x, y)$ sobrepostas à região de interesse. Além disso, $k_{x,max} = N_x \Delta k_x$ e $k_{y,max} = N_y \Delta k_y$ bem como $FOV_x = N_x \Delta x$ e $FOV_y = N_y \Delta y$. Então,

$$k_{x,max} \leq \frac{1}{\Delta x} \quad \text{e} \quad k_{y,max} \leq \frac{1}{\Delta y}. \quad (3.41)$$

Note que $k_{x,max}/2$ e $k_{y,max}/2$ são as maiores frequências amostradas, com as contribuições de frequências acima desses valores consideradas nulas. Isso corresponde à implementação de um filtro passa baixas⁶ que “borra” $\tilde{f}(x, y)$ por causa da convolução com a função *sinc* associada. Isso limita a **resolução**, ou seja, define uma distância mínima entre dois pontos brilhantes para que eles possam ser discernidos e suaviza contornos abruptos. De certa forma, as equações 3.41 limitam Δx e Δy em função dessa distância.

Suponha $\Delta t = t_{u+1} - t_u$ e $\Delta G_y = G_{y,v+1} - G_{y,v}$, constantes em uma amostragem cartesiana. Das equações 3.32 e 3.36,

$$G_x \Delta t \leq \frac{2\pi}{\gamma FOV_x} \quad \text{e} \quad \Delta G_y T_p \leq \frac{2\pi}{\gamma FOV_y}. \quad (3.42)$$

Na prática, Δt e T_p são fixados e G_x e ΔG_y são determinados em função de FOV_x e FOV_y escolhidos. Além disso,

$$k_{x,max} = \frac{\gamma}{2\pi} G_x N_x \Delta t \quad \text{e} \quad k_{y,max} = \frac{\gamma}{2\pi} \Delta G_y N_y T_p. \quad (3.43)$$

Como já observado, a resolução em $\tilde{f}(x, y)$ é determinada pela máxima frequência medida. Assim, para uma dada resolução desejada, $k_{x,max}$ e $k_{y,max}$ são determinados de acordo. Com G_x , ΔG_y , Δt e T_p já determinados por outros fatores, N_x e N_y são ajustados em função dessa resolução desejada.

A discussão anterior sugere que a resolução pode ser arbitrariamente grande com N_x e N_y suficientemente grandes. No entanto, o aumento desses parâmetros implica o aumento do tempo total de aquisição T_A . Na nossa sequência de pulsos idealizada, por exemplo, se adquirimos as amostras em k_x para um valor de k_y a cada T_R , o tempo de aquisição é $T_A = N_y T_R$. É possível adquirir mais de uma codificação de fase por repetição, mas isso implica em degradação da resolução por causa do decaimento T_2 . De todo modo, o tempo total de aquisição continua proporcional a $N_y T_R$. O grande problema em tornar T_A muito grande, além do desconforto para o paciente e do tempo consumido, é que isso tende a degradar severamente a imagem, devido a artefatos de movimento. Isso ocorre por que, se o paciente se move consideravelmente no intervalo de tempo entre a coleta de duas amostras, essas amostras, em efeito, correspondem a imagens diferentes.

É possível aumentar os passos na frequência para cobrir o intervalo desejado em menos tempo mas, para um número fixo de amostras, isso resulta em um FOV_y reduzido devido ao *aliasing*. É possível diminuir esse intervalo mas isso resulta em perda de resolução. A figura 3.8 ilustra essas duas situações na segunda e na terceira coluna, respectivamente, com uma amostragem completa pela teoria de Nyquist na primeira coluna para referência. Consideramos que temos tantos pixels

⁶Na direção k_x , isso requer que cada sinal $s_v(t)$ passe por um filtro **anti-aliasing** antes de ser amostrado. Na direção k_y isso acontece automaticamente com a escolha do maior gradiente $G_{y,u}$.

quanto amostras. Se tentarmos manter fixos o FOV_x , o FOV_y e os passos da amostragem no domínio da imagem, o que implica também em manter o número N de pixels, adquirindo apenas M amostras que cubram o intervalo de frequências desejado com $M < N$, podemos diminuir o tempo de aquisição. Em geral, isso degrada a imagem de formas diversas dependendo da localização das M amostras e do método de reconstrução da imagem com N pixels. No entanto, como observado anteriormente, podemos fazer melhor do que sugere o critério de Nyquist, dependendo do que sabemos de antemão a respeito do sinal. No capítulo seguinte, discutiremos uma abordagem que permite reconstruir a imagem de N pixels sem artefatos significativos com apenas $M \ll N$ amostras. Discutiremos as condições sobre a amostragem e sobre a reconstrução que permitem essa abordagem bem como o tipo de informação que precisamos ter *a priori*. Por agora, considere uma amostragem aleatória, como ilustrado na quarta coluna da figura 3.8. Observe como a incoerência da degradação dá a ela um aspecto de ruído. De imediato, o efeito desses artefatos é diminuir o SNR aparente da imagem. No entanto, lembrando que não se trata verdadeiramente de ruído, mas sim de uma forma incoerente de *aliasing*, é possível remover esses artefatos se pudermos representar os dados de forma que a informação relevante seja facilmente distinguida da degradação devido à subamostragem. Como veremos, essa incoerência e essa representação são as chaves para uma reconstrução satisfatória a partir de dados subamostrados.

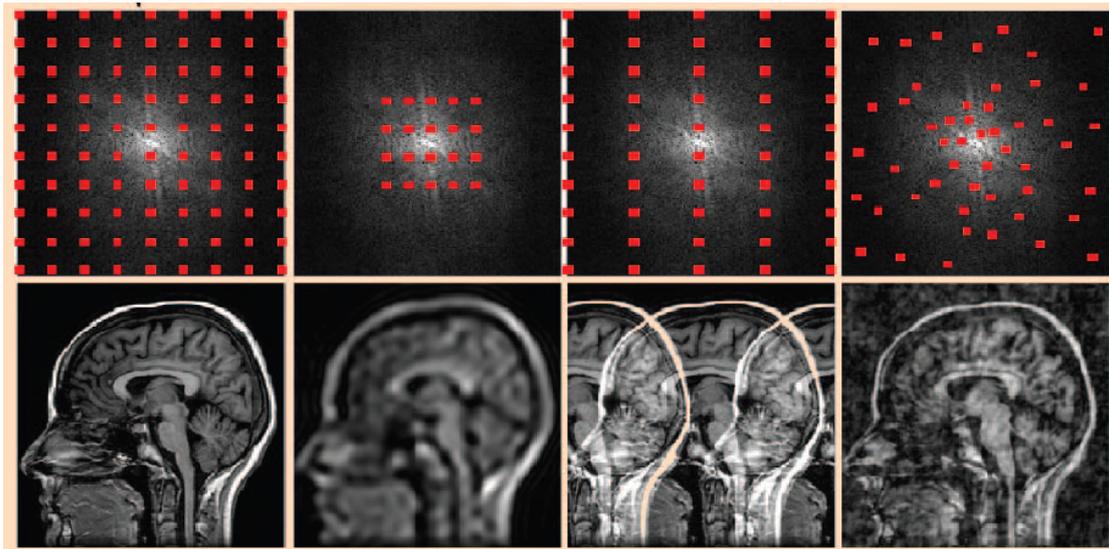


Figura 3.8: Efeitos do padrão de amostragem.

Capítulo 4

Compressed Sensing

Sinais, como sons e imagens, podem ser modelados por vetores de números reais. Em geral, esses vetores podem ter suporte ilimitado e não enumerável. Frequentemente, no entanto, esses sinais podem ser satisfatoriamente representados por vetores $x \in \mathbb{R}^n$ de dimensão finita. Com efeito, é o que se faz quando uma imagem digital é registrada, por exemplo [8]. Ainda nesse exemplo, a experiência diária mostra que, grosso modo, aproximações melhores são possíveis com um maior número de pixels, ou seja, que representações mais adequadas são possíveis com vetores x de maior dimensão n .

Sinais digitais são eventualmente armazenados e processados de diversas formas. Para várias dessas tarefas, como armazenamento e transmissão, é desejável que o sinal x seja representado eficientemente por um número de coeficientes $k \ll n$, sem que a qualidade percebida com os n coeficientes originais seja degradada. Deseja-se **comprimir** esses sinais. Atualmente, diversas técnicas de compressão com ou sem perda de informação encontram-se desenvolvidas e são aplicadas rotineiramente. No entanto, todas elas presumem que o sinal original é completamente amostrado segundo o critério de Nyquist.

A amostragem completa de um sinal pode resultar em requisições severas sobre o sistema. Em um procedimento de ressonância magnética, por exemplo, esses requisitos podem se traduzir em tempos de aquisição impraticáveis para determinados exames. O sucesso das diversas técnicas de compressão, no entanto, sugerem o seguinte questionamento: se, depois de obtidas as n amostras de um sinal x , geralmente é possível representá-lo adequadamente com apenas $k \ll n$ coeficientes, não seria possível amostrar x de forma que apenas $m \ll n$ amostras fossem tomadas e que, ainda assim, fosse possível determinar as n amostras que seriam obtidas numa amostragem completa? A teoria de *compressed sensing* (CS) fornece uma resposta positiva para essa pergunta e informa quais as condições em que isso é possível e como recuperar o sinal completo $x \in \mathbb{R}^n$ a partir de um vetor de amostras $y \in \mathbb{R}^m$.

4.1 Generalizando a Amostragem — Sistemas Lineares

No capítulo anterior, vimos que a aquisição de imagens de RM segue uma via indireta, no sentido de que adquirimos amostras da transformada de Fourier da imagem desejada, no lugar de amostras da própria imagem. Com a amostragem cartesiana descrita lá e com uma escala adequada, podemos associar essas amostras no domínio da frequência à DFT da sequência de amostras no domínio da imagem. A relação entre elas seria dada por equações análogas às equações 2.24 e 2.25 para o caso bidimensional. Com isso em mente, vamos voltar ao caso unidimensional em favor da simplicidade na notação.

A equação 2.24 pode ser reescrita como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w_{kn} x[n], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (4.1)$$

com $w_{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Fica evidente que cada amostra adquirida é uma combinação linear das amostras desejadas. Agrupando as N amostras $X[k]$ no vetor $X \in \mathbb{C}^N$ e as N amostras $x[n]$ no vetor $x \in \mathbb{C}^N$, podemos escrever essa relação de maneira mais compacta como

$$X = Wx, \quad (4.2)$$

em que W é a matriz $N \times N$ dos coeficientes w_{kn} . A relação inversa é dada por

$$x = \frac{1}{N} W^\dagger X, \quad (4.3)$$

uma vez que W realiza uma transformação unitária a menos de um fator de escala N , ou seja $W^\dagger W = NI_N$, em que I_N é a matriz identidade $N \times N$ e W^\dagger é a transposta conjugada de W . Mais ainda, como W é simétrica, W^\dagger é simplesmente a matriz conjugada W^* .

A simplicidade das equações 4.2 e 4.3 é o motivo de termos considerado amostras igualmente espaçadas no domínio da frequência e de termos assumido que a imagem tinha tantos pixels quanto amostras ao falarmos de imageamento por RM. Se as amostras são tomadas não-uniformemente, ainda é verdade que cada amostra é uma combinação linear das amostras desejadas. Se ainda temos N amostras¹ e a k -ésima amostra $\hat{X}[k]$ é tomada na frequência ω_k da DTFT 2.16, de maneira similar à equação 4.2, temos

$$\hat{X} = \hat{W}x, \quad (4.4)$$

em que \hat{W} é a matriz $N \times N$ dos coeficientes $\hat{w}_{kn} = e^{-j\omega_k n}$. No entanto, a relação inversa não tem mais a forma simples da equação 4.3. Em geral, se a matriz \hat{W} não é singular,

¹ N amostras em um **único** período da DTFT, por exemplo, no intervalo $[-\pi, \pi)$. A amostragem segue periódica fora desse intervalo.

$$x = \hat{W}^{-1} \hat{X}. \quad (4.5)$$

A determinação do operador \hat{W}^{-1} é possível sempre que as N colunas de \hat{W} forem linearmente independentes, embora a estabilidade numérica da operação dependa da localização dessas amostras. Isso porque, nesse caso, as colunas de \hat{W} formam uma base de \mathbb{C}^N , embora não mais uma base ortogonal como no caso de W nas equações 4.2 e 4.3.

Uma situação de interesse especial acontece se temos apenas M amostras $Y[k]$ para determinar um vetor com $N > M$ amostras $x[n]$. Como discutido no final do capítulo anterior, o tempo de aquisição de uma imagem de RM cresce com o número de amostras, em especial com o número de codificações de fase na sequência de pulsos ilustrativa considerada. O caso $M < N$ é o que nos permite diminuir o tempo de aquisição, potencialmente mantendo uma qualidade equivalente à de uma aquisição completa das N amostras. Como nos casos anteriores, cada uma das M amostras $Y[k]$ é uma combinação linear das N amostras $x[n]$. Assim,

$$Y = \tilde{W}x, \quad (4.6)$$

em que \tilde{W} é uma matriz de dimensão $M \times N$ com os coeficientes² $\tilde{w}_{kn} = e^{-j\omega_k n}$, com $0 \leq k \leq M-1$ e $0 \leq n \leq N-1$. No entanto, a equação 4.6 não tem solução única. Isso ocorre porque as colunas de \tilde{W} são linearmente dependentes. Assumimos, no entanto, que $\text{rank}(\tilde{W}) = M$. Isso significa que as linhas de \tilde{W} são linearmente independentes e que, embora não formem uma base, as suas colunas geram o espaço \mathbb{C}^M , de forma que qualquer $Y \in \mathbb{C}^M$ seja um vetor de amostras possível.

Sistemas lineares subdeterminados como a equação 4.6 são comuns em diversas aplicações. Em todas elas, a infinitude de possíveis soluções representa um grande obstáculo. Como existem infinitos sinais x que poderiam explicar as amostras Y , precisamos desenvolver um critério que nos permita escolher um sinal “melhor” e uma maneira sistemática de procurar por esse sinal. Uma abordagem comum é a **regularização**. Para dar sentido à expressão “melhor”, definimos uma função custo $J(x) : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, se $J(x_1) < J(x_2)$, em que x_1 e x_2 são soluções da equação 4.6, podemos dizer que x_1 é melhor que x_2 nessa métrica. A solução é aproximada por um sinal \tilde{x} que resolve o problema de otimização P_J , tendo a função $J(x)$ como objetiva, dado por

$$(P_J) \quad \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} J(x) \quad \text{sujeito a} \quad Y = \tilde{W}x. \quad (4.7)$$

O problema P_J pode continuar não sendo um problema bem definido, no sentido de que ainda pode admitir soluções múltiplas. Além disso, não se pode garantir que a solução encontrada por algum algoritmo qualquer seja um mínimo global de P_J . Assumindo que o algoritmo não divirja e encontre um ponto estacionário, o melhor que se pode fazer em geral é verificar se \tilde{x} é um mínimo local. A função $J(x)$ deve ser projetada de forma a fazer o melhor uso possível de qualquer informação *a priori* que se tenha sobre o sinal, de forma a dar preferência a soluções candidatas

²Esse é o caso geral. As equações 4.2 e 4.3 seguem da escolha $M = N$ e $\omega_k = 2\pi k/N$.

que melhor se ajustam a essas informações. Na seção seguinte, definimos melhor alguns desses termos e estudamos o impacto de algumas formas particulares de J nas características de \tilde{x} .

4.2 Medidas de Esparsidade — Normas ℓ^p

O problema P_J posto em 4.7, ou alguma variação bem próxima, é central em aplicações diversas como remoção de ruído [12, 7], ampliação de imagens [7], compressão de sinais [12] e, de interesse imediato para este trabalho, *compressed sensing* (CS) [15, 11], tratada em particular mais à frente neste capítulo. Em cada uma dessas aplicações, Y , \tilde{W} , $J(\cdot)$ e o próprio vetor sinal x têm formas e interpretações distintas, mas desempenham um papel similar na solução de P_J . A regularização, nessa ou em outras formas, é uma abordagem comum em várias aplicações [12, 7], sempre que é necessário resolver um problema que não é bem-posto, seja por não ter solução ou por ter várias soluções de forma que não seja possível distinguir dentre elas uma solução adequada para a aplicação em particular. Sendo assim, vamos recolocar o problema 4.7 em uma notação mais conveniente. Restringindo a discussão a números reais por simplicidade, o problema geral de regularização P_J passa a ser

$$(P_J) \quad \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,min}} J(x) \quad \text{sujeito a } y = Ax, \quad (4.8)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ com $\operatorname{rank}(A) = m$ e $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ atribui a cada x um único valor $J(x)$ em \mathbb{R} , possivelmente infinito³. Dizemos que \hat{x} é uma **solução candidata** se $y = A\hat{x}$. Dizemos que \tilde{x} é um **mínimo local** se $J(\tilde{x}) \leq J(\hat{x})$ para toda solução candidata \hat{x} em alguma vizinhança de \tilde{x} . Dizemos que \tilde{x} é um **mínimo global** se $J(\tilde{x}) \leq J(\hat{x})$ para toda solução candidata \hat{x} . Se $J(\tilde{x}) < J(\hat{x})$ para toda solução candidata $\hat{x} \neq \tilde{x}$, \tilde{x} é o único mínimo global e, portanto, a solução única do problema P_J .

Genericamente, o problema 4.8 é um problema de aproximação. O vetor y representa m peças de informação a respeito do sinal x na forma de m combinações lineares das n amostras de x , determinadas pela matriz A . A suposição $\operatorname{rank}(A) = m$ indica que informação sobre x codificada em qualquer subconjunto dessas m peças é estritamente menor que a informação codificada nas m amostras. Em geral, são necessárias n peças desse tipo para determinar unicamente x . Com $m < n$, no entanto, existem infinitos \hat{x} que poderiam “explicar” as m peças de informação em y . Para refinar a busca, assumimos um **modelo** para o sinal x e procuramos, dentre os infinitos \hat{x} , a estimativa \tilde{x} que melhor se ajusta a esse modelo. A função $J(\cdot)$ é projetada de forma a quantificar esse ajuste, de modo que, quanto menor $J(\hat{x})$, melhor \hat{x} se ajusta ao modelo. Assim, \tilde{x} é escolhido dentre os \hat{x} como aquele que minimiza J . Em geral, não é possível avaliar a qualidade da aproximação \tilde{x} , já que o próprio x é desconhecido. Essa qualidade depende, dentre outras coisas, do quão bem o modelo adotado realmente descreve x , do quão bem J efetivamente quantifica o ajuste ao modelo, das características matemáticas dessa função e das características do algoritmo utilizado para resolver o problema P_J .

³Em geral, a minimização em x pode ser em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Estendendo a minimização para todo $x \in \mathbb{R}^n$, esse caso ainda pode ser contemplado restringindo o domínio de J a Ω e definindo $J(x) = +\infty \forall x \notin \Omega$.

Em geral, a relação entre \tilde{x} e y determinada por P_J é não linear e possivelmente não unívoca. Uma escolha popular em diversas aplicações é a minimização ℓ^2 com $J(x) = \|Bx\|_2^2$, em que $B^T B$ é inversível⁴ [12], definindo o problema P_2 como

$$(P_2) \quad \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,min}} x^T B^T B x \quad \text{sujeito a} \quad y = Ax. \quad (4.9)$$

Como veremos, esse problema tem solução uma solução única e que pode ser calculada de forma fechada. Definindo a função Lagrangeana como

$$\mathcal{L}(x) = x^T B^T B x + \lambda^T (Ax - y), \quad (4.10)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}^m$ é o vetor dos multiplicadores de Langrange para as m restrições de igualdade em $y = Ax$, temos:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x) = 2B^T B x + A^T \lambda. \quad (4.11)$$

As condições necessárias de primeira ordem para um mínimo em \tilde{x} requerem que esse gradiente seja nulo. Igualando a zero esse gradiente e resolvendo para $x = \tilde{x}$,

$$\tilde{x} = -\frac{1}{2} (B^T B)^{-1} A^T \lambda. \quad (4.12)$$

De $A\tilde{x} = y$, temos

$$\lambda = -2 [A(B^T B)^{-1} A^T]^{-1} y. \quad (4.13)$$

Finalmente, substituindo essa expressão para λ na equação 4.12,

$$\tilde{x} = (B^T B)^{-1} A^T [A(B^T B)^{-1} A^T]^{-1} y. \quad (4.14)$$

Em particular, para $B = I_n$, ou seja, para $J(x) = \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$, a solução é dada simplesmente por $\tilde{x} = A^+ y$, em que

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1} \quad (4.15)$$

é a **pseudo-inversa**⁵ da matriz A . Note que a pseudo-inversa 4.15 determina $\tilde{x} = A^+ y$ como uma combinação linear das colunas de A^T com coeficientes $(A A^T)^{-1} y$. Assim, \tilde{x} pertence ao subespaço de \mathbb{R}^n com dimensão m gerado pelas linhas de A . Mais precisamente, \tilde{x} é a projeção de x nesse espaço gerado pelas colunas de A^T . Isso é esperado da minimização de $\|\cdot\|_2^2$, que mantém em \tilde{x}

⁴Isso requer $\operatorname{rank}(B) = n$, de forma as n linhas de B^T sejam linearmente independentes. Assim, $B^T B$ é simétrica positiva definida e, por tanto, inversível.

⁵A pseudo-inversa A^+ em 4.15 é uma inversa à direita de A , ou seja, $A A^+ = I_m$.

apenas as componentes de x nesse espaço e zera as componentes no espaço ortogonal a ele, similar ao que acontece nas equações 2.7 e 2.10. Também, a equação 4.14 determina \tilde{x} em um subespaço de \mathbb{R}^n com dimensão m . A simplicidade dessa equação e o fato de que ela determina \tilde{x} univocamente de forma fechada é o principal motivo para a popularidade da minimização ℓ^2 . Isso não significa, porém, que essa seja a melhor escolha, mesmo nos problemas em que ela é comumente utilizada. Em particular, gostaríamos de estimar x em **super-resolução**, i.e., gostaríamos de determinar \tilde{x} em um espaço de dimensão $q > m$, com $q = n$ se possível. Como vimos, isso não é possível com uma estimação linear, já que \tilde{x} permanece em um espaço de dimensão m nesse caso. Super-resolução não é sempre possível, mas a possibilidade somente existe na reconstrução não-linear com o uso adequado de informação *a priori* suficiente [7].

Embora a forma simples e fechada da solução do problema P_2 seja particular à minimização ℓ^2 , o fato de ela ser única não o é. Isso acontece sempre que a função $J(\cdot)$ é estritamente convexa e é definida em um domínio convexo. Se essa função é convexa mas não estritamente convexa, não se pode garantir a unicidade do minimizador de $J(\cdot)$ mas pode-se garantir que qualquer mínimo é um mínimo global [13, 18]. Um conjunto Ω é dito convexo se

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 = x \in \Omega \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.16)$$

Em particular, note que o conjunto $\mathcal{X} = \{x | Ax = y\}$ é convexo. Assim, o problema P_J será convexo ou estritamente convexo se a função J o for. Uma função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.17)$$

e estritamente convexa se essa desigualdade é estrita para $0 < \alpha < 1$ [13, 18]. Outras escolhas convexas para P_J de interesse particular são as normas ℓ^p , definidas por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (4.18)$$

em que x_i é a i -ésima componente de x . O **espaço** $\ell^p = \{x : \|x\|_p < +\infty\}$ é um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|_p$. Em particular, se $x \in \mathbb{R}^n$, a norma $\|x\|_p$ é bem definida para qualquer x já que a soma em 4.18 é finita. Em geral, uma norma $\|\cdot\|$ sobre um espaço vetorial Ω qualquer definido sobre um corpo \mathbb{K} , em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é uma função tal que, para todo $x, y \in \Omega$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad (4.19a)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (4.19b)$$

$$\|x\| = 0 \iff x = 0. \quad (4.19c)$$

As propriedades 4.19c e 4.19b implicam ainda $\|x\| \geq 0$ e as propriedades 4.19a e 4.19b implicam também que a norma é sempre uma função convexa. Assim, pode-se verificar que as normas ℓ^p definidas em 4.18 são de fato normas para $p \geq 1$ e, portanto, o problema P_p definido por

$$(P_p) \quad \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,min}} \|x\|_p^p \quad \text{sujeito a } y = Ax. \quad (4.20)$$

é também convexo para $p \geq 1$.

A norma ℓ^2 tende a espalhar a energia do sinal em vários coeficientes [12, 11, 7]. Podemos esperar intuitivamente que isso aconteça, já que ela penaliza fortemente coeficientes grandes de forma que ela dá preferência a vários coeficientes pequenos. A norma ℓ^p , com $2 < p \leq 1$, por outro lado, tende a preferir soluções cada vez mais esparsas à medida em que $p \rightarrow 1$ [11, 12]. Podemos entender isso graficamente pela figura 4.1 para um caso simples com $n = 2$ e $m = 1$. Embora em muitas dimensões existam diversas sutilezas, esse exemplo é ilustrativo. Como já discutido, sinais esparsos são modelos úteis em várias aplicações como compressão e remoção de ruído. Além disso, como veremos em breve, a esparsidade é uma característica central em CS. A norma ℓ^1 é de interesse particular na busca por soluções esparsas [11, 7]. Além de promover a máxima esparsidade dentre as normas ℓ^p , o problema P_1 correspondente pode ser enunciado como um problema de programação linear [11, 12, 7], o que coloca à disposição uma série de ferramentas bem conhecidas e refinadas, como métodos simplex e métodos de ponto interior [13, 18]. Não abordaremos essa formulação aqui, mas isso sugere que “normas” ℓ^p com $0 < p < 1$ talvez sejam mais eficazes em promover soluções esparsas. Esse é, de fato, o caso [16, 12, 17]. Trataremos em mais detalhes o problema P_p correspondente mais adiante neste trabalho. Por ora, é importante notar que essas funções não são de fato normas já que não satisfazem a desigualdade triangular, propriedade 4.19b de uma norma, e não são convexas. São na verdade **quasinormas**⁶ [12], justificando as aspas. No entanto, são ainda definidas pela equação 4.18 e manteremos o termo sem as aspas por conveniência, uma vez que esse abuso de notação é comum na literatura. Este trabalho de fato busca propor uma abordagem para o problema P_p com $0 < p < 1$. Antes disso, porém, passamos a descrever a teoria de *compressed sensing* na seção seguinte, que nos permitirá enfim aplicar essa abordagem ao problema da subamostragem em imageamento por RM.

4.3 Subamostragem e Reconstrução Exata — Compressed Sensing

Como discutido anteriormente, a aquisição regular de um sinal com base no teorema de Nyquist, equação 2.4, pode resultar em uma taxa de amostragem impraticável. Essa amostragem pode ser realizada significativamente abaixo da taxa de Nyquist se o sinal é esparso ou compressível por uma transformação linear, conhecida *a priori*. A teoria de *compressed sensing* (CS), que passamos a discutir, fornece as condições para que o sinal possa ser recuperado [15, 11, 7]. O objetivo é reconstruir um sinal x em alta resolução, com n , amostras a partir de apenas $m \ll n$ medidas lineares em um vetor y . No espírito da equação 2.7, o sinal em tempo discreto x é o vetor de

⁶Para quasinormas, a desigualdade do triângulo é substituída por $\|x + y\| \leq \beta(\|x\| + \|y\|)$ para algum $\beta > 1$.

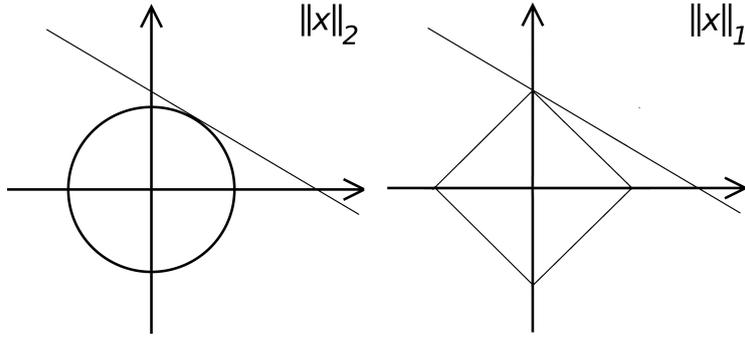


Figura 4.1: Normas ℓ^2 , à direita, e ℓ^1 , à esquerda. Suponha que a linha reta represente o sub-espaço determinado por $y = Ax$ e que “sopramos” uma bola ℓ^p com $\|x\|_p$ constante até que ela encoste nesse sub-espaço. A figura ajuda a entender como a minimização de normas ℓ^p com p tendendo a 1 tendem a esparsificar a solução do sistema linear.

coeficientes da projeção de um sinal analógico $x_c(t)$ em um espaço de dimensão n , gerado por apenas n das funções $\{\phi_{j,T}\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Nesse mesmo espírito, y é o vetor de coeficientes da projeção desse mesmo sinal analógico em um outro espaço de dimensão m , muito menor que n , gerado por m funções $\{\tilde{a}_i\}_{0 \leq i \leq m-1}$. Essas funções não precisam ser ortogonais mas precisam ser linearmente independentes [7]. Assim, $y_k = \langle \tilde{a}_k, x_c \rangle$, com $0 \leq k \leq m-1$. Essa aquisição pode ser modelada por uma amostragem completa de x_c dada em x , seguida por um operador discreto representado pela matriz $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$, de forma que $y = Ax$. As medidas são não adaptativas, ou seja, não dependem do sinal amostrado. Isso quer dizer que as funções a_i e o operador A são fixos. A teoria de CS fornece as condições sobre A para que $x \in \mathbb{R}^n$ possa ser univocamente determinado a partir de $y \in \mathbb{R}^m$ [15, 11]. Antes de examinar essas condições, vamos analisar o problema da reconstrução.

Para que uma reconstrução exata seja possível, o sinal x deve ter uma representação esparsa $h = \Phi x$, para alguma transformação linear Φ conhecida *a priori*, possivelmente redundante, desde que permita uma reconstrução estável⁷. Por simplicidade, assuma que $\Phi = I_n$, ou seja, que o próprio x é esparsos. Como discutido na seção anterior, a regularização ℓ^p para $0 < p \leq 1$ tende a esparsificar a solução para o sistema $y = Ax$, ou seja, os problemas P_p correspondentes implementam o modelo de um sinal esparsos para x . Uma vez que as normas ℓ^p não são convexas para $0 < p < 1$, o problema correspondente P_p , em 4.20, também não o é. Assim, não se pode garantir em princípio a unicidade da solução nem que uma determinada solução encontra é de fato um mínimo global. No entanto, veremos que, sob certas condições sobre a matriz A , podemos ter algumas garantias nesse sentido. Estaremos interessados inicialmente em uma medida precisa de esparsidade. Essa medida é dada pela norma⁸ ℓ^0 definida por

$$\|x\|_0 \equiv |\Lambda_x|, \quad (4.21)$$

⁷Isso significa que Φ pode ter mais de n colunas mas suas linhas devem ser linearmente independentes, de forma que $\text{rank}(\Phi) = n$

⁸Essa função não é sequer uma quasinorma. A “norma” ℓ^0 satisfaz a desigualdade do triângulo, ou seja, $\|x+y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0$. No entanto, não satisfaz a propriedade de homogeneidade 4.19a. Essa função simplesmente conta o número de componentes não nulas de x . Continuaremos a usar o termo sem as aspas por conveniência. A notação se justifica já que $\|x\|_p^p \rightarrow |\Lambda_x|$ com $p \rightarrow 0$.

em que Λ_x é o suporte de x e $|\Lambda_x|$ é a sua cardinalidade. Em verdade, $\|x\|_0 \ll n$ **define** o que entendemos por esparsidade. Dizemos que um vetor h é k -esparso se $h \in \Sigma_k$, em que

$$\Sigma_k = \{h : \|h\|_0 \leq k\}. \quad (4.22)$$

Note que Σ_k não forma um espaço vetorial, uma vez que a soma de dois sinais k -esparso não é necessariamente k -esparso, mas é importante observar que, para $x_1, x_2 \in \Sigma_k$, temos $x_1 + x_2 \in \Sigma_{2k}$. O problema P_0 correspondente à norma ℓ^0 , idealmente, determina a solução mais esparsa para $y = Ax$. Porém, leva a um problema combinatorial e não é computacionalmente tratável. Ainda assim, examinaremos primeiro a reconstrução nessa forma idealizada, formulada explicitamente por

$$(P_0) \quad \tilde{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,min}} \|x\|_0 \quad \text{sujeito a } y = Ax. \quad (4.23)$$

No caso mais geral, em que $h = \Phi x$ é suposto esparso para Φ conhecido, o problema pode ser reescrito nessa forma simplificada. Assuma que $\tilde{\Phi}$ implementa a operação inversa, ou seja, $x = \tilde{\Phi}h$. Nesse caso, o problema P_0 é substituído por $\tilde{h} = \operatorname{arg\,min} \|h\|_0$ sujeito a $y = \tilde{A}h$, em que $\tilde{A} = A\tilde{\Phi}$. A solução é dada então por $\tilde{x} = \tilde{\Phi}\tilde{h}$. Deve-se notar, porém, que as condições discutidas mais à frente sobre a matriz A aplicam-se, na verdade, à matriz \tilde{A} , no caso geral. Com essa ressalva em mente, voltaremos ao caso $\Phi = I_n$ por simplicidade.

A equação $y = Ax$ determina y como uma combinação linear das colunas da matriz A . Como essa matriz tem n colunas e $\operatorname{rank}(A) = m \ll n$, existem infinitas combinações lineares dessas colunas que podem dar origem ao mesmo vetor y , ou seja, existem infinitos possíveis sinais \hat{x} que poderiam “explicar” as medidas $y = A\hat{x}$. Assuma que a solução \tilde{x} do problema 4.23 é tal que $\|\tilde{x}\|_0 = k$. Isso quer dizer que y pode ser escrito como uma combinação linear de apenas k das n colunas de A , tendo os k valores não nulos de \tilde{x} como coeficientes. Se essa é a única solução suficientemente esparsa, então $\|\hat{x}\|_0 > k$ para todo $\hat{x} \in \mathcal{X}$ em que $\mathcal{X} = \{\hat{x} : y = A\hat{x}\}$ com $\hat{x} \neq \tilde{x}$. Assim, se tentarmos substituir qualquer uma das k colunas usadas por \tilde{x} para gerar y por uma combinação linear das outras colunas, não podemos conseguir fazê-lo com poucas colunas. Isso requer que a matriz A satisfaça alguma propriedade de “incoerência” [7, 12, 11]. Definimos $\operatorname{spark}(A)$ como o **menor** número de colunas de A tal que essas colunas são linearmente **dependentes**⁹ [11, 12]. Considere o núcleo da matriz A , definido por $\operatorname{Null}(A) = \{z \in \mathbb{R}^n | Az = 0\}$. Por essas definições,

$$\operatorname{spark}(A) = K \quad \iff \quad \|z\|_0 \geq K \quad \forall z \in \operatorname{Null}(A), \quad (4.24)$$

de forma que o suporte de qualquer vetor no espaço nulo de A tem pelo menos K elementos. Note que, para quaisquer $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \mathcal{X}$, temos $z = \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \in \operatorname{Null}(A)$. Além disso, naturalmente, $\|\hat{x}_1\|_0 + \|\hat{x}_2\|_0 \geq \|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\|_0$ para quaisquer vetores \hat{x}_1 e \hat{x}_2 em \mathbb{R}^n . Dessa forma,

⁹Essa definição deve ser contrastada com a definição de $\operatorname{rank}(A)$, que é o **maior** número possível de colunas linearmente **independentes** de A .

$$\|\hat{x}_1\|_0 + \|\hat{x}_2\|_0 \geq K. \quad (4.25)$$

Assim, se $k = \|\tilde{x}\|_0 < K/2 = \text{spark}(A)/2$, então \tilde{x} é necessariamente a solução mais esparsa de $y = Ax$. Em outras palavras, \tilde{x} em 4.23 com $\|\tilde{x}\|_0 = k$ é único se $\text{Null}(A)$ não contém vetores em Σ_{2k} . Com isso, embora o problema P_0 em 4.23 seja um problema não convexo, temos a possibilidade de checar se um dado mínimo é de fato um mínimo global e podemos ainda garantir a unicidade dessa solução [11, 12].

Para qualquer y , existe **no máximo** um $\tilde{x} \in \Sigma_k$ tal que $A\tilde{x} = y$ se, e somente se, $\text{spark}(A) > 2k$. Claramente, $\text{spark}(A)$ é uma quantidade muito útil e é bastante desejável que ela seja o maior possível. Da definição, note que $2 \leq \text{spark}(A) \leq m + 1$. Infelizmente, essa quantidade é tão difícil de se calcular quanto o próprio \tilde{x} em P_0 , ou mais. Assim, em geral, é preferível se trabalhar com uma medida aproximada de $\text{spark}(A)$. Para se obter um limite inferior, definimos μ_A , a **coerência** de uma matriz A , como o maior valor absoluto do produto interno normalizado entre quaisquer duas colunas distintas de A :

$$\mu_A = \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2}. \quad (4.26)$$

Para $n \gg m$, pode-se mostrar que o limite inferior para essa medida é aproximadamente $\mu_A \geq 1/\sqrt{m}$. Com essa definição, pode-se mostrar que

$$\text{spark}(A) \geq 1 + \frac{1}{\mu_A}. \quad (4.27)$$

Assim, para qualquer y , existe **no máximo** um $\tilde{x} \in \Sigma_k$ tal que $A\tilde{x} = y$, se

$$k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu_A} \right). \quad (4.28)$$

Naturalmente, desejamos que a coerência da matriz A seja o menor possível. Observe que essa condição é suficiente, mas não necessária, uma vez que a equação 4.27 fornece apenas um limite inferior para $\text{spark}(A)$. Frequentemente, isso resulta em uma estimativa excessivamente pessimista [12]. Um limite superior pode ser obtido com uma sequência de n problemas de programação linear [12]. Experimentos numéricos mostram que esse limite tende a ser próximo do verdadeiro valor de $\text{spark}(A)$ [12]. Embora esse limite não garanta unicidade, em muitos casos, ele é mais útil que o limite inferior em termos da coerência [12].

Nos casos em que o sinal x não é exatamente esparsa, ou quando as medidas estão contaminadas por algum tipo de ruído, as condições discutidas sobre $\text{spark}(A)$ não são mais suficientes para garantir o sucesso da reconstrução. A noção de unicidade perde o significado e dá lugar a uma noção de estabilidade. Grosso modo, para permitir uma reconstrução estável de uma aproximação k -esparsa \tilde{x} nesses casos, além de não possuir vetores não-triviais em Σ_{2k} , o núcleo de A adicionalmente não pode conter vetores que sejam muito compressíveis. Além disso, pequenos desvios em x não devem ter um impacto muito maior que um desvio da mesma ordem em Ax . Ambas

as qualidades são capturadas em uma propriedade conhecida como **propriedade de isometria restrita**, ou RIP (de *restricted isometry property*). A matriz A satisfaz a RIP de ordem K se

$$(1 - \delta_K)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta_K)\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \Sigma_K, \quad (4.29)$$

para algum $\delta_K < 1$ [7, 11, 12]. Isso significa que qualquer submatriz A_K construída com K colunas de A tem valores singulares entre $1 - \delta_K$ e $1 + \delta_K$, ou seja, $(1 - \delta_K) \leq \lambda_{\min}(A_K^T A_K) \leq \lambda_{\max}(A_K^T A_K) \leq (1 + \delta_K)$. Naturalmente, se A satisfaz a RIP de ordem K com constante δ_K , satisfaz também a RIP de ordem K' com constante $\delta_{K'} \leq \delta_K$ para todo $K' < K$. Além disso, deve-se perceber que a RIP de ordem K implica $m + 1 \geq \text{spark}(A) \geq K \geq 1$.

Se a matriz A satisfaz a RIP de ordem $2k$, então

$$(1 - \delta_{2k})\|x_1 - x_2\|_2^2 \leq \|A(x_1 - x_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2k})\|x_1 - x_2\|_2^2 \quad (4.30)$$

para quaisquer x_1 e x_2 em Σ_k , de forma que essa matriz aproximadamente preserva distâncias entre vetores k -esparcos. Podemos estabelecer um limite inferior para o número de medidas necessárias para satisfazer essa RIP. Pode-se mostrar que, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfaz a RIP de ordem $2k$ com constante $\delta_{2k} \in (0, \frac{1}{2}]$, então [11],

$$m \geq Ck \ln\left(\frac{n}{k}\right) \quad \text{com} \quad C = \frac{1}{2 \ln(\sqrt{24} + 1)} \approx 0,28. \quad (4.31)$$

Infelizmente, encontrar a menor ordem K com que a matriz satisfaz a RIP pode ser ainda mais difícil que calcular $\text{spark}(A)$. No entanto, a RIP também pode ser relacionada à coerência μ_A da matriz A . Se as colunas de A tem norma ℓ^2 unitária, pode-se mostrar que a matriz A satisfaz a RIP de ordem K com constante $\delta_K = (K - 1)\mu_A$ para todo $K < 1/\mu_A$ [11]. Mais uma vez, se estabelece a necessidade de que a matriz A tenha a menor coerência possível.

Definidas as propriedades desejáveis para a matriz A , é possível construí-las deterministicamente de forma a satisfazer essas propriedades. Infelizmente, essas construções requerem valores ainda relativamente altos para m ou tornam a reconstrução numericamente instável para dimensões n muito grandes. No entanto, um dos resultados centrais em CS é que essas dificuldades podem ser contornadas com probabilidade muito alta usando matrizes construídas **aleatoriamente** [15, 11, 7]. Especificamente, pode-se mostrar que, se os coeficientes da matriz A são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuições contínuas, então $\text{spark}(A) = m + 1$ com probabilidade 1 [11]. Mais ainda, pode-se mostrar também que, para distribuições gaussianas, bem como para outras distribuições correlatas como a de Bernoulli, se A tem m linhas, com $m = O(k \log(n/k)/\delta_{2k}^2)$ [11], então A satisfaz a RIP de ordem $2k$ com probabilidade pelo menos $1 - e^{-c\delta_{2k}^2 m}$. Esse resultado se compara muito bem com o limite inferior para m em 4.31. Matrizes randomizadas possuem uma série de outras vantagens. Por exemplo, as medidas são **democráticas**, no sentido de que são igualmente importantes. Ou seja, a omissão de alguma das m medidas resulta em um erro diluído ao longo do sinal [7]. Principalmente, medidas randomizadas com distribuição gaussiana, por exemplo, são **universais**, no sentido de que esses resultados valem com

alta probabilidade independentemente da transformação Φ que esparsifica o sinal, pelo menos no caso de uma transformação ortogonal com $\tilde{\Phi} = \Phi^T$ já que, nesse caso, $\tilde{A} = A\Phi^T$ também terá distribuição gaussiana se A tiver [11, 7].

Finalmente, consideramos a aplicação da teoria de CS à aquisição de imagens por RM. O desempenho das matrizes aleatórias sugere uma aquisição aleatória. Em imageamento por RM, isso corresponde a selecionar amostras aleatórias da DFT. A quarta coluna da figura 3.8 reforça essa intuição. De fato, essa é sim uma estratégia eficiente [14]. Podemos testar uma série de padrões de amostragem randomizados e escolher aquele que resulta na maior incoerência da matriz $A = \tilde{W}\Phi^T$, em que \tilde{W} é o operador da DFT subamostrada e Φ é a transformada que esparsifica a imagem. Uma randomização com distribuição uniforme é suficiente, mas o desempenho pode ser tornado ainda maior ao incorporar outras informações sobre o sinal nessa estratégia. Por exemplo, sabendo que a DFT das imagens de RM geralmente possuem a sua energia concentrada perto do nível DC, podemos randomizar a localização das amostras no espaço de frequências com uma distribuição de probabilidades que favoreça uma amostragem mais densa nessa região. Isso de fato resulta em um ganho de desempenho [14]. Uma vez escolhido um padrão de aquisição adequado, esse padrão pode ser utilizado em aquisições subsequentes para um mesmo Φ [14]. A figura 4.2 resume as ideias centrais.

Infelizmente, a DFT subamostrada não possui a qualidade desejada de universalidade [7]. Isso quer dizer que o padrão de amostragem deve levar Φ em consideração, mas ainda é possível fazê-lo, randomizando as medidas e verificando o impacto da subamostragem no domínio transformado iterativamente, de forma quase ótima, com poucas iterações. Como já observado, para um mesmo Φ , esse padrão não precisa ser randomizado novamente. A figura 4.3 torna intuitiva a falta de universalidade da DFT subamostrada.

A possibilidade de reconstruir exatamente um sinal em dimensão n com apenas $m \ll n$ amostras é bastante promissor. No entanto, a igualdade $y = Ax$ pode ser muito restritiva se as medidas estão corrompidas por alguma forma de ruído [11, 12]. É conveniente então relaxar a restrição $y = Ax$ para alguma restrição mais suave, por exemplo em termos de uma desigualdade em alguma norma. Consideraremos especificamente a norma ℓ^2 para esse propósito, embora outras normas também possam levar a propriedades e algoritmos interessantes. Definimos a versão tolerante a ruído da reconstrução como o problema P_0^ϵ dado por

$$(P_0^\epsilon) \quad \tilde{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad \text{sujeito a} \quad \|y - Ax\|_2^2 \leq \epsilon^2. \quad (4.32)$$

Deve-se notar que esse problema leva a soluções \tilde{x} **no mínimo** tão esparsas quanto o problema P_0 , já que o conjunto $\tilde{\mathcal{X}} = \{x : \|Ax - y\|_2 \leq \epsilon\}$ de soluções candidatas para P_0^ϵ é estritamente maior que o conjunto $\mathcal{X} = \{\hat{x} : y = A\hat{x}\}$ de soluções candidatas para P_0 . Nesse contexto, a unicidade da solução perde sentido, já que pequenas perturbações dessa solução que não alterem seu suporte podem ser igualmente “boas” [12]. A estabilidade discutida anteriormente em termos da RIP, porém, implica que todas essas soluções permanecem “perto” da solução verdadeira em alguma medida [12]. O problema P_0^ϵ é também um problema combinatorial intratável computacionalmente [12].

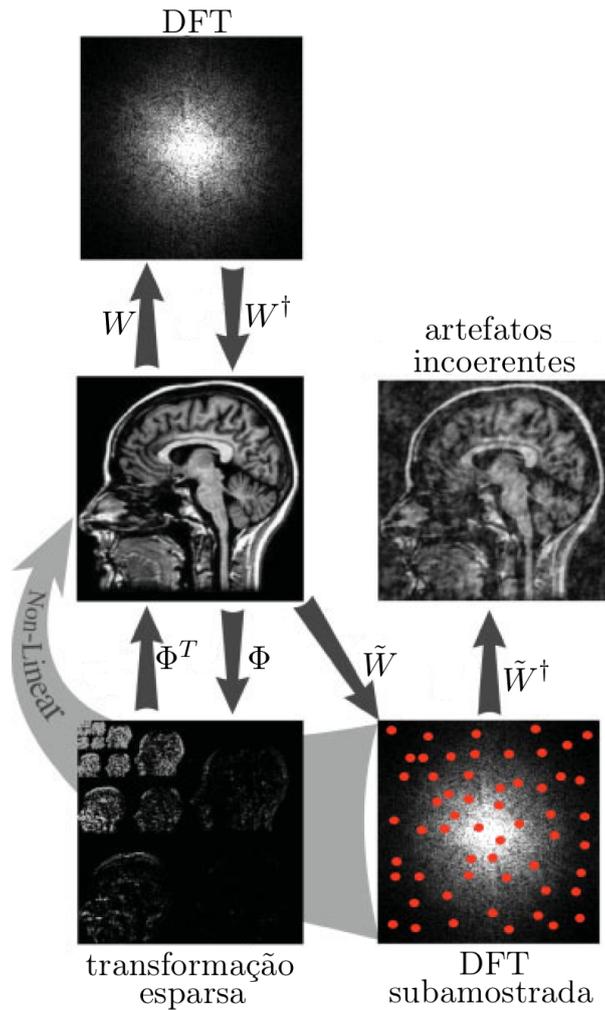


Figura 4.2: Aquisição de imagens de RM por CS. Adaptado de [14].

Consideramos enfim a reconstrução do sinal. Idealmente, a reconstrução é dada pelo problema de otimização P_0 em 4.23. Como já observado, no entanto, esse é um problema combinatorial que não pode ser resolvido diretamente. Existem diversas propostas para abordar essa reconstrução, úteis não apenas em CS mas também em diversas aplicações que levam a problemas análogos de otimização [12, 7]. A escolha de uma abordagem em particular depende da aplicação em particular e dos recursos computacionais disponíveis. Uma classe dessas abordagens, conhecidas como algoritmos gananciosos, aborda o problema diretamente na forma 4.23, construindo uma aproximação para a solução a cada iteração, com algum critério local de convergência, abrindo mão da minimização global em geral [11, 12]. O problema P_0^c em 4.32 pode ser abordado de maneira similar [12]. Não trataremos dessa classe aqui, mas algoritmos nessa classe, como *matching pursuit*, *orthogonal matching pursuit* e *iterative hard thresholding*, dentre outros, frequentemente fornecem soluções rápidas e eficientes [12, 11, 7] embora, em geral, sejam necessárias condições mais restritivas para garantir a globalidade da minimização [11]. Especificamente, essas técnicas em geral requerem mais medidas que as técnicas de relaxação [12], discutidas em seguida.

Na classe dos métodos de relaxação, a filosofia é substituir a objetiva do problema P_0 por

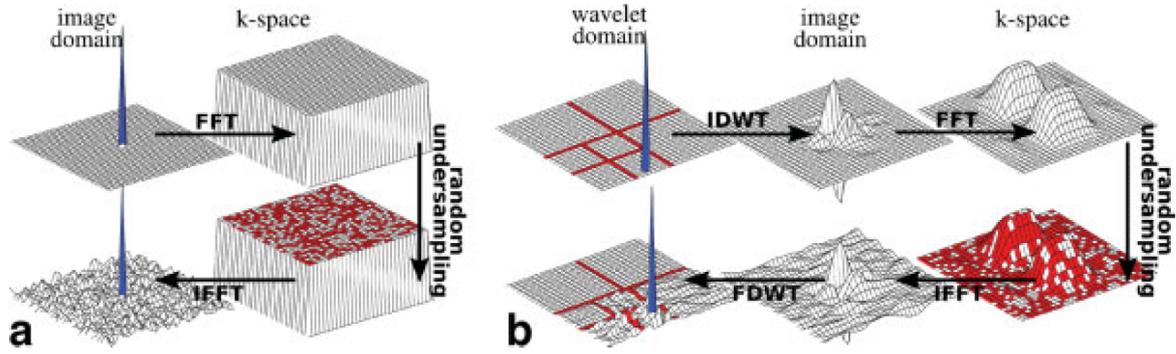


Figura 4.3: Efeitos do padrão de amostragem em um evento singular no domínio esparso. (a) O próprio domínio da imagem como domínio esparso. (b) Um domínio wavelet genérico como domínio esparso. Esta figura mostra intuitivamente a importância da incoerência em CS. Observe que as distorções causadas pela subamostragem têm amplitudes muito menores que o próprio evento. Como uma imagem genérica pode ser vista como uma superposição de diversos desses eventos deslocados, entendemos porque ela pode ser recuperada pela teoria de CS se ela é constituída de poucos deles. Comparando os painéis (a) e (b), percebemos ainda porque a DFT subamostrada não possui a qualidade de universalidade. Se o padrão de amostragem produz as características desejada em um domínio, dificilmente os produzirá em outro. Adaptado de [14].

uma função contínua que promova esparsidade. É possível escolher inclusive funções suaves [12], mas também não discutiremos essa abordagem aqui. Neste trabalho, estamos especificamente interessados na relaxação da norma ℓ^0 por alguma norma ℓ^p com $0 < p \leq 1$. Essa escolha faz sentido à luz da discussão ao final da seção anterior e, em especial, da interpretação gráfica do problema P_p em 4.20. Assim, a reconstrução será dada pela solução desse problema P_p . A sua versão tolerante a ruído é definida de maneira análoga ao problema P_0^ϵ em 4.32. Definimos o problema P_p^ϵ explicitamente por

$$(P_p^\epsilon) \quad \tilde{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_p^p \quad \text{sujeito a} \quad \|y - Ax\|_2^2 \leq \epsilon^2. \quad (4.33)$$

O caso $p = 1$ historicamente recebeu mais atenção pela sua estrutura. Além de tornar o problema P_1 correspondente um problema convexo, conhecido como *basis pursuit* (BP), pode ainda ser formulado como um problema de otimização linear [7, 11, 12]. Mesmo o problema P_1^ϵ continua sendo um problema convexo conhecido como *basis pursuit denoising* (BPD). O problema P_p com $p < 1$ em geral é mais complexo por não ser convexo. No entanto, mostrou-se empiricamente que a taxa de sucesso média é mais alta nesse caso, no sentido de que menos medidas m são necessárias para reconstruir exatamente um sinal k -esparso ou, alternativamente, que sinais menos esparsos podem ser recuperadas de um mesmo número de medidas m [16, 12]. Esses resultados empíricos fornecem menos garantias que as análises de pior caso mas são promissores, ainda assim, além de fornecerem expectativas bem menos pessimistas. Frequentemente, é possível reduzir ainda mais o número de medidas se outras informações são fornecidas *a priori* sobre o sinal. Na seção seguinte, detalharemos um algoritmo em especial para resolver o problema P_p conhecido como **mínimos quadrados iterativamente reponderados**, ou IRLS (de *iteratively reweighed leas squares*) [16], e mostraremos como ele pode ser adaptado de forma simples para explorar um tipo de informação *a priori* em particular, especificamente, informação sobre a localização parcial do suporte [17].

Por fim, no capítulo 5, propomos um algoritmo para atacar o problema P_p^ϵ adaptado do algoritmo IRLS, de forma a manter a possibilidade de explorar esse tipo de informação.

4.4 Mínimos Quadrados Iterativamente Reponderados (IRLS)

Uma abordagem genérica a problemas de otimização em geral é substituir o problema principal por um subproblema mais simples a cada iteração [13]. Em uma determinada iteração, o subproblema é resolvido, possivelmente apenas de maneira aproximada dependendo das restrições de processamento e memória, e o resultado é utilizado para construir o subproblema da próxima iteração. Espera-se que, a cada iteração, o subproblema aproxime cada vez melhor o problema principal de forma que as soluções dos subproblemas convirjam para uma solução do problema principal. Apresentamos agora um método que segue essas linhas para abordar o problema P_p definido em 4.20, conhecido como **mínimos quadrados iterativamente reponderados**, ou IRLS.

A q -ésima iteração do algoritmo IRLS consiste em substituir a objetiva do problema P_p em 4.20 por uma norma ℓ^2 ponderada, definindo o subproblema $SP^{(q)}$. Os pesos nessa ponderação são determinados pela solução do subproblema na iteração anterior. Formalmente,

$$(SP^{(q)}) \quad \tilde{x}^{(q)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=0}^{q-1} q_i^{(q)} |x_i|^2 \quad \text{sujeito a } y = Ax, \quad (4.34)$$

em que $q_i^{(q)} = q_i^{(q)}(\tilde{x}^{(q-1)})$ e x_i é a i -ésima componente de x [12, 16]. Equivalentemente, de forma mais compacta,

$$(SP^{(q)}) \quad \tilde{x}^{(q)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Q_{(q)} x \quad \text{sujeito a } y = Ax, \quad (4.35)$$

em que $Q_{(q)}$ é uma matriz diagonal com $[Q_{(q)}]_{ii} = q_i^{(q)}$. Para obter uma aproximação em primeira ordem da objetiva $\|x\|_p^p$ de P_p utilizando $x^T Q_{(q)} x$, definimos

$$q_i^{(q)} = |x_i^{(q-1)}|^{p-2}. \quad (4.36)$$

Comparando 4.35 com o problema P_2 em 4.9 e com a equação 4.14, vemos que $SP_{(q)}$ tem solução fechada dada por

$$\tilde{x}^{(q)} = Q_{(q)}^{-1} A^T \left(A Q_{(q)}^{-1} A^T \right)^{-1} y. \quad (4.37)$$

Note que $q_i^{(q)}$ em 4.36 não é definido para $x_i^{(q-1)} = 0$ uma vez que estamos considerando o caso $0 \leq p \leq 1$. Uma maneira de contornar esse problema é redefinir os coeficientes de $Q_{(q)}$ como

$$q_i^{(q)} = (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} \quad (4.38)$$

com algum $\sigma > 0$ [16]. Observe que na verdade somente $W_{(q)} = Q_{(q)}^{-1}$ com $[W_{(q)}]_{ii} = (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{2-p}$ é necessário em 4.37 o que não requer $\sigma \neq 0$. No entanto, de qualquer forma, $\sigma = 0$ poderia tornar a matriz $(AQ_{(q)}^{-1}A^T)^{-1}$ em 4.37 indefinida ou muito mal condicionada¹⁰[16]. De fato, mostrou-se experimentalmente que selecionar um σ relativamente grande a princípio e repetir o processo todo, até a convergência, para um σ cada vez menor melhora a habilidade do IRLS em recuperar sinais esparsos, no sentido de que menos medidas são necessárias para uma dada esparsidade ou de que sinais menos esparsos podem ser recuperados com o mesmo número de medidas [16].

Outra maneira de contornar a indefinição de $q_i^{(q)}$ quando $x_i^{(q-1)} = 0$ é substituir a matriz $Q_{(q)}^{-1}$, definida indiretamente pela definição de $Q_{(q)}$, pela matriz diagonal $W_{(q)}$ com $[W_{(q)}]_{ii} = w_i^{(q)}$, definida diretamente por

$$w_i^{(q)} = |x_i^{(q-1)}|^{2-p}. \quad (4.39)$$

Substituímos então o problema $SP^{(q)}$ pelo problema $SP^{(q)+}$ definido como [12]

$$(SP^{(q)+}) \quad \tilde{x}^{(q)} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,min}} x^T W_{(q)}^+ x \quad \text{sujeito a} \quad y = Ax, \quad (4.40)$$

em que $W_{(q)}^+$ é a pseudo-inversa de $W_{(q)}$, também diagonal e com coeficientes $[W_{(q)+}]_{ii} = 1/w_i^{(q)}$ se $w_i^{(q)} \neq 0$ e $[W_{(q)+}]_{ii} = 0$ se $w_i^{(q)} = 0$. A solução é dada então por

$$\tilde{x}^{(q)} = W_{(q)} A^T (AW_{(q)} A^T)^+ y. \quad (4.41)$$

Uma propriedade interessante dessa abordagem é que, uma vez que $x_i^{(q)} = 0$ para alguma iteração q , então $x_i^{(q')} = 0$ para toda iteração q' subsequente, como podemos observar na própria equação 4.41. Isso implica ainda que esse algoritmo deve ser inicializado com valores não nulos para todos os coeficientes $x_i^{(0)}$.

Supondo que conheçamos parcialmente o suporte da solução x , a estrutura do problema $SP^{(q)}$ nos permite explorar essa informação de maneira simples para melhorar as características de convergência do algoritmo IRLS [17]. Note que a objetiva do problema P_p é uma função separável dos coeficientes x_i . Especificamente, essa objetiva é uma soma de termos da forma $f_i(x_i) = |x_i|^p$. O objetivo dessa função é priorizar soluções candidatas que satisfaçam o modelo de sinal esparsos assumido para x . Suponha que temos à disposição a informação de que $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, n\}$ faz parte do suporte Λ_x de x , ou seja, $\Lambda \subset \Lambda_x$. Defina $\Lambda^c = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Lambda$ como o complemento de Λ . Podemos alterar o problema P_p de maneira a “encorajar” soluções com valores não nulos de x_i com $i \in \Lambda$. Considere o efeito de substituir $f_i(x_i)$ por $g_i(x_i) = \alpha_i |x_i|^p$ com $\alpha_i \geq 0$. Se α_i é grande em relação aos outros α , a nova objetiva penaliza mais fortemente valores altos de x_i . Alternativamente, se α_i é muito pequeno, é possível escolher valores mais altos para x_i sem tanto impacto na

¹⁰O **índice de condicionamento** de uma matriz quadrada é a razão entre o seu maior autovalor e o seu menor autovalor. Se esse valor é muito grande (mas finito), a matriz é aproximadamente singular, de forma que, embora seja inversível, pode não ser possível encontrar numericamente uma inversa de maneira estável.

minimização. Isso pode ser compreendido graficamente observando que α_i realiza uma mudança de escala no respectivo eixo coordenado¹¹. Nos eixos originais, isso corresponde “comprimir” ou “esticar” as bolas ℓ^p na figura 4.1 na direção do i -ésimo eixo. Fazendo $\alpha_i = 0$, o valor de x_i pode ser estabelecido com impunidade sobre a minimização, encorajando que o algoritmo, qualquer que seja, dê prioridade para soluções que utilizem esses coeficientes. Para explorar a informação à disposição em Λ , definimos então o problema $P_{p,\Lambda}$ como

$$(P_{p,\Lambda}) \quad \tilde{x}^{(q)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{\Lambda^c} |x|^p \quad \text{sujeito a } y = Ax. \quad (4.42)$$

É importante perceber que essa abordagem é resistente a erros em Λ [17]. Ou seja, se $\Lambda \cap \Lambda_x^c \neq \emptyset$, o algoritmo não necessariamente falha já que nada impede que $x_i = 0$ para algum $i \in \Lambda$, já que as soluções candidatas ainda encontram-se restritas ao conjunto $\mathcal{X} = \{\hat{x} : y = A\hat{x}\}$. No entanto, erros em excesso podem causar perda de desempenho já que podem encorajar o algoritmo a “insistir” em soluções pouco esparsas.

A estrutura do algoritmo IRLS permite explorar a informação em $\Lambda \in \Lambda_x$ conhecido *a priori* de maneira simples. Especificamente, é possível fazê-lo sem redefinir o problema como $P_{p,\Lambda}$, bastando fazer $q_i^{(q)} = 0$ para toda iteração q e para todo $i \in \Lambda$ no subproblema¹² $SP^{(q)}$ 4.35 [17]. Na verdade, para evitar instabilidades numéricas na equação 4.37, $q_i^{(q)}$ é mantido pequeno mas não nulo, substituindo a equação 4.38 por

$$q_i^{(q)} = \begin{cases} (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda^c \\ \tau(|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda \end{cases}, \quad (4.43)$$

em que $\tau \geq 0$ é um parâmetro pequeno ou nulo. Foi mostrado que essa abordagem melhora as características de convergência do algoritmo IRLS [17]. Foi mostrado, também, que, quanto maior $|\Lambda|$, menos medidas m em $y = Ax$ são necessárias para a mesma taxa de sucesso do algoritmo dada uma esparsidade fixa [17]. Foi mostrado ainda que o número de iterações para convergência satisfatória, bem como o tempo de processamento, são menores quanto maior $|\Lambda|$ [17]. Mais ainda, o que é crítico para a utilidade desse algoritmo, foi mostrado que a informação em Λ ainda melhora o desempenho com relação ao algoritmo sem informação *a priori* sobre o suporte, mesmo quando essa informação não é completamente confiável, ou seja, mesmo quando $\Lambda \cap \Lambda_x^c \neq \emptyset$, desde que $|\Lambda \cap \Lambda_x|$ seja suficientemente maior que $|\Lambda \cap \Lambda_x^c|$ [17]. No capítulo seguinte, exploramos essas ideias para desenvolver um algoritmo análogo para o problema P_p^ϵ .

¹¹Isso é exatamente o que o algoritmo IRLS faz com a norma ℓ^2 a cada iteração, penalizando valores pequenos de x_i e estimulando a concentração da energia do sinal em uns poucos coeficientes.

¹²Ou $w_i^{(q)} \rightarrow \infty$ no problema $SP^{(q)+}$ 4.40.

Capítulo 5

Desenvolvimento

O problema da reconstrução do sinal em *compressed sensing* (CS), como visto no Capítulo 4, é posto como a procura por uma solução esparsa $x \in \mathbb{R}^n$ para um sistema linear subdeterminado (SLS) do tipo $y = Ax \in \mathbb{R}^m$ com $m \ll n$. A teoria de CS é uma teoria sobre amostragem e, sendo assim, aborda especialmente as condições a serem satisfeitas pela matriz A , que modela essa operação. O problema da procura por soluções esparsas para SLS's, no entanto, é central também em diversas outras aplicações, embora com outras condições e outros significados para a matriz A , de forma que algoritmos eficientes para a solução numérica desse tipo de problema são de grande interesse [12, 7].

Diversos algoritmos iterativos para os problemas de otimização que resultam da procura por soluções esparsas de SLS's foram propostos e estudados nos últimos anos [12, 7]. A técnica de **mínimos quadrados iterativamente reponderados** (IRLS), baseada na solução sucessiva de subproblemas mais simples, dá origem a um tal algoritmo [16]. Esse algoritmo foi detalhado na seção 4.4, onde se mostrou também que ele pode ser adaptado para explorar informação *a priori* sobre a localização parcial do suporte [17]. Neste capítulo, exploramos essas ideias para desenvolver um algoritmo mais robusto contra ruído nas medidas y e contra desvios do sinal x com relação ao modelo imposto de sinal esparsos. Isso é possível relaxando a condição $y = Ax$ para algo menos restritivo. Consideramos o caso $\|y - Ax\|_2 \leq \epsilon$.

5.1 Formulação Matemática e Considerações Heurísticas

Buscamos aqui propor uma abordagem para resolver o problema P_p^ϵ em 4.33 baseado nas ideias centrais do algoritmo IRLS, cujo núcleo é o subproblema $SP^{(q)}$ em 4.35 a cada iteração. Seja $\Lambda_x \subset \{1, 2, \dots, n\}$ o suporte da solução $x \in \Sigma_k$ com $|\Lambda_x| \leq k$ e seja $\Lambda_x^c = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Lambda_x$ seu complemento. Suponha que se tenha *a priori* a informação de que $\Lambda \subset \Lambda_x$ faz parte desse suporte, ou seja, o suporte de x é parcialmente conhecido. Por analogia direta com o algoritmo IRLS, na q -ésima iteração, substituímos o problema P_p^ϵ pelo subproblema $SP_\epsilon^{(q)}$ definido por

$$(SP_\epsilon^{(q)}) \quad \tilde{x}^{(q)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Q_{(q)} x \quad \text{sujeito a} \quad \|y - Ax\|_2^2 \leq \epsilon^2, \quad (5.1)$$

em que $Q_{(q)}$ é uma matriz diagonal com coeficientes $[Q_{(q)}]_{ii} = q_i^{(q)}$ definidos por

$$q_i^{(q)} = \begin{cases} (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda^c \\ \tau(|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda \end{cases}. \quad (5.2)$$

As constantes ϵ , σ e τ são parâmetros da reconstrução maiores ou iguais a zero, definidos pelo usuário. Como já discutido, a solução para P_p^ϵ é sempre tão esparsa quanto a solução para P_p ou mais, já que o seu conjunto de possíveis soluções candidatas é estritamente maior. Intuitivamente, ϵ regula o *trade-off* entre a esparsidade de \tilde{x} e sua consistência com os dados y , com ϵ maior promovendo soluções mais esparsas em detrimento dessa consistência. A constante σ regula o *trade-off* entre o condicionamento do problema e a aproximação assintótica de $SP_\epsilon^{(q)}$ a P_p^ϵ , uma vez que σ^{p-2} é claramente um limite superior para os autovalores de $Q_{(q)}$. Valores muito pequenos desse parâmetro melhoram a aproximação com a norma ℓ^p na objetiva do subproblema $SP_\epsilon^{(q)}$ mas podem tornar esses subproblemas numericamente instáveis. Por fim, $\tau \leq 1$ regula a confiança na informação $\Lambda \subset \Lambda_x$, com valores menores promovendo mais “insistentemente” soluções com $\tilde{x}_i \neq 0$ para $i \in \Lambda$.

Definimos a função Lagrangeana para o problema 5.1 como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q(x, \mu) &= x^T Q_{(q)} x + \mu (\|Ax - y\|_2^2 - \epsilon^2) = \\ &= x^T (Q_{(q)} + \mu A^T A) x - 2\mu y^T Ax + \mu (\|y\|_2^2 - \epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Com essa definição, as condições necessárias de primeira ordem para que \tilde{x} seja um mínimo local são

$$(Q_{(q)} + \tilde{\mu}_q A^T A) \tilde{x}^{(q)} = \tilde{\mu}_q A^T y, \quad (5.4a)$$

$$\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 \leq \epsilon^2, \quad (5.4b)$$

$$\tilde{\mu}_q \geq 0, \quad (5.4c)$$

$$\tilde{\mu}_q (\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 - \epsilon^2) = 0, \quad (5.4d)$$

conhecidas como **condições de Karush–Kuhn–Tucker** (condições KKT) [13, 18]. Note que, para excluir a solução $\tilde{x}^{(q)}$, é preciso $\|y\|_2^2 > \epsilon^2$.

Para algum $\mu_0 > 0$ fixo, considere o problema simplificado P' em

$$(P') \quad \tilde{x}' = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Q_{(q)} x + \mu_0 \|y - Ax\|_2^2. \quad (5.5)$$

O problema P' pode ser visto como uma minimização conjunta das objetivas $x^T Q_{(q)} x$ e $\|Ax - y\|_2^2$ sem restrição, com μ_0 intuitivamente definindo a importância relativa dessas duas medidas. Um valor grande de μ_0 força maior consistência com os dados, enquanto um valor pequeno de μ_0 favorece uma solução mais esparsa, assumindo que $Q_{(q)}$ é tal que $x^T Q_{(q)} x$ aproxima $\|x\|_p^p$. Repare que a condição de primeira ordem para que \tilde{x}' seja uma solução de P' é idêntica à condição KKT 5.4a para 5.1. De fato, pode-se mostrar que, se $\mu_0 = \tilde{\mu}_q$, então $\tilde{x}' = \tilde{x}^{(q)}$ [12, 13]. Substituindo a KKT 5.4c por $\tilde{\mu}_q > 0$, a KKT 5.4d implica $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 - \epsilon^2$, impondo que $\tilde{x}^{(q)}$ esteja na borda do conjunto convexo $\tilde{\mathcal{X}} = \{\hat{x} : \|y - Ax\|_2 \leq \epsilon\}$ das soluções possíveis, ou seja, a restrição 5.4b está ativa. Com tudo isso em mente, lembrando ainda que $SP_\epsilon^{(q)}$ é apenas um subproblema a ser resolvido a cada iteração do algoritmo principal, buscamos uma solução aproximada e rápida. Para isso, exigimos apenas que $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2$ esteja próximo de ϵ^2 . Assim, propomos a substituição das condições KKT 5.4 pelas condições de KKT simplificadas (KKTS)

$$(\tilde{\lambda}_q Q_{(q)} + A^T A)\tilde{x}^{(q)} = A^T y, \quad (5.6a)$$

$$\epsilon_-^2 \leq \|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 \leq \epsilon_+^2, \quad (5.6b)$$

$$\tilde{\lambda}_q > 0, \quad (5.6c)$$

em que $0 < \epsilon_- < \epsilon < \epsilon_+$ com $\epsilon/\epsilon_- \approx \epsilon_+/\epsilon \approx 1$. É importante perceber que $\tilde{\lambda}_q$ atua na direção inversa de $\tilde{\mu}_q$, ou seja, $\tilde{\lambda}_q$ grande promove esparsidade, enquanto $\tilde{\lambda}_q$ promove consistência com os dados.

As KKTS 5.6 podem ser satisfeitas resolvendo o sistema linear na KKTS 5.6a para vários valores de $\tilde{\lambda}_q$, até que a KKTS 5.6b seja satisfeita com $\tilde{\lambda}_q > 0$ pela KKTS 5.6c. A intuição de que $\tilde{\lambda}_q$ regula o *trade-off* entre esparsidade e consistência com os dados sugere aumentar $\tilde{\lambda}_q$ se $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 < \epsilon_-^2$ e diminuir $\tilde{\lambda}_q$ se $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 > \epsilon_+^2$. Ao invés disso, propomos resolver o sistema 5.6a uma única vez para um único $\tilde{\lambda}_q$. Com isso, determinamos $\tilde{x}^{(q)}$ e construímos $Q_{(q+1)}$ como em 5.2, passando à iteração seguinte com o problema $SP_\epsilon^{(q+1)}$. Só então atualizamos $\tilde{\lambda}_{q+1}$ com base em $\tilde{\lambda}_q$ e na violação da KKTS 5.6 por $\tilde{x}^{(q)}$. Aumentamos $\tilde{\lambda}_{q+1}$ em relação a $\tilde{\lambda}_q$ se $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 < \epsilon_-^2$ e diminuímos $\tilde{\lambda}_{q+1}$ em relação a $\tilde{\lambda}_q$ se $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 > \epsilon_+^2$. Se $\epsilon_-^2 \leq \|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2^2 \leq \epsilon_+^2$, fazemos $\tilde{\lambda}_{q+1} = \tilde{\lambda}_q$. Tomamos ainda providências para que $\tilde{\lambda}_q$ não se torne muito pequeno, já que isso tornaria o problema 5.6a numericamente instável. Podemos perceber isso considerando $\tau > 0$ e $\sigma > 0$ em 5.2, de forma que $Q_{(q)}^{-1}$ é definida. Com isso, podemos reescrever o sistema linear 5.6a como

$$(\tilde{\lambda}_q I_n + Q_{(q)}^{-1} A^T A)\tilde{x}^{(q)} = Q_{(q)}^{-1} A^T y. \quad (5.7)$$

Como a matriz $Q_{(q)}^{-1}$ é positiva definida por construção e a matriz $A^T A$ é positiva semi-definida já que $m < n$, o múltiplo da identidade claramente regula o condicionamento da matriz $(\tilde{\lambda}_q I_n + Q_{(q)}^{-1} A^T A)$ a ser invertida.

5.2 Algoritmo Proposto

Com as considerações da seção anterior em mente, propomos o **Algoritmo 1** abaixo. As estimativas iniciais $\tilde{x}^{(0)}$ e $\tilde{\lambda}_0$ podem ser fornecidas pelo usuário ou estimadas de alguma maneira predeterminada. O parâmetro ϵ_{tol} define as constantes ϵ_- e ϵ_+ em torno de ϵ , estabelecendo o desvio tolerado em relação à restrição. Como discutido na seção 4.4, é vantajoso repetir o procedimento de IRLS para valores progressivamente menores de σ , começando com um valor relativamente grande. Os parâmetros σ_i e σ_f definem os valores inicial e final de σ , respectivamente, enquanto o parâmetro $f_\sigma < 1$ é um fator multiplicativo que reduz σ a cada passagem de IRLS. O parâmetro q_{max} limita o número de subproblemas resolvidos a cada passagem de IRLS, para evitar que o algoritmo circule indefinidamente em situações problemáticas, em que o critério de parada não pode ser alcançado. Por fim, os parâmetros λ_{min} e λ_{max} limitam os valores de $\tilde{\lambda}_q$. Como discutido na seção anterior, valores extremos de $\tilde{\lambda}_q$ podem comprometer o condicionamento numérico do subproblema.

É importante pontuar desde já que, durante os experimentos, o comportamento do algoritmo mostrou-se bastante sensível ao método de atualização de $\tilde{\lambda}_q$. Na implementação em particular utilizada para gerar os resultados deste trabalho, foi utilizada uma predição linear em termos de valores passados de $\tilde{\lambda}_{q'}$ e de $\|y - A\tilde{x}^{(q')}\|_2$ para determinar $\tilde{\lambda}_q$ com $q' < q$, almejando $\epsilon_- \leq \|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2 \leq \epsilon_+$. A justificativa para isso é que, perto da convergência, esses valores frequentemente concordam. No entanto, é necessário algum tipo de controle para evitar comportamento errático já que $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2$ é uma função de $\tilde{\lambda}_q$ possivelmente muito diferente de $\|y - A\tilde{x}^{(q')}\|_2$ como função de $\tilde{\lambda}_{q'}$. Além disso, é importante garantir que o programa mova adiante se ele passar muitas iterações consecutivas com $\tilde{\lambda}_q$ travado em algum dos valores extremos λ_{min} ou λ_{max} com $\|y - A\tilde{x}^{(q)}\|_2$ se comportando de maneira inadequada.

Ao invés de tentar demonstrar rigorosamente as propriedades de convergência do Algoritmo 1, avaliamos empiricamente o seu desempenho no capítulo seguinte. Esse desempenho será contrastado com o desempenho do algoritmo IRLS com informação a priori sob restrição de igualdade nos exatos mesmos problemas sob condições idênticas. Para referência, apresentamos o Algoritmo 2 como descrição desse último algoritmo, conforme utilizado neste trabalho.

Algoritmo 1. IRLS com informação *a priori* para minimização ℓ^p com restrição $\|y - Ax\|_2^2 \leq \epsilon^2$.

Entradas: $p, y, A, \Lambda, \epsilon, \tilde{x}^{(0)}, \tilde{\lambda}_0$.

Parâmetros: $\tau, \epsilon_{tol}, \sigma_i, \sigma_f, f_\sigma, q_{max}, \lambda_{min}, \lambda_{max}$.

Retorna: estimativa para $\tilde{x} = \operatorname{argmin} \|x\|_p^p$ sujeito a $\|y - Ax\|_2^2 \leq \epsilon^2$.

$\tilde{x} \leftarrow \tilde{x}^{(0)}$

$\epsilon_- \leftarrow (1 - \epsilon_{tol})\epsilon$

$\epsilon_+ \leftarrow (1 + \epsilon_{tol})\epsilon$

$\sigma \leftarrow \sigma_i$

enquanto $\sigma \geq \sigma_f$,

$q \leftarrow 1$

$\tilde{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}$

$S \leftarrow 0$

enquanto $(q < q_{max}) \& (S \neq 1)$,

$E^2 \leftarrow \|y - A\tilde{x}^{(q-1)}\|_2^2$

se $E^2 < \epsilon_-^2$ **então**

escolha λ tal que $\tilde{\lambda}_{q-1} < \lambda < \lambda_{max}$.

$\tilde{\lambda}_q \leftarrow \lambda$

senão, se $E^2 > \epsilon_+^2$ **então**

escolha λ tal que $\lambda_{min} < \lambda < \tilde{\lambda}_{q-1}$.

$\tilde{\lambda}_q \leftarrow \lambda$

senão

$\tilde{\lambda}_q \leftarrow \tilde{\lambda}_{q-1}$

fim(se)

Defina a matriz diagonal $Q_{(q)}$ com $[Q_{(q)}]_{ii} = q_i^{(q)}$.

$$q_i^{(q)} \leftarrow \begin{cases} (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda^c \\ \tau(|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{p-2} & \text{se } i \in \Lambda \end{cases}$$

Resolva para x :

$$(\tilde{\lambda}_q Q_{(q)} + A^T A)x = A^T y$$

$\tilde{x}^{(q)} \leftarrow x$

$q \leftarrow q + 1$

se $\|\tilde{x}^{(q)} - \tilde{x}^{(q-1)}\|_2$ satisfaz algum critério de parada pré-definido **então**

$S = 1$

fim(se)

fim(enquanto)

$\tilde{x} \leftarrow \tilde{x}^{(q-1)}$

$\tilde{\lambda}_0 \leftarrow \tilde{\lambda}_{q-1}$

$\sigma \leftarrow \sigma f_\sigma$

fim(enquanto)

Retorne(\tilde{x})

Algoritmo 2. IRLS com informação *a priori* para minimização ℓ^p com restrição $y = Ax$.

Entradas: $p, y, A, \tilde{x}^{(0)}$.

Parâmetros: $\tau, \sigma_i, \sigma_f, f_\sigma, q_{max}$.

Retorna: estimativa para $\tilde{x} = \operatorname{argmin} \|x\|_p^p$ sujeito a $y = Ax$.

$\tilde{x} \leftarrow \tilde{x}^{(0)}$

$\sigma \leftarrow \sigma_i$

enquanto $\sigma \geq \sigma_f$,

$q \leftarrow 1$

$\tilde{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}$

$S \leftarrow 0$

enquanto $(q < q_{max}) \& (S \neq 1)$,

 Defina a matriz diagonal $W_{(q)}$ com $[W_{(q)}]_{ii} = w_i^{(q)}$.

$$w_i^{(q)} \leftarrow \begin{cases} (|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{2-p} & \text{se } i \in \Lambda^c \\ \tau^{-1}(|x_i^{(q-1)}| + \sigma)^{2-p} & \text{se } i \in \Lambda \end{cases}$$

$\tilde{x}^{(q)} \leftarrow W_{(q)} A^T (A W_{(q)} A^T)^{-1} y$

$q \leftarrow q + 1$

se $\|\tilde{x}^{(q)} - \tilde{x}^{(q-1)}\|_2$ satisfaz algum critério de parada pré-definido **então**

$S = 1$

fim(se)

fim(enquanto)

$\tilde{x} \leftarrow \tilde{x}^{(q-1)}$

$\sigma \leftarrow \sigma f_\sigma$

fim(enquanto)

Retorne(\tilde{x})

Capítulo 6

Resultados Experimentais

Neste capítulo, apresentamos uma série de experimentos numéricos que sugerem empiricamente as condições sob as quais o Algoritmo 1, proposto na seção 5.2, converge para um resultado satisfatório. Primeiramente, por generalidade, mostramos o desempenho do algoritmo em uma série de sinais aleatórios sob diversas condições. Por fim, testamos o algoritmo em um sinal sintético de grandes dimensões em um cenário similar ao de uma aquisição de imagem por ressonância magnética.

6.1 Desempenho Empírico

Para avaliar o desempenho do Algoritmo 1, consideramos a reconstrução de diversos sinais x de comprimento $n = 256$ gerados aleatoriamente para um número de medidas em $y = Ax$ variando de $m = 32$ a $m = 128$ sob condições variadas. Para gerar os sinais de teste, $k = 16$ elementos foram retirados aleatoriamente do intervalo $[-1, -2] \cup [1, 2]$ com densidade de probabilidade uniforme e posicionados em um suporte $\Lambda_x \subset \{1, 2, \dots, 256\}$ escolhido aleatoriamente no conjunto de índices com $|\Lambda_x| = 16$ e com probabilidade uniforme, gerando um sinal x_0 k -esparso. Sobre esse sinal, foi sobreposta uma perturbação d pequena, consistindo em 256 elementos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão $\sigma_d = 0,05$, dando origem ao sinal de teste $x = x_0 + d$. Essa perturbação não consiste em ruído, mas sim em um desvio de x com relação ao modelo assumido de sinal k -esparso. Além disso, para gerar y , foram adicionados sinais de ruído e às medidas Ax , de forma que \tilde{x} em cada teste é uma estimativa de x com base em $y = Ax + e$. Cada sinal e consiste em m elementos i.i.d. com distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão $\sigma_e = 0,15$. Para cada valor de m considerado, foram geradas aleatoriamente 10 matrizes A de dimensão com entradas i.i.d. retiradas de uma distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão unitário. Para cada matriz A de dimensão m , foram gerados 10 sinais x e respectivas medidas y pelo procedimento descrito acima. Por fim, para cada trio (x, A, y) , foram estimadas 66 reconstruções \tilde{x} com o Algoritmo 1, uma para cada par (p, Λ) , com 11 valores de p variando de $p = 0$ a $p = 1$ a passos de 0.1 sob 6 condições distintas de Λ . As condições de Λ diferem na quantidade $|\Lambda \cap \Lambda_x|$ de posições informadas corretamente e na

quantidade $|\Lambda \cap \Lambda_x^c|$ de posições informadas incorretamente. Cada reconstrução foi acompanhada de uma segunda reconstrução utilizando o Algoritmo 2 para comparação.

Como, no cenário estabelecido, não podemos esperar uma reconstrução exata em razão dos desvios de x com relação ao modelo de sinal esparso bem como da presença de ruído nas medias y , a qualidade da reconstrução não pode ser avaliada sob esse critério a não ser para valores desprezíveis dessas perturbações. Para esse caso, deixando $\epsilon \rightarrow 0$, é possível em tese configurar os parâmetros do Algoritmo 1 para uma reconstrução satisfatória. No entanto, não é esperado nesse caso que tal algoritmo apresente qualquer vantagem com relação ao Algoritmo 2. De fato, os valores de σ_d e de σ_e , um tanto arbitrários, foram escolhidos para nos afastarmos desse caso o suficiente para demonstrar a maior robustez do algoritmo proposto quando essas perturbações não podem ser desprezadas. Assim, para avaliar a qualidade das reconstruções, definimos a melhor aproximação de x em k termos como x_{bk} tal que $x_{bk} = x$ em Λ_x e $x_{bk} = 0$ em Λ_x^c e consideramos as relações sinal-erro (SER) dadas, em dB, por

$$SER_{\tilde{x},x} = 20 \log_{10} \frac{\|x\|_2}{\|x - \tilde{x}\|_2} \quad (\text{dB}), \quad (6.1a)$$

$$SER_{\tilde{x},x_{bk}} = 20 \log_{10} \frac{\|x_{bk}\|_2}{\|x_{bk} - \tilde{x}\|_2} \quad (\text{dB}), \quad (6.1b)$$

$$SER_{x_{bk},x} = 20 \log_{10} \frac{\|x\|_2}{\|x - x_{bk}\|_2} \quad (\text{dB}), \quad (6.1c)$$

como métricas de qualidade.

Para fins de comparação, os algoritmos 1 e 2 foram configurados da maneira mais similar possível. Para todas as reconstruções com o Algoritmo 1, ϵ foi mantido fixo em $\epsilon = \sqrt{n}\sigma_e = 2, 4$. Esse valor segue uma recomendação típica para o problema P_1^ϵ . Foram mantidos também os valores $\epsilon_{tol} = 0, 1$, $\lambda_{min} = 2$ e $\lambda_{max} = 10^4$. Para todas as reconstruções, com ambos os algoritmos, foram mantidos fixos $\sigma_i = 1$, $\sigma_f = 0,01$ e $f_\sigma = 0,1$. Os valores de σ_i e f_σ forma escolhidos de forma bastante arbitrária, mas o valor de σ_f foi escolhido em função de σ_d . Observamos empiricamente que permitir $\sigma_f \ll \sigma_d$ resulta em prejuízos para ambos os algoritmos. Para o Algoritmo 1, foi mantido $\tau = 0$. O Algoritmo 2 não permite esse valor para τ , então utilizamos $\tau = 0,1$ nesse caso. Para ambos os algoritmos, o número máximo de sub-iterações foi mantido em $q_{max} = 20$ e o critério de parada é $S = 1$ se $\|\tilde{x}^{(q)} - \tilde{x}^{(q-1)}\|_2 / (1 + \|\tilde{x}^{(q-1)}\|_2) < 10^{-2}\sqrt{\sigma}$.

Os principais resultados deste trabalho estão sintetizados nas figuras 6.1 a 6.3. Essas figuras comparam a qualidade de \tilde{x} como aproximação x com a qualidade de x_{bk} como aproximação de x . Para referência, apesar das variações aleatórias em x_0 , d e Λ_x , vale notar que $SER_{x_{bk},x}$ permaneceu em torno de 18 dB com pouca variação ao longo dos testes. A figura 6.1 mostra a porcentagem desses testes em que $SER_{x_{bk},x} - SER_{\tilde{x},x} < 3$ dB para cada combinação de p , Λ e m . Essa é a porcentagem de vezes em que, abrindo mão das localizações e valores dos melhores $k = 16$ termos em favor da aproximação \tilde{x} , estaríamos perdendo **no máximo** 3 dB. Em outras palavras, nas regiões em que a imagem se aproxima do vermelho escuro, podemos esperar por uma aproximação do sinal em \tilde{x} quase tão boa quanto aquela em x_{bk} . A figura 6.1(a) retrata a reconstrução com $|\Lambda| = 0$, ou seja, sem qualquer informação *a priori*. Nas figuras 6.1(b) a

6.1(d), uma porção progressivamente maior do suporte é fornecida de ante-mão, sempre de maneira acurada. Comparando essas figuras, percebemos que, para um mesmo grau de “confiança” na reconstrução, são necessárias cada vez menos medidas. Talvez até mais interessante é o caso das figuras 6.1(e) e 6.1(f), em que essa informação não é perfeitamente íntegra. Na figura 6.1(e), 4 das 12 posições oferecidas estão incorretas e metade das 12 posições estão incorretas na figura 6.1(f). Mesmo com essa inconsistência na informação, podemos identificar um ganho com relação à figura 6.1 em que nenhuma informação *a priori* é fornecida. As figuras 6.2 e 6.3 ilustram o mesmo critério sob exigências mais restritivas sobre a fidelidade da reconstrução. A figura 6.2 mostra a taxa de reconstruções com $SE_{R_{x_{bk},x}} - SE_{R_{\tilde{x},x}} < 1$ e a figura 6.3 mostra a taxa de reconstruções em que \tilde{x} supera x_{bk} como aproximação de x em termos da SE . Podemos notar que essas figuras exibem o mesmo comportamento da figura 6.1, embora sejam necessárias mais medidas para alcançar a mesma taxa.

As figuras 6.4 a 6.8 ilustram o desempenho do Algoritmo 2 sob a mesma perspectiva utilizada para o Algoritmo 1. Os resultados de ambos são colocados lado a lado para comparação. A figura 6.4 mostra uma leve vantagem para o Algoritmo 1 no geral. Embora o desempenho do Algoritmo 2 se compare favoravelmente para valores muito pequenos de p , percebemos que os menores valores possíveis de m para uma reconstrução com a confiança exigida são alcançados pelo Algoritmo 1 com p em torno de 0,3. As figuras 6.5 e 6.6 mostram clara vantagem do Algoritmo 1 sobre o Algoritmo 2, mostrando que, de fato, o Algoritmo 1 é uma alternativa mais robusta que o Algoritmo 2 na presença de ruído e de imperfeições no modelo de esparsidade. As figuras 6.7 e 6.8 comparam os desempenhos desses algoritmos sob uma outra perspectiva. A figura 6.7 mostra o desvio de \tilde{x} com relação a x em dB na média dos testes. A figura 6.8, por outro lado, mostra o desvio de \tilde{x} com relação a x_{bk} em dB na média dos testes. A primeira delas mostra uma ligeira vantagem o Algoritmo 1 ao aproximar o sinal original x na maior parte da região avaliada. A segunda, porém, figura 6.8, mostra que o Algoritmo 1 tende a recuperar muito melhor a aproximação esparsa x_{bk} . Isso, no entanto, não é particular desse algoritmo. Essa figura, na verdade, ilustra o fato, comentado anteriormente, de que a solução para o problema P_p^e é sempre tão esparsa quanto **ou mais** esparsa que a solução para o problema P_p . Por causa disso, os desvios de x quanto à melhor aproximação esparsa x_{bk} dá origem à grandes diferenças observadas na figura 6.8, apesar da similaridade na figura 6.7.

Por fim, as figuras 6.9 e 6.10 compara os algoritmos quanto à intensidade computacional. Essas figuras mostram o tempo médio e o número médio de iterações, respectivamente, consumidos pelos algoritmos 1 e 2 até a convergência ou parada por excesso de iterações. A figura 6.9 mostra vantagem para o algoritmo 1 no caso em que m é relativamente grande com p pequeno, abaixo de 0,5. Nessa faixa de p , com m menor, ou seja, em condições mais severas de falta de informação, a vantagem é do Algoritmo 2, embora a figura 6.10 pareça mostrar que a vantagem ainda é do Algoritmo 1. Isso é possivelmente explicado pelo algoritmo em particular que implementamos para a predição de $\tilde{\lambda}_q$, em especial as medidas adotadas em face de previsões ruins. Nesse caso, sempre que observado um comportamento inadequado, o algoritmo foi forçado a resolver o mesmo sub-problema com alguns valores diferentes de $\tilde{\lambda}_q$ com o contador de iterações parado e **sem** atualizar $Q_{(q)}$. Isso possivelmente explica a perda de desempenho quando m é relativamente pequeno. Para

p relativamente grande, no entanto, a figura 6.9 mostra uma perda de desempenho para **qualquer** valor de m . Isso fica mais claro ainda na figura 6.10, em que é possível observar um claro limiar em torno de $p = 0.5$. Até o momento, não encontramos uma explicação para esse limiar.

6.2 Simulação de uma Aquisição de Imagem por RM

Para ilustrar a utilização do Algoritmo 1 em um cenário concreto, simulamos uma aquisição de imagem por ressonância magnética. Em seguida, conduzimos a reconstrução da imagem utilizando o Algoritmo 1. Para isso, utilizamos como base um *phantom* numérico conhecido como *phantom* de Shepp–Logan, mostrado na figura 6.11. Como imagem teste, utilizamos na verdade as diferenças finitas desse *phantom* para gerar a imagem esparsa x_0 , na figura 6.12, com 512×512 pixels mas apenas $k = 2887$ elementos não-nulos. As posições desses elementos não-nulos formam o suporte Λ_x . Em seguida, prosseguimos de maneira similar ao procedimento da seção anterior: adicionamos uma perturbação à imagem esparsa, gerando a imagem x , figura 6.13; depois tomamos as medidas e adicionamos uma quantidade de ruído, gerando o vetor de medidas y . A perturbação e o ruído foram gerados de maneira análoga à perturbação e ao ruído nos sinais de teste da seção anterior. Utilizamos $\sigma_d = 0,005$ e $\sigma_e = 1,2$. Definimos, analogamente ao que foi feito na seção anterior, a melhor aproximação em k -esparsa como x_{bk} , com $x_{bk} = x$ em Λ_x e $x_{bk} = 0$ em Λ_x^c . Para referência, $SE R_{x_{bk},x} = 23,8$ dB conforme a equação 6.1c.

A aquisição foi simulada com uma transformada de Fourier incompleta, descartando amostras. Como a DFT 2D é separável, tomamos a DFT 1D das colunas de x para gerar uma imagem intermediária e , em seguida, tomamos a DFT 1D de apenas 100 das 512 linhas dessa imagem intermediária, gerando um vetor com 51200 medidas. Na linguagem do Capítulo 3, isso corresponde a fazer apenas 100 codificações de fase ao invés das 512 necessárias para uma reconstrução por simples IDFT 2D. No esquema de aquisição descrito naquele capítulo, isso resulta em uma aquisição mais de $5 \times$ mais rápida.

As colunas mantidas na DFT sub-amostrada foram escolhidas de forma a resultar em uma matriz de aquisição A o mais incoerente possível, mas não de maneira simplesmente aleatória. Antes de simular a aquisição, 100 das 512 da DFT foram escolhidas ao acaso e a coerência da matriz A resultante foi medida. O processo foi repetido algumas milhares de vezes e escolhemos então o conjunto de colunas que resultou na menor μ_A . Uma vez escolhido esse conjunto, ele pode ser usado sempre para qualquer outra imagem esparsa **no domínio do espaço**. Com observado na seção 4.3, a DFT sub-amostrada **não** é universal no sentido discutido lá. Em outras palavras, se apenas $h = \Phi x$ é esparsa, essa matriz A não permitirá uma reconstrução por *compressed sensing*, em geral. Isso significa que, para uma reconstrução por CS bem sucedida, com qualquer algoritmo, um novo conjunto de colunas deve ser selecionado, com vistas a minimizar $\mu_{A\Phi^{-1}}$ no lugar de μ_A .

A reconstrução foi realizada com $p = 0,5$ e $\epsilon = 512$. Os demais parâmetros do algoritmo foram mantidos constantes com os mesmo valores utilizados para os resultados da seção anterior, à exceção de σ_f , que fixado em 10^{-3} , e de λ_{min} , que foi fixado em 5. O resultado \tilde{x} pode ser observado na figura 6.14. Essa reconstrução apresenta um desvio com relação ao sinal x original,

conforme 6.1a, de 23,5 dB, apenas 0,3 dB atrás de x_{bk} nesse sentido, que só pode ser determinado com o conhecimento de todos os 512×512 pixels. Em contraste, apenas 512×100 valores foram necessários para encontrar \tilde{x} . O desvio de \tilde{x} com relação a x_{bk} , de acordo com 6.1b, foi de 30,8 dB. Isso mostra que \tilde{x} se aproxima mais de x_{bk} do que de x em um certo sentido, reforçando a observação da seção anterior de que o Algoritmo 1, bem como outros projetados para abordar o problema P_p^ϵ em geral, tende a perseguir uma solução esparsa, embora o próprio sinal que deu origem às medidas não seja exatamente esparsa, mas apenas compressível. A figura 6.15 mostra detalhes de x e de \tilde{x} lado a lado, ilustrando essa característica. Para comparação, a reconstrução foi realizada também com o Algoritmo 2, resultando em $SE_{\tilde{x},x} = 21,9$ dB e $SE_{\tilde{x},x_{bk}} = 24,4$ dB, para os mesmo dados e com configurações similares às do Algoritmo 1. Também, o Algoritmo 2 realizou a reconstrução em 45,8 segundos, contra 18,9 segundos consumidos pelo Algoritmo 1 sob as mesmas condições.

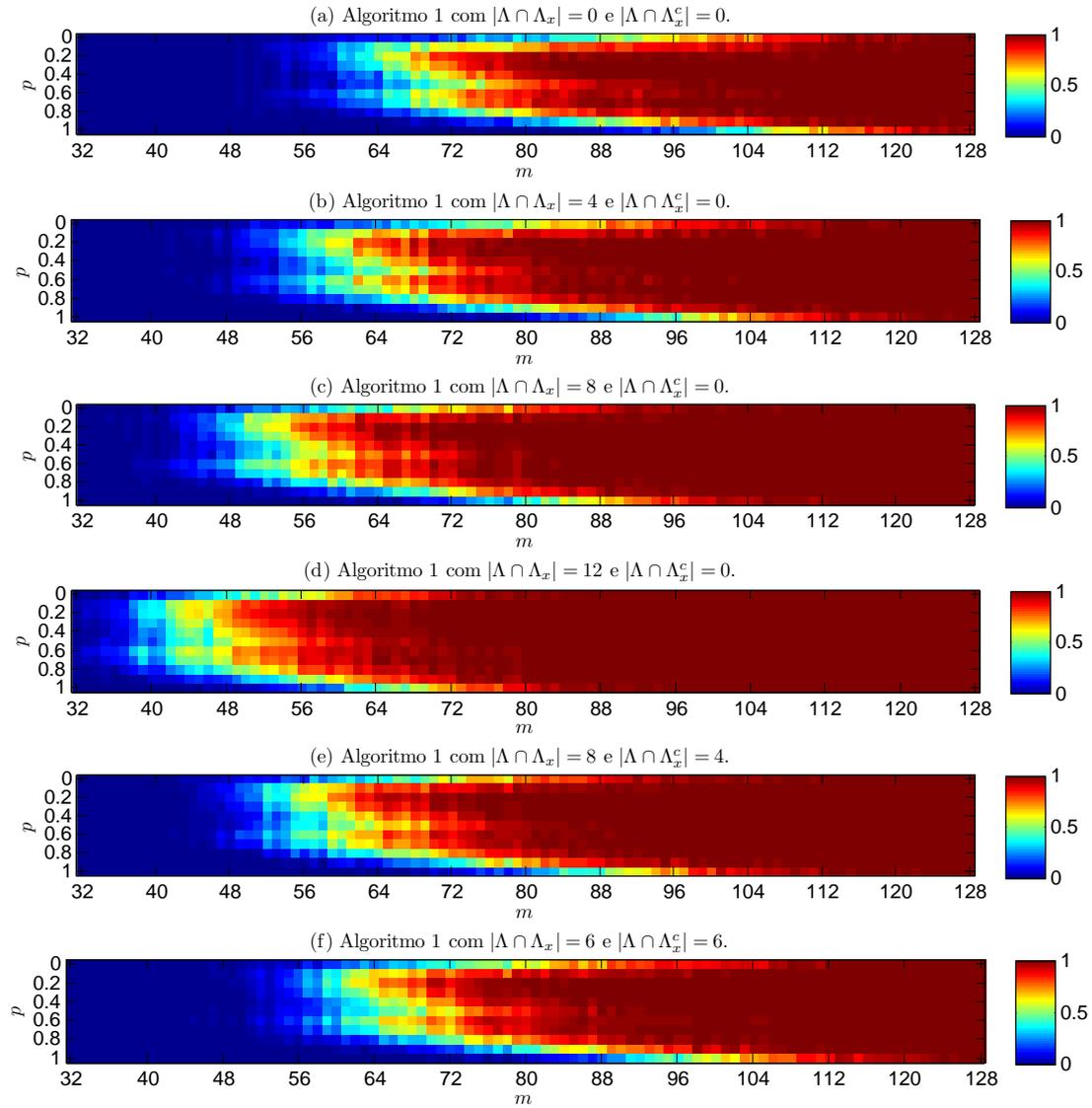


Figura 6.1: Porcentagem de reconstruções com $SER_{x_{bk},x} - SER_{\hat{x},x} < 3$ dB pelo Algoritmo 1.

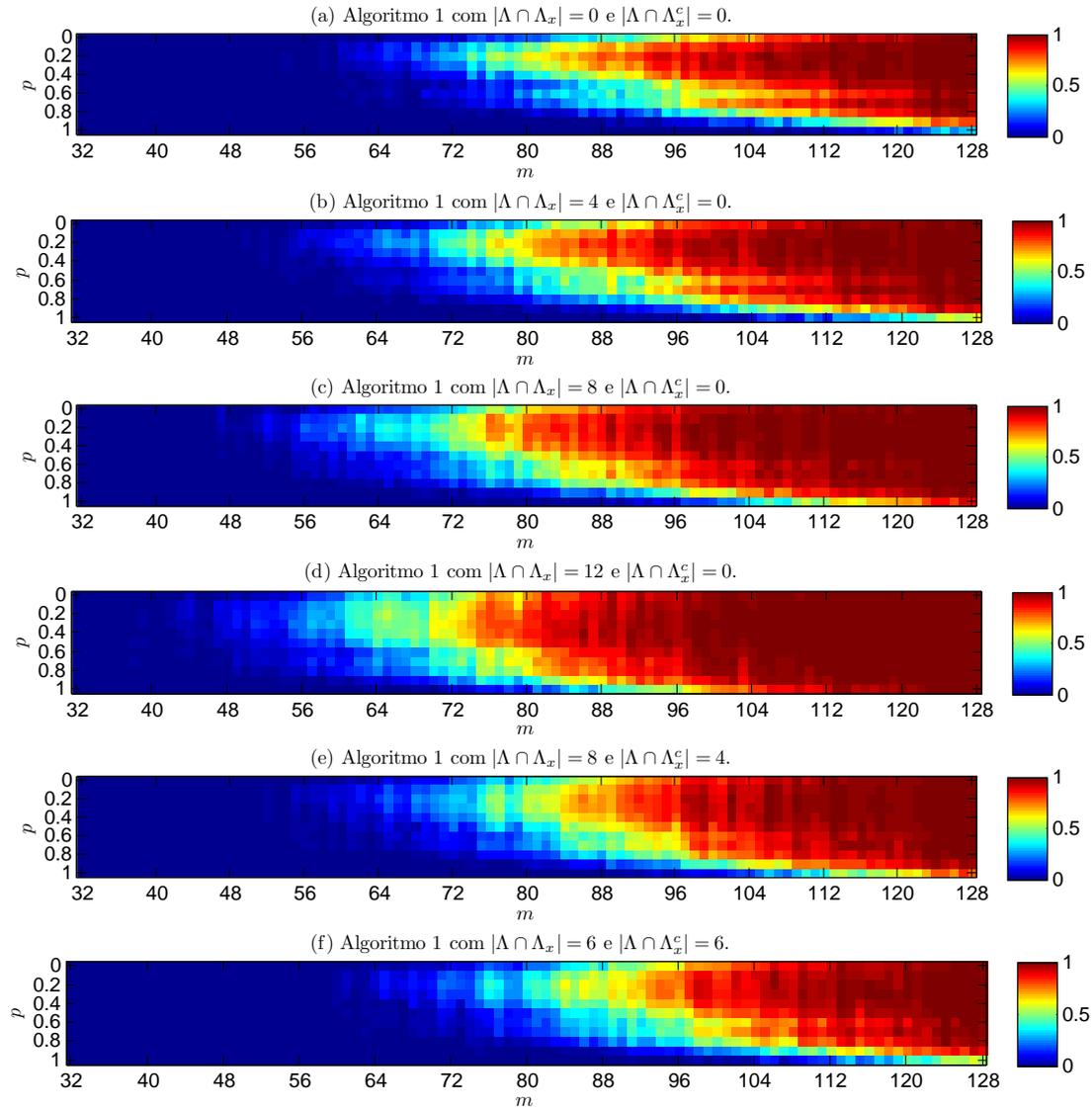


Figura 6.2: Porcentagem de reconstruções com $SER_{x_{bk},x} - SER_{\hat{x},x} < 1$ dB pelo Algoritmo 1.

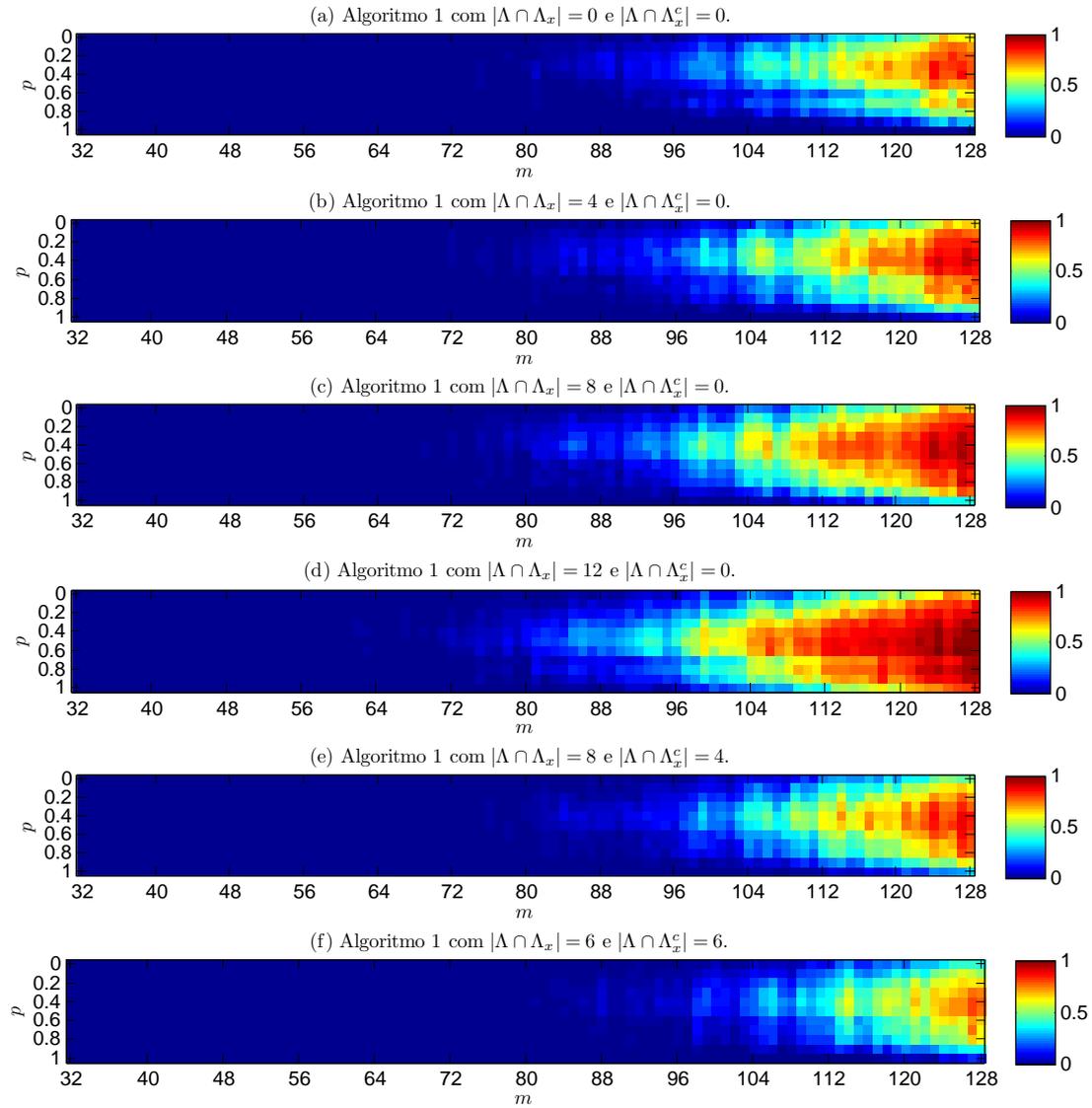


Figura 6.3: Porcentagem de reconstruções com $SER_{\bar{x}, x} > SER_{x_{bk}, x}$ pelo Algoritmo 1.

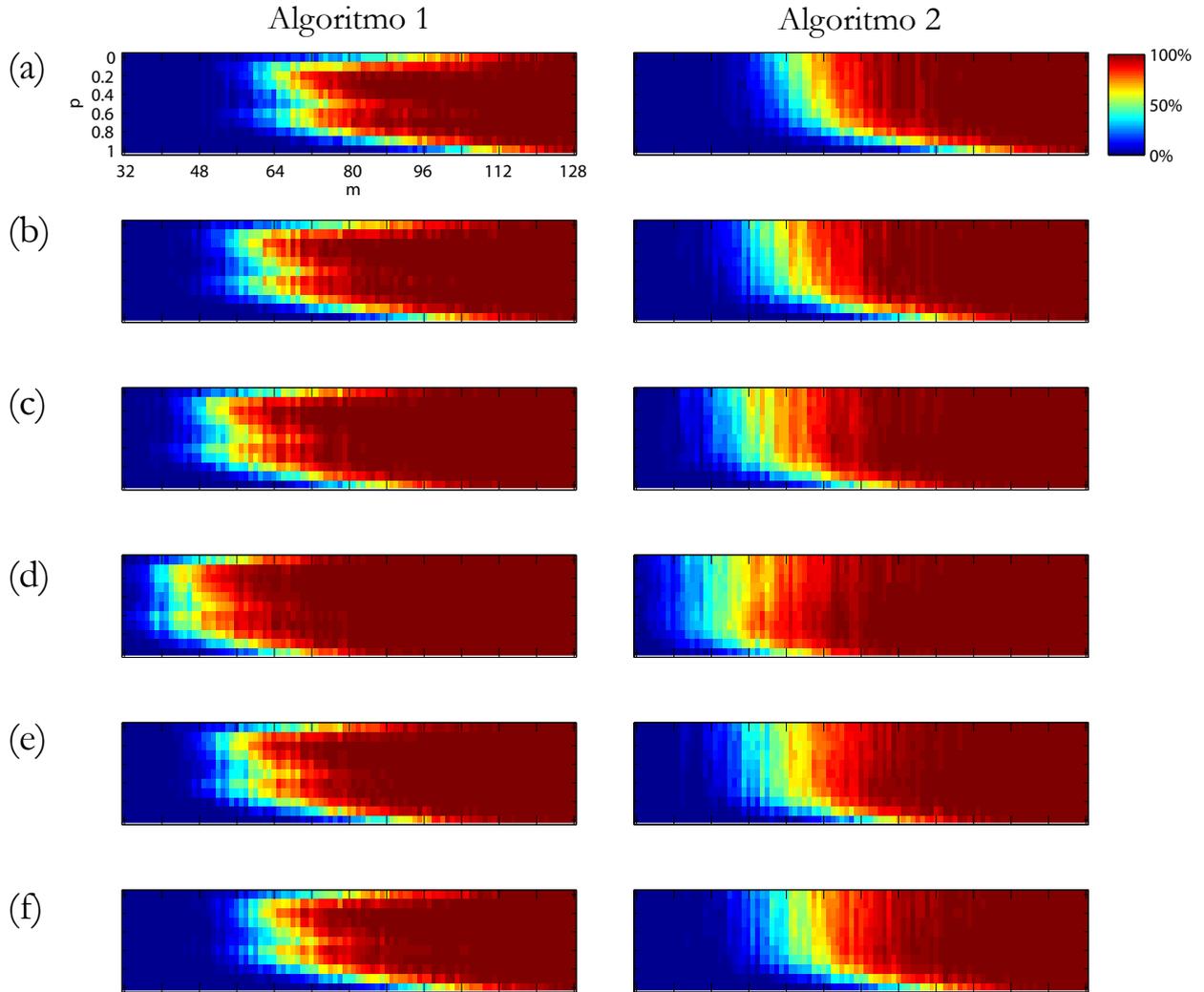


Figura 6.4: Porcentagem de reconstruções com $SE R_{x_{bk},x} - SE R_{\tilde{x},x} < 3$ dB. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

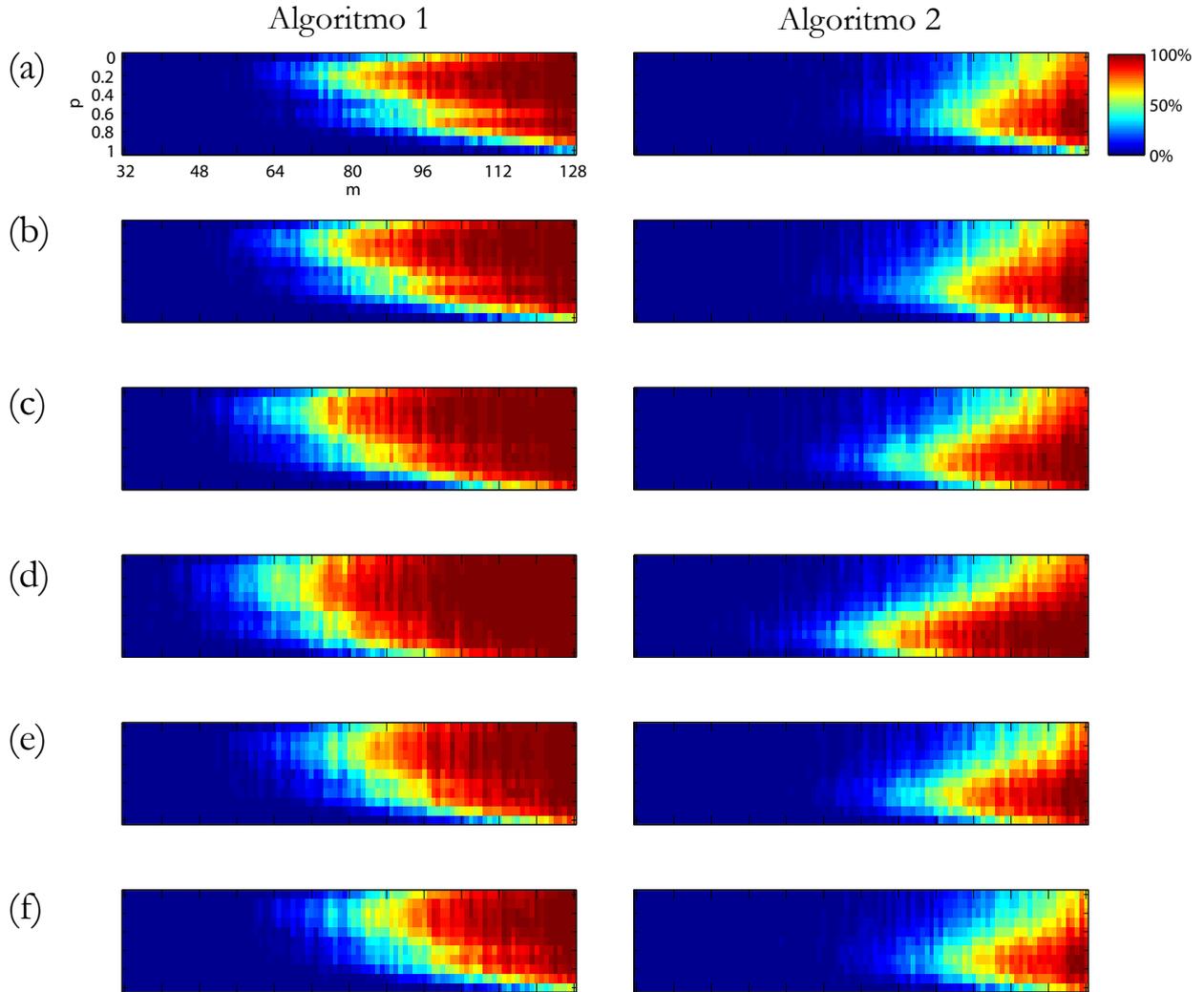


Figura 6.5: Porcentagem de reconstruções com $SER_{x_{bk},x} - SER_{\tilde{x},x} < 1$ dB pelo Algoritmo 2. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

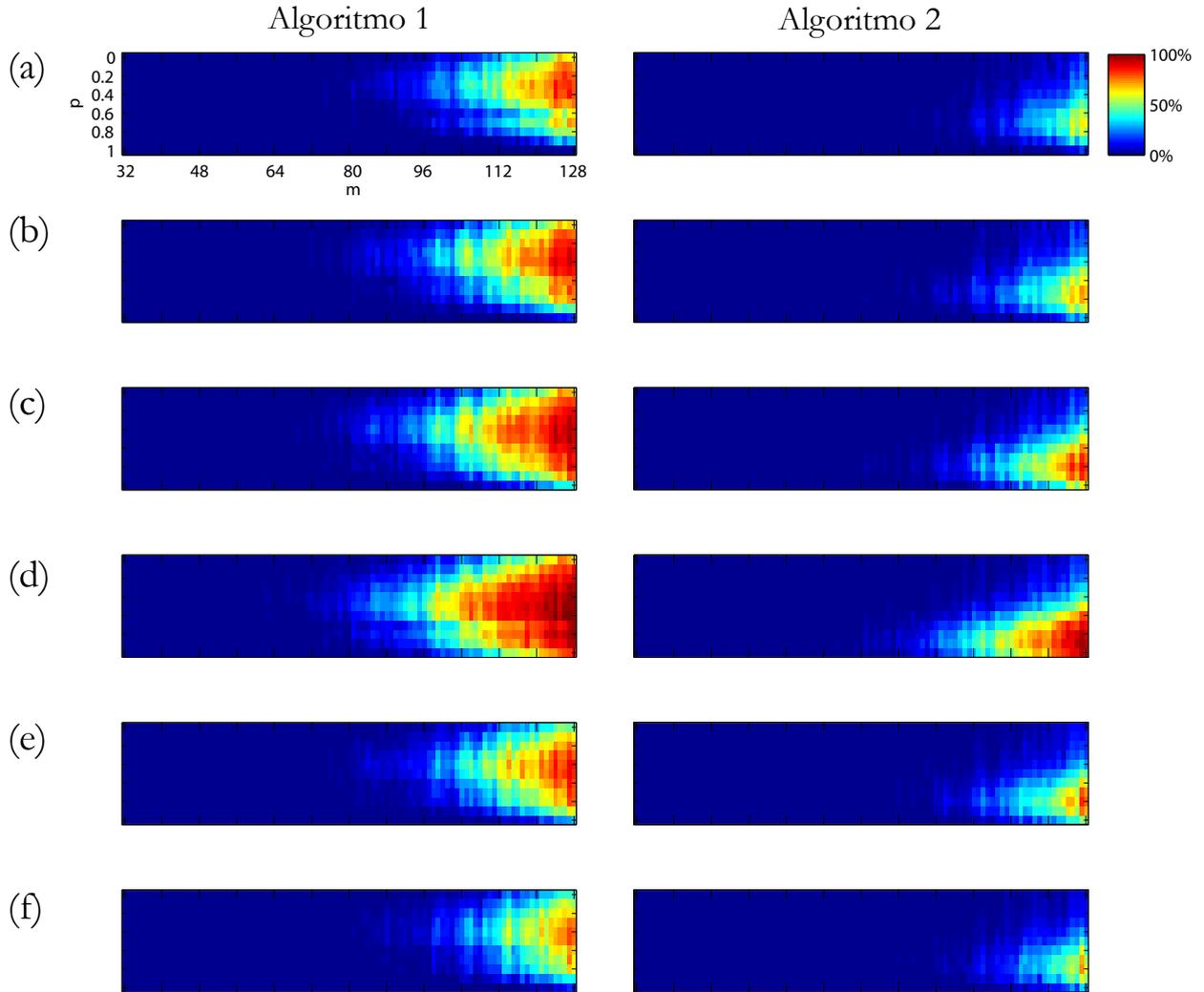


Figura 6.6: Porcentagem de reconstruções com $SER_{\bar{x},x} > SER_{x_{bk},x}$ pelo Algoritmo 2. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

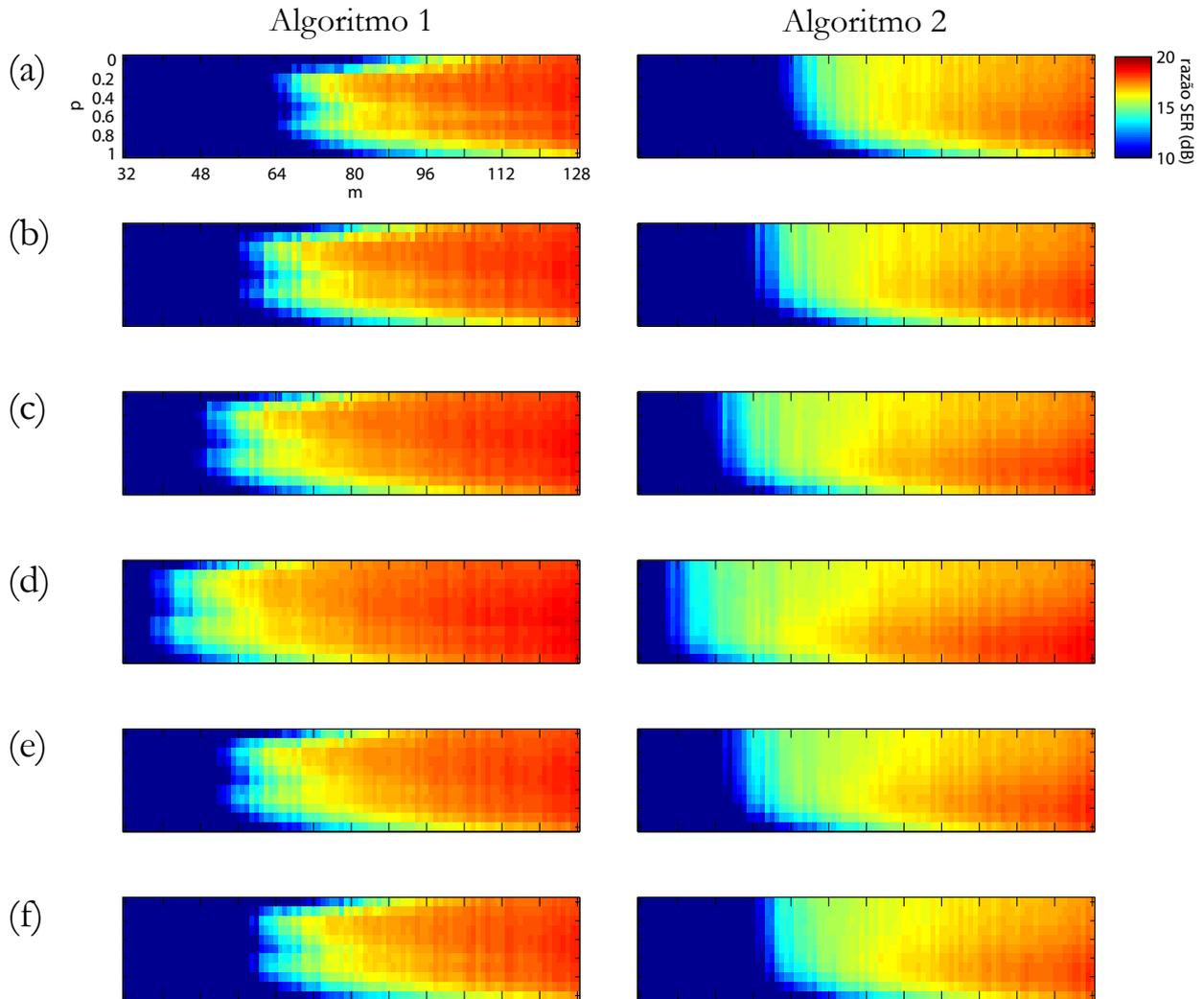


Figura 6.7: Desvio de \tilde{x} com relação a x , em dB, na média dos testes. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

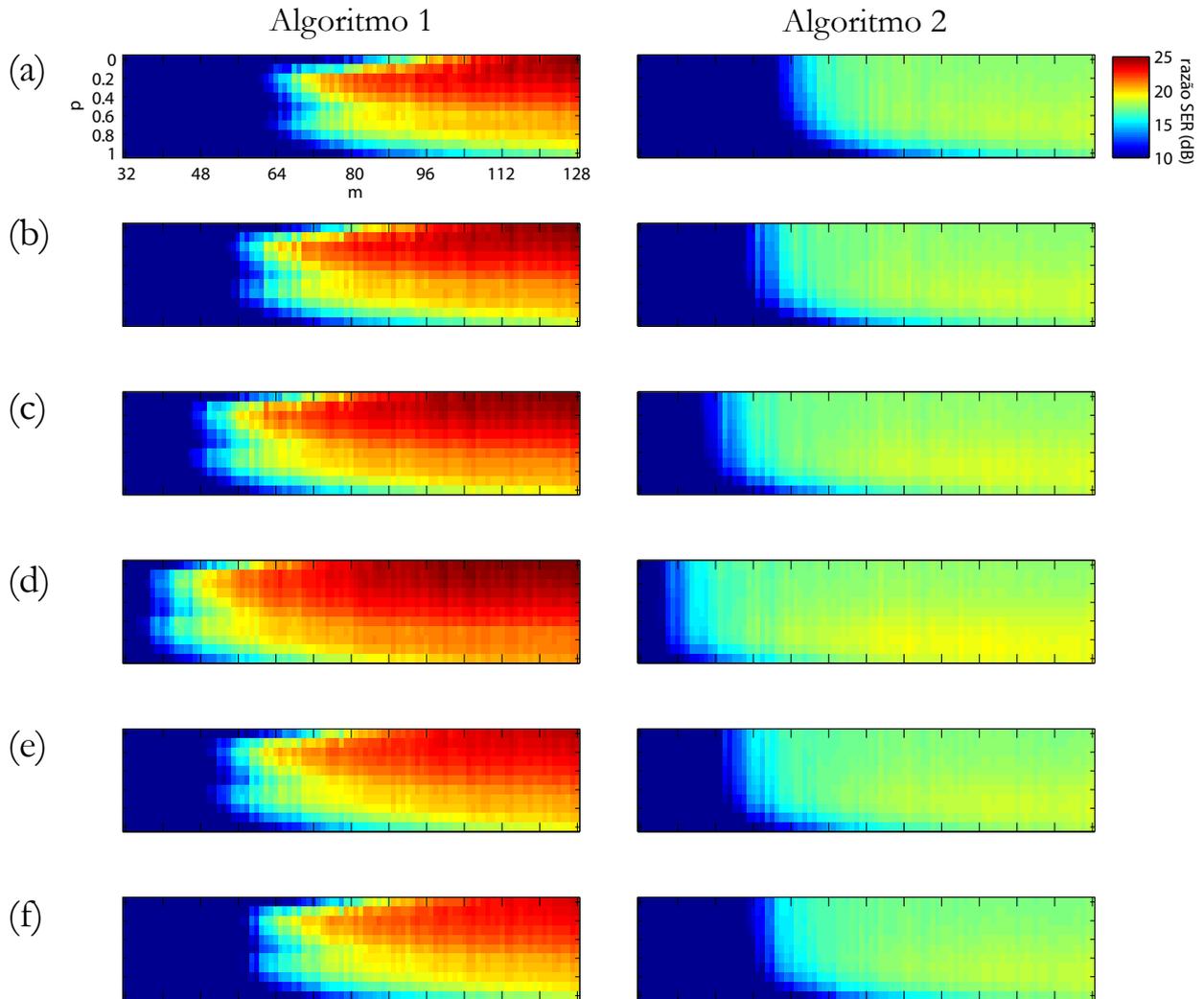


Figura 6.8: Desvio de \tilde{x} com relação a x_{bk} , em dB, na média dos testes. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

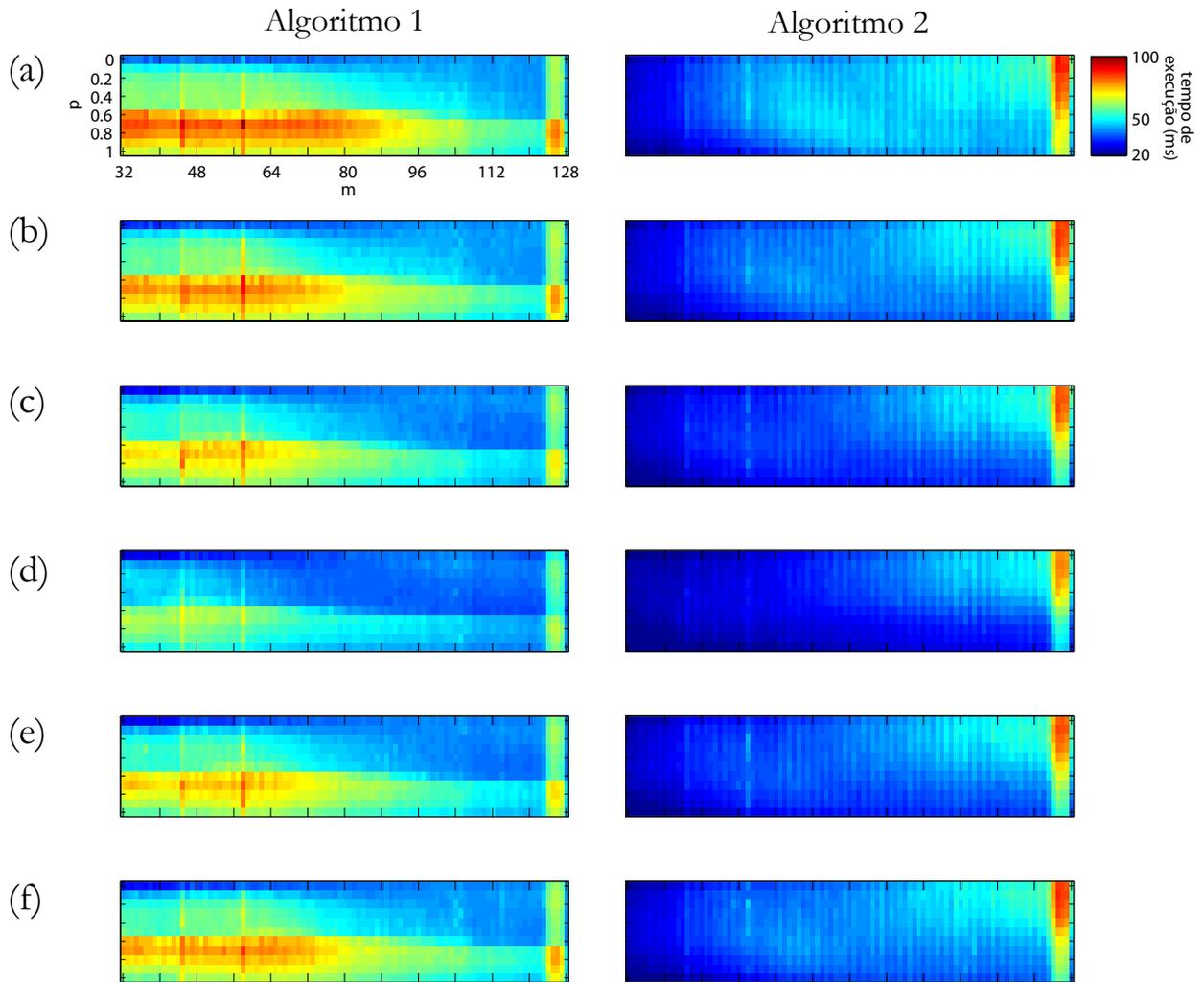


Figura 6.9: Tempo de execução do algoritmo, em ms, na média dos testes. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.

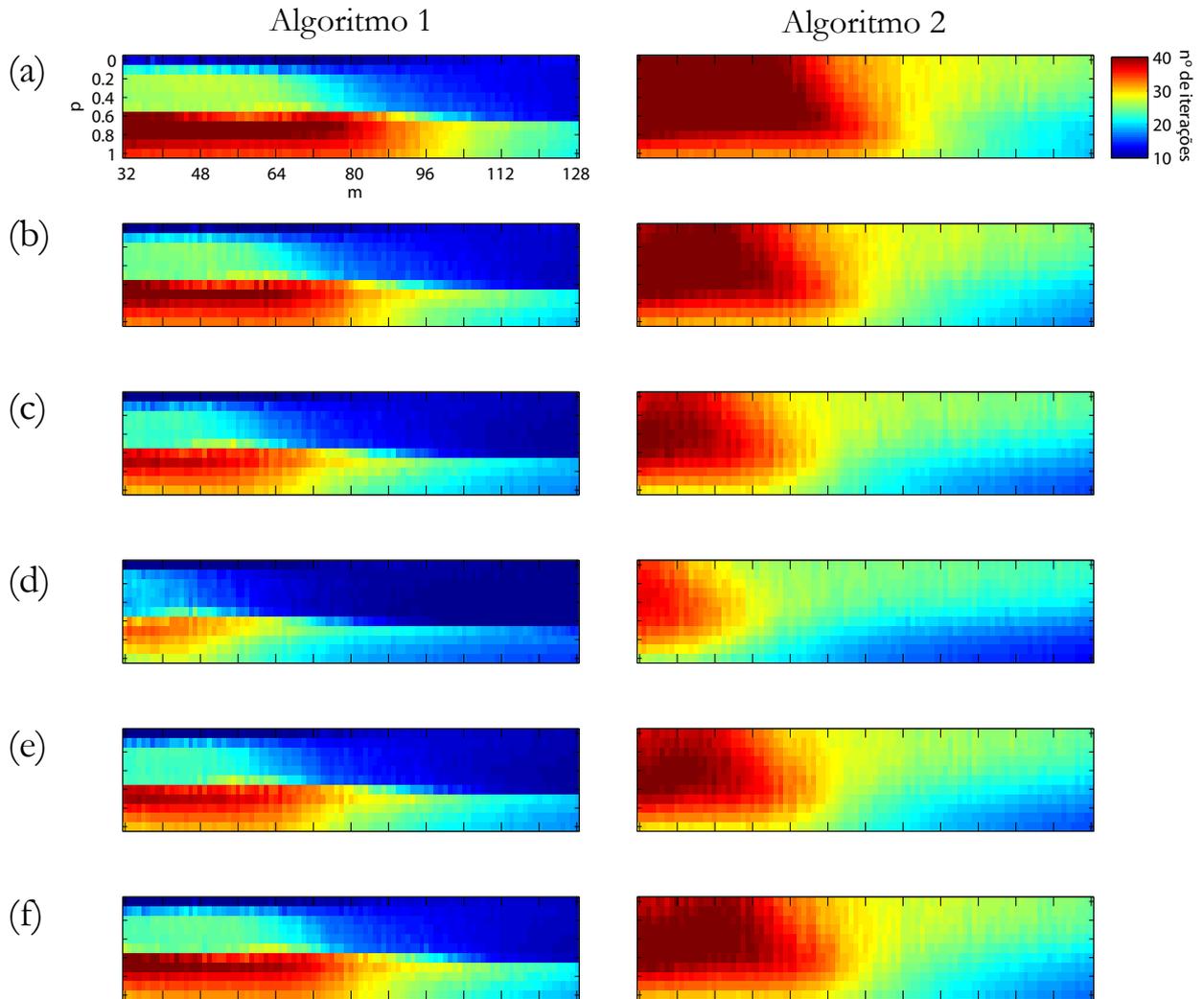


Figura 6.10: Número de iterações executadas pelo algoritmo, na média dos testes. A coluna da esquerda mostra os resultados do Algoritmo 1 e a coluna da direita mostra os resultados do Algoritmo 2. Com $V = |\Lambda \cap \Lambda_x|$ e $F = |\Lambda \cap \Lambda_x^c|$, temos: (a) $V = 0$ e $F = 0$; (b) $V = 4$ e $F = 0$; (c) $V = 8$ e $F = 0$; (d) $V = 12$ e $F = 0$; (e) $V = 8$ e $F = 4$; (f) $V = 6$ e $F = 6$.



Figura 6.11: *Phantom* de Shepp–Logan.

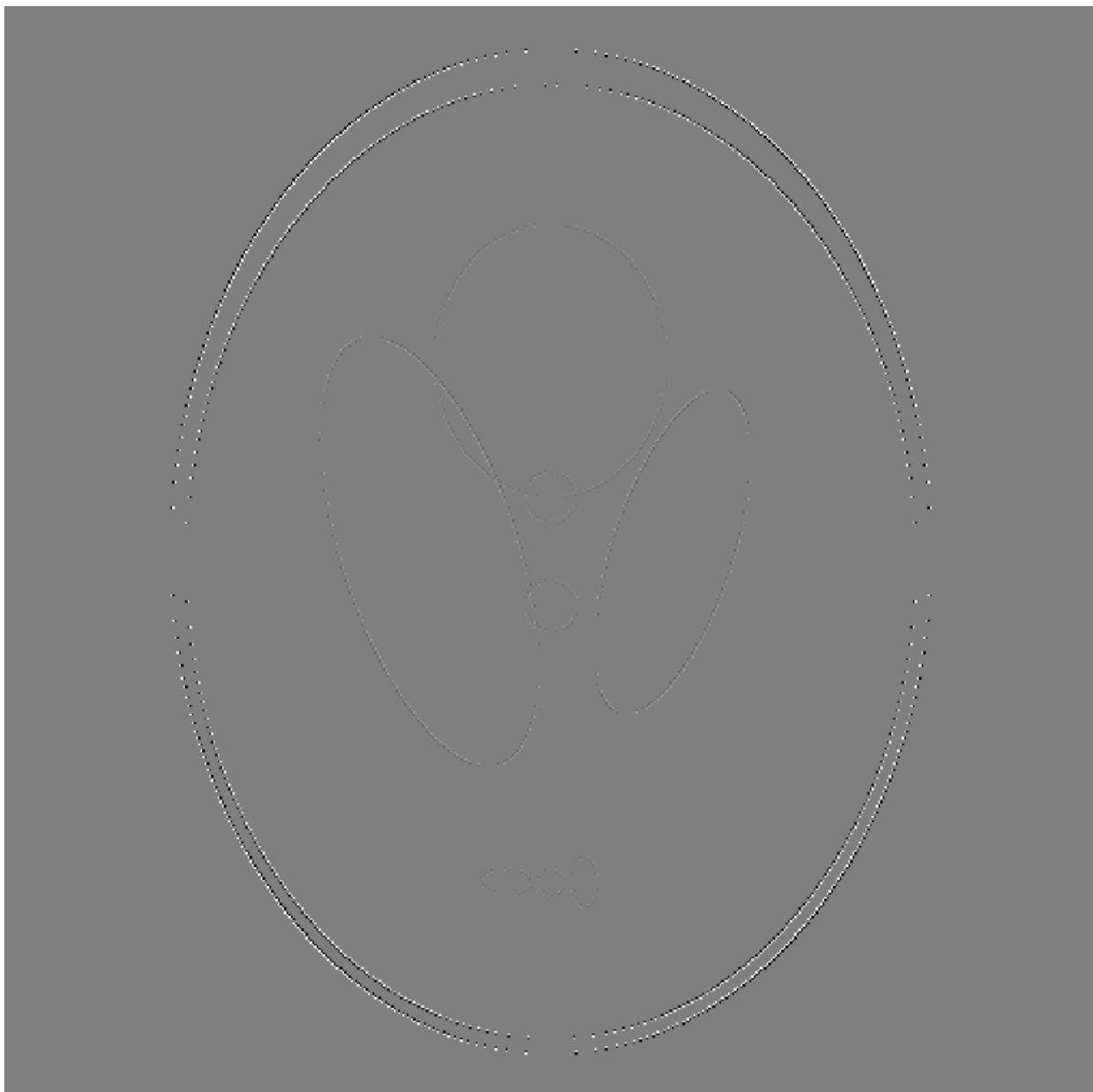


Figura 6.12: Sinal de referência x_0 , resultado das diferenças finitas horizontais sobre o *phantom* de Shepp–Logan, seguido das diferenças finitas verticais.

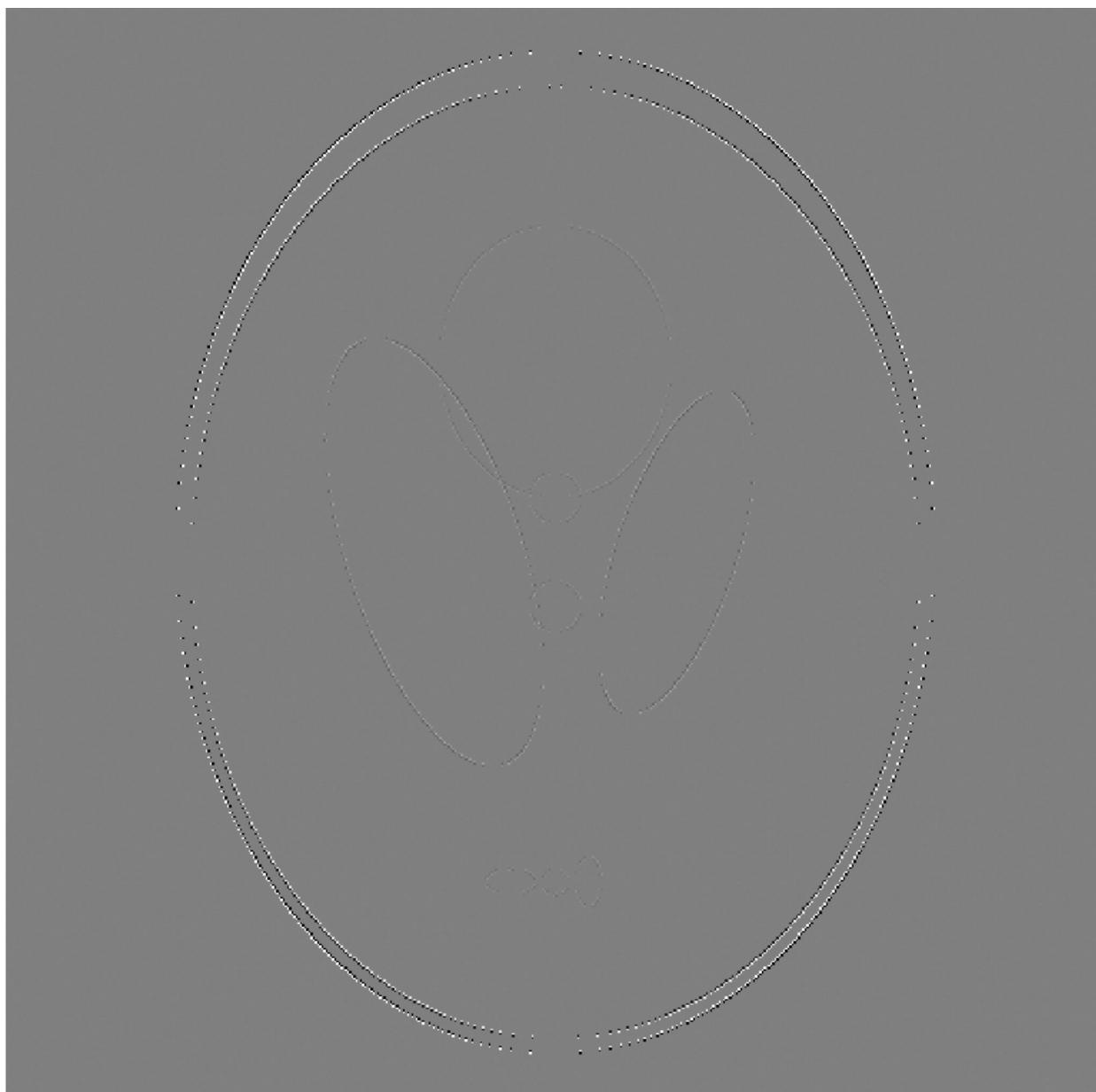


Figura 6.13: Sinal de teste para simulação aquisição e reconstrução de imagem de RM.

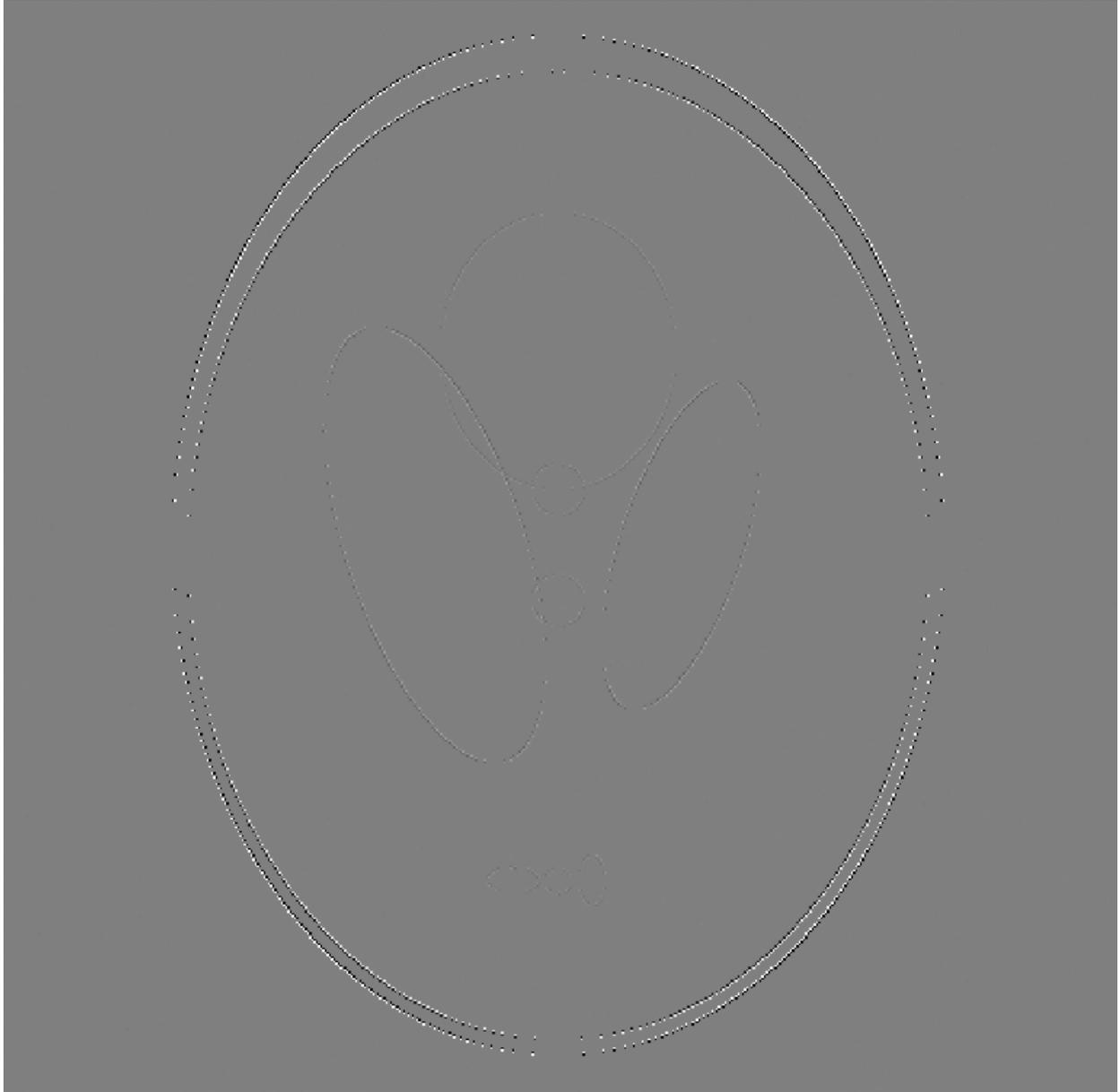


Figura 6.14: Aproximação \tilde{x} para o sinal de teste x , obtida pelo Algoritmo 1 a partir dados incompletos de x no domínio da frequência.

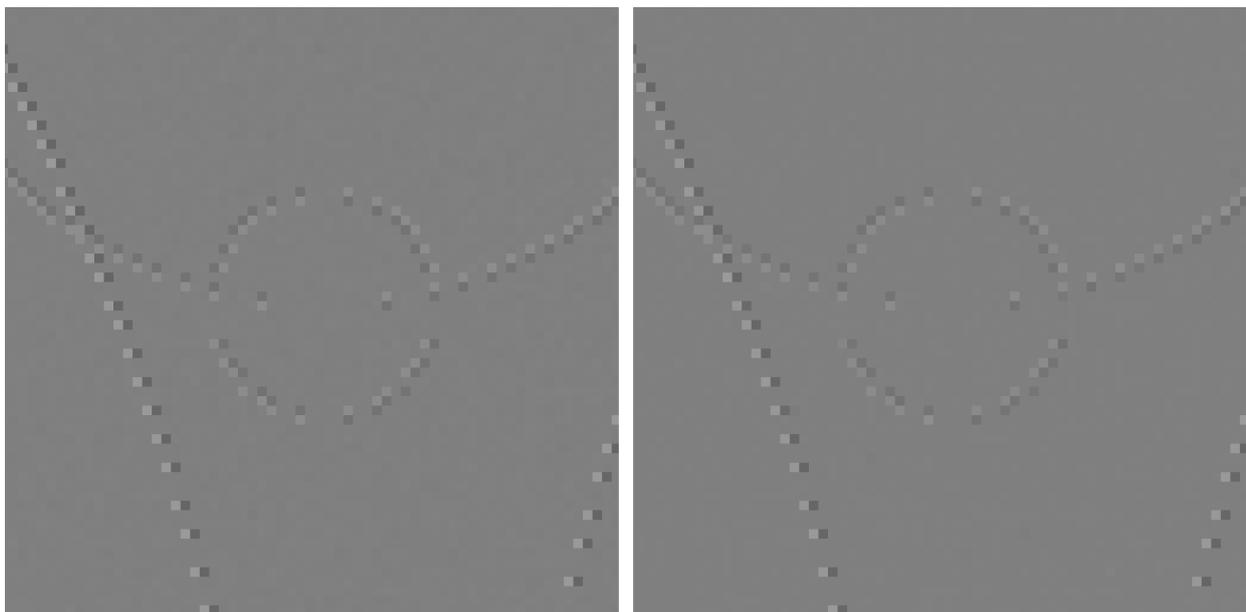


Figura 6.15: *Zoom* sobre o sinal de teste x , à esquerda, e sobre a reconstrução \tilde{x} , obtida com o Algoritmo 1, à direita. Observe como o Algoritmo 1 tende a remover oscilações pequenas, esparsificando a imagem.

Capítulo 7

Conclusões

Este trabalho apresenta um algoritmo para minimização ℓ^p não convexa com informação *a priori* sobre a localização parcial do suporte da solução, sob uma restrição de desigualdade na norma ℓ^2 . O algoritmo proposto, baseado na ideia de mínimos quadrados iterativamente reponderados (IRLS), permite a determinação de soluções esparsas para sistemas lineares subdeterminados, de maneira robusta contra imperfeições no modelamento do sinal e contra medidas corrompidas por ruído. Demonstramos a aplicação do algoritmo em *compressed sensing*, com vistas a diminuir tempos de aquisição em imageamento por ressonância magnética.

Os resultados experimentais mostram que, de fato, o algoritmo é eficiente em explorar informações *a priori* na forma de localização de parte do suporte da solução, no sentido que, quanto mais localizações são fornecidas, menos medidas são necessárias para recuperar uma estimativa confiável do sinal e menos tempo é consumido pelo algoritmo na reconstrução. Mostram também a robustez desejada na reconstrução, contra imperfeições no modelamento e contra medidas ruidosas. Mais ainda, a reconstrução é robusta também contra imperfeições na própria informação *a priori*, no sentido de que, mesmo que parte da localização informada esteja errada, ou seja, mesmo que parte dos índices informados como fazendo parte do suporte da solução não faça parte, de fato, desse suporte, ainda é possível se obter uma estimativa confiável, até mesmo com vantagem sobre o caso de nenhuma informação fornecida, desde que a maior parte da informação esteja correta.

Os experimentos mostraram que o algoritmo é sensível ao método de predição utilizado para se atualizar $\tilde{\lambda}_q$ a cada sub-iteração. É possível que os resultados mostrados aqui possam ser bastante aprimorados com um método de predição mais refinado. Por fim, o fato de que o algoritmo é tolerante a algum nível de informação duvidosa abre a possibilidade de se tentar extrapolar automaticamente o suporte conhecido a cada sub-iteração. Isso permitiria utilizar as linhas gerais do algoritmo para explorar informação *a priori* sob outras formas mais genéricas que as consideradas neste trabalho, como, por exemplo, informação sobre a geometria do suporte.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SUETENS, P. *Fundamentals of Medical Imaging, 2 ed.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [2] PRINCE, J. L.; LINKS, J. M. *Medical Imaging Signal and Systems.* [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [3] DOUGHERTY, G. *Digital Image Processing for Medical Applications.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [4] BALLENTINE, L. E. *Quantum Mechanics — A Modern Development, 3 ed.* [S.l.]: World Scientific, 1998.
- [5] SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics, 2 ed.* [S.l.]: Springer, 1994.
- [6] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-Time Signal Processing, 4 ed.* [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- [7] MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing — The Sparse Way, 3 ed.* [S.l.]: Academic Press, 2009.
- [8] GONZALES, R. C.; WOODS, R. C. *Processamento Digital de Imagens, 3 ed.* [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [9] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Wiley-Interscience.* [S.l.]: Springer, 2006.
- [10] SALOMON, D. *Data Compression — The Complete Reference, 4 ed.* [S.l.]: Springer, 2007.
- [11] ELDAR, Y. C.; KUTYNIOK, G. *Compressed Sensing — Theory and Applications.* [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- [12] ELAD, M. *Sparse and Redundant Representations — From Theory to Applications in Signal and Image Processing.* [S.l.]: Springer, 2010.
- [13] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization, 2 ed.* [S.l.]: Springer, 2000.
- [14] LUSTIG, M.; DONOHO, D.; PAULY, J. M. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magn. Reson. Med.*, v. 58, n. 6, p. 1182–1195, 2007.
- [15] DONOHO, D. L. Compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, 2006.

- [16] CHARTRAND, R.; YIN, W. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 3869–3872.
- [17] MIOSSO, C. J. et al. Compressive sensing reconstruction with prior information by iteratively reweighted least-squares. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 57, n. 6, p. 1219–1224, 2009.
- [18] RUSZCZYNSKI, A. *Nonlinear Optimization*. [S.l.]: Princeton University Press, 2006.
- [19] LATHI, B. P. *Modern Digital and Analog Communications, 3 ed.* [S.l.]: Oxford University Press, 2010.

ANEXOS

I. FUNÇÃO DESENVOLVIDA PARA MATLAB

```
function [x, J, time_to_complete] = min_p_norm(A, y, Phim,...
    tau, epsilon, P, epstol, initial_sig, final_sig, factor_sig,...
    j_max, tol, lambdaini, lambdatol, lambdamin, lambdamax, CGtol,...
    CGmaxit, x_ini, monitor)

% |--- Instructions ---|-----{{{
% Atenção:
%
% Os experimentos sugerem que é muito importante ajustar empiricamente
% ao problema os seguintes parâmetros: final_sig, lambdamin e lambdamax.
%-}}}]

% |=== Main function ===|====={{{
global A_REG
global A_SYS
global lambda
global maxiter

tic;
% |--- Analysis of the inputs and config. ---|---{{{
if nargin < 20 || isempty(monitor)
    monitor = 0;
end;

if nargin < 19 || isempty(x_ini)
    x_ini = [];
end;

if nargin < 18 || isempty(CGmaxit)
    CGmaxit = 1e5;
end;

if nargin < 17 || isempty(CGtol)
    CGtol = 1e-4;
end;
```

```
if nargin < 16 || isempty(lambdamax)
    lambdamax = 1e6;
end;

if nargin < 15 || isempty(lambdamin)
    lambdamin = 1;
end;

if nargin < 14 || isempty(lambdatol)
    lambdatol = 0.5;
end;

if nargin < 13 || isempty(lambdaini)
    lambdaini = 1e2;
end;

if nargin < 12 || isempty(tol)
    tol = 1e-3;
end;

if nargin < 11 || isempty(j_max)
    j_max = 50;
end;

if nargin < 10 || isempty(factor_sig)
    factor_sig = 1e-1;
end;

if nargin < 9 || isempty(final_sig)
    final_sig = 1e-8;
end;

if nargin < 8 || isempty(initial_sig)
    initial_sig = 1;
end;

if nargin < 7 || isempty(epstol)
    epstol = 0.1;
end;

if nargin < 6 || isempty(P)
```

```

P = 1;
end;

if nargin < 5 || isempty(epsilon)
epsilon = 0.05;
end;

if nargin < 4 || isempty(tau)
tau = 0;
end;

if nargin < 3 || isempty(Phim)
    Phim = [];
end;

if numel(A) == 1
    N = A;
    A = [];
else
    N = size(A,2);
end;

if length(j_max) >= 2
    jj_max = j_max(2);
    j_max = j_max(1);
else
    jj_max = 5;
end;

% -}}}}

% |--- Prepare for iterations ---|-----{{{

starting_time = toc;

p = P;

if ~isempty(A)
    A_SYS = A' * A;
else
    A_SYS = [];
end;

```

```

maxiter = CGmaxit;
A_REG = A;
Y = Ahermit_(y);

J = 0;
sig = initial_sig;
lambda = lambdaini;

q = ones(N,1);
Phim_ = unique(Phim);
q(Phim_) = q(Phim_)*tau;
if monitor
    disp('Computing initial guess...');
end;
eps1 = epsilon - epsilon*epstol;
eps2 = epsilon + epsilon*epstol;
if isempty(x_ini)
    flag = 0;
    flaga = 0;
    flagb = 0;
    flagc = 0;
    j = 0;
    while (~flag)&&(j < j_max)
        if flagc == 1
            flag = 1;
        end;
        [xp, flagd] = solve_linear_system(q, Y, [], CGtol);
        E = norm(Areg_(xp) - y);
        if E < eps1
            flagb = 1;
            if flaga == 0
                La = lambda;
                lambda = 2*lambda;
            else
                La = lambda;
                lambda = (La+Lb)/2;
            end;
        elseif E > eps2
            flaga = 1;
            if flagb == 0
                Lb = lambda;
            end;
        end;
        j = j + 1;
    end;
end;

```

```

        lambda = lambda/2;
    else
        Lb = lambda;
        lambda = (La+Lb)/2;
    end;
else
    flag = 2;
end;
j = j + 1;
if flaga&&flagb
    if Lb - La <= lambdatol
        flagc = flagd;
    end;
end;
end;
else
xp = x_ini;
    E = 0;
    flag = 0;
    j = 0;
end;

if monitor > 1
    figure; imshow(reshape(xp,sqrt(N),sqrt(N)), [])
    disp(['Initial guess computed (stage ' num2str(0) ', j = ' ...
num2str(j) ', flag = ' num2str(flag) ', lambda = ' num2str(lambda) ...
', residual = ' num2str(E) ').']);
elseif monitor
    disp(['Initial guess computed (stage ' num2str(0) ', j = ' ...
num2str(j) ', flag = ' num2str(flag) ', lambda = ' num2str(lambda) ...
', residual = ' num2str(E) ').']);
end;

%-}}

fail = 0;
FAIL = 0;
JJ = 0;
jj = 0;

% |--- Iterations ---|-----{{{

```

```

stage = 1;
while (sig >= final_sig)

    if monitor
        disp(['Starting stage ' num2str(stage) ' (mu = ' num2str(sig) ...
            ', p = ' num2str(p) ').']);
    end;

    flaga = 1;
    flagb = 1;
    flagA = 0;
    flagB = 0;
    flagI = 1;
    flagd = 1;
    stop = 0;
    Ep = 0;
j = 0;
La = lambda/2;
Lb = 2*lambda;
Lp = lambda;

while ~stop

    x_reg = abs(xp);
    x_reg = x_reg + sig;
q = x_reg.^(p-2);
q(Phim_) = q(Phim_)*tau;

    [x, flagc] = solve_linear_system(q, Y, xp, CGtol);

    E = norm(Areg_(x) - y);
    if E < eps1
        flag = 0;
        flagb = 1;
        flagB = 1;
        if (flaga == 0)&&(Ep > E)|| (flagA == 0)
            if flagA == 1
                flagd = 1;
            end;
            La = lambda;
            lambda = 2*lambda*abs(epsilon-E)/abs(epsilon-eps1);
            Lb = 5*lambda;
        end;
    end;
end;

```

```

        Ea = E;
    else
        flaga = 0;
        La = lambda;
        Ea = E;
        lambda = (epsilon*(Lb-La) + Eb*La-Ea*Lb)/(Eb - Ea);
    end;
elseif E > eps2
    flag = 0;
    flaga = 1;
    flagA = 1;
    if (flagb == 0)&&(Ep < E)|| (flagB == 0)
        if flagB == 1
            flagd = 1;
        end;
        Lb = lambda;
        lambda = (lambda/2)*abs(epsilon-eps2)/abs(epsilon-E);
        La = lambda/5;
        Eb = E;
    else
        flagb = 0;
        Lb = lambda;
        Eb = E;
        lambda = (epsilon*(Lb-La) + Eb*La-Ea*Lb)/(Eb - Ea);
    end;
else
    if flagd == 0
        flag = flagc;
    else
        flagd = 0;
    end
end;

if lambda < lambdamin
    La = lambdamin;
    lambda = lambdamin;
    if Lb < 2*lambda
        Lb = 2*lambdamin;
    end;
elseif lambda > lambdamax
    Lb = lambdamax;

```

```

    lambda = lambdamax;
    if La > lambda/2
        La = lambdamax/2;
    end;
end;

stop = (j == j_max)||((j > 0)&&(Lp == lambda)&&(norm(x - xp)/(1+...
    norm(xp)) < tol*(sig^(1/2)) ));

if (lambda < La)||((lambda > Lb)||((Lb < La)
    if monitor
        disp([' La = ' num2str(La)...
            ' lambda = ' num2str(lambda) ' Lb = ' num2str(Lb)])
        disp('!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!')
    end;
    lambda = lambdaini;
    La = lambda/2;
    Lb = 2*lambda;
    flagd = 1;
end;

if (flagd == 0)||((jj_max == 0)
    jj = 0;
    j = j + 1;
    J = J + 1;
    flagI = 0;
    xp = x;
    if Lp == lambda
        stop = stop + (Ep == E);
    end;
elseif jj < jj_max
    jj = jj + 1;
    JJ = JJ + 1;
elseif flagI == 1;
    flagI = 0;
    flagd = 0;
    jj = 0;
else
    jj = 0;
    j = j + 1;
    J = J + 1;
    FAIL = FAIL + 1;

```

```

        flaga = 1;
        flagb = 1;
        flagd = 0;
        xp = x;
    end;

    if monitor
        disp(['Inner iteration ' num2str(j) ...
            ' concluded. (stage ' num2str(stage) ...
            ', flag = ' num2str(flag) ', lambda = ' ...
            num2str(lambda) ', residual = ' num2str(E) ') ...
            '(ALSO JJ = ' num2str(JJ) ', FAIL = ' ...
            num2str(FAIL) ', fail = ' num2str(fail) ')']);
    end;

    Lp = lambda;
    Ep = E;

end;

sig = sig * factor_sig;

if monitor > 1
    disp(['Stage ' num2str(stage) ' completed.'])
    if FAIL
        disp('FAIL!!!')
    end;
    disp('=====')
    figure; imshow(reshape(xp,sqrt(N),sqrt(N)),[])
elseif monitor
    disp(['Stage ' num2str(stage) ' completed.'])
    if FAIL
        disp('FAIL!!!')
    end;
    disp('=====')
end;

fail = fail + FAIL;
FAIL = 0;

end;
time_to_complete = toc - starting_time;

```

```

%-}}
%=====}}

% |--- solve_linear_system ---|-----{{{
function [y, flag] = solve_linear_system(q, b, xp, CGtol)
global A_SYS
global maxiter
global lambda

if(size(A_SYS,1) == 0)
[y, flag] = conjgrad(q, b, lambda, xp, CGtol, maxiter);
else
Sys = lambda*diag(q) + A_SYS;
y = Sys \ b; flag = 1;
end
%-}}

% |--- conjgrad ---|-----{{{
function [x, ok, r] = conjgrad(q, b, lambda, x0, CGtol, maxit)

if isempty(x0)
    x0 = zeros(size(q));
end;

k = 0;
x = x0;

r = Areg(x);
r = Ahermitian(r) + lambda*q.*x;
r = r - b;

p = -r;
ok = 1;

normb = norm(b);
while (norm(r)/normb > CGtol)&&(k < maxit)

    R = r'*r;

    Ap = Areg(p);
    Ap = Ahermitian(Ap) + lambda*q.*p;

```

```

    a = R/(p'*Ap);
    x = x + a*p;
    r = r + a*Ap;
    B = r'*r/R;
    p = -r + B*p;
    k = k + 1;

end;

if k == maxit
    ok = 2;
end;
%-}}

% |--- Ahermit_ ---|-----{{{
function z = Ahermit_(y)
global A_REG

if(size(A_REG,1) == 0)
z = Ahermitian(y);
else
z = A_REG' * y;
end
%-}}

% |--- Areg_ ---|-----{{{
function z = Areg_(y)
global A_REG

if(size(A_REG,1) == 0)
z = Areg(y);
else
z = A_REG * y;
end
%-}}

```