



Universidade de Brasília  
FACE - Faculdade de Administração Economia e Contabilidade  
Departamento de Administração

Modelando a Estrutura de Dependência do Mercosul:  
Uma abordagem por D-Vine Cópulas.

Marina Ferreira Uchoa

**Brasília**  
**2015**



Marina Ferreira Uchoa

Modelando a Estrutura de Dependência do Mercosul:  
Uma abordagem por D-Vine Cópulas.

Monografia apresentada ao Departamento  
de Administração da Universidade de Bra-  
sília como requisito parcial para a obtenção  
do título de Bacharel em Administração.

Orientador: Prof. Msc. Yuri Sampaio Ma-  
luf

**Brasília**  
**2015**

UCHOA, Marina Ferreira

Modelando a Estrutura de Dependência do Mercosul:  
Uma abordagem por D-Vine Cópulas.

106 páginas

Monografia - Faculdade de Economia, Administração e  
Contabilidade da Universidade de Brasília. Departamento  
de Administração.

1. D-Vine Cópulas
2. Dependência Caudal
3. Mercados Emergentes

I. Universidade de Brasília. Faculdade de Economia, Admi-  
nistração e Contabilidade. Departamento de Administração.

## Comissão Julgadora:

---

Prof. Dr. Pedro Henrique Melo Albuquerque

---

Prof. Dr. Herbert Kimura

---

Prof. Prof. Msc. Yuri Sampaio Maluf  
Orientador



## Agradecimentos

Agradeço à minha família, por ter provido um lar em que o estudo sempre foi primordial e por ter me apoiado em todas as minhas escolhas acadêmicas. Agradeço ao meu noivo e companheiro por ter dividido todas as angústias e pequenas vitórias envolvidas na realização deste trabalho. Ao meu orientador, agradeço a confiança e paciência: esse trabalho jamais teria sido possível sem o seu auxílio. Por fim, agradeço a todos os Professores que me ajudaram a desenvolver minhas habilidades - levarei seus ensinamentos para sempre comigo e prometo empregar meus conhecimentos sempre para o bem.





## Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar a interdependência entre os mercados financeiros de quatro países membros do Mercosul (Brasil, Argentina, Chile e Peru) e os Estados Unidos. Para tanto, foi modelada a estrutura de dependência entre os países com uma D-Vine cópula de 5 dimensões. Essa metodologia permite uma análise conjunta dos cinco países e, portanto, fornece um panorama mais abrangente que o estudo por cópulas bivariadas. Os dados analisados consistem dos log-retornos diários dos índices filtrados pelo modelo AR(1)-GARCH(1,1) para o período entre 01/12/2003 e 22/09/2015. Os resultados apontam a forte presença de dependência caudal. A significância dos parâmetros estimados das marginais e das cópulas foi calculada por *bootstrap* em blocos.

**Palavras-chave:** interdependência; D-vine cópula; Mercosul; países emergentes.



# Lista de Figuras

3.1	Curvas de Nível da Cópula Gaussiana com Marginais Normais Padrão .	46
3.2	Curvas de Nível da Cópula de t-Student com Marginais Normais Padrão	47
3.3	Curvas de Nível da Cópula de Clayton com Marginais Normais Padrão .	51
3.4	Curvas de Nível da Cópulas de Frank com Marginais Normais Padrão . .	52
3.5	Curvas de Nível da Cópula de Gumbel com Marginais Normais Padrão .	53
3.6	D-vine com 5 variáveis, 4 árvores e 10 quinas . . . . .	58
3.7	C- e D-vine com 5 variáveis . . . . .	61
4.1	Gráficos dos Valores dos Índices . . . . .	66
4.2	Gráficos dos Retornos dos Índices . . . . .	68
4.3	Gráficos de ACF dos Retornos . . . . .	71
4.4	Gráficos de ACF dos Resíduos (AR-GARCH) . . . . .	74
4.5	Comparativo entre Distribuição dos Resíduos, Normal e t-Student (AR-GARCH) . . . . .	76
4.6	Matriz de Gráficos de Dispersão e Tau de Kendall . . . . .	77
4.7	Estrutura da D-vine . . . . .	78



# Lista de Tabelas

2.1	Dados Econômicos dos Países do Mercosul (2014) . . . . .	12
2.2	Dados de Importação e Exportação do Mercosul (milhões de dólares) . .	13
3.1	Exemplos de Cópulas Arquimedianas . . . . .	50
3.2	Propriedades das Cópulas Arquimedianas . . . . .	54
3.3	Propriedades das Cópulas Utilizadas . . . . .	54
4.1	Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) dos Retornos . . . . .	69
4.2	Teste de Ljung & Box dos Retornos . . . . .	70
4.3	Teste de Ljung & Box dos Resíduos (AR-GARCH) . . . . .	72
4.4	Qualidade do Ajuste dos Modelos GARCH e AR-GARCH . . . . .	73
4.5	Parâmetros das Marginais . . . . .	73
4.6	Qualidade do Ajuste das Distribuições Normal e t-Student . . . . .	75
4.7	Cópulas Estimadas ( $\hat{\theta}_1$ , $\hat{\theta}_2$ e Erro Padrão) . . . . .	80
4.8	Cópulas Estimadas ( $\hat{\lambda}_L$ , $\hat{\lambda}_U$ e $\hat{\tau}$ ) . . . . .	81
A.1	Dados de Produção Agrícola dos Países do Mercosul (2013) . . . . .	94
A.2	Dados de Exportação Agrícola dos Países do Mercosul (2012) . . . . .	95
F.1	Teste de ADF dos Retornos . . . . .	105
F.2	Teste de Ljung & Box dos Retornos . . . . .	106
F.3	Teste de Ljung & Box dos Resíduos (AR-GARCH) . . . . .	106

F.4	Teste de Ljung & Box dos Resíduos (GARCH)	106
-----	---	-----

# Lista de Abreviaturas e Siglas

**ACF** Função de Auto-correlação.

**ADF** Teste de Dickey-Fuller Aumentado.

**AIC** Critério de Informação de Akaike (*Akaike Information Criterion*).

**ALADI** Associação Latino-Americana de Integração.

**ALALC** Associação Latino-Americana de Livre Comércio.

**AR-GARCH** *Autoregressive-GARCH*.

**ASEAN** Associação das Nações do Sudeste Asiático.

**BIC** Critério de Informação Bayesiano (*Bayesian Information Criterion*).

**BRIC** Brasil, Rússia, Índia e China.

**C-Vine** Vine Canônica.

**CEPAL** Comissão Econômica para a América Latina e o Caribe - Organização das Nações Unidas.

**CIF** *Cost, Insurance and Freight*

**D-Vine** Vine Desenhável.

**EWMA** Médias Móveis Exponencialmente Ponderadas.

**FML** Máxima Verossimilhança Total (*textitFull Maximum Likelihood*).

**FOB** *Free on Board*

**GARCH** *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*.

**GOF** Adequação do Ajuste (*Goodness of Fit*).

**i.i.d.** Independentes e identicamente distribuídos.

**Ibovespa** Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Brasil).

**IFM** Inferência das Marginais (*Inference for the Margins*).

**IPSA** *Índice de Precio Selectivo de Acciones* da Bolsa de Valores de Santiago do Chile.

**Mercosul** Mercado Comum do Sul.

**Merval** Índice da Bolsa de Valores de Buenos Aires (Argentina).

**NAFTA** Tratado de Livre Comércio da América do Norte.

**ONU** Organização das Nações Unidas.

**Peru General** Índice da Bolsa de Valores de Lima (Peru).

**R-Vine** Vine Regular.

**S&P500** Índice *Standard and Poor's 500* da Bolsa de Valores dos Estados Unidos.

**SIC** Critério de Informação de Schwarz (*Schwarz Information Criterion*).

**TSML** Máxima Verossimilhança em Dois Passos (*Two-Step Maximum Likelihood*).

**VaR** *Value-at-Risk*.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Formulação do Problema . . . . .	3
1.2	Objetivo Geral . . . . .	3
1.3	Objetivos Específicos . . . . .	3
1.4	Justificativa . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>5</b>
2.1	Globalização dos Mercados e Efeito Contaminação . . . . .	5
2.2	América Latina e Regionalização . . . . .	7
2.3	Mercosul . . . . .	10
2.4	Diversificação Internacional e Interdependência . . . . .	13
2.5	Estrutura de Dependência e Cópulas . . . . .	15
2.6	Vine Cópulas . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>31</b>
3.1	Tipo e Descrição Geral da Pesquisa . . . . .	31
3.2	Caracterização do Objeto de Estudo . . . . .	31
3.3	População e Amostra . . . . .	32
3.4	Procedimentos de Coleta e de Análise dos Dados . . . . .	32
3.4.1	Funções de Distribuição . . . . .	33

3.4.2	Cópuas	36
3.4.3	Limites de Fréchet-Hoeffding	40
3.4.4	Medidas de Dependência	41
3.4.5	Classes de Cópuas	45
3.4.6	D-vine Cópuas	55
3.4.7	GARCH	62
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>65</b>
4.1	Tratamento Inicial e Modelagem das Marginais	67
4.2	Modelagem das Cópuas	77
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>83</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Produção e Exportação Agrícola do Mercosul</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Distribuição da Função de Distribuição Acumulada</b>	<b>96</b>
<b>C</b>	<b>Teorema e Corolário de Sklar em n-Dimensões</b>	<b>98</b>
<b>D</b>	<b>Construção de uma D-vine</b>	<b>100</b>
<b>E</b>	<b>Expressão Geral de uma D-vine com 5 Dimensões</b>	<b>102</b>
<b>F</b>	<b>Testes Complementares de Análise dos Dados</b>	<b>105</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Compreender o funcionamento dos mercados de capitais é uma tarefa complexa, visto que há diversas variáveis impactando os resultados observados simultaneamente. Com a ampla globalização vivenciada nos séculos XX e XXI, faz-se necessário analisar a relação dos movimentos entre mercados.

Pesquisadores vêm empregando cópulas com sucesso para construir a estrutura de dependência entre países e viabilizar análises internacionais mais aprofundadas (ver Tabelas 2.3, pág. 17, e 2.4, pág. 27). O estudo da dependência por cópulas possibilita a compreensão tanto das características gerais, lineares e não-lineares da relação entre os países, quanto a respeito de seu comportamento nos extremos - em momentos de crise e de forte expansão.

Com o objetivo de elucidar a dinâmica entre quatro dos maiores países do Mercosul - Brasil, Argentina, Chile e Peru - e os Estados Unidos, o presente trabalho emprega D-vine cópulas para modelar a sua estrutura de dependência. O esforço empreendido visa fornecer dados que embasem decisões de alocação internacional de recursos mais eficientes e seguras.

As funções cópulas permitem a modelagem da estrutura de dependência separadamente das distribuições das marginais (dos dados de cada país individualmente). Elas

são úteis quando se deseja construir a distribuição multivariada a partir das marginais (Trivedi e Zimmer, 2005). Este é, precisamente, o caso do estudo das séries temporais dos retornos financeiros: a sua distribuição conjunta não é conhecida.

As D-vine cópulas são um caso específico de cópulas que estende o caso bivariado ao multivariado. Sua construção está baseada em pares de cópulas bivariadas e condicionais. Desse modo, a variedade de cópulas bivariadas conhecidas pode ser empregada para a construção de cópulas multivariadas flexíveis, refletindo dados com diversos tipos de estruturas de dependência. As D-vines permitem, por exemplo, a modelagem da estrutura de dependência de pares de dados com distintas distribuições e apresentando dependência simétrica e assimétrica, inclusive nos extremos da distribuição (Tófoli et al., 2013).

A consecução do trabalho proposto requer, inicialmente, que se delineie o problema de pesquisa e os objetivos gerais e específicos para respondê-lo. O primeiro capítulo desta monografia, a presente Introdução, aborda esses aspectos, bem como discute a justificativa da pesquisa realizada. O segundo capítulo consiste do Referencial Teórico, onde será introduzido o debate teórico acerca de integração regional e cópulas. Adicionalmente, serão apresentadas características dos países estudados.

No terceiro capítulo, serão abordados os aspectos metodológicos da pesquisa realizada para responder os seguintes questionamentos: quais são os passos para se construir uma D-vine? O que é necessário para que a modelagem realizada seja adequada? Assim, na Metodologia serão apresentados os conceitos de cópulas, D-vine cópulas, algumas medidas de dependência amplamente utilizadas e outros aspectos relevantes. O quarto capítulo apresenta os Resultados Empíricos e é onde serão discutidos os aspectos da D-vine estimada. O quinto e último capítulo consiste das Considerações Finais.

## 1.1 Formulação do Problema

Como se dá a interdependência dos mercados de capitais de quatro das maiores economias do Mercosul - Brasil, Argentina, Chile e Peru - e os Estados Unidos?

Para responder a esse questionamento, foi estimada uma D-Vine Cópula multivariada cujos dados de entrada são os log-retornos diários dos índices de mercado dos países selecionados. A análise foi realizada para o período de 01 de dezembro de 2003 a 22 de setembro de 2015.

## 1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral da monografia é utilizar D-vine Cópulas para modelar a estrutura de dependência dos mercados financeiros de quatro países do Mercosul - Brasil, Argentina, Chile e Peru - e dos Estados Unidos.

## 1.3 Objetivos Específicos

O presente trabalho foi realizado observando os seguintes objetivos específicos:

1. coletar os dados dos índices de mercado dos cinco países estudados entre 01 de dezembro de 2003 e 22 de setembro de 2015;
2. obter resíduos independentes e identicamente distribuídos pela filtragem dos dados coletados utilizando o modelo GARCH e suas variações, caso necessário;
3. calcular a função de distribuição acumulada dos resíduos;
4. estimar a D-vine Cópula por máxima verossimilhança;
5. testar o ajuste das Cópulas estimadas por AIC e BIC e selecionar a com melhor performance.

## 1.4 Justificativa

Esta monografia visa contribuir para a compreensão da dinâmica entre os mercados financeiros de quatro das maiores economias dentre os países do Mercosul - Brasil, Argentina, Chile e Peru - e os Estados Unidos por intermédio da construção de uma D-vine cópula 5-dimensional.

Como pode ser verificado nos trabalhos de [Righi e Ceretta \(2011\)](#), [Ning \(2010\)](#), [Jondeau e Rockinger \(2006\)](#), entre outros, as cópulas têm grande versatilidade na modelagem da estrutura de dependência entre mercados financeiros captando tanto relações lineares quanto não-lineares. Como pontua [Trivedi e Zimmer \(2005\)](#), cópulas são úteis quando não há informações sobre a distribuição conjunta das variáveis, a qual precisa ser modelada.

Embora estudiosos já tenham analisado a estrutura de dependência entre mercados financeiros latino-americanos empregando cópulas ([Canela e Pedreira \(2012\)](#), [Righi e Ceretta \(2011\)](#), [Ozun e Cifter \(2007\)](#), [Rodriguez \(2007\)](#)), essas análises foram feitas com cópulas bivariadas. A única análise multivariada já realizada de que se tem conhecimento, feita por [Maya et al. \(2015\)](#), modela a dependência entre taxas de câmbio e não entre índices de mercado.

Como destacam [Tófoli et al. \(2013\)](#), uma modelagem realista da estrutura de dependência de dados de retorno financeiro multivariados é fundamental em finanças para a computação adequada do *Value-at-Risk* (VaR), a construção de portfólios ótimos e a precificação de produtos financeiros com muitos ativos. Este trabalho visa contribuir para esse propósito com a modelagem da estrutura de dependência dos quatro países latino-americanos e dos Estados Unidos. A D-vine Cópula multivariada modelada é capaz de fornecer informações sobre a interdependência entre os cinco países estudados simultaneamente e assim colaborar para uma melhor gestão de portfólios com ativos desses países.

## Capítulo 2

# Referencial Teórico

Neste capítulo serão discutidas características dos países estudados, bem como o debate teórico acerca da estimação da estrutura de dependência entre mercados financeiros com o emprego de cópulas, com enfoque nos trabalhos que abordam os países latino-americanos.

### 2.1 Globalização dos Mercados e Efeito Contaminação

Conforme pontuam [Durand et al. \(2007\)](#), globalização é um termo aplicado ao conjunto de processos complexos de intercâmbio e difusão cujo escopo é o planeta como um todo. A globalização vem ocorrendo em diversas áreas: finanças, produção, ideias e valores são alguns exemplos. Os autores destacam que, embora a atuação global de algumas instituições date desde a antiguidade, a segunda metade do século XX é caracterizada por uma aceleração sem precedentes desses processos e pela criação de um espaço funcional global com lógica própria de organização. A base dessas mudanças são as inovações tecnológicas nos campos de informática, transportes e telecomunicações.

No âmbito dos mercados financeiros, a globalização viabilizou a construção de um mercado mundial de capitais. Este consiste de um dos fluxos mais importantes em

termos de valor econômico. As trocas no mercado internacional de capitais ocorrem rapidamente e são desmaterializadas, o que permite que seu fluxo seja fluido e constante. A globalização pode trazer efeitos colaterais, como a distribuição desigual da renda, a constante oscilação das taxas de câmbio, a exploração da mão-de-obra em países com legislação trabalhista branda e a rápida propagação de crises entre os países ([Obstfeld e Taylor, 2002](#); [Maya et al., 2015](#)).

A globalização dos mercados de capitais estimulou a produção de estudos que visam compreender o comovimento de mercados de ações, especialmente em momentos de crise ([Aloui et al., 2010](#)). Segundo os autores, há indícios de que as correlações entre os mercados tenham aumentado devido a uma maior integração regional e global.

Conforme destaca [Forbes e Rigobon \(2000\)](#), embora haja grande concordância a respeito do fato de crises em um país afetarem outros, a definição do que seria contágio não é unânime. Uma definição tradicional é apresentada por [Fraztscher \(1999\)](#). O autor afirma que o efeito contágio consiste na transmissão de uma crise que não foi causada pelos fundamentos do país afetado, mas pela proximidade entre os dois países. O contágio pode se dar por dois canais: o de integração real e o de integração financeira. O primeiro caso ocorre quando a crise e desvalorização ocorrida em um país atinge o outro por intermédio de uma queda na competitividade, o que afeta a balança comercial deste segundo país e o pressiona a uma crise. A propagação por integração financeira, por sua vez, ocorre quando a crise em um mercado leva os investidores a retirar ativos de outros mercados seja para levantar fundos para cobrir os prejuízos sofridos, seja para evitar perdas em mercados fortemente integrados. Neste caso, são as ações dos investidores que provocam a crise no segundo país.

Essa definição de contágio é análoga à definição de interdependência de [Forbes e Rigobon \(2000\)](#): interdependência descreve situações em que o comovimento entre dois mercados é superior ao que pode ser explicado por seus fundamentos, ou seja, por fatores macro e microeconômicos internos.



Enquanto [Fraztscher \(1999\)](#) interpreta contágio como interdependência, [Forbes e Rigobon \(2000\)](#) definem contágio enquanto aumento significativo das ligações entre os mercados após um choque em um país (ou grupo de países) específico. Esta definição implica que o contágio ocorre não quando dois países são altamente correlacionados após uma crise, mas quando sua correlação aumenta significativamente.

Estudos recentes demonstram a tendência de seguir a distinção entre contágio e interdependência de [Forbes e Rigobon \(2000\)](#), a exemplo de [Wen et al. \(2012\)](#), [Kenourgios et al. \(2011\)](#) e [Rodriguez \(2007\)](#). Paralelamente, há autores que optam pela definição de contágio de [Fraztscher \(1999\)](#), como [Aloui et al. \(2010\)](#) e [Maya et al. \(2015\)](#).

De todos modos, ambas abordagens fornecem informações importantes aos investidores, gestores de portfólios e administradores públicos. O estudo do contágio fornece informações sobre a probabilidade de uma crise se disseminar para outros países e, portanto, medir o contágio é importante para prevenir, bem como para diminuir os efeitos de crises em outros países ([Maya et al., 2015](#)). Para tanto, os autores sugerem a adoção coordenada de uma política econômica global.

## 2.2 América Latina e Regionalização

Os países em desenvolvimento são um grupo bastante heterogêneo. São países com antiguidade e solidez estatal bastante variada, com regime político, modelo de desenvolvimento, cultura e tipo e quantidade de recursos disponíveis distintos ([Durand et al., 2007](#)). O desenvolvimento está atrelado ao crescimento econômico, mas não de maneira exclusiva: outros fatores que impactam o desenvolvimento, a exemplo da distribuição de renda, da prestação de serviços públicos pelo Estado e da qualidade de vida do cidadão.

A América Latina é, similarmente, uma região bastante diversificada, tanto em termos de infraestrutura, quanto clima, recursos naturais e tecnológicos e estrutura estatal. Nesse contexto, a [CEPAL \(2015\)](#), afirma que é necessário construir um espaço

regional integrado, de modo a promover os encadeamentos produtivos, aumentar o comércio inter-regional e favorecer a diversificação produtiva e exportadora dos países latino-americanos.

A disseminação de organizações regionais ocorreu majoritariamente na segunda metade do século XX. É o caso da União Européia, cuja origem remonta à Comunidade Econômica Européia fundada em 1957 ([União Européia, 2015](#)); a ASEAN (Associação das Nações do Sudeste Asiático), criada em 1967 ([ASEAN, 2015](#)); o NAFTA (Tratado de Livre Comércio da América do Norte), criado em 1992 e efetivado em 1994 ([U.S. Department of Homeland Security, 2015](#)); e o Mercosul (Mercado Comum do Sul), fundado em 1991 ([Brasil, 2015](#)). Essas organizações tem em comum o fato de que seus Estados membros abdicaram voluntariamente de certos atributos da sua soberania em prol da ação conjunta do bloco.

O nível de integração dos diferentes blocos varia conforme a adesão a quatro estágios (veja [Mirus e Rylska \(2001\)](#)):

1. supressão de barreiras comerciais entre os membros;
2. adoção de uma tarifa externa comum;
3. livre circulação de fatores de produção; e
4. harmonização das políticas econômica e fiscal dos países membros.

As *zonas de livre comércio* são o caso em que a integração é mais restrita. Apenas as barreiras comerciais entre os Estados membros são suprimidas (estágio 1). Seu objetivo é estimular o comércio entre os membros por intermédio da redução ou eliminação das tarifas cobradas dos países membros.

*Unões aduaneiras*, por sua vez, são grupos regionais que, além de suprimir as barreiras comerciais, adotam uma tarifa externa comum a ser aplicada quando do comércio com países de fora do bloco (estágios 1 e 2).

Caso se agregue características dos estágios 1, 2 e 3, chega-se a um *mercado comum*. Nessa configuração, o bloco de países possui a livre circulação de fatores de produção em conjunto com a supressão de barreiras comerciais e a implantação de uma tarifa externa comum. O Mercosul enquadra-se neste nível de integração.

O nível mais abrangente de integração é alcançado nas *uniões econômicas*. Nestas há todas as características de um mercado comum, às quais é adicionada a harmonização das políticas econômica e fiscal. As uniões econômicas abrangem, portanto, as medidas dos estágios 1, 2, 3 e 4. Esta é a atual configuração da União Europeia.

Além da forma tradicional de integração discutida acima, em que se busca a consecução de objetivos econômicos e políticos, há o chamado *neoregionalismo*. Neste caso, a integração busca tão somente uma melhor inserção dos países membros nos fluxos econômicos advindos da globalização (Durand et al., 2007).

A regionalização pode tanto proteger países dos efeitos da globalização, quanto intensificá-los. Durand et al. (2007) pontuam que no caso de zonas de livre comércio ou de blocos fundados no neoregionalismo, no caso de uma crise, a ausência de solidariedade e de mecanismos de redistribuição entre os Estados membros fragilizam consideravelmente a região.

O contexto mundial em 2015 é de desaceleração e está impactando o comércio na América Latina. Segundo dados da CEPAL (2015), no primeiro semestre de 2015 o comércio intra-regional sofreu uma contração de aproximadamente 20% em relação ao mesmo período de 2014. No caso do Mercosul, a contração foi de 23%. Embora seja significativa, a contração atual é inferior à verificada no primeiro semestre de 2009, logo após a crise do *subprime* de 2008, quando a contração foi de 30,5%. Analisando o comércio entre a Argentina e o Brasil, a contração no primeiro semestre de 2015 foi de 17%. Um dos setores com maior redução é o referente aos bens intermediários, de consumo durável e de capital. As compras nesse setor entre os dois países caíram 25%.

O comércio entre países latino-americanos tem maior participação de pequenas e

médias empresas, que geram empregos e riqueza para seus países de origem, além de ser mais intensamente composto por produtos de alto valor agregado em comparação com o comércio com outras regiões. Por esses motivos, a queda no comércio intra-regional é preocupante (CEPAL, 2015). A desaceleração do crescimento tem se traduzido em uma queda dos preços das matérias primas exportadas pela região, em especial de petróleo e metais. Adicionalmente, a crise na zona do Euro e na China impactou negativamente as exportações com destino a essas regiões.

Nesse contexto, a CEPAL (2015) defende a necessidade de avançar na harmonização dos regimes regulatórios que afetam as redes de produção latino-americanas. Paralelamente, seria necessário investir na implementação de políticas industriais e tecnológicas para a diversificação e o aumento da produtividade. Isso incentivaria os fluxos de comércio inter-regional e atrairia investimentos estrangeiros diretos. Como consequência, a região dinamizaria o crescimento de longo prazo e reduziria o desemprego e a desigualdade.

## 2.3 Mercosul

A ideia de integração regional na América Latina foi introduzida em 1948, pela Comissão Econômica para a América Latina e o Caribe (CEPAL) da Organização das Nações Unidas (ONU). Algumas iniciativas foram de fato realizadas, a exemplo da Associação Latino-Americana de Livre Comércio (ALALC) fundada em 1960 e convertida em 1980 na Associação Latino-Americana de Integração (ALADI) e do Pacto Andino fundado em 1969, hoje conhecido como Comunidade Andina (ALADI, 2015; *Comunidade Andina*, 2015). No entanto, durante o período de regimes ditatoriais e autoritários na América Latina suas ações ficaram restritas a ações protecionistas.

As décadas de 1980 e 1990, marcaram o retorno à democracia e o fim da Guerra Fria, o que criou um ambiente propício ao retorno e fortificação dos processos de integração

da América Latina (Durand et al., 2007). Nesse contexto surge o Mercosul como uma nova tentativa de integrar os países latino-americanos.

O Mercado Comum do Sul (Mercosul) foi criado em 26 de março de 1991 quando o Tratado de Assunção foi firmado por Brasil, Argentina, Uruguai e Paraguai. Seu objetivo primordial é promover a integração dos países membros por intermédio da livre circulação de bens, serviços e fatores produtivos (Brasil, 2015).

Todos os países da América do Sul participam do bloco, seja como Estado Parte ou como Estado Associado (Brasil, 2015). Os Estados fundadores - Brasil, Argentina, Uruguai e Paraguai - e a Venezuela são Estados Parte. A Bolívia está em processo de adesão enquanto Estado Parte. Chile, Peru, Colômbia, Equador, Guiana e Suriname integram o bloco enquanto Estados Associados.

O Mercosul é uma grande potência agrícola e energética. Segundo dados da [Divisão de Estatística da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação \(2015a\)](#), contabilizando apenas os Estados Parte, o bloco produziu em 2013: 62,37% da soja mundial, 42,12% da cana de açúcar e 21,98% da carne bovina<sup>1</sup>. O bloco também é um grande produtor de milho, trigo, arroz e vinho, entre outros produtos agrícolas. No âmbito da energia, o Mercosul detém 19,6% das reservas de petróleo globais, 3,1% das reservas de gás natural e 16% das reservas de gás recuperáveis de xisto (Brasil, 2015).

Dos países membros do Mercosul, foram selecionadas quatro das maiores economias. Conforme pode ser verificado na Tabela 2.1, feita com dados do [Banco Mundial \(2015\)](#), as seis maiores economias do bloco em termos de PIB nominal são: Brasil, Argentina, Venezuela, Colômbia, Chile e Peru. Embora a Venezuela seja o país com maior PIB *per capita* e a Colômbia seja o segundo país mais populoso e com quarto maior PIB nominal, ambas foram excluídas da análise realizada devido à dificuldade de acesso aos dados dos índices de mercado desses países.

Dos países estudados nesta monografia, Brasil e Argentina são membros fundadores

---

<sup>1</sup>Tabela com dados sobre a produção agrícola do Mercosul disponível no Apêndice A (pág. 93).

Tabela 2.1: Dados Econômicos dos Países do Mercosul (2014)

País	PIB (bilhões de US\$)	População (milhões)	PIB <i>per capita</i> (mil US\$)
Brasil	2.346,0	202	11.614
Argentina	540,2	41,8	12.923
Venezuela	510,0	30,85	16.532
Colômbia	377,7	48,93	7.719
Chile	258,1	17,77	14.524
Peru	202,9	30,77	6.594
Equador	100,5	15,98	6.289
Uruguai	57,47	3,419	8.307
Bolívia	34,18	10,85	3.150
Paraguai	30,98	6,918	4.478
Suriname	5,299*	0,543	9.742
Guiana	3,228	0,803	4.016
TOTAL	4.466,557	410,633	10.877

\* PIB nominal do Suriname de 2013.

Tabela elaborada pela autora com dados do [Banco Mundial \(2015\)](#).

do Mercosul e, portanto, integram o bloco desde sua criação em março de 1991. O Chile ingressou em 1996 e o Peru em 2003.

A Tabela 2.2 contém dados de importação e exportação do Mercosul tanto internamente ao bloco, quanto em termos de sua exportação global. Pela tabela é possível verificar que desde a instituição do Mercosul em 1991, as importações entre Estados parte cresceu mais do que as importações totais: as importações inter-regionais cresceram 1000%, enquanto as importações globais cresceram apenas 713% entre 1991 e 2013. No caso das exportações, tanto internamente quanto em termos globais, o crescimento foi de cerca de 890% no mesmo período. A variação observada corrobora o fato de que a harmonização de políticas entre os membros de um bloco leva a um maior comércio inter-regional.

Tabela 2.2: Dados de Importação e Exportação do Mercosul (milhões de dólares)

	1991	1995	2000	2005	2010	2013
Exp. Global	60.688	90.633	119.185	219.753	349.829	433.205
Imp. Global	44.307	90.991	104.544	135.213	303.408	395.790
Exp. Intra	6.179	18.182	21.349	25.957	52.328	61.949
Imp. Intra	6.620	16.212	20.707	24.627	51.412	58.711
Exp.* Argentina	11.978	20.995	26.370	40.387	68.187	83.026
Exp.* Brasil	31.622	46.598	55.168	118.308	202.640	242.179
Exp.* Chile	8.989	15.925	18.254	38.597	67.424	76.201
Exp.* Peru	3.218	5.440	6.913	17.825	34.535	41.512
Total P.E.	55.808	88.958	106.705	215.117	372.786	442.918

Exp.: exportação FOB; Imp.: importação CIF; Global: comércio total dos Estados parte do Mercosul; Intra: comércio entre os Estados parte do Mercosul; Exp.\*: exportação global FOB; P.E.: países latino-americanos estudados nesta monografia - Argentina, Brasil, Chile e Peru.

Tabela elaborada pela autora com dados da [Associação Latino-Americana de Integração \(2015\)](#).

## 2.4 Diversificação Internacional e Interdependência

A crise financeira de 2008 mostrou aos investidores internacionais a necessidade de estudar em detalhe as economias de mercados emergentes, como o de países latino-americanos ([Maya et al., 2015](#)). Esses mercados se tornaram um importante destino de investimentos, o que tornou clara a necessidade de considerar as interdependências entre os países para tomar decisões financeiras confiáveis e lucrativas.

[Markowitz \(1952\)](#) mostra que a composição de um portfólio de ativos deve se basear no retorno esperado e na sua variância e covariância. Essa regra implica que portfólios eficientes são, na maior parte das vezes, diversificados. Tal diversificação deve ser pensada não apenas como quantidade de ativos, mas considerar também a correlação e a covariância entre eles.

Como pontuam [Aloui et al. \(2010\)](#), a Teoria do Portfólio mostra que investidores podem melhorar a performance de seus portfólios ao alocar recursos em diferentes classes de ativos financeiros que reajam em direções diferentes face a novas informações. Apesar de no princípio essa teoria buscar explicar o potencial da diversificação em um dado

país, tal lógica pode ser estendida para a diversificação entre mercados de diferentes países.

[Solnik \(1995\)](#) sugere em seu artigo que a diversificação internacional possibilitaria alcançar retornos superiores aos obtidos pela diversificação dentro de um só país. O autor destaca, seguindo o modelo de [Markowitz \(1952\)](#), que o risco total do portfólio depende tanto da quantidade de ativos, quanto do risco de cada um individualmente e do nível em que são ou não independentes uns dos outros. Por conseguinte, a despeito de quão bem diversificado seja um portfólio doméstico, seu risco tende a estar altamente correlacionado com o nível de risco do próprio mercado, também chamado de risco sistemático ([Lima, 2014](#)).

Contanto que o comovimento dos mercados seja previamente analisado e o risco de câmbio contabilizado, é possível obter portfólios com retornos superiores ao diversificar internacionalmente ([Solnik, 1995](#)). No entanto, num mundo altamente globalizado, é plausível que as correlações entre os mercados tenham se tornado suficientemente grandes para limitar ou mesmo anular os benefícios da diversificação internacional ([Aloui et al., 2010](#)). Estes autores afirmam também que a correlação entre os mercados não é estática, mas varia com o decorrer do tempo.

Nesse contexto, avaliar, estimar e prever a dinâmica do retorno de investimentos financeiros são habilidades essenciais aos gestores financeiros ([Caporin e McAleer, 2010](#)). Realizar essas atividades em nível internacional demanda o emprego de um método que viabilize a modelagem da estrutura de dependência dos mercados financeiros. As cópulas são uma ferramenta que vem sendo utilizada com sucesso para essa tarefa, como pode ser verificado nos trabalhos de [Canela e Pedreira \(2012\)](#), [Righi e Ceretta \(2011\)](#), [Aloui et al. \(2010\)](#), [Jondeau e Rockinger \(2006\)](#), entre outros. O emprego de cópulas é positivo porque, além de fornecer informações acerca da dependência linear entre dois ou mais mercados, elas permitem a compreensão das relações não lineares entre esses mercados ([Nelsen, 2007](#)).



É possível, ainda, que os mercados em que se pretende investir exibam forte dependência em baixas de mercado e pouca ou nenhuma dependência em altas de mercado. Como destacam [Canela e Pedreira \(2012\)](#), conhecer a estrutura de dependência entre os mercados e suas possíveis assimetrias é crucial para o gerente de portfólio. Caso os mercados exibam tendência ao comovimento mais forte em momentos de queda que de alta, os benefícios da diversificação internacional seriam limitados. Assim, é importante não apenas compreender a dinâmica geral entre os mercados, mas, principalmente, como os mercados dependem entre si nas caudas da curva de probabilidade - nos momentos de baixa e de alta do mercado.

## 2.5 Estrutura de Dependência e Cópulas

Inicialmente, é interessante observar um exemplo prático de como o uso de cópulas pode aperfeiçoar o gerenciamento de portfólio e minimizar os riscos a ele relacionados. O exemplo abaixo foi retirado do texto de [Canela e Pedreira \(2012\)](#).

**Exemplo 1** Um investidor situado no México busca reduzir o risco de seu portfólio investindo no exterior. Para tanto ele analisa os retornos dos índices de mercado dos pares Argentina-México e Chile-México e verifica que ambos pares exibem correlação de Pearson de 0,42.

Tomando por base a Teoria do Portfólio, seria indiferente investir na Argentina ou no Chile. No entanto, o investidor opta por complementar sua análise com um estudo da dependência via cópulas. O investidor verifica que a Cópula *Gumbel-Gumbel Sobrevivência* é a que melhor reflete a estrutura de dependência de ambos os pares e que o peso para a cópula de Gumbel na mistura é  $w_{MA} = 0,56$  para o par México-Argentina e  $w_{MC} = 0,33$  para o par México-Chile.

Considerando quebra conjunta a situação em que ambos países estão em seu décimo percentil mais baixo, foi possível verificar que o número de quebras conjuntas para o par

Argentina-México é 87, enquanto para o par Chile-México é 91. Com essa informação obtida com a análise por cópulas se torna claro que o investimento no Chile é mais arriscado que na Argentina e, portanto, não é indiferente investir em um ou outro: investir na Argentina proporciona um portfólio mais seguro.  $\diamond$

As evidências do Exemplo 1 vão ao encontro do que afirmam Ozun e Cifter (2007): mercados emergentes são marcados por alta volatilidade, mudanças de regime e não-linearidade nos retornos e, portanto, a distribuição conjunta de um portfólio contendo ações desses mercados deve ser livre de qualquer presunção de normalidade. O coeficiente de correlação, medida central na Teoria do Portfólio, não é capaz de captar as assimetrias e outras características da estrutura de dependência, mas tão somente o grau de dependência linear entre as variáveis observadas (Hu, 2006).

Cópulas são uma ferramenta útil porque muitas vezes não há informações sobre a distribuição conjunta das variáveis em análise, a qual precisa ser modelada. Portanto, um aspecto crucial do emprego de cópulas é selecionar uma cópula que captura adequadamente as estruturas de dependência dos dados sem sacrificar propriedades atrativas das marginais (Trivedi e Zimmer, 2005).

Uma das formas de atingir esse objetivo é conhecer as cópulas já existentes e selecionar as que reflitam características das marginais. Há campos de estudo em que algumas especificidades dos dados são conhecidos.

Conforme Canela e Pedreira (2012) apresentam em seu artigo, os dados de retornos financeiros normalmente apresentam curtose positiva e são inclinados, o que faz com que se rejeite *a priori* que as marginais tenham distribuição normal univariada. Complementarmente, os autores afirmam que, quando há dependência caudal, a dependência Gaussiana tem de ser rejeitada, visto que ela não captura essas relações extremas. Este é o caso, por exemplo, de dois países que entrem conjuntamente em crises ou em períodos de forte crescimento numa proporção superior ao que indicaria a distribuição normal. Caso se presuma que a distribuição normal é adequada, a probabilidade de

ocorrerem crises em ambos os países serão subestimadas o que pode acarretar grandes perdas financeiras e, inclusive, um aprofundamento da crise e sua dispersão para outros países.

Com o intuito de organizar os estudos que empregam cópulas para medir a correlação entre os mercados, foi elaborada a Tabela 2.3 a seguir. Inicialmente serão apresentados estudos acerca de países latino-americanos; seguidos por estudos sobre países emergentes; e, por fim, estudos com cópulas em outras regiões ou estudos com cópulas acerca de indústrias específicas. Frisa-se que a tabela não está em ordem alfabética dos autores.

Tabela 2.3: Principais aspectos da produção acadêmica com Cópulas em Finanças

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
Righi e Ceretta (2011) - Dependência.	Método: Cópulas extremais bivariadas, AIC e GARCH-DCC; Objeto: índices de mercado de Brasil, Argentina, México e Estados Unidos; Resultados: foi encontrada forte dependência caudal entre os mercados estudados, especialmente na cauda inferior. Os autores afirmam que essas características demonstram a dificuldade de se minimizar o risco de um portfólio pela alocação de recursos nesses países, em especial durante adversidades.
Ozun e Cifter (2007) - Estimação do Var do Portfólio.	Método: comparativo entre cópula bivariada com variação temporal e médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA), VaR; Objeto: índices de mercado do Brasil e do México; Resultados: a cópula Joe-Clayton simétrica condicional capta melhor os dados extremais que as EWMA. Pela análise da cópula é possível afirmar que a dependência caudal inferior é mais volátil que a superior e sua correlação não é constante ao longo do tempo.

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Canela e Pedreira (2012)</a> - Dependência.</p>	<p>Método: comparativo entre cópulas arquimedianas e misturas, <math>\chi^2</math> GOF (<i>goodness of fit</i>) e AIC; Objeto: Índices de mercado de Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, México, Peru e Venezuela e índice global (Wrd); Resultados: misturas capturam melhor a estrutura dos dados que cópulas simples. Foi encontrada dependência caudal à direita e à esquerda na análise país a país. A dependência caudal foi menor na análise país-mundo, o que sugere um efeito de diversificação positivo.</p>
<p><a href="#">Rodriguez (2007)</a> - Contágio.</p>	<p>Método: misturas de cópulas bivariadas com variação temporal associada à variação temporal dos parâmetros, SWARCH e AIC; Objeto: índices de mercado de Argentina, Brasil, Chile e México e de Coreia, Filipinas, Indonésia, Malásia e Tailândia. A análise é feita separadamente para cada região; Resultados: Os países asiáticos são caracterizados por aumento na dependência caudal e assimetria em momentos de crise, enquanto o par Brasil-México é caracterizado por aumento da dependência, assimetria e independência caudal. Os pares México-Argentina e México-Chile são casos em que uma estrutura de dependência estável não pôde ser rejeitada. Os pares Tailândia-Coreia e Tailândia-Indonésia apresentam dependência caudal <i>apenas</i> em momentos de crise. Os resultados indicam que o contágio ocorre de forma não-linear.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Aloui et al. (2010)</a> - Contágio.</p>	<p>Método: cópulas bivariadas com variação temporal, AIC, BIC, IFM, GARCH-M e VaR; Objeto: índices de mercado de Brasil, Rússia, Índia e China (BRIC) e Estados Unidos; Resultados: os autores encontraram evidência de dependência entre os países do BRIC e os Estados Unidos tanto em momentos de alta dos mercados quanto em momentos de queda. O par Brasil-Estados Unidos é o par com dependência caudal (positiva e negativa) mais forte dentre os pares analisados. O comovimento com os Estados Unidos é mais forte para países altamente sensíveis a variações no preço de <i>commodities</i> (Brasil e Rússia).</p>
<p><a href="#">Kenourgios et al. (2011)</a> - Contágio.</p>	<p>Método: cópulas bivariadas com variação temporal, AG-DCC e GJR-GARCH-MA-t; Objeto: índices de mercado de Brasil, Rússia, Índia e China (BRIC), Estados Unidos e Reino Unido; Resultados: mudanças no retorno explicam o efeito contágio em um grau mais elevado que mudanças nas volatilidades. Os níveis de correlação entre os mercados aumentam durante momentos de crise. As variações na dependência são superiores entre países do BRIC do que entre eles e os Estados Unidos ou eles e o Reino Unido, embora a dependência com este seja inferior se comparada à com os Estados Unidos. Crises em indústrias específicas têm um impacto maior que crises de países específicos.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Jondeau e Rockinger (2006)</a> - Dependência</p>	<p>Método: cópulas bivariadas com variação temporal, AIC, BIC (SIC) e GARCH; Objeto: índices de mercado de Alemanha, França, Reino Unido e Estados Unidos; Resultados: a dependência entre os mercados europeu aumenta significativamente em resposta a movimentos na mesma direção (<i>crash</i> ou <i>boom</i>). A dependência entre os países europeus estudados varia com o tempo e aumentou no período de 1980 a 1999. Já a dependência entre os países europeus e os Estados Unidos não varia ao longo do tempo.</p>
<p><a href="#">Delatte e Lopez (2013)</a> - Dependência.</p>	<p>Método: cópulas bivariadas, AIC, BIC e AR-t-GARCH; Objeto: índices de <i>commodities</i> (SP-GSCI e DJ-UBS), índices de mercado dos Estados Unidos, Reino Unido, França e Alemanha e preço futuro de 21 <i>commodities</i> dos mercados de agricultura, metais industriais e energia; Resultados: a dependência entre <i>commodities</i> e mercado de ações é temporária, simétrica e frequente (não ocorre majoritariamente durante eventos extremos). O comovimento entre metais industriais e mercado de ações é crescente e vem se espalhando desde 2003. A partir de 2008, esse comovimento se torna mais forte e passa a abarcar todas as <i>commodities</i> analisadas.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<a href="#">Ning (2010)</a> - Dependência.	Método: cópulas bivariadas, IFM, AR-t-GARCH, AIC, BIC e LM; Objeto: índices de mercado e taxas de câmbio de Alemanha, França, Japão e Reino Unido (face ao dólar); Resultados: foi encontrada dependência caudal simétrica significativa entre índices de mercado e taxas de câmbio de cada país antes e após a implementação do euro. As dependências linear e caudal diminuíram após o lançamento deste. A dependência mais fraca ocorre na França, a mais forte, no Japão.
<a href="#">Gordeev et al. (2012)</a> - Dependência.	Método: comparativo de cópulas bivariadas, AR, GARCH, AIC, BIC (SIC), concordância de Kendall e distância de Kolmogorov-Smirnov; Objeto: índices de mercado de Alemanha, Bélgica, França, Grécia e Estados Unidos; Resultados: não foram encontradas evidências claras de dependência caudal. A especificação incorreta do modelo de estimação pode causar tanto sub- quanto sobre-estimação dos riscos associados ao mercado.

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Wen et al. (2012)</a> - Contágio.</p>	<p>Método: cópulas bivariadas com variação temporal, AR-GJR-skewed-t, IFM, distância de Kolmogorov-Smirnov, AIC e BIC; Objeto: índices de mercado dos Estados Unidos, de Shanghai e Shenzhen (China) e preço do petróleo (WTI); Resultados: há evidências de dependência significativamente crescente entre petróleo cru e índices de mercado após 2008. A estrutura de dependência é marcada por forte dependência caudal e simetria. O contágio foi mais forte para os Estados Unidos que para a China.</p>
<p><a href="#">Kitamura (2011)</a> - Dependência - impacto do fluxo de ordens na taxa de câmbio</p>	<p>Método: misturas de cópulas bivariadas, ARMA-GARCH e AIC; Objeto: atividades nos mercados euro/dólar e iene/dólar; Resultados: o impacto do fluxo de ordens nos retornos decresce à medida que os investidores são mais informados. Isso ocorre devido à competição entre agentes informados (que tem acesso a informações privadas). O impacto do fluxo de ordens depende das condições do mercado, especificamente do ingresso de investidores informados.</p>



Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<a href="#">Roch e Alegre (2006)</a> - Dependência.	Método: cópulas bivariadas, ARMA-GARCH, $\chi^2$ GOF e distância de Kolmogorov-Smirnov; Objeto: ações de 16 empresas do mercado de capitais da Espanha; Resultados: a distribuição dos retornos antes do GARCH não foi bem capturada empregando o teste $\chi^2$ GOF. Após o GARCH apenas alguns pares de séries temporais não foram adequadamente modelados. O melhor ajustamento dos retornos filtrados pode ser devido à uma redução da dependência caudal pelo emprego do GARCH.
<a href="#">Liu e Wen (2009)</a> - Dependência.	Método: cópulas, coeficiente de correlação de Gini, t-GARCH; Objeto: índices Shenzhen e Shanghai (China); Resultados: há evidências empíricas de que o coeficiente de correlação $\rho$ construído mensura mais adequadamente a correlação entre variáveis que o coeficiente de Gini, limitando a superestimação da dependência quando há grande concentração de observações nas caudas.

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Sukcharoen et al. (2014)</a> - Dependência.</p>	<p>Método: cópulas bivariadas, AR, GARCH-GJR, AIC e BIC; Objeto: preço do petróleo (Brent e OPEC), índices de mercado (sem produtores de petróleo) de Canadá, França, Alemanha, Hong Kong, Itália, Japão, Holanda, Suíça, Reino Unido, Estados Unidos, China, República Tcheca, Finlândia, Hungria, Polônia, Rússia, Espanha e Venezuela; Resultados: a interdependência observada entre preço do petróleo e índice de mercado é ou não existente ou bastante fraca para todos os países estudados. As únicas exceções são os Estados Unidos e o Canadá, grandes consumidores e produtores de petróleo. A maior parte das relações estudadas é simétrica. No entanto, há fraca evidência de relacionamento assimétrico entre o preço do petróleo e pequenos países produtores de petróleo (como França e Holanda), com tendência a quedas conjuntas. A dependência caudal se altera levemente conforme a série de preços utilizada. A estrutura de dependência difere substancialmente entre o período anterior e posterior à adoção do euro, o que indica que o período pesquisado impacta a dinâmica da dependência. Há evidências de que países desenvolvidos possuem dependência caudal mais elevada que países em desenvolvimento.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<a href="#">Hu (2006)</a> - Construção de uma nova medida de dependência.	Método: misturas de cópulas bivariadas, GARCH e algoritmo EM; Objeto: índices de mercado de Japão, Hong Kong, Reino Unido e Estados Unidos; Resultados: Nenhum par apresentou dependência caudal superior. À exceção do par Reino Unido-Japão, todos apresentaram dependência caudal inferior. Comparado ao VaR empírico, o VaR gaussiano subestima o risco em todos os pares analisados. O VaR calculado com base na mistura de cópulas é uma medida mais realista do risco que o gaussiano.

## 2.6 Vine Cópulas

Existem diversas famílias de cópulas bivariadas conhecidas na literatura, a exemplo da Gaussiana e das de t-Student, Clayton, Frank e Gumbel, a serem discutidas na Subseção 3.4.5, da Metodologia. O conjunto de cópulas multivariadas, por sua vez, é bastante restrito. [Aas et al. \(2009\)](#) pontua que a construção de cópulas de dimensões elevadas é um problema de difícil solução. Adicionalmente, as cópulas multivariadas padrão possuem estruturas relativamente rígidas ([Tófoli et al., 2013](#); [Aas et al., 2009](#); [Brechmann e Schepsmeier, 2013](#)).

Para construir distribuições multivariadas, [Joe \(1996\)](#) propôs uma metodologia baseada na composição de blocos simples, chamados *pair-copulas* (pares de cópulas). Essa metodologia foi posteriormente estendida por [Bedford e Cooke \(2001a\)](#) e [Bedford e Cooke \(2001b\)](#), que especificaram a construção de R-vines (vines regulares). O cerne desta metodologia está no fato de que uma cópula multivariada pode ser decomposta em uma série de pares de cópulas e densidades marginais: uma cópula  $n$ -dimensional pode ser construída pelo produto de  $n(n - 1)/2$  cópulas bivariadas ([Aas et al., 2009](#)).

As cópulas bivariadas empregadas na construção podem pertencer a qualquer família de cópulas e é possível misturar diversas famílias quando da modelagem de uma vine cópula. Por essa razão, as vine cópulas permitem compor cópulas que modelem todo tipo de estrutura de dependência (Tófoli et al., 2013) e são tidas como um conceito flexível para estender cópulas bivariadas ao caso multivariado (Hofmann e Czado, 2011). Essas cópulas se beneficiam da variedade de cópulas bivariadas disponíveis, que são empregadas enquanto blocos a serem compostos numa cópula multivariada (Brechmann e Schepsmeier, 2013).

À medida em que a quantidade de dimensões em análise aumenta, as possibilidades de decomposição em pares de cópulas também aumentam. As R-vines são um modelo gráfico de organização dessas possibilidades. Elas estão dispostas em termos de sequências de árvores agrupadas de modo a facilitar a identificação dos pares de variáveis a serem analisados e de suas respectivas variáveis condicionantes (Tófoli et al., 2013). No caso deste estudo, essas variáveis são os dados dos índices de cada país.

Dois casos particulares de vine cópulas amplamente estudados são as C-vines (vines canônicas) e as D-vines (vines desenháveis). Cada um destes provê uma forma (gráfica) específica de decomposição da densidade. Segundo Aas et al. (2009), C-vines são particularmente vantajosas quando uma variável em particular é sabidamente uma variável-chave e dita as interações das variáveis em análise. No entanto, este não é o caso das variáveis analisadas nesta monografia: não é possível afirmar *a priori* que um dos países em análise determina tão fortemente o comportamento de todos os demais. Por esse motivo optou-se por modelar a estrutura de dependência com o auxílio de D-vines.

Tabela 2.4: Principais aspectos da produção acadêmica com D-vine Cópulas em Finanças

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Maya et al. (2015)</a> - Dependência.</p>	<p>Método: R-vine Cópulas, AIC e ARX-GARCH; Objeto: taxa de câmbio de Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, México e Peru; Resultados: Argentina, Brasil, Chile e México apresentam alta dependência, enquanto Argentina e Peru apresentam baixa dependência com outros países latino-americanos.</p>
<p><a href="#">Hofmann e Czado (2011)</a> - Estimação do Var do Portfólio.</p>	<p>Método: cópulas D-vine e multivariadas, inferência bayesiana, AIC, DIC, GARCH e VaR; Objeto: taxas de câmbio de Brasil, Austrália, Canadá, Japão e Reino Unido (caso 1) e dois índices de mercado e dois índices do mercado de obrigações dos Estados Unidos (caso 2); Resultados: a D-vine tem performance superior às cópulas t-Student, de Clayton e de Gumbel, porque a D-vine permite que a estrutura de dependência seja simétrica para alguns pares de marginais e assimétrica para outros. A escolha entre D-vine e t-Student multivariada afeta a previsão do VaR. Comparada à estimação bayesiana conjunta, a estimação bayesiana em dois passos causa um não ajustamento considerável. O modelo em dois passos subestima a incerteza do VaR.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Tófoli et al. (2013)</a> - Dependência.</p>	<p>Método: comparação entre D-vine dinâmica (com variação temporal) e estática, ARMA-GARCH, IFM, AIC, BIC e VaR; Objeto: índices de mercado de Brasil, Alemanha, França, Reino Unido e Estados Unidos; Resultados: em todos os casos a estrutura de dependência entre os índices pouco se altera entre o período de não-crise (03/01/2003-28/12/2007) e o de crise (02/01/2008-04/05/2012). No período de crise a dependência se torna um pouco mais assimétrica. Foi encontrada dependência caudal inferior e superior em todos os casos. A D-vine dinâmica tem performance ligeiramente superior à estática, com previsão mais acurada do VaR.</p>
<p><a href="#">Nikoloulopoulos et al. (2010)</a> - Dependência</p>	<p>Método: C- e D-vines, GARCH, IFM, AIC e <math>\chi^2</math> GOF; Objeto: índices de mercado de França, Alemanha, Reino Unido, Suíça e Noruega; Resultados: empregando a mesma família em todos os níveis das C- e D-vines estimadas, a cópula t-Student tende a ser a melhor com base na verossimilhança e no AIC. Para realizar inferências envolvendo as caudas esses métodos apenas não são suficientes, é necessário realizar também uma comparação do IFM e de estimações semi-paramétricas com estimações não-paramétricas para verificar qual a melhor cópula.</p>

Autor e Área	Método, Objeto e Resultados
<p><a href="#">Brechmann e Schepmeier (2013)</a> - Dependência - Comparativo C- e D-vine.</p>	<p>Método: C- e D-vines, AIC, BIC e testes de Vong e Clarke; Objeto: índices de mercado de Alemanha, França, Reino Unido, Estados Unidos, Japão e China; Resultados: há dependências positivas fortes entre os índices europeus, o francês sendo central para a explicação da dependência observada. Foram encontradas evidências de dependência caudal média a forte, bem como assimetrias na estrutura de dependência. Com base nos dados não foi possível selecionar um modelo, C- ou D-vine, e ambos contribuem com perspectivas adicionais derivadas de suas estruturas específicas.</p>

Finalmente, cabe destacar que, do grupo de grandes países latino-americanos, o Peru é o único com economia dolarizada ([Maya et al., 2015](#)). Por esse motivo investidores estrangeiros estão menos expostos a riscos referentes à taxa de câmbio no Peru e, portanto, o Novo Sol tem comportamento distinto do das outras moedas nacionais estudadas pelos autores - Real brasileiro, Peso chileno, Peso colombiano, Peso mexicano e Peso argentino. Pelo mesmo motivo é de se esperar que o índice de mercado peruano apresente comportamento distinto do dos outros países do Mercosul analisados nesta monografia.

[Maya et al. \(2015\)](#) verificaram um comportamento diferenciado também no caso da Argentina. Segundo os autores, características da história financeira do país, como o processo de reestruturação de sua dívida, tornam a Argentina um caso distinto do dos demais países.





## Capítulo 3

# Metodologia

Neste capítulo serão desenvolvidas as seguintes seções: tipo e descrição geral da pesquisa; caracterização do objeto de estudo; caracterização da população e amostra; caracterização dos instrumentos de pesquisa; e descrição dos procedimentos de coleta e de análise de dados.

### 3.1 Tipo e Descrição Geral da Pesquisa

O presente trabalho, por sua proposta e objeto de estudo, é de natureza quantitativa. Quanto a seu tipo, a pesquisa realizada pode ser classificada como de caráter descritivo, uma vez que visa descrever e estimar a estrutura de dependência de mercados financeiros. Para a consecução desta monografia foram utilizados dados secundários coletados no portal Yahoo Finance.

### 3.2 Caracterização do Objeto de Estudo

O objeto de estudo deste trabalho são os mercados financeiros de cinco das maiores economias do Mercosul e dos Estados Unidos. Para compreender o contexto em que interagem esses países, foram utilizados dados de seus índices de mercado, a saber:

Ibovespa (Brasil), Merval (Argentina), IPSA (Chile), S&P/BVL Peru ou Peru General (Peru) e S&P500 (Estados Unidos).

### 3.3 População e Amostra

A pesquisa consiste na análise da interdependência entre os retornos dos índices de mercado dos países estudados. A população estudada tem dimensão infinita, no entanto, o enfoque desta monografia é a compreensão da estrutura de dependência de Brasil, Argentina, Chile e Peru enquanto membros do Mercosul e sua relação com os Estados Unidos. Portanto, a amostra foi selecionada a partir do ingresso mais recente no bloco dentre os países estudados - o do Peru, em 2003 ([Brasil, 2015](#)). Para efeitos de análise, foram coletados os dados desde 01 de dezembro de 2003 a 22 de setembro de 2015.

### 3.4 Procedimentos de Coleta e de Análise dos Dados

Os dados necessários à realização da pesquisa, conforme explicitado anteriormente, são os retornos dos índices de mercado dos seis países estudados. Eles estão disponíveis no portal [Yahoo Finance \(2015\)](#), que é de acesso livre, sob os seguintes códigos: Ibovespa -  $\wedge$ BVSP; Merval -  $\wedge$ MERV; IPSA -  $\wedge$ IPSA; Peru General -  $\wedge$ SPBLPGPT; e S&P500 -  $\wedge$ GSPC.

Após coletados, os dados foram filtrados empregando-se o método AR-GARCH. Com os resultados obtidos, foram estimadas as D-vine Cópulas.

Nesta seção serão introduzidas as Funções de Distribuição, para, em seguida, serem apresentados os conceitos de Cópulas, limites de Fréchet-Hoeffding, medidas de dependência, classes de Cópulas conhecidas, D-vine Cópulas e o modelo ARMA-GARCH.

Aqui segue uma breve motivação para o que será discutido:

1. Os conhecimentos de funções de distribuição são necessários à compreensão das

cópuas, que são uma forma de obter funções de distribuição conjunta (de mais de uma variável).

2. Limites de Fréchet-Hoeffding e medidas de dependência são aspectos importantes para verificar se uma determinada cópula é adequada à modelagem dos dados analisados e se ela logra capturar propriedades relevantes destes.
3. As cópulas discutidas na seção classes de cópulas são as que serão testadas para a construção da D-vine e, portanto, nesta seção serão discutidas algumas de suas propriedades.
4. O modelo GARCH possibilita a extração dos resíduos (não observados) com base nos retornos (observados). Esse passo é importante para que reduzir os *clusters* de volatilidade e adequar os dados para a construção das cópulas.

O presente estudo consiste de uma análise multivariada, mais precisamente, em 5 dimensões. Portanto, a simplificação ao caso bivariado, embora comum na literatura, nem sempre será possível. Em muitos casos, a análise bivariada não é suficiente para a compreensão do trabalho realizado e da colaboração das D-vine cópulas para a simplificar a construção da estrutura multivariada. No que foi possível, optou-se por expressar os passos para se obter as fórmulas finais, bem como explicar as implicações destas para o estudo em questão.

### 3.4.1 Funções de Distribuição

Seja  $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_n)$  um vetor cujos componentes são variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ , onde  $\Omega$  é o espaço amostral e  $P$  é a probabilidade associada a cada evento de  $\mathbb{A}$ . Sua função de distribuição é dada por  $F = F_{\tilde{X}} = F_{X_1, \dots, X_n}$  e é definida como:

$$F_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = F_{\tilde{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Conforme leciona [James \(2011\)](#), a função de distribuição, também chamada de função de distribuição conjunta, obedece às seguintes propriedades:

1.  $F(x_1, \dots, x_n)$  é não-decrescente para cada uma das variáveis.
2.  $F(x_1, \dots, x_n)$  é contínua à direita em cada uma das variáveis.
3. Para todo  $i$ ,

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ em que } i = 1, 2, \dots, n; \text{ e} \quad (3.2)$$

$$\lim_{\forall i, x_i \rightarrow +\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1, \text{ em que } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

4.  $\Delta_{1, I_1} \dots \Delta_{n, I_n} F(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ , em que  $\Delta_{k, I} g(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a)$  e  $I_k = (a_k, b_k]$ ,  $a_k < b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Se  $F(x_1, \dots, x_n)$  é não-decrescente em  $x_1$ , e se para essa variável  $x_1$  temos que  $x < y$ , então  $F(x, \dots, x_n) \leq F(y, \dots, x_n)$ . Pela primeira propriedade temos que  $F(x_1, \dots, x_n)$  é não-decrescente para **todas** as variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , ou seja, lógica análoga à acima explicitada é aplicável a todas as variáveis de  $F$ .

A segunda propriedade mostra que se  $F(x_1, \dots, x_n)$  é contínua à direita em cada uma das variáveis  $x_1, \dots, x_n$ . Portanto, se  $y_m \downarrow x_1$  quando  $m \rightarrow +\infty$ , então  $F(y_m, \dots, x_n) \downarrow F(x_1, \dots, x_n)$  quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Da propriedade 3, Equação 3.2, temos que quando qualquer das variáveis de  $F(x_1, \dots, x_n)$  tende a  $-\infty$ ,  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Isso implica que basta que uma variável  $x_i \rightarrow -\infty$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , para que  $F(x_1, \dots, x_n)$  iguale a zero.

Ainda na propriedade 3, Equação 3.3, temos que, quando todos os  $x_i$  convergem simultaneamente para  $+\infty$ ,  $F(x_1, \dots, x_n)$  converge para 1, visto que o evento  $\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]$  converge para o evento certo  $\Omega$ . Quando apenas um  $x_i$  converge para  $+\infty$ , ou seja, quando  $x_i \rightarrow +\infty$ ,  $F(x_1, \dots, x_n)$  converge para a distribuição conjunta das  $n - 1$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ .

A propriedade 4 pode ser descrita por meio de operadores de diferença. Para  $I = (a, b]$  e  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  definimos  $\Delta_{k,I}g(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_{k-1}, b) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a)$ . Essa propriedade representa a formulação da propriedade  $P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) \geq 0$  para a função de distribuição.

Para  $n < 2$ , as propriedades 1, 2 e 3 são suficientes para que  $F$  seja uma função de distribuição. No entanto, para  $n \geq 2$  temos que agregar a quarta propriedade. Assim, temos a seguinte definição geral:

**Definição 1 (Função de Distribuição)** Uma função  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as propriedades 1, 2, 3 e 4 é uma função de distribuição  $n$ -dimensional.  $\diamond$

Um exemplo de função que satisfaz as propriedades 1, 2 e 3 mas não é função de distribuição de um vetor aleatório  $(X, Y)$  é apresentado por [James \(2011\)](#) e está transcrito a seguir.

**Exemplo 2** Seja  $F_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow I$  tal que:

$$F_0(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e } x + y \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função  $F_0(x, y)$  satisfaz às três primeiras propriedades: é não-decrescente em cada uma das variáveis; é contínua à direita em cada uma das variáveis; quando uma variável tende a menos infinito,  $F_0(x, y) = 0$  e quando todas tendem a mais infinito,  $F_0(x, y) = 1$ . No entanto,  $F_0(x, y)$  não é função de distribuição de um vetor aleatório. Se fosse, teríamos que  $0 \leq P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) = F_0(1, 1) - F_0(1, 0) - F_0(0, 1) + F_0(0, 0)$ , mas, na realidade, temos que:

$$F_0(1, 1) - F_0(1, 0) - F_0(0, 1) + F_0(0, 0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$$

e, portanto,

$$0 \leq P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) \neq F_0(1,1) - F_0(1,0) - F_0(0,1) + F_0(0,0).$$

◇

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com distribuição acumulada  $F_X(x)$  e defina a variável aleatória  $Y = F_X(X)$ . Então  $Y$  tem distribuição uniforme:  $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ . Portanto, independente da distribuição de  $X$  (se normal, t de Student ou Weibull, por exemplo),  $F_X(X)$  tem distribuição uniforme. A prova algébrica referente a este resultado encontra-se no Apêndice B, Teorema 4. Note que, embora não haja limitações para  $x \in \mathbb{R}$ , que pode variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $u$  assume apenas valores no intervalo  $[0,1]$ .

Com a transformação acima, dados modelados como variáveis aleatórias de qualquer distribuição contínua podem ser convertidos em variáveis aleatórias com distribuição uniforme. Esse fato tem implicações importantes para o estudo de cópulas, visto que é possível criar uma cópula  $n$ -dimensional cujas  $n$  marginais tem distribuição uniforme, embora representem variáveis distribuídas das mais distintas formas, como veremos a seguir.

### 3.4.2 Cópulas

Cópulas são funções que ligam funções de distribuição multivariadas a suas marginais unidimensionais. As cópulas permitem separar a distribuição marginal da estrutura de dependência, viabilizando a estimação de distribuições multivariadas cujas marginais possuem distribuições distintas entre si. Cópulas são úteis quando se quer estimar a distribuição conjunta e as marginais são conhecidas, mas há pouca ou nenhuma informação sobre sua distribuição conjunta, especialmente quando as variáveis em análise não apresentam distribuição normal (Trivedi e Zimmer, 2005).

**Definição 2 (Cópula)** Uma cópula  $n$ -dimensional ( $n$ -cópula) é uma função  $C$  que leva elementos de unidade  $[0,1]^n$  ao intervalo unitário  $[0,1]$  e que satisfaz as seguintes condições:

1.  $C(1, \dots, 1, u_m, 1, \dots, 1) = u_m$  para  $m \leq n$ ,  $u_m \in [0,1]$ ;
2.  $C(u_1, \dots, u_n) = 0$  para  $u_m = 0$  para  $m \leq n$ ;
3.  $C$  é  $n$ -crescente.

◇

Uma cópula  $C$  é dita simétrica se o vetor de variáveis aleatórias  $(U_1, \dots, U_n) \sim C$  implica que  $(1 - U_1, \dots, 1 - U_n) \sim C$ .

Conforme leciona [Nelsen \(2007\)](#), o teorema de Sklar, enunciado abaixo, é um teorema chave na teoria de cópulas. Dele derivam diversas aplicações de cópulas em estatística e, conseqüentemente, em diversas áreas de pesquisa - incluindo finanças. O teorema elucida o papel das cópulas para a construção de uma maneira de expressar a função de distribuição conjunta em função de suas marginais univariadas.

**Teorema 1 (Teorema de Sklar)** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias com função de distribuição  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, e distribuição conjunta  $F$ . Então existe uma cópula  $C$  tal que, para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (3.4)$$

Se  $F_1$  e  $F_2$  são contínuas, então  $C$  é única; caso contrário,  $C$  é unicamente determinada em  $Im(F_1) \times Im(F_2)$ . Reciprocamente, se  $C$  é uma cópula e  $F_1$  e  $F_2$  são funções de distribuição, então  $F$  é uma função de distribuição conjunta com marginais  $F_1$  e  $F_2$ . ◇

Tem-se pelo Teorema 1 que é possível construir uma distribuição conjunta quando apenas as distribuições marginais são de fato conhecidas. Complementarmente, uma

consequência da unicidade da cópula que relaciona  $F_1, \dots, F_n$  enunciada pelo teorema de Sklar é a possibilidade de interpretá-la como uma função de dependência (Trivedi e Zimmer, 2005).

Tomando por base duas variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  com função de distribuição  $F_1$  e  $F_2$ , distribuição conjunta  $F_{1,2}$  e cópula  $C$ , temos:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (3.5)$$

Nesse caso,  $C$  é uma cópula com marginais com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$  e domínio  $I^2$ .  $C$  é informativa da estrutura de dependência entre os componentes de  $(X_1, X_2)$ , enquanto as funções de distribuição  $F_1$  e  $F_2$  contêm informações sobre as marginais. A transformação  $F_X(X) = Y$ , como visto na subseção anterior, permite que a estrutura de dependência e a distribuição marginal sejam analisadas separadamente.

Para compreender melhor a relação entre funções de distribuição multivariadas e suas marginais univariadas, prosseguiremos com a definição de quase-inversa e o corolário de Sklar.

**Definição 3 (Quase-inversa)** Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow I$  uma função de distribuição. Então a quase-inversa (ou inversa generalizada) de  $F$  é a função  $F^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1. se  $t \in Im(F)$ , então  $F^{-1}(t)$  é qualquer número  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = t$ , ou, equivalentemente, para todo  $t$  em  $Im(F)$ ,  $F(F^{-1}(t)) = t$ ;
2. se  $t \notin Im(F)$ , então,  $F^{-1}(t) = \inf(x|F(x) \geq t) = \sup(x|F(x) \leq t)$ .

◇

Usando o conceito de quase-inversa e a transformação da Equação 3.5 apresentados acima, obtemos o corolário de Sklar a seguir.

**Corolário 1 (Corolário de Sklar)** Seja  $F$  uma função de distribuição conjunta contínua com marginais  $F_1$  e  $F_2$ . Sejam  $F_1^{-1}$  e  $F_2^{-1}$  respectivamente as quase-inversas de



$F_1$  e  $F_2$  e  $C$  a cópula que associa  $F$ ,  $F_1$  e  $F_2$ . Então, para todo  $(u_1, u_2) \in I^2$ ,

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \quad (3.6)$$

◇

O Corolário 1 é relevante para o estudo de cópulas porque dele deriva uma metodologia para a construção destas, conhecida como método da inversão (Trivedi e Zimmer, 2005).

Tanto o Teorema de Sklar (Teorema 1), quanto o Corolário de Sklar (Corolário 1) podem ser estendidos para o caso multivariado. Suas versões  $n$ -variadas estão enunciadas no Apêndice C (pág. 98).

Para o estudo de dependência é relevante compreender em que casos ocorre independência. No estudo de cópulas, a independência está claramente enunciada no Teorema 2.

**Teorema 2 (Cópula do Produto)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias contínuas. Então  $X_1, \dots, X_n$  são independentes se e somente se  $C_{X_1 \dots X_n}(u_1, \dots, u_n) = \Pi^n(u_1, \dots, u_n)$ , onde  $\Pi^n$  é a cópula do produto:  $\Pi^n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n$ . ◇

Em muitos casos, o que é de interesse do pesquisador é conhecer a probabilidade de que se ultrapasse determinado valor das variáveis aleatórias em análise. Esse é o caso, por exemplo, quando se estuda expectativa de vida, em que costuma ser importante saber a probabilidade de um indivíduo sobreviver além de um determinado momento  $x$  (Nelsen, 2007).

Esse tipo de análise pode ser realizado com o auxílio da função sobrevivência, dada por  $\bar{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$ . É possível construir a cópula sobrevivência ( $\bar{C}$ ), que modela a probabilidade  $P[U_1 > u_1, \dots, U_m > u_m]$  e é um caso específico de cópula associada (Trivedi e Zimmer, 2005).

Se  $(U_1, U_2) \sim C$ , então também existem cópulas associadas aos pares bivariados uniformes  $(U_1, 1 - U_2)$ ,  $(1 - U_1, U_2)$  e  $(1 - U_1, 1 - U_2)$ . O último par é o que dá origem à cópula sobrevivência, que pode ser escrita como:

$$\bar{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2). \quad (3.7)$$

Um conceito relevante e que será muito empregado para a construção das D-vine cópulas é densidade de uma cópula bivariada absolutamente contínua, denotada  $c$ :

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad (3.8)$$

onde  $u_1 = F_1(x_1)$  e  $u_2 = F_2(x_2)$ . Cumpre destacar que  $c(u_1, u_2)$  também pode ser denotada  $c_{12}(u_1, u_2)$  ou  $c_{1,2}(u_1, u_2)$ .

### 3.4.3 Limites de Fréchet-Hoeffding

Seja  $F(x_1, \dots, x_m)$  uma função de distribuição conjunta  $m$ -variada, com marginais univariadas  $F_1, \dots, F_m$  definidas no intervalo  $[0, 1]$ , podemos encontrar os limites inferior  $F_L$  e superior  $F_U$  de Fréchet-Hoeffding realizando as seguintes operações:

$$F_L(x_1, \dots, x_m) = \max \left[ \sum_{j=1}^m F_j - m + 1, 0 \right] = W; \quad (3.9)$$

$$F_U(x_1, \dots, x_m) = \min [F_1, \dots, F_m] = M. \quad (3.10)$$

Desse modo,  $W = F_L(x_1, \dots, x_m) \leq F(x_1, \dots, x_m) \leq F_U(x_1, \dots, x_m) = M$ , onde  $F_U$  sempre é uma função de distribuição acumulada e  $F_L$  é função de distribuição acumulada para  $m = 2$  e pode ou não ser função de distribuição acumulada para  $m > 2$  (Trivedi e Zimmer, 2005).

Os limites de Fréchet-Hoeffding também se aplicam a cópulas. O limite superior

$C_U(x_1, \dots, x_m)$  é uma função de distribuição. O limite inferior, quando for função de distribuição, pode ser expresso como  $C_L(x_1, \dots, x_m)$ . Assim, temos os limites de Fréchet-Hoeffding para Cópulas:

$$C_L(x_1, \dots, x_m) \leq C(x_1, \dots, x_m) \leq C_U(x_1, \dots, x_m). \quad (3.11)$$

Seja  $C(u_1, \dots, u_m)$  uma cópula onde  $u_i = F(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , os limites inferior e superior de Fréchet-Hoeffding serão dados por:

$$C_L(u_1, \dots, u_m) = W(u_1, \dots, u_m) = \max \left[ \sum_{j=1}^m u_j - m + 1, 0 \right]; \quad (3.12)$$

$$C_U(u_1, \dots, u_m) = M(u_1, \dots, u_m) = \min [u_1, \dots, u_m]. \quad (3.13)$$

Segundo [Trivedi e Zimmer \(2005\)](#), é desejável que a cópula compreenda todo o espaço entre os limites inferior e superior e que, quando  $\theta$  (o parâmetro de dependência da cópula) se aproxima do limite superior (inferior) de seu intervalo admissível, a cópula se aproxime do limite superior (inferior) de Fréchet-Hoeffding.

### 3.4.4 Medidas de Dependência

Os componentes do vetor de variáveis aleatórias  $(X_1, X_2)$  são dependentes (associadas) se  $F(X_1, X_2) \neq F_1(X_1)F_2(X_2)$ . Para o caso bivariado, tomemos  $\delta(X_1, X_2)$  como um escalar que mede a dependência entre  $X_1$  e  $X_2$ .

Quatro propriedades desejáveis de  $\delta(X_1, X_2)$  são:

1. simetria -  $\delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1)$ ;
2. normalização -  $-1 \leq \delta(X_1, X_2) \leq +1$ ;
3.  $\delta(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow (X_1, X_2)$  é comonotônico;  
 $\delta(X_1, X_2) = -1 \Leftrightarrow (X_1, X_2)$  é contramonotônico;

4. Para uma transformação estritamente monotônica  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $X$ :

$$\delta(T(X_1), X_2) = \begin{cases} \delta(X_2, X_1), & T \text{ estritamente crescente} \\ -\delta(X_2, X_1), & T \text{ estritamente decrescente.} \end{cases}$$

A dependência entre variáveis aleatórias pode ser medida usando diversos conceitos alternativos, três dos mais amplamente utilizados são: correlação linear; concordância; e dependência caudal.

### Coefficiente de Correlação

O coeficiente de correlação de Pearson entre um par de variáveis aleatórias  $(X_1, X_2)$  é definido como:

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\text{cov}[X_1, X_2]}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}, \quad (3.14)$$

onde  $\text{cov}[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$  e os desvios padrões  $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} > 0$ .

O coeficiente de correlação é uma medida de dependência linear, é simétrico e é invariante a transformações lineares das variáveis (Trivedi e Zimmer, 2005). Os extremos da desigualdade  $-1 \leq \rho_{X_1 X_2} \leq 1$  indicam dependência perfeita negativa ( $-1$ ) e positiva ( $+1$ ).  $\rho_{X_1 X_2} = 0$ , por sua vez, indica independência linear entre as variáveis. Se  $(X_1, X_2)$  tem distribuição normal bivariada, então  $\rho_{X_1 X_2}$  é totalmente informativo de sua dependência conjunta.

Considerando as propriedades desejáveis das medidas de dependência, algumas limitações do coeficiente de correlação são:

1.  $\rho_{X_1 X_2} = 0$  implica apenas  $\text{cov}[X_1, X_2] = 0$ , enquanto dependência zero implica  $\text{cov}[\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)] = 0$ , sejam  $\phi_1$  e  $\phi_2$  duas funções quaisquer;
2.  $\rho_{X_1 X_2} = 0$  não está definido para distribuições com caudas pesadas para as quais não existe o segundo momento (variância);

3.  $\rho_{X_1 X_2} = 0$  não é invariante a transformações não-lineares estritamente crescentes.

Como pontua [Hu \(2006\)](#), o coeficiente de correlação mede apenas o grau (nível) de dependência e, portanto, reflete a força em geral da relação observada. Ele não descreve a maneira como as variáveis (no caso, os mercados) estão relacionados, sua estrutura de dependência.

### Rho de Spearman e Tau de Kendall

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, e distribuição conjunta  $F$ . Rho de Spearman é definido por:

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)). \quad (3.15)$$

O Rho de Spearman ( $\rho_S(X_1, X_2)$ ) mede a correlação linear entre  $F_1(X_1)$  e  $F_2(X_2)$ .

Tau de Kendall, por sua vez, é definido por:

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) &= P[(X_{11} - X_{12})(X_{21} - X_{22}) > 0] - P[(X_{11} - X_{12})(X_{21} - X_{22}) < 0] \\ &= P[\text{Concordância}] - P[\text{Discordância}], \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $(X_{11}, X_{21})$  e  $(X_{12}, X_{22})$  são dois pares de variáveis independentes de  $F$ .

$\rho_S(X_1, X_2)$  e  $\tau(X_1, X_2)$  não dependem da forma funcional das distribuições marginais. Ambos estão definidos no intervalo  $[-1, 1]$ , são medidas de dependência monotônica entre  $X_1$  e  $X_2$ , apresentam as propriedades de simetria, normalização, co e contramonotonicidade e assumem valor zero em caso de independência entre as variáveis. Complementarmente, temos que:

1.  $\rho_S(X_1, X_2) = \tau(X_1, X_2) = -1$  se e somente se  $C = C_L$  e  $X_2 = T(X_1)$  com  $T$  decrescente;

2.  $\rho_S(X,Y) = \tau(X,Y) = 1$  se e somente se  $C = C_U$  e  $X_2 = T(X_1)$  com  $T$  crescente.

Ambos Rho de Spearman e Tau de Kendall são medidas baseadas no conceito de concordância, que se refere à propriedade de que valores elevados de uma variável aleatória estejam associados com valores elevados de outra variável aleatória. Discordância, por sua vez, se refere a valores elevados de uma variável aleatória estarem associados a valores pequenos de outra variável aleatória (Trivedi e Zimmer, 2005).

A relação entre  $\rho_S$  e  $\tau$  é dada pelo par de desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\tau - \frac{1}{2} &\leq \rho_S \leq \frac{1}{2} + \tau - \frac{1}{2}\tau^2 \text{ para } \tau \geq 0; \\ \frac{1}{2}\tau^2 + \tau - \frac{1}{2} &\leq \rho_S \leq \frac{3}{2}\tau + \frac{1}{2} \text{ para } \tau \leq 0. \end{aligned}$$

Rho de Spearman e Tau de Kendall também podem ser escritos em função de cópulas:

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2; \quad (3.17)$$

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1. \quad (3.18)$$

## Dependência Caudal

Em alguns casos é do interesse do pesquisador conhecer a eventual concordância entre valores extremos (caudais) de variáveis aleatórias. É o caso, por exemplo, de quando se quer estimar a probabilidade de os índices de mercado de dois países excederem (ou ficarem abaixo de) um determinado nível. Esse tipo de informação é do interesse de gerentes de portfólio investindo internacionalmente, como discutido no Referencial Teórico (Seção 2.4).

A dependência caudal pode ser definida em termos da função sobrevivência conjunta  $S(u_1, u_2)$  de variáveis aleatórias uniformes padrão  $u_1$  e  $u_2$ . Sejam  $\lambda_L$  e  $\lambda_U$  as medidas

de dependência caudal inferior e superior, respectivamente,

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{C(v,v)}{v}, \quad (3.19)$$

onde  $C(v,v)/v = P[U_i < v | U_j < v]$ , para  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ ; e

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{S(v,v)}{1-v}, \quad (3.20)$$

onde  $S(u_1, u_2) = P[U_1 > u_1, U_2 > u_2]$  e  $S(v,v)/(1-v) = P[U_i > v | U_j > v]$ , para  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ .

A dependência caudal inferior (ou superior) entre dois mercados financeiros existe quando a probabilidade de eventos extremos conjuntos negativos (ou positivos) é maior que o previsto pelas distribuições marginais (Canela e Pedreira, 2012).

### 3.4.5 Classes de Cópulas

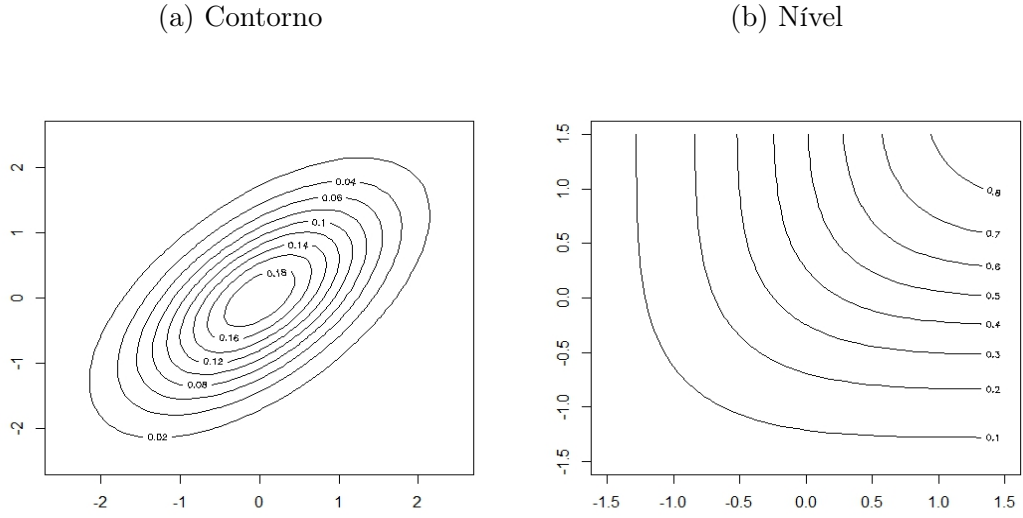
Embora seja possível construir cópulas com as mais diversas estruturas, há cópulas amplamente conhecidas e empregadas. Algumas dessas cópulas são a Gaussiana, também conhecida como Normal, e as de t-Student, Frank, Gumbel e Clayton.

Um aspecto primordial do emprego de cópulas é selecionar uma cópula que captura adequadamente as estruturas de dependência dos dados sem sacrificar propriedades atrativas das marginais (Trivedi e Zimmer, 2005). Para atingir esse objetivo, num momento inicial é necessário conhecer as cópulas já existentes e selecionar as que melhor capturem as características das marginais.

#### Cópula Gaussiana

Seja  $F$  uma função  $m$ -variada, a cópula associada a  $F$  com parâmetro de dependência entre as marginais  $\theta$  é uma função de distribuição  $C : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  descrita

Figura 3.1: Curvas de Nível da Cópula Gaussiana com Marginais Normais Padrão



por:

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m); \theta) = C(u_1, \dots, u_m; \theta). \quad (3.21)$$

Tomando por base essa notação, a cópula Gaussiana bivariada apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; \theta) &= \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}} \times \left\{ \frac{-(s^2 - 2\theta st + t^2)}{2(1-\theta^2)} \right\} ds dt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\Phi$  é a função de distribuição acumulada da normal padrão,  $\Phi_G(u_1, u_2)$  é a distribuição da normal padrão bivariada com parâmetro  $\theta$  restrito ao intervalo  $(0,1)$ .

Como destaca [Hu \(2006\)](#), a cópula Gaussiana não necessariamente equivale à distribuição Gaussiana conjunta. Tal fato ocorre somente quando as marginais também são normalmente distribuídas. Por esse motivo, a cópula Gaussiana é uma hipótese mais fraca que uma distribuição Gaussiana conjunta.

A estrutura de dependência Gaussiana é simétrica, como pode ser verificado na



Figura 3.1. No contexto de retornos de mercado, isso implica que dois mercados são igualmente propensos a períodos de crise e crescimento conjuntos (Hu, 2006). Adicionalmente, não há dependência caudal.

### Cópula t-Student

A cópula t-Student é um exemplo de cópula com dois parâmetros - um indicando o grau de liberdade ( $\nu$ ) e o outro a correlação ( $\rho$ ). Ela é representada por:

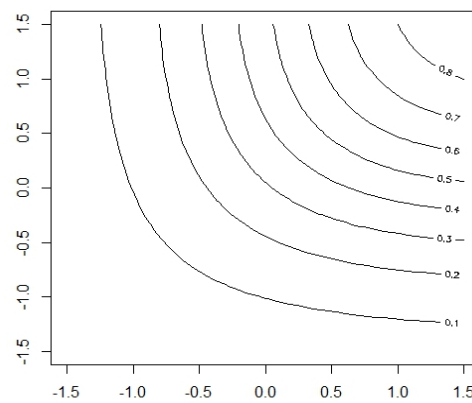
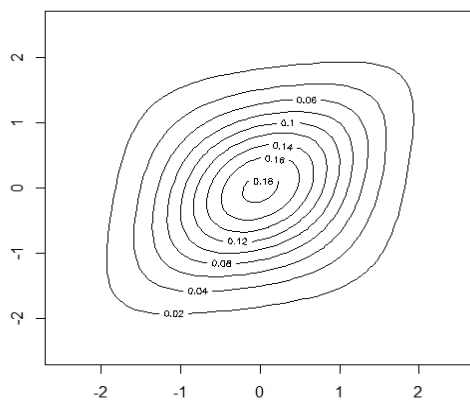
$$C^t(u_1, u_2; \theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{t_{\theta_1}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{\theta_1}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta_2^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2\theta_2 st + t^2}{\nu(1-\theta_2^2)} \right\}^{-(\theta_1+2)/2} ds dt, \quad (3.23)$$

onde  $t_{\theta_1}^{-1}(u_1)$  é o inverso da função de distribuição acumulada da distribuição t-Student univariada padrão com  $\theta_1$  graus de liberdade. O parâmetro  $\theta_1$  controla o peso das caudas. Para  $\theta_1 < 3$ , a variância não existe, enquanto para  $\theta_1 < 5$  o quarto momento não existe. Quando  $\theta_1 \rightarrow \infty$ ,  $C^t(u_1, u_2; \theta_1, \theta_2) \rightarrow \Phi_G(u_1, u_2; \theta_2)$ .

Figura 3.2: Curvas de Nível da Cópula de t-Student com Marginais Normais Padrão

(a) Contorno

(b) Nível



A cópula de t-Student capta dependências simétricas, inclusive nas caudas de probabilidade (Figura 3.2). Dessa forma, a dependência caudal inferior é igual à superior e ambas são dadas por  $2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right)$ .

### Cópulas Arquimedianas

As Cópulas de Frank, Gumbel e Clayton, previamente introduzidas, fazem parte da classe das Cópulas Arquimedianas. Essa classe de cópulas é popular porque as cópulas que a ela pertencem são facilmente deriváveis e são capazes de capturar amplos espectros de dependência (Trivedi e Zimmer, 2005). Nelsen (2007) complementa afirmando que essas cópulas possuem amplo escopo de aplicação devido à grande variedade de famílias de cópulas arquimedianas. Considerando somente as cópulas com apenas um parâmetro, este autor enuncia 22 famílias pertencentes à classe das cópulas arquimedianas.

**Definição 4 (Função Geradora)** Seja  $\Phi$  uma classe de funções contínuas  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty]$  com as propriedades:

1.  $\varphi(1) = 0$ ;
2.  $\varphi$  é uma função decrescente e convexa:

$$\varphi'(t) < 0 \text{ e } \varphi''(t) > 0, \text{ para } 0 < t < 1. \quad (3.24)$$

Satisfeitas essas condições,  $\varphi$  é capaz de gerar uma função de distribuição bivariada e, portanto, é chamada de função geradora.  $\diamond$

**Definição 5 (Pseudo-inversa de  $\varphi$ )** Seja  $\varphi$  uma função contínua, estritamente decrescente de  $I$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$ . A pseudo-inversa de  $\varphi$  é a função  $\varphi^{[-1]}$  com

$Dom\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$  e  $Im(\varphi^{[-1]}) = I$  dada por:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (3.25)$$

◇

Vale destacar que  $\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = t$ .

No caso em que  $\varphi(0) < \infty$ , o gerador é não-estrito e sua pseudo-inversa  $\varphi^{[-1]}$  existe. Se  $\varphi(0) = \infty$ , o gerador é dito estrito e a inversa  $\varphi^{-1}$  existe. Neste caso, temos que  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

**Definição 6 (Cópula Arquimediana)** Seja  $\varphi$  uma função contínua, estritamente decrescente e convexa de  $I$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$  e seja  $\varphi^{[-1]}$  a pseudo-inversa de  $\varphi$ . Então, a função  $C$  de  $I^2$  a  $I$  é uma Cópula Arquimediana e é dada por:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (3.26)$$

◇

Diferentes funções geradoras dão origem a cópulas arquimedianas distintas. Adicionalmente, as propriedades dos geradores afetam a dependência caudal da cópula resultante.

**Teorema 3 (Propriedades de Cópulas Arquimedianas)** Seja  $C$  uma Cópula Arquimediana com gerador  $\varphi$ . Então:

1.  $C$  é simétrica:  $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$  para todo  $u_1, u_2 \in I$ ;
2.  $C$  é associativa:  $C(C(u_1, u_2), u_3) = C(u_1, C(u_2, u_3))$  para todo  $u_1, u_2, u_3 \in I$ ;
3. se  $c > 0$  é qualquer constante, então  $c\varphi$  também é um gerador de  $C$ .

◇

No que se refere a medidas de dependência, as cópulas arquimedianas possuem a especificidade de o Tau de Kendall ( $\tau$ ) possuir uma fórmula que permite quantificar a dependência de forma relativamente direta, uma vez que  $\tau$  é uma função do gerador:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (3.27)$$

A densidade de cópulas Arquimedianas bivariadas é dada por:

$$c_{u_1 u_2} = \frac{\varphi''(C(u_1, u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{[\varphi'(C(u_1, u_2))]^3}, \quad (3.28)$$

sendo que as derivadas não existem quando  $\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(0)$ .

A seguir estão enunciados alguns exemplos de cópulas arquimedianas e seus geradores.

Tabela 3.1: Exemplos de Cópulas Arquimedianas

Família	Função $C(u_1, u_2)$	Gerador $\varphi(t)$	Estrito	$\theta \in$
Clayton	$[\max(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	se $\theta \geq 0$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\ln \left[ \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]$	sim	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$\exp \left( - [(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta} \right)$	$(-\ln t)^\theta$	sim	$[1, \infty)$

$\theta$  é o parâmetro de dependência entre as marginais.

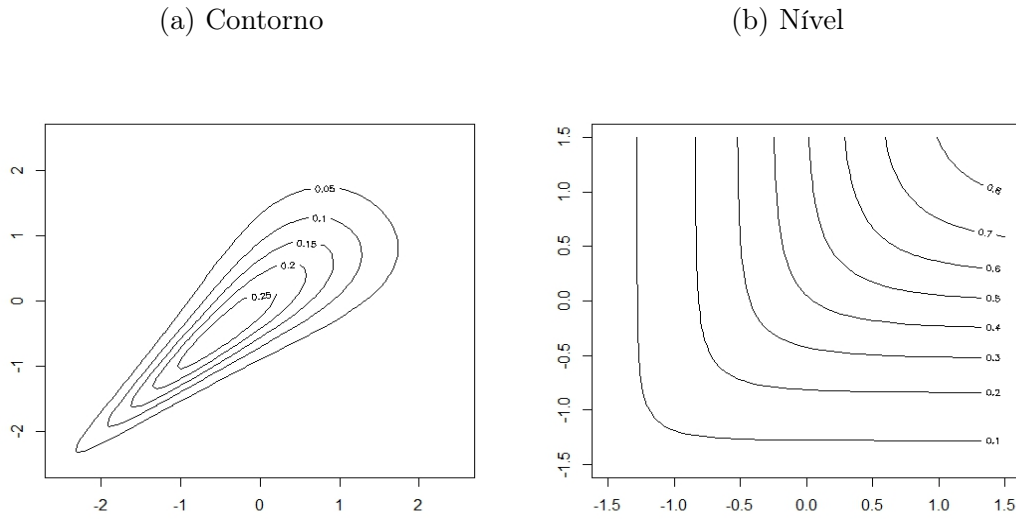
Tabela construída pela autora com dados de [Trivedi e Zimmer \(2005\)](#), p. 46, e [Nelsen \(2007\)](#), p. 116-117.

### Cópula de Clayton

No caso da cópula de Clayton, conforme destacam [Trivedi e Zimmer \(2005\)](#): quando  $\theta$  se aproxima de zero, as marginais se tornam independentes; quando  $\theta$  se aproxima

do infinito, a cópula alcança o limite superior de Fréchet-Hoeffding; no entanto, para nenhum valor a cópula alcança o limite inferior de Fréchet-Hoeffding.

Figura 3.3: Curvas de Nível da Cópula de Clayton com Marginais Normais Padrão



A cópula de Clayton não captura dependência negativa e exibe forte dependência caudal à esquerda e dependência caudal relativamente fraca à direita (ver Figura 3.3). A dependência caudal inferior é dada por  $2 - 1/\theta$  e a superior é igual a 0.

O Tau de Kendall para a cópula de Clayton possui uma fórmula simples:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \tag{3.29}$$

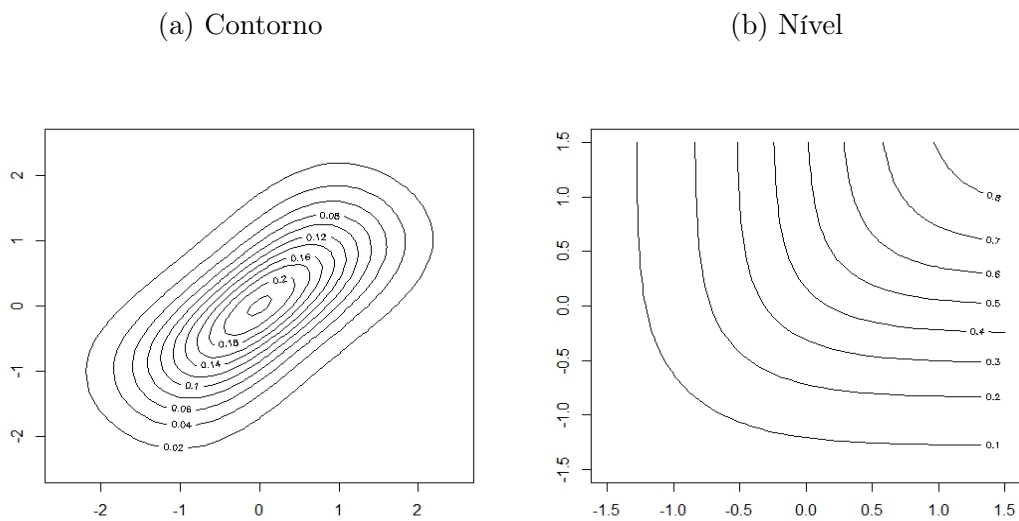
A densidade da cópula de Clayton é dada por:

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta)(u_1 u_2)^{-\theta-1} \left( u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-2-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.30}$$

### Cópula de Frank

A cópula de Frank, por sua vez, modela dependências simétricas (ver Figura 3.4) e permite dependência negativa entre as marginais. A cópula de Frank é dita compreensiva, visto que ambos limites de Fréchet-Hoeffding estão inclusos no seu espectro de dependência:  $\theta = -\infty$  corresponde ao limite inferior e  $\theta = +\infty$  corresponde ao limite superior. Quando  $\theta$  se aproxima de zero, as marginais são independentes.

Figura 3.4: Curvas de Nível da Cópulas de Frank com Marginais Normais Padrão



Embora, em teoria, a cópula de Frank possa ser empregada para modelar dados com dependência positiva ou negativa forte, sua dependência caudal é fraca: as dependências caudais inferior e superior são iguais a 0. A dependência mais forte está centralizada no meio da distribuição, o que sugere que essa cópula é mais apropriada para dados com dependência caudal fraca (Trivedi e Zimmer, 2005).

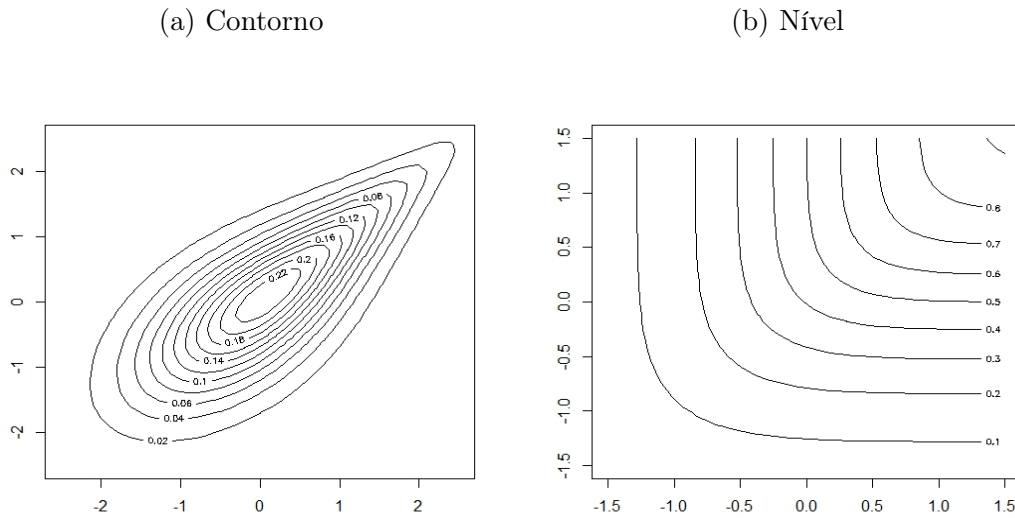
A densidade da cópula de Frank é dada por:

$$c(u_1, u_2) = \frac{-\theta(e^{-\theta} - 1)e^{-\theta(u_1+u_2)}}{((e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) + (e^{\theta} - 1))^2}. \quad (3.31)$$

### Cópula de Gumbel

A última cópula arquimediana a ser analisada é a de Gumbel. Os valores  $\theta = 1$  e  $\theta = +\infty$  estão associados, respectivamente, à independência e ao limite superior de Fréchet-Hoeffding. Para nenhum valor de  $\theta$  a cópula de Gumbel atinge o limite inferior de Fréchet-Hoeffding.

Figura 3.5: Curvas de Nível da Cópula de Gumbel com Marginais Normais Padrão



A dependência caudal inferior é igual a 0 e a superior é dada por  $2 - 2^{(1/\theta)}$ . Esse fato pode ser visualizado na Figura 3.5a, que ilustra a forte dependência caudal superior. De modo similar à cópula de Clayton, a cópula de Gumbel não permite dependência negativa.

A densidade da cópula de Gumbel é dada por:

$$c(u_1, u_2) = \exp \left[ - \left( \tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \left( \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \right)^{-1} \frac{ \left( \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \right)^{\theta-1} }{ \left( \tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta \right)^{2-\frac{1}{\theta}} } \left[ \left( \tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} + \theta - 1 \right], \quad (3.32)$$

onde  $\tilde{u}_1 = -\ln(u_1)$  e  $\tilde{u}_2 = -\ln(u_2)$ .

Por fim, cumpre destacar que a cópula de Gumbel é a única família de cópulas

extremas que é também cópula arquimediana (Nelsen, 2007).

### Classes de Cópuas - Discussão Final

As características dos limites e casos especiais das três cópuas arquimedias discutidas acima estão listadas na Tabela 3.2 abaixo.

Tabela 3.2: Propriedades das Cópuas Arquimedias

Família	Valor de $\theta$		
	$C = W$	$C = M$	$C = \Pi$
Clayton	-1	$\infty$	$0^+$ e $0^-$
Frank	$-\infty$	$\infty$	$0^+$ e $0^-$
Gumbel	NA	$\infty$	1

$W$ : limite inferior de Fréchet Hoeffding;  $M$ : limite superior de Fréchet-Hoeffding;  $\Pi$ : independência entre as marginais; NA: não se aplica.

Tabela construída pela autora com dados de Nelsen (2007), p. 116-117.

Para facilitar a visualização das propriedades das cópuas trabalhadas neste estudo, foi montada a Tabela 3.3 que sintetiza alguns dos dados relevantes previamente apresentados.

Tabela 3.3: Propriedades das Cópuas Utilizadas

Família	Parâmetro	DC Inferior	DC Superior
Gaussiana	$\rho \in (-1,1)$	0	0
t-Student	$\rho \in (-1,1), \nu > 2$	$2t_{\nu+1} \left( -\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$	$2t_{\nu+1} \left( -\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$
Clayton	$\theta > 0$	$2 - \frac{1}{\theta}$	0
Frank	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	0	0
Gumbel	$\theta \geq 1$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$

DC: dependência caudal; Parâmetro é o parâmetro de dependência entre as marginais.

Tabela construída pela autora com dados de Brechmann e Schepsmeier (2013), p. 8.



### 3.4.6 D-vine Cópulas

Seja  $\mathbf{X}$  o conjunto de  $n$  variáveis tal que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . A função de densidade conjunta de  $\mathbf{X}$  é dada por  $f_X(x_1, \dots, x_n)$  e pode ser fatorada como

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{x_n}(x_n) f_{x_{n-1}|x_n}(x_{n-1}|x_n) f_{x_{n-2}|x_{n-1}, x_n}(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \dots f_{x_1|x_2, \dots, x_n}(x_1|x_2, \dots, x_n). \quad (3.33)$$

A Equação 3.33 mostra que toda distribuição de densidade conjunta contém descritores tanto do comportamento de variáveis individuais, quanto da estrutura de dependência entre as variáveis. Como visto no Teorema de Sklar (1), cópulas são capazes de isolar a descrição da estrutura de dependência. Reescrevendo a Equação 3.33 em termos de densidades de cópulas (Equação 3.8, página 40), obtemos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1,2,\dots,n}(u_1, \dots, u_n) f(x_1) \dots f(x_n), \quad (3.34)$$

onde  $u_1 = F_1(x_1)$  e  $u_2 = F_2(x_2)$ . Para o caso bivariado, por exemplo, obtém-se  $f(x_1, x_2) = c_{1,2}(u_1, u_2) f(x_1) f(x_2)$ .

Dada a função de densidade conjunta, é possível obter a função de densidade condicional:

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2} = c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f(x_1). \quad (3.35)$$

No caso trivariado, a função de densidade condicional assume a forma:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2, x_3) &= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2)) f(x_1|x_2) \\ &= c_{1,2|3}(F(x_1|x_3), F(x_2|x_3)) f(x_1|x_3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo  $f(x_1|x_2)$  pelo resultado da Equação 3.35, verificamos que

$$\begin{aligned}
f(x_1|x_2,x_3) &= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2),F(x_3|x_2))f(x_1|x_2) \\
&= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2),F(x_3|x_2))c_{1,2}(F_1(x_1),F_2(x_2))f(x_1),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ou, alternativamente,

$$\begin{aligned}
f(x_1|x_2,x_3) &= c_{1,2|3}(F(x_1|x_3),F(x_2|x_3))f(x_1|x_3) \\
&= c_{1,2|3}(F(x_1|x_3),F(x_2|x_3))c_{1,3}(F_1(x_1),F_3(x_3))f(x_1).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para o caso  $n$ -dimensional, tomemos  $\bar{v}$  um vetor  $n$ -dimensional, onde  $v_j$  é um componente de  $\bar{v}$  escolhido arbitrariamente e  $\bar{v}_{-j}$  é o vetor  $\bar{v}$  excluindo-se este componente. Por definição,  $1 \leq j \leq n$ . A fórmula para decomposição da função de densidade condicional em termos de pares de cópula é:

$$f(x|\bar{v}) = c_{x,\bar{v}_j|\bar{v}_{-j}}(F(x|\bar{v}_{-j}),F(\bar{v}_j|\bar{v}_{-j}))f(x|\bar{v}_{-j}), \tag{3.39}$$

onde os elementos  $f(x|\bar{v}_{-j})$  são calculados recursivamente. As funções de distribuição acumulada condicionais na Equação 3.39 podem ser encontradas recursivamente pela Equação 3.40 abaixo.

$$F_{j|v}(x_j|x_v) = \frac{\partial C_{k|v-k}(F_{k|v-k}(x_k|x_{v-k}),F_{j|v-k}(x_j|x_{v-k}))}{\partial F_{k|v-k}(x_k|x_{v-k})}, \tag{3.40}$$

onde  $v = \{k,j_1,\dots,j_n\}$ ,  $v - k = \{j_1,\dots,j_n\}$  e  $k < j$ . A equação 3.40 também pode ser denominada de função  $h$ :  $h(x_j,x_v,\theta) = F_{j|v}(x_j|x_v)$ .

Como a presente monografia analisa a estrutura de dependência de cinco países, o caso de cinco dimensões é de especial relevância. A expressão geral para a estrutura

D-vine em cinco dimensões é:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5) \quad (3.41a)$$

$$\times c_{1,2}(u_1, u_2)c_{2,3}(u_2, u_3)c_{3,4}(u_3, u_4)c_{4,5}(u_4, u_5) \quad (3.41b)$$

$$\times c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{2,4|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) \quad (3.41c)$$

$$\times c_{3,5|4}(F(x_3|x_4), F(x_5|x_4)) \quad (3.41d)$$

$$\times c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)) \quad (3.41e)$$

$$\times c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3, x_4), F(x_5|x_3, x_4)) \quad (3.41f)$$

$$\times c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2, x_3, x_4), F(x_5|x_2, x_3, x_4)). \quad (3.41g)$$

Para simplificar a compreensão desta equação é possível separar seus elementos em três tipos/classes:

1. densidades marginais - lado direito da Subequação 3.41a;
2. densidades de cópulas bivariadas - Subequação 3.41b;
3. densidades de cópulas condicionais - Subequações 3.41c a 3.41g.

A derivação da Equação 3.41 está disponível no Apêndice E (pág. 102). Uma metodologia para construção de D-vines em qualquer dimensão está disponível no Apêndice D (pág. 100).

Uma D-vine  $n$ -dimensional consiste de  $n - 1$  árvores (*trees*) hierarquizadas que seguem uma estrutura de agrupamentos condicionais crescentes. Cada árvore  $T_j$  possui  $n + 1 - j$  nós (*nodes*) e  $n - j$  quinas (*edges*). Cada quina corresponde à densidade de uma cópula e seu rótulo corresponde ao subscrito dessa densidade. A decomposição total é definida pelas  $n(n - 1)/2$  quinas e as densidades marginais das variáveis em

estudo. Os nós têm por objetivo orientar quais números serão inseridos nos rótulos das quinas correspondentes. Nenhum nó em nenhuma árvore de uma D-vine está conectado a mais de dois outros nós (por duas quinas).

Figura 3.6: D-vine com 5 variáveis, 4 árvores e 10 quinas

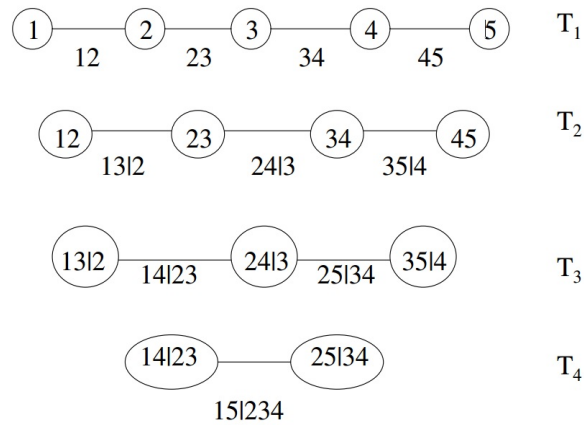


Figura extraída de Aas et al. (2009), p. 4.

O gráfico correspondente a uma D-vine de 5 dimensões está representado na Figura 3.6. Fazendo o paralelo com a Equação 3.41 e sua explicação, temos:

- a primeira árvore,  $T_1$ , contém em seus nós as densidades marginais (3.41a) e em suas quinas o subscrito das densidades de cópulas bivariadas (3.41b);
- a segunda árvore,  $T_2$ , contém em seus nós as densidades de cópulas bivariadas (3.41b) e em suas quinas o subscrito das densidades de cópulas condicionais de três variáveis (3.41c e 3.41d);
- $T_3$  contém nos nós as densidades de cópulas condicionais das sub-equações de três variáveis (3.41c e 3.41d) e em suas quinas o subscrito das densidades de cópulas condicionais de quatro variáveis (3.41e e 3.41f);
- $T_4$  contém nos nós as densidades de cópulas condicionais das sub-equações de

quatro variáveis (3.41e e 3.41f) e em sua quinta o subscrito da densidade da última cópula condicional, a com todas as cinco variáveis (3.41g).

Como pode ser visualizado na Figura 3.6, toda a estrutura de dependência é construída com base nas dependências marginais. Por esse motivo, (Roch e Alegre, 2006) pontuam que a especificação correta das marginais é ainda mais importante que a correta seleção das cópulas que as conectam.

### Estimação da D-vine

Para a estimação da D-vine, Nikoloulopoulos et al. (2010), seguindo a proposição de Aas et al. (2009), encontraram evidências empíricas de que a melhor permutação consiste da escolha que conecta os pares mais dependentes na primeira árvore.

Cumpramos ressaltar, complementarmente, que para que uma vine cópula tenha dependência caudal em todas as marginais bivariadas, basta que as cópulas bivariadas da primeira árvore tenham dependência caudal. Não é necessário que as cópulas bivariadas condicionais possuam dependência caudal para que a cópula como um todo tenha (Nikoloulopoulos et al., 2010).

Como destacam Aas et al. (2009), embora não seja necessário esboçar os passos a serem seguidos em uma figura (como a 3.6), ter esse auxílio gráfico facilita a identificação de em quais pares de cópulas decompor.

A densidade correspondente a uma D-vine pode ser escrita como:

$$\prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1} (F(x_i|x_{i+1},\dots,x_{i+j-1}), F(x_{i+j}|x_{i+1},\dots,x_{i+j-1})), \quad (3.42)$$

onde  $j$  identifica as árvores enquanto  $i$  percorre as quinas em cada árvore.

Dada a Equação 3.42 e tomemos  $n$  variáveis em  $T$  instantes tal que  $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , seja o conjunto dos dados. Os parâmetros da densidade da D-vine podem ser estimados pela função de log-verossimilhança:

$$\ell = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^T \log(c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}(F(x_{i,t}|x_{i+1,t},\dots,x_{i+j-1,t}; \beta_i), \\ F(x_{i+j,t}|x_{i+1,t},\dots,x_{i+j-1,t}; \beta_{i+j})|\theta_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1})),$$

onde  $\beta_i$  são os parâmetros das marginais e  $\theta_i$ , os das cópulas. A log-verossimilhança pode ser decomposta em duas partes, uma envolvendo os parâmetros das marginais e outra o da cópula em si. Dessa maneira, a estimação dos parâmetros pode ser realizada tanto simultaneamente para todos os parâmetros pelo modelo FML (textitfull maximum likelihood), quanto por partes, os parâmetros das marginais e, em seguida, o(s) da cópula, pelo método IFM (*inference for the margins*), proposto por Joe e Xu (1996). O segundo método corresponde ao caso paramétrico da TSML (*Two-Step Maximum Likelihood*) (Trivedi e Zimmer, 2005). O IFM é especialmente atrativo computacionalmente quando a dimensão do  $\theta$  é grande, ou seja, quando a quantidade de variáveis é grande e quando a quantidade de cópulas com dois parâmetros é grande. Este é precisamente o caso do trabalho realizado nesta monografia, portanto, adotou-se o método IFM.

Em condições regulares, o IFM resulta em estimações similares às do FML. No entanto, comparar a eficiência dos métodos é difícil devido à intratabilidade das matrizes de covariância assintóticas. Como destacam Trivedi e Zimmer (2005), se a eficiência do modelo é de interesse do pesquisador, os erros padrões podem ser obtidos por um processo de *bootstrap*:

1. obter os  $\hat{\beta}_i$  (parâmetros das marginais) e  $\hat{\theta}_i$  (parâmetros da cópula) por IFM;
2. realizar amostragens aleatórias com reposição do banco de dados;
3. re-estimar os  $\hat{\beta}_i$  e  $\hat{\theta}_i$  por IFM para cada amostra aleatória;
4. calcular o erro-padrão dos parâmetros com base na matriz de variância  $R^{-1} \sum_{r=1}^R (\hat{\omega}^*(r) -$

$\hat{\omega}$ ), onde  $R$  é a quantidade de vezes em que foi replicada a amostragem, e  $\hat{\omega}$  é o valor para o parâmetro ( $\hat{\beta}_i$  ou  $\hat{\theta}_i$ ) estimado originalmente e  $\hat{\omega}^*(r)$  é o valor para o parâmetro estimado após a re-amostragem por *bootstrap*.

No caso desta monografia, adotou-se o *bootstrap* por blocos para dados dependentes, conforme proposto por Hall et al. (1995). Seja  $n$  a quantidade de observações originais, os autores indicam que para casos de estimação da variância ou do viés os blocos devem ter  $n' = n^{1/3}$  observações. Portanto, a base de dados será dividida em  $b = n/n'$  blocos, onde  $b$  é um número inteiro encontrando desprezando-se os decimais (sem arredondamento). Os autores destacam que, nos casos em que  $b \times n' \leq n$ , As  $n - n'$  observações sobranes podem ser dispensadas sem alterar as conclusões obtidas.

### Comparação da Estrutura de C- e D-vines

A título de exemplo, um comparativo da estrutura de uma C- e uma D-vine com cinco variáveis é apresentada na Figura 3.7.

Figura 3.7: C- e D-vine com 5 variáveis

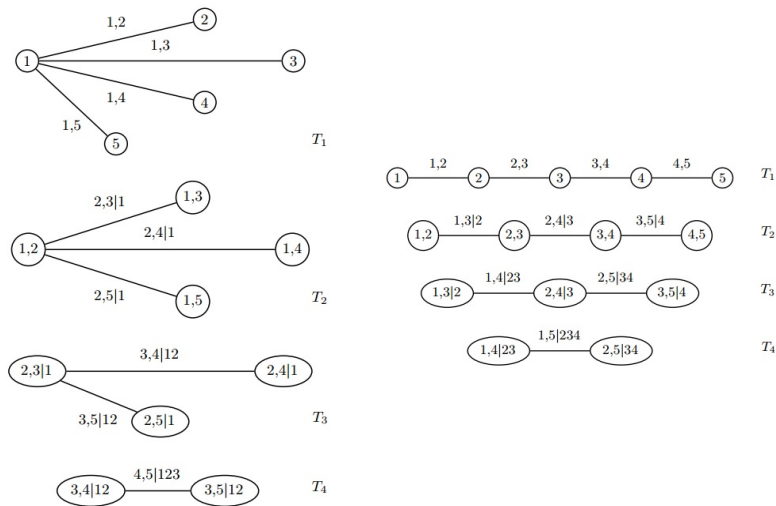


Figura extraída de Brechmann e Schepsmeier (2013), p. 5.

A estrutura de dependência da C-vine (à esquerda na figura) exibe forte dependência de uma única variável, expressa pelo número 1 em  $T_1$ . A variável 1 está conectada a todas as demais (2, 3, 4 e 5), o que demonstra sua forte influência sobre estas. Já no caso da D-vine (à direita), parte-se de uma estrutura horizontalizada para estimar a estrutura de dependência, como anteriormente discutido.

### 3.4.7 GARCH

As séries temporais de ativos financeiros são marcadas por *clusters* (agrupamentos) de volatilidade (Lima, 2014). Tais agrupamentos poderiam enviesar o desvio-padrão calculado, afetando a análise de risco do investimento. Para efetuar a filtragem dos dados coletados e suavizar o impacto dos *clusters*, são usualmente empregados os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*) e AR-GARCH (*Autoregressive-GARCH*).

A fórmula geral dos modelos AR(p)-GARCH(m,n) é:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + a_t = \mu_t + a_t, \quad (3.43)$$

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t, \quad (3.44)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j}, \quad (3.45)$$

onde  $X_t$  é o retorno do ativo,  $\mu_t$  e  $h_t$  são a média e a variância condicionais,  $\epsilon_t$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média 0 e variância 1 também chamadas de inovações,  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$

O modelo GARCH(1,1) (equivalente a AR(0)-GARCH(1,1)) é uma escolha comum para a filtragem de séries temporais financeiras por usualmente ser capaz de capturar a heterocedasticidade condicional de ações e índices de mercado e descrever com acurácia os *clusters* de volatilidade nos retornos (Nikoloulopoulos et al., 2010; Ning, 2010;



[Wen et al., 2012](#)). Nesse caso, se  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , o modelo é estacionário. O modelo AR(1)-GARCH(1,1) é outro tipo de especificação usual para modelar as marginais, especialmente quando o modelo GARCH não filtrou as auto-correlações existentes.



## Capítulo 4

# Resultados

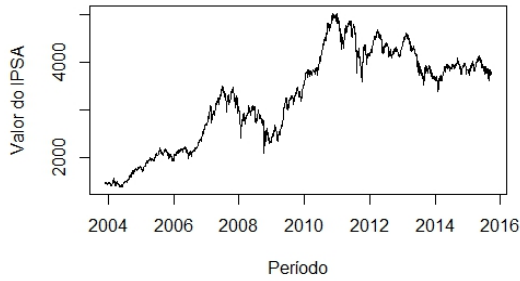
Os seguintes resultados empíricos foram obtidos com o auxílio do *software* livre R (R Core Team, 2015). Foram empregados diversos pacotes, dentre os quais o pacote `CDVine` para estimação das cópulas bivariadas e condicionais necessárias à construção da D-vine cópula (Brechmann e Schepsmeier, 2013) e o pacote `fGarch` para a filtragem dos dados (Wuertz et al., 2013).

Os dados coletados incluem todas as observações (diárias) disponíveis no portal Yahoo Finance para cada índice durante o período em análise (01/12/2003 a 22/09/2015) e consistem de 2.948 observações do IPSA, 2.973 observações do S&P500, 2.940 observações do Ibovespa, 2.912 observações do Merval e 2.939 observações do Peru General. Os gráficos com os valores de cada índice podem ser observados na Figura 4.1.

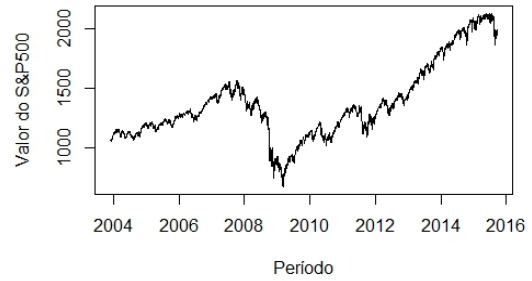
A modelagem das distribuições marginais e das cópulas deve ser realizada com séries com a mesma quantidade de observações, caso contrário, pode levar a correlações espúrias. Para contornar esse fato, nesta monografia optou-se por proceder como Jondeau e Rockinger (2006) e foram eliminadas as observações dos dias em que ao menos uma das bolsas de valores em análise não tenha aberto. Isso reduziu a amostra a 2.624 observações para cada índice (2.623 retornos). Apesar da redução no total de observações, os testes realizados na próxima seção foram realizados em ambas bases de dados

Figura 4.1: Gráficos dos Valores dos Índices

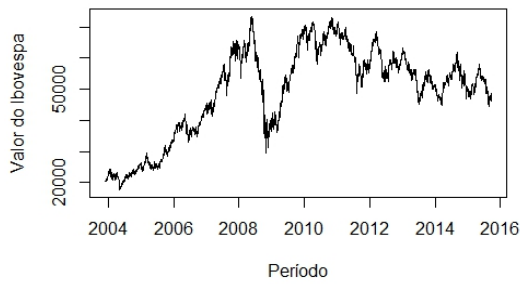
(a) Chile



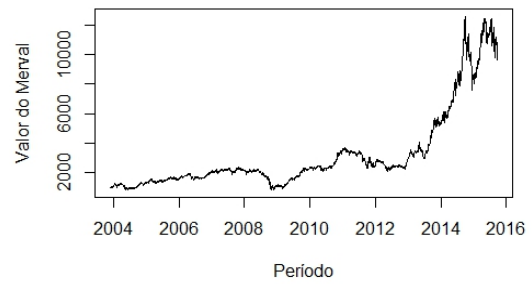
(b) Estados Unidos



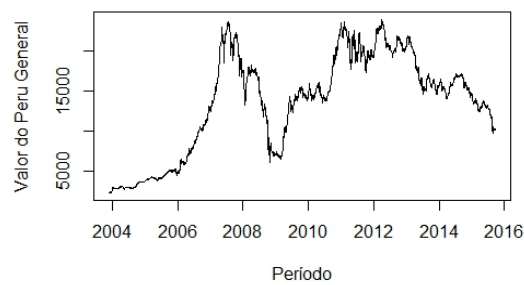
(c) Brasil



(d) Argentina



(e) Peru



Os dados são compostos de 2.948 observações do IPSA, 2.973 observações do S&P500, 2.940 observações do Ibovespa, 2.912 observações do Merval e 2.939 observações do Peru General.

com resultados similares. Os resultados dos testes feitos com a base de dados completa (antes da uniformização das datas) estão disponíveis no Apêndice F (pág. 105).

Cumprе destacar que, muito embora os mercados internacionais operem em momentos distintos - tenham diferentes *trading hours*-, neste estudo a sobreposição do funcionamento dos mercados em análise é tamanha que optou-se por manter os dados sem computar essas diferenças.

## 4.1 Tratamento Inicial e Modelagem das Marginais

Após a coleta dos dados, com base nos valores de fechamento dos índices coletados no portal [Yahoo Finance \(2015\)](#), foram calculados os retornos. Seja  $P_t (t = 1, \dots, T)$  a série temporal dos preços de um determinado ativo financeiro, os retornos diários contínuos ( $X_t$ ) utilizados nesse estudo são dados por:

$$X_t = \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right),$$

onde  $t \geq 1$ .

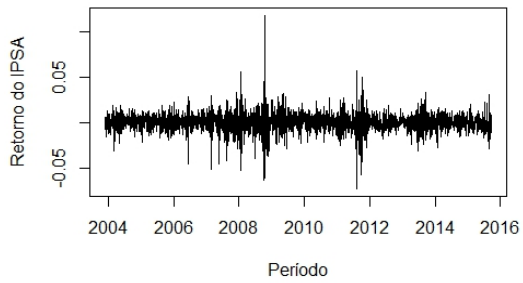
Os retornos calculados de cada índice podem ser observados nos gráficos da Figura 4.2.

No gráfico de retornos dos índices (Figura 4.2) é possível observar os acúmulos de volatilidade em todas as séries analisadas. Este fato está em concordância com a literatura acerca de séries temporais em finanças ([Wen et al., 2012](#); [Nikoloulopoulos et al., 2010](#)). Adicionalmente, é possível deduzir que os mercados apresentam algum tipo de dependência, a exemplo da grande variação no pós crise do *subprime*, em 2008. A análise das figuras também possibilita inferir que os retornos são estacionários, o que será formalmente verificado com o auxílio do teste Dickey-Fuller aumentado (ADF), cujos resultados estão dispostos na Tabela 4.1.

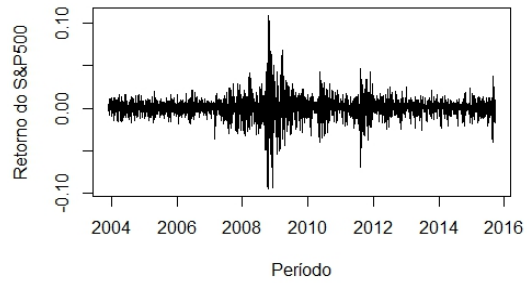
O teste ADF fornece informações acerca da estacionariedade das séries temporais:

Figura 4.2: Gráficos dos Retornos dos Índices

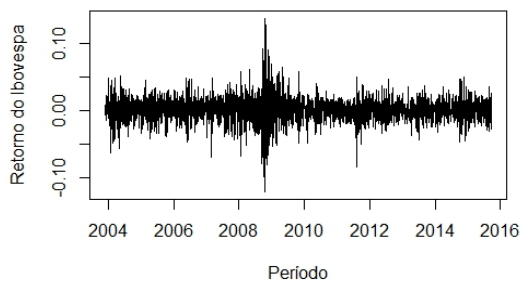
(a) Chile



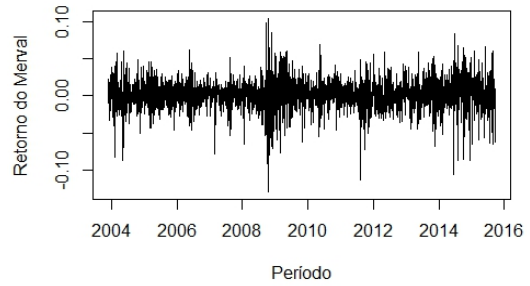
(b) Estados Unidos



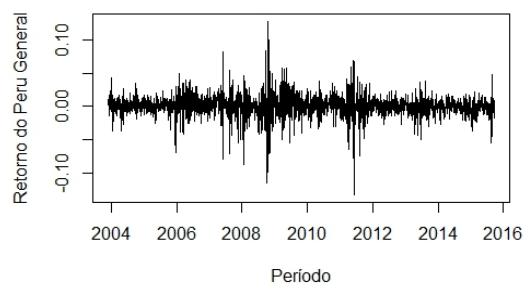
(c) Brasil



(d) Argentina



(e) Peru



Figuras feitas com base nas 2.624 observações finais de cada índice.

ele testa a existência de uma raiz unitária, o que indica que a série é não-estacionária. Essas informações são relevantes porque dados estacionários flutuam ao redor de uma média constante ao longo do tempo, o que facilita o processo de inferência.

Como pode ser verificado na Tabela 4.1, a hipótese de estacionariedade dos retornos não pode ser rejeitada para todos os países em estudo com um  $p$ -valor de 1%. Este fato converge com os estudos em finanças que sugerem o emprego dos log-retornos ao invés dos preços exatamente porque aqueles usualmente apresentam estacionariedade, ao contrário do observado com os preços, que muitas vezes são não-estacionários (Costa e Baidya, 2001).

Tabela 4.1: Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) dos Retornos

Índice	Estatística	Defasagem	$p$ -Valor
IPSA	-13,530*	13	0,01
S&P500	-13,606*	13	0,01
Ibovespa	-12,902*	13	0,01
Merval	-13,004*	13	0,01
Peru General	-12,347*	13	0,01

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-2}$ .

Hipótese alternativa: dados são estacionários.

Tabela feita com as 2.624 observações finais.

Os dados aqui tratados serão aplicados num estudo com cópulas para a construção de funções de distribuição multivariada. Esta aplicação requer que os dados a serem modelados sejam independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) (Delatte e Lopez, 2013). Portanto, é necessário verificar se os dados dos retornos são auto-correlacionados e, em caso afirmativo, realizar algum tipo de filtragem que resulte em dados independentes com o mínimo de perdas de informação. Neste estudo, foi realizado o teste de Ljung & Box para verificar se os dados dos retornos são auto-correlacionados e, em caso afirmativo, se essa auto-correlação deixa de existir após a filtragem pelo AR(1)-GARCH(1,1) e obtenção dos resíduos.

Analisando a Tabela 4.2 que contém os resultados do teste de Ljung & Box, um

$p$ -valor igual ou inferior a 0,01 indica que a hipótese nula pode ser rejeitada e há fortes indícios de que os dados são auto-correlacionados. Esse é o caso dos índices do Chile (IPSA), dos Estados Unidos (S&P500) e do Peru (Peru General). Os dados do Brasil (Ibovespa) indicam que os retornos são potencialmente não auto-correlacionados com um  $p$ -valor de 3,89%. No entanto, a um nível de confiança de 95%, o  $p$ -valor encontrado suportaria a hipótese de auto-correlação. Já no caso da Argentina (Merval), rejeita-se a hipótese de que os retornos são auto-correlacionados com um  $p$ -valor de 37,35%.

Tabela 4.2: Teste de Ljung &amp; Box dos Retornos

Índice	$\chi^2$	Defasagem	$p$ -Valor
IPSA	44,859*	1	$2,118 \times 10^{-11}$
S&P500	44,558*	1	$2,469 \times 10^{-11}$
Ibovespa	4,2635	1	0,0389
Merval	0,79188	1	0,3735
Peru General	54,232*	1	$1,781 \times 10^{-13}$

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-3}$ .

Hipótese alternativa: dados são auto-correlacionados.

Tabela feita com as 2.624 observações finais.

Os dados do teste de Ljung & Box podem ser visualizados graficamente por intermédio da função de autocorrelação (ACF) de cada série dos retornos (Figura 4.3). Os gráficos de ACF de Chile e Peru mostram uma correlação relativamente forte, em especial com o primeiro *lag* (defasagem). Os Estados Unidos também, embora a correlação seja mais fraca que nos dois casos supramencionados. No caso do Brasil e da Argentina, os gráficos demonstram a ausência quase total de correlação, como esperado.

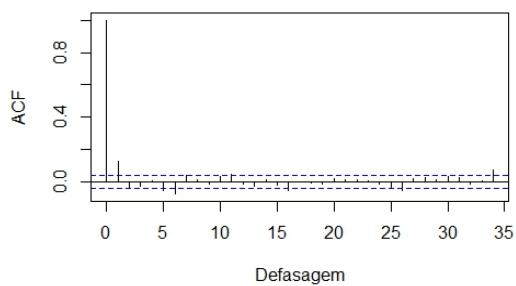
Inicialmente, os dados foram filtrados empregando-se o modelo GARCH(1,1). Conforme pontuam [Nikoloulopoulos et al. \(2010\)](#), se este modelo for bem sucedido na modelagem da correlação na média e na variância condicionais, os resíduos condicionais padrão devem ser livres de auto-correlação.

Para verificar se a auto-correlação permaneceu após a filtragem pelo GARCH(1,1), foi novamente empregado o teste de Ljung & Box. No entanto, o teste evidenciou

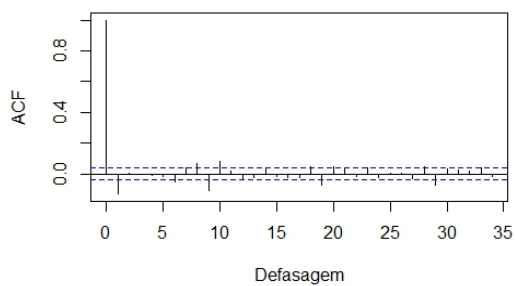


Figura 4.3: Gráficos de ACF dos Retornos

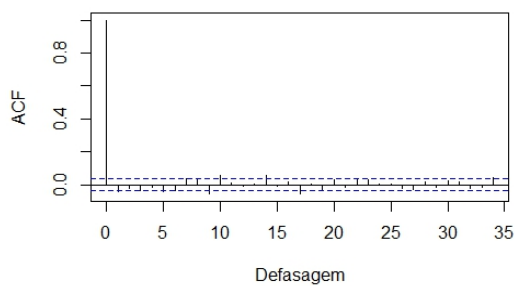
(a) Chile



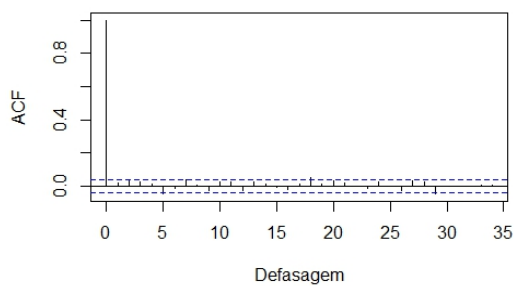
(b) Estados Unidos



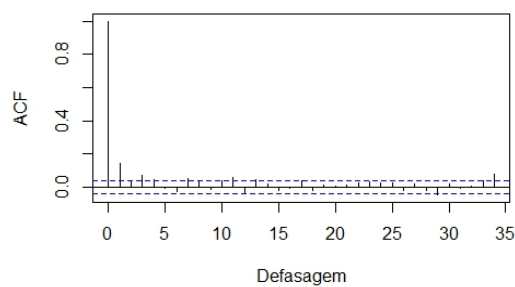
(c) Brasil



(d) Argentina



(e) Peru



Nas figuras, o valor em 0 é uma comparação do retorno consigo mesmo e, portanto, é igual a 1 na escala do ACF. Os valores seguintes representam a auto-correlação deste valor com os 35 dias que o sucedem.

que a auto-correlação permaneceu nas séries do Chile e Peru. Complementarmente, a hipótese de auto-correlação só pode ser rejeitada a um nível de confiança de 97% para a Argentina e de 98% para os Estados Unidos. A Tabela F.4, no Apêndice F (pág. 106), contém os resultados desse teste.

Devido à limitação do modelo GARCH(1,1) em eliminar a auto-correlação dos dados em análise, optou-se por realizar nova filtragem dos dados, desta vez empregando o modelo AR(1)-GARCH(1,1). Os resultados do teste de Ljung & Box deste modelo estão disponíveis na Tabela 4.3. Esses resultados mostram que após a filtragem os dados deixam de ser auto-correlacionados, como esperado. O menor  $p$ -valor encontrado foi para o Peru, ainda assim, é possível rejeitar a hipótese de auto-correlação com um nível de significância de 1%. Para os demais conjuntos de dados, essa hipótese pode ser rejeitada com  $p$ -valores superiores a 20%.

Tabela 4.3: Teste de Ljung & Box dos Resíduos (AR-GARCH)

Índice	$\chi^2$	Defasagem	$p$ -Valor
IPSA	1,0719	1	0,3005
S&P500	0,025386	1	0,8734
Ibovespa	0,019117	1	0,89
Merval	1,2589	1	0,2619
Peru General	6,1751	1	0,01296

Hipótese alternativa: dados são auto-correlacionados.

Tabela confeccionada com os dados obtidos após emprego do AR(1)-GARCH(1,1) sobre as 2.624 observações finais.

Para confirmar estatisticamente a colaboração do AR-GARCH para uma melhor modelagem em comparação com o GARCH, foram calculados os AIC e BIC de ambos modelos. Como destaca Rodriguez (2007), o melhor modelo é o que minimiza os valores de AIC e BIC. A Tabela 4.4 contém os valores dos testes para os resíduos do GARCH(1,1) e do AR(1)-GARCH(1,1).

Dos dados disponíveis na Tabela 4.4 é possível verificar que o AR-GARCH é mais adequado para a modelagem dos dados de Chile, Estados Unidos e Peru que o mo-

Tabela 4.4: Qualidade do Ajuste dos Modelos GARCH e AR-GARCH

Índice	Resíduos GARCH		Resíduos AR-GARCH	
	AIC	BIC	AIC	BIC
IPSA	-6,552857	-6,541664	-6,575222	-6,561790
S&P500	-6,469433	-6,458240	-6,472337	-6,467472
Ibovespa	-5,351480	-5,340287	-5,350878	-5,346013
Merval	-5,118257	-5,107064	-5,118680	-5,105248
Peru General	-5,839540	-5,828347	-5,853257	-5,853257

delo GARCH. Complementarmente, o AR-GARCH tem desempenho semelhante ao do GARCH para Brasil e Argentina. Conclui-se, portanto, que o AR(1)-GARCH(1,1) é o modelo mais adequado para a modelagem e filtragem dos dados.

A melhoria obtida com a aplicação do AR-GARCH pode ser verificada graficamente na figura 4.4, que contém os gráficos de ACF dos resíduos. A forte correlação observada nos dados dos retornos de Chile e Peru com o primeiro *lag* (Figura 4.3) foi efetivamente filtrada pelo modelo AR(1)-GARCH(1,1).

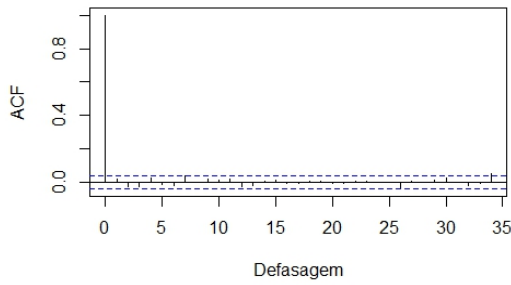
Os parâmetros das marginais da D-vine estimados pelo AR(1)-GARCH(1,1) estão disponíveis na Tabela 4.5. Esses são os parâmetros estimados empiricamente para as Equações 3.43, 3.44 e 3.45 (pág. 62). Como discutido na Metodologia,  $\mu$  e  $a$  são parâmetros do AR e  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do GARCH, sendo que  $\mu$  é a média condicional e os demais parâmetros são utilizados para calcular a variância condicional. Como os parâmetros na Tabela 4.5 são estimados, eles são denotados  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\alpha}_1$  e  $\hat{\beta}_1$ .

Tabela 4.5: Parâmetros das Marginais

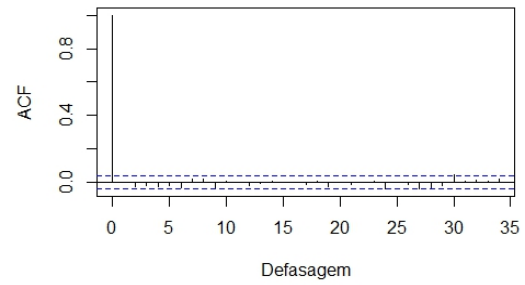
Índice	$\hat{\mu}$	$\hat{a}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$
IPSA	$6,668456 \times 10^{-4}$	0,1571260	$3,944490 \times 10^{-6}$	0,137469	0,8296244
S&P500	$8,584203 \times 10^{-4}$	-0,06003033	$2,349711 \times 10^{-6}$	0,1182613	0,8682417
Ibovespa	$6,297525 \times 10^{-4}$	-0,01228689	$6,795514 \times 10^{-6}$	0,06878992	0,9100035
Merval	$1,496592 \times 10^{-3}$	0,02215756	$1,468693 \times 10^{-5}$	0,09963088	0,8710547
Peru General	$7,697048 \times 10^{-4}$	0,1740313	$8,426522 \times 10^{-6}$	0,1912126	0,7895997

Figura 4.4: Gráficos de ACF dos Resíduos (AR-GARCH)

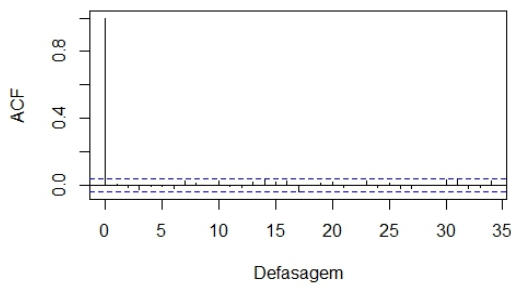
(a) Chile



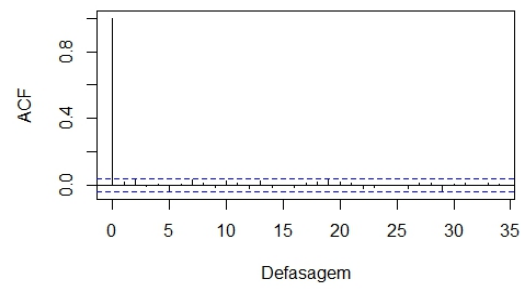
(b) Estados Unidos



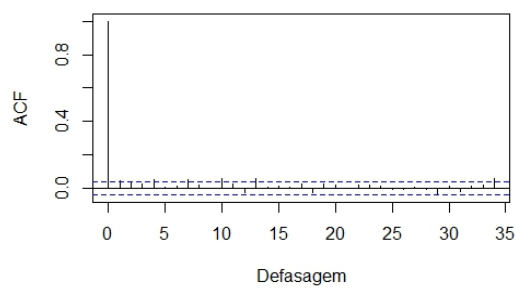
(c) Brasil



(d) Argentina



(e) Peru



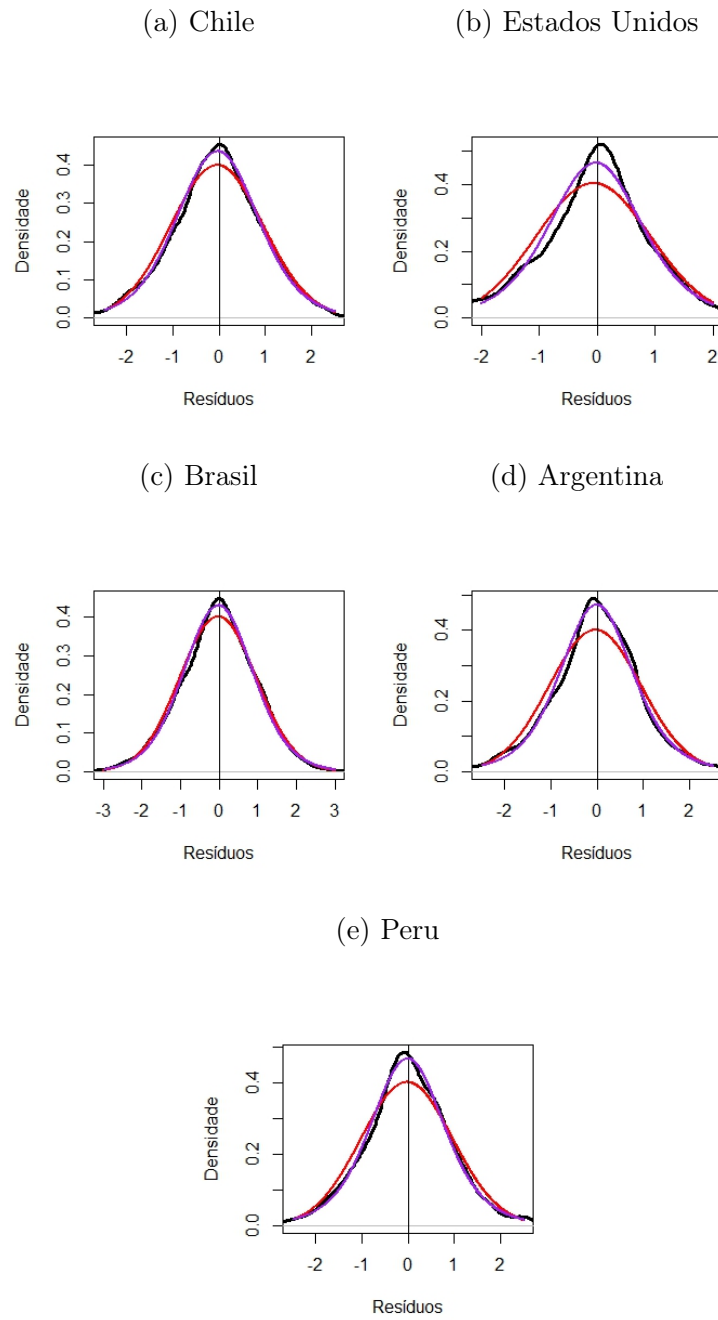
Nas figuras, o valor em 0 é uma comparação do retorno consigo mesmo e, portanto, é igual a 1 na escala do ACF. Os valores seguintes representam a auto-correlação deste valor com os 35 dias que o sucedem.

Para finalizar o tratamento inicial dos dados, cumpre analisar a distribuição dos resíduos. A Figura 4.5 mostra que, em todos os casos, a Distribuição dos Resíduos (em preto) é bem próxima à distribuição t-Student (em roxo) e distinta da distribuição Normal (em vermelho). Para confirmar essas alegações, foram aplicados os testes de adequação do ajuste AIC e BIC, cujos resultados corroboram a adequação da distribuição t-Student aos dados. Estes resultados encontram-se na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Qualidade do Ajuste das Distribuições Normal e t-Student

Índice	Normal		t-Student	
	AIC	BIC	AIC	BIC
IPSA	-16.208,39	-16.196,64	-16.815,82	-16.798,2
S&P500	-15.453,47	-15.441,72	-16.382,6	-16.364,98
Ibovespa	-13.386,36	-13.374,62	-13.742,49	-13.724,88
Merval	-12.755,76	-12.744,01	-13.172,21	-13.154,59
Peru General	-13.914,83	-13.903,08	-14.808,3	-14.790,68

Figura 4.5: Comparativo entre Distribuição dos Resíduos, Normal e t-Student (AR-GARCH)

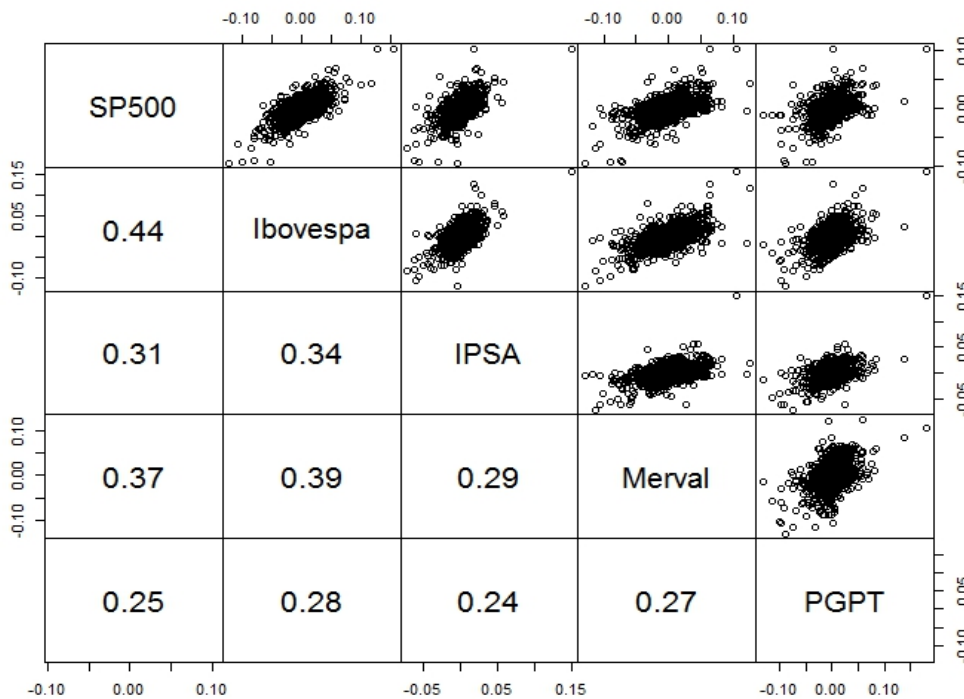


Preto: distribuição dos Resíduos; Vermelho: distribuição Normal; Roxo: distribuição t-Student.

## 4.2 Modelagem das Cópulas

O primeiro passo para a modelagem das cópulas consiste na análise da correlação entre os pares de países analisados. Na Figura 4.6, estão dispostos os gráficos de dispersão de cada par no quadrante superior e os respectivos valores para o Tau de Kendall, no quadrante inferior.

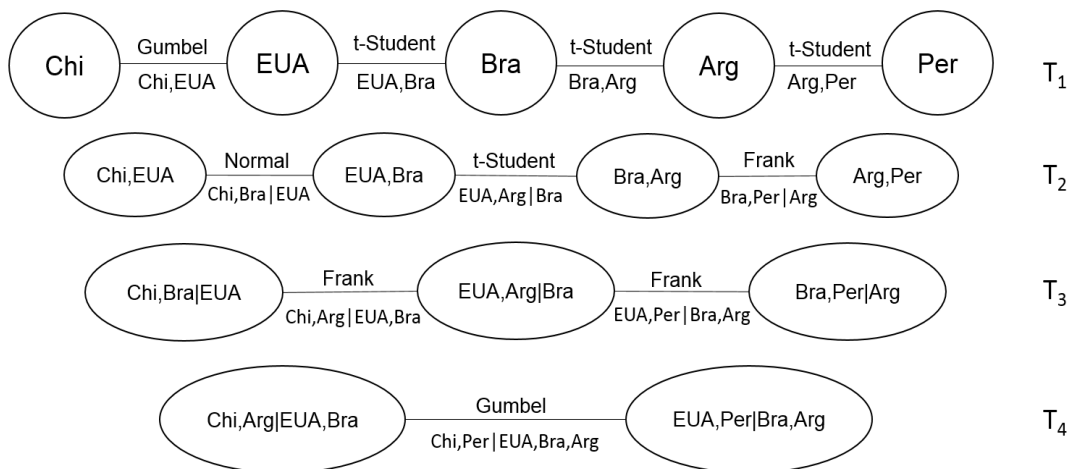
Figura 4.6: Matriz de Gráficos de Dispersão e Tau de Kendall



Como discutido no Referencial Teórico (pág. 29), o Peru é o único país latino-americano com economia dolarizada e [Maya et al. \(2015\)](#) encontraram comportamento distinto entre o comportamento do Novo Sol e o das demais moedas nacionais estudadas - Real brasileiro e Pesos chileno, colombiano, mexicano e argentino. É interessante observar que o Peru é o país que apresenta as menores correlações com os demais, possivelmente refletindo as diferenças na sua estrutura financeira.

Seguindo a regra para escolha das permutações de [Nikoloulopoulos et al. \(2010\)](#), foram conectados os pares mais dependentes na primeira árvore. Do gráfico verifica-se que os pares mais dependentes são S&P500 e Ibovespa, com  $\tau = 0,44$ , e Merval e Bovespa, com  $\tau = 0,39$ . Portanto, inicialmente a ordem dos dados fica (X, X-Y ou nenhum índice)-S&P500-Ibovespa-Merval-(X, X-Y ou nenhum índice), onde X e Y são os demais índices. Prosseguindo a análise de dependência, a correlação mais elevada tanto para o Peru General quanto para o IPSA é com o Ibovespa. No entanto, essa relação é de menor magnitude que a entre este e Merval e S&P500. A segunda correlação mais elevada para o Peru é com o Merval, com  $\tau = 0,27$ . No caso do IPSA, a segunda correlação mais elevada é com o S&P500, com  $\tau = 0,31$ . Portanto, os pares Peru-Merval e IPSA-S&P500 maximizam a dependência e a ordem escolhida para a primeira árvore é: IPSA-S&P500-Ibovespa-Merval-Peru General. A estrutura da D-vine está ilustrada na Figura 4.7.

Figura 4.7: Estrutura da D-vine



Chi: Chile; EUA: Estados Unidos; Bra: Brasil; Arg: Argentina; Per: Peru.

Em seguida, foram escolhidas as cópulas de cada par da D-vine. Foram testadas as cópulas Normal, t-Student, Clayton, Gumbel e Frank. Com o objetivo de permitir



maior flexibilidade, foram incluídas as cópulas sobrevivência de Clayton e Gumbel. Esta diversidade de cópulas permite o ajuste de distintas estruturas de dependência - com e sem dependência (caudal), com dependência simétrica e assimétrica. No entanto, caso fosse testada uma diversidade maior, incluindo cópulas da classe BB e outras cópulas extremas além da de Gumbel, por exemplo, os resultados poderiam ser aperfeiçoados. Dessa forma, a quantidade de cópulas testadas é, reconhecidamente, uma limitação ao escopo desta monografia.

A seleção das cópulas foi feita levando em conta os critérios AIC e BIC de adequação do ajuste. Para assegurar a relevância do resultado encontrado, foi feito um teste de independência que rejeitou esta hipótese em todos os casos. Como os resultados obtidos pelos dois modelos (AIC e BIC) diferiram, foram realizados os testes de Clarke e de Vuong, os quais indicaram, respectivamente, que as diferenças nos resultados de ambos modelos são estatisticamente relevantes (os modelos são distinguíveis) e que as cópulas selecionadas pelo modelo BIC são as mais adequadas à modelagem dos dados.

Os parâmetros das cópulas ( $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ ) foram estimados pelo método de estimação sequencial IFM, proposto por [Joe e Xu \(1996\)](#). O erro padrão desses parâmetros foi calculado empregando-se um *bootstrap* por blocos. Seguindo os critérios de [Hall et al. \(1995\)](#) para definição dos tamanhos dos blocos, foram feitas 1000 amostragens da base de dados (retornos diários), com blocos de  $2.623^{1/3} = 13$  linhas (observações diárias) e 5 colunas (índices). Com as séries re-amostradas, foi aplicado o AR(1)-GARCH(1,1), com os resíduos, foram obtidas as funções de distribuição acumuladas e estimados os parâmetros das cópulas. Foram considerados estatisticamente significantes os resultados estimados pertencentes ao intervalo  $-1,5 \leq \theta_i \div EP_i^* \leq 1,5$ , onde  $EP_i^*$  é o erro padrão estimado por *bootstrap* para cada parâmetro.

As cópulas selecionadas para cada par pelo modelo BIC, bem como os parâmetros estimados e o erro padrão estão listados na Tabela [4.7](#).

Como pode ser visto na Tabela [4.7](#), tendo por base os resultados do *bootstrap*, ape-

Tabela 4.7: Cópulas Estimadas ( $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  e Erro Padrão)

Variáveis	Cópula (BIC)	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	EP $\hat{\theta}_1$	EP $\hat{\theta}_2$
Primeira Árvore					
Chi,EUA	Gumbel	1.8517426*	–	0.3377861	–
EUA,Bra	t-Student	0.7013819	4.308859*	1.4760350	2.1373453
Bra,Arg	t-Student	0.6501844	5.619490*	1.5271154	3.4470604
Arg,Per	t-Student	0.5166087	3.783395*	1.6604196	1.6126674
Segunda Árvore					
Chi,Bra EUA	Gaussiana	0.3276253	–	1.8490857	–
EUA,Arg Bra	t-Student	0.3447749	6.773159	1.8319622	4.6003547
Bra,Per Arg	Frank	1.6623668*	–	0.5215261	–
Terceira Árvore					
Chi,Arg EUA,Bra	Frank	1.6297844*	–	0.5535220	–
EUA,Per Bra,Arg	Frank	0.7961196	–	1.3815368	–
Quarta Árvore					
Chi,Per EUA,Bra,Arg	Gumbel	1.1330585	–	1.0458011	–

\*: valores com alto nível de significância -  $-1,5 \leq \theta_i \div EP_i^* \leq 1,5$ .

EP: erro padrão; Chi: Chile; EUA: Estados Unidos; Bra: Brasil; Arg: Argentina; Per: Peru.

No caso da cópula t-Student,  $\hat{\theta}_1$  se refere ao  $\hat{\rho}$ .

Para o modelo AIC, as cópulas seriam, seguindo a ordem apresentada na tabela: Gumbel, t, t, t, t, t, t, Frank, t, onde t representa t-Student.

nas 6 dos 14 parâmetros estimados foram considerados estatisticamente significativos. Esse resultado pode indicar que o tipo de re-amostragem não foi adequado para os dados em análise e/ou que a sensibilidade do GARCH à mudança na base de dados proveniente dessa re-amostragem força a erros padrões mais elevados. Devido a restrições associadas ao prazo para entrega desta monografia e ao desconhecimento por parte da autora de uma metodologia alternativa mais eficiente, não foi possível analisar mais profundamente essas suposições.

As cópulas selecionadas foram Gaussiana, t-Student, Frank ou Gumbel, isso implica que os dados apresentam tanto casos em que não há dependência caudal (Gaussiana), quanto com dependência caudal simétrica (t-Student e Frank) e assimétrica (Gumbel).

A presença de cópulas que não modelam dependência caudal nas árvores superiores é um fato recorrente no estudo com vine cópulas (Tófoli et al., 2013). Isso não implica que

não haja dependência caudal entre os países modelados pela cópula Gaussiana e Frank, afinal, para que uma vine cópula tenha dependência caudal em todos os níveis, basta que as cópulas bivariadas da primeira árvore tenham dependência caudal. Como destaca [Nikoloulopoulos et al. \(2010\)](#), para que a cópula como um todo tenha dependência caudal não é necessário que as cópulas bivariadas condicionais sejam dependentes nos extremos.

Os valores dos coeficientes de dependência linear e do tau de Kendall estão listados na tabela 4.8.

Tabela 4.8: Cópulas Estimadas ( $\hat{\lambda}_L$ ,  $\hat{\lambda}_U$  e  $\hat{\tau}$ )

Variáveis	Cópula	$\hat{\lambda}_L$	$\hat{\lambda}_U$	$\hat{\tau}$
Primeira Árvore				
Chi,EUA	Gumbel	–	0,5459954	0,4599681
EUA,Bra	t-Student	0,3762859	0,3762859	0,4948664
Bra,Arg	t-Student	0,2769644	0,2769644	0,4506167
Arg,Per	t-Student	0,274113	0,274113	0,3456116
Segunda Árvore				
Chi,Bra EUA	Gaussiana	–	–	0,2124967
EUA,Arg Bra	t-Student	0,08722033	0,08722033	0,2240895
Bra,Per Arg	Frank	–	–	0,1798308
Terceira Árvore				
Chi,Arg EUA,Bra	Frank	–	–	0,1764838
EUA,Per Bra,Arg	Frank	–	–	0,08790305
Quarta Árvore				
Chi,Per EUA,Bra,Arg	Gumbel	–	0,1563472	0,117433

Chi: Chile; EUA: Estados Unidos; Bra: Brasil; Arg: Argentina; Per: Peru.  
 No caso da cópula t-Student, o coeficiente de dependência caudal inferior ( $\hat{\lambda}_L$ ) é igual ao superior ( $\hat{\lambda}_U$ ). As cópulas de Frank e Gaussiana modelam dados sem dependência caudal. A cópula de Gumbel modela dados com dependência

Os dados apresentados nas Tabelas 4.7 e 4.8 indicam forte presença de dependência caudal para todos os pares da primeira árvore, tanto na cauda inferior ( $0,27 \leq \hat{\lambda}_L \leq 0,37$ ), quanto na superior ( $0,27 \leq \hat{\lambda}_U \leq 0,55$ ). Uma implicação deste fato é que investidores internacionais podem lograr portfólios mais eficientes em termos do retorno obtido pelo risco assumido.



## Capítulo 5

# Considerações Finais

A presente monografia tem por objetivo utilizar D-vine Cópulas para a modelagem da estrutura de dependência entre os mercados financeiros de quatro países do Mercosul - Brasil, Argentina, Chile e Peru - e os Estados Unidos. Para alcançar essa meta, foram coletados os dados dos índices dos cinco países entre 01/12/2003 e 22/11/2015, totalizando 2.624 observações dos dias em que todos os mercados funcionaram. Com esses dados foram calculados os 2.623 log-retornos para cada índice, que foram utilizados para as análises e para a modelagem da D-vine.

Conforme discutido na Metodologia, a modelagem por cópulas requer que os dados analisados sejam i.i.d. (Delatte e Lopez, 2013). No entanto, os dados dos log-retornos apresentavam heterocedasticidade. Por esse motivo, foi aplicado o modelo AR(1)-GARCH(1,1) para a filtragem dos dados e sua adequação para a estimação.

Com os dados homocedásticos e estacionários resultantes da filtragem, foram calculadas as funções de distribuição acumulada e estimadas as cópulas que constituem a D-vine. Esta foi estimada tanto pelo critério de seleção AIC quanto BIC. Para verificar qual melhor se ajustou aos dados foram realizados os testes de Clarke e de Vuong. O primeiro verifica se os modelos são estatisticamente distinguíveis e o resultado apontou que sim, os modelos são distintos. O segundo testa qual é o melhor dentre os dois e

indicou o modelo estimado pelo BIC como superior ao estimado pelo AIC.

Em ambos os casos, a ordem dos países na primeira árvore foi estabelecida conforme propõem [Nikoloulopoulos et al. \(2010\)](#): foram conectados os pares mais dependentes dentre as permutações possíveis. Foram testadas as cópulas Normal, t-Student, Clayton, Clayton sobrevivência, Gumbel, Gumbel sobrevivência e Frank.

De modo geral, as cópulas que melhor se adequaram aos dados foram as t-Student, que modelam 4 das 10 cópulas estimadas pelo BIC, sendo 3 da primeira árvore. [Roch e Alegre \(2006\)](#) obteve resultado semelhante em seu estudo do mercado espanhol. Os autores afirmam que a cópula t-Student tem ajuste claramente superior às demais. A grande presença de cópulas t-Student na primeira árvore vai ao encontro dos resultados de [Rodriguez \(2007\)](#), que estudou relações de dependência entre México, Argentina, Brasil e Chile com cópulas bivariadas. Adicionalmente, no caso desta monografia, 8 dentre as 10 são cópulas simétricas. Esse fato indica que os dados são marcados por simetria, embora a presença de cópulas de Gumbel na primeira e na última árvores assegurem que o modelo como um todo não é simétrico.

Todas as cópulas bivariadas (Chile-Estados Unidos, Estados Unidos-Brasil, Brasil-Argentina e Argentina-Peru) apresentam forte dependência ( $0,34 \leq \hat{\tau} \leq 0,49$ ), sendo a menor entre Argentina e Peru e a maior entre Brasil e Estados Unidos. A presente monografia verificou uma forte dependência para o par Brasil-Argentina (ver Tabela 4.8, pág. 81). [Maya et al. \(2015\)](#), por sua vez, investigaram a dependência entre as taxas de câmbio desses países e encontraram baixa dependência da Argentina e do Peru com os demais países - Brasil, Chile, Colômbia, México e Venezuela. Essa aparente contradição deve-se ao fato de que mercados distintos possuem estruturas de dependência diferentes. Desta maneira, o fato de os índices de mercado entre dois ou mais países serem fortemente dependentes não implica ou requer que a dependência de mercados subjacentes também o seja.

A D-vine indicou que os dados modelados de fato possuem dependência caudal infe-

rior e superior, com destaque para a superior, devido à presença da cópula de Gumbel para o par Chile e Estados Unidos. Esse fato indica que é possível obter ganhos advindos da diversificação internacional entre os países estudados. No entanto, há de se ter cautela, devido aos altos valores dos coeficientes de dependência caudal inferior para os demais pares da primeira árvore. Estes resultados corroboram parcialmente os de [Righi e Ceretta \(2011\)](#), que encontrou evidências de forte dependência caudal, especialmente na cauda inferior, entre Brasil, Argentina, México e Estados Unidos. Dessa forma, por mais que a D-vine cópula estimada nesta monografia mostre claramente a presença de dependência caudal, esta é majoritariamente simétrica, ao contrário do observado pelos autores.

Uma limitação ao estudo realizado advém da pequena diversidade de cópulas testadas. Sugere-se que estudos futuros empreguem uma quantidade maior de cópulas, incluindo cópulas da classe BB e outras cópulas extremas além da de Gumbel. Outra possibilidade é incluir misturas de cópulas. [Canela e Pedreira \(2012\)](#) estudaram a estrutura de dependência entre países latino-americanos com o emprego de misturas de cópulas e encontraram fortes evidências de que as relações entre esses países apresentam dependência caudal assimétrica, com altos valores tanto no extremo inferior quanto no superior da distribuição. É bastante plausível que a divergência entre os resultados desta monografia e o dos autores seja decorrente da inexistência de uma cópula que modele dependência caudal assimétrica e assumam valores diferentes de zero em ambos extremos dentre as que foram aqui aplicadas. Outra possibilidade é que o filtro do AR-GARCH aplicado tenha eliminado dados referentes à dependência caudal entre os dados ([Roch e Alegre, 2006](#)).

Como discutido nos Resultados Empíricos (pág. 80), tendo por base os resultados do *bootstrap*, pouco menos da metade dos parâmetros estimados foram considerados estatisticamente significativos. Duas suposições foram feitas: 1) o resultado indica que o tipo de re-amostragem não foi adequado para os dados em análise; 2) a sensibilidade

do GARCH à mudança na base de dados devido à re-amostragem força a erros padrões mais elevados, o que reduz a significância dos parâmetros. Em estudos posteriores será necessário verificar se há literatura indicando a existência de um modelo mais adequado para o cálculo dos erros padrão ou uma forma de suavizar possível o impacto da filtragem da heterocedasticidade.

Seria interessante, adicionalmente, verificar em uma base de dados distinta, mais abrangente, se os resíduos do AR(1)-GARCH(1,1) aplicado aos dados do Peru são, de fato, livres de auto-correlações. Nesta monografia, o teste de Ljung & Box indicou que os dados não são auto-correlacionados, mas com um  $p$ -valor baixo (pág. 72). Apesar de a análise com resíduos i.i.d. ser bem mais acurada, é possível obter resultados minimamente descritivos com uma análise baseada em dados que não são i.i.d., mas são tratados como tal (Roch e Alegre, 2006). Assim, ainda que não se rejeitasse a auto-correlação para os dados do Peru, a estimação seria possível, embora menos precisa.

O presente estudo estimou uma estrutura de dependência estática entre os dados. No entanto, diversos estudos vêm empregando cópulas tempo-variantes para adequar os parâmetros à variação do contexto financeiro (ver, por exemplo, Tófoli et al. (2013), Jondeau e Rockinger (2006), Kenourgios et al. (2011), Wen et al. (2012)). Essa abordagem pode ser aplicada tanto a estudos que visem estudar o contágio como definido por Forbes e Rigobon (2000) (pág. 7), quanto a estudos da variação temporal da estrutura de dependência sem estar atrelados à análise e comparação de momentos de crise e de estabilidade.

Uma sugestão adicional é de que se teste, comparativamente, a performance das C- e D-vines. Embora haja prevalência de D-Vines nos estudos em finanças, os resultados encontrados por Brechmann e Schepsmeier (2013) ao comparar ambos modelos de vine cópulas indicam que cada um colabora com aspectos distintos para a compreensão da estrutura de dependência. Dessa forma, a literatura se beneficiaria de um estudo que investigasse mais a fundo a potencial contribuição desses modelos.



# Referências Bibliográficas

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., e Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics & Economics*, 44:182–198.
- ALADI (2015). Perguntas frequentes. <http://www.aladi.org/SitioAladi/preguntasFrecuentesP.html>. Acesso em: 17/10/2015.
- Aloui, R., Aïssa, M. S. B., e Nguyen, D. K. (2010). Global financial crisis, extreme interdependences, and contagion effects: The role of economic structure. Technical Report 2010/15, DEPOCEN Working Paper Series.
- ASEAN (2015). History - the founding of asean. <http://www.asean.org/asean/about-asean/history>. Acesso em: 17/10/2015.
- Associação Latino-Americana de Integração (2015). Indicadores sócio econômicos. <http://www.aladi.org/sitioALADI/indicadoresSocioeconomicosP.html>. Acesso em: 17/10/2015.
- Banco Mundial (2015). Countries and economies. <http://data.worldbank.org/country>. Acesso em 10/09/2015.
- Bedford, T. e Cooke, R. M. (2001a). Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. Technical report, Delft University of Technology.

- Bedford, T. e Cooke, R. M. (2001b). Vines - a new graphical model for dependent random variables. Technical report, Delft University of Technology.
- Brasil (2015). Saiba mais sobre o mercosul. <http://www.mercosul.gov.br/index.php/saiba-mais-sobre-o-mercosul>. Acesso em: 18/08/2015.
- Brechmann, E. C. e Schepsmeier, U. (2013). Modeling dependence with c- and d-vine copulas: The R package CDVine. *Journal of Statistical Software*, 52(3):1–27.
- Canela, M.-A. e Pedreira, E. (2012). Modelling dependence in latin american markets using copula functions. *Journal of Emerging Market Finance*, 11(3):231–270.
- Caporin, M. e McAleer, M. (2010). Do we really need both BEKK and DCC? a tale of two multivariate garch models. SSRN:<http://ssrn.com/abstract=1549167>. Acesso em 22/06/2015.
- CEPAL (2015). Panorama de la inserción internacional de américa latina y el caribe. Technical report, Organização das Nações Unidas.
- Comunidade Andina (2015). Reseña histórica. <http://www.asean.org/asean/about-asean/history>. Acesso em: 17/10/2015.
- Costa, P. H. S. e Baidya, T. K. N. (2001). Propriedades estatísticas das séries de retornos das principais ações brasileiras. *Pesquisa Operacional*, 21(1):61–87.
- Delatte, A.-L. e Lopez, C. (2013). Commodity and equity markets: Some stylized facts from a copula approach. *Journal of Banking and Finance*, 37:5346–5356.
- Divisão de Estatística da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação (2015a). Food and agricultural commodities production. [http://faostat3.fao.org/browse/rankings/commodities\\_by\\_country/E](http://faostat3.fao.org/browse/rankings/commodities_by_country/E). Acesso em: 28/09/2015.
- Divisão de Estatística da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação (2015b). Food and agricultural commodities production. [http://faostat3.fao.org/browse/rankings/commodities\\_by\\_country/E](http://faostat3.fao.org/browse/rankings/commodities_by_country/E). Acesso em: 28/09/2015.

- [fao.org/browse/rankings/commodities\\_by\\_country\\_imports/E](http://fao.org/browse/rankings/commodities_by_country_imports/E). Acesso em: 28/09/2015.
- Durand, M.-F., Martin, B., Placidi, D., e Törnquist-Chesnier, M. (2007). *Atlas de la Mondialisation*. Presses de Sciences Po, Paris, 1 edition.
- Forbes, K. e Rigobon, R. (2000). Contagion in latin america: Definitions, measurement, and policy implications. Technical Report 7885, NBER Working Paper Series.
- Fraztscher, M. (1999). What causes currency crises: Sunspots, contagion or fundamentals? Technical report, EUI Working Paper ECO N. 99/39.
- Gordeev, V. A., Knyazev, A. G., e Shemyakin, A. E. (2012). Selections of copula model for inter-market dependence. *Model Assisted Statistics and Applications*, 7:315–325.
- Hall, P., Horowitz, J. L., e Jing, B.-Y. (1995). On blocking rules for the bootstrap with dependent data. *Bioetrika*, 82:561–74.
- Hofmann, M. e Czado, C. (2011). Assessing the var of a portfolio using d-vine copula based multivariate garch models. Disponível em: <https://mediatum.ub.tum.de/doc/1079206/1079206.pdf>.
- Hu, L. (2006). Dependence patterns across financial markets: A mixed copula approach. *Applied Financial Economics*, 16:717–729.
- James, B. R. (2011). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. IMPA, Rio de Janeiro, 3. edition.
- Joe, H. (1996). Families of m-variate distributions with givens margins and  $m(m-1)/2$  bivariate dependence parameters. *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, 28:120–141.
- Joe, H. e Xu, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical report, University of British Columbia.

- Jondeau, E. e Rockinger, M. (2006). The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of International Money and Finance*, 25:827–853.
- Kenourgios, D., Samitas, A., e Paltalidis, N. (2011). Financial crises and stock market contagion in a multivariate time-varying asymmetric framework. *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, 21:92–106.
- Kitamura, Y. (2011). The impact of order flow on the foreign exchange market: A copula approach. *Asia Pacific Financial Markets*, 18:1–31.
- Lima, F. G. (2014). *Análise de Riscos*. Ed. Atlas.
- Liu, Z. e Wen, F. (2009). A copula-based correlation measure and its application in chinese stock market. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 8(4):787–801.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Maya, R. A. L., Gomez-Gonzalez, J. E., e Velandia, L. F. M. (2015). Latin american exchange rate dependencies: A regular vine copula approach. *Contemporary Economic Policy*, 33(3):535–549.
- Mirus, R. e Rylska, N. (2001). Economic integration: Free trade areas vs. customs unions. Technical report, Western Centre for Economic Research.
- Nelsen, R. B. (2007). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer, 2. edition.
- Nikoloulopoulos, A. K., Joe, H., e Li, H. (2010). Vine copulas with asymmetric tail dependence and applications to financial return data. Disponível em: [http://www.math.wsu.edu/math/faculty/lih/Asymmetry-Aris\\_Joe\\_Li-R2.pdf](http://www.math.wsu.edu/math/faculty/lih/Asymmetry-Aris_Joe_Li-R2.pdf).

- Ning, C. (2010). Dependence structure between the equity market and the foreign exchange market - a copula approach. *Journal of International Money and Finance*, 29:743–759.
- Obstfeld, M. e Taylor, A. M. (2002). Globalization and capital markets. Technical Report 8846, NBER Working Paper Series.
- Ozun, A. e Cifter, A. (2007). Portfolio value-at-risk with time-varying copula: Evidence from the americas. Technical report, Munich Personal RePEc Archive.
- R Core Team (2015). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Righi, M. B. e Ceretta, P. S. (2011). Extreme values dependence of risk in latin american markets. *Economics Bulletin*, 31(4):2903–2914.
- Roch, O. e Alegre, A. (2006). Testing the bivariate distribution of daily equity returns using copulas. an application to the spanish stock market. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51:1312–1329.
- Rodriguez, J. C. (2007). Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, 14:401–423.
- Solnik, B. H. (1995). Why not diversify internationally rather than domestically. *Financial Analysts Journal*, 51:89–94.
- Sukcharoen, K., Zohrabayan, T., Leatham, D., e Wu, X. (2014). Interdependence of oil prices and stock market indices: A copula approach. *Energy Economics*, 44:331–339.
- Tófoli, P. V., Ziegelmann, F. A., e Silva Filho, O. C. (2013). Dynamic d-vine copula model with applications to value-at-risk (var). Apresentado no 7th CSDA International Conference on Computational and Financial Econometrics.

- Trivedi, P. K. e Zimmer, D. M. (2005). *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. now Publishers Inc., PO Box 1024, Hanover, MA 02339.
- União Européia (2015). A história da união européia. [http://europa.eu/about-eu/eu-history/index\\_pt.htm](http://europa.eu/about-eu/eu-history/index_pt.htm). Acesso em: 17/10/2015.
- U.S. Department of Homeland Security (2015). North american free trade agreement (nafta). <http://www.cbp.gov/trade/nafta>. Acesso em: 17/10/2015.
- Wen, X., Wei, Y., e Huang, D. (2012). Measuring contagion between energy market and stock market during financial crisis: A coppula approach. *Energy Economics*, 34:1435–1446.
- Wuertz, D., with contribution from Michal Miklovic, Y. C., Boudt, C., Chausse, P., e others (2013). *fGarch: Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modeling*. R package version 3010.82.
- Yahoo Finance (2015). <http://finance.yahoo.com/>. Acesso em: 08/08/2015.

Apêndice A

Produção e Exportação Agrícola do  
Mercosul

Tabela A.1: Dados de Produção Agrícola dos Países do Mercosul (2013)

País	Produção Anual (t)			
	Soja	Cana de Açúcar	Carne Bovina	Milho
Brasil	81.724.477	768.090.444	9.832.874	80.273.172
Argentina	49.306.201	23.700.000	2.821.700	32.119.211
Venezuela	39.024	7.339.634	358.594	ND
Colômbia	85.442	34.876.332	897.835	ND
Chile	ND	ND	206.330	ND
Peru	ND	10.992.240	190.563	1.670.470
Equador	87.000	7.158.265	260.454	1.542.954
Uruguai	3.200.000	375.000	540.811	692.600
Bolívia	2.347.282	8.065.889	217.601	1.063.696
Paraguai	9.086.000	5.544.797	373.648	4.120.000
Suriname	10	120.100	1.627	ND
Guiana	ND	2.460.171	2.258	ND
Total:				
Estados Parte	172.155.702	805.049.875	13.927.627	117.204.983
Participação	62,37%	42,12%	21,98%	11,51%
Mercosul	174.675.436	868.722.872	15.704.295	121.482.103
Participação	63,28%	45,45%	24,79%	11,93%
Mundial	276.032.362	1.911.179.775	63.361.528	1.018.111.958

t: toneladas; ND: dado não disponível.

Tabela elaborada pela autora com dados da [Divisão de Estatística da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação \(2015a\)](#) sobre as 50 *commodities* mais produzidas em cada país e no mundo.



Tabela A.2: Dados de Exportação Agrícola dos Países do Mercosul (2012)

País	Exportação Anual (t)				
	Soja	Açúcar Ref.	Açúcar Não-Ref.	Carne Bovina	Milho
Brasil	32.468.028	4.870.304	19.147.138	937.986	19.801.939
Argentina	6.158.407	130.616	100.056	111.419	17.855.374
Venezuela	340	ND	ND	ND	20
Colômbia	ND	602.711	150.596	7.010	1.537
Chile	ND	ND	ND	ND	81.681
Peru	ND	8.435	52.990	ND	8.658
Equador	ND	ND	13.011	ND	2.770
Uruguai	2.563.552	ND	ND	239.653	201.964
Bolívia	298.980	374.486	7.395	497	60.801
Paraguai	3.161.711	ND	60.148	177.962	2.476.996
Suriname	ND	17	ND	ND	ND
Guiana	ND	ND	281.648	ND	ND
Total:					
Estados Parte	44.352.038	5.000.920	18.247.194	1.467.020	40.336.293
Participação	45,77%	22,32%	81,42%	28,97%	33,51%
Mercosul	44.651.018	5.649.569	18.748.840	1.474.527	40.491.740
Participação	46,08%	25,21%	83,66%	29,12%	33,63%
Mundial	96.897.995	22.409.863	34.893.733	5.064.233	120.387.138

t: toneladas; Ref.: refinado; ND: dado não disponível.

Tabela elaborada pela autora com dados da [Divisão de Estatística da Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação \(2015b\)](#) sobre as 50 *commodities* mais exportadas por cada país e no mundo.

## Apêndice B

# Distribuição da Função de Distribuição Acumulada

**Teorema 4 (Distribuição da Função de Distribuição Acumulada)** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com distribuição acumulada  $F_X(x)$  e defina a variável aleatória  $Y = F_X(X)$ . Então  $Y$  tem distribuição uniforme:  $Y \sim U(0,1)$ . Assim,  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ , para  $0 \leq y \leq 1$  e a função de densidade de probabilidade  $f_Y(y) = 1$ .  $\diamond$

### Prova

Seja  $Y = F_X(X)$ , temos para  $0 \leq y \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(F_X(X) \leq y) \\ &= P(F_x^{-1}(F_X(X)) \leq F_x^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq F_x^{-1}(y)) \\ &= F_x(F_x^{-1}(y)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Derivando  $F_Y(y)$  em relação a  $y$ , obtemos

$$\frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}y = 1.$$

Logo, temos que para  $0 \leq y \leq 1$  a distribuição de  $Y \sim U(0,1)$ .

## Apêndice C

# Teorema e Corolário de Sklar em n-Dimensões

O Teorema de Sklar (Teorema 1), assim como o Corolário de Sklar (Corolário 1) estão estendidos para o caso multivariado a seguir.

**Teorema 5 (Teorema de Sklar em  $n$ -dimensões)** Sejam  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variáveis aleatórias com função de distribuição  $F_1, \dots, F_n$ , respectivamente, e função de distribuição conjunta  $F$ . Então existe uma cópula  $C$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Se  $F_1, \dots, F_n$  são todas contínuas, então  $C$  é única; caso contrário,  $C$  é unicamente determinada em  $Im(F_1) \times Im(F_2) \times \dots \times Im(F_n)$ . Reciprocamente, se  $C$  é uma  $n$ -cópula e  $F_1, \dots, F_n$  são funções de distribuição, então a função  $F$  definida por 5 é uma função de distribuição conjunta  $n$ -dimensional com marginais  $F_1, \dots, F_n$ .  $\square$

O corolário de Sklar para o caso multivariado é o seguinte.

**Corolário 2 (Corolário de Sklar em  $n$ -dimensões)** Seja  $F$  uma função de distri-

buição conjunta contínua com marginais  $F_1, \dots, F_n$ . Sejam  $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$  respectivamente as quase-inversas de  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , respectivamente. Então para qualquer  $u \in I^n$ ,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

□

## Apêndice D

# Construção de uma D-vine

Para facilitar a compreensão, denotamos  $f_{j|v}$  a função de densidade probabilidade condicional e  $F_{j|v}$  a função de probabilidade acumulada condicional de  $X_j$  dado  $X_v := (X_{j_1}, \dots, X_{j_n})$  para os índices  $v = \{j_1, \dots, j_n\}$ , respectivamente. Índices da forma  $v = i, i+1, \dots, j$  são denotados  $i : j$ . Assim,  $f_{1:n}$ ,  $C_{1:n}$ ,  $c_{1:n}$  são a função de densidade, a cópula e a densidade conjunta de variáveis que vão de 1 a  $n$ .

Conforme descrevem [Hofmann e Czado \(2011\)](#), D-vine Cópulas são construídas por intermédio dos seguintes passos:

1. decompor  $f_{1:n}$  como

$$f_{1:n}(x_{1:n}) = \left[ \prod_{j=2}^n f_{j|1:(j-1)}(x_j|x_{1:j-1}) \right] f_1(x_1); \quad (\text{D.1})$$

2. aplicar [D.1](#) à distribuição condicional de  $X_1$  e  $X_j$  dado  $X_{2:(j-1)}$ . Dessa forma, podemos expressar cada fator em [D.1](#) como

$$f_{j|1:(j-1)}(x_j|1 : j-1) = c_{1j|2:(j-1)}(F_{1|2:(j-1)}(x_1|x_{2:(j-1)}), F_{j|2:(j-1)}(x_j|x_{2:(j-1)})) f_{j|2:(j-1)}(x_j|x_{2:(j-1)}); \quad (\text{D.2})$$

3. para obter a tratabilidade do modelo, assume-se que a cópula correspondente à distribuição conjunta de  $X_1$  e  $X_j$  dado  $X_{2:(j-1)}$  não depende do valor condicional  $x_{2:(j-1)}$ . Assim, D.2 pode ser reescrita:

$$f_{j|1:(j-1)}(x_j|1:j-1) = \left[ \prod_{k=1}^{j-2} c_{kj|(k+1):(j-1)} \left( F_{k|(k+1):(j-1)}(x_k|x_{(k+1):(j-1)}), F_{j|(k+1):(j-1)}(x_j|x_{(k+1):(j-1)}) \right) \right] c_{j-1,j}(F_{j-1}(x_{j-1}), F_j(x_j)) f_j(x_j); \quad (\text{D.3})$$

4. com base em D.3, podemos reescrever D.1 como

$$f_{1:n}(x_{1:n}) = \left[ \prod_{j=2}^n \prod_{k=1}^{j-1} c_{kj|(k+1):(j-1)} \left( F_{k|(k+1):(j-1)}(x_k|x_{(k+1):(j-1)}), F_{j|(k+1):(j-1)}(x_j|x_{(k+1):(j-1)}) \right) \right] \left[ \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \right]. \quad (\text{D.4})$$

O lado direito da equação D.4 é denominado distribuição D-vine com densidades marginais  $f_i$  e densidades de cópulas par-a-par  $c_{kj|(k+1):(j-1)}$ , para  $j = 2, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, j-1$ .

As funções de distribuição acumulada condicionais em D.4 podem ser encontradas recursivamente pela equação D.5 abaixo.

$$F_{j|v}(x_j|x_v) = \frac{\partial C_{kj|v-k}(F_{k|v-k}(x_k|x_{v-k}), F_{j|v-k}(x_j|x_{v-k}))}{\partial F_{k|v-k}(x_k|x_{v-k})}, \quad (\text{D.5})$$

onde  $v = \{k, j_1, \dots, j_n\}$ ,  $v-k = \{j_1, \dots, j_n\}$  e  $k < j$ .

## Apêndice E

# Expressão Geral de uma D-vine com 5 Dimensões

Seja a densidade em 5-dimensional decomposta como:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1, x_2)f(x_4|x_1, x_2, x_3)f(x_5|x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (\text{E.1})$$

Temos que:

$$f(x_2|x_1) = c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))f(x_2); \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} f(x_3|x_1, x_2) &= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))f(x_3|x_2) \\ &= c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3))f(x_2); \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$



$$\begin{aligned}
f(x_4|x_1,x_2,x_3) &= c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2,x_3),F(x_4|x_2,x_3))f(x_4|x_2,x_3) \\
&= c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2,x_3),F(x_4|x_2,x_3))c_{2,4|3}(F(x_2|x_3)F(x_4|x_3))f(x_4|x_3) \\
&= c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2,x_3),F(x_4|x_2,x_3))c_{2,4|3}(F(x_2|x_3)F(x_4|x_3))c_{3,4}(F(x_3),F(x_4)) \\
&\quad f(x_4); \text{ e}
\end{aligned} \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned}
f(x_5|x_1,x_2,x_3,x_4) &= c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2,x_3,x_4),F(x_5|x_2,x_3,x_4))f(x_5|x_2,x_3,x_4) \\
&= c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2,x_3,x_4),F(x_5|x_2,x_3,x_4))c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3,x_4),F(x_5|x_3,x_4)) \\
&\quad f(x_5|x_3,x_4) \\
&= c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2,x_3,x_4),F(x_5|x_2,x_3,x_4))c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3,x_4),F(x_5|x_3,x_4)) \\
&\quad c_{3,5|4}(F(x_3|x_4),F(x_5|x_4))f(x_5|x_4) \\
&= c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2,x_3,x_4),F(x_5|x_2,x_3,x_4))c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3,x_4),F(x_5|x_3,x_4)) \\
&\quad c_{3,5|4}(F(x_3|x_4),F(x_5|x_4))c_{4,5}(F(x_4),F(x_5))f(x_5).
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Substituindo as equações [E.2](#), [E.3](#), [E.4](#), [E.5](#) na equação [E.1](#), obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1, x_2)f(x_4|x_1, x_2, x_3)f(x_5|x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= f(x_1) \times c_{1,2}(F(x_1), F(x_2))f(x_2) \\
&\quad \times c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3))f(x_2) \\
&\quad \times c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3))c_{2,4|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) \\
&\quad \times c_{3,4}(F(x_3), F(x_4))f(x_4) \\
&\quad \times c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2, x_3, x_4), F(x_5|x_2, x_3, x_4))c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3, x_4), F(x_5|x_3, x_4)) \\
&\quad \times c_{3,5|4}(F(x_3|x_4), F(x_5|x_4))c_{4,5}(F(x_4), F(x_5))f(x_5).
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Reorganizando os elementos na equação E.6, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5) \\
&\quad \times c_{1,2}(u_1, u_2)c_{2,3}(u_2, u_3)c_{3,4}(u_3, u_4)c_{4,5}(u_4, u_5) \\
&\quad \times c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{2,4|3}(F(x_2|x_3), F(x_4|x_3)) \\
&\quad \times c_{3,5|4}(F(x_3|x_4), F(x_5|x_4)) \\
&\quad \times c_{1,4|2,3}(F(x_1|x_2, x_3), F(x_4|x_2, x_3)) \\
&\quad \times c_{2,5|3,4}(F(x_2|x_3, x_4), F(x_5|x_3, x_4)) \\
&\quad \times c_{1,5|2,3,4}(F(x_1|x_2, x_3, x_4), F(x_5|x_2, x_3, x_4)),
\end{aligned} \tag{E.7}$$

como queríamos demonstrar.

## Apêndice F

# Testes Complementares de Análise dos Dados

As Tabelas [F.1](#), [F.2](#) e [F.3](#) foram confeccionadas com análises do banco de dados completo. Já a Tabela [F.4](#) contém dados extraídos do banco de dados padronizado com 2.624 observações de cada índice.

Tabela F.1: Teste de ADF dos Retornos

Índice	Estatística	Defasagem	<i>p</i> -Valor
IPSA	-13,526*	14	0,01
S&P500	-15,093*	14	0,01
Ibovespa	-14,331*	14	0,01
Merval	-13,517*	14	0,01
Peru General	-12,393*	14	0,01

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-2}$ .  
Hipótese alternativa: dados são estacionários.

Tabela F.2: Teste de Ljung &amp; Box dos Retornos

Índice	$\chi^2$	Defasagem	$p$ -Valor
IPSA	65,923*	1	$4,441 \times 10^{-16}$
S&P500	30,437*	1	$3,448 \times 10^{-8}$
Ibovespa	0,22847	1	0,6327
Merval	4,2907	1	0,03832
Peru General	98,023*	1	$2,2 \times 10^{-16}$

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-3}$ .  
Hipótese alternativa: dados são auto-correlacionados.

Tabela F.3: Teste de Ljung &amp; Box dos Resíduos (AR-GARCH)

Índice	$\chi^2$	Defasagem	P-Valor
IPSA	1,8156	1	0,1778
S&P500	0,0025173	1	0,96
Ibovespa	0,27149	1	0,6023
Merval	1,9741	1	0,16
Peru General	6,1212	1	0,01336

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-3}$ .  
Hipótese alternativa: dados são auto-correlacionados.  
Tabela confeccionada com os dados obtidos após emprego do AR(1)-GARCH(1,1).

Tabela F.4: Teste de Ljung &amp; Box dos Resíduos (GARCH)

Índice	$\chi^2$	Defasagem	P-Valor
IPSA	61,506*	1	$4,441 \times 10^{-15}$
S&P500	7,6576	1	0,01279
Ibovespa	0,17843	1	0,6727
Merval	4,8332	1	0,02792
Peru General	100,21*	1	$< 2,2 \times 10^{-16}$

\* valores com alto nível de significância - de ordem inferior a  $10^{-3}$ .  
Hipótese alternativa: dados são auto-correlacionados.  
Tabela confeccionada com os dados obtidos após emprego do GARCH(1,1) sobre as 2.624 observações finais.